

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES -SIDI BEL ABBES-
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS
LABORATOIRE DES MATERIAUX & HYDROLOGIE



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **structures et matériaux**

Présentée par: **BENNEDJADI Mimoun**

Sujet de thèse

**ANALYSE DU FLAMBEMENT DES PLAQUES NON-HOMOGENE
EPAISSES SUR LES FONDATIONS VISCO-ELASTIQUE**

Soutenu le devant le Jury composé de :

M^f. BOURADA Mohamed	Professeur	UDL-SBA	Président
M^f. CHIKH Abdelbaki	Professeur	U.TIARET	Directeur de thèse
M^f. TOUNSI. Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Co-directeur de thèse
M^f. BENYOUCEF Samir	Professeur	UDL-SBA	Examineur
M^f. YOUZRA Hadj	Professeur	U.MASCARA	Examineur
M^{m^e}. ATTIA Amina	M.C.A	U. D'AIN TEMOUCHENT	Examineur

Année universitaire 2023/2024

Dédicace

Je dédie cette thèse :

À la mémoire de mon père.

À ma mère, ma sœur, mes frères.

À ma femme.

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

*Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements après mon Dieu à mon directeur de thèse, Monsieur le professeur **CHIKH AbdElbaki**, pour la confiance et l'attention qu'il ma offertes tout au long de ce travail, son sens de la motivation et son aide pour finir ce travail.*

*J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, professeur à l'université DJILLALI Liabes de Sidi Bel Abbes, de m'avoir confié un sujet prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur **BOURADA Mohamed**, Professeur à l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, qui m'a accueilli dans son laboratoire des matériaux et hydrologie.*

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux membres de jury :

- Professeur **BENYOUCEF Samir** de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes.*
- Professeur **YOUZRA Hadj** de l'Université de Mascara.*
- Docteur **ATTIA Amina** de l'Université D'AIN TEMOUCHENT.*

Je voudrais adresser mes francs remerciements envers mes collègues du laboratoire LMH.

Sommaire

Liste des figures	06
Liste des tableaux	08
Liste des notations	09
Résumé	11
Abstract	12
ملخص	13
Introduction générale	14

Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites et les FGM

I.1. Introduction	19
I.2. Les Composants du Matériau Composite:	20
I.2.1- Le Renfort (ou Bien la Fibre).....	20
I.2.2- La Matrice.....	25
I.2.3 - Les Charges.....	26
I.3. L'aspect des Matériaux Composites	27
I.3.1- En Monocouches	27
I.3.2- Stratifiés.....	27
I.3.3- Sandwichs.....	28
I.4. Avantages et inconvénient des matériaux composites	29
I.5. Les domaines d'application des composites.....	29
I.6. Les matériaux fonctionnellement gradués	33
I.6.1. Propriétés physiques et mécaniques des FGM	34
I.7. Propriétés matérielles effectives d'un matériau en FGM	36
I.8. Lois régissant la variation des propriétés des plaques en FGM.....	37
I.9. Domaines d'application des matériaux fonctionnellement gradués	42
I.10. Conclusion	44

Chapitre II : Théories Des Plaques

II.1. Introduction	46
II.2. Différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle.....	46
II.2.1. Approche monocouche équivalente.....	47
II.2.2. Approche par couches	53
II.2.3. Approche par développement asymptotique	57
II.3. Conclusion	57

Chapitre III : Le phénomène Du Flambement

III.1. Introduction	59
III.2. Définition de la stabilité	59
III.3. Méthodes d'analyse de la stabilité.....	60
III.4. Les types des flambement	60
III.4.1. Flambement thermique	60
III.4.2. Flambement mécanique	61
III.4.3. Flambement des plaques.....	61
III.5. Approche du Flambement	61
III.6. Plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotes	62
III.7. Modes du flambement des plaques	63
III.8. L'interaction entre les modes de flambement	63
III.9. Quelques exemples sur le flambement	64
III.9.1. Flambement d'une plaque raidie sous compression longitudinale et pression hydrostatique	64
III.9.2. Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson.....	65
III.9.3. Ruine locale d'un profil creux rectangulaire	66
III.9.4. Voilement local d'une semelle de poutre	66
III.9.5. Flambement d'une coque cylindrique comprimée	67
III.9.6. Flambement de Réservoir	67
III.10. Conclusion	68

CHAPITRE IV : Formulation mathématique de la théorie des plaques utilisée

IV.1. Introduction	70
IV.2. Modèles de fondations	70
IV.2.1. Model de Winkler.....	70
IV.2.2. Model de Pasternak.....	71
IV.2.3 Model Visco-Winkler-Pasternak.....	72
IV.3. Formulation théorique	74
IV.3.1 Modélisation d'un matériau fonctionnellement gradué	74
IV.3.2 Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement à quatre inconnues.....	75
IV.3.2.1 Cinématique et équations constitutives.....	75
IV.3.2.2 Équations gouvernantes	79
IV.3.2.3 Equations du mouvement en termes de déplacements.....	81
IV.4 Solutions exactes pour les plaques sandwich FGM	81
IV.5 Conclusion.....	84

CHAPITRE V : Résultats numériques et discussion

V.1. Introduction	86
V.2. Résultats numériques et discussion	86
V.3. Conclusion	99
Conclusion Générale.....	100
Références Bibliographiques.....	101

Liste des figures

Chapitre I: *Généralités sur les matériaux composites et les FGM*

Figure: I.1- Les Différents Types de Renforts [Bahlouli, 1993].....	21
Figure: I.2- Ensemble de Fibres de Verre.....	22
Figure: I.3- Tissu de Fibre de Carbone.....	22
Figure: I.4- Fibres d'Aramide.....	23
Figure: I.5 - Les Différents Types de Matrices. [Bahlouli, 1993].....	25
Figure: I.6- Matériau Composite Monocouche. [Bahlouli, 1993].....	27
Figure: I.7- Matériau Composite Stratifié.....	27
Figure: I.8- Matériau Composite Stratifié 2s.....	28
Figure: I.9- Matériau Composite Sandwich. [Bahlouli, 1993].....	28
Figure I.10 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	34
Figure I.11: Modèles analytiques pour une couche en FGM.....	36
Figure I.12: Les dimensions de la plaque FGM.....	37
Figure I.13: La variation de la fraction volumique pour une plaque P-FGM.....	38
Figure I.14: La variation de la fraction volumique pour une plaque S-FGM.....	40
Figure I.15: La variation du module d'Young de la plaque E-FGM.....	41
Figure I.16: Les principaux domaines d'application des FGM.....	43

Chapitre II : Théories Des Plaques

Figure II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.....	48
Figure II.2: Cinématique de Reissner-Mindlin.....	49
Figure II.3: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	50
Figure II.4: Champs de déplacement des couches discrètes [Nguyen.V.T_2004 ^[46]].....	54
Figure II.5: Champs de déplacement zigzag du 1 ^{er} ordre [Nguyen.V.T_2004 ^[46]].....	55
Figure II.6: Champs de déplacement zigzag d'ordre supérieur. [Nguyen.V.T_2004 ^[46]].....	56

Chapitre III : Le phénomène Du Flambement

Figure III.1 : comportement charge-déformation de colonne soumis à une compression axiale ; (b) courbe P- Δ , (c) courbe P-y	60
Figure III.2 : Flambement d'une plaque.....	62
Figure III.3 :Flambage de la plaque sous une compression uni-axial.....	63
Figure III.4 :Flambement d'une plaque raidie.....	65
Figure III.5 : Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson.....	65
Figure III.6 :Ruine locale d'un profil creux rectangulaire.....	66
Figure III.7 : Voilement local d'une semelle de poutre.....	66
Figure III.8 : Flambement d'une coque cylindrique comprimée.....	67
Figure III.9 : Réservoir flambé après séisme (mode en pointe de diamant).....	67

CHAPITRE IV : Formulation mathématique de la théorie des plaques utilisée

Figure IV.1 : Hypothèse de Winkler [Winkler_1867 ^[17]].....	70
Figure IV.2 : Approximation de Winkler [Winkler_1867 ^[17]].....	71
Figure IV.3 : Hypothèse de Pasternak [Pasternak_1954 ^[16]].....	72
Figure IV.4 : modèle Visco-Winkler-Pasternak[Kerr_1964[18]].....	72
Figure IV.5 :modèle Visco-Winkler-Pasternak [Zenkour et al_2016 [114]].....	73
Figure. IV.7 Plaque rectangulaire soumise à des forces dans le plan (Neves et al. 2012).....	74

CHAPITRE V : Résultats numériques et discussion

FigureV.1 Variation du module d'Young à travers l'épaisseur de plaque sandwich symétriques pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p : (a) La plaque sandwich EGM (1-0-1), (b) La plaque sandwich (1-1- 1) Plaque sandwich EGM,(c) La plaque sandwich EGM (1-2-1) et (d) La plaque sandwich EGM (1-3-1).....	87
FigureV.2 La variation du flambement critique non dimensionnel \bar{N} en fonction de l'indice de gradient k pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement des plaques carrées en sandwich FGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites.....	92
FigureV.3 Flambement critique \bar{N} en fonction du rapport a/h des plaques carrées en sandwich FGM (1-1-1) reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement.....	93

FigureV.4 Effet du coefficient d'amortissement pour diverses valeurs du paramètre d'inhomogénéité k sur le flambement critique adimensionnel \bar{N} des plaques carrées en sandwich (1-1-1) FGM avec diverses conditions aux limites.....94

FigureV.5 Charge critique de flambement \bar{N} en fonction du rapport côté/épaisseur a/h et différents types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec différentes conditions aux limites.....95

FigureV.6 Flambement critique \bar{N} en fonction du gradient d'indice k et de divers types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites.....96

FigureV.7 Flambement critique \bar{N} en fonction du coefficient d'amortissement et de divers types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites.....97

FigureV.8 Flambement critique \bar{N} en fonction des différentes valeurs de ζ et différents types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec différentes conditions aux limites.....98

Liste des tableaux

Chapitre I: *Généralités sur les matériaux composites et les FGM*

Tableau: I.1- Les Propriétés Mécaniques de Différentes Fibres [Bahlouli, 1993].....25

Tableau: I.2- Les Caractéristiques des Matrices Thermodurcissables. [Bahlouli, 1993].....27

CHAPITRE IV : Formulation mathématique de la théorie des plaques utilisée

Tableau IV.1 valeur de A' , B' , k_1 et k_2 pour différentes conditions aux limites.....78

CHAPITRE V : Résultats numériques et discussion

Tableau V.1 Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ 87

Tableau V.2 Comparaison de la charge critique de flambement \bar{N} de plaques carrées sandwich EGM simplement appuyées ($k=1,5$) reposant sur des fondations élastiques de Visco-Pasternak.....89

Tableau V.3 Comparaison de la charge critique de flambement \bar{N} de (1- 1-1) plaques sandwich EGM avec diverses conditions aux limites ($b/a = 2, \bar{K}_w = \bar{K}_s = 10$).....91

Liste Des Notations

$E(z)$ Module d'Young en fonction de « z »

E_m Module d'Young du métal

E_c Module d'Young de céramique

$G(z)$ Module de cisaillement en fonction de « z »

$\nu(z)$ Coefficient de Poisson en fonction de « z »

ν Coefficient de Poisson

$\rho(z)$ La densité du matériau en fonction de « z »

ρ_m La densité du métal

ρ_c La densité de la céramique

$V(z)$ Fraction volumique

k indice de fraction volumique

a Longueur de la plaque

b Largeur de la plaque

h Épaisseur de la plaque

u_0, v_0, w_0 Les composantes du champ de déplacement au plan moyen de la plaque

u_b, v_b, w_b Les composantes du champ de déplacement due à la flexion

u_s, v_s, w_s Les composantes du champ de déplacement due au cisaillement

u, v, w Les déplacements dans les directions x, y, z .

w_{st} La composante de déplacement due à l'effet d'étirement

φ_x, φ_y Les rotations autour des axes x et y

$\Psi(z)$ fonction de cisaillement transverse

$f(z)$ fonction de cisaillement transverse

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Contraintes normales

(x) [N/m] la charge linéique s'appliquant sur le radier.

Gp le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m].

kp le module de réaction du sol [Pa/m] et (x) la déformée du terrain.

A l'aire de la surface supérieure

\bar{N}_{xy} et \bar{N}_{yx} les forces de cisaillement réparties parallèlement aux bords $x = 0$ et $y = 0$

k_{sx} et k_{sy} les modules de cisaillement du sol de fondation (rigidité de la fondation de la couche de cisaillement)

c_t le coefficient d'amortissement du milieu viscoélastique.

k_w le module de réaction du sol de fondation (coefficient élastique de la fondation)

U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et Z_{mn} sont des coefficients arbitraires à déterminer.

\bar{N} Les charges critiques de flambement

τ_{xz} , τ_{yz} Contraintes de cisaillement

ε_x , ε_y , ε_z Déformation dans la direction x , y et z

γ_{xz} , γ_{yz} Déformations de distorsion

δu , δv , δw Champ virtuel de déplacement

δU l'énergie de déformation virtuelle

δU_F l'énergie de déformation supplémentaire

δV travail virtuel

δK Variation de l'énergie cinétique.

$\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$, $\delta \varepsilon_z$ Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta \gamma_{xz}$, $\delta \gamma_{yz}$ Champ de déformation transversal virtuel

N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} , N_{yx} Efforts normaux

∂ Dérivée partielle

i, j, l et m Nombres naturels.

A_{ij} Termes de rigidité de la matrice de membrane

B_{ij} Termes de rigidité de la matrice de couplage

D_{ij} Termes de la matrice de flexion

A_{ij}^s , B_{ij}^s , D_{ij}^s , H_{ij}^s Termes de la matrice de rigidité

(m, n) Nième mode propre

$q(x,y)$ Charge transversale

(I_i, J_i, K_i) Inerties de masse

$\{ \}$ Vecteur colonne

$[]$ Matrice

Résumé

Dans le présent travail, une théorie simple et raffinée de la déformation par cisaillement est utilisée pour analyser l'effet de la fondation viscoélastique sur la réponse au flambement des plaques sandwich fonctionnellement graduées sous diverses conditions aux limites. La théorie proposée comprend des variables intégrales indéterminées cinématiques avec seulement quatre paramètres généralisés, dans lesquelles aucun facteur de correction de cisaillement n'est utilisé. La fondation de visco-Pasternak est prise en compte en ajoutant l'influence de l'amortissement au modèle de fondation habituel qui se caractérise par le module linéaire de Winkler et le module de fondation de Pasternak. Les quatre équations déterminantes pour les plaques sandwich FGM sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel. Pour résoudre le problème de flambement, l'approche de Galerkin est utilisée pour les plaques sandwich FGM pour diverses conditions aux limites. Les solutions analytiques pour les charges critiques de flambement de plusieurs types de plaques sandwich fortement graduées reposant sur des fondations visco-Pasternak sous diverses conditions aux limites sont présentées. Certains résultats numériques sont présentés pour indiquer les effets du paramètre d'inhomogénéité, du type de fondation élastique et du coefficient d'amortissement de la fondation sur les charges critiques de flambement.

Mots-clés : flambage ; matériaux classés fonctionnellement ; l'approche de Galerkin ; théorie raffinée de la déformation par cisaillement ; assiettes à sandwichs; diverses conditions aux limites; fondations visco-Pasternak

Abstract

In the present work, a simple and refined shear deformation theory is used to analyze the effect of visco-elastic foundation on the buckling response of exponentially-gradient sandwich plates under various boundary conditions. The proposed theory includes indeterminate integral variables kinematic with only four generalized parameters, in which no shear correction factor is used. The visco-Pasternak's foundation is taken into account by adding the influence of damping to the usual foundation model which characterized by the linear Winkler's modulus and Pasternak's foundation modulus. The four governing equations for FGM sandwich plates are derived by employing principle of virtual work. To solve the buckling problem, Galerkin's approach is utilized for FGM sandwich plates for various boundary conditions. The analytical solutions for critical buckling loads of several types of powerly graded sandwich plates resting on visco-Pasternak foundations under various boundary conditions are presented. Some numerical results are presented to indicate the effects of inhomogeneity parameter, elastic foundation type, and damping coefficient of the foundation, on the critical buckling loads.

Keywords: buckling; functionally graded materials; Galerkin's approach; refined shear deformation theory; sandwich plates; various boundary conditions; visco-Pasternak foundations

ملخص

في العمل الحالي ، يتم استخدام نظرية تشوه القص البسيطة والمكررة لتحليل تأثير الأساس المرن اللزج على استجابة الالتواء لألواح الساندويتش ذات التدرج الأسي في ظل ظروف حدية مختلفة . تتضمن النظرية المقترحة متغيرات حركية متكاملة غير محددة مع أربعة معاملات معممة فقط ، حيث لا يتم استخدام عامل تصحيح القص. أخذ أساس Visco-Pasternak في الاعتبار من خلال إضافة تأثير التخميد إلى نموذج الأساس المعتاد الذي يتميز بمعامل Winkler الخطي ومعامل أساس Pasternak. تُشتق المعادلات الأربعة الحاكمة لألواح الساندويتش من خلال استخدام مبدأ العمل الافتراضي. حل مشكلة الانحناء ، يتم استخدام نهج Galerkin لألواح الساندويتش لظروف حدية مختلفة. تم تقديم الحلول التحليلية لأحمال الالتواء الحرجة لأنواع عديدة من ألواح الساندويتش المتدرجة بقوة والتي تستقر على أسس فيسكو-باسترناك في ظل ظروف حدية مختلفة. تم تقديم بعض النتائج العددية للإشارة إلى تأثيرات معامل عدم التجانس ونوع الأساس المرن ومعامل التخميد للأساس على أحمال الالتواء الحرجة.

كلمات مفتاحيه: الانبعاج ؛ مواد متدرجة وظيفيا نهج Galerkin ؛ نظرية تشوه القص المكرر ؛ لوحات شطيرة شروط الحدود المختلفة أسس visco-Pasternak

Introduction générale

Au cours de ces dernières années, l'industrie et l'usage mondial des matériaux composites ont bénéficié d'une croissance rapide et régulière, soutenue en particulier par la diversité des applications. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Mais l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ") [1].

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont reçu une attention considérable dans de nombreuses applications d'ingénierie telles que les structures d'ingénierie automobile, aérospatiale, civile et mécanique (Karami et Janghorban 2020, Shahmohammadi et al. 2020, Sadoughifar et al. 2020, Abdelrahman 2020, Bouiadjra et al.2020, Arefi et Zur 2020, Dehsaraji et al. 2020, Feng et al. 2020)[2] depuis qu'ils ont été signalés pour la première fois dans les années 1980 (Yamanoushi et al. 1990, Koizumi 1993)[3] Les FGM sont des matériaux hétérogènes dans les quels les propriétés des matériaux varient en continu d'un point à l'autre et éliminent ainsi la concentration de contraintes rencontrées dans les composites stratifiés.

Cette classe de matériaux, qui fait l'objet de récentes études, est caractérisée par une variation spatiale de la microstructure. Ces matériaux offrent l'avantage d'avoir une gradation des propriétés et permettent ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [2].

D'autre part, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), une nouvelle génération des matériaux composites homogènes avancés d'abord proposés pour les barrières thermiques,

ont été de plus appliqué pour les structures de l'ingénierie moderne dans un environnement à température élevée.

Ceci est réalisé en faisant varier la fraction volumique des constituants, par exemple, de céramique et de métal d'une manière prédéterminée. Les FGM sont maintenant développés pour une utilisation générale en tant qu'éléments structurels dans différentes applications (Wang et Shen 2013, Akgöz et Civalek 2013, Shen et Yang 2014, Akbaş 2015, Daouadji et al. 2015, Li et Yang 2016, Attia 2017, Panjehpour et al. 2018, Ahmed et al. 2019, Avcar 2019, Ramteke et Al. 2019, Madenci 2019, 2021, Asiri et al. 2020, Hadji 2020, Vinyas 2020, Trabelsi et al. 2020, Naz et al. 2020, Selmi 2020, EltaherandAkbaş 2020, Li et al. 2021, Kertész et al. 2020, Alnujaie et al. 2021, Bashiri et al. 2021, Vinh 2021, Li et Zhang 2021, Tran et Cuong-Le 2022, Cuong-Le et al. 2022a, b)[4].

Plusieurs théories sont disponibles dans la littérature pour analyser la réponse au flambage des plaques sandwich fonctionnellement graduées (FG) reposant sur des fondations en visco-Pasternak.

La théorie la plus simple est appelée théorie classique des plaques (CPT) qui est basé sur l'hypothèse de Kirchoff. Cette théorie ignore la déformation par cisaillement transversal et n'est acceptable que pour les plaques minces (Zhang 2001, Ghannadpour et al. 2013, Wang et al. 2016, Wang et Zu 2017)[5]. Pour surmonter ce problème, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été développée en supposant que les déplacements dans le plan sont répartis linéairement sur l'épaisseur de la plaque.

Cela conduit à des contraintes de cisaillement transversales constantes sur toute l'épaisseur de la plaque, de sorte que la condition de contrainte de cisaillement nulle sur la face de la plaque n'est pas satisfaite (Reissner 1944, Reissner 1945, Mindlin 1951)[6]. Cependant, un facteur de correction de cisaillement pratiquement approprié est nécessaire. Afin d'inclure la courbure de la normale après déformation, un certain nombre de théories connues sous le nom de théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été conçues dans les quelles les déplacements sont supposés quadratiques ou cubiques à travers l'épaisseur de la plaque. La théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT) satisfait des conditions de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques. Un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire (Ghasemabadian et Kadkhodayan 2016, Sobhy et Zenkour 2018, Zenkour 2018, Navale et Pise 2021, Onyeka et Edozie 2021)[7].

Les plaques sandwich ont reçu une attention considérable dans de nombreuses applications d'ingénierie. Des structures sandwich en matériau fonctionnellement gradués (FG) ont été proposées dans les quelles l'âme ou les deux peaux peuvent être réalisées à partir de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) en raison des avantages remarquables du FGM. De nombreux articles de recherche ont été développés pour analyser les FGM et les structures sandwich composites (Anderson 2003, Bhangale et Ganesan 2006, Shodja et al. 2007, Etemadi et al. 2009, Zouatnia et Hadji 2019, Bharath et al. 2020, Rahmani et al. 2020, Katariya et Panda 2020, Hadji et Avcar 2021)[8]. Récemment, un certain nombre d'analyses analytiques et numériques ont été réalisées pour étudier la réponse mécanique de la plaque FG reposant sur des fondations. Pour décrire l'interaction entre la plaque et le milieu élastique, différents types de modèles de milieu élastique ont été proposés. Le plus simple est le modèle de Winkler à un paramètre (Winkler 1867) qui modélise l'élastique médian sous la forme d'une série de ressorts élastiques linéaires étroitement verticaux espacés et mutuellement indépendants. Une représentation plus réaliste et généralisée du milieu élastique peut être obtenue au moyen de deux paramètres de modèle de milieu élastique. L'un de ces modèles physiques est le modèle élastique de type Pasternak (Pasternak 1954). Le premier paramètre du modèle de Pasternak représente la pression normale alors que le deuxième paramètre prend en compte la contrainte de cisaillement transversal due à l'interaction de la déformation de cisaillement du milieu élastique environnant. Les plaques composites et FG reposant sur des fondations ont de nombreuses applications dans l'ingénierie moderne et sont largement utilisées pour étudier les comportements mécaniques de diverses structures (Tj et al. 2006, Huang et al. 2008, Yaghoobi et Yaghoobi 2013, Tornabene et al. 2014, Kim 2015, Allahkarami et al. 2016, Nebab et al. 2019, 2020, Rachedi et al. 2020, Merzoug et al. 2020, Kunbar et al. 2020, Boulal et al. 2020, Timesli 2020, Sobamowo 2020, Chami et al. 2020, Balubaid et al. 2021)[9]. Quelques recherches des articles ont étudié la réponse mécanique de la plaque FG basée sur une fondation visco-élastique (Fan et al. 2018, Hosseini et al. 2016, Zamani et al. 2017, Ebrahimi et Barati 2016)[10]. D'autres travaux ont été étudiés expérimentalement et numériquement en tenant compte des effets de l'interaction en considérant d'autres types de matériaux et d'autres modèles (Yaylaci et al. 2020a, b, Yaylaci 2016, Yaylaci et Birinci 2013, Oner et al. 2015, Adiyaman et al. 2015, Yaylaci et al. 2021a, b, c, d)[11]. De nombreux chercheurs se sont intéressés aux méthodes d'optimisation des structures composites, généralement plus délicates, qui visent à augmenter la précision des résultats et à raccourcir le temps d'optimisation. Khatir et al. (2021)[12] ont proposé le réseau neuronal artificiel amélioré utilisant l'algorithme d'optimisation arithmétique (IANN-AOA)

pour résoudre le problème de quantification des dommages dans les structures de plaques de matériau à gradient fonctionnel (FGM). Zenzen et al. (2020)[13] ont utilisé une approche en deux étapes axée sur un indicateur de dommages de transmissibilité modifié et sur l'ANN pour estimer l'emplacement et la taille des dommages dans les structures composites. Khatir et al. (2019)[14] ont présenté une technique d'évaluation des dommages structurels utilisant des données de vibration pour identifier les dommages. Cuong-Le et al. (2020a)[15] ont présenté une solution tridimensionnelle (3D) pour l'analyse des vibrations libres et du flambement de la plaque annulaire poreuse FGM, de la coque conique, cylindrique et cylindrique à l'aide de l'analyse isogéométrique (IGA). Saadat morad et al. (2021) [16] ont utilisé une nouvelle méthode appelée technique de réseau neuronal convolutif basé sur la transformée en ondelettes (WT-CNN) pour détecter l'emplacement des dommages dans les plaques composites stratifiées rectangulaires. Pour obtenir la déviation de la plaque, la théorie des plaques d'ordre élevée de Reddy couplée à l'analyse isogéométrique (IGA) est utilisée par Cuong-Le et al. (2020b). Shahmohammadi et al. (2020)[17] ont présenté une méthode de bande finie pour l'analyse de la stabilité et des vibrations libres de coques composites sandwich fonctionnellement graduées et stratifiées.

Le présent travail de thèse s'articule autour deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- Théorique
- Analytique

L'aspect théorique comprend trois chapitres :

Le chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et les FGM.

Le deuxième chapitre : Théories des plaques.

Le troisième chapitre : définitions sur le phénomène de flambement.

L'aspect Analytique comprend deux chapitres :

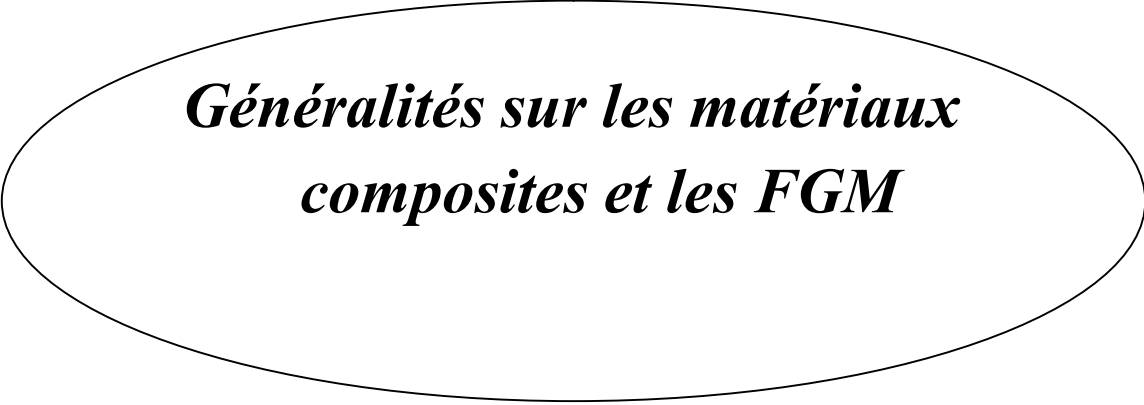
Le quatrième chapitre : Formulation mathématique de la théorie des plaques utilisée

Le cinquième chapitre : Résultats numériques et discussion

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie .



CHAPITRE -I-



***Généralités sur les matériaux
composites et les FGM***

I.1. Introduction

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux dont les qualités respectives se complètent pour former un matériau aux performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ce matériau consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort. La matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible, assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations aux quelles sont soumises les pièces. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent être utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Il faut différencier charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudre ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés. Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés (Tableau I-1 et Tableau I-2).

Un matériau composite est la plupart du temps hétérogène et anisotrope.

Selon les performances, on distingue deux types de composites:

1- Les matériaux composites dits de "grande diffusion" (GD) dont les propriétés mécaniques sont plus faibles mais d'un coût compatible avec une production en grande série.

Les matériaux composites dits "hautes performances" (HP), présentant des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un coût unitaire important. Ce sont les plus employés en aéronautique et dans le spatial. [Glos 2004][18].

Il faudra toujours tenir compte du fait que l'élaboration de la structure est liée à celle du matériau. Pour les pièces travaillantes, on utilisera plutôt des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotages on utilisera des plastiques renforcés[Berthelot, 2005][1].

I.2. Les Composants du Matériau Composite:

Le matériau composite: est constitué d'une protection appelée "matrice" et de l'ossature appelée "renfort". Les renforts fibreux sont disposés de façon judicieuse dans la matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations [Berthelot, 2005][01].

1) - **Le renfort** : armature, squelette, assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

2) - **La matrice**: assure la cohésion de la structure, la retransmission des efforts vers le renfort et la protection chimique. Elle est généralement constituée d'une matière plastique (résine thermoplastique ou thermodurcissable).

3) - **Entre le renfort et la matrice**, existe une zone de liaison appelée "interface". Cette zone assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif.

4) - **Les charges et additifs**; sont incorporés dans un matériau composite pour:

- Modifier la couleur,
- Modifier sensiblement les propriétés mécaniques ou thermiques,
- Réduire le coût,
- Résister au feu,
- Diminuer le retrait,
- Faciliter le démoulage,
- Améliorer la résistance au vieillissement,
- Modifier la densité du matériau.

I.2.1- Le Renfort (ou Bien la Fibre): Le renfort est le squelette supportant les efforts mécaniques. Son rôle principal est d'assurer la résistance mécanique du matériau composite. Il se présente sous plusieurs formes: fibres courtes (mat) ou fibres continues (tissus ou textures multidirectionnelles) en fonction de l'usage et la fonction envisagée. Les fibres présentent une bonne résistance à la traction mais une résistance à la compression faible. Les renforts fibreux peuvent être continus: Uni Directionnels(UD), Tissus...et discontinus: Mats, FeutresLeur nature peut être : Verre E ou R, Aramide, Carbone, Bore, Carbure de silicium. Parmi les fibres les plus utilisés (figure I.1), on peut citer:

- 1- Fibres de verre,
- 2- Fibres de carbone,
- 3- Fibres de kevlar (d'aramide),
- 4- Fibres de Bore,

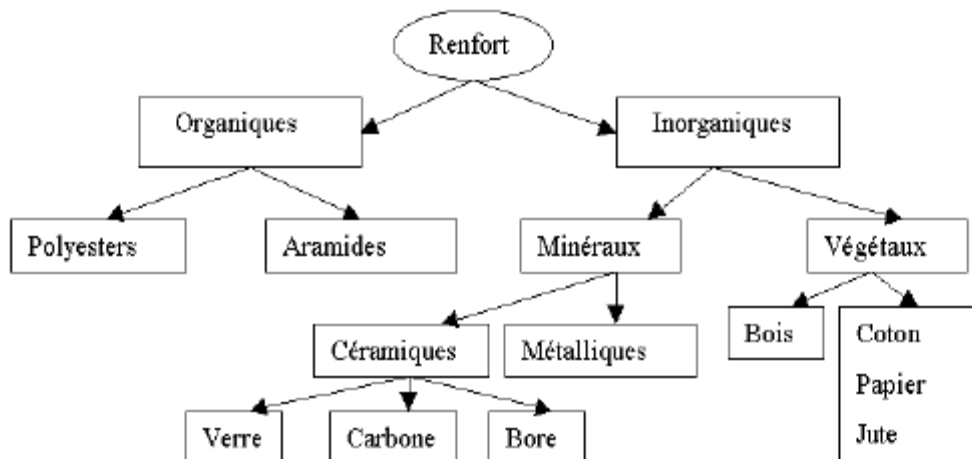


Figure: I.1- Les Différents Types de Renforts [Bahlouli, 1993][19].

I.2.1.1) - Fibres de Verre: Les fibres de verre sont un filament de verre extrêmement fin. Par extension, les matériaux composites renforcés de cette fibre sont généralement associés à des polymères. Ils sont utilisés dans les bâtiments et infrastructures (notamment dans les piscines) (29%), les transports (30%), l'électricité (16%), les sports et loisirs (14%) et pour les équipements industriels (11%). Leur coût de production est peu élevé, ce qui en fait l'une des fibres les plus utilisées à l'heure actuelle. Elle permet par exemple un allègement des structures d'environ 30% par rapport à l'acier et une réduction de poids en améliorant les performances, pour un prix compétitif: on peut en faire une fabrication en séries. Parmi ses propriétés; l'inertie chimique, la résistance au choc, l'isolation, etc. Il existe une multitude de fibres de verre (figure I.2) dont les propriétés dépendent de leur composition. Actuellement, trois types de fibres de verre sont commercialisés sous forme de files. Ce sont les variétés E, S et R.

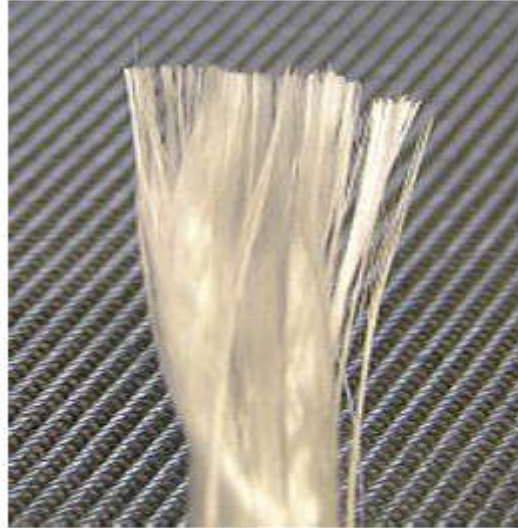


Figure: I.2-Ensemble de Fibres de Verre

I.2.1.2) - Fibres de Carbone: Sont des matériaux constitués de fibres extrêmement fines (figure I.3), composés principalement d'atomes de carbone.



Figure: I.3- Tissu de Fibre de Carbone.

L'alignement des atomes le long de l'axe de la fibre la rend incroyablement résistante pour sa taille. Les fibres de carbone sont caractérisées par leur faible densité, leur résistance élevée à la traction et à la compression, leur flexibilité, leur bonne conductibilité électrique et thermique. Elles sont caractérisées aussi par leur tenue en température et leur inertie chimique (sauf à l'oxydation). Les fibres de carbone sont utilisées pour toutes applications exigeant une grande résistance mécanique pour un poids réduit. Elles sont utilisées pour: l'industrie automobile, l'industrie aéronautique et spatiale, les équipements sportifs et dans le renforcement des structures en béton armé par collage de tissu de fibre de carbone. Il existe deux types de carbones: carbone de haute ténacité (HT) et carbone de haut module (HM). Parmi les inconvénients de ce type de fibre:

- Un recyclage difficile,
- Puisque sa structure est proche de l'amiante, on peut dire qu'elle peut provoquer des risques de cancer de poumon,
- Leur conductivité, de nombreuses électrocutions ont frappés des marins en manoeuvrant le mât de leur voilier,
- Leur musicalité, un bateau en carbone résonne comme un violant ce qui gêne les voyageurs et ne les laisse pas dormir.

I.2.1.3) - Fibres de Kevlar (d'Aramidés): Le mot aramide vient de la contraction d'Aromatic- polyamide. Les fibres d'aramide sont constituées de filaments jaunes continus d'un diamètre de l'ordre de 12 μm assemblés en fils (figure I.4). Elles sont des fibres synthétiques qui résistent bien à la chaleur et ont de bonnes propriétés mécaniques. Elles sont utilisées dans les protections balistiques comme la confection de gilets pare-balles.



Figure: I.4- Fibres d'Aramide.

Il existe trois types de fibres Kevlar: Fibres Kevlar 29(BM: à bas module d'élasticité), Fibres Kevlar 49(HM: à haut module d'élasticité) et Fibres Kevlar 149(UHM: à ultra-haut module d'élasticité).

Les fibres d'aramide présentent un bon équilibre de résistance et de module en traction et, en particulier, une excellente résistance spécifique à la rupture en traction. Les fibres d'aramide ont des caractéristiques médiocres en compression qui sont probablement une des conséquences de leur faible adhérence à la résine. Un des reproches que l'on fait aussi à la fibre aramide, est la difficulté rencontrée pour découper les renforts secs et pour poncer et percer les pièces composites [Ashby, 1991][20].

Les avantages:

- Haute résistance à la traction et module d'élasticité élevé,
- Faible densité, bonne résistance à la fatigue et bonne résistance chimique (aux carburants, eau de mer mais pas pour les acides),
- Excellent facteur d'amortissement des vibrations,
- Une excellente stabilité thermique, ne fond pas et n'entretient pas la combustion,
- Matériau non conducteur,
- Prix moyen 2 à 3 fois moins cher que les fibres de carbone.

Les inconvénients:

- Très faible résistance à la compression et faible adhérence avec les résines d'imprégnation,
- Reprise d'humidité importante,
- Usinage délicat,
- Prix intermédiaire; 10 fois celui des fibres de verre E.

I.2.1.4) - Fibres de Bore: Il s'agit de gros filaments (diamètre: $d \geq 100 \mu\text{m}$) formés d'une âme en tungstène ou en carbone de $10\mu\text{m}$ recouverte d'une couche de bore d'épaisseur $40 \mu\text{m}$.

Le tableau suivant regroupe les propriétés mécaniques des différentes fibres:

Tableau:I.1- Les Propriétés Mécaniques de Différentes Fibres [Bahlouli, 1993][19].

Fibre	Densité gr/cm ³	Résistance à la rupture en traction (MPa)	Résistance à la rupture en compression (MPa)	Allonge ment à la rupture en %	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Diamètre de filament élémentai re (mm)	Prix indicatif (Eu/kg)
Verre E	2.54	3400	1200	4.8	73000	3-30	1.83
Verre R	2.48	4400	1300	5.4	86000	3-30	7.62
Aramide	1.44	3600	500	4.0	83000	12	22.87
BM 29	1.45	3600-4100	500	2.8	131000	12	30.50
Aramide	1.47	3400	500	2.0	186000	12	---
UHM149							
Carbone	1.78	2800	1800	0.5	200000	8	45/152
HT	1.80	2200	1300		400000	8	45/152
Carbone							
HM							
Bore	2.63	3500	3500	0.8	400000	100-200	450

I.2.2- La Matrice: Le rôle de la matrice; est de lier les fibres du renfort entre eux, les incorpore et leur donner une adhérence suffisante pour que la transmission des efforts et la répartition des contraintes soient assurées. C'est comme "l'emballage". Elle assure également une protection chimique ou contre la corrosion par exemple. [Gornet, 2008][24]

On distingue quatre grandes familles des matrices (figure I.5):

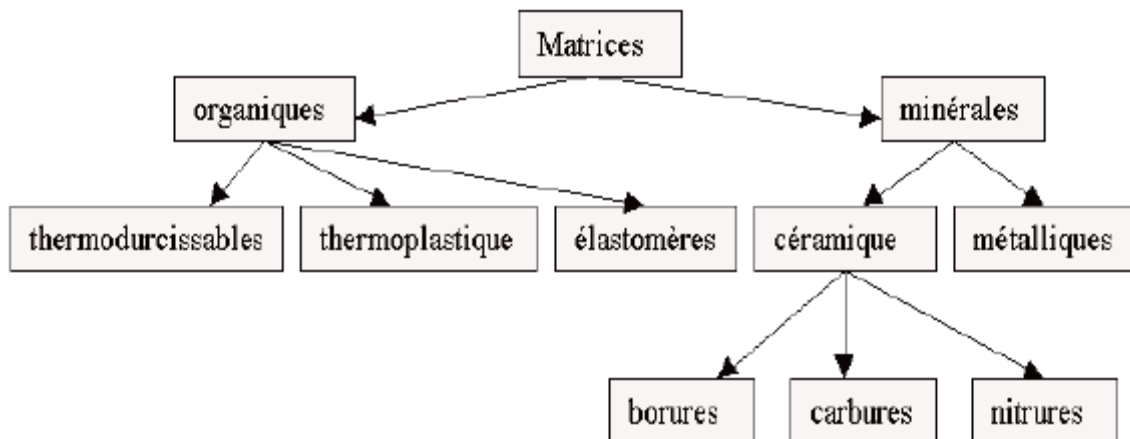


Figure: I.5 - Les Différents Types de Matrices. [Bahlouli, 1993][25].

I.2.2.1) - Les Matrices Organiques (MO) : Qui constitue les volumes les plus importants aujourd'hui à l'échelle industrielle, elles sont faites de matière plastique. Il convient de distinguer les matrices thermoplastiques et les polymères thermodurcissables (ou résine) de propriétés mécaniques très élevées. Dans ces derniers, on trouve les résines de polyester, les résines époxydes qui peuvent être utilisées jusqu'à une température de 2000C. Les résines phénoliques ou les résines polyimides peuvent supporter une température de 4000C

I.2.2.2) - Les Matrices Carbonées (MCa): Sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. Celle-ci, peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux (décomposition chimique en phase vapeur). Le carbone se dépose en grains sur les fibres en leur assurant une bonne liaison.

I.2.2.3) - Les Matrices Céramiques (MC): Elles sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont réservées aux applications de très haute technicité travaillant à haute température comme la tuile de protection thermique, les brûleurs. Elles sont utilisées dans le spatial, le nucléaire et le militaire. Leur seul inconvénient c'est qu'elles résistent mal à la rupture à la traction qui est partiellement masqué et compensé par l'introduction des fibres. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide.

I.2.2.4) - Les Matrices Métalliques (MM): Elles ont une bonne ductilité, une bonne résistance à certains solvants, une meilleure tenue en température que les résines, une meilleure usinabilité. A l'inverse, elles sont difficiles à mettre en oeuvre à cause de leur densité élevée et la réactivité des matériaux pouvant créer des problèmes au niveau de l'interface (fibres-matrice). La technique de leur fabrication, peut être effectuée par imprégnation en phase liquide, décomposition chimique en phase vapeur et encore par Co-extrusion ou par Co-laminage. Les plus répandus actuellement sont les matériaux composites à matrice organique (MO), l'emploi de composites à matrice métallique ou céramique reste très limité. Le tableau suivant regroupe les caractéristiques moyennes des matrices thermodurcissables (TD):

Tableau: I.2- Les Caractéristiques des Matrices Thermodurcissables. [Bahlouli, 1993][26].

Polymère	Masse spécifique (kg/cm³)	Résistance à la traction(Gpa)	Module d'élasticité longitudinal (Gpa)	Allongement à la rupture %
Polyester	1,2	50-65	3	2,5
Epoxyde	1,1-1,4	50-90	3	2
Poly-imide	1,3-1,4	30-40	4	1
Phénolique	1,2	40-50	3	2,5
Vinyl-ester	1,15	70-80	3,5	4
Polyuréthane	1,1-1,5	20-50	1	100
Silicone	1,1	35	2,2	

I.2.3 - Les Charges: On appelle "charge"; toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques du matériau transformé. Elle peut aussi, améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient de ce matériau. Les matières thermodurcissables contiennent un taux élevé de charges pouvant atteindre 60% de la masse totale du matériau. Pour choisir la matière plastique de la substance utilisée comme charge, on doit respecter certaines conditions: - Compatibilité avec la résine de base ; - Mouillabilité ; - Uniformité de qualité et de granulométrie ; - Faible action abrasive ; - Bas prix de revient.

I.3. L'aspect des Matériaux Composites: Les matériaux composites peuvent se présenter [Bahlouli, 1993] [27] soit:

I.3.1- En Monocouches: Les monocouches (figure I.6) représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisées par la forme du renfort: à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

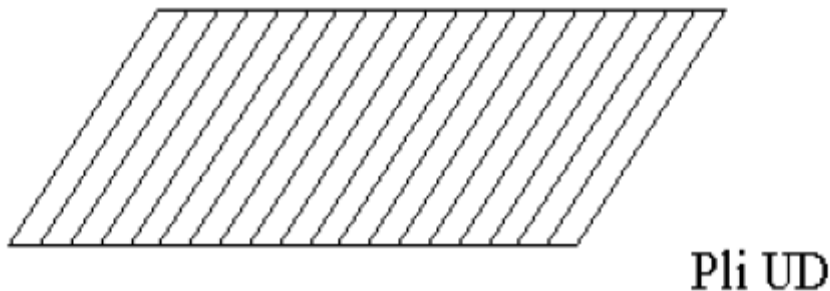


Figure: I.6- Matériau Composite Monocouche. [Bahlouli, 1993][28].

I.3.2- Stratifiés: Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches (figure I.7) ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

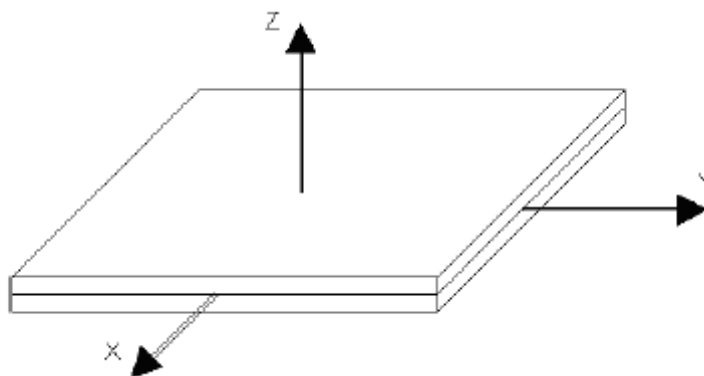


Figure: I.7- Matériau Composite Stratifié.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. La notation "composite"; veut dire un stratifié qui possède un empilement $(0, +45, +90, -45) 2s$ (figure I.8), est un stratifié avec quatre couches dans les directions: $(0^\circ, +45^\circ, +90^\circ, -45^\circ)$. L'orientation 0° coïncide avec la direction X du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

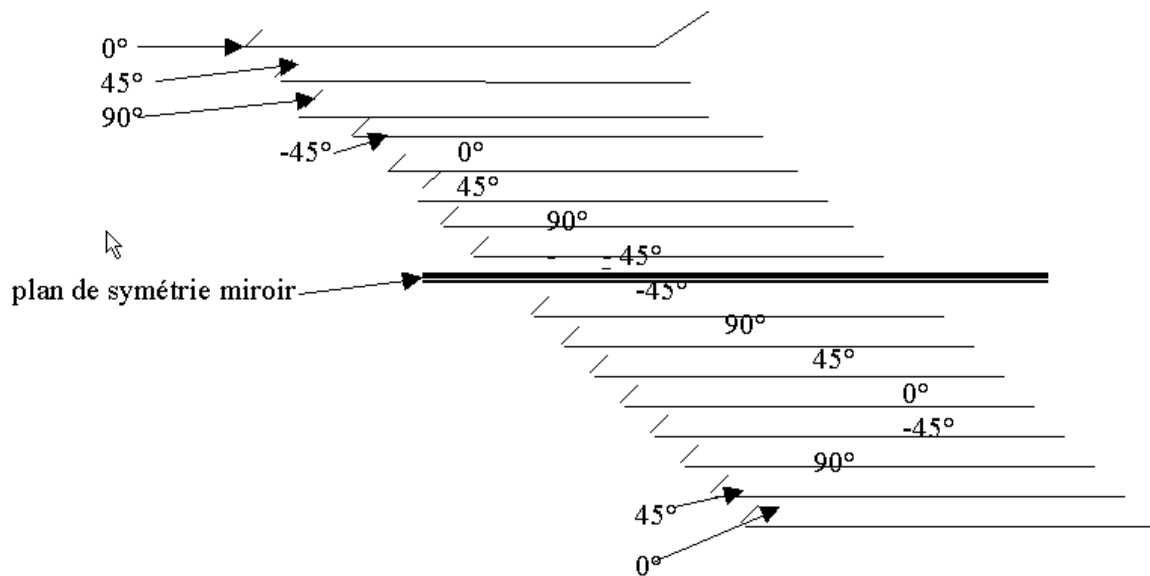


Figure: I.8- Matériau Composite Stratifié 2s

Il existe trois types de matériaux composites stratifiés:

- 1- Un stratifié équilibré: C'est un stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+ \theta$ que de couches orientées suivant la direction $- \theta$.
- 2- Un stratifié symétrique: est un stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- 3- Un stratifié orthogonal: c'est un stratifié qui comporte autant de couches à 0° que de couches à 90° .

I.3.3- Sandwichs: Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles (ou "peaux") de faible épaisseur (figure I.9), constituées de matériaux à haute résistance, de rigidité très grande et de haut module de résistance.

$$10 \leq e_c / e_p \leq 100$$

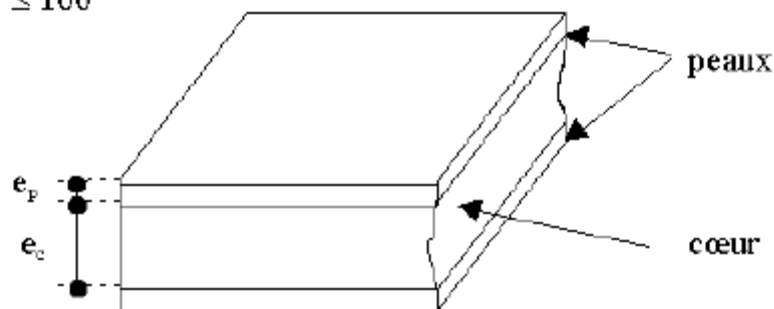


Figure: I.9- Matériau Composite Sandwich. [Bahlouli, 1993][29].

Entre ces deux semelles se trouve l'âme (ou bien "le coeur") d'épaisseur très importante par rapport à celle de la semelle et de faible résistance. L'ensemble forme un matériau sandwich d'une grande légèreté en flexion, une résistance à la rupture élevée associée à un faible poids par unité de surface et d'une excellente isolation thermique.

I.4. Avantages et inconvénient des matériaux composites :

I.4.1. Avantages :

- Gain de masse ;
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) ;
- Grande résistance à la fatigue ;
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) ;
- Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole...etc.

I.4.2. Inconvénients :

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température,
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes,
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques,
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs.

I.5. Les domaines d'application des composites

I.5.1. Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. L'handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. [Menail 2009] [30].

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes.

L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité.

1.5.2. Les composites dans l'automobile

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003.

Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception ; l'allègement de 1 kg, obtenu par l'utilisation des composites, autorise un surcoût de 3€/kg gagné ou permet d'économiser 1,5 € de carburant par 100 km.

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclabilité.

En Europe, environ 12 millions de véhicules, d'une masse moyenne de 1000 kg sont produits annuellement, soit 12 millions de tonnes de matériaux [Giocosa 1999][31].

Si à ses débuts, il y a environ 100 ans, une automobile était constituée principalement de bois et d'acier, aujourd'hui elle rassemble de nombreux matériaux appartenant à différentes familles :

- matériaux ferreux : fontes, aciers (environ 70 % de sa masse) ;
- matériaux non ferreux : aluminium, cuivre, magnésium (environ 5 %) ;
- matériaux minéraux : verres, céramiques (environ 4 %) ;
- matériaux organiques : peintures, adhésifs, textiles, fluides, caoutchoucs, thermoplastiques et thermodurcissables renforcés ou non par des fibres (verre, carbone, aramide, naturelles) ou des charges minérales (environ 20 %).

Les matériaux organiques composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour remplir certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules.

A priori, ces matériaux présentent en effet trois handicaps majeurs par rapport aux matériaux métalliques dans le cadre d'une utilisation dans le secteur automobile :

- un prix élevé au kilogramme ;
- des caractéristiques mécaniques plus faibles ;
- des procédés de mise en œuvre souvent lents à l'exception du procédé d'injection.

Pourtant les matériaux composites à matrice organique présentent des avantages importants :

- une faible densité ;

- des technologies de mise en œuvre par moulage qui limitent la matière engagée dans la filière, offrent la possibilité d'obtenir des pièces de forme complexe et suppriment les usinages de finition.

1.5.3. Les composites et la construction électrique

La consommation massive des composites GD, sous forme de semi-produits SMC comprimés, dans les domaines électrique et électronique, prends de l'ampleur avec l'utilisation importante de l'audio visuel (TV, microordinateurs, lecteurs de DVD, etc.....).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

Les cadences de production des composants électriques, pouvant atteindre plusieurs milliers par jour, sont peu compatibles avec celles du procédé de compression SMC. Des exigences croissantes en recyclabilité des produits constituent une menace importante pour ce secteur d'application des composites.

1.5.4. Les composites et la construction industrielle

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour les constructions industrielles standards, les matériaux composites gardent encore leur handicap d'un coût élevé par rapport aux matériaux conventionnels, les métaux. Leur caractérisation en milieu corrosif est encore insuffisamment connue.

1.5.5. Les composites dans les équipements de sports et loisirs

Les performances sportives exigent des matériaux performants. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences, malgré un coût relativement élevé. Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques etc.....

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports.

La résistance mécanique et élastique des composites TP reste encore trop faible comparée à celle des alliages légers, en particulier pour les composites à matrice en polypropylène et en polyamide

1.5.6. Les composites et la construction nautique

Dans la construction nautique de plaisance et de pêche, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. Le moulage au contact représente encore 85% des composites utilisés dans ce secteur. D'ailleurs c'est le seul domaine exploité en Algérie. Les entreprises étatiques et privées telles que ECOREP, 3S, POLYOR, se sont spécialisées dans la construction des bateaux de pêche et de plaisance. Elles utilisent surtout de la résine polyester et la fibre de verre E.

Les problèmes d'environnement sont susceptibles de menacer à terme l'industrie nautique des matériaux composites ; en effet, les nouvelles réglementations européennes limitant les émissions des composés organiques volatiles COV (styrène), qui pourraient constituer une menace pour cette industrie si elle ne s'adapte pas.

1.5.7. Les composites dans l'aéronautique

Avec l'augmentation du prix du pétrole, l'utilisation des matériaux composites est devenue une nécessité. Chaque kilogramme gagné sur la structure d'un avion, fait gagner aux compagnies de voyageurs de l'argent et protège en parallèle l'environnement par réduction des émanations de CO₂. L'aéronautique utilise principalement des composites HP constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent. Le gain total de 450 kilos sur un Airbus permet d'accueillir six passagers supplémentaires. Un gain de 100 kilos sur la structure d'une fusée allonge sa trajectoire de 100 kilomètres.

1.5.8. Les composites dans le ferroviaire

Les matériaux composites sont utilisés dans le domaine ferroviaire pour deux principaux atouts : un bon comportement au feu et un moulage facile des pièces utilisées. Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice therm durcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique.

La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût supérieur à 9€/kg, contre 2€/kg pour les solutions en acier et par les difficultés de l'approche fonctionnelle rencontrées par les concepteurs.

1.5.9. Les composites dans le secteur médical

Les composites TD et TP ont investi récemment le secteur médical et de la sécurité, comme ils ont investi auparavant les autres secteurs. Il s'agit surtout des composites hautes

performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

Le médical reste attaché à l'utilisation des aciers spéciaux dont le prix de 9€/kg reste bien au dessous de celui des composites HP qui peut atteindre 50€/kg.

I.6. Les matériaux fonctionnellement gradués :

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués (en anglais: **Functionally Graded Materials 'F.G.M'**).

Les matériaux fonctionnellement gradués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux ont été définies au 21ème siècle. Sont des matériaux composés de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé de grandes performances. Il est capable de résister aux températures plus chaudes, Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

Les FGM sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique par un processus de métallurgie de poudre (figure I.10), céramique qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées est placé dans les régions de grands gradients de la température et le métal typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques comme la dureté sont besoins d'être élevés (côté basse température).

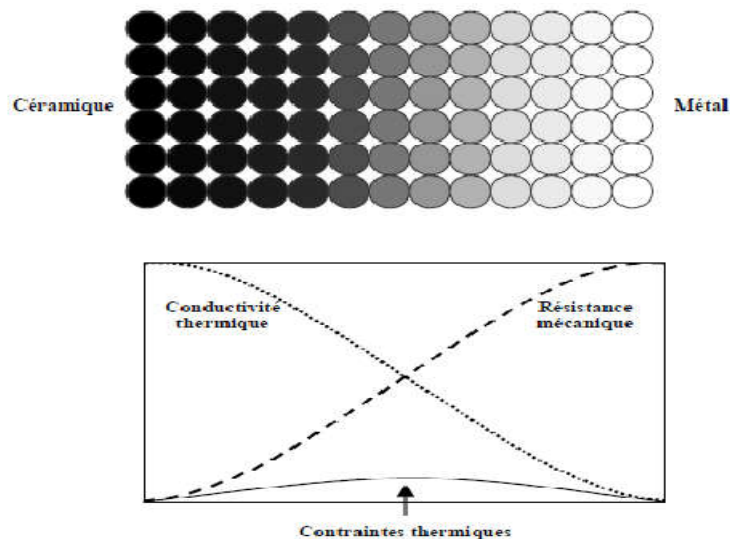


Figure I.10 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués.

I.6.1. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

I.6.1.1. Propriétés du métal

L'aluminium est un métal blanc qui peut devenir réfléchissant après polissage.

- **Propriétés physiques** : L'aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de L'aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de L'aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.
- **Propriétés mécaniques** : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :
 - ❖ Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
 - Résistance à la traction.
 - Résistance à la pénétration (dureté).
 - ❖ Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :
 - La malléabilité (mise en feuilles).
 - La ductilité (mise en fils).
- **Propriétés des alliages d'aluminium** : L'Aluminium a pour propriétés une :
 - Température de travail élevée.

- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

I.6.1.2. Propriétés de la céramique

- La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.
- **Propriétés physiques** : La céramique a une facilité de fusion qui présente un certain avantage pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de **3800 kg/m³**. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.
- **Propriétés mécaniques** : Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des matières premières employées et des méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases.
- **Propriétés des céramiques** : Les propriétés de la céramique sont :
 - Un module d'Young élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
 - Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
 - Une très bonne résistance à la compression (Résistance à la compression = **200 MPa**).

I.7. Propriétés matérielles effectives d'un matériau en FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.11a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.11b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

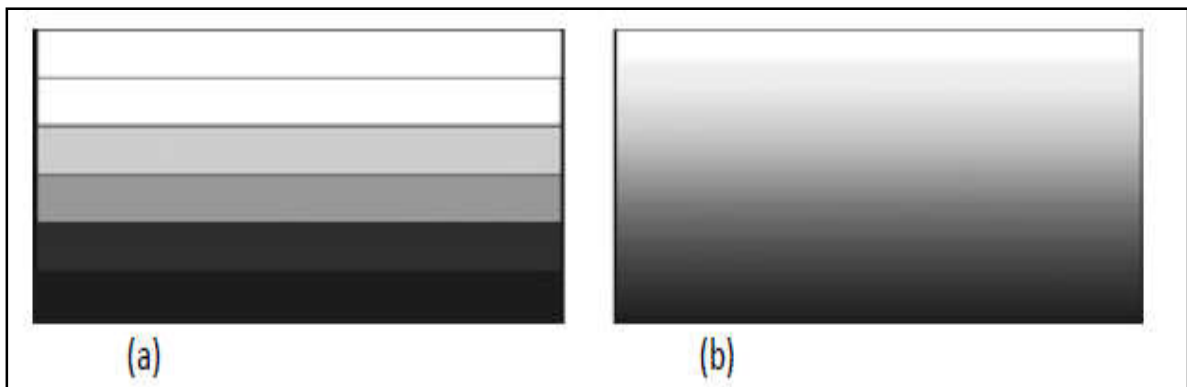


Figure I.11: Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïdale pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

I.8. Lois régissant la variation des propriétés des plaques en FGM

Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure I.12). Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles, module d'Young, densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution. Cependant, le module d'Young, densité et le coefficient de poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$, $\nu = \nu(z)$. [Delale et al_1983][32] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module d'Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque ; d'ailleurs cette propriété est sensiblement là même pour les matériaux avec lesquels on va travailler.

Alors, le module d'Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant :

- une fonction de loi de puissance (P-FGM)
- une fonction exponentielle (E-FGM)
- ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

Notant que S représente la propriété mécanique qui varie selon l'épaisseur ; donc elle peut être le module d'Young $E(z)$ ou la densité $\rho = \rho(z)$.

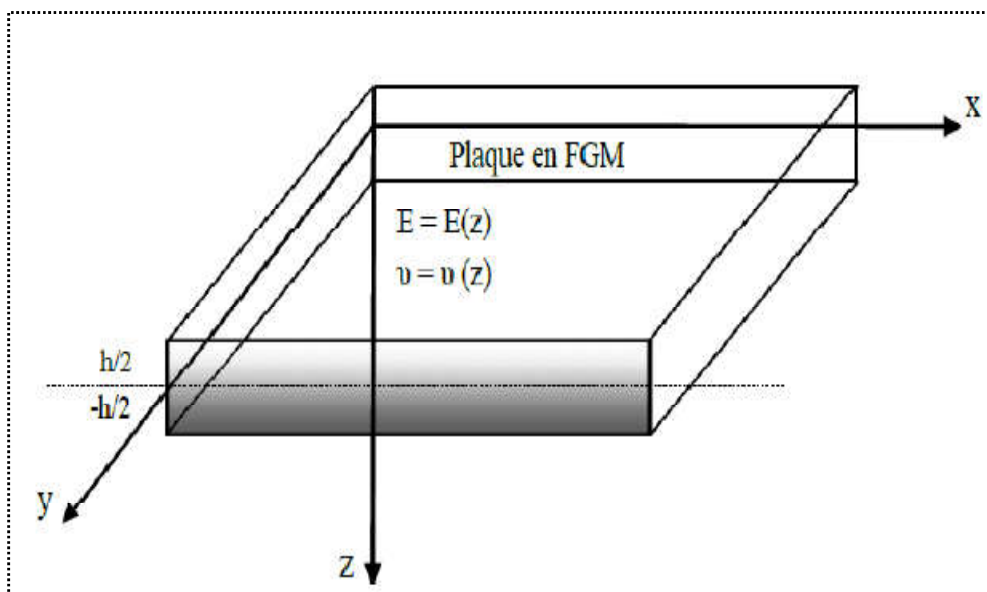


Figure I.12: Les dimensions de la plaque FGM.

I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Delale F et al_1983][33]:

$$S(z) = g(z).S_1 + [1 - g(z)].S_2 \quad (I.2)$$

Où S_1 et S_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.13, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

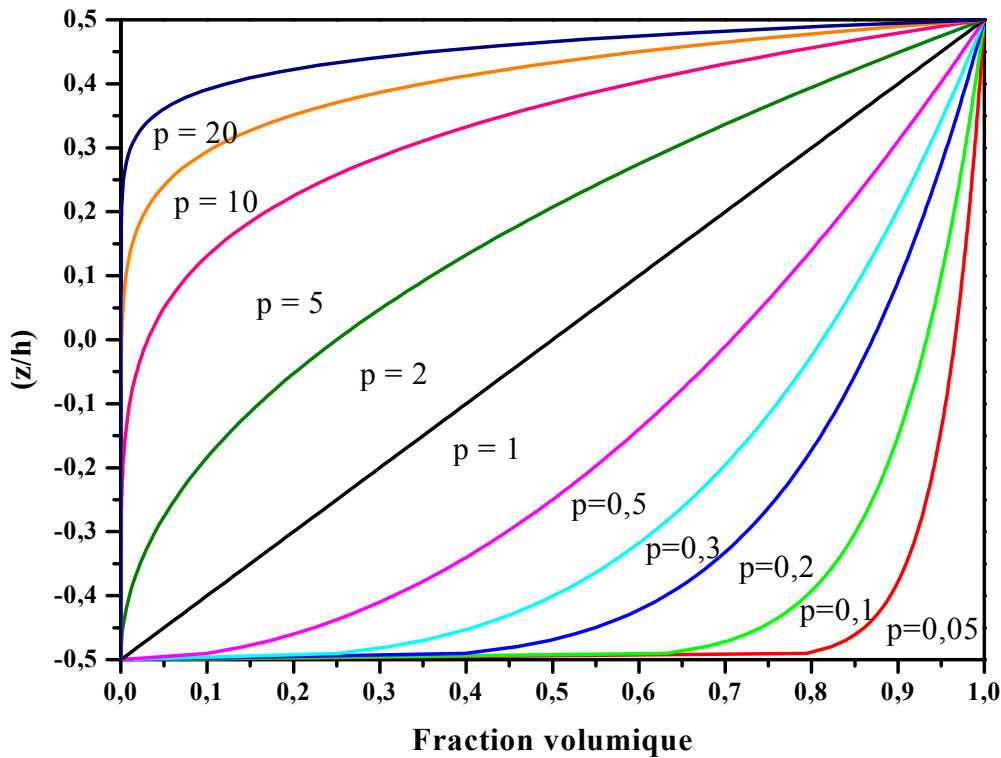


Figure I.13: La variation de la fraction volumique pour une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la figure I.09, le changement de la valeur de (P) produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites. Pour une résolution numérique, par la méthode des éléments finis par exemple, les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \quad , \quad \sum_{j=1} g_j = 1 \quad (I.3)$$

Où S_j et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j

I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [Delale.F et al_1983]^[69], par conséquent, [Chung et al_2003^[70]] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^P \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4.a)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^P \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par :

$$S(z) = g_1(z) \cdot S_1 + [1 - g_1(z)] \cdot S_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.5.a)$$

$$S(z) = g_2(z) \cdot S_1 + [1 - g_2(z)] \cdot S_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.5.b)$$

La figure I.14 montre que la variation de la fraction volumique selon les équations (I.4.a) et (I.4.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

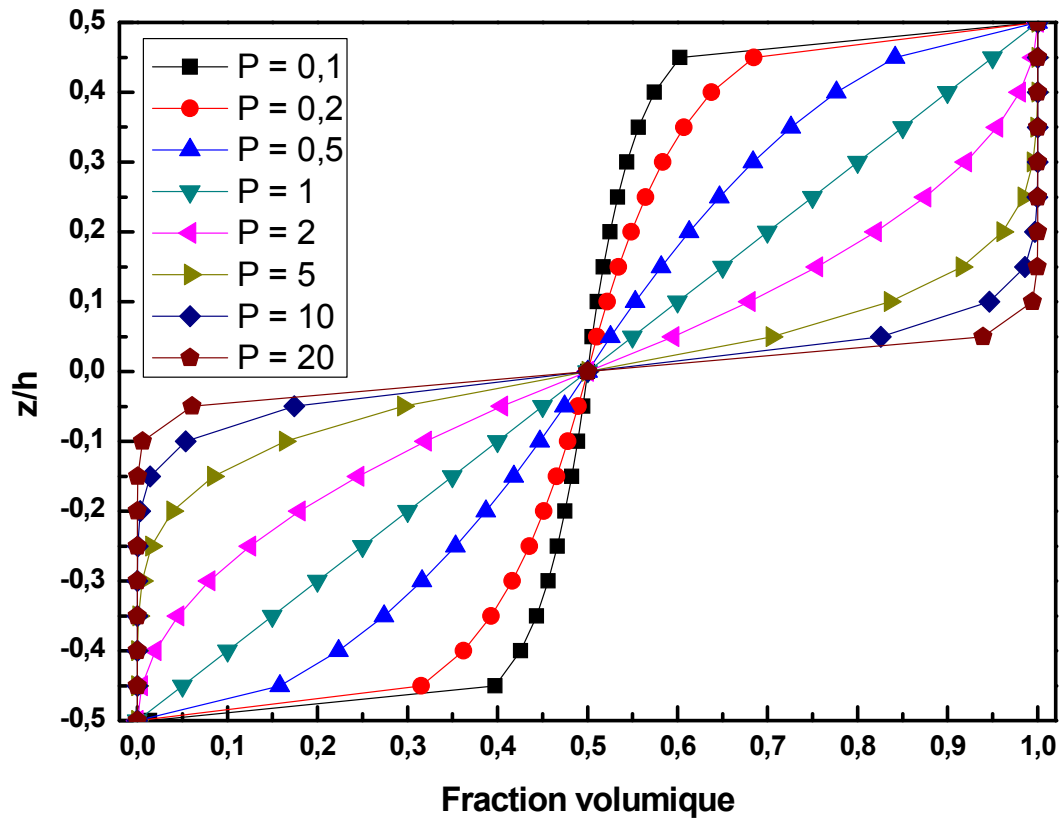


Figure I.14: La variation de la fraction volumique pour une plaque S-FGM.

I.8.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale et al_1983^[69]].

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (I.6.a)$$

Avec :

$$A = S_2 \text{ Et } B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (I.6.b)$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la **figure I.15**.

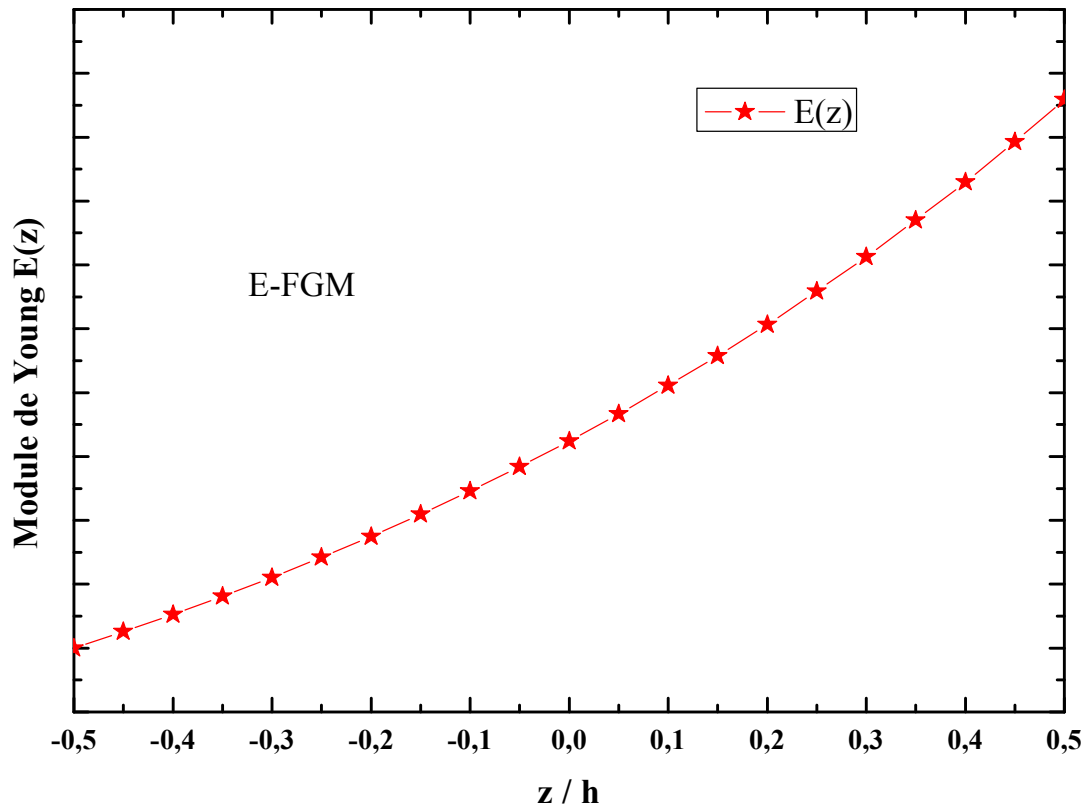


Figure I.15: La variation du module d'Young de la plaque E-FGM.

I.9. Domaines d'application des matériaux fonctionnellement gradués

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc. [Nguyen.V.T_2004^[46]].

D'autres applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [Müller et al (2003)^[47]], des déclencheurs [Qiu.J et al_2003^[48]], des armures métal/ céramique [Liu.L.S et al_2003^[49]], des détecteurs photoélectriques [Paszkievicz.B et al_2008^[50]] et des implants dentaires montrés sur la figure I.02 [Watari.F et al_2004^[51]]. Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été édités. [Fuchiyama.T et al_1995^[52], Markworth.A et al_1995^[53], Tanigawa.Y et al_1995^[54], Noda.N_1999^[55], Paulino.G et al_2003^[56]]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [Hui-shen_2009^[57]].

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.16 a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaires et semi-conducteurs.

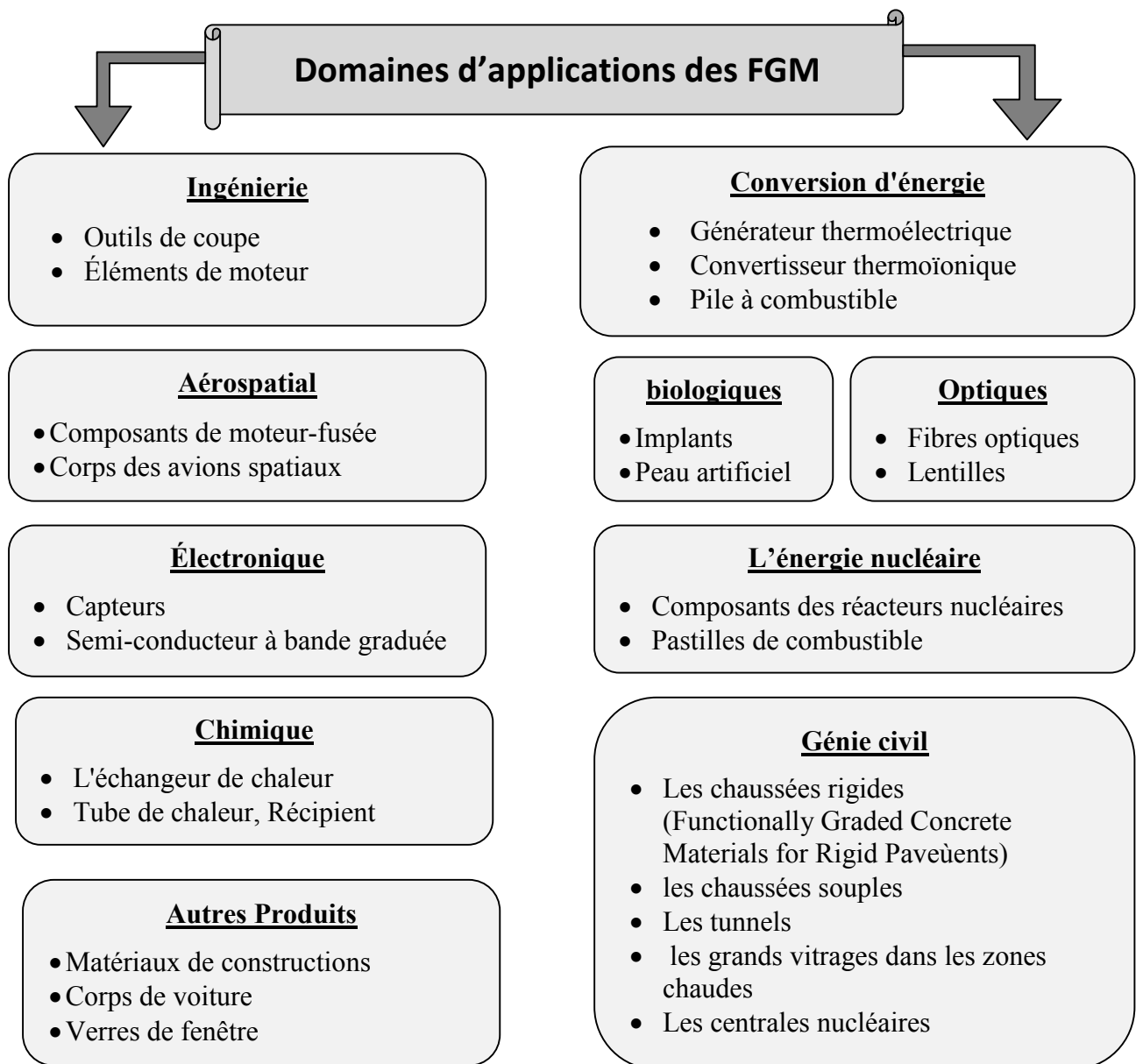


Figure I.16: Les principaux domaines d'application des FGM.

I.10. Conclusion

Nous avons acquis dans ce chapitre des connaissances sur les matériaux composites conventionnels ainsi que ses domaines d'application et la diffusion de son utilisation à travers le monde ,par la suite nous allons défini les matériaux fonctionnellement gradués « FGM », leurs propriétés, et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.



CHAPITRE -II-



Théories des plaques

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor.A.K. et al 1989^[71], Kapania.R.K et al_1989^[72], Kant.Tetal_2000^[73], Carrera.E_2000^[74]] des revues complètes sur les différents modèles existant de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaquent.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention des résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. [Pagano.N.J_1969^[75], Pagano.N.J_1970^[76], Srinivas.S et al_1970^[77], Srinivas.Set al 1973^[78]].

Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles 2D de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont des approches 2D qui sera mentionnées.

II.2. Différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adoptée :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couches.
- Approche développement asymptotique.

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et considérée comme une seule couche. Des nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinées. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

- **Modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques minces CPT) :**

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur. [Reissner.E et al_1961^[79]]. Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par [Love-Kirchhoff_1850^[80]] généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant (figure II.01). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est reliée à l'élancement (l/h).

Elle suppose les hypothèses ci-après:

1. La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
2. Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transversal est donc négligée ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).
On admet dans ce cas que la déformation due à l'effort tranchant est nulle et ne participe pas à la rigidité.
3. le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du plan neutre ;
4. l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$) ;

Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{II.1}$$

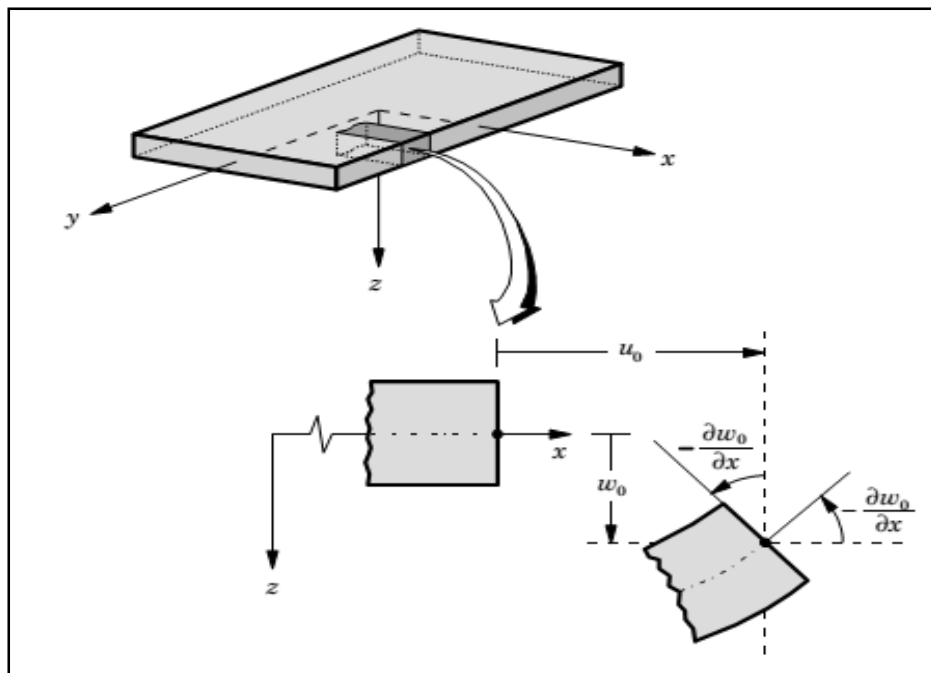


Figure II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen ($z=0$). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

- **Théorie de déformation en cisaillement 1^{er} ordre FSDT (Modèle Reissner-Mindlin) :**

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transversal, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans [Reissner_1945^[81], Mindlin_1951^[82]], qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko et al_1959)^[83], Reddy_1997^[84], Reddy_1999^[85]].

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, [Mindlin_1951[82]]a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement.

En outre, [Mindlin_1951[82]] a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie de rotation est incluse.

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (figure II.02) est exprimé sous la forme [Mindlin_1951[82]]:

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{III.2}$$

Avec :

(u_0, v_0, w_0) : sont les déplacements en membrane.

(φ_x, φ_y) : sont les rotations autour des axes x et y.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ et } \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} .$$

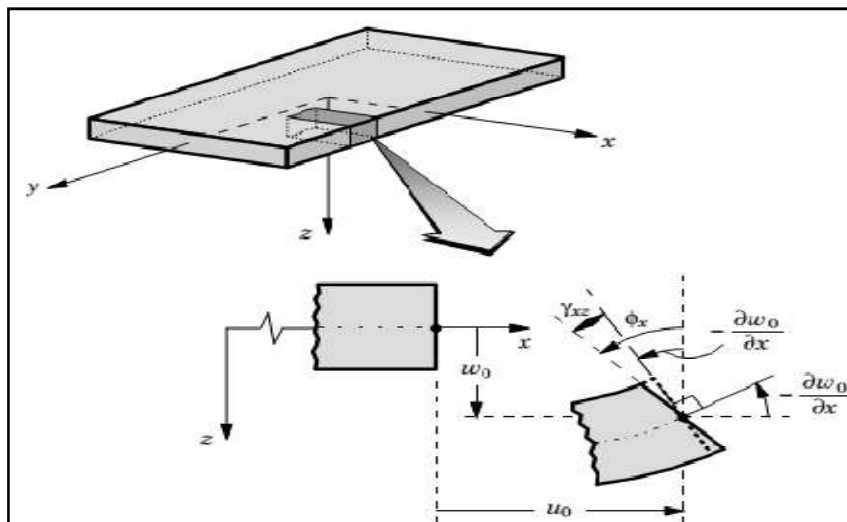


Figure II.2: Cinématique de Reissner-Mindlin.

• **Les modèles d'ordre élevé :**

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction et franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre élevé. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.3) [Whitney.J.M_1973^[86], Liberscu.L_1967^[87], Touratier.M_1991^[88], Nguyen .V.T_2004^[46]].

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

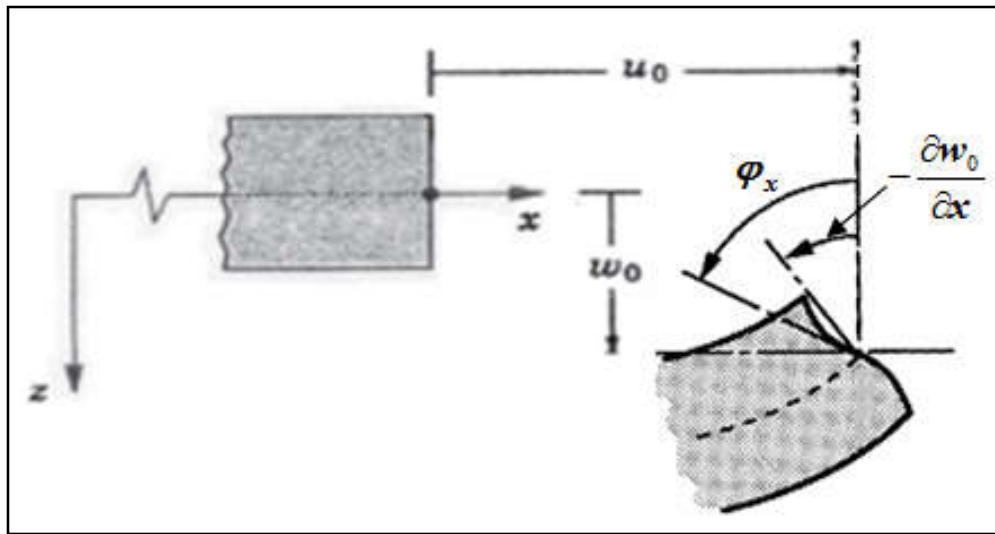


Figure II.3: Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième TSDT de [Reddy_1997^[84], Reddy_1999^[85]] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transversale par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transversale est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier. M (1991)]^[88] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transversale s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par [Karama et al]^[89] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate théorie HSDPT) développée par [Ait Atmane et al]^[90] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad \text{Avec : } \phi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan^[91] :
$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner^[81] :
$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Reddy^[93] :
$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

- L'approche de Touratier^[88] :
$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.11})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transversale s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad (\text{II.12})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre élevé (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy J.N_1984^[93]].

Récemment, [Afaq et al_2003^[94]] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transversale est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.13})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair du variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier.M_1991^[88]] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de [Aydogdu_2005^[95]]; $f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}}$ $\alpha > 0$, h : L'épaisseur de la plaque (II.14)

En remarque que les modèles d'approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). Mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.2.2. Approche par couches

Cette approche est applicable pour les matériaux FGM, destinée justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels, Ainsi différents modèles issus de l'approche par couches ont été proposés: [Chabot.A_1997^[96], Carrera.E_2000^[74], Afaq.K.S_2003^[94], Reddy.J.N_1984^[93], Di Sciuva.M_1987^[97]]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches).

On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couches peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zigzag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

➤ Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zigzag puisqu'ils proposent une cinématique par couches plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure II.04).

En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [Srinivas.S et al_1973^[78], Reddy.J.N_1987^[92], Tahani.M et al_2003^[98]], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couches. Les équations fondamentales par couches sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couches.

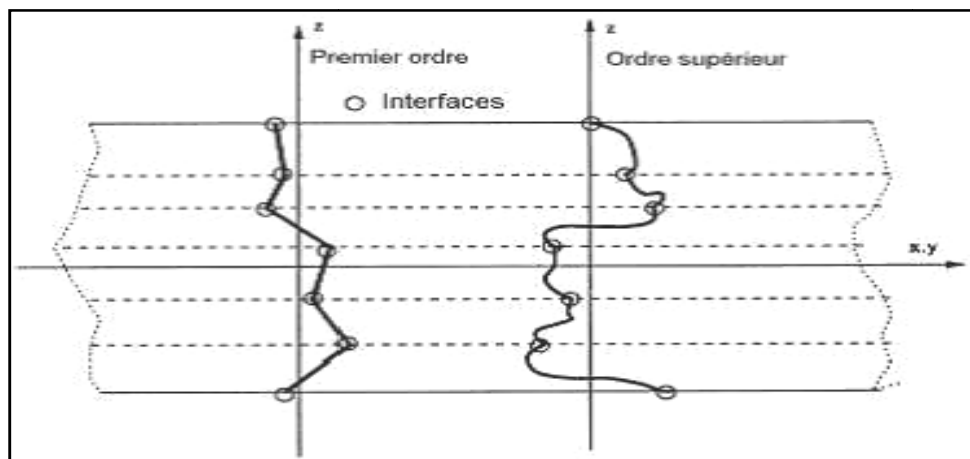


Figure II.4: Champs de déplacement des couches discrètes [Nguyen.V.T_2004^[46]]

D'une manière alternative, les travaux de [Ren.J.G_1986^[99],Kassapoglou.Cet al_1987^[100], Yin.W.L_1994^[101]] utilisent une approximation des champs de contraintes par couches ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [Ren.J.G_1986^[99]] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couches et les déplacements sont considéré cubiques par couches et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou.C et al_1987^[100]], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couches, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [Yin.W.L_1994^[101]]. Les fonctions de contraintes sont utilisées par couches pour déterminer les contraintes inters laminaires, elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de [Pagano.N.J_1978^[102]] qui propose le modèle local. Le modèle local a été construit à partir de la formulation d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couches. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales. La formulation d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouche à $(7n)$ champ en $(x ; y)$, (n) étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondant à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplification permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen.V.T_2004^[46]].

➤ **Les modèles zigzags**

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, [Di Sciuva.M_1987^[97]] est le premier qui à proposer le modèle zigzag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zigzag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zigzag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en (z) mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure II.05). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

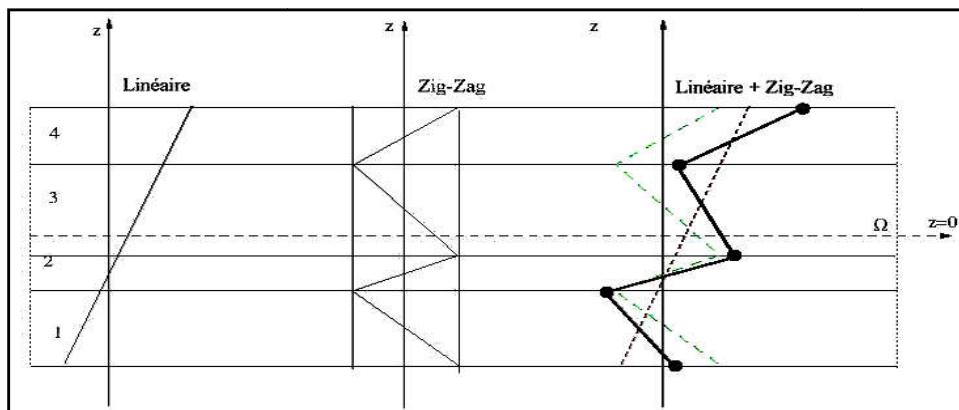


Figure II.5: Champs de déplacement zigzag du 1^{er} ordre [Nguyen.V.T_2004^[46]]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zigzags réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de [Di Sciuva.M_1984^[103]], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zigzag [Nguyen.V.T_2004^[46]]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zigzag (linéaire par morceaux) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure II.06). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

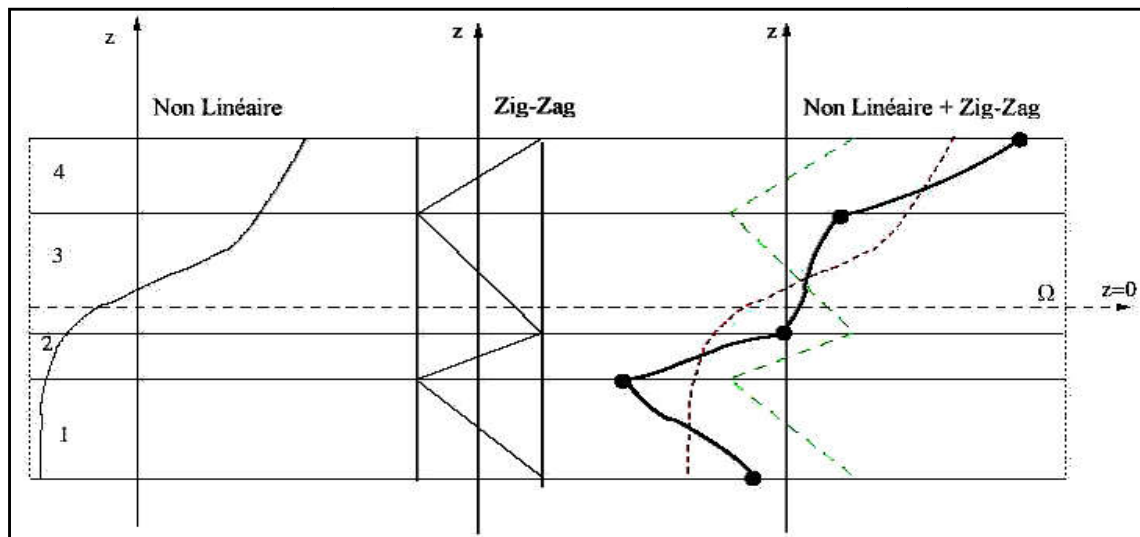


Figure II.6: Champs de déplacement zigzag d'ordre supérieur. [Nguyen.V.T_2004^[46]]

Dans les travaux de [Karama.M_1998^[89], Ossadzow.C et al_2001^[104]], la fonction sinus de [Touratier.M_1991^[88]] est combiné avec la fonction zigzag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, [Afaq et al_2003^[94]] combine le modèle exponentiel avec l'effet zigzag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zigzag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zigzags ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zigzags devient moins précis quand le rapport d'élanement

diminue [Icardi.U_2001^[105]]. Un autre inconvénient des modèles zigzags, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité du type C^1 demandé qui complique leur implémentation numérique.

II.2.3. Approche par développement asymptotique

La technique de développement asymptotique est appliquée à des structures à priori peu épaisses c'est à dire quand le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est très petit, quand l'épaisseur tend vers zéro [L.E. Aghalovyan_2007^[106]]. Le développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équation de mouvement). L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [Nguyen.D.T_2012^[107]].

II.3. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couches et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.



CHAPITRE - III -



Le phénomène Du Flambement

III.1. Introduction :

Dans le génie civil les plaques sont largement utilisées ; dans le (bâtiment, les ponts, etc.). Contrairement aux poutres et les colonnes, qui ont des longueurs plus grandes que les deux autres dimensions, et ils sont donc modélisés en tant que éléments linéaires, les plaques d'acier ont des largeurs comparables à leur longueur et ainsi sont modélisées comme des éléments non- linéaires (surface plane).

Tout comme les longues colonnes qui subissent des instabilités (forme de flambement), les plaques en compression ont aussi tendance à se déformer dans leur surface plane. La forme dépend de l'appui et les conditions de chargement dans les deux directions de la longueur et la largeur.

Toutefois, contrairement aux colonnes, les plaques continuent à porter des charges, même après un flambage. Cette propriété suscite d'un grand intérêt pour l'ingénierie en structure, puisque sa peut jouer dans l'intérêt de la stabilité.

III.2. Définition de la stabilité :

Le flambement est un phénomène rencontré dans la structure. C'est le résultat de l'effet des forces de compression. L'exigence selon laquelle un corps doit être en équilibre semble insuffisante. Même du point de vue purement pratique. Il est souhaitable pour les structures d'être dans un état d'équilibre stable.

L'état d'équilibre stable est défini comme la capacité de la structure de rester en position et de soutenir la charge appliquée, même si elles sont forcées légèrement hors de sa position par une perturbation.

On considère une colonne soumise à une force concentrée (P) agissant le long de son axe central. La charge (P) est continuellement augmentée, passant de zéro à une valeur critique particulière de la charge (P_{cr}) correspondant à une valeur (σ_{cr}) de la contrainte normale inférieure à la contrainte de rupture, il se produit une déformation latérale(**figureIII.1.a**).

Les courbes de déformation latérale de la charge (P) en fonction de (Δ), et de (P) et de (y) sont représentés dans les (**figureIII.1. b**) et(**figureIII.1.c**).

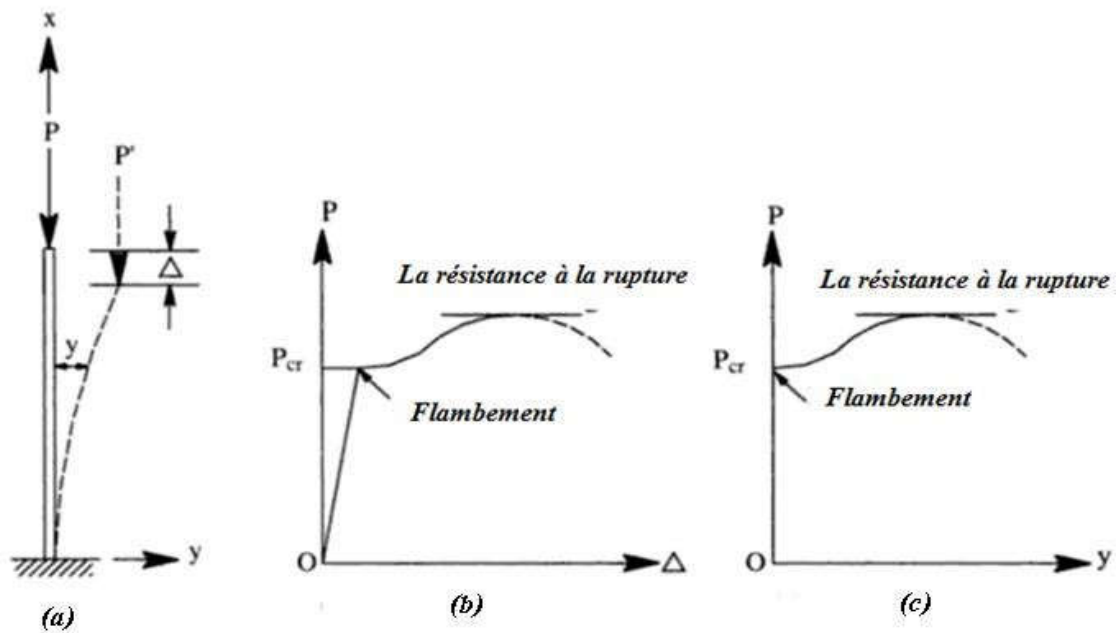


Figure III.1 : comportement charge-déformation de colonne soumise à une compression axiale ; (b) courbe P- Δ , (c) courbe P-y

III.3.Méthodes d'analyse de la stabilité:

L'analyse de la stabilité pour la détermination du mode de la perte de la stabilité structurelle et la charge correspondante est appelée charge critique.

La structure reste au repos avant et après flambement, sauf dans les cas où la perte de la stabilité est due à la transition de l'état de repos à un état de mouvement appelé l'instabilité cinématique ou dynamique. Parmi les méthodes classiques disponibles pour la résolution des problèmes de flambement sont les suivants :

- ✓ L'approche de travail.
- ✓ L'approche de l'énergie.
- ✓ L'approche cinétique ou dynamique.

III.4. Les types des flambement :

III.4.1.Flambement thermique :

L'effet de la température sur une structure peut se manifester de deux façons. D'une part, les propriétés élastiques de la structure dépendent de la température, donc la raideur de la structure aussi. En effet, l'augmentation de la température induit, en général, un assouplissement des matériaux et une diminution de la limite élastique. D'autre part, une variation non-uniforme ou rapide de la température, peut donner lieu à des contraintes thermiques, qui peuvent provoquer un flambement thermique.

En plus de la dégradation des propriétés des matériaux, le flambement thermique est probablement le phénomène le plus important issu de l'effet de l'élévation de la température sur les structures à paroi mince. Il a été reconnu, au début des années cinquante, comme étant l'un des problèmes les plus graves lié à l'échauffement aérodynamique.

L'une des causes fondamentales du flambement thermique est le blocage de la dilatation thermique. Sous certaine condition aux limites, une structure ne peut se dilater librement sous une élévation uniforme de la température, ce qui crée des contraintes thermiques capables d'agir comme des forces de compression pouvant nuire à la stabilité de la structure. La seconde cause du flambement thermique est la variation non-uniforme de la température. En effet, quand une structure uniforme est soumise à un échauffement thermique non-uniforme, ou le contraire, la température varie d'un point à l'autre de la structure. Cette dernière, donne lieu à des contraintes thermiques internes qui peuvent aussi nuire la stabilité de la structure.

III.4.2. Flambement mécanique :

Le flambement mécanique signifie généralement une défaillance catastrophique dans les systèmes de mécanique des structures. Cependant, le flambement contrôlé de films minces sur des substrats conformes a été utilisé de manière avantageuse dans divers domaines tels que la fabrication micro-nano, l'optique, la bio-ingénierie et la métrologie, ainsi que des études de mécanique fondamentale.

III.4.3.Flambement des plaques:

Le flambement d'une plaque implique la flexion dans deux plans. Un élément de plaque peut porter une charge supplémentaire au-delà de la charge critique. Cette force de réserve est appelée la résistance après flambement. L'importance relative de la résistance après flambement à la charge de flambement dépend de divers paramètres tels que les propriétés dimensionnelles, les effets d'imperfection, l'importance des effets non linéaires géométriques, les conditions aux limites, les types de chargement, et le rapport de contrainte de flambement ainsi que la limite d'élasticité.

La première solution d'un problème de stabilité de plaque plane simplement appuyée été donnée par Bryan (1891), Euler a présenté l'analyse de la stabilité d'une colonne au début du XXe siècle. Timoshenko a étudié le flambement avec divers des conditions aux limites. Bon nombre sont donnés par Timoshenko et Gere (1961). Traitement de l'analyse de la stabilité de plaque plane est trouvé par Bleich (1952) et Timoshenko et Gere (1961).

III.5. Approche du Flambement :

Le voilement est un phénomène d'instabilité relatif aux plaques sollicitées dans leur plan. Sous l'effet d'efforts de compression, les plaques se déforment perpendiculairement au plan des efforts.

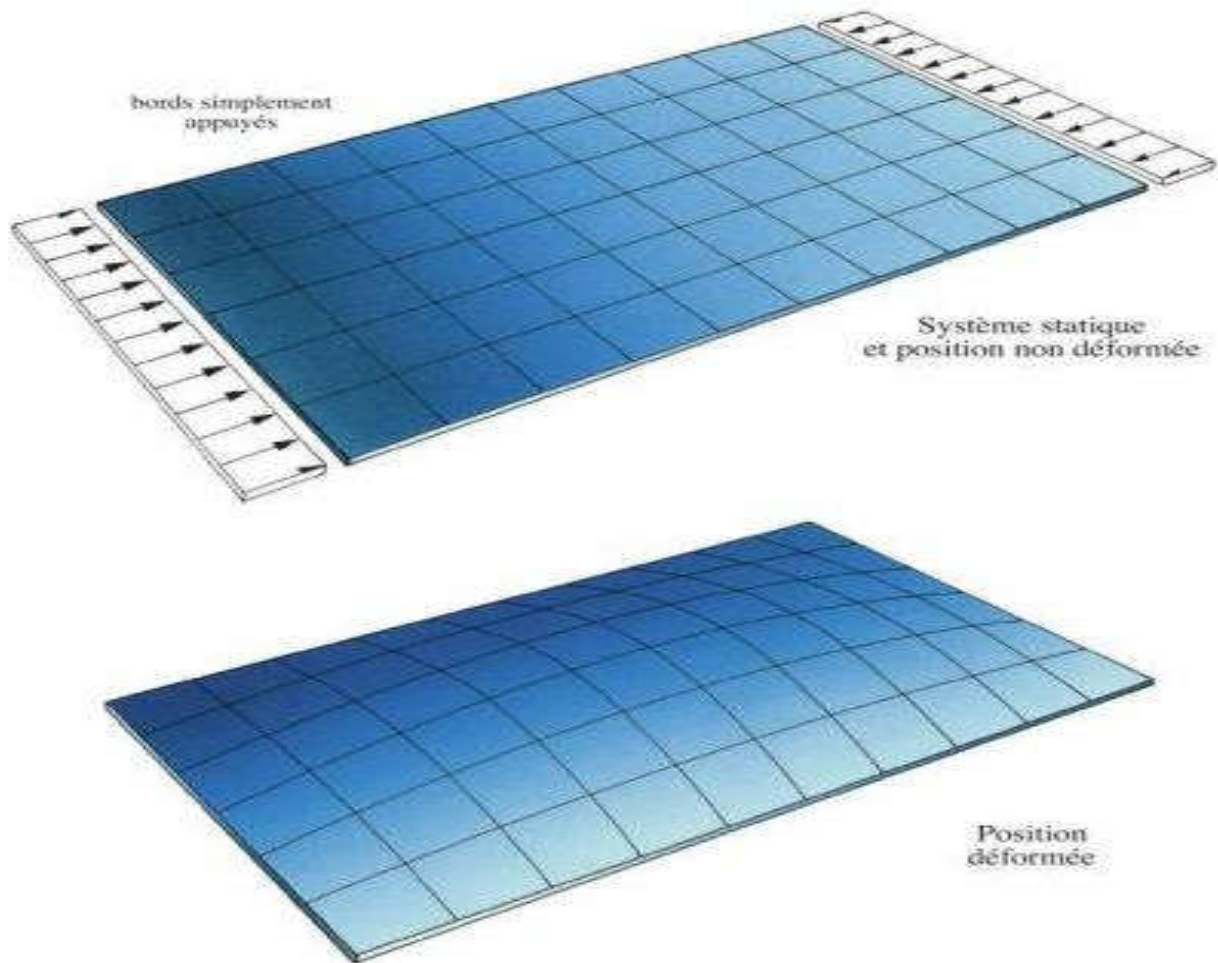


Figure III.2 : Flambement d'une plaque.

III.6. Plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotes :

Considérons une plaque rectangulaire parfaitement plate, simplement appuyée sur les quatre cotes et soumise à une force de compression uniforme N_x par unité de longueur dans la direction x (**figure III.3**). L'équation d'équilibre pour une telle plaque est donnée par :

Etude et analyse du flambement d'une plaque homogène soumise à un chargement thermique
 Ou w désigne la déviation dans la direction z de tout point (x, y)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Er^3} \left(-N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III-1})$$

Où w désigne la déviation dans la direction z de tout point (x, y)

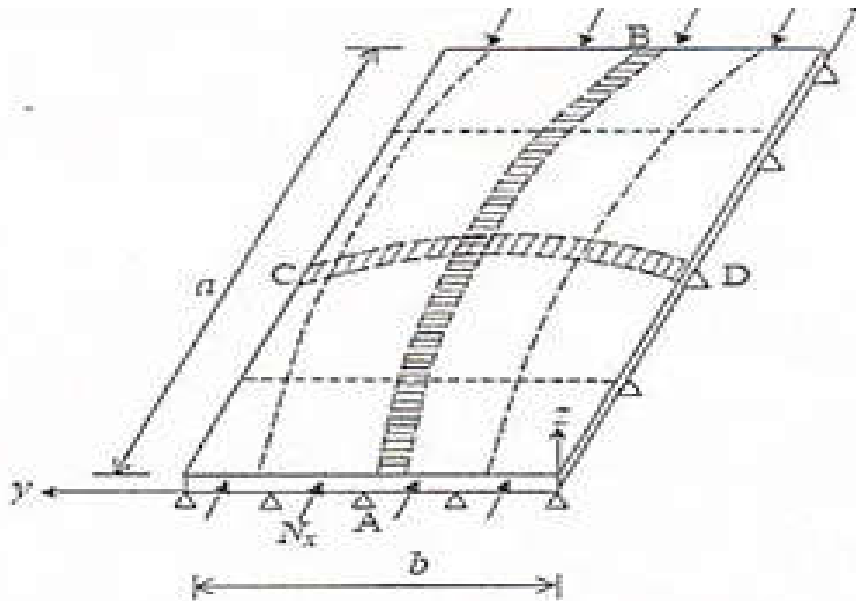


Figure III.3:Flambage de la plaque sous une compression uni-axial.

III.7.Modes du flambement des plaques :

En abordant les structures a parois minces, (Plaques, coques, profilées,etc...) on doit immédiatement considérer les phénomènes de flambement qui y sont inhérents. Les structures à parois minces peuvent être soumises aux flambements local, distorsionnel et global.

1. Le flambement local :

C'est un mode impliquant seulement la flexion hors-plan de plaque sans déformation des lignes à la jonction des plaques et il est caractérisé par l'onde de flambement relativement courte des plaques individuelles.

2. Le flambement distorsionnelle :

Comme suggère le terme, est un mode de flambement impliquant le changement de forme de la section transversale ; les lignes d'intersection des plaques se déplacent relativement. L'onde du flambement distorsionnel est de valeur moyenne.

3. Le flambement global :

Les sections dans le flambement global se déplacent comme des corps rigides sans aucune distorsion et l'onde de flambement global est la plus longue par rapport aux deux autres modes de flambement précédents.

III.8. L'interaction entre les modes de flambement :

Sa peut se produire, pour le calcul, on examine souvent les interactions entre les flambements local et distorsionnel, local et global ou distorsionnel et global.

Les modèles d'éléments finis de plaque et de coque surbaissée déformable en cisaillement avec la rotation dans le plan ont été appliqués avec succès à l'analyse linéaire des structures à parois minces. On peut déterminer la contrainte de flambement élastique en considérant l'influence du cisaillement à travers l'épaisseur des parois. Les résultats s'accordent bien avec la théorie classique des plaques lorsque le rapport largeur-épaisseur est grand. Bien que l'analyse linéaire du flambement soit suffisante dans la plupart des cas pratiques et utile pour la conception des barres à parois minces, quelques structures qui sont très sensibles à l'imperfection, ne sont pas proprement traitées par celle-ci. Dans ces cas, il faut recourir à l'analyse non-linéaire. La modélisation des structures à parois minces par éléments de plaque et de coque permet de tenir compte de la distorsion de la section transversale et de l'interaction entre les modes de flambement.

La méthode des éléments finis est depuis longtemps connue comme une méthode puissante pour l'analyse structurelle. De nombreux types de coques sont utilisés pour l'analyse non-linéaire des structures composées de plaques ; ce qui permet la simulation de la distorsion de la section transversale et des phénomènes de flambement de la structure.

III.9. Quelques exemples sur le flambement :

III.9.1. Flambement d'une plaque raidie sous compression longitudinale et pression hydrostatique :

Cette vue montre les formes de flambement local qui se sont développées dans le panneau. Du fait que la plaque était en compression biaxiale sous l'influence de la flexion des raidisseurs transversaux, les panneaux individuels n'ont pas flambé selon la forme d'onde circulaire habituelle. Cet effet est plus marqué au centre du panneau où la compression transversale est la plus grande.



Figure III.4 :Flambement d'une plaque raidie.

III.9.2. Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson :

Essai de flexion sur un caisson avec raidisseurs transversaux. Le panneau comprimé a flambé. Notez la déformation des angles du caisson. Ceci a contribué à réduire l'efficacité de l'effet de plaque

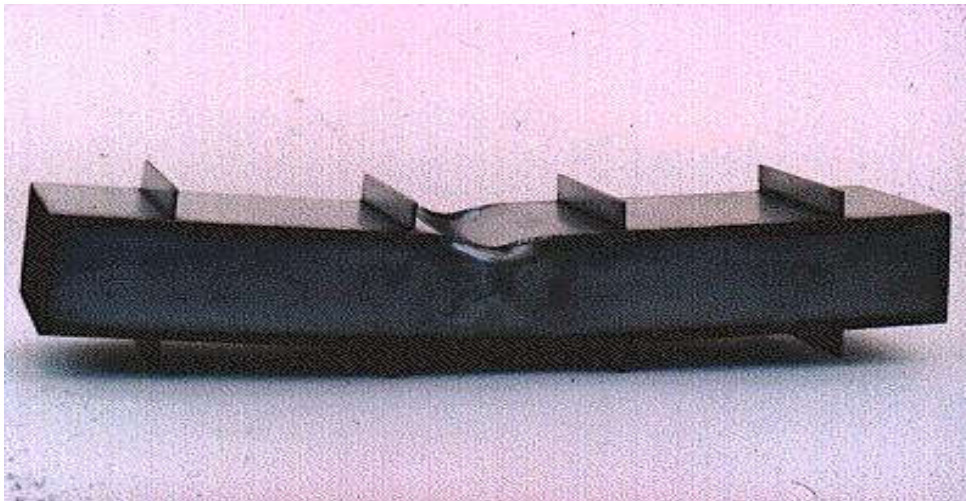


Figure III.5 : Ruine de la semelle comprimée d'une poutre en caisson.

III.9.3. Ruine locale d'un profil creux rectangulaire :

Flambement par flexion-torsion d'une bôme comprimée. Remarquez la distorsion de la section transversale souple. L'essai faisait partie d'un programme d'étude d'un système de treillis spatial en éléments minces.



Figure III.6 : Ruine locale d'un profil creux rectangulaire.

III.9.4. Voilement local d'une semelle de poutre :

Notez la faible longueur de l'onde du flambement : la demi-longueur d'onde est pratiquement égale à la longueur de paroi en console (demi-largeur de la semelle).

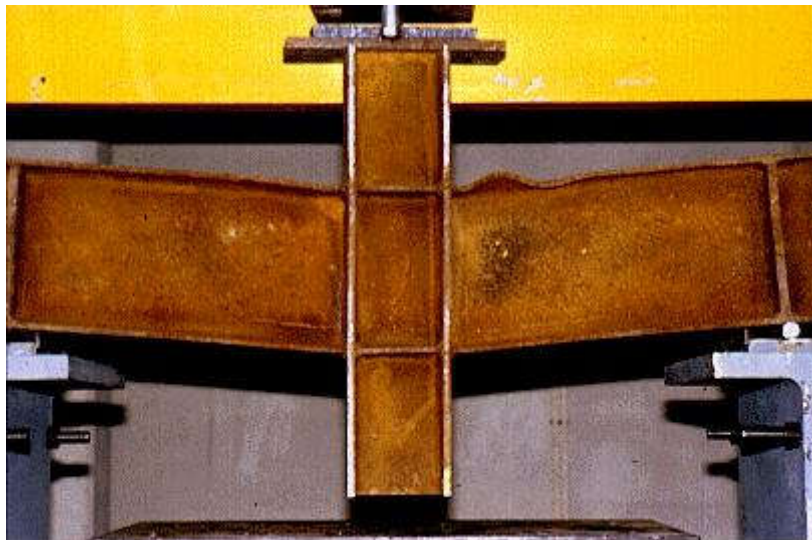


Figure III.7 : Voilement local d'une semelle de poutre.

III.9.5. Flambement d'une coque cylindrique comprimée :

Flambement d'une coque cylindrique raidie radialement soumise à une compression axiale et à une pression hydrostatique. Les traits blancs montrent la position des anneaux raidisseurs.



Figure III.8 :Flambement d'une coque cylindrique comprimée.

III.9.6. Flambement de Réservoir :

Lors des séismes récents plusieurs réservoirs de stockage (figures III.9) ont flambé ce qui a engendré de nombreuses études concernant l'effet du fluide sur la réponse de la structure. Les types de flambage observés montrent soit un flambage de type patte d'éléphant soit un flambage en pointes de diamant [CLO82], les cloques sont toujours situées en bas de la coque. Les différences proviennent des dimensions des réservoirs en cause, l'un a un rapport R/t de 1650, l'autre un rapport R/t de 775.



Figure III.9 :Réservoir flambé après séisme (mode en pointe de diamant)

III.10. Conclusion :

La résistance au flambement d'un élément ou d'un composant de section, peut être améliorée de plusieurs façons.

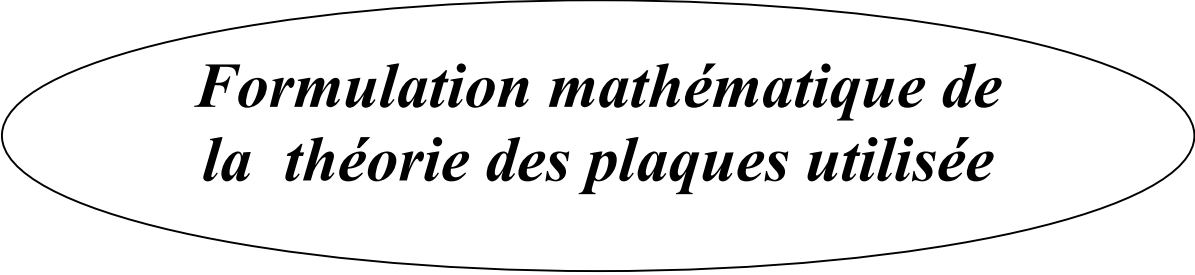
Pour une forme de flambement donnée, une réduction du rapport d'élançement se traduira par une charge ultime plus élevée. Ceci sera normalement réalisé en augmentant les dimensions de la section droite ; cela peut aussi être fait en répartissant le matériau de manière différente le long du centre de gravité, tout en gardant à la section droite une section constante ; en faisant cela ; cependant, on peut changer la réponse de la section et/ou de l'élément, de telle sorte que d'autres formes de flambement puissent devenir critiques. En particulier, une diminution d'épaisseur de composants de section droite, afin de mieux répartir le matériau, a souvent pour conséquence un voilement, prépondérant d'un point de vue calcul.

Une autre manière d'améliorer la résistance au flambement d'un élément est de lui fournir des maintiens de meilleure qualité ou supplémentaires, afin de modifier le mode de flambement. La charge critique élastique d'un poteau en compression axiale bi articulé, par exemple, est augmentée d'un facteur 4 si on ajoute un appui simple à mi-hauteur, de telle sorte que le poteau flambe dans un mode en deux demi-ondes sinusoïdales. De la même manière une poutre simplement appuyée, soumise à de la flexion par rapport à son axe le plus fort, est renforcée vis-à-vis du déversement en empêchant les rotations de flexion et/ou de torsion à ses supports d'extrémités, ou, plus simplement, en mettant un obstacle à tout déplacement latéral de la semelle en compression au moyen d'un entretoisement adéquat. La résistance ultime d'une plaque mince comprimée peut être améliorée de façon appréciable en fixant des raidisseurs longitudinaux et éventuellement transversaux ; à condition qu'ils soient assez rigides, la plaque flambera entre les raidisseurs, pour une contrainte critique élastique plus élevée. Le fait de raidir des structures en coques produira, de la même manière, une augmentation de la résistance.

Bien que la résistance de calcul soit plutôt reliée à la contrainte ultime qu'à la contrainte critique élastique, les commentaires ci-dessus peuvent, qualitativement être étendus à la capacité porteuse ultime.



CHAPITRE - IV -



***Formulation mathématique de
la théorie des plaques utilisée***

IV.1. Introduction

La fondation viscoélastique est modélisée on prise en compte en l'impact de l'amortissement au modèle habituel de fondation qui se caractérise par le module de Winkler linéaire et le module de fondation de Pasternak. Les équations du mouvement de la plaque FGM sont obtenues par l'application de principe d'Hamilton. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres. Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions trouvés dans d'autres modèles de la littérature, pour être dans le bon accord.

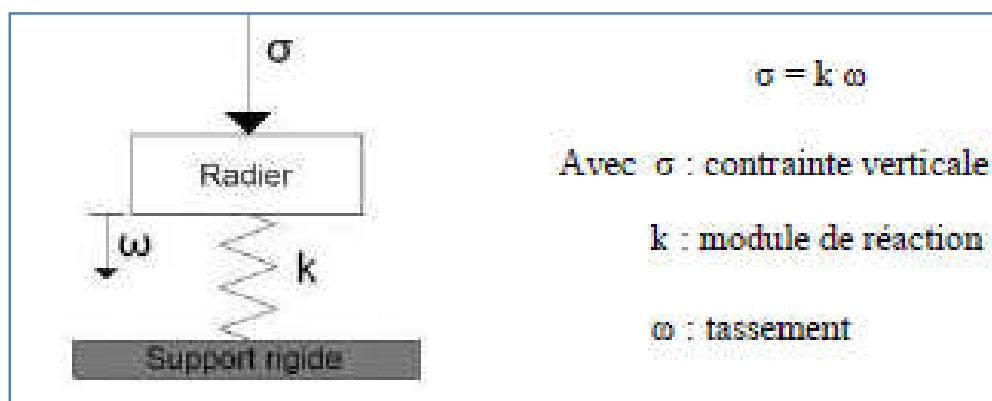
IV.2. Modèles de fondations

Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles pour résoudre ce problème complexe d'interaction sol-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'interaction sol-structure adoptée :

IV.2.1. Model de Winkler

Le modèle le plus simple de la fondation élastique est de [Winkler_1867^[17]], qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement entre l'un l'autre,



ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque.

Figure IV.1: Hypothèse de Winkler [Winkler_1867^[17]]

Il consiste à substituer le sol par une « infinité » de ressorts élastiques juxtaposés et de même constante de raideur. Cette constante, k , caractérise le sol : elle exprime la proportionnalité entre la contrainte verticale appliquée et le tassement, et est appelée module de réaction du sol.

Cette méthode simplificatrice permet une bonne approximation des déformées d'une poutre posée sur le sol ou d'un radier. Cependant, il est important d'insister sur le mot approximation. En effet, le principe de calcul proposé par Winkler néglige d'une part, l'interaction inévitable de deux ressorts juxtaposés (l'effet de Poisson du sol) et d'autre part, la zone externe à la fondation qui influence le tassement global. Selon Winkler, seule la zone située sous le radier se tasse comme indiqué sur la figure suivante.

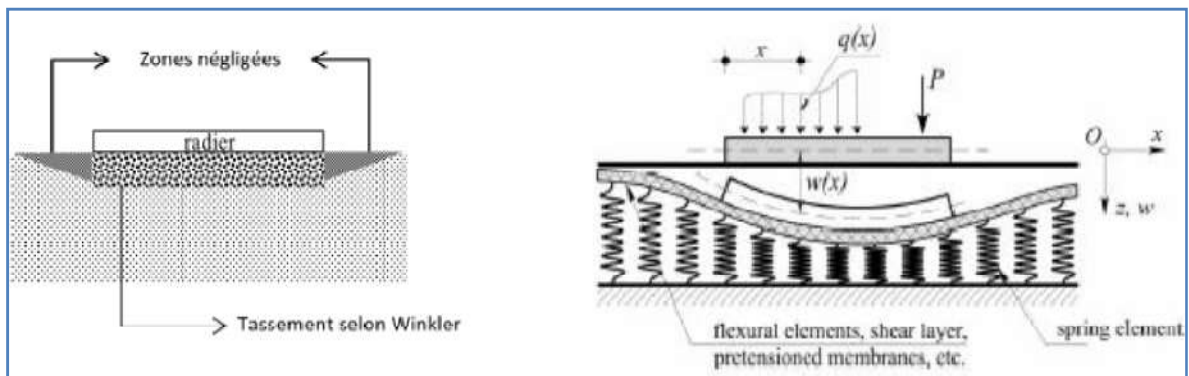


Figure IV.2: Approximation de Winkler[Winkler_1867^[17]]

IV.2.2. Model de Pasternak

Le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle (G_p) du sol en plus de la rigidité normale (K_p). Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de [Winkler_1867^[17]] et celui de [Pasternak.1954^[16]]. Un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de [Winkler_1867^[17]], alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de [Pasternak_1954^[16]].

Avec :

$q(x)$ [N/m] : la charge linéique s'appliquant sur le radier.

G_p : le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m].

k_p : le module de réaction du sol [Pa/m] et $w(x)$ la déformée du terrain.

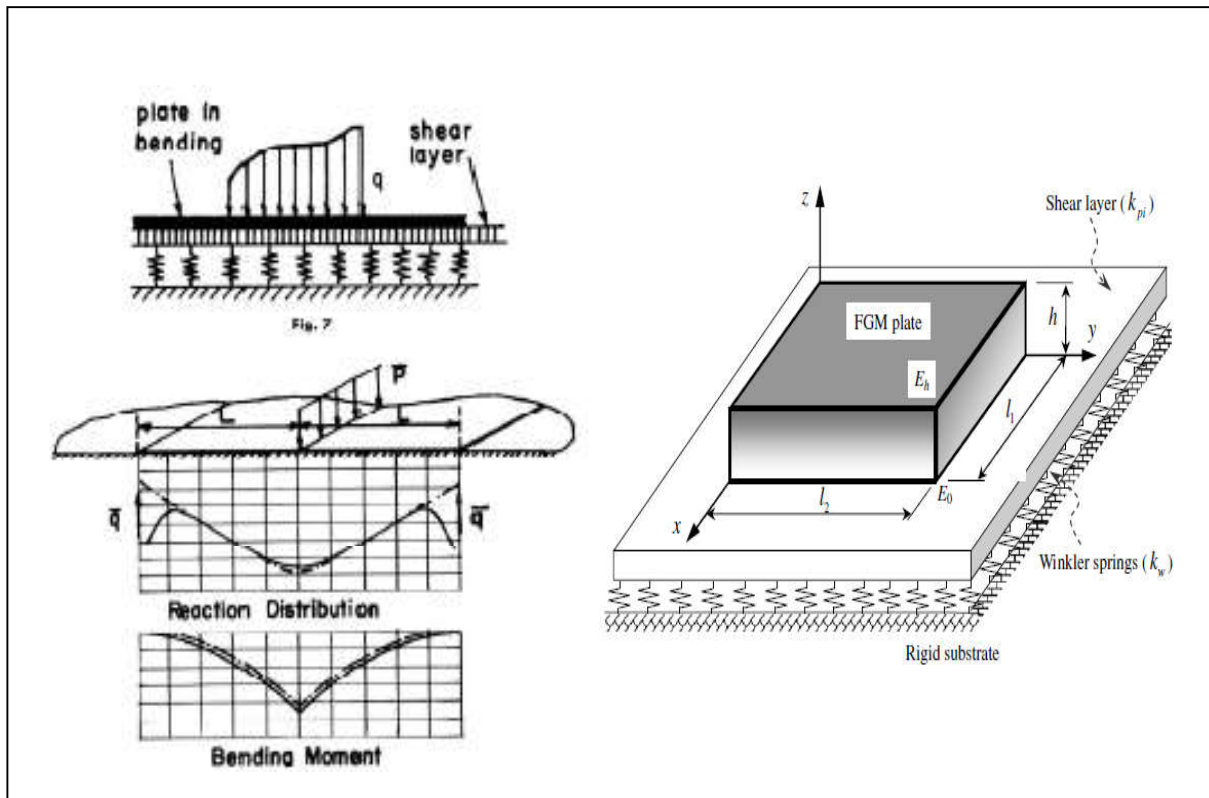


Figure IV.3: Hypothèse de Pasternak [Pasternak_1954^[16]]

IV.2.3 Model Visco-Winkler-Pasternak

La plaque actuelle de FGM est soutenue par une fondation Viscoélastique de trois-paramètre homogène. Ce dernier est caractérisé par le module linéaire de Winkler k_w , le module de fondation de Pasternak (cisaillement) k_s et le coefficient de Viscosité C_t du milieu Viscoélastique qui représente le contact entre la plaque FGM et l'appui,

[Kerr_1964^[18]] le premier modèle qui présente Un type de fondations qui considèrent l'amortissement Viscoélastique.

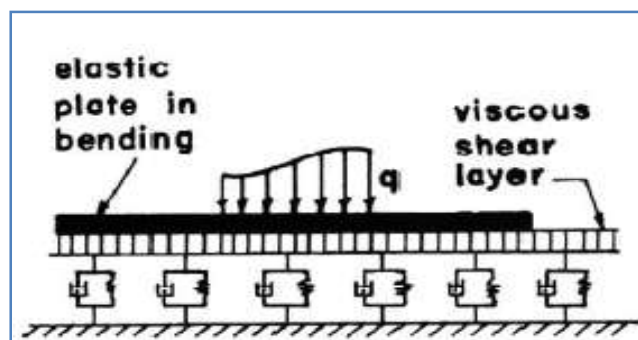


Figure IV.4 : modèle Visco-Winkler-Pasternak [Kerr_1964^[18]]

Suivant le modèle de fondation de type visco-Pasternak à trois paramètres de [Zenkour et al_2016^[114]], tel que :

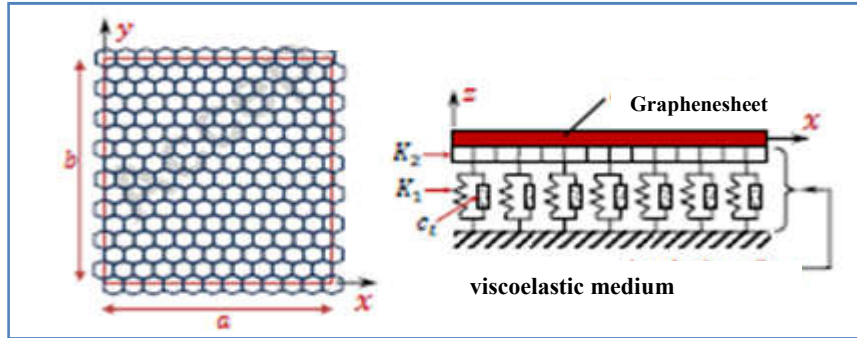


Figure IV.5 : modèle Visco-Winkler-Pasternak [Zenkour et al_2016^[114]]

$$R_f = \left(k_w - k_s \nabla^2 + c_t \frac{\partial}{\partial t} \right) w \quad (IV-1)$$

Où : w est le déplacement transversal et ∇^2 est le Laplacien.

le coefficient k_s est zéro si la fondation est modélisée comme Visco-Winkler.

Dans cet travail, l'effet de fondation viscoélastique sur la réponse au flambement de plaques sandwich fonctionnellement graduée dans diverses conditions aux limites en utilisant une théorie de déformation par cisaillement simplement raffinée est présenté. Les théories proposées ne contiennent que quatre inconnues et satisfont les conditions d'équilibre aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en fonction de la variation non linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Il y a deux contributions majeures : l'utilisation d'une théorie exponentielle des plaques avec seulement quatre paramètres généralisés, et l'étude de l'effet des conditions aux limites sur la charge de flambement des plaques sandwich FGM reposant sur une fondation viscoélastique. Différents types de structures sandwich FGM sont pris. La fondation de visco-Pasternak est prise en compte en ajoutant l'impact de l'amortissement au modèle de fondation habituel qui se caractérise par le module linéaire de Winkler et le module de fondation de Pasternak. Les équations analytiques de la plaque sont obtenues par la méthode de Galerkin pour différentes conditions aux limites. La justesse des solutions obtenues est vérifiée en comparant les résultats actuels avec ceux prédits par les solutions disponibles dans la littérature.

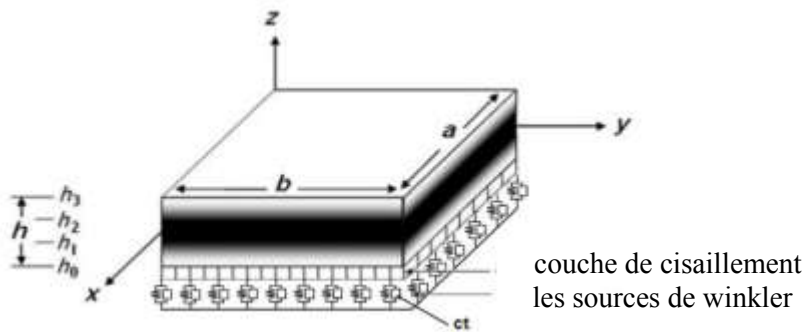


Figure. IV.6 Géométrie de la plaque sandwich EGM reposant sur Fondations viscoélastiques

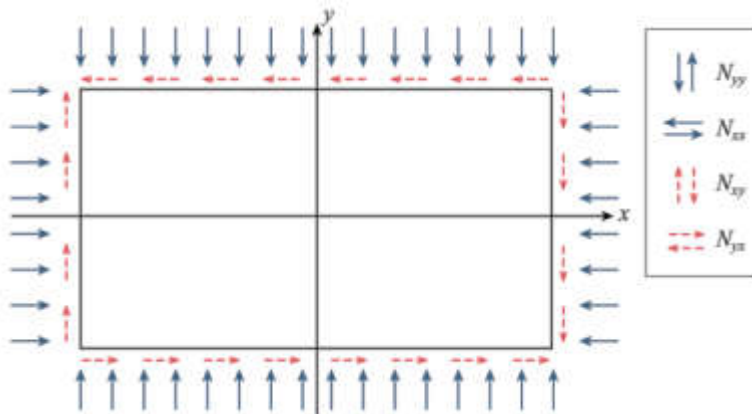


Figure. IV.7 Plaque rectangulaire soumise à des forces dans le plan (Neves et al. 2012)

IV.3. Formulation théorique

IV.3.1 Modélisation d'un matériau fonctionnellement gradué

Considérons une structure composite composée de trois isotropes des couches d'épaisseur quelconque h , longueur a et largeur b . La plaque sandwich FGM est supportée à quatre bords définis dans le (x, y, z) système de coordonnées avec les axes x et y situés dans le plan médian ($z = 0$) et son origine placée au coin de la plaque. Les positions verticales des deux interfaces entre les couches d'âme et de faces sont notées, respectivement, par h_1 et h_2 . Le noyau sandwich est un matériau céramique et les peaux sont composées d'un matériau fonctionnellement classé à travers le sens de l'épaisseur. La peau inférieure varie d'une surface riche en métal ($z = h_0 = -h/2$) à une surface riche en céramique tandis que la face supérieure de la peau varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal ($z = h_3 = h/2$). Il est supposé reposer sur un modèle de fondation visco-Pasternak avec k_w représente la rigidité de Winkler, tandis que c_t et k_s le paramètre de viscosité et la rigidité de cisaillement de la couche de fondation, respectivement comme illustré à la Fig. IV.6. Le volume fraction de la phase céramique est obtenue à partir d'une règle simple de mélanges comme suite :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1]$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \tag{IV-2}$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3]$$

où $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$), désigne la fonction de fraction volumique de la couche n ; k est l'indice de fraction volumique ($0 \leq k \leq +\infty$), qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur h . Notez que le noyau du sandwich actuel et tout matériau isotrope peuvent être obtenus comme un cas particulier de la fonction de loi de puissance en fixant $p = 0$. La fraction volumique de la phase métallique est donnée par $V_m = 1 - V_c$.

Les propriétés mécaniques des matériaux fonctionnellement gradués sont souvent représentées sous la forme exponentiellement graduée et les variations de la loi de puissance (Sobhy 2013). Sur la base d'une loi de distribution exponentielle, les propriétés matérielles $P^{(n)}(z)$ de l'E-FGM, telles que le module de Young E , sont déterminées comme suit :

$$P^{(n)}(z) = P_m \exp(\beta V^{(n)}), \quad \beta = \ln(E_c / E_m), \quad (n = 1, 2, 3) \tag{IV-3}$$

Le coefficient de Poisson ν est supposé être une valeur constante à travers l'épaisseur de la plaque sandwich.

La plaque sandwich est soumise à des forces de compression dans le plan agissant sur le plan médian de la plaque. \overline{N}_{xx} et \overline{N}_{yy} désignent les charges dans le plan perpendiculaires aux bords $x = 0$ et $y = 0$ respectivement, et \overline{N}_{xy} désigne la force de cisaillement répartie parallèlement aux bords $x = 0$ et $y = 0$ (voir figure IV.7).

IV.3.2 Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement à quatre inconnues

IV.3.2.1 Cinématique et équations constitutives

Dans cette étude, des suppositions simplificatrices supplémentaires sont faites au HSDT conventionnel afin que le nombre d'inconnues soit réduit. Le champ de déplacement du HSDT conventionnel est donné par

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) \tag{IV-4}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ sont les cinq déplacements inconnus dans le plan médian de la plaque. En considérant que $\phi_x = k_1 \int \theta(x, y, t) dx$ et $\phi_y = k_2 \int \theta(x, y, t) dy$ (Mantari et Granados 2015a, b).

Dans ce travail, la HSDT conventionnelle est modifiée en proposant des suppositions simplificatrices pour que le nombre d'inconnues soit réduit comme

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \end{aligned} \quad (IV.5)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

es constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. Les fonctions de forme $f(z)$ sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, ainsi un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Dans cette étude, la fonction de forme est considérée.

$$f(z) = \frac{z \left(\pi + 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right)}{(2 + \pi)} \quad (IV.6)$$

Les déformations linéaires non nulles sont

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (IV.8a)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (IV.8b)$$

et $g(z)$ est donné comme suit

$$g(z) = f'(z) \tag{IV.9}$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type et peuvent être écrites comme suit

$$\int \theta(x, y, t) dx = A' \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x}; \int \theta(x, y, t) dy = B' \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial y}; \tag{IV.10}$$

$$k_1 A' \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} = \varphi_x(x, y, t); k_2 B' \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial y} = \varphi_y(x, y, t);$$

où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisée, en l'occurrence pour des solutions exactes pour des plaques sandwich pour différentes conditions aux limites.

Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit.

où λ et μ sont définis dans la section 3.

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \text{ et} \tag{IV.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)}$$

Tableau IV.1 valeur de A' , B' , k_1 et k_2 pour différentes conditions aux limites

Conditions aux limites	A'	k_1	B'	k_2
SSSS	$-1/\lambda^2$	λ^2	$-1/\mu^2$	μ^2
CSSS	$-1/3\lambda^2$	$3\lambda^2$	$-1/\mu^2$	μ^2
CSCS	$-1/3\lambda^2$	$3\lambda^2$	$-1/3\mu^2$	$3\mu^2$
CCSS	$-1/4\lambda^2$	$4\lambda^2$	$-1/\mu^2$	μ^2
CCCC	$-1/4\lambda^2$	$4\lambda^2$	$-1/4\mu^2$	$4\mu^2$
FFCC	$-1/8\lambda^2$	$8\lambda^2$	$-1/4\mu^2$	$4\mu^2$

où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation.

En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (IV-2), les coefficients de rigidité, Q_{ij} , peuvent être exprimés comme

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (IV.12a)$$

$$Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (IV.12b)$$

$$Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (IV.12c)$$

Les résultantes de contrainte et de moment de la plaque sandwich FGM peuvent être obtenues en intégrant l'équation (IV.11) sur l'épaisseur, et s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x & M_y & M_{xy} \\ S_x & S_y & S_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (IV.13a)$$

$$(Q_{xz}^{(n)}, Q_{yz}^{(n)}) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} g(z) dz, \quad (IV.13b)$$

où h_n et h_{n-1} sont les coordonnées z supérieure et inférieure de la nième couche.

En utilisant l'équation (IV.11) dans l'équation. (IV.13), les résultantes de contrainte d'une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être liées aux déformations totales par

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, Q = A^s \gamma \quad (IV.14)$$

où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, M^s = \{S_x, S_y, S_{xy}\}^t \quad (IV.15a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (IV.15b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (IV.15c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{21}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (IV.15d)$$

$$S = \{Q_{yz}, Q_{xz}\}^t, \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (IV.15e)$$

où A_{ij}, B_{ij} , etc., sont la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (IV.16a)$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (IV.16b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (IV.16c)$$

IV.3.2.2 Équations gouvernantes

Le principe du travail virtuel est utilisé pour le problème de flambement de la plaque sandwich FG. Le principe peut être exprimé en analytique à partir de

$$\delta U + \delta U_F + \delta V = 0 \quad (IV.17)$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle, δU_F l'énergie de déformation supplémentaire induite par les fondations élastiques et δV est le travail virtuel effectué par les forces appliquées.

L'énergie de déformation virtuelle est exprimée par

$$\begin{aligned} \delta U &= \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(n)} \delta \varepsilon_x + \sigma_y^{(n)} \delta \varepsilon_y + \tau_{xy}^{(n)} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{(n)} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(n)} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ &= \iint_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + M_x \delta k_x^b + M_y \delta k_y^b + M_{xy} \delta k_{xy}^b + S_x \delta k_x^s + S_y \delta k_y^s + S_{xy} \delta k_{xy}^s + Q_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0] dA \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Où A est la surface supérieure.

L'énergie de déformation induite par les fondations élastiques peut être définie comme

$$\delta U_F = \int_A f_e \delta w_0 dA \quad (IV.19)$$

où A est l'aire de la surface supérieure et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondations visco-Winkler Pasternak

$$f_e = k_w w - k_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_t \frac{\partial w}{\partial t} \quad (IV.20)$$

où k_w est le module de réaction du sol de fondation (coefficient élastique de la fondation) et k_{sx} et k_{sy} sont = les modules de cisaillement du sol de fondation (rigidité de la fondation de la couche de cisaillement) et le coefficient d'amortissement c_t du milieu viscoélastique.

Si la fondation est homogène et isotrope, on obtiendra $k_{sx} = k_{sy} = k_s$.

Le travail virtuel externe dû aux forces dans le plan et aux forces de cisaillement appliquées à la plaque est donné par

$$\delta V = - \int_A \left(\bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 2\bar{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 dA \quad (IV.21)$$

étant \bar{N}_{xx} et \bar{N}_{yy} les charges dans le plan perpendiculaires aux bords $x=0$ et $y=0$, respectivement, et \bar{N}_{xy} et \bar{N}_{yx} les forces de cisaillement réparties parallèlement aux bords $x=0$ et $y=0$, respectivement.

Substitution d'équations. (IV.19), (IV.20) et (IV.21) dans l'équation (IV.17) et en intégrant par parties, et en collectant les coefficients de $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta)$, les équations de mouvement suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \bar{N} - f_e &= 0 \\ \delta \theta : -k_1 S_x - k_2 S_y - (k_1 A' + k_1 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + k_1 B' \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (IV.22)$$

IV.3.2.3 Equations du mouvement en termes de déplacements

Substitution d'éqs. (IV.8), (IV.14) dans l'équation (IV.21), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements généralisés $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta)$ comme

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{11}^s k_1 A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + B_{12}^s k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y^2} + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = 0 \\
 \delta v_0 : & A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
 & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}^s k_1 A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^3} + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = 0 \\
 \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^3} + 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 & - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11}^s k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} \\
 & + D_{12}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^s k_2 B' \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \bar{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + k_w w_0 - k_s \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + c_t \frac{\partial w_0}{\partial t} = 0 \tag{IV.23} \\
 \delta \theta : & -B_{11} k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{12} \left(k_1 A' \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) - B_{22}^s k_2 B' \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^3} \\
 & + D_{11}^s k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{66} (k_1 A' + k_2 B') \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + D_{22}^s k_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - H_{11}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - 2H_{12}^s k_1 A' k_2 B' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s (k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\
 & - H_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + A_{44}^s (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned}$$

IV.4 Solutions exactes pour les plaques sandwich FGM

Dans cette section, les solutions exactes des équations gouvernantes pour l'analyse de flambement d'une plaque sandwich EGMs avec bords simplement appuyés (S), encastés (C) ou libres (F) sont présentés. Ces conditions aux limites sont définies comme suit :

Simplement appuyés (S)

$$v_0 = w_0 = \frac{\partial \theta}{\partial y} = N_{xx} = M_{xx} = S_{xx} = 0 \text{ à } x = 0, a, \quad (IV.24)$$

$$u_0 = w_0 = \frac{\partial \theta}{\partial x} = N_{yy} = M_{yy} = S_{yy} = 0 \text{ à } y = 0, b,$$

encastrés (C)

$$u_0 = v_0 = w_0 = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ à } x = 0, a, y = 0, b, \quad (IV.25)$$

libres (F)

$$M_{xx} = M_{xy} = Q_{xz} = 0 \text{ à } x = 0, a, \quad (IV.26)$$

$$M_{yy} = M_{xy} = Q_{yz} = 0 \text{ à } y = 0, b,$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont les conditions aux limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} \\ W_{mn} e^{i\omega t} X_m(x) Y_n(y) \\ Z_{mn} e^{i\omega t} \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} Y_n(y) \end{Bmatrix} \quad (IV.27)$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et Z_{mn} , sont des coefficients arbitraires à déterminer. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ sont suggérées ici pour satisfaire au moins les conditions aux limites géométriques données dans les équations (IV.24)-(IV.26) et représentent des formes approximatives de la surface déviée de la plaque. Ces fonctions, pour les différents cas de conditions aux limites, sont listées dans le Tableau 2 en notant que $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$. La plaque est soumise à des efforts dans le plan dans deux directions $\overline{N}_x = N_{cr}$, $\overline{N}_y = xN_{cr}$ i.e, $x = \overline{N}_y / \overline{N}_x$ et $\overline{N}_{xy} = 0$.

En remplaçant les expressions (IV.27) dans les équations gouvernantes (IV.23) et multiplier chaque équation par la fonction propre correspondante puis intégrer sur le domaine de la solution, on peut obtenir, après quelques manipulations mathématiques, les équations suivantes

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ Z_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.28})$$

Dans lequel

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}e_{12} + A_{66}e_8 \\ S_{12} &= (A_{11} + A_{66})e_8 \\ S_{13} &= -(B_{12} + 2B_{66})e_8 - B_{11}e_{12} \\ S_{14} &= -\left[k_1A'B_{66}^s + k_2B'(B_{12}^s + B_{66}^s)\right]e_8 + (B_{12} + 2B_{66})e_8 + k_1A'B_{11}^se_{12} \\ S_{21} &= (A_{12} + A_{66})e_{10} \\ S_{22} &= A_{22}e_4 + A_{66}e_{10} \\ S_{23} &= (B_{12} + 2B_{66})e_{10} - B_{22}e_4 \\ S_{24} &= \left[k_1A'(B_{12}^s + B_{66}^s) + k_2B'B_{66}^s\right]e_{10} + k_2B'B_{22}^se_4 \\ S_{31} &= (B_{12} + 2B_{66})e_{11} - B_{11}e_{13} \\ S_{32} &= (B_{12} + 2B_{66})e_{11} - B_{22}e_5 \\ S_{33} &= (-2D_{12} + 4D_{66})e_{11} - D_{11}e_{13} - D_{22}e_5 + (\bar{N}_{xx} - k_{xx})e_9 \\ &+ (\bar{N}_{yy} - k_{yy})e_3 + (k_w + c_t\omega)e_1 + 2\bar{N}_{xy}e_7 \\ S_{34} &= \left[k_1A'(D_{11}^s + 2D_{66}^s) + k_2B'(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\right]e_{11} \\ &+ k_1A'D_{11}^se_{13} + k_2B'D_{22}^se_5 \\ S_{41} &= -\left[k_1A'B_{66}^s + k_2B'(B_{12}^s - B_{66}^s)\right]e_{11} - k_1A'B_{11}^se_{13} \\ S_{42} &= -\left[k_1A'(B_{12}^s + 2B_{66}^s)e_{11} + k_2B'(B_{66}^se_{11} + B_{22}^se_5)\right] \\ S_{43} &= \left[k_1A'(D_{11}^s + 2D_{66}^s) + k_2B'(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\right]e_{11} + k_1A'D_{11}^se_{13} + k_2B'D_{22}^se_5 \\ S_{44} &= \left(H_{11}^s(k_1A')^2 + 2H_{12}^sk_1A'k_2B' + H_{11}^s(k_2B')^2\right)e_{15} \\ &+ H_{66}^s(k_1A' + k_2B')^2e_{18} - A_{55}^s\left((k_1A')^2e_{19} + (k_2B')^2e_{16}\right) \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Avec

$$\begin{aligned}
 (e_{20}, e_8, e_{12}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^m Y_n^n, X_n^n Y_n^n, X_m^m Y_n) X_m^m Y_n dx dy \\
 (e_{21}, e_4, e_{10}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^m Y_n', X_m^m Y_n^m, X_m^m Y_n') X_m^m Y_n' dx dy \\
 (e_1, e_3, e_5, e_{14}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^m Y_n, X_m^m Y_n^n, X_m^m Y_n'^m, X_m^m Y_n^n) X_m^m Y_n dx dy \\
 (e_7, e_9, e_{11}, e_{13}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^m Y_n', X_m^m Y_n, X_m^m Y_n^n, X_m^m Y_n) X_m^m Y_n dx dy \\
 (e_{15}, e_{16}, e_{17}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^m Y_n, X_m^m Y_n^n, X_m^m Y_n^n) X_m^m Y_n' dx dy \\
 (e_{18}, e_{19}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^m Y_n^n, X_m^m Y_n) X_m^m Y_n dx dy
 \end{aligned} \tag{IV.30}$$


Comme on peut le voir clairement à partir de l'Eq. (IV.30), le coefficient S_{33} est fonction des charges normales appliquées sur les bords de la plaque, soit \bar{N}_{xx} et \bar{N}_{yy} . Le système matriciel (IV.29) admet une solution non triviale si et seulement si son déterminant $|S_{ij}|$ est égal à zéro. La charge critique de flambement est ainsi obtenue.

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre une approche a été présentée pour l'étude de flambement des plaques reposant sur une fondation viscoélastique. Pour valider cette approche quelques exemples seront présentés dans le chapitre suivant pour une plaque rectangulaires symétriques en utilisant les formulations ci-dessus.



CHAPITRE - V -



*Résultats numériques et
discussion*

V.1. Introduction

Dans cette section, la précision de la théorie des plaques présentée pour l'analyse de flambement de plaques rectangulaires symétriques Des plaques sandwich EGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres avec divers cas de conditions aux limites sont démontrées en comparant la solution analytique avec celles d'autres résultats disponibles dans la littérature.

V.2. Résultats numériques et discussion :

Tableau V.1 Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

	Conditions aux limites	Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$ $Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)$ $\sin(\mu y)$
CSSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$ $\sin(\mu y)$
CSCS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$ $\sin(\mu y)[\cos(\mu y) - 1]$
CCSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$ $\sin(\mu y)$
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$ $\sin^2(\mu y)$
FFCC	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$ $Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\cos^2(\lambda x)[\sin^2(\lambda x) + 1]$ $\sin^2(\mu y)$

- () désigne la dérivée par rapport aux coordonnées correspondantes

La combinaison de matériaux se compose d'aluminium et d'alumine avec les propriétés matérielles suivantes :

- Céramique (alumine, Al₂O₃) : $E_c = 380$ GPa , $\nu_c = 0.3$
- Métal (aluminium, Al) : $E_m = 70$ GPa , $\nu_m = 0.3$

Dans ce qui suit, on note que plusieurs sortes de plaques sandwich sont utilisées :

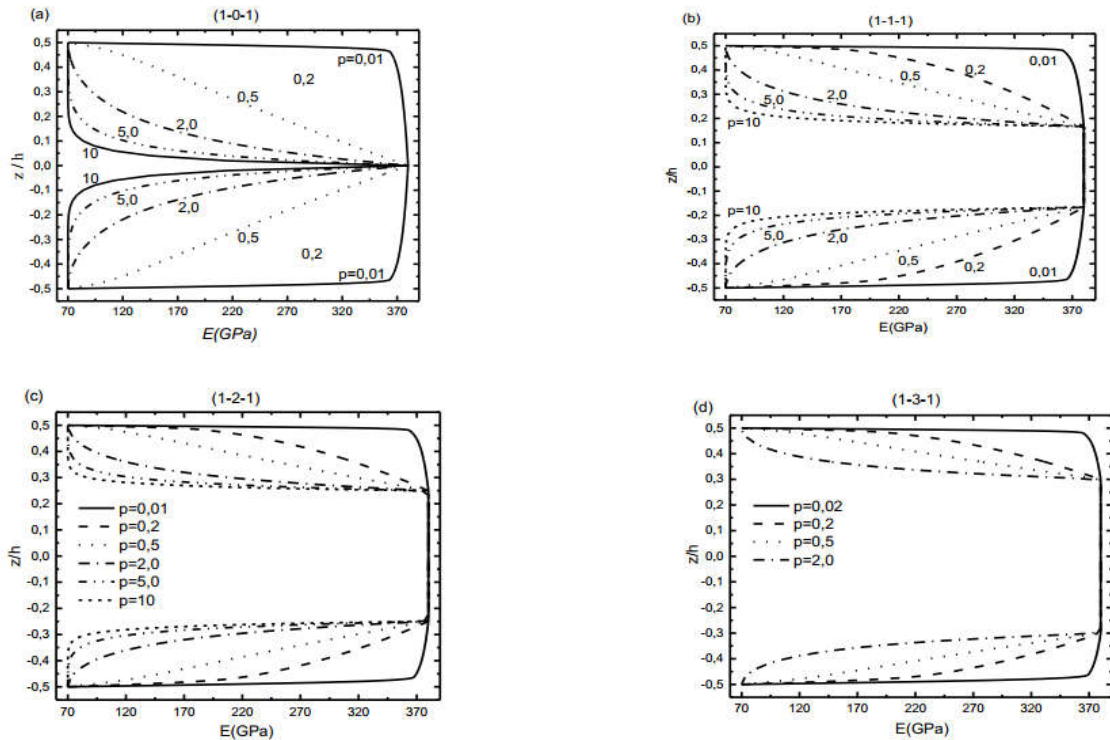


Figure V.1 Variation du module d'Young à travers l'épaisseur de plaque sandwich symétriques pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p : (a) La plaque sandwich EGM (1-0-1), (b) La plaque sandwich (1-1-1) Plaque sandwich EGM, (c) La plaque sandwich EGM (1-2-1) et (d) La plaque sandwich EGM (1-3-1)

- La plaque sandwich FG (1-0-1) : La plaque est symétrique et constituée de seulement deux couches FG d'égale épaisseur, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. Ainsi, nous avons, $h_1 = h_2 = 0$
- La plaque sandwich FG (1-1-1): Ici, la plaque est symétrique et constituée de trois couches d'égale épaisseur. Dans ce cas, nous avons, $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$
- La plaque sandwich FG (1-2-1): La plaque est symétrique et on a : $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$
- La plaque sandwich (1-3-1) FG : La plaque est symétrique et on a : $h_1 = -3h/10$, $h_2 = 3h/10$

La figure V.1 montre la variation dans l'épaisseur du module de Young pour : $p=0.01, 0.2, 0.5, 2, 5$ et 10

Pour plus de commodité, les formes non dimensionnelles suivantes sont utilisées

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{100h^3}, K_w = \frac{k_w a^4}{D}, K_s = \frac{k_{sx} a^2}{D} = \frac{k_{sy} b^2}{D}, D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Tableau V.2 Comparaison de la charge critique de flambement \bar{N} de plaques carrées sandwich EGM simplement appuyées ($k=1,5$) reposant sur des fondations élastiques de Visco-Pasternak

Scheme	Theory	\bar{c}_t	$\bar{K}_w = \bar{K}_s = 0$			$\bar{K}_w = 100, \bar{K}_s = 0$			$\bar{K}_w = \bar{K}_s = 100$		
			$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20
1-0-1	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	2.5154	2.7987	2.8797	4.2783	4.5616	4.6427	39.0768	39.3601	39.4412
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	2.5592	2.8119	2.8832	4.3220	4.5748	4.6461	39.1206	39.3734	39.4447
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	2.5618	2.8127	2.8834	4.3247	4.5756	4.6463	39.1232	39.3741	39.4449
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	2.5652	2.8137	2.8837	4.3281	4.5766	4.6466	39.1266	39.3752	39.4451
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	2.5834	2.8193	2.8852	4.3463	4.5822	4.6481	39.1448	39.3808	39.4466
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	2.5618	2.8127	2.8834	4.3247	4.5756	4.6463	39.1232	39.3741	39.4449
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	2.5592	2.8120	2.8833	4.3221	4.5749	4.6462	39.1206	39.3734	39.4447
	Present	$\bar{c}_t = 0$	2.5647	2.8136	2.8837	4.3276	4.5765	4.6466	39.1262	39.3750	39.4452
		$\bar{c}_t = 0.05$	3.0054	3.2543	3.3244	4.7683	5.0172	5.0873	39.5669	39.8158	39.8859
		$\bar{c}_t = 0.1$	3.4462	3.6950	3.7652	5.2091	5.4580	5.5281	40.0076	40.2565	40.3266
1-1-1	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.0560	3.4014	3.5003	4.8189	5.1643	5.2632	39.6175	39.9628	40.0617
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.1014	3.4151	3.5039	4.8643	5.1781	5.2668	39.6629	39.9766	40.0653
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.1030	3.4156	3.5040	4.8659	5.1785	5.2669	39.6644	39.9770	40.0655
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.1054	3.4163	3.5042	4.8683	5.1792	5.2671	39.6668	39.9777	40.0656
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.1399	3.4269	3.5070	4.9029	5.1898	5.2699	39.7014	39.9883	40.0684
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	3.1030	3.4156	3.5040	4.8659	5.1785	5.2669	39.6644	39.9770	40.0655
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	3.1015	3.4152	3.5039	4.8644	5.1781	5.2668	39.6629	39.9766	40.0654
	Present	$\bar{c}_t = 0$	3.1051	3.4162	3.5042	4.8680	5.1791	5.2671	39.6665	39.9777	40.0657
		$\bar{c}_t = 0.05$	3.5458	3.8570	3.9449	5.3087	5.6199	5.7078	40.1072	40.4184	40.5064
		$\bar{c}_t = 0.1$	3.9865	4.2977	4.3857	5.7494	6.0606	6.1486	40.5480	40.8591	40.9471
1-2-1	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.4772	3.8906	4.0097	5.2401	5.6535	5.7726	40.0386	40.4520	40.5712
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.5165	3.9026	4.0129	5.2795	5.6655	5.7758	40.0780	40.4641	40.5744
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.5165	3.9026	4.0129	5.2795	5.6655	5.7758	40.0780	40.4640	40.5744
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.5176	3.9028	4.0130	5.2805	5.6657	5.7759	40.0790	40.4643	40.5744
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.5799	3.9220	4.0180	5.3429	5.6850	5.7810	40.1414	40.4835	40.5795
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	3.5165	3.9026	4.0129	5.2795	5.6655	5.7758	40.0780	40.4640	40.5744
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	3.5166	3.9027	4.0130	5.2795	5.6656	5.7759	40.0780	40.4641	40.5744
	Present	$\bar{c}_t = 0$	3.5174	3.9028	4.0130	5.2804	5.6658	5.7759	40.0789	40.4643	40.5745
		$\bar{c}_t = 0.05$	3.9582	4.3436	4.4537	5.7211	6.1065	6.2167	40.5196	40.9050	41.0152
		$\bar{c}_t = 0.1$	4.3989	4.7843	4.8945	6.1618	6.5472	6.6574	40.9604	41.3457	41.4559
1-3-1	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.7922	4.2636	4.4004	5.5551	6.0265	6.1633	40.3537	40.8251	40.9618
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.8253	4.2738	4.4031	5.5882	6.0367	6.1660	40.3867	40.8353	40.9645
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.8243	4.2734	4.4030	5.5872	6.0364	6.1659	40.3857	40.8349	40.9644
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.8245	4.2734	4.4030	5.5875	6.0364	6.1659	40.3860	40.8349	40.9644
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	3.9114	4.3004	4.4101	5.6743	6.0364	6.1730	40.4728	40.8619	40.9716
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	3.8243	4.2734	4.4030	5.5872	6.0364	6.1659	40.3857	40.8349	40.9644
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	3.8253	4.2738	4.4031	5.5882	6.0368	6.1660	40.3868	40.8353	40.9646
	Present	$\bar{c}_t = 0$	3.8245	4.2735	4.4030	5.5874	6.0364	6.1659	40.3860	40.8349	40.9645
		$\bar{c}_t = 0.05$	4.2652	4.7142	4.8437	6.0282	6.4771	6.6067	40.8267	41.2757	41.4052
		$\bar{c}_t = 0.1$	4.7060	5.1550	5.2845	6.4689	6.9179	7.0474	41.2674	41.7164	41.8459
1-0-1	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	11.3793	11.6282	11.6983	13.1422	13.3911	13.4612	47.9407	48.1896	48.2597
	Present	$\bar{c}_t = 0$	11.3793	11.6282	11.6983	13.1422	13.3911	13.4612	47.9407	48.1896	48.2597
		$\bar{c}_t = 0.05$	11.3793	11.6282	11.6983	13.1422	13.3911	13.4612	47.9407	48.1896	48.2597
		$\bar{c}_t = 0.1$	11.3793	11.6282	11.6983	13.1422	13.3911	13.4612	47.9407	48.1896	48.2597

(a) Extrait de Sobhy (2013)

(b) Tiré de Ait Amar Meziane et al. (2014)

(c) EPT : théorie des plaques de déformation par cisaillement exponentiel ;

FPT : théorie des plaques de déformation en cisaillement du premier ordre ;

HPT : théorie des plaques de déformation par cisaillement hyperbolique ;

SPT : théorie des plaques de déformation par cisaillement sinusoïdal ;

TPT : théorie des plaques de déformation en cisaillement du troisième ordre.

Le Tableau V.2 donne les valeurs non dimensionnées de la charge de flambement \bar{N} de différents types de plaques carrées sandwich simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques de Visco-Pasternak. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Sobhy (2013) en utilisant diverses théories de plaques de déformation par cisaillement où un bon accord est obtenu entre les solutions actuelles utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement trigonométrique raffinée et celles publiées. On peut observer à partir du tableau V.2 que l'augmentation de l'épaisseur du noyau des plaques sandwich EGM entraîne une augmentation de la charge de flambement, sauf pour le cas des plaques reposant sur les fondations de Pasternak où la variation de celles-ci est inversée. De plus, la charge de flambement augmente avec l'existence des fondations élastiques. L'inclusion des paramètres de fondation de Pasternak donne des résultats supérieurs à ceux avec l'inclusion du paramètre de fondation de Winkler.

Pour démontrer l'effet des coefficients d'amortissement et valider la présente formulation pour les plaques reposant sur un fondation élastique, les résultats pour la charge de flambement critique sans dimension \bar{N} sont présentés pour une plaque carrée simplement appuyée sur une fondation visco-Pasternak. Les résultats sont comparés à ceux de Sobhy (2013) et d'Ait Amar Meziane et al. (2014) dans le cas où l'effet de la viscosité est négligé ($\bar{c}_t = 0$). On constate que les résultats concordent étroitement.

Cependant, on voit que la charge critique de flambement \bar{N} de la plaque est très sensible à la prise en compte de l'effet viscosité. Les charges critiques de flambement \bar{N} augmentent avec l'augmentation des paramètres \bar{K}_w , \bar{K}_s et \bar{c}_t .

Tableau V.3 Comparaison de la charge critique de flambement \bar{N} de (1– 1–1) plaques sandwich EGM avec diverses conditions aux limites ($b/a = 2, \bar{K}_w = \bar{K}_s = 10$)

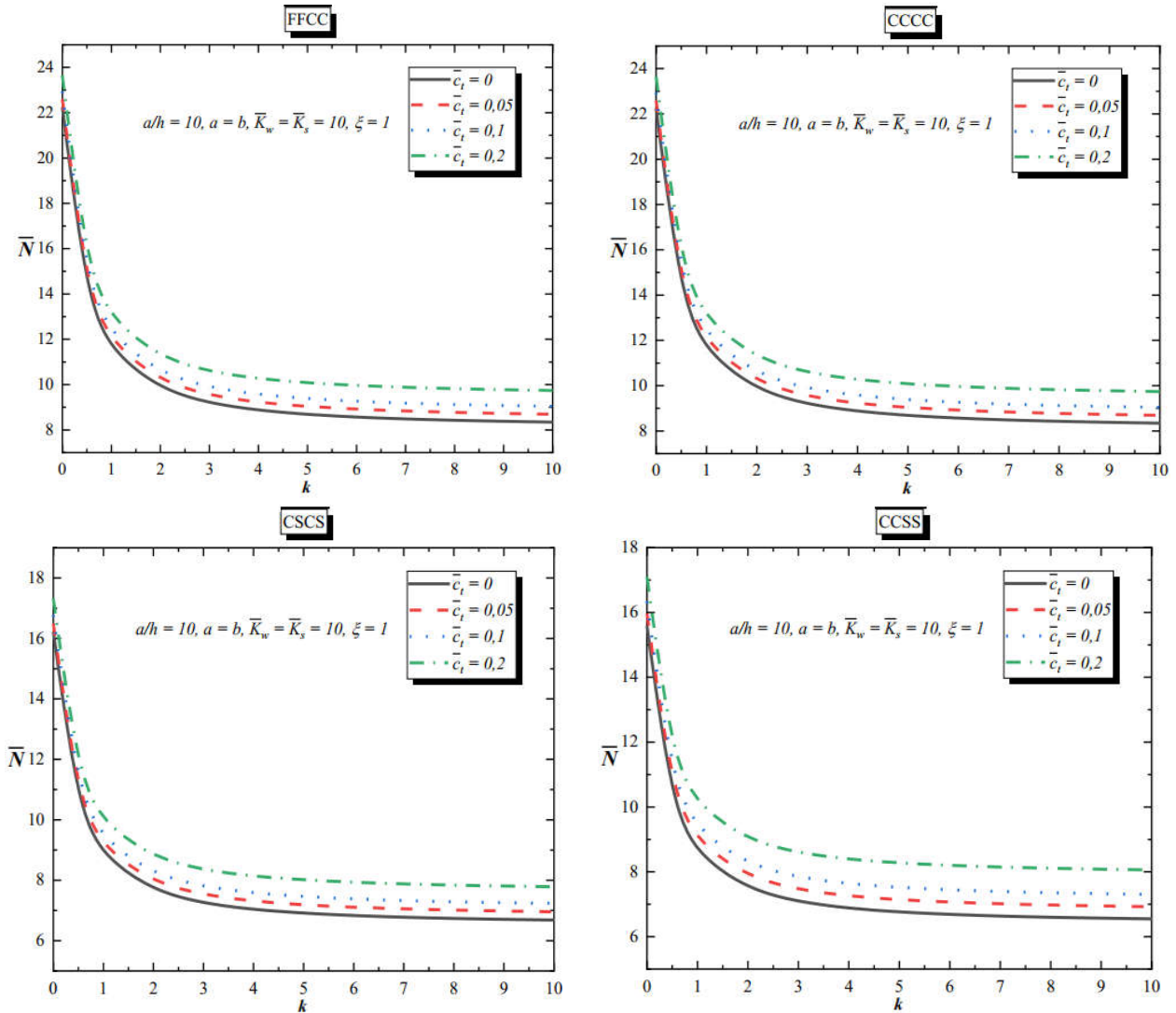
B.C.	Theory	\bar{c}_t	$k = 0$			$k = 0.5$			$k = 3.5$			
			$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20	
FFCC	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	15.2693	20.4469	22.5889	10.5119	12.7398	13.5537	7.5375	8.4498	8.7524	
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	15.3100	20.4524	22.5893	10.7685	12.8483	13.5856	7.5375	8.5326	8.7755	
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	15.3262	20.4573	22.5906	10.7791	12.8519	13.5866	7.7767	8.5375	8.7769	
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	15.3581	20.4701	22.5943	10.7947	12.8576	13.5882	7.7922	8.5427	8.7783	
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	16.4396	21.0333	22.7718	10.9820	12.9404	13.6126	7.7130	8.5156	8.7709	
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	15.7316	20.6940	22.6679	10.9709	12.9380	13.6121	7.8557	8.5665	8.7850	
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	15.7165	20.6896	22.6667	10.9609	12.9346	13.6112	7.8423	8.5621	8.7838	
	Present		$\bar{c}_t = 0$	15.7574	20.7039	22.6707	10.9835	12.9424	13.6133	7.8682	8.5707	8.7861
			$\bar{c}_t = 0.05$	16.3345	21.2810	23.2478	11.5606	13.5195	14.1905	8.4453	9.1478	9.3632
			$\bar{c}_t = 0.1$	16.9116	21.8581	23.8249	12.1377	14.0966	14.7676	9.0224	9.7249	9.9403
		$\bar{c}_t = 1$	27.2996	32.2461	34.2129	22.5257	24.4846	25.1556	19.4104	20.1129	20.3283	
CCCC	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.9480	15.8035	16.8213	8.9602	10.1273	10.5061	6.5737	7.0322	7.1710	
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.9640	14.8053	16.8214	9.1032	10.1789	10.5205	6.6922	7.0708	7.1813	
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.9719	15.8075	16.8220	9.1086	10.1806	10.5209	6.6994	7.0730	7.1819	
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.9892	15.8136	16.8237	9.1167	10.1833	10.5216	6.7073	7.0754	7.1826	
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	13.6482	16.0906	16.9044	9.2238	10.2228	10.5326	6.6669	7.0629	7.1792	
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	13.0716	15.8553	16.8365	9.1520	10.1974	10.5257	6.7161	7.0785	7.1835	
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	13.0640	15.8532	16.8360	9.1467	10.1958	10.5252	6.7091	7.0764	7.1829	
	Present		$\bar{c}_t = 0$	13.0857	15.8602	16.8379	9.1587	10.1996	10.5263	6.7227	7.0805	7.1840
			$\bar{c}_t = 0.05$	13.6146	16.3891	17.3668	9.6876	10.7285	11.0551	7.2515	7.6094	7.7129
			$\bar{c}_t = 0.1$	14.1435	16.9180	17.8956	10.2165	11.2573	11.5840	7.7804	8.1383	8.2417
		$\bar{c}_t = 1$	23.6632	26.4377	27.4154	19.7362	20.7771	21.1038	17.3001	17.6580	17.7615	

CSCS	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.8802	12.4597	12.9692	7.6668	8.2896	8.4768	5.8071	6.0450	6.1130
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.8866	12.4603	12.9692	7.7464	8.3154	8.4837	5.8704	6.0641	6.1180
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.8906	12.4613	12.9695	7.7493	8.3163	8.4840	5.8742	6.0652	6.1183
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.9001	12.4644	12.9703	7.7536	8.3176	8.4843	5.8783	6.0663	6.1186
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	11.2895	12.6060	13.0096	7.8139	8.3374	8.4896	5.8572	6.0602	6.1170
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	10.9052	12.4673	12.9712	7.7552	8.3183	8.4846	5.8764	6.0659	6.1185
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	10.9012	12.4662	12.9709	7.7523	8.3175	8.4843	5.8726	6.0648	6.1182
	Present	$\bar{c}_t = 0$	10.9131	12.4698	12.9719	7.7588	8.3194	8.4848	5.8799	6.0669	6.1188
		$\bar{c}_t = 0.05$	11.3538	12.9105	13.4126	8.1996	8.7601	8.9256	6.3206	6.5076	6.5595
		$\bar{c}_t = 0.1$	11.7945	13.3512	13.8533	8.6403	9.2009	9.3663	6.7613	6.9483	7.0002
		$\bar{c}_t = 1$	19.7276	21.2843	21.7865	16.5734	17.1340	17.2994	14.6944	14.8814	14.9333
CCSS	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.7243	15.4988	16.4857	8.8365	9.9698	10.3370	6.5105	6.9555	7.0900
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.7398	15.5004	16.4858	8.9755	10.0199	10.3509	6.6256	6.9929	7.1000
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.7474	15.5026	16.4864	8.9808	10.0215	10.3514	6.6326	6.9950	7.1006
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	12.7642	15.5085	16.4880	8.9886	10.0241	10.3521	6.6402	6.9974	7.1012
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	13.4052	15.7773	16.5662	9.0927	10.0624	10.3627	6.6010	6.9853	7.0980
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	12.9080	15.5750	16.5080	9.0485	10.0467	10.3584	6.6581	7.0033	7.1028
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	12.9010	15.5729	16.5074	9.0435	10.0451	10.3580	6.6514	7.0013	7.1023
	Present	$\bar{c}_t = 0$	12.9215	15.5796	16.5092	9.0550	10.0487	10.3590	6.6644	7.0052	7.1033
		$\bar{c}_t = 0.05$	13.4782	16.1363	17.0659	9.6117	10.6054	10.9157	7.2211	7.5619	7.6601
		$\bar{c}_t = 0.1$	14.0350	16.6930	17.6227	10.1684	11.1621	11.4724	7.7778	8.1186	8.2168
		$\bar{c}_t = 1$	24.0557	26.7138	27.6434	20.1892	21.1829	21.4932	17.7986	18.1394	18.2375
CSSS	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.6131	12.0668	12.5311	7.5143	8.0853	8.2557	5.7275	5.9451	6.0069
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.6189	12.0673	12.5311	7.5876	8.1089	8.2620	5.7856	5.9624	6.0114
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.6225	12.0683	12.5314	7.5902	8.1096	8.2622	5.7891	5.9634	6.0117
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.6312	12.0711	12.5321	7.5942	8.1108	8.2625	5.7928	5.9645	6.0120
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	10.9920	12.2004	12.5678	7.6497	8.1289	8.2674	5.7735	5.9589	6.0105
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	10.6425	12.0761	12.5336	7.5981	8.1123	8.2630	5.7919	5.9643	6.0120
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	10.6389	12.0752	12.5334	7.5955	8.1116	8.2628	5.7885	5.9633	6.0117
	Present	$\bar{c}_t = 0$	10.6497	12.0784	12.5342	7.6015	8.1133	8.2632	5.7951	5.9652	6.0122
		$\bar{c}_t = 0.05$	11.1262	12.5549	13.0107	8.0779	8.5898	8.7397	6.2716	6.4417	6.4887
		$\bar{c}_t = 0.1$	11.6026	13.0313	13.4871	8.5544	9.0662	9.2162	6.7480	6.9182	6.9651
		$\bar{c}_t = 1$	20.1790	21.6077	22.0635	17.1307	17.6426	17.7925	15.3244	15.4945	15.5415
SSSS	FPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	7.5245	7.9088	8.0175	5.7741	5.9182	5.9575	4.8112	4.8643	4.8784
	TPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	7.5252	7.9089	8.0175	5.7935	5.9237	5.9590	4.8259	4.8683	4.8795
	SPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	7.5261	7.9091	8.0175	5.7942	5.9239	5.9590	4.8267	4.8685	4.8795
	EPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	7.5284	7.9097	8.0177	5.7952	5.9242	5.9591	4.8277	4.8688	4.8796
	HPT ^a	$\bar{c}_t = 0$	7.6317	7.9407	8.0258	5.8101	5.9284	5.9602	4.8229	4.8675	4.8792
	Model 1	$\bar{c}_t = 0$	7.5261	7.9091	8.0175	5.7942	5.9239	5.9590	4.8267	4.8685	4.8795
	Model 2	$\bar{c}_t = 0$	7.5253	7.9089	8.0175	5.7936	5.9238	5.9590	4.8259	4.8684	4.8795
	Present	$\bar{c}_t = 0$	7.5281	7.9097	8.0177	5.7951	5.9242	5.9591	4.8276	4.8688	4.8796
		$\bar{c}_t = 0.05$	8.2332	8.6148	8.7229	6.5003	6.6294	6.6643	5.5327	5.5740	5.5848
		$\bar{c}_t = 0.1$	8.9384	9.3200	9.4280	7.2054	7.3345	7.3695	6.2379	6.2791	6.2899
		$\bar{c}_t = 1$	21.6314	22.0130	22.1210	19.8984	20.0275	20.0624	18.9309	18.9721	18.9829

Le Tableau V.3 contient la charge de flambement critique sans dimension de la plaque sandwich EGM (1-1-1) reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres dans diverses conditions aux limites. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par Sobhy(2013) et Ait Amar Meziane et al. (2014) en utilisant le modèle 1 et le modèle 2 pour différentes valeurs du rapport côté-épaisseur a/h et du paramètre d'inhomogénéité k . On peut voir que les résultats obtenus dans cette étude en utilisant une théorie simple et efficace de la déformation par cisaillement raffinée sont en bon accord. Une diminution de la charge critique de flambement peut être clairement observée avec l'augmentation du paramètre k . Les

résultats sont maximaux pour les plaques agrafées et minimaux pour les plaques simplement appuyées.

En plus de cela, la charge critique de flambement d'une plaque sandwich EGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites reposant sur une fondation visco-Winkler est présentée dans le Tableau V.3 Les résultats obtenus dans le cas où l'amortissement \bar{c}_t est nul, sont comparés à ceux donnés par Sobhy (2013) et Ait Amar Meziane et al. (2014). C'est observé que lorsque le terme de viscosité est omis, on remarque un bon accord entre les résultats. Cependant, l'introduction du terme de viscosité augmente la charge critique de flambage en raison de l'effet d'amortissement.



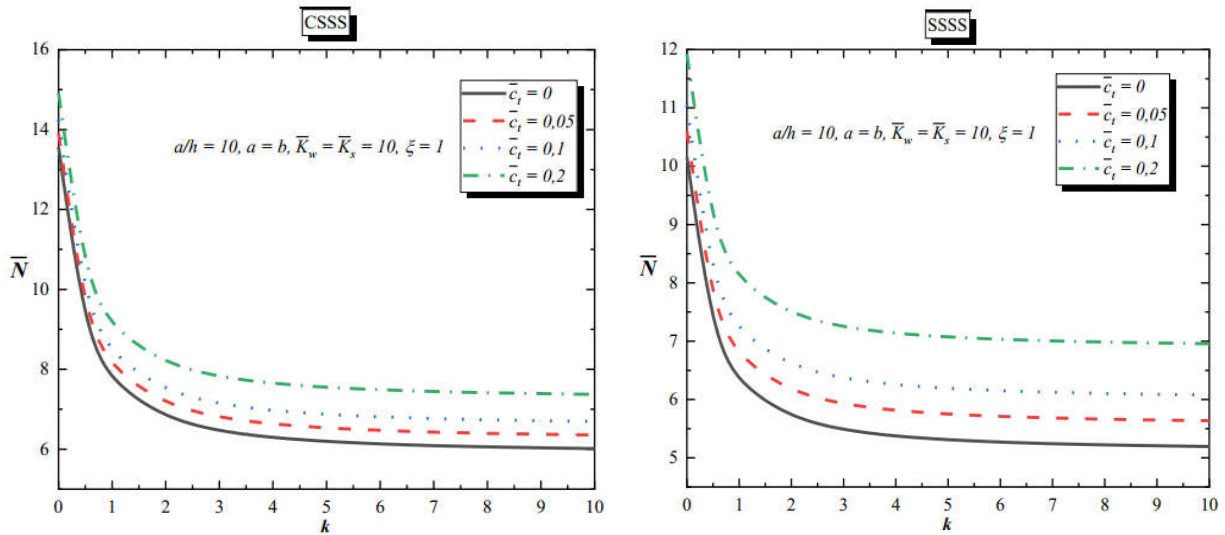
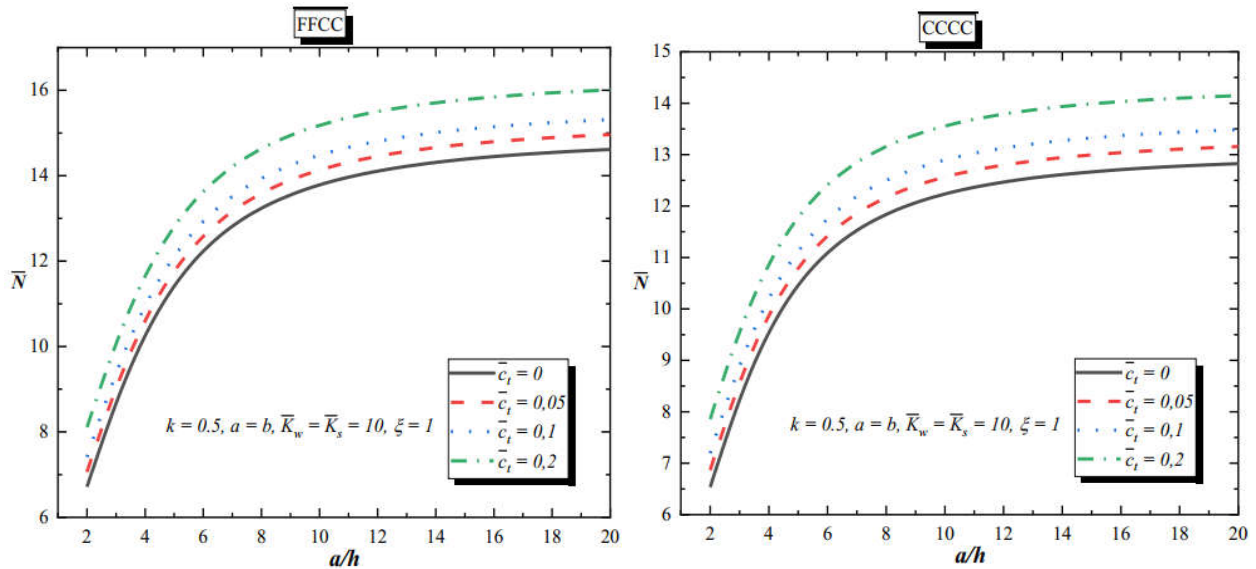


Figure V.2 La variation du flambement critique non dimensionnel \bar{N} en fonction de l'indice de gradient k pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement des plaques carrées en sandwich FGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites.

Figure V.2 présentent la variation du flambement critique adimensionnel \bar{N} en fonction de l'indice de gradient k pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement des plaques carrées en sandwich (1-1-1) FGM avec diverses conditions aux limites. Le rapport d'épaisseur de la plaque est considéré égal à 10.

On peut observer que l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k conduit à une réduction de la charge critique de flambement.

Ce comportement peut être attribué au fait que le paramètre d'inhomogénéité k correspond à une fraction volumique plus faible de la phase céramique. Cependant, les augmentations du coefficient d'amortissement augmente les charges critiques de flambement \bar{N} .



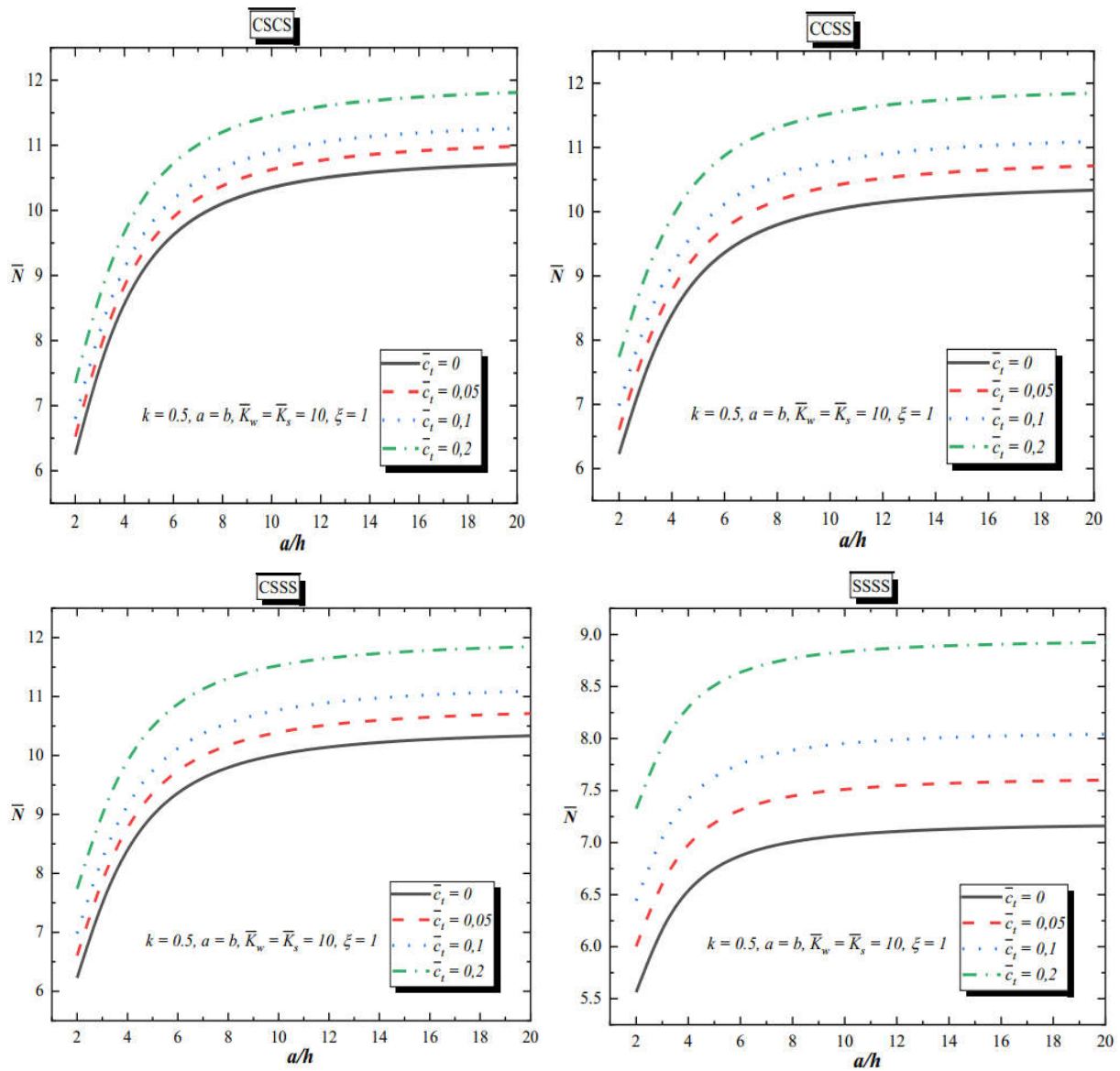


Figure V.3 Flambement critique \bar{N} en fonction du rapport a/h des plaques carrées en sandwich FGM (1-1-1) reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement.

Les charges de flambement \bar{N} de la plaque carrée en sandwich FGM (1-1-1) reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement sont illustrées à la Figure V.3, on note que \bar{N} augmenter progressivement au fur et à mesure que le rapport côté/épaisseur a/h augmente. Les résultats de la plaque sandwich simplement appuyée sont inférieurs à ceux de la plaque sandwich serrée-serrée et libre-serrée. Pour la plaque sandwich EGM avec des conditions aux limites intermédiaires, les résultats prennent les valeurs intermédiaires correspondantes. Encore une fois, les augmentations du coefficient d'amortissement augmentent les charges critiques de flambement \bar{N} .

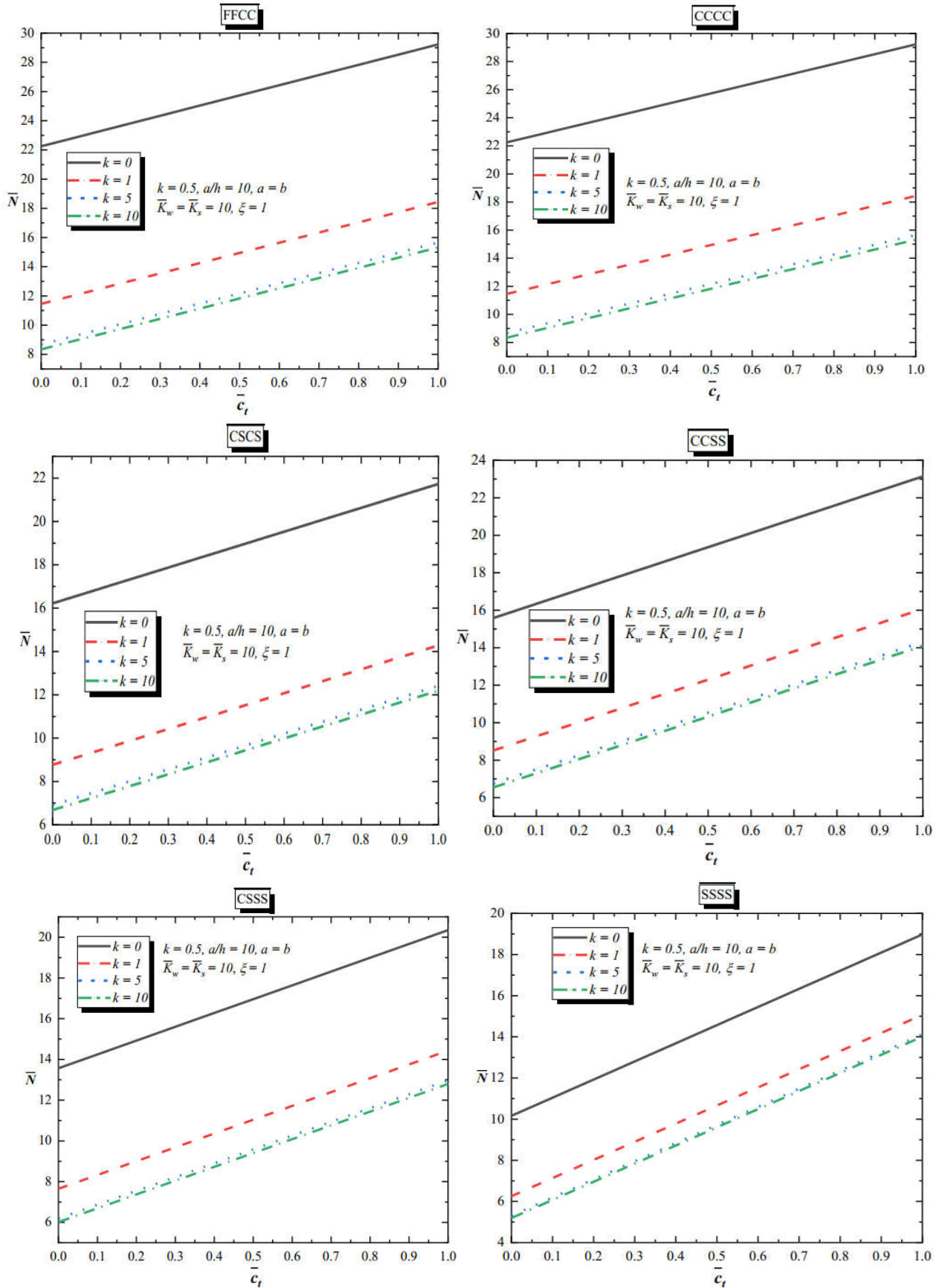


Figure V.4 Effet du coefficient d'amortissement pour diverses valeurs du paramètre d'inhomogénéité k sur le flambement critique adimensionnel \bar{N} des plaques carrées en sandwich (1-1-1) FGM avec diverses conditions aux limites.

La Figure V.4 montre les charges critiques de flambement \bar{N} des plaques carrées en sandwich (1-1-1) FGM dans diverses conditions aux limites en fonction du coefficient d'amortissement c_t pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité k . On observe que l'augmentation du coefficient d'amortissement c_t conduit à une augmentation des charges critiques de flambement \bar{N} de la plaque sandwich FG.

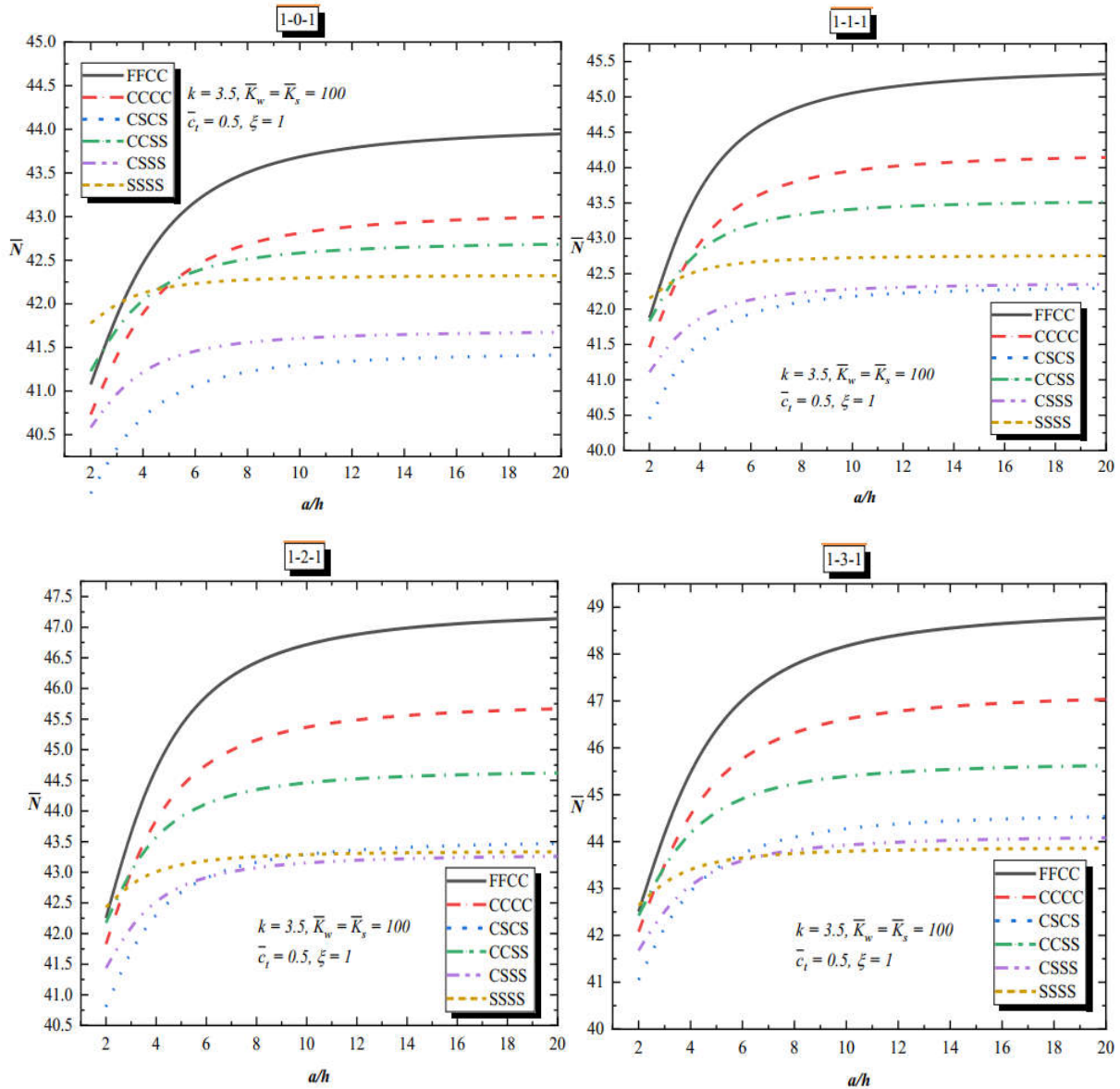


Figure V.5 Charge critique de flambement \bar{N} en fonction du rapport côté/épaisseur a/h et différents types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec différentes conditions aux limites.

Figure V.5 affiche la charge critique de flambement \bar{N} en fonction du rapport côté-épaisseur a/h pour différentes conditions aux limites reposant sur une fondation visco-Pasternak.

Différentes configurations de couches sont utilisées pour les plaques FGM multicouches. On peut voir que la charge critique de flambement \bar{N} augmente de façon monotone à mesure que a/h augmente.

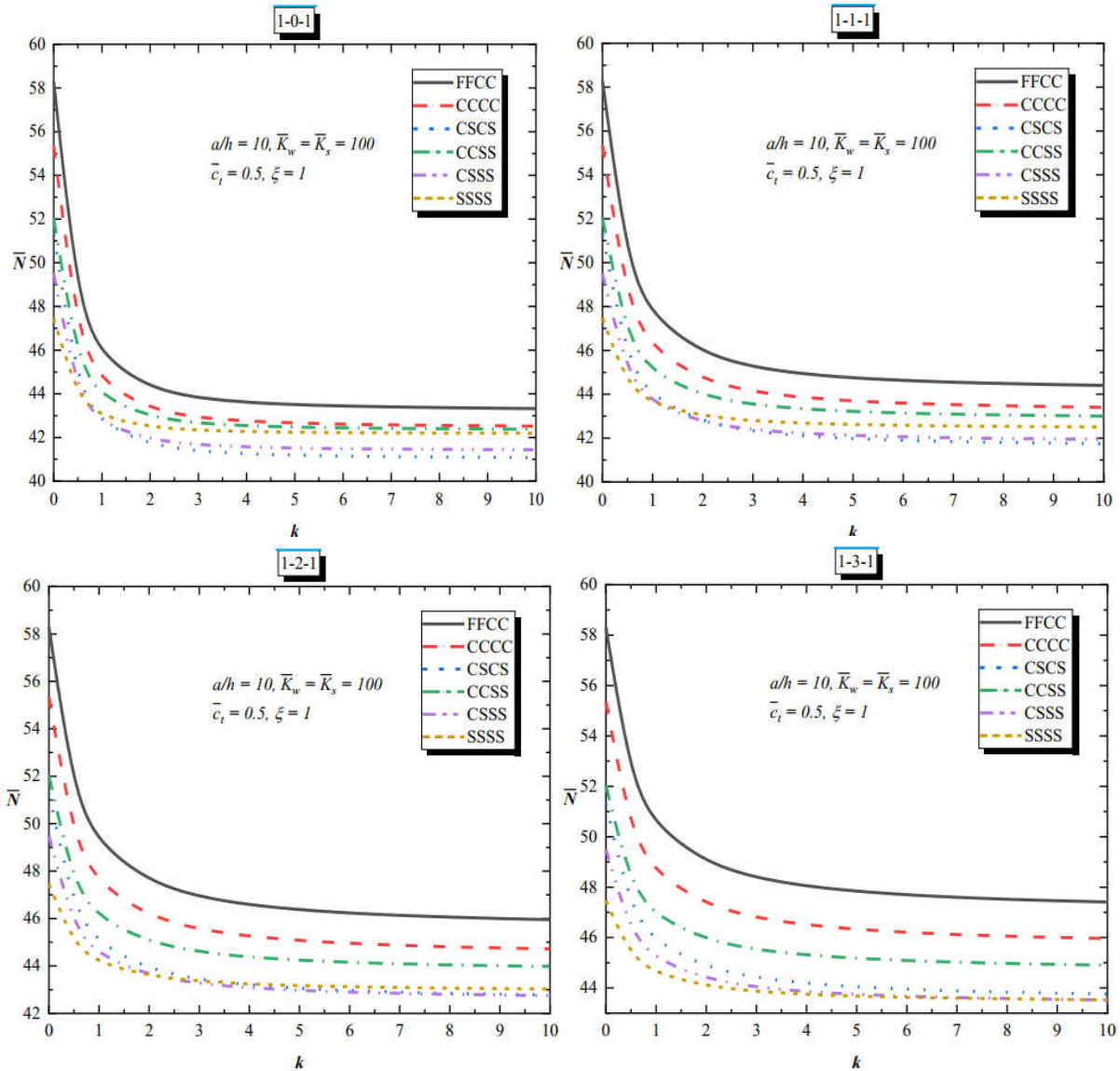


Figure V.6 Flambement critique \bar{N} en fonction du gradient d'indice k et de divers types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites.

La Figure V.6 présente la variation des charges critiques de flambement non dimensionnelles \bar{N} en fonction de l'indice de gradient k pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement. Différentes configurations de couches sont utilisées pour les plaques FGM multicouches avec diverses conditions aux limites. Le rapport d'épaisseur de la plaque est considéré égal à 10.

On peut observer que l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k conduit à une réduction de la charge critique de flambement. son comportement peut être attribué au fait qu'un paramètre d'inhomogénéité supérieur k correspond à une fraction volumique inférieure de la phase céramique.

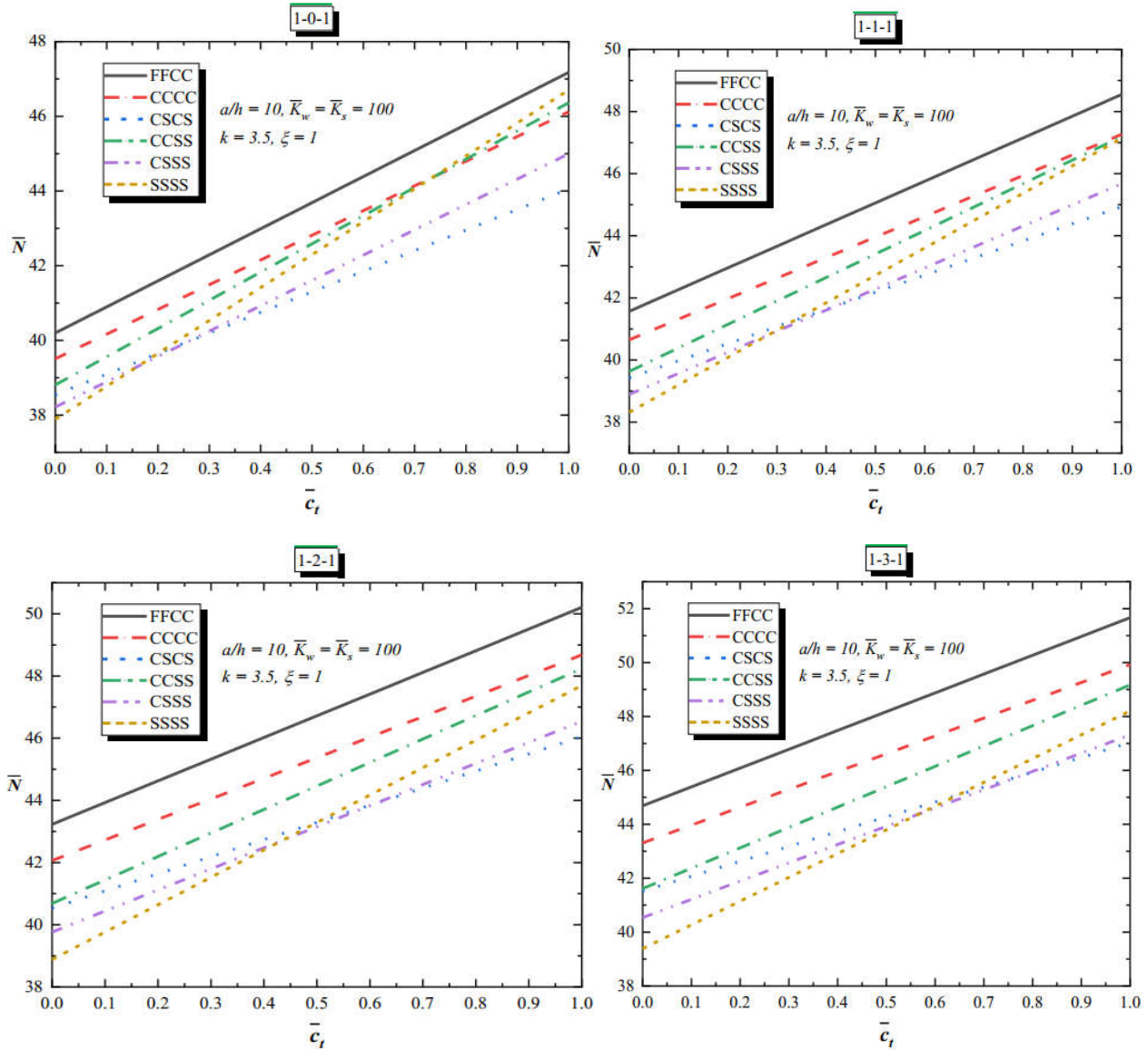


Figure V.7 Flambement critique \bar{N} en fonction du coefficient d'amortissement et de divers types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec diverses conditions aux limites.

La Figure V.7 présente la variation des charges de flambement critiques non dimensionnelles \bar{N} en fonction du coefficient d'amortissement \bar{c}_t des différentes configurations de couches pour les plaques sandwich FGM multicouches avec différentes conditions aux limites. Le rapport d'épaisseur de la plaque est considéré égal à 10. On observe que l'augmentation du coefficient

d'amortissement \bar{c}_t conduit à une augmentation des charges critiques de flambement \bar{N} de la plaque sandwich FG.

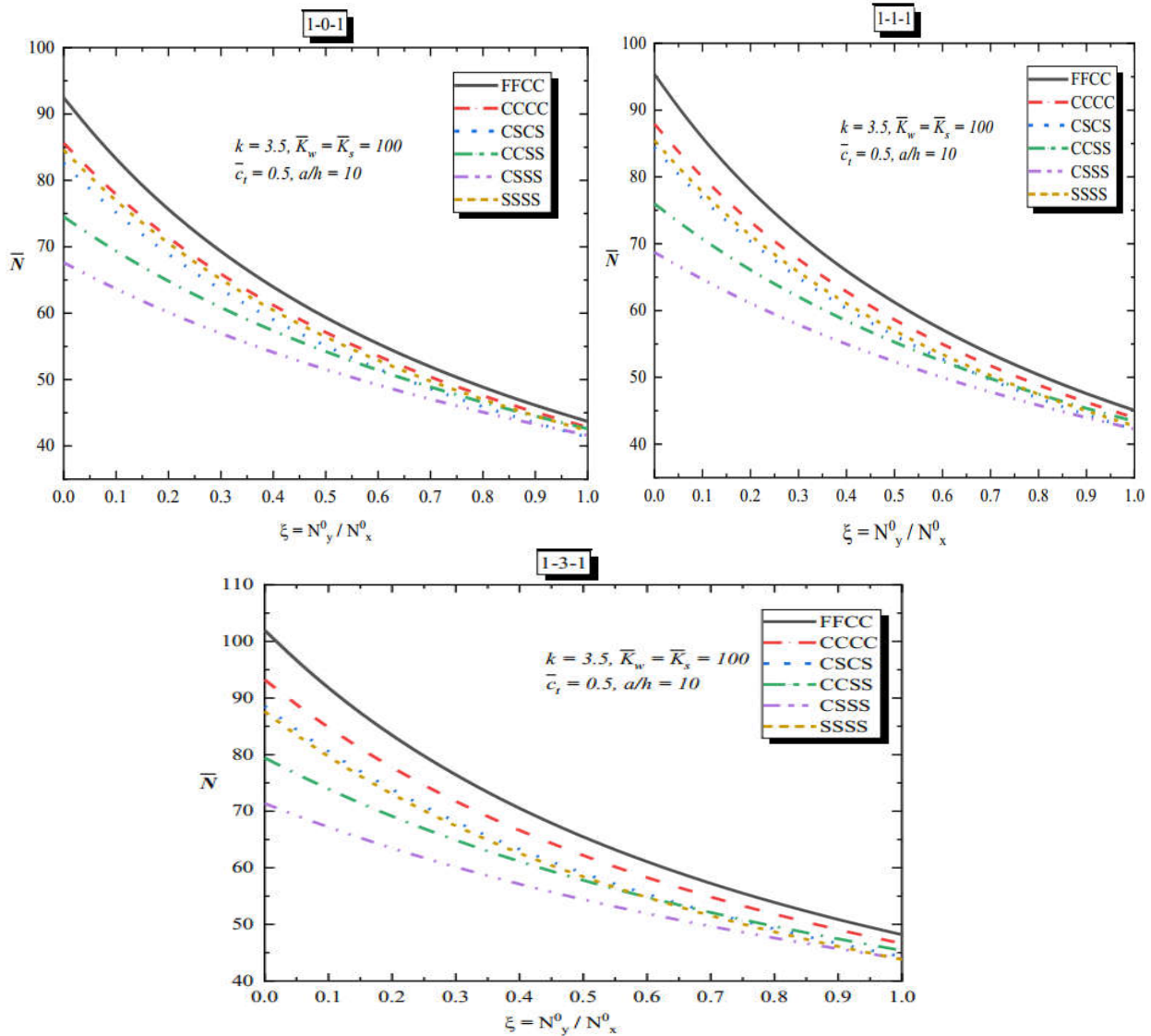


Figure V.8 Flambement critique \bar{N} en fonction des différentes valeurs de ζ et différents types de plaques carrées en sandwich FGM reposant sur la fondation élastique de Visco-Pasternak avec différentes conditions aux limites

La Figure V.8 présente la variation des charges de flambement critiques non dimensionnelles \bar{N} pour différentes valeurs de ζ pour différentes configurations de couches pour des plaques sandwich FGM multicouches avec différentes conditions aux limites. Le rapport d'épaisseur de la plaque est considéré égal à 10. On observe que l'augmentation de ζ conduit à diminuer les charges critiques de flambement \bar{N} de la plaque sandwich FG.

V.3. Conclusion

Un modèle trigonométrique simple de déformation par cisaillement pour la réponse au flambement de plaques sandwich FG reposant sur des fondations visco-Pasternak avec différents cas de conditions aux limites est présenté. Le modèle ne contient que quatre variables inconnues, satisfait les conditions aux limites de traction nulle aux surfaces de la plaque sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement. La justesse de la formulation proposée est prouvée en la comparant avec des solutions existantes. Les conclusions suivantes peuvent être tirées de la présente analyse :

- 1- Un excellent accord a été observé dans tous les cas où l'effet de viscosité est omis.
- 2- L'inclusion de l'effet de viscosité rend une plaque plus rigide, et donc une augmentation des charges critiques de flambement \bar{N} .
- 3- Les charges critiques de flambement \bar{N} augmentent avec l'augmentation des paramètres \bar{K}_w , \bar{K}_s et \bar{c}_t .
- 4- Une diminution de la charge critique de flambement peut être clairement observée avec l'augmentation du paramètre k . Les résultats de la plaque sandwich simplement appuyée sont inférieure à celle de la plaque sandwich serrée-serrée et libre-serrée.
- 5- La charge critique de flambement \bar{N} augmente de manière monotone à mesure que a/h augmente.
- 6- L'augmentation de $\zeta = N_y^0 / N_x^0$ conduit à diminuer les charges critiques de flambement \bar{N} .

Conclusion générale

Dans ce travail, l'effet de fondation viscoélastique sur la réponse au flambement de plaques sandwich fonctionnellement graduées dans diverses conditions aux limites en utilisant une théorie de déformation par cisaillement simplement raffinée est présenté. Les théories proposées ne contiennent que quatre inconnues et satisfont les conditions d'équilibre aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en fonction de la variation non linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Il y a deux contributions majeures : l'utilisation d'une théorie exponentielle des plaques avec seulement quatre paramètres généralisés, et l'étude de l'effet des conditions aux limites sur la charge critique de flambement des plaques sandwich FG reposant sur une fondation viscoélastique. Différents types de structures sandwich FGM sont pris. La fondation de visco-Pasternak est prise en compte en ajoutant l'impact de l'amortissement au modèle de fondation habituel qui se caractérise par le module linéaire de Winkler et le module de fondation de Pasternak. Les équations analytiques de la plaque sont obtenues par la méthode de Galerkin pour différentes conditions aux limites. La justesse des solutions obtenues est vérifiée en comparant les résultats actuels avec ceux prédits par les solutions disponibles dans la littérature.

Références bibliographiques

- [1] **Berthelot, 2005 Jean-Marie Berthelot.**"Composite materials; Mechanical Behavior and Structural Analysis".
- [2] **Karami, B. and Janghorban, M. (2020),**"On the mechanics of functionally graded nanoshells", *Int. J. Eng. Sci.*, 153, 103309.
- [3] **Yamanoushi, M., Koizumi, M., Hiraii, T. and Shiota, I. (1990),**"Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials", Japan.
- [4] **Wang, Y.Q. and Zu, J.W. (2017),**"Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment", *Aerosp. Sci. Technol.*, 69, 550-562.
- [5] **Zhang, W. (2001),**"Global and chaotic dynamics for a parametrically excited thin plate", *J. Sound Vib.*, 239(5), 1013-1036.
- [6] **Reissner, E. (1945),**"The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, 12(2), 69-77
- [7] **Ghasemabadian, M.A. and Kadkhodayan, M. (2016),**"Investigation of buckling behavior of functionally graded piezoelectric (FGP) rectangular plates under open and closed circuit conditions", *Struct. Eng. Mech.*, 60(2), 271-299.
- [8] **Anderson, T.A. (2003),**"A 3-D elasticity solution for a sandwich composite with functionally graded core subjected to transverse loading by a rigid sphere", *Compos. Struct.*, 60(3), 265-274.
- [9] **Tj, H.G., Mikami, T., Kanie, S. and Sato, M. (2006),**"Free vibration characteristics of cylindrical shells partially buried in elastic foundations", *J. Sound Vib.*, 290(3-5), 785-793.
- [10] **Fan, Y., Xiang, Y., Shen, H.S. and Hui, D. (2018),**"Nonlinear low-velocity impact response of FG-GRC laminated plates resting on visco-elastic foundations", *Compos. Part B: Eng.*, 144, 184-194.
- [11] **[Abdelrahman, W.G. (2020) "Effect of material transverse distribution profile on buckling of thick functionally graded material plates according to TSDT", *Struct. Eng. Mech.*, 74(1), 83-90.**

- [12] [Ashby, 1991] Ashby et Jones, **Matériaux-Tome:2** "Microstructure et Mise en OEuvre" chapitre 25.
- [13] [Bahlouli, 1993] N. Bahlouli "Cours Composites sur le site Internet " <http://www-ipst.u-strasbg.fr/cours/matériaux-composites> "
- [14] [Menail 2009] "Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre", thèse de doctorat UBMA naba Menail Younès 2009
- [15] [Giocosa 1999] Giocosa A. Les composites dans l'industrie automobile. "Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites" AM 5600, 1999.
- [16] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. (2012), "Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions"
- [17] Mantari, J.L. and Granados, E.V. (2015a), "Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT", Compos. Part B: Eng., 75, 148-155.
- [18] Mantari, J.L. and Granados, E.V. (2015b), "A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates"
- [19] Sobhy, M. (2013), "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions"
- [20] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions"
- [21] Pasternak P.L (1954) "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literatury i Stroitelstvu I Arkhitekture, 1, Moscow: USSR, 1-56. [In Russian].
- [22] Winkler E (1867) "Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit", Prag Dominicus.
- [23] Kerr A.D (1964) "Elastic and Viscoelastic foundation models", J Appl Mech, 31, 491-498.
- [24] Nguyen V.T. (2004) "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées .
- [25] Müller E, Drašar C, Schilz J, and Kaysser W.A (2003) "Functionally graded materials for sensor and energy applications, Materials Science and Engineering" , A362, 17-39

- [26] **Qiu J, Tani J, Ueno T, Morita T, Takahashi H, and Du H (2003)**, "Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators" , *Smart Materials and Structures*, 12, 115–121.
- [27] **Liu L.S, Zhang Q.J, and Zhai P.C (2003)**, "The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method" , *Materials Science Forum*, 423–425, 791–796.
- [28] **Paszkiwicz B, Paszkiwicz R, Wosko M, Radziejewicz D, Sciana B, Szyszka A, Macherzynski W, and Tlaczala M (2008)**, "Functionally graded semiconductor layers for devices application" , *Vacuum*, 82, 389–394.
- [29] **Watari F, Yokoyama A, Omori M, Hirai T, Kondo H, Uo M, and Kawasaki T (2004)**, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application" , *Composites Science and Technology*, 64, 893–908.
- [30] **Fuchiyama T and Noda N (1995)**, "Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material" , *JSAE Review*, 16, 263–268.
- [31] **Markworth A.J, Ramesh K.S and Parks W.P (1995)**, "Review: modeling studies applied to functionally graded materials" , *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193.
- [32] **Tanigawa Y (1995)** "Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials" , *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- [33] **Noda N (1999)**, "Thermal stresses in functionally graded material" , *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512.
- [34] **Paulino G.H, Jin Z.H, and Dodds Jr. R.H (2003)**, "Failure of functionally graded Materials" , in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- [35] **Hui-shen (2009)** "functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells" CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group.
- [36] **Delale F, Erdogan F (1983)** "The crack problem for a nonhomogeneous plane". *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609 –614,
- [37] **Noor A. K & Burton W. S (1989)** "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *ApplMech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12.
- [38] **Kapania R.K. & Raciti S (1989)** "Recent advances in analysis of laminated beams and plates", Part I: Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934.
- [39] **Kant T & Swaminathan K (2000)** "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments". *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75.

- [40] **Carrera E (2000)** "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates". *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198,.
- [41] **Pagano N.J (1969)** "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending". *J Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411.
- [42] **Pagano N.J (1970)** "Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates" *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20-35,.
- [43] **Srinivas S. &Rao A.K (1970)** "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates". *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463-1481.
- [44] **Srinivas S &Rao A.K (1973)** "Flexure of thick plates. ASME, pages 298-299.
- [45] **Reissner E &Stavsky Y (1961)** "Bending and stretching of certain types of heterogeneous isotropic elastic plate". *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408.
- [46] **Kirchhoff G (1850)** "Uber das gleichgewicht und die bewegungeinerelastischenscheibe. *Journal fur reine und angewandteMathematik*", vol. 40, pages 51, 88.
- [47] **Reissner E (1945)** "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69, 77.
- [48] **Mindlin. R.D.**, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [49] **Timoshenko S.P, Woinowsky. S -Krieger**, "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill, New York, 1959.
- [50] **Reddy J.N.**, "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press", Boca Raton, 1997.
- [51] **Reddy J.N.**, "Theory and Analysis of Elastic plate"s. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [52] **Whitney J.M (1973)** "Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads". *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304.
- [53] **Liberscu L (1967)** "On the theory of anisotropic elastic shell and plates". *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68.
- [54] **Touratier M (1991)** "An efficient standard plate theory". *EngngSci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916,.
- [55] **Karama M, AbouHarb B, Mistou S &Caperaa S (1998)** "Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model". *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234.

- [56] **AitAtmane H, Tounsi A., Mechab I., AddaBedia E.A.**, "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [57] **Ambartsumyan S.A (1969)** "Theory of anisotropic plate". Technomic Publishing Co.
- [58] **Reddy J.N (1987)** "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates". *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180.
- [59] **Reddy J.N (1984)** "A simple higher-order theory for laminated composite plates". *Jornal of AppliedMechanics*, vol. 51, pages 745-752.
- [60] **Afaq K.S, Karama M &Mistou S (2003)** "Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches". In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March.
- [61] **AydogduMetin (2005)** "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 1740–1755.
- [62] **Chabot A (1997)** "Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC.
- [63] **Di. Sciuva.M (1987)** "An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates". *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, 589/596.
- [64] **Tahani M & Nosier A (2003)** "Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate". *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658.
- [65] **Ren J.G (1986)** "A new theory of laminated plate". *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239.
- [66] **Kassapoglou C, Lagace P.A (1987)** "Closed form solutions for the interlaminar stress eld in angle-ply and cross-ply laminates". *Journal of Composite Materials*, vol.27,292,308.
- [67] **Yin W.L (1994)** "Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sub laminate/layer model". *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564.
- [68] **Pagano N.J (1978)** "Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385.
- [69] **Di Sciuva M. (1984)** "A refined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates". *Atti.Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279/295.
- [70] **Ossadzow C &Touratier M (2001)** "An improved shear-membrane theory for multi-layered shells". *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95.

[71] **Icardi U (2001)** "Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sub laminates approximations". *Composites: Part B*, vol. 32, pages 343-354.

[72] [**L.E. Aghalovyan. 2007**]: An asymptotic method for solving three-dimensional boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies. In G.Jaiani and G.Podio-Guidugli(Eds), *IUTAM Symposium on Relations of Shell, Plate, Beam and 3D Models*, Springer, 2007.

[73] [**Nguyen D.T 2012**] : Benchmark d'un modèle layer Wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Other. Université Paris-Est, 2012. French.