REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN 3éme cycle

Option : **Structures & Matériaux**

Présentée par

Mr : BOUKHARI Ahmed

Intitulé de la thèse

Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses

Composition du jury :

TOUNSI Abdelouahed	**Pr**	**Président**	**UDL SBA**
ADDA BEDIA El Abbas	**Pr**	**Directeur de thèse**	**UDL SBA**
FEKRAR Abdelkader	**MCA**	**Examinateur**	**UDL SBA**
BOUAZZA Mokhtar	**MCA**	**Examinateur**	**U DE BECHAR**
AMEUR Mohammed	**MCA**	**Examinateur**	**ENP D'ORAN**
HOUARI Mohamed Sid Ahmed	**MCA**	**Examinateur**	**U DE MASCARA**
BENRAHOU Kouider Halim	**Pr**	**Invité**	**UDL SBA**

Année universitaire 2015-2016

Dédicace

Je dédie le présent travail

A celle qui a tant sacrifie pour moi et qui m'a toujours été une très bonne conseillère et sous laquelle je ne serais pas devenu ce que je suis puisse t-elle-trouver en ce travail une marque de reconnaissance et l'expression de mon immense gratitude A ma très chère mère Maman

A celui qui a toujours guider mes pas et qui sans lui je ne serais pas qui je suis, Mon tant aimé Père Yahiaoui Raouti dont je suis fier d'être le petit fils sans oublier ma très chère grande mère

A ma très tante et son marie est ses enfants

A tous mes amis de prés ou de loin

Résumé

Dans ce travail Une théorie efficace de la déformation par cisaillement est développée pour l'analyse de la propagation d'ondes d'une plaque à gradient infini en présence d'environnements thermiques. En divisant le déplacement transversal en flexion et en cisaillement, le nombre des inconnues des équations de la théorie actuelle est réduit, et par conséquent, il est simple de l'utiliser. Les effets thermiques et les propriétés du matériau dépendant de la température sont tous deux pris en compte. Le champ de température est supposé être une distribution uniforme sur la surface de la plaque et variée dans le sens de l'épaisseur seulement. Les propriétés du matériau sont supposés être dépendant de la température, et classés dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions de volume des constituants. Les équations de la propagation des ondes dans la plaque fonctionnellement graduée sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton et le concept de la surface neutre physique. Il n'y a pas d'effet de couplage étirement-flexion dans la formulation basée sur la surface neutre, et par conséquent, les équations et conditions aux limites de la plaque fonctionnellement graduée en fonction de la surface neutre ont les formes simples par rapport à celles des plaques isotropes. La relation de dispersion analytique de la plaque fonctionnellement graduée est obtenue en résolvant un problème de valeurs propres. Les effets des distributions de fraction volumique et la température sur la propagation des ondes de la plaque fonctionnellement graduée sont discutés en détail. On peut en conclure que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi simple pour prédire les caractéristiques de propagation des ondes dans la plaque fonctionnellement graduée. Les résultats obtenus peuvent être utilisés dans les techniques d'inspection par ultrasons et surveillance des structures de santé.

Mots-clés : propagation des ondes ; plaque Fonctionnellement graduée ; Les effets thermiques ; théorie efficace de déformation de cisaillement ; position de surface neutre

Abstract

An efficient shear deformation theory is developed for wave propagation analysis of an infinite functionally graded plate in the presence of thermal environments. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use. The thermal effects and temperature-dependent material properties are both taken into account. The temperature field is assumed to be a uniform distribution over the plate surface and varied in the thickness direction only. Material properties are assumed to be temperature-dependent, and graded in the thickness direction according to a simple power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The governing equations of the wave propagation in the functionally graded plate are derived by employing the Hamilton's principle and the physical neutral surface concept. There is no stretching–bending coupling effect in the neutral surface-based formulation, and consequently, the governing equations and boundary conditions of functionally graded plates based on neutral surface have the simple forms as those of isotropic plates. The analytic dispersion relation of the functionally graded plate is obtained by solving an eigenvalue problem. The effects of the volume fraction distributions and temperature on wave propagation of functionally graded plate are discussed in detail. It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the wave propagation characteristics in the functionally graded plate. The results carried out can be used in the ultrasonic inspection techniques and structural health monitoring.

Keywords: Wave propagation; Functionally graded plate; Thermal effects; Efficient shear deformation theory; Neutral surface position.

الملخص

في هذه المذكرة نستعمل نظرية التشوه بالقص لدراسة ظاهرة انتشار الموجات على لوحة متدرجة المادة في بيئة حرارية. نقوم بتقسيم الحركة العرضية الى حركة ناتجة عن الانحناء و أخرى ناتجة عن القص و ذلك لإنقاص عدد المجاهل في معادلات النظرية الحالية و بالتالي يسهل استعمالها.

كل من التأثيرات الحرارية و خصائص المادة المستعملة تأخذ بعين الاعتبار مع العلم إن انتشار الحرارة على اللوحة يكون منتظم على سطح المساحة الطولية و متغير في الاتجاه السمك.

نفترض إن المادة المستعملة متدرجة في اتجاه السمك حسب قانون القوة بدلالة حجم المكونات و خصائصها تتأثر بالحرارة.

نستخلص معادلات ظاهرة انتشار الموجات على لوحة متدرجة المادة باستعمال مبدأ هاملتون و مفهوم السطح المحايد الفيزيائي. تأثيرات التمدد ناتج عن الانحناء لا تأخذ بعين الاعتبار و بالتاي فان المعادلات و الشروط الابتدائية للوحة متدرجة المادة تكون بسيطة مقارنة مع معادلات لوحة ذات مادة موزعة بانتظام. بعد إيجاد الحلول، نستطيع دراسة تأثير حجم المكونات و تغير الحرارة على ظاهرة انتشار الموجات بالتفصيل.

في الأخير نستخلص ان النظرية الحالية ليست فقط دقيقة و إنما أيضا بسيطة الاستعمال لدراسة ظاهرة انتشار الموجات على لوحة متدرجة المادة.

النتائج المستخلصة يمكن استعمالها في تقنيات التمشيط بالموجات فوق الصوتية و رصد المنشات الصحية

<u>كلمات البحث</u>: ظاهرة انتشار الموجات ، لوحة متدرجة المادة ، تأثيرات حرارية، نظرية التشوه بالقص، موقف سطح محايد

Sommaire

Chapitre II : Théorie des plaques

Chapitre III : Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM

Chapitre IV : Résultats Et Discussion

Liste des notations

{ }	Vecteur colonne
[ ]	Matrice
Σ	Sommation
z_{ms}	Position de la surface moyenne
z_{ns}	Position de la surface neutre
V_c	La fraction volumique
h	Hauteur de la plaque
n	Indice de la loi de puissance
C	La distance entre la surface neutre et la surface médiane
P	Indice de fraction volumique
E_1, E_2	Module de Young
P_M	Propriété du métal
P_C	Propriété de la céramique
ρ	Densité massique
ν	Coefficient de poisson
u	Déplacement suivant X
w	Déplacement transversale
u_s, v_s, w_s	Composantes de cisaillement
u_b, v_b, w_b	Composantes de flexion
γ_{xz}, γ_{xy}, γ_{yz}	Composantes de déformation
τ_{xz}, τ_{yz}	Contrainte de cisaillement
σ_x, σ_y	Contrainte normale
$\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$	Contraintes longitudinales
$\bar{\tau}_{xz}$, $\bar{\tau}_{yz}$	Contraintes de cisaillement transversales
ε	Contrainte de déformation
Ω	La surface supérieure
q	La charge transversale appliquée

Qij	Coefficient de rigidité
M	Le moment de flexion
N	L'effort normal
N_x	Effort normal par unité de longueur
M_x	Moment de flexion par unité de longueur
q_0	L'intensité de la charge au centre de la plaque
f(z)	Fonction de cisaillement
Aij, Bij , Dij, Hij	Les composantes de rigidité
P_M and P_C	les propriétés correspondantes du métal et la céramique

P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 sont les coefficients montrant la température

(M_0, M_1, M_2 et M_3) les modes d'onde différentes

Liste des figures

Liste des Figures

CHAPITRE I

CHAPITRE II

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

Liste des tableaux

Liste des Tableaux

CHAPITRE I

CHAPITRE II

CHAPITRE IV

Introduction Générale

Introduction générale

Fonctionnellement matériaux graduées (FGM) sont de nouveaux matériaux qui sont conçus pour obtenir une performance fonctionnelle avec des propriétés progressivement variables dans une ou plusieurs directions (Koizumi, 1992). Cette continuité empêche le matériau d'avoir les inconvénients des composites tels que la délamination due à des contraintes interlaminaire, l'initiation et la propagation des fissures en raison de grandes déformations plastiques au niveau des interfaces et ainsi de suite. Typiquement, FGM sont faits d'un mélange de céramique et d'une combinaison de différents métaux (Bennoun et al 2016;. Ebrahimi et Dashti, 2015; Sallai et al, 2015;. Meradjah et al, 2015;. Kar et Panda, 2015; Pradhan et Chakraverty, 2015; Bakora et Tounsi, 2015; Bouchafa et al, 2015;. Arefi, 2015; Akbaş 2015; Mansouri et Shariyat, 2015; Belabed et al, 2014;. Khalfi et al, 2014;. Mansouri et Shariyat 2014; Hadji et al, 2014;.. Fekrar et al, 2014;. Tounsi et al, 2013a;. Bouderba et al, 2013;. Bourada et al, 2012;. Benachour et al, 2011). Donc, le point clé est une description précise des variables et les propriétés du matériau dans le sens de l'épaisseur, d'effectuer une analyse satisfaisante du comportement mécanique des plaques de MGF. De nombreux travaux sur les structures de MGF ont été étudiés dans la littérature. Par exemple, Reddy (2000) a analysé le comportement statique des plaques rectangulaires MGF sur la base de sa théorie de la plaque de déformation de cisaillement de troisième ordre. Reddy et Cheng (2001) ont présenté un modèle en trois dimensions pour une plaque de MGF soumis à des charges mécaniques et thermiques, à la fois par le sommet de la plaque. Vél et Batra (2004) ont proposé une solution en trois dimensions pour vibrations des plaques rectangulaires MGF. Zenkour (2006) a présenté une théorie de déformation de cisaillement généralisé dans lequel les déplacements dans le plan sont développés comme types sinusoïdales à travers l'épaisseur. Woo et al. (2006) ont étudié le comportement de vibration libre non linéaire des plaques en FGM en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déviation transversale. En outre, Park et Kim (2006) ont étudié la postbuckling thermique et analyses vibrations des plaques de FG. Kim (2005) a discuté de la personne à charge l'analyse des vibrations de la température des plaques rectangulaires MGF. Matsunaga (2008) a étudié les fréquences naturelles et les contraintes de flambage de FG simplement appuyés plaques rectangulaires sur la base 2D d'ordre supérieur de la théorie de la plaque approximative (2D Hapt). Shahrjerdi et al. (2011) ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement du second ordre pour analyser les vibrations des plaques solaires fonctionnellement graduées selon la température. Arefi et Rahimi (2011) ont étudié la réponse non linéaire d'une plaque carrée de FG avec deux couches intelligentes comme un capteur et de l'actionneur sous pression. Arefi (2013) a analysé le comportement non linéaire thermo-élastique du cylindre piézo-électrique à gradation fonctionnelle à paroi épaisse. Sobhy (2013) a étudié la vibration et le comportement de flambage de façon exponentielle classé matériau sandwich à la plaque reposant sur des fondations élastiques dans différentes conditions aux limites. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), y compris les effets de cisaillement déformation transversale, a été employé par quelques recherches pour analyser le comportement de flambage de plaques de MGF modérément épaisses (Yaghoobi et Yaghoobi, 2013; Bouazza et al., 2010). En utilisant une théorie raffinée efficace et simple, Ait Amar Meziane et al. (2014) ont étudié le flambage et sans vibration des plaques sandwich exponentiellement classés dans diverses conditions aux limites. HEBALI et al (2014) a proposé une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour la vibration statique et libre

Reddy et Cheng (2001) ont présenté un modèle en trois dimensions pour une plaque de MGF soumis à des charges mécaniques et thermiques, à la fois par le sommet de la plaque. Vél et Batra (2004) ont proposé une solution en trois dimensions pour vibrations des plaques rectangulaires MGF. Zenkour (2006) a présenté une théorie de déformation de cisaillement généralisé dans lequel les déplacements dans le plan sont développés comme types sinusoïdales à travers l'épaisseur. Woo et al. (2006) ont étudié le comportement de vibration libre non linéaire des plaques en FGM en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déviation transversale. En outre, Park et Kim (2006) ont étudié la postbuckling thermique et analyses vibrations des plaques de FG. Kim (2005) a discuté de la personne à charge l'analyse des vibrations de la température des plaques rectangulaires MGF. Matsunaga (2008) a étudié les fréquences naturelles et les contraintes de flambage de FG simplement appuyés plaques rectangulaires sur la base 2D d'ordre supérieur de la théorie de la plaque approximative (2D Hapt). Shahrjerdi et al. (2011) ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement du second ordre pour analyser les vibrations des plaques solaires fonctionnellement graduées selon la température. Arefi et Rahimi (2011) ont étudié la réponse non linéaire d'une plaque carrée de FG avec deux couches intelligentes comme un capteur et de l'actionneur sous pression. Arefi (2013) a analysé le comportement non linéaire thermo-élastique du cylindre piézo-électrique à gradation fonctionnelle à paroi épaisse. Sobhy (2013) a étudié la vibration et le comportement de flambage de façon exponentielle classé matériau sandwich à la plaque reposant sur des fondations élastiques dans différentes conditions aux limites. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), y compris les effets de cisaillement déformation transversale, a été employé par quelques recherches pour analyser le comportement de

flambage de plaques de MGF modérément épaisses (Yaghoobi et Yaghoobi, 2013; Bouazza et al., 2010). En utilisant une théorie raffinée efficace et simple, Ait Amar Meziane et al. (2014) ont étudié le flambage et sans vibration des plaques sandwich exponentiellement classés dans diverses conditions aux limites. HEBALI et al (2014) a proposé une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour la vibration statique et libre
analyse des plaques de FG. Bousahla et al (2014) ont présenté un nouveau plus haut cisaillement de l'ordre et de la théorie de la déformation normale basée sur la position de surface neutre pour le cintrage analyse des plaques composites avancés. Zidi et al (2014) ont utilisé une théorie de la plaque quatre variables raffinée pour plier l'analyse des plaques FG sous hygro-thermo-mécanique de chargement. Yaghoobi et al (2014) a présenté une étude analytique sur le post-flambage et non linéaire sans analyse des vibrations de FG poutres reposant sur fondation élastique non linéaire sous thermo-mécanique chargement à l'aide VIM. Ait Yahia et al (2015) a étudié la propagation des ondes dans des plaques fonctionnellement graduées avec des porosités utilisant diverses théories de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Nguyen et al. (2015) a proposé une théorie de la déformation de cisaillement raffiné d'ordre supérieur pour le pliage, les vibrations et le flambage analyse des plaques FG sandwich. Bourada et al. (2015) ont examiné les réponses de flexion et de vibration des poutres épaisses FG en proposant une théorie simple de cisaillement et les déformations normales romanes. Mahi et al. (2015) ont développé un nouveau modèle hyperbolique de déformation de cisaillement pour l'analyse statique et dynamique des isotrope, fonctionnellement graduée, sandwich et stratifiées plaques composites. Ait Atmane et al. (2015) ont utilisé une théorie de déformation de cisaillement variationnellement cohérente pour le comportement dynamique des faisceaux FG épais avec des porosités. Attia et al. (2015) ont étudié la réponse dynamique des plaques FG ayant des propriétés dépendant de la température en utilisant différents modèles raffinés quatre variables de plaques. Larbi Chaht et al (2015) ont étudié les comportements de flexion et flambage de FG dépendant de la taille nanométrique des faisceaux dont l'épaisseur effet de tension. Bouguenina et al. (2015) a présenté une analyse numérique des plaques FGM d'épaisseur variable soumise à flambage thermique. Tagrara et al (2015) ont étudié la flexion, flambage et les réponses de vibration des faisceaux de nanotubes de carbone renforcé fonctionnellement graduées composites. Belkorissat et al. (2015) ont étudié les propriétés dynamiques des plaques à l'échelle nanométrique FG en utilisant un nonlocal quatre raffinée théorie variables roman. Bennai et al. (2015) ont proposé un cisaillement roman d'ordre supérieur et de la théorie de la déformation normale pour les poutres FG sandwich. Tebboune et al (2015) ont

analysé le comportement de flambement thermique des plaques FG reposant sur fondation élastique basée sur une théorie de la déformation de cisaillement trigonométrique simple et efficace. Hamidi et al (2015) a présenté une théorie des plaques sinusoïdal avec 5-inconnues et l'effet d'étirement pour flexion thermomécanique des plaques FG sandwich. Bennoun et al. (2016) a proposé une nouvelle cinq variables théorie des plaques raffiné pour l'analyse des vibrations des plaques FG sandwich. Ait Atmane et al. (2016) ont étudié l'effet de l'épaisseur et de la porosité d'étirement sur la réponse mécanique d'une FG poutres reposant sur des fondations élastiques.

L'étude de la propagation des ondes dans les structures de MGF a reçu également beaucoup d'attention de divers chercheurs. Chen et al. (2007) ont étudié le comportement de dispersion des ondes dans une plaque de gradation fonctionnelle ayant des propriétés matérielles différentes selon la direction de l'épaisseur. Han et Liu (2002) ont étudié les ondes SH dans des plaques de MGF, où la variation de la propriété matérielle a été supposé être une fonction quadratique par morceaux dans le sens de l'épaisseur. Han et al. (2001) ont proposé une méthode analytique-numérique pour analyser les caractéristiques des ondes dans des cylindres de MGF. Han et al. (2002) ont également proposé une méthode numérique pour étudier l'onde transitoire dans des plaques de MGF excités par des charges d'impact. Sun et Luo (2011a) ont également étudié la propagation des ondes et la réponse dynamique des plaques rectangulaires de matériau fonctionnellement graduées avec des supports serrés remplis sous une charge impulsive. Compte tenu des effets thermiques et les propriétés du matériau dépendant de la température, Sun et Luo (2011b) ont étudié la propagation des ondes d'une plaque fonctionnellement graduée infinie en utilisant la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Parmi les ordre supérieur théories de déformation de cisaillement susmentionnées (HSDTs) , la théorie de l' Reddy est le plus largement utilisé en raison de sa grande efficacité et de simplicité (Reddy , 2000; Sun et Luo , 2011b) . Étant donné que les déplacements dans le plan de la théorie de l' Reddy sont développés comme fonction cubique de l'épaisseur de coordonnées , les équations du mouvement sont plus compliquées que celles des FSDT . Par conséquent, il y a une possibilité de développer une théorie précise , ce qui est simple à utiliser .

Le but de cette étude est de développer une théorie de la plaque de déformation de cisaillement pour la propagation des ondes d'une plaque fonctionnellement graduée infinie qui est simple à utiliser. La théorie est basée sur l'hypothèse selon laquelle le plan et des déplacements transversaux sont constitués de flexion et de cisaillement des composants, dans lequel les composantes de flexion ne contribuent pas à l'égard des forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas à l'égard des moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est que cela représente une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et qui satisfait aux conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. En outre, il contient quatre inconnues et a de fortes similitudes avec le CPT dans certains aspects tels que les équations du mouvement, des conditions aux limites, et les expressions du stress qui en résultent. Pour simplifier les équations pour la plaque de MGF, le système de coordonnées est situé à la surface neutre physique de la plaque. Ceci est dû au fait que l'étirement - n'existe pas lorsque la surface neutre physique est considéré comme un système de coordonnées (Bellifa et al, 2016 accouplement de flexion dans les équations constitutives d'une plaque d'excision, Ould Larbi et al, 2013;.. Yahoobi et Feraidoon, 2010). Les équations qui régissent la propagation des ondes dans la plaque de gradation fonctionnelle sont obtenus en utilisant le principe de Hamilton, où les effets de déformation par cisaillement et la rotation d'inertie sont pris en compte. Les courbes de la propagation des ondes dans la plaque gradation fonctionnelle dans des environnements thermiques dispersion, vitesse de phase et vitesse de groupe sont tracés. L'influence de l'indice de fraction volumique et de la température sur la vitesse de propagation des ondes dans la plaque de dispersion à gradation fonctionnelle, la vitesse de phase et le groupe sont clairement discutés.

Le présent travail de thèse s'articule autour de deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects:

- Théorique
- Analytique

Regroupés en quatre chapitres qui se résument comme suit :

L'aspect théorique comprend deux chapitres :

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, l’histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d’application

Le deuxième chapitre, les différentes théories des plaques ont été étudiées et analysées.

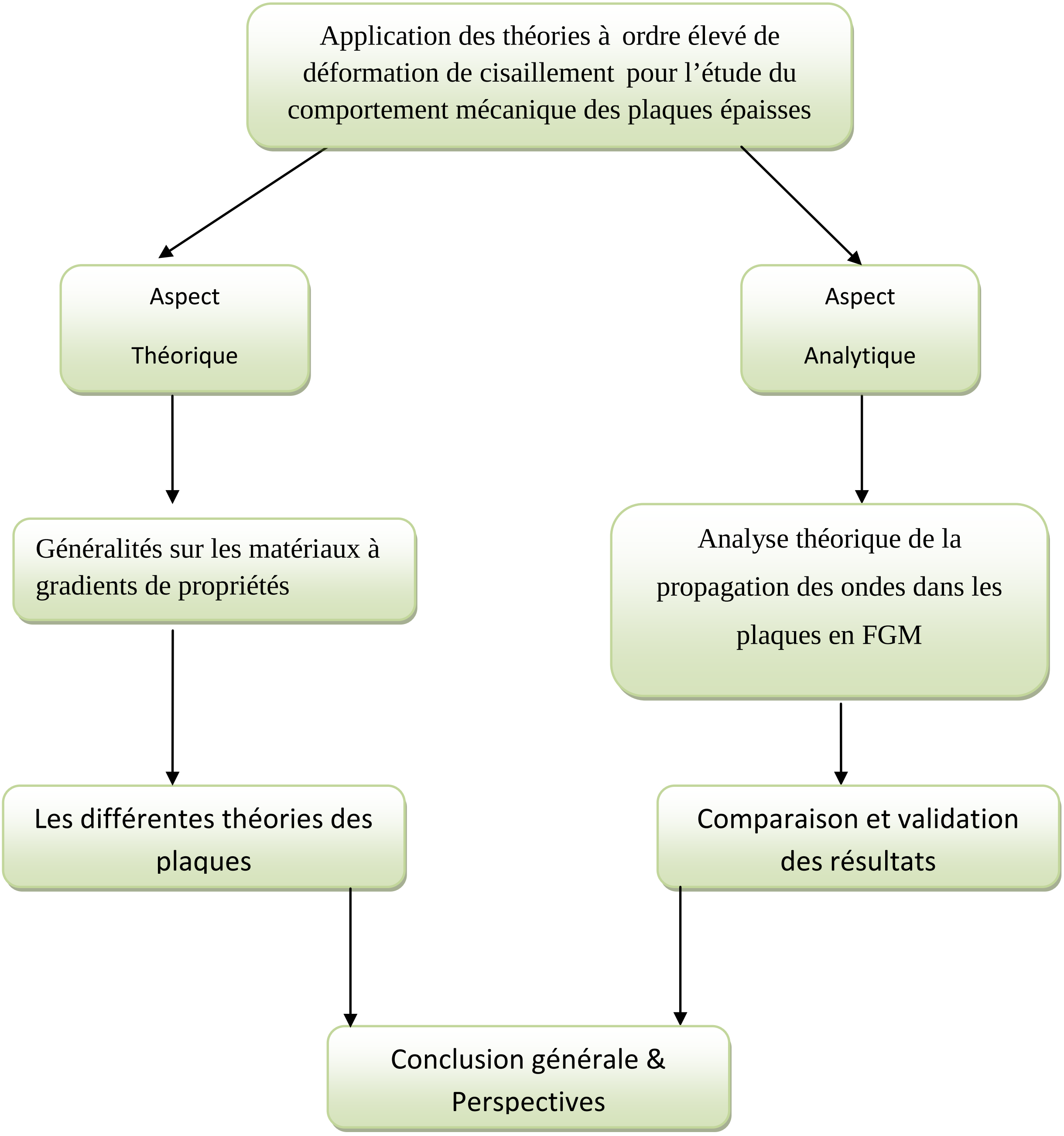
L'aspect analytique est scindé en deux chapitres :

Au troisième chapitre, Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM

Le quatrième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé, tout en le comparant avec ceux trouvés dans les études et théories relatives au cisaillement.

En fin, ce travail se termine par une conclusion générale et perspective.

L'organisation générale de ce présent travail est illustrée par l'organigramme suivant :



Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1. Introduction :

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentent ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont considérés comme des matériaux composites, produits par un changement non interrompu de leurs fractions volumiques dans la direction de leur épaisseur. Ce type de matériau à récemment suscité un grand intérêt de la communauté scientifique, en raison des avantages qu'il offre, par la diminution de la disparité dans les propriétés réduisant ainsi les contraintes thermiques [Zhong, 2007]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également leurs applications dans le domaine de la biomédicale [Baron, 2008].

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont souvent soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que centaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux constituant les parois de ces pièces doivent être capables de supporter sur une dizaine de millimètres un chargement thermique induit par des températures d'atmosphère environnant les 1800°C. Il n'ya aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi, 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation les matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température possèderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et possèderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	**Céramique**	**- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.**
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	**-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.**
La face à basse température	**Métal**	**- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.**

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d’un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

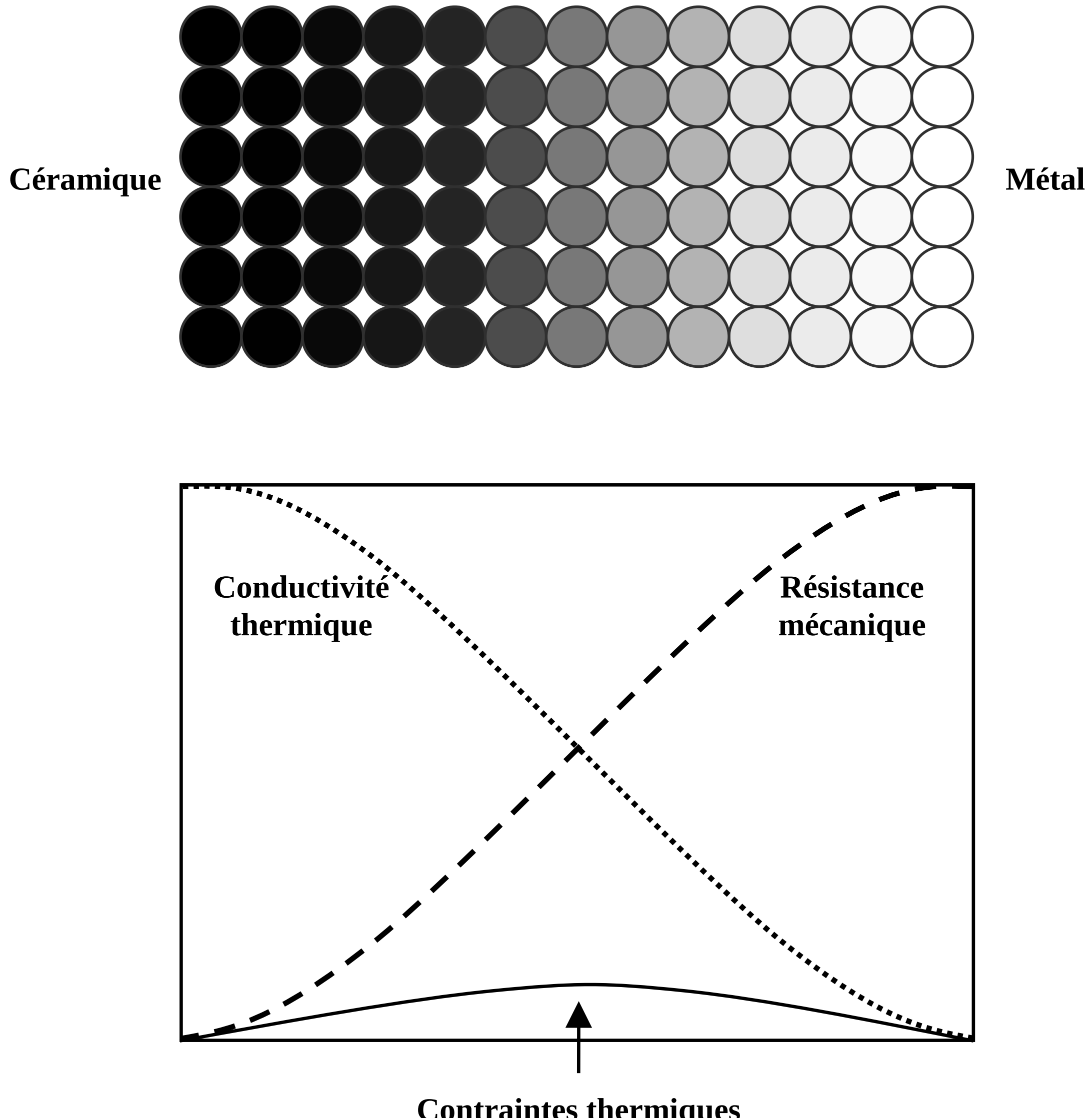


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

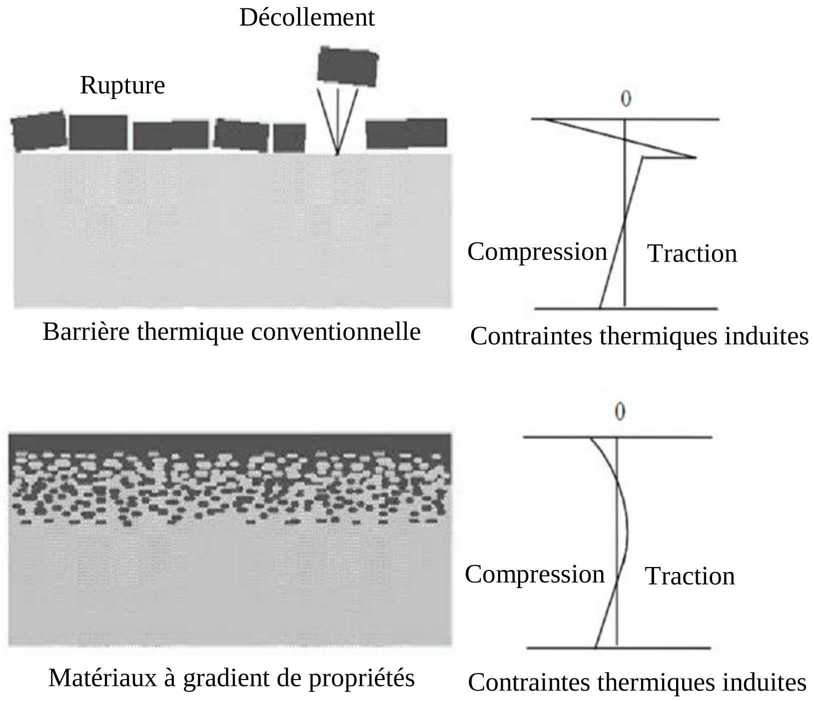


Figure I.2 : Protection thermique.

<u>I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :</u>

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi, 1992]. Les changements continues dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi, 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [Croce, 2004].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koizumi, 1997].

Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300 °C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi, 1992].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

-Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;

-Ténacité du matériau côté basse température.

-Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO_2-Y_2O_3) par projection plasma à double torches [Okamura, 1991].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [Okamura, 1991].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés tient son intérêt non seulement dans l’élaboration des nouveaux matériaux réfractaires performants pour leurs éventuelles utilisations dans le domaine aérospatial, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, employés dans les domaines de l’optique et de l’électronique. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en qualité de matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise développer la technologie des FGM dans le but d'améliorer leur efficacité énergétique pour des applications dans le nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

I.4. Motivation

Les avances significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie ont permis de produire FGM utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microstructure et la com-position matérielle. Dans l'avenir, les FGM avec des formes et des propriétés complexes, y compris deux et trois dimensions de gradient, seront produits à l'aide de la fabrica- tion avec une technique qui nécessitant l'ordinateur. Ce potentiel signifie que le concepteur ne se limite plus à une palette de matériaux homogènes existants, bien que beau- coup de recherches ont été consacrées à l'analyse de ce matériau, les ingénieurs et autres professionnels sont engagés dans le processus de conception avec les FGM manque un cadre unifié pour la prise de décisions concernant la façon de faire les meilleurs choix possible, basé sur ce menu de matériel avec les composants disparates et les profils du matériel composé. L'objectif des recherches est de développer une méthodologie solide pour l'adaptation de la composition spatiale d'un matériau à gradient évalué lors de l'ap- plication d'une haute température ou haute flux de chaleur. La méthodologie proposée est prévue d'une manière significative de notre capacité de concevoir les composants du (FGM) pour une variété de la mécanique et les applications aérospatiales où les condi- tions de fonctionnement sont sévères.

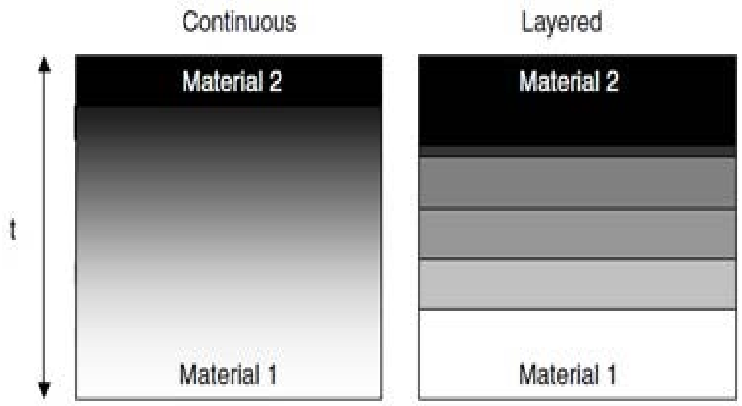


Figure I.3 – Schéma montrant deux géométries : l'architecture sur la gauche est discrète tandis que celle de droite est continue.

I.5. Classification

Peut-être les FGM sont mieux classifiés selon le traitement, comme illustré dans figure II-4, qui sépare les FGM en deux catégories : ceux par des processus constructifs et ceux produits par les processus transporter-basés [9]. En résumé, les processus constructifs se fondent sur le placement des phases dans une structure par l'ingénieur des méthodes. Les processus Transporter-basés se fondent sur des réactions ou des processus well-timed et sont conçus pendant la fabrication matérielle. Beaucoup de revêtements de protec- tion (par exemple, revêtements d'isolation thermiques) se rangent dans l'ancienne caté- gorie. La carburation de l'acier se range dans la dernière catégorie. Naturellement, une approche de conception dans laquelle une gradation est formée in situ, par un processus transporter-basé, serait plus simple et généralement plus souhaitable qu'une approche constructive.

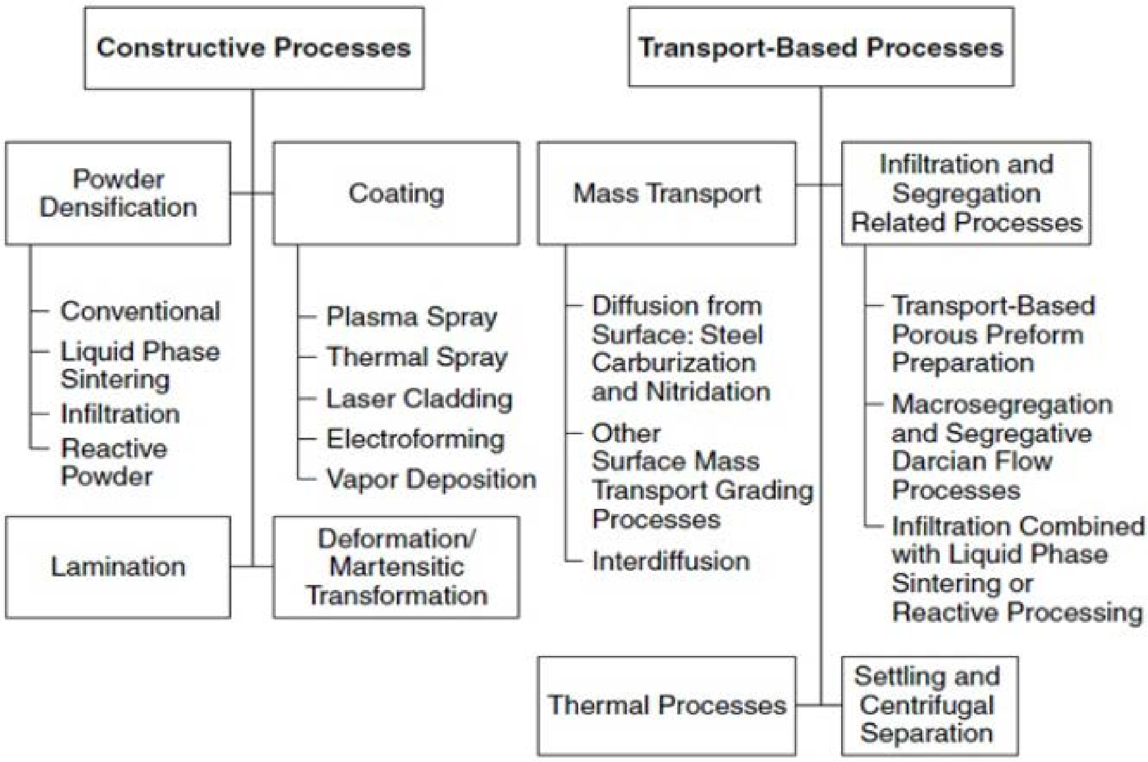


Figure I.4 : Classification des matériaux FGM selon [6].

I.6. Champs d'utilisation

I.6. 1.Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Possédant deux proprié- tés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau, il permet de produire le poids-léger et des matériaux solides.

Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGM sont également applicables à un mur externe de l'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.6. 2.Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance ac- crue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité ; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environ- nement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu.

Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.6. 3.Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, les outils de communication utilisant les fibres optiques ont besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long lon- gueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure.

Application des FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.6. 4.Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os couvrant le cerveau et d'autres organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, on a besoin d'un nouveau matériau qui peut remplacer les os et les articulations et a une longue vie a été souhaité. La technologie FGM est appli- cable aux os artificiels, des articulations et des dents. La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer aussi.

I.6. 5.Autres

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il de- vient de plus mince et plus petit. La technologie FGM est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats.

De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, les FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faites de polymère fluoré ont été développées.

I.7. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.7.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec, 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées
(25-1000 µm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

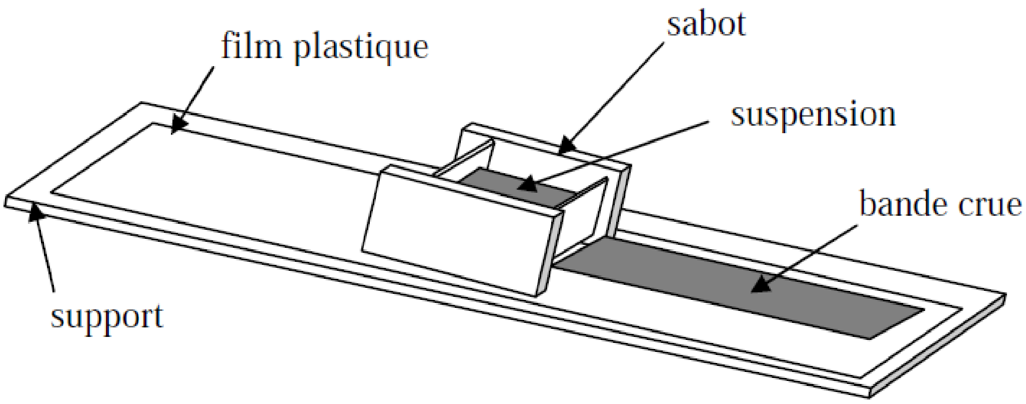


Figure I.5 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch, 1986].

I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.
Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:
-formation du tesson ou "prise".
-consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

-du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya, 1992]).
-ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.7.3. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliant âge. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop, 1993].
Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.7.4. Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens, 1990].

I.7.5. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.8. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

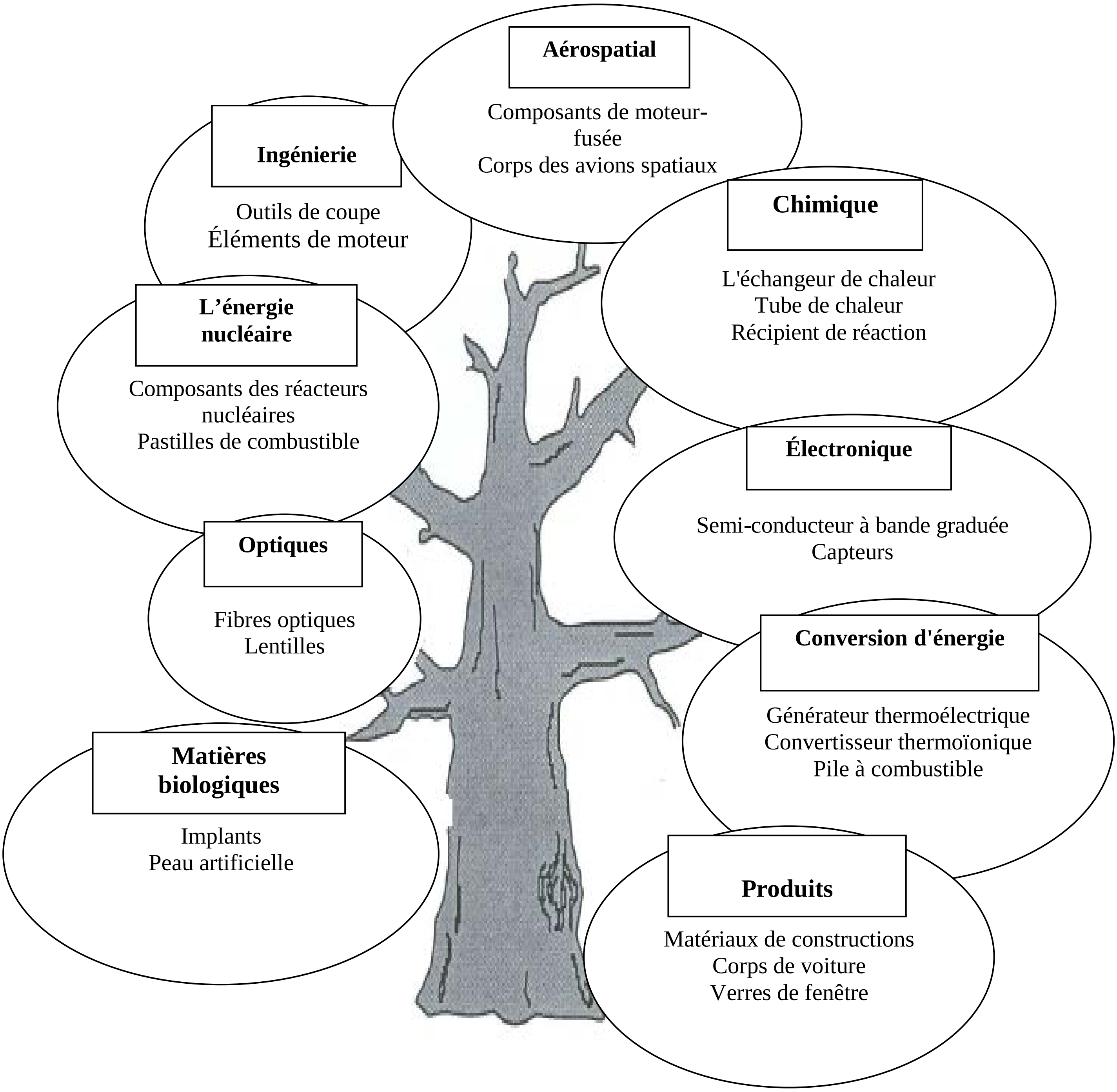


Figure I.6 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.9. Lois régissantes la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

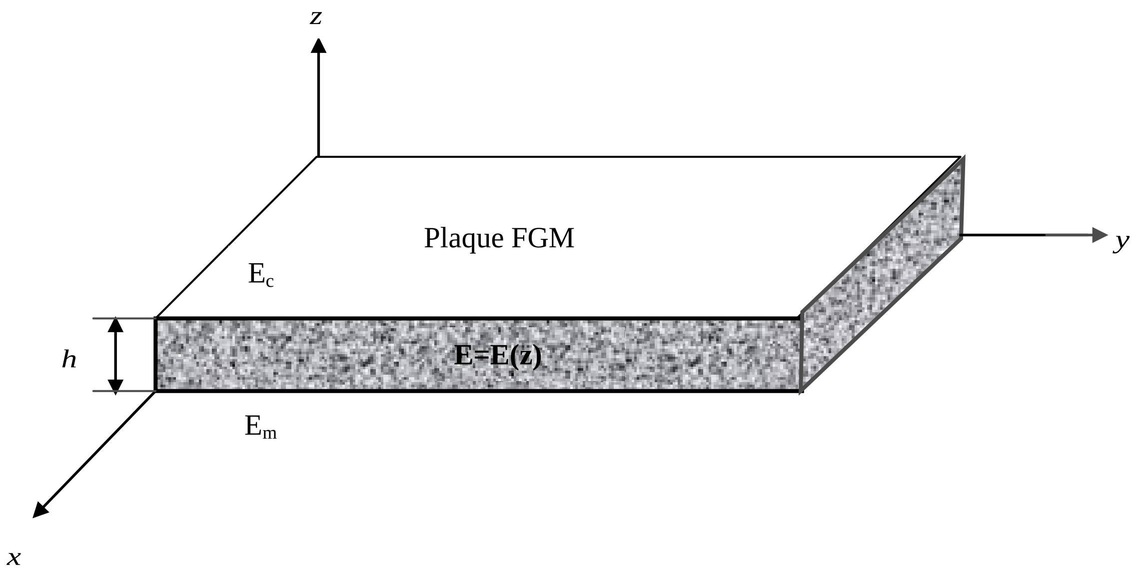


Figure I.7 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe $\boldsymbol{z}$ perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe $\boldsymbol{z}$) soit: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{z})$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^{p} \tag{I.1}$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) V(z) \tag{I.2}$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure $(z = -h/2)$ et de la surface supérieure $(z = h/2)$ de la plaque FGM, la variation du moule de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

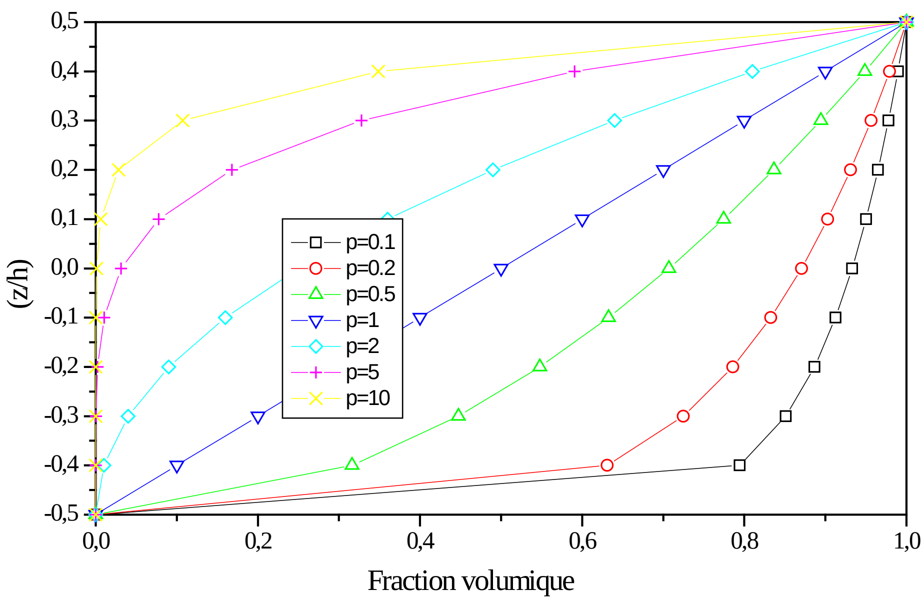


Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao, 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Shyang-ho, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \le z \le 0 \qquad \text{(I.3.a)}$$

$$V_2(z) = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{h/2-z}{h/2}\right)^p \quad \text{Pour } 0 \le z \le h/2 \qquad \text{(I.3.b)}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)\,Ec + [1 - V_1(z)]\,Em \quad \text{Pour } -h/2 \le z \le 0 \qquad \text{(I.4.a)}$$

$$E(z) = V_2(z)\,Ec + [1 - V_2(z)]\,Em \quad \text{Pour } 0 \le z \le h/2 \qquad \text{(I.4.b)}$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

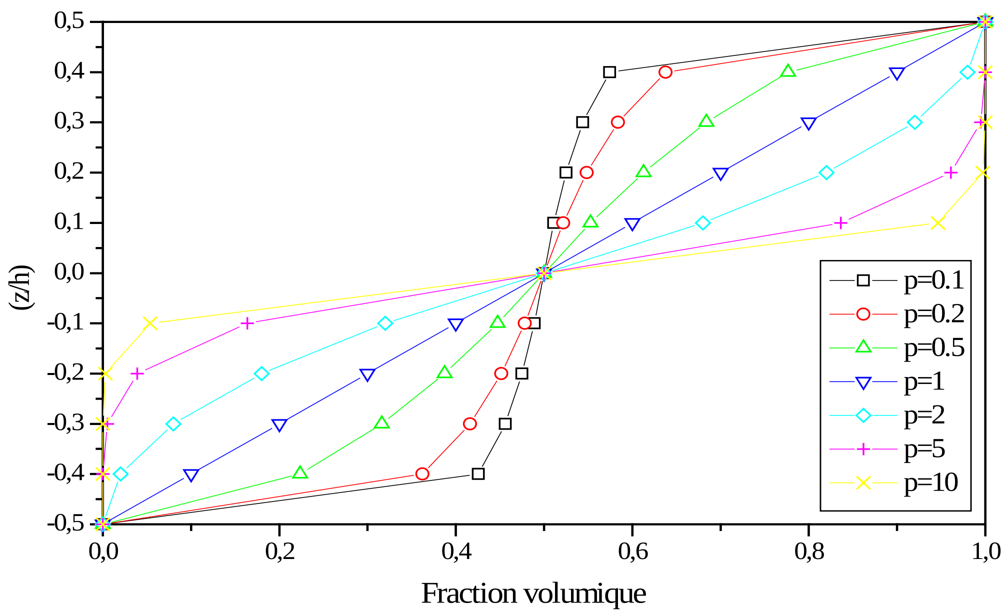


Figure I.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.9.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale, 1983] :

$$E(z) = E_c\, e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h}\mathbf{ln}\left(\frac{E_m}{E_c}\right) \tag{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

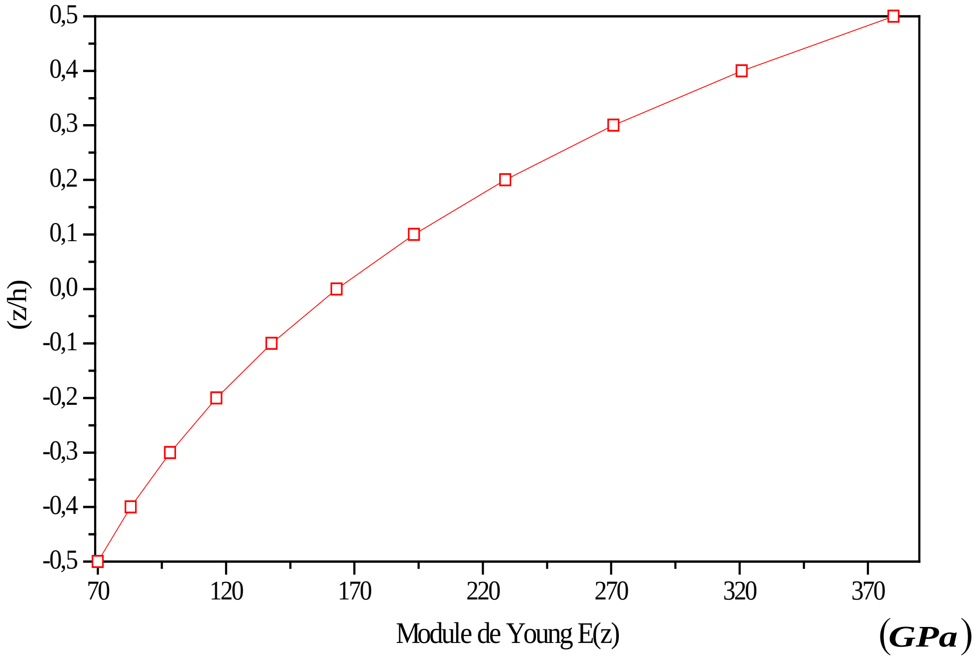


Figure I.10 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons définit les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Chapitre II

THEORIE DES PLAQUES

Chapitre II : Théorie des plaques

II.1. Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C’est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d’Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d’ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l’épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l’élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d’une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d’une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l’élancement ($\boldsymbol{L/h}$).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999], En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{(II.1.a)}$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{(II.1.b)}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \quad \text{(II.1.c)}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque $(z = 0)$.

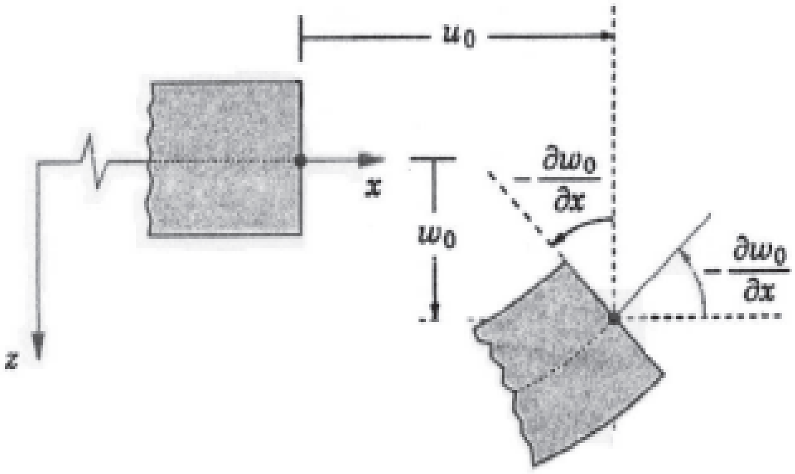


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945], [Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\phi_x(x,y) + z\,\varphi_x(x,y) \tag{II.2.a}$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\phi_y(x,y) + z\,\varphi_y(x,y) \tag{II.2.b}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \tag{II.2.c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$; $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

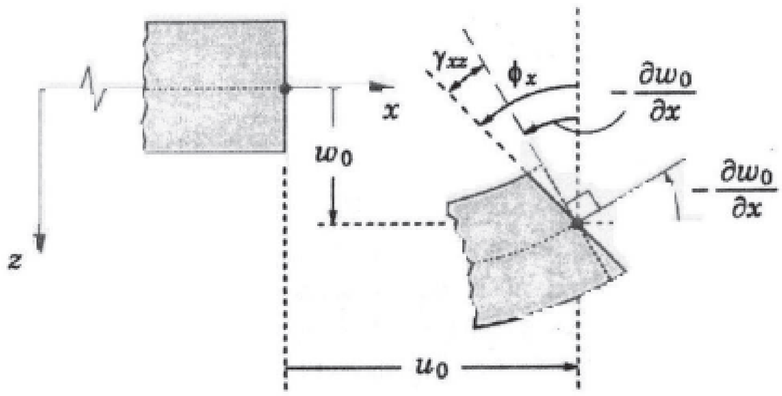


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand, 1949], [Naghdi, 1957], [Reissner, 1975], [Reddy, 1984], et [Kant, 2002]). Nous avons introduit ici quartes modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

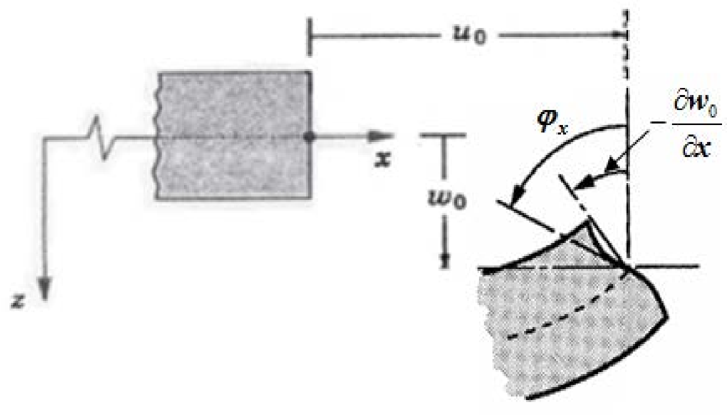


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \Psi(z)\varphi_x(x,y) \quad \text{(II.3.a)}$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \Psi(z)\varphi_y(x,y) \quad \text{(II.3.b)}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \quad \text{(II.3.c)}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [Reddy, 1997], [Reddy, 1999] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \quad \text{(II.4)}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur .Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{II.5}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al.

[Pindera, 1994] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ Et } \varphi_z = 0 \tag{II.6}$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane, 2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]}z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \tag{II.7}$$

II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [Whitney, 1973] ; [Nelson, 1974] ; [Lo, 1977]; [Touratier, 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan, 1969] avec ;

$$\psi(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right) \tag{II.8}$$

- L'approche de Reissner [Reissner, 1945] avec ;

$$\psi(z) = \frac{5}{4}z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \tag{II.9}$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy, 1981] et Reddy Avec ;

$$\psi(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \tag{II.10}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w, est constant [Reddy, 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [Duong, 2008].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [Kan, 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier, 1991] .La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{h}{\Pi}\sin\left(\frac{\Pi z}{h}\right) = \frac{h}{\Pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\Pi z}{h}\right)^{(2n+1)} \\ &= z\left(1 - \frac{\Pi^2}{3!}\frac{z^2}{h^2} + \frac{\Pi^4}{5!}\frac{z^4}{h^4} - \frac{\Pi^6}{7!}\frac{z^6}{h^6} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\right)\end{aligned} \tag{II.11}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy ,1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Polit, 1997] et [Dau, 2006].

Récemment, [Afaq et al, 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \tag{II.12}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z, alors que la fonction (sinus) de [Touratier, 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [Duong, 2008].

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $\psi(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT.Kirchoff [Kirchoff, 1850a] et [Kirchoff, 1850b]	Théorie classique des plaques	0	……………….	…………	Plaques minces
FSDT Midlin [Midlin, 1951]	Théorie de déformation des plques du 1er ordre	z	constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [Ambartsumian, 1958]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2}(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3})$	Quadratiques	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses

Reissner [Reissner, 1975]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4}z(1-\frac{4z^2}{3h^2})$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\Pi}\sin\left(\frac{\Pi z}{h}\right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama et al. [Karama, 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT, Levinson [Levinson, 1980], Reddy[Reddy, 1984]	Tféorie de deformation parabolique des plaques	$z(1-\frac{4z^2}{3h^2})$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [Aydogdu, 2009]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z\alpha^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha \succ 0$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Elmeiche, Tounsi et al [Elmeiche, 2011]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\left(\frac{h}{\Pi}\right)\sin\left(\frac{hz}{\Pi}\right)z}{\cosh\left(\frac{\Pi}{2}-1\right)}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aite atmane et al [Aite atmane, 2010]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh\left(\frac{\Pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\Pi}{2}\right)-1}z - \frac{\frac{h}{\Pi}sinh\left(\frac{\Pi z}{h}\right)}{cosh\left(\frac{\Pi}{2}\right)-1}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [Shimpi, 2002]	Théorie raffinée des plaques	$h[\frac{1}{4}\left(\frac{z}{h}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3]$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation de Von Karman dans le cas des grands déplacements est utilisé pour obtenir les relations déformation déplacement. Le tenseur de contraintes pour les plaques en matériau à gradient de propriétés est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée et enfin pour terminer la définition du principe des travaux virtuel et l'énergie potentielle totale minimum.

Chapitre III

Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM

Chapitre III : Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques en FGM

III.1.INTRODUCTION

Dans cette partie du chapitre on va étendre la théorie proposé par Shimpi et al. (2007) pour la flexion et la vibration des plaques à gradient de propriété FG. Contrairement à la conventionnelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), la nouvelle théorie du premier ordre de déformation de cisaillement proposée (NFSDT) a quatre inconnus. En général, les propriétés des matériaux de plaques graduellement fonctionnelles n'ont pas de symétrie par rapport au plan médium de la plaque. Donc, les équations de membrane et de flexion d'une telle plaque sont couplées. Morimoto et al. (2006), Abrate (2008), Zhang et Zhou (2008), Ould Larbi et al. (2013), Bousahla et al. (2014), Khalfi et al. (2014), Fekrar et al. (2014), Al-Basyouni et al. (2015) et Bourada et al. (2015) ont montré qu'il n y a pas de couple membrane-flexion dans les équations consécutives si la surface référence et correctement choisie.

D'où, pour simplifier les équations gouvernantes pour la plaque FG dans le présent travail, le système de coordonnée est localisé à la surface neutre physique de la plaque. La présente théorie du premier ordre de déformation de cisaillement basée dans la position exacte de la surface neutre et On suppose que les propriétés matérielles de la plaque varient continuellement suivant l'épaisseur selon une simple distribution de loi en puissance en fonction de la fraction volumique dans le matériau FGM imparfait. Le champ de température est supposée constant dans le plan et ne varie que dans l'épaisseur de la plaque.
Les équations régissant la propagation des ondes dans la plaque FGM sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Les relations de dispersion analytiques de la plaque sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

III.2. FORMULATIONS THEORIQUES

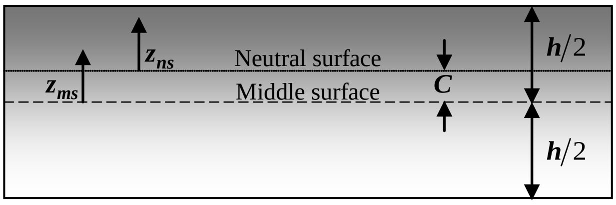
III.2.1 Concept physique de la surface neutre

Les matériaux à gradient de propriétés sont un type particulier de composites dans lesquels les propriétés des matériaux peuvent varier de façon régulière et continue du fait de faire varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs le long de certaine dimension (généralement dans le sens de l'épaisseur). Dans cette étude, la plaque FG est faite à partir d'un mélange de céramique et de métal et les propriétés sont supposées variables à travers l'épaisseur de la plaque. En raison de la dissymétrie des propriétés des matériaux des plaques FG par rapport au plan médian, les équations de flexion et d'étirement (membrane) sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie de manière convenablement dans la direction d'épaisseur de la plaque FG de façon d'être la surface neutre, les propriétés de la plaque FG étant symétriques par rapport à cet axe. Pour indiquer la position de la surface neutre de plaques FG, deux plans différents sont considérés pour la mesure de Z, c'est-à-dire, z_{ms} et z_{ns} sont mesurées à partir de la surface médiane et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme représenté sur la figure 1.

La fraction volumique de la céramique VC est exprimée en se basant sur les coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit

$$V_C = \left(\frac{z_{ms}}{h}+\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^n \tag{III-1}$$

Ceramic rich surface



Metal rich surface

Fig. III.1: la position de la surface medium et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.

Où n est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro et C est la distance entre la surface neutre et la surface médiane.

Les propriétés matérielles non homogènes d'une plaque FGM peuvent être exprimées par la loi de mélange en puissance (Suresh et Mortensen 1998). En utilisant l'équation. (III-1), les propriétés matérielles non homogènes de la plaque P FGM, en fonction de coordonnées de l'épaisseur, devient

$$P(z) = P_M + P_{CM}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^n, \quad P_{CM} = P_C - P_M \tag{III-2}$$

et dans lequel P_M and P_C les propriétés correspondantes du métal et la céramique et peuvent être exprimées en fonction de la température (Touloukian , 1967)

$$P = P_0\left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3\right) \tag{III-3}$$

Ou P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 sont les coefficients montrant la température - la dépendance des propriétés du matériau et sont uniques au matériau constitutif . T (En K) Est la température ambiante. n est le paramètre du matériau qui est supérieur ou égale à zéro. En outre, le paramètre C est la distance entre la surface neutre et la surface du milieu. Il est supposé que le module de Young E, le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α d'une plaque de FGM sont –dépendant de la température, alors que la masse volumique ρ et la conductivité thermique λ d'une plaque FGM sont indépendantes de la température (Sun et Luo , 2011b et 2012). La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminée pour satisfaire la nullité du premier moment par rapport au module d'Young comme suit (Ould Larbi et al. 2013)

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C)dz_{ms} = 0 \qquad \text{(III-4)}$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenu sous forme d'

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \qquad \text{(III-5)}$$

Il est clair que le paramètre C est égal à zéro pour les plaques isotropes et homogènes, comme prévu. L'effet de la température est supposée uniforme sur toute la surface de la plaque mais en faisant varier la température le long de la direction de l'épaisseur de la plaque FGM.

Cette équation est donnée suivant l'épaisseur par l'expression suivante :

$$\frac{d}{dz_{ns}}\left(\lambda(z_{ns})\frac{dT}{dz_{ns}}\right) = 0\,, \qquad \text{(III-6)}$$

Avec les conditions aux limites $T(h/2 - C) = T_C$ et $T(-h/2 - C) = T_M$. Substituant l'équation . (III-2) dans l'équation. (III-6), on obtient une équation différentielle du second ordre en termes de température qui peut être écrit comme

$$-\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{n\lambda_{CM} r^{n-1}}{\lambda_M + \lambda_{CM} r^n}\frac{dT}{dr} = 0 \qquad \text{(III-7a)}$$

Où

$$r = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(III-7b)}$$

L'écart de l'équation. (III-7a) peut être facilement résolu en utilisant la série polynomiale. Ainsi, la distribution de température à travers l'épaisseur de la plaque est obtenu sous forme de

$$T(z_{ns}) = T_M + \Delta T \frac{\theta(z_{ns} + C)}{\eta} \qquad \text{(III-8)}$$

Où

$$\begin{aligned}\theta(z_{ns}) = \Bigg[& \left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right) - \frac{(\lambda_C-\lambda_M)}{(n+1)\lambda_M}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ & + \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^2}{(2n+1)\lambda_M^2}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^3}{(3n+1)\lambda_M^3}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \\ & + \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^4}{(4n+1)\lambda_M^4}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^{4n+1} - \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^5}{(5n+1)\lambda_M^5}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}+\frac{1}{2}\right)^{5n+1} \Bigg]\end{aligned} \qquad \text{(III-9a)}$$

$$\eta = 1 - \frac{(\lambda_C-\lambda_M)}{(n+1)\lambda_M} + \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^2}{(2n+1)\lambda_M^2} - \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^3}{(3n+1)\lambda_M^3} + \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^4}{(4n+1)\lambda_M^4} - \frac{(\lambda_C-\lambda_M)^5}{(5n+1)\lambda_M^5} \qquad \text{(III-9b)}$$

III.3. Equations fondamentales

Il est à noter que la théorie de deux variables de plaque raffinée (RPT) en utilisant uniquement deux fonctions inconnues a été développé par Shimpi (2002) pour des plaques isotropes , et a été prolongée par Shimpi et Patel (2006ab) des dalles orthotropes , par Kim et al. (2009) pour les plaques composites stratifiés et MECHAB et al. (2010) pour les plaques FGM. Dans cette étude, RPT est étendu pour l'analyse de la propagation des ondes d'une plaque de FGM infinie.

III.3.1 Hypothèses de base

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes :

(i) L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque FGM.

(ii) Les déplacements sont faibles en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les contraintes impliquées sont infinitésimales.

(iii) le déplacement transversal w comprend deux éléments de flexion w_b et de cisaillement w_s. Ces deux composantes sont des fonctions des coordonnées x, y et le temps t seulement.

$$w(x, y, z_{ns}, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \qquad \text{(III-10)}$$

(iv) Les déplacements dans la direction x et dans la direction Y consistent en extension, flexion, et des composants de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s , \quad v = v_0 + v_b + v_s \tag{III-11}$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être données comme suit:

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} , \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \tag{III-12}$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donne lieu , en conjonction avec w_s des variations paraboliques de contraintes de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} , et donc à des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} , à travers l' épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement , sont égaux à zéro au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque . Par conséquent, l'expression et peut être donnée comme

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} , \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \tag{III-13}$$

Où la fonction de forme proposée par Shimpi (2002) est modifiée sur la base du concept de la surface neutre physique

$$f(z_{ns}) = \left(z_{ns} + C\right)\left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\left(\frac{z_{ns} + C}{h}\right)^2 \right] \tag{III-14}$$

III.3.2 Equations cinématique et constitutive

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III-10) - (III-14)

$$u(x,y,z_{ns},t)=u_0(x,y,t)-z_{ns}\frac{\partial w_b}{\partial x}+\left(z_{ns}+C\right)\left[\frac{1}{4}-\frac{5}{3}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}\right)^2\right]\frac{\partial w_s}{\partial x} \qquad \text{(III-15a)}$$

$$v(x,y,z_{ns},t)=v_0(x,y,t)-z_{ns}\frac{\partial w_b}{\partial y}+\left(z_{ns}+C\right)\left[\frac{1}{4}-\frac{5}{3}\left(\frac{z_{ns}+C}{h}\right)^2\right]\frac{\partial w_s}{\partial y} \qquad \text{(III-15b)}$$

$$w(x,y,z_{ns},t)=w_b(x,y,t)+w_s(x,y,t) \qquad \text{(III-15c)}$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}+z_{ns}\begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix}+f(z_{ns})\begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=g(z_{ns})\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}, \qquad \text{(III-16)}$$

où

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_s}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w_s}{\partial x}\end{Bmatrix}, \qquad \text{(III-17a)}$$

Et

$$g(z_{ns})=1-\frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \qquad \text{(III-17b)}$$

Pour FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x-\alpha\,\Delta T\\ \varepsilon_y-\alpha\,\Delta T\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\ \text{and}\ \begin{Bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{44} & 0\\ 0 & Q_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix} \qquad \text{(III-18)}$$

où (σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{yx}) et (ε_x, ε_y, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{yx},) sont respectivement les contraintes et les déformations. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation. (III-2), les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés sous forme de

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns},T)}{1-\nu(z_{ns},T)^2}, \tag{III-19a}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu\, E(z_{ns},T)}{1-\nu(z_{ns},T)^2}, \tag{III-19b}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns},T)}{2\left[1+\nu(z_{ns},T)\right]}, \tag{III-19c}$$

III.3.3 Equations de mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations de mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique (Reddy, 2002)

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K)\, dt \tag{III-20}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δK est la variation d'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \left[\sigma_x\, \delta\varepsilon_x + \sigma_y\, \delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\, \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\, \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\, \delta\gamma_{zx}\right] dA dz_{ns} \\ &= \int_A \left[N_x\, \delta\varepsilon_x^0 + N_y\, \delta\varepsilon_y^0 + N_{xy}\, \delta\varepsilon_{xy}^0 + M_x^b\, \delta k_x^b + M_y^b\, \delta k_y^b + M_{xy}^b\, \delta k_{xy}^b + M_x^s\, \delta k_x^s \right. \\ &\quad \left. + M_y^s\, \delta k_y^s + M_{xy}^s\, \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s\, \delta\gamma_{yz}^s + S_{xz}^s\, \delta\gamma_{xz}^s\right] dA\end{aligned} \tag{III-21}$$

Où les résultantes des contraintes, et sont définis par

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s\right) = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \left(1, z_{ns}, f\right)\sigma_i dz_{ns}\ , \quad \left(i = x, y, xy\right) \text{et } S_i = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} g\sigma_i dz_{ns}\ , \quad \left(i = xz, yz\right) \tag{III-22}$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est exprimée en

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \int_A \left[\dot{u}\delta\,\dot{u} + \dot{v}\delta\,\dot{v} + \dot{w}\delta\,\dot{w}\right]\rho(z_{ns})\, dA\, dz_{ns} \\ &= \int_A \left\{ I_0\left[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s\right)\left(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + I_2\left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\,\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\,\dot{w}_b}{\partial y}\right) + \frac{I_2}{84}\left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\,\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\,\dot{w}_s}{\partial y}\right)\right\} dA\end{aligned} \tag{III-23}$$

Où le point «. » Indique la dérivation par rapport à la variable de temps t ; et (I_0, I_2) sont inerties de masse définie comme

$$\{I_0, I_2\} = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \{1, (z_{ns}+C)^2\} \rho(z_{ns})\, dz_{ns} \tag{III-24}$$

Substituant les expressions δU et δK de l'équation . (21) et (23) dans l'équation. (20) et l'intégrant par parties, et en recueillant les coefficients δu_0, δv_0, δw_b, et δw_s , on obtient les équations de mouvement de la plaque suivantes

$$\begin{aligned}
&\delta u: \ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} \\
&\delta v: \ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} \\
&\delta w_b: \ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2}\right) \\
&\delta w_s: \ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84}\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2}\right)
\end{aligned} \tag{III-25}$$

En substituant l'équation. (16) dans l'équation. (18) et les résultats suivants dans l'équation. (22), les résultantes des contraintes sont obtenues sous forme

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma , \tag{III-26}$$

où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{III-26a}$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \tag{III-26b}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{III-26c}$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},\ B^{s}=\begin{bmatrix} B^{s}_{11} & B^{s}_{12} & 0 \\ B^{s}_{12} & B^{s}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B^{s}_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-26d)}$$

$$D^{s}=\begin{bmatrix} D^{s}_{11} & D^{s}_{12} & 0 \\ D^{s}_{12} & D^{s}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D^{s}_{66} \end{bmatrix},\ H^{s}=\begin{bmatrix} H^{s}_{11} & H^{s}_{12} & 0 \\ H^{s}_{12} & H^{s}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H^{s}_{66} \end{bmatrix}, \qquad \text{(III-26e)}$$

$$S=\left\{S^{s}_{xz}, S^{s}_{yz}\right\}^{t},\ \gamma=\left\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\right\}^{t},\ A^{s}=\begin{bmatrix} A^{s}_{44} & 0 \\ 0 & A^{s}_{55} \end{bmatrix}, \qquad \text{(III-26f)}$$

où, A_{ij} , D_{ij} etc., sont la rigidité de la plaque , définie par

$$\left\{A_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C}\left\{1,(z_{ns}+C)^{2},(z_{ns}+C)^{3},(z_{ns}+C)^{4},(z_{ns}+C)^{6}\right\}Q_{ij}dz_{ns} \qquad (i, j=1{,}2{,}6)$$

$$B^{s}_{ij}=\frac{5}{3h^{2}}E_{ij} \qquad (i, j=1{,}2{,}6)$$

$$D^{s}_{ij}=-\frac{1}{4}D_{ij}+\frac{5}{3h^{2}}F_{ij} \qquad (i, j=1{,}2{,}6)$$

$$H^{s}_{ij}=\frac{1}{16}D_{ij}-\frac{5}{6h^{2}}F_{ij}+\frac{25}{9h^{4}}H_{ij} \qquad (i, j=1{,}2{,}6) \qquad \text{(III-27)}$$

$$\left\{A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C}\left\{1,(z_{ns}+C)^{2},(z_{ns}+C)^{4}\right\}Q_{ij}dz_{ns} \qquad (i, j=4{,}5)$$

$$A^{s}_{ij}=\frac{25}{16}A_{ij}-\frac{25}{2h^{2}}D_{ij}+\frac{25}{h^{4}}F_{ij} \qquad (i, j=4{,}5)$$

La substitution de l’équation. (26) dans l’équation. (25), on obtient l'équation suivante:

$$A_{11}\frac{\partial^{2}u_{0}}{\partial x^{2}}+A_{66}\frac{\partial^{2}u_{0}}{\partial y^{2}}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^{2}v_{0}}{\partial x\partial y}-B^{s}_{11}\frac{\partial^{3}w_{s}}{\partial x^{3}}-\left(B^{s}_{12}+2B^{s}_{66}\right)\frac{\partial^{3}w_{s}}{\partial x\partial y^{2}}=I_{0}\ddot{u}_{0} \qquad \text{(III-28a)}$$

$$\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^{2}u_{0}}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^{2}v_{0}}{\partial x^{2}}+A_{22}\frac{\partial^{2}v_{0}}{\partial y^{2}}-B^{s}_{22}\frac{\partial^{3}w_{s}}{\partial y^{3}}-\left(B^{s}_{12}+2B^{s}_{66}\right)\frac{\partial^{3}w_{s}}{\partial x^{2}\partial y}=I_{0}\ddot{v}_{0} \qquad \text{(III-28b)}$$

$$-D_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}-2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}-D_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}-2(D_{12}^s+2D_{66}^s)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-D_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}=I_0(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s)-I_2\nabla^2\ddot{w}_b \qquad \text{(III-28c)}$$

$$B_{11}^s\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+(B_{12}^s+2B_{66}^s)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+(B_{12}^s+2B_{66}^s)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+B_{22}^s\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}-D_{11}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}-2(D_{12}^s+2D_{66}^s)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-D_{22}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}-H_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}-2(H_{12}^s+2H_{66}^s)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}-H_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \qquad \text{(III-28d)}$$
$$+A_{55}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+A_{44}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}=I_0(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s)-\frac{I_2}{84}\nabla^2\ddot{w}_b$$

L'équation. (III-28) sont les équations de la plaque de FGM dans des environnements thermiques en fonction des déplacements

III.4.Les relations de la dispersion d'onde

Nous supposons solutions pour u_0, v_0, w_b, et w_s représentant des ondes se propageant dans le plan x-y avec la forme

$$\begin{Bmatrix} u_0(x,y,t) \\ v_0(x,y,t) \\ w_b(x,y,t) \\ w_s(x,y,t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} U\exp[i(k_1x+k_2y-\omega t)] \\ V\exp[i(k_1x+k_2y-\omega t)] \\ W_b\exp[i(k_1x+k_2y-\omega t)] \\ W_s\exp[i(k_1x+k_2y-\omega t)] \end{Bmatrix} \qquad \text{(III-29)}$$

où U ; V ; W_b et W_s sont les coefficients de l' amplitude de l'onde , k_1 et k_2 sont les nombres d'onde de propagation des ondes le long axe x et axe y directions respectivement , ω est la fréquence .

Substituer l'équation. (III-29) dans l'équation. (III-28), on obtient:

$$([K]-\omega^2[M])\{\Delta\}=\{0\} \qquad \text{(III-30)}$$

Où

$$\{\Delta\}=\{U,V,W_b,W_s\}^T, \qquad \text{(III-31a)}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [M]=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \tag{III-31b}$$

Dans lequel

$$a_{11} = -\left(A_{11}\,k_1^2 + A_{66}\,k_2^2\right)$$

$$a_{12} = -k_1\;k_2\left(A_{12} + A_{66}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{13} = 0$$

$$a_{14} = i\,k_1\;k_2^2\,B_{12}^s + 2\,i\,k_1\;k_2^2\,B_{66}^s + i\,B_{11}^s\,k_1^3$$

$$a_{41} = -i\,k_1\;k_2^2\,B_{12}^s - 2\,i\,k_1\;k_2^2\,B_{66}^s - i\,B_{11}^s\,k_1^3$$

$$a_{22} = -\left(A_{22}\,k_2^2 + A_{66}\,k_1^2\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{23} = 0 \tag{III-31c}$$

$$a_{24} = i\,k_1^2\,k_2\,B_{12}^s + 2\,i\,k_1^2\,k_2\,B_{66}^s + i\,B_{22}^s\,k_2^3$$

$$a_{33} = -\left(2\,k_1^2\,k_2^2\,D_{12} + 4\,k_1^2\,k_2^2\,D_{66} + D_{11}\,k_1^4 + D_{22}\,k_2^4\right)$$

$$a_{34} = -\left(2\,k_1^2\,k_2^2\,D_{12}^s + 4\,k_1^2\,k_2^2\,D_{66}^s + D_{11}^s\,k_1^4 + D_{22}^s\,k_2^4\right)$$

$$a_{44} = -\left(H_{11}^s k_1^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)k_1^2k_2^2 + H_{22}^s k_2^4 + A_{55}^s k_1^2 + A_{44}^s k_2^2\right)$$

$$m_{11} = m_{22} = m_{34} = m_{43} = -I_0$$

$$m_{33} = -I_0 - I_2\left(k_1^2 + k_2^2\right)$$

$$m_{44} = -I_0 - \frac{I_2}{84}\left(k_1^2 + k_2^2\right)$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque FGM sont donnés par

$$\left|\,[K] - \omega^2 [M]\,\right| = 0 \tag{III-32}$$

En supposant, les racines de l'équation. (32) peut être exprimé comme

$$\omega_1 = W_1(k),\;\; \omega_2 = W_2(k),\;\; \omega_3 = W_3(k) \;\text{ and }\; \omega_4 = W_4(k) \tag{III-33}$$

Ils correspondent aux modes d'ondes M_0, M_1, M_2 et M_3, respectivement . Les modes d'ondes M_0 Et M_3 correspondent à l'onde de flexion, les modes d'ondes M_1 et M_2 correspondent à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de propagation des ondes dans la plaque FGM peut être exprimée par

$$C_i = \frac{W_i(k)}{k}, \quad (i = 1,2,3,4) \tag{III-34}$$

Dans l’équation. (31c), l'élément de matrice contenant des parties réelles et imaginaires, et par conséquent, la solution de l'équation caractéristique pour le calcul des rendements de vitesse de phase pour la vitesse de phase imaginaire et réel. Il est à noter ici, que les résultats présentés sont consacrés à la partie réelle de la vitesse de phase et la partie imaginaire est une mesure d’atténuation.

III.5.Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées sont examinées par une théorie raffinée des plaques RPT de déformation de cisaillement. Cette fonction remplit exactement les conditions de frontière d'effort sur les deux facettes supérieure et inférieure de la plaque. Dans cette étude deux types de matériaux sont choisis pour l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques FGM.

Les équations du mouvement pour la plaque FGM sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les relations de la dispersion, les fréquences fondamentales et la vitesse de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres, Une validation de résultats ainsi qu'une étude paramétrique serons faite dans le chapitre qui se suit.

Chapitre IV

Résultats Et Discussion

Chapitre IV : Résultats Et Discussion

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple, nous présenterons les résultats de la vibration libre et la propagation des ondes de dispersion pour un FGM parfait en commençant en premier lieu par la validation et comparaison de la nouvelle théorie raffinée à quatre variables RPT avec d'autre théories de déformation de cisaillement à cinq variables ,en confrontant nos résultats avec ceux publiés dans la littérature. Les résultats sont représentés par des courbes de fréquences propres et vitesse de phase de la propagation des ondes pour différentes types des plaques FGM.

Les effets des distributions de la fraction volumique et la température sur la propagation des ondes de la plaque fonctionnellement graduée sont discutés en détail dans la présente étude.

Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle. Pour montrer la précision et l'efficacité de la théorie actuelle, les résultats obtenus sont comparés avec les résultats des autres théories de cisaillement existant dans la littérature.

IV.2. Les résultats numériques et discussion

Dans cette section, le problème des valeurs propres pour une plaque en matériau fonctionnellement gradué Si3N4 / SUS304 est considéré. L'épaisseur de la plaque FGM est de 0,02 m. Le module de Young E, la densité ρ , le coefficient de Poisson ν et la dilatation thermique α de ces matériaux sont énumérés dans le tableau 1 , qui sont pris des références (Yang et Shen , 2002; Reddy et Chin , 1998) .

Materials	Proprieties	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
Si_3N_4	$E(Pa)$	0	348.43e+9	–3.070e–4	2.160 e–7	–8.946 e–11
	υ	0	0.24	0	0	0
	$\rho(kg/m^3)$	0	2370	0	0	0
	$\alpha(1/K)$	0	5.8723e–6	9.095e–4	0	0
SUS304	$E(Pa)$	0	201.04e+9	3.079e–4	–6.534 e–7	0
	υ	0	0.3262	–2.002 e–4	3.797e–7	0
	$\rho(kg/m^3)$	0	8166	0	0	0
	$\alpha(1/K)$	0	12.330e–6	8.086 e–4	0	0

Tableau IV.1: Propriétés physiques et mécaniques des matériaux constituants

IV.3.Propagation d'ondes dans les plaques FGM dans une température ambiante

La précision du modèle à base de surface neutre présente impliquant seulement quatre fonctions de déplacement inconnus est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux calculés en utilisant la théorie de Reddy (Sun et Luo , 2011b)) . Figures. IV.1 et IV.2 montrent respectivement, les courbes de dispersion et la vitesse de phase du premier mode d'onde de flexion M0, tout en variant l'indice de loi de puissance *n*. sous température ambiante $T_M = T_C = 300\,K$; Il apparait clairement que les résultats du modèle présent (avec seulement quatre fonctions de déplacement inconnus) concorde parfaitement avec la théorie de [Reddy 1998] (Sun et Luo , 2011b)) (avec cinq fonctions de déplacement inconnus).

Cela indique que cette méthode basée sur le déplacement transversal de flexion et de cisaillement conduit non seulement à des résultats précis, mais il peut améliorer temps de calcul en raison de la réduction du nombre d'inconnus ainsi que régissant les équations de la propagation des ondes dans la plaque à gradient de propriétés.

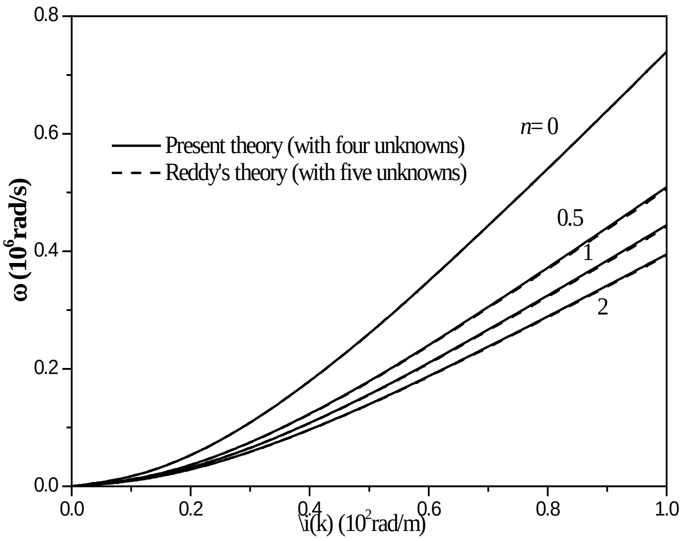


Figure. IV.1: Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel pour le mode d'onde M_0 ($T_M = T_C = 300\,K$)

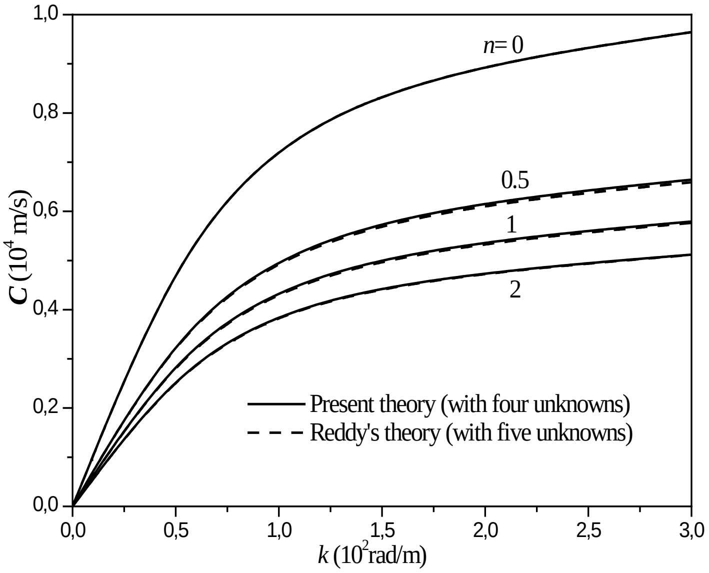
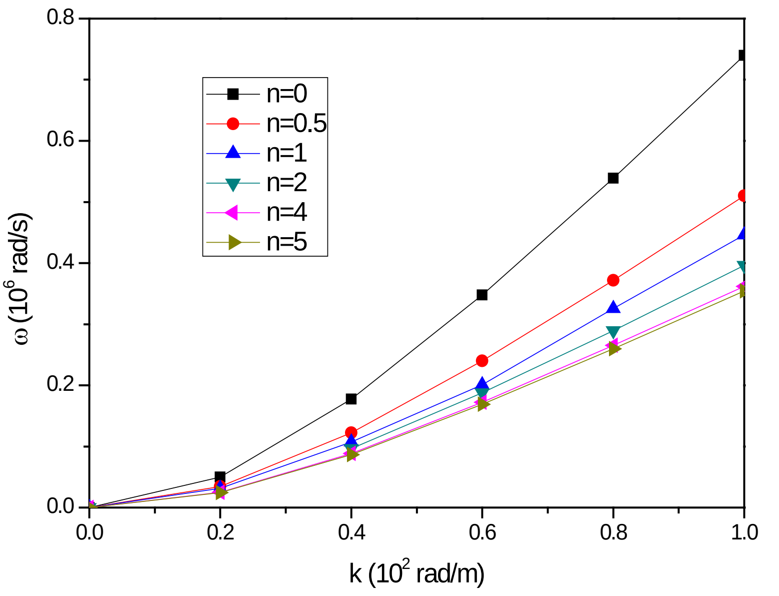


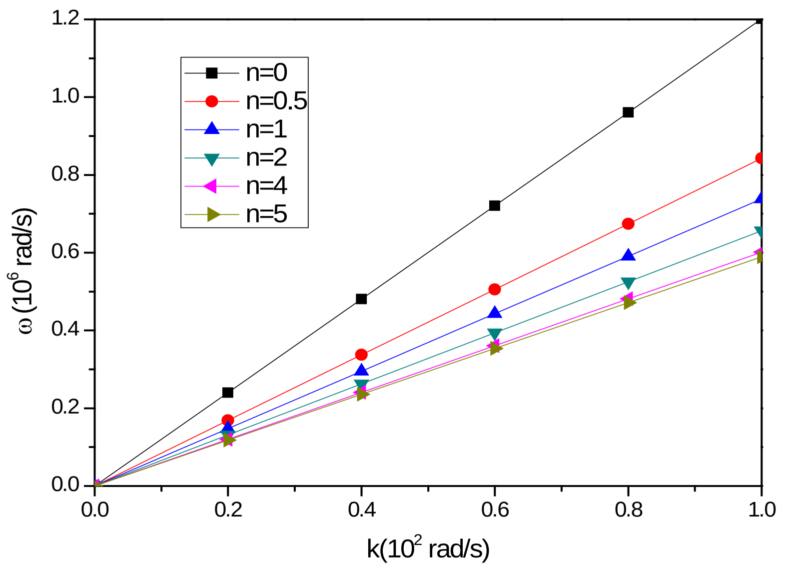
Figure. IV.2: Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques fonctionnellement gradués pour le mode d'onde M_0($T_M = T_C = 300\ K$).

Les courbes de dispersion de la plaque fonctionnellement graduée (avec $T_M = T_C = 300\ K$) sont représentés sur la Fig. 4 pour les modes d'onde différentes (M_0, M_1, M_2 et M_3) et différentes valeurs de l'indice de loi de puissance n. De ces résultats, on peut conclure que les courbes de dispersion des plaques fonctionnellement graduées sont considérablement influencées par l'indice de la loi de puissance. En effet, on constate que pour un même nombre d'onde k, la fréquence de la propagation des ondes dans la plaque fonctionnellement graduée est diminuée avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance, et la fréquence de la propagation des ondes dans la plaque homogène ($n = 0$) est le maximum par rapport à ceux de toutes les plaques fonctionnellement graduées. Par conséquent, l'augmentation de l'indice de la loi de puissance rend la plaque souple, et par conséquent, conduit à une réduction de la fréquence. En outre, on observe que la fréquence de la propagation d'onde pour les modes d'ondes M_1 et M_2 extensives et des plaques FGM, varie linéairement en fonction du nombre d'onde k .

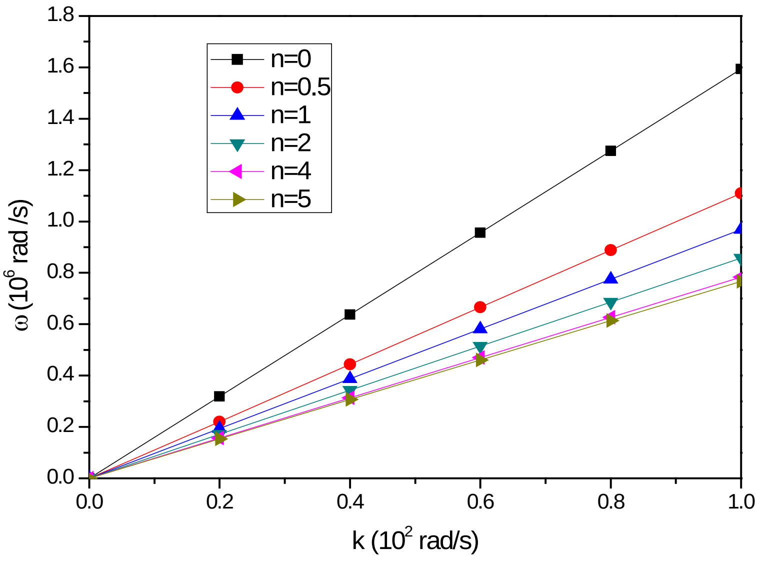
(a) M_0 mode



(b) M_1 mode



(c) M_2 mode



(d) M_3 mode

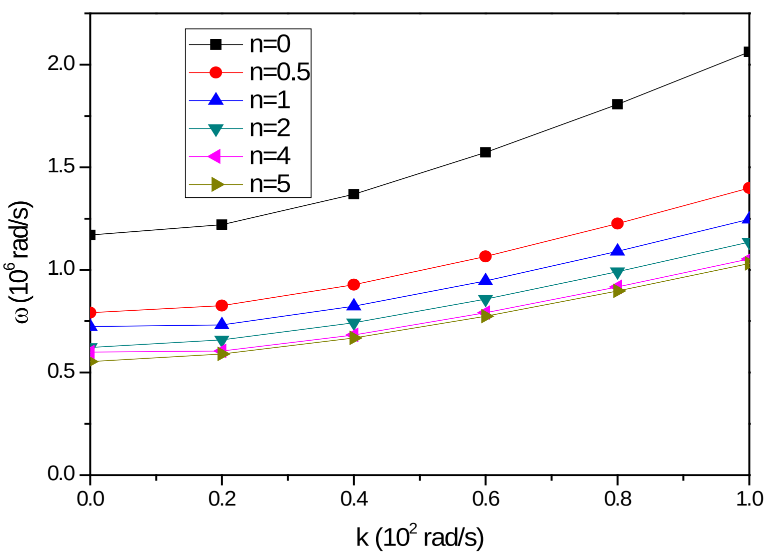
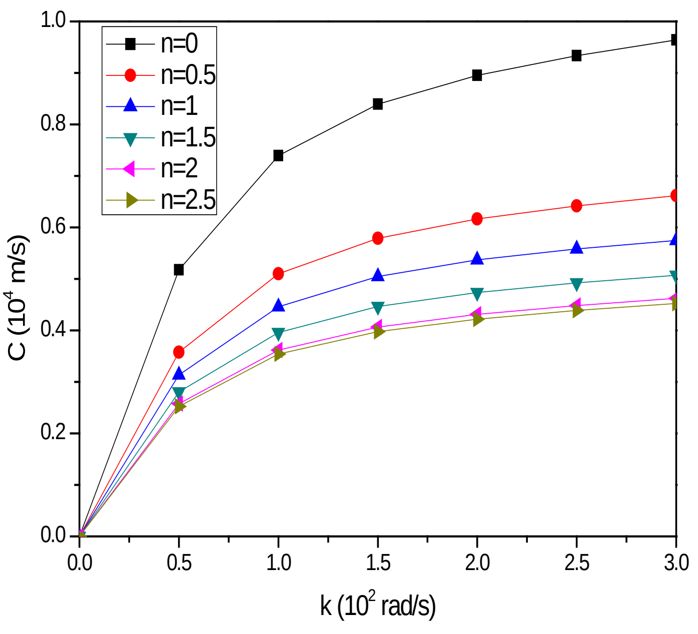


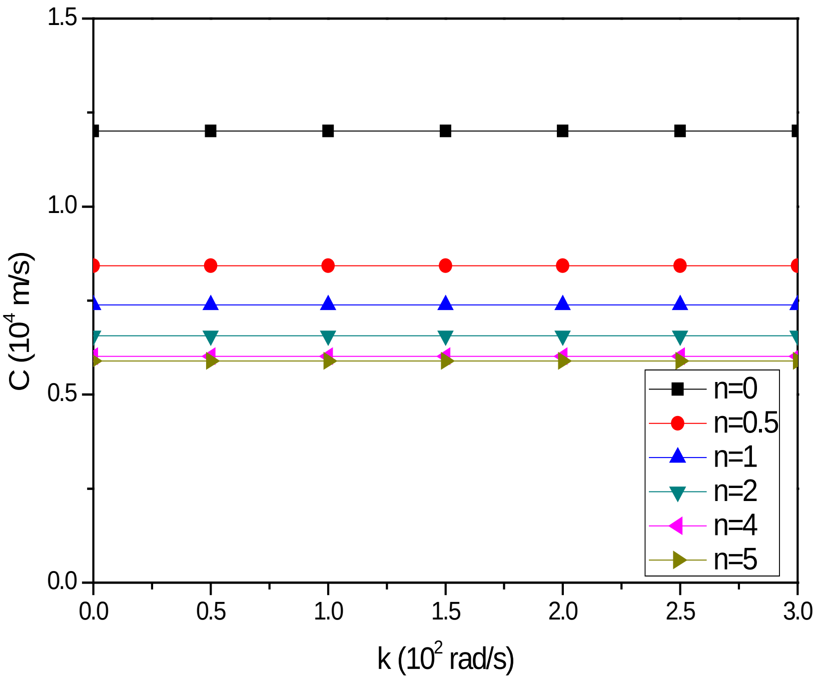
Figure. IV.3: Les courbes de dispersion des différentes plaques en FGM ($T_M = T_C = 300\,K$).

Les courbes de vitesse de phase des différentes plaques fonctionnellement graduées sous condition environnementale thermique $T_M = T_C = 300\,K$ sont illustrées sur la Figure. IV.5 ,il peut être vu que la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque FGM parfait diminue à mesure que l'indice de loi de puissance n augmente pour le même nombre d'onde k En outre, on peut voir que la vitesse de phase des modes d'ondes d'extension M_1 et M_2 des plaques fonctionnellement graduées est presque une constante . La vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque homogène ($n=0$) est le maximum parmi celles de toutes les plaques FGM. Ceci est prévu parce que la plaque en céramique ($n=0$) est celle qui a la plus forte rigidité. Donc, il est clair que l'hétérogénéité des FGMs a une grande influence sur la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque FGM.

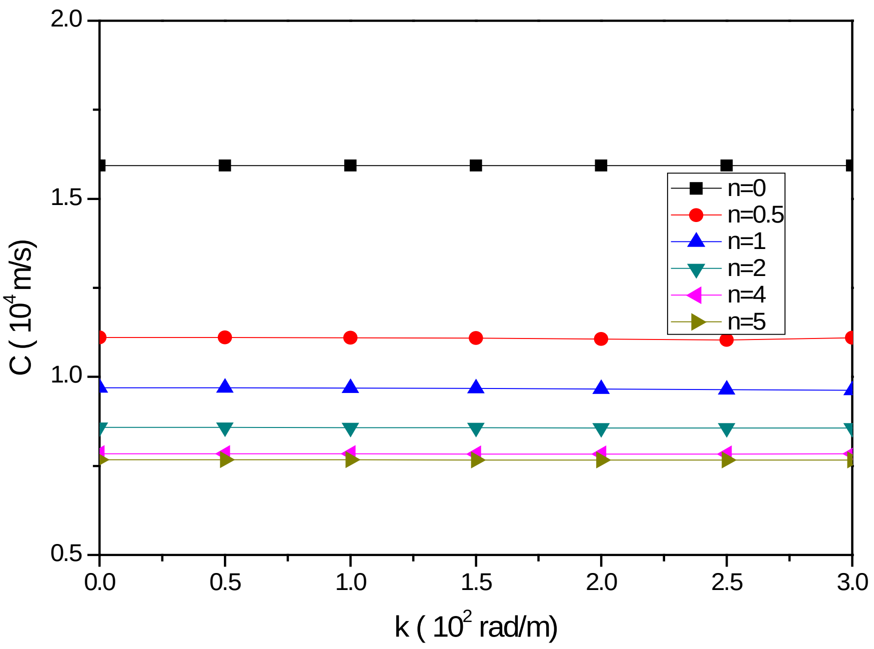
(a) M_0 mode



(b) M_1 mode



(c) M_2 mode



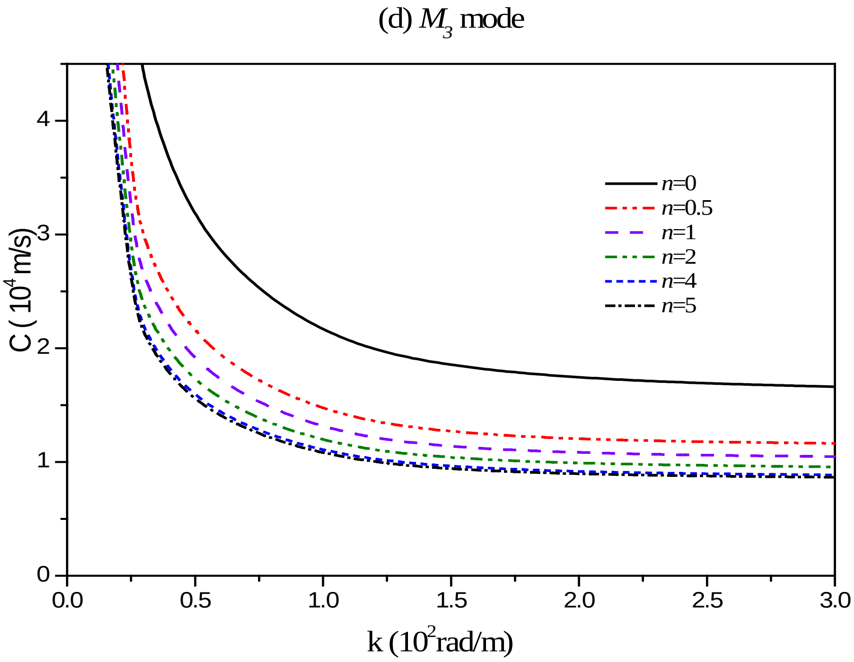


Figure. IV.4: Les courbes de la vitesse de phase des différentes plaques en FGM ($T_M = T_C = 300\ K$).

IV.4. Conclusions

Une théorie de déformation de cisaillement raffinée RPT des plaques FGM à quatre variables est développée pour l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques en matériaux FGM sous l'effet de la température ambiante.

A partir de ces résultats obtenus, on peut conclure que les courbes de dispersion et la vitesse de phase sont considérablement influencées par l'indice de loi de puissance dans les plaques fonctionnellement graduées ,ainsi que la température de surface elle a un effet sur les fréquences de propagation des ondes et la vitesse de phase. En effet, on constate que pour un même nombre d'onde, la fréquence de la propagation des ondes dans la plaque à gradient fonctionnel diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance *n*.

En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée donne des solutions qui coïncident très bien à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevée.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

CONCLUSION

Au terme du travail, effectué au laboratoire des matériaux et hydrologie, portant sur la comparaison entre les différentes théories d'ordre élevé pour le problème de la vibration libre et de propagation d'ondes, sous différentes conditions environnementales thermiques, dans les plaques en matériau FGM; nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les fréquences propres de propagation d'ondes et la vitesse de phase pour les plaques fonctionnellement graduées parfaites et imparfaites.

Les solutions exactes pour les problèmes des plaques qui dépendent de la fonction de cisaillement sont très limitées ; ceci nous a conduits à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacement.

L'avantage principal de la théorie proposée par rapport aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé existant est que, la présente théorie implique moins d'inconnue, sans faire intervenir de facteur de correction de cisaillement donc, le calcul peut avoir un retombé positif d'un point de vue réduction du coût.

Les propriétés des matériaux sont supposées dépendent de la température et variables dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions volumiques des constituants. Dans cette étude deux types de matériaux sont choisis pour l'analyse de la propagation d'ondes dans les plaques FGM.

Pour traiter un tel problème de plaque FGM en vibration, Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les solutions apparaissent en utilisant les relations de la dispersion, et les fréquences fondamentales et les vitesses de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres.

Dans ce travail, il peut être conclu que la théorie des plaques raffinées proposée est efficace et simple pour la résolution du comportement vibratoire et de propagation des ondes dans les plaques FGM.

En effet, on constate que pour un même nombre d'ondes, les fréquences de la propagation des ondes et les vitesses de phase dans la plaque FGM à une température ambiante, diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance quelque soit le nombre du mode. On conclut, aussi, que la vitesse de phase, dans une plaque compacte, augmente lorsque l'indice matériel diminue pour le même nombre d'onde k Pour les modes d'ondes d'extension et Pour les modes d'ondes d'extension et pour une plaque en céramique $(n = 0)$ La vitesse de phase demeure constante, mais cette constance n'est plus valable lorsque le matériau devient FGM.

La fréquence de la propagation d'ondes est largement affectée par la présence de la porosité lorsque le nombre d'onde (k) soit élevée et surtout pour les modes d'ondes extensionnels. La fréquence de la propagation d'ondes est largement affectée par la présence de la porosité lorsque le nombre d'onde (k) soit élevée et surtout pour les modes d'ondes extensionnels. En effet, les fréquences sont réduites lorsque la porosité augmente; de même, la vitesse de phase de la plaque diminue à mesure que la porosité augmente, sauf pour le mode d'onde de flexion, où un comportement inverse est observé.

Les propriétés des matériaux sont supposés être dépendantes de la température , et variable dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions de volume des constituants . La relation de dispersion analytique de la plaque fonctionnellement graduée est obtenue en résolvant un problème de valeurs propres.

Enfin, on peut dire que la théorie de cisaillement d'ordre supérieur et la théorie de la déformation normale est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour simuler les caractéristiques de propagation des ondes de la plaque fonctionnellement graduée

La formulation sera prête particulièrement bien à des structures composites (Kirkland et Uy , 2015; Ozturk , 2015; Darılmaz , 2015; Chattibi et al , 2015 . Sadoune et al , 2014. ; . Draiche et al , 2014) , micro / nano- structures (Bounouara et al 2016 ; . Al- Basyouni et al , 2015; . Besseghier et al , 2015; . Chemi et al , 2015; . Zemri et al 2015 . ; Tounsi et al , 2013b) , simulations par éléments finis (Curiel Sosa et al , 2013) et aussi d'autres méthodes numériques utilisant le calcul symbolique pour le problèmes de flexion des plaque (Rashidi et al , 2012) , qui seront examinés dans un proche avenir . . . .

Utilisation de la théorie raffinée pour le cas des plaques FGM de types sandwichs;

- Utilisation de la théorie raffinée pour différents types d'appuis ;
- Etude statique des plaques et les poutres FGM par la théorie raffinée ;
- Etude statique des plaques sandwich par la théorie raffinée ;

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches de la propagation des ondes dans les matériaux à gradient évalué FGM, précisément leurs comportements vis-à-vis des conditions environnementales thermiques et vibratoires

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[Afaq, 2003] Afaq. K.S : Développement d'ONU nouveau modèle verser les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des Effets de bord. PhD thesis,Universite Toulouse III - Paul Sabatier, (2003).

[Ait Amar ,2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293–318.

[Ait Atmane, 2010] Ait Atmane, H ., Tounsi, A ., Mechab,I., Adda ,B. E. A : Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement. Int. J. Mech and Mater in Design. 6 (2), 113-121, (2010).

[Ait Atmane, 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel and Composite Structures*, **19(2)**, 369-384.

[Ait Atmane, 2016] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2016), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (In press).

[Ait Yahia, 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, **53(6)**, 1143 – 1165.

[Akbaş,2.15] Akbaş, Ş.D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures,* **19**(6), 1421-1447.

[Akhavan, 2009] Akhavan, H., Hosseini Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh.: Solutions éxactes pour des plaques rectangulaires de Mindlin sous charges dans le plan posées sur une fondation élastique de Paternak. Partie II: L'analyse de fréquence. Comput. Mater. Sci.44, 951-961, (2009).

[Al-Basyouni, 2015] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos.Struct.*, **125**, 621-630.

[Ambartsumian, 1958] Ambartsumian, S.A: En théorie de plaques de flexion. Izv Otd Tech Nauk AN SSSR, 5, 69–77. (1958).

[Ambartsumian, 1958] Ambartsumian S.A: Théorie des plaques anisotrope. Technomic Publishing Co,(1969).

[Arefi, 20.13] Arefi, M., Rahimi, G.H. (2011), “Non linear analysis of a functionally graded square plate with two smart layers as sensor and actuator under normal pressure”, *Smart Structures and Systems,* **8(5)**, 433 – 446.

[Arefi, 20.13] Arefi, M. (2013), "Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder", *Acta. Mech.* **224**, 2771–2783.

[Arefi, 20.15] Arefi, M. (2015), “Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections”, *Steel and Composite Structures*, **18(3)**, 659 – 672.

[Attia, 2015] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 187-212.

[Aydogdu, 2003] Aydogdu, M: Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour les plaques composites stratifiées. Composite Structures, 94–101,(2003).

[Bakora,2015] Bakora, A., Tounsi, A. (2015)," Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", *Structural Engineering and Mechanics*, **56(1)**, 85 – 106.

[Bao, 1995] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, (1995).

[Baron, 2008] C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, Compte Rendue Mécanique ; 336 (9) :722–730, (2008).

[Belabed,2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

[Bellifa,2016] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265–275.

[Belkorissat, 2015] Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel and Composite Structures*, **18**(4), 1063-1081.

[Benachour,2011] Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites Part B*, **42**, 1386-1394.

[Bennai,2015] Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams” *Steel and Composite Structures*, **19**(3), 521-546.

[Bennoun,2016] Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423 – 431.

[Besseghier, 2015] Besseghier, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Benzair, A. (2015), “Nonlinear vibration properties of a zigzag single-walled carbon nanotube embedded in a polymer matrix”, *Advances in Nano Research*, **3**(1), 29-37.

[Bishop, 1993] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, Journal of Materials Science Letters; 12 (19) :1516-18, (1993).

[Boch, 1986] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al_2O_3/ZrO_2 laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192, (1986).

[Bouazza,2010] Bouazza, M., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Megueni, A. (2010), Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach”, *Computational Materials Science*. **49**, 865–870.

[Bouchafa, 2015] Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **18(6)**, 1493 – 1515.

[Bouderba,2013] Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104.

[Bouguenina, 2015] Bouguenina, O., Belakhdar, K, Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2015), “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel and Composite Structures*, **19(3)**, 679 – 695.

[Bounouara, 2016] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

[Bourada,2012] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater*., **14**(1), 5-33.

[Bourada,2015] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409 – 423.

[Bousahla, 2014] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, **11(6)**, 1350082.

[Chattibi, 2015] Chattibi, F., Benrahou, K.H., Benachour, A., Nedri, K., Tounsi, A. (2015), "Thermomechanical effects on the bending of antisymmetric cross-ply composite plates using a four variable sinusoidal theory", *Steel and Composite Structures*, **19(1)**, 93 – 110.

[Chemi, 2015] Chemi, A., Heireche, H., Zidour, M., Rakrak, K., Bousahla, A.A. (2015), "Critical buckling load of chiral double-walled carbon nanotube using non-local theory elasticity", *Advances in Nano Research*, **3(4)**, 193-206.

[Cheng, 1999] Cheng, Z.Q., Kitipornchai, S.: Membrane analogie de flambage et les vibrations des plaques non homogènes. ASCE J. Eng.Mech. 125 (11), 1293-1297, (1999).

[Cheng, 2000a] Cheng, Z.Q., Batra, R.C.: Correspondance exacte entre les valeurs propres de membranes et des plaques polygonales fonctionnellement graduées simplement appuyées. J. sound Vib. 229, 879-895, (2000a).

[Cheng, 2000b] Cheng, Z.Q., Batra, R.C.: Correspondance exacte entre valeurs propres de membranes et des plaques polygonales gradation fonctionnelle simplement appuyées. J. son Vib. 229(4), 879-895, (2000b).

[Chen, 2007] Chen, W.Q., Wang, H.M., Bao, R.H. (2007), "On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate", *Composite Structures*, **81**, 233–242.

[Curiel Sosa, 2013] Curiel Sosa, J.L., Anwar Bég, O., Liebana Murillo, J.M. (2013), "Finite element analysis of structural instability using an implicit/explicit switching technique", *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, **14**(5), 452 – 464.

[Darılmaz,2015] Darılmaz, K., (2015), "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 395 – 408.

[Dau, 2006] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier: Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures‖ multicouche. Computers and Structures, 84:1264-1274, (2006).

[Delale, 1983] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614, (1983).

[Draiche, 2014] Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass", *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81.

[Ebrahimi,2015] Ebrahimi, F., Dashti, S. (2015)," Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam", *Steel and Composite Structures*, **19(5)**, 1279 – 1298.

[El Meiche, 2011] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia : Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle. International Journal of Mechanical Sciences, 237–247, (2011).

[Fekrar, 2014] Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", *Meccanica*, **49**, 795 – 810.

[Filipich, 2002] Filipich, C.P., Rosales, M.B.: Etude approfodie sur le comportement des pieux et des poutres dans un sol de Winkler-Pasternak. Int. J. Mech. Sci. 44 (1), 21-36, (2002).

[Hadji, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A : Sans vibrations de plaques sandwich fonctionnellement classés en utilisant à quatre variables théorie raffinée de la plaque. Applied Mathematics and Mechanics, 925–942, (2011).

[Hadji, 2014] Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A., Bedia, E.A. (2014), "A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam", *Steel and Composite Structures*, **16(5)**, 507 – 519.

[Hamidi, 2015] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **18(1)**, 235 – 253.

[Han, 2002] Han, X., Liu, G.R. (2002), "Effects of SH waves in a functionally graded plate", *Mechanics Research Communications*, **29**, 327–338.

[Han, 2002] Han, X., Liu, G.R., Lam, K.Y. (2002), "Transient waves in plates of functionally graded materials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **52**, 851–865.

[Han, 2001] Han, X., Liu, G.R., Xi, Z.C., Lam, K.Y. (2001), "Transient responses in a functionally graded cylinder", *International Journal of solids and Structures*, **38**, 3021–3037.

[Hebali, 2014] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Engineering Mechanics*, **140**, 374 – 383.

[Hildebrand, 1949] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, (1949).

[Huang, 2008] Huang, Z.Y., Lu, C.F., Chen, W.Q.: Solutions de référence pour les plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur Winkler-Pasternak fondations élastiques. Compos. Struct. 85, 95-104, (2008).

[Kant, 2002] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344, (2002).

[Kar, 2015] Kar, V.R., Panda, S.K. (2015), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel and Composite Structures*, **18(3)**, 693 – 709.

[Karama, 2003] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou: Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité. Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, (2003).

[Kerr, 1964] Kerr, A.D.: Modèles de fondation élastiques et viscoélastiques. ASME J. Appl. Mech. 31 (3), 491-498, (1964).

[Kieback, 2003] Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H.: Les techniques de traitement des matériaux fonctionnellement gradués. Mater. Sci. Eng. Un 362,81-106, (2003).

[Kirchhoff, 1850a] Kirchhoff, G.R: Sur la balance et le mouvement d'un disque élastique. J. Reine Angew. Math. (Crelle), 40, 51-88, (1850a).

[Kirchhoff, 1850b] Kirchhoff, G.R: À propos des vibrations d'une plaque élastique circulaire. Poggendorffs Annalen,, 81, 258–264, (1850b)

[Koizumi, 1992] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333-347, (1992).

[Koizumi, 1997] M. Koizumi, FGM activities in Japan. Composites; 28 (1-2): 1– 4. (1997).

[Kokini, 1990] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, (1990).

[Khalfi, 2014] Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, **11(5)**, 135007.

[Kim, 2005] Kim, Y.W. (2005), "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates," *J. Sound Vib.*, **284**(3-5), 531-549.

[Kim, 2009] Kim, S.E., Thai, H.T., Lee, J. (2009), "A two variable refined plate theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, **89**, 197–205.

[Kirkland, 2015] Kirkland, B., Uy, B. (2015), "Behaviour and design of composite beams subjected to flexure and axial load", *Steel and Composite Structures*, **19(3)**, 615-633.

[Larbi Chaht, 2015] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 425-442.

[Lo, 1977] Lo. K.H & R.M. Christensen: Une théorie d'ordre supérieur de la déformation de la plaque. Partie 1: plates‖ homogène, Vol.44, N° 4, pages 669-676, (1977).

[Lostec, 1997] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, (1997).

[Mahi,2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), ”A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.

[Mansouri,2014] Mansouri, M.H., Shariyat, M. (2014), “Thermal buckling predictions of three types of high-order theories for the heterogeneous orthotropic plates, using the new version of DQM”, *Compos Struct*, **113(1)**, 40 – 55.

[Mansouri, 2015] Mansouri, M.H., Shariyat, M. (2015), “Biaxial thermo-mechanical buckling of orthotropic auxetic FGM plates with temperature and moisture dependent material properties on elastic foundations”, *Composites Part B*, **83**, 88 – 104.

[Malekzadeh, 2009] Malekzadeh, P.: Analyse des vibrations libres des plaques épaisses fonctionnellement graduées posées sur des fondations élastiques en 3D. Compos. Struct. 89, 367-373, (2009).

[Matsunaga, 2000] Matsunaga, H.: Vibration et stabilité des plaques épaisses posées sur fondations élastiques. ASCE J. Eng. Mech. 126 (1), 27-34, (2000).

[Matsunaga, 2008] Matsunaga, H.: Vibration libre et stabilité des plaques fonctionnellement graduées selon la théorie de déformation d'ordre élevée en 2D. Compos. Struct. 82, 499-512, (2008).

[Mechab, 2010] Mechab, I., Ait Atmane , H., Tounsi, A., Belhadj, H.A., Adda Bedia, E.A. (2010), "A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates", *Acta Mech Sin*, **26**, 941–949.

[Meradjah, 2015] Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.* 18(3), 793 – 809.

[Mindlin, 1951] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. J.Appl.Mech; 18 (1): 31-38, (1951).

[Mindlin, 1951] Mindlin. R.D: Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, (1951)

[Mistler, 1973] R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull; 52 (11): 850-854, (1973).

[Moya, 1992] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, Materials Letters; 14 (5-6): 333-35, (1992).

[Murthy, 1981] Murthy. M.V.V: Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé. Rapport technique‖, NASA, (1981).

[Naghdi, 1957] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380, (1957).

[Nelson, 1974] Nelson. R.B & D.R.Lorch: Une théorie raffinée pour plates‖ orthotrope stratifié. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183, (1974).

[Nguyen, 2007] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. Mech. Advanced Mater. Struct; 14 (8): 567-575, (2007).

[Nguyen, 2015] Nguyen, K.T., Thai, T.H., Vo, T.P. (2015), "A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **18(1)**, 91 – 120.

[Okamura, 1991] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, Mater. Sci. Eng :A; 143 (1-2): 3-9, (1991).

[Omurtag, 1997] Omurtag, M.H., Ozutok, A., Akoz, A.Y.: Analyse des vibrations libres des plaques de Kirchhoff reposant sur fondation élastique par la formule des éléments finis mixtes basé sur la différentielle de Gateaux. Int. J. Numer. Méthodes Eng. 40 (2), 295-317, (1997).

[Ould Larbi, L, 2013] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **41**, 421–433.

[Ozturk, 2015] Ozturk, H. (2015), "Vibration analysis of a pre-stressed laminated composite curved beam", *Steel and Composite Structures*, **19(3)**, 635-659.

[Park, 2009] Park, J.S., Kim, J.H. (2006), "Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates," *J. Sound Vib.*, **289**(1-2), 77-93.

[Pasternak, 1954] Pasternak, P.L.: La nouvelle méthode d'analyse d'une fondation élastique par le moyen de deux constantes de fondation. Cosudarstrennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscou, URSS, pp. 1-56, (1954) [en russe].

[Pradhan, 2015] Pradhan, K.K., Chakraverty, S. (2015), "Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports", *Structural Engineering and Mechanics*, **53(2)**, 337 – 354.

[Polit, 1997] Polit. O and M. Touratier: Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses. Composite Structures, 38(1-4):37-44, (1997).

[Rashidi, 2012] Rashidi, M.M., Shooshtari, A., Anwar Bég, O. (2012), "Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates", *Computers and Structures*, **106/107**, 46–55.

[Reddy, 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, (1984).

[Reddy, 1997] J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, (1997).

[Reddy, 1999] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia, (1999).

[Reddy, 2000] Reddy, J.N.: Analyse des plaques fonctionnellement graduées. Int. J.Numer. Méthodes Eng. 47, 663-684, (2000).

[Reddy, 2002] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q.: La correspondance de fréquence entre les membranes et coquilles peu profondes sphériques fonctionnellement gradués de polygonale planform. Int. J. Mech. Sci. 44 (5), 967-985, (2002).

[Reissner, 1945] Reissner.E : Une théorie simple d'ordre supérieur pour plates‖ composite stratifiée. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, (1945).

[Reissner, 1975] Reissner. E: Sur flexion transversale de plaques, y compris les effets de déformation transversale de cissaillement. Int. J. Solids Structures; 25(5):495-502, (1975) .

[Sadoune, 2014] Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates", *Steel Compos. Struct.*, **17(3)**, 321-338.

[Sallai, 2015] Sallai, B., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E.A. (2015), "Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam", *Steel and Composite Structures*, 19(4), 829-841.

[Shahrjerdi, 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Majid, D.L.A. (2011), "Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **25**(9), 2195~2209.

[Shen, 1995] Shen, H.S.: Analyse de post-flambage des plaques laminées composites sur deux paramètres fondations élastiques. Int. J. Mech. Sci. 37 (12), 1307-1316, (1995).

[Shimpi, 2002] Shimpi, R.P: Théorie des plaques raffinée et ses variantes. AIAA Journal, 137–146, (2002).

[Shimpi, 2006a] Shimpi, R.P, Patel, H.G. (2006a), “A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis”, *Int J Solids Struct*, **43(22)**, 6783–6799.

[Shimpi, 2006b] Shimpi, R.P, Patel, H.G. (2006b), “Free vibrations of plate using two variable refined plate theory”, *J Sound Vib*, **296(4–5)**, 979–999.

[Shyang-ho, 2003] Chi . Shyang-ho. Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, (2003).

[Steffens, 1990] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, (1990).

[Sobhy, 2013] Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Composite Structures*, **99**, 76–87.

[Suresh, 1995] Suresh, S., Mortensen, A.: Principes des matériaux fonctionellemnt gradués. ASM International et l'Institut de Matériaux, Cambridge, (1995).

[Sun, 2011a] Sun, D., Luo, S.N. (2011a), “The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load”, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, **30**, 396–408.

[Sun, 2011b] Sun, D., Luo, S.N. (2011b), “Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments”, *Ultrasonics*, **51**, 940–952.

[Sun, 2012] Sun, D., Luo, S.N. (2012), "Wave propagation and transient response of a functionally graded material plate under a point impact load in thermal environments", *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 444–462.

[Suresh,1998] Suresh, S., Mortensen, A. (1998), "Fundamentals of Functionally Graded Materials", IOM Communications Ltd., London.

[Takahashi, 1990] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, (1990).

[Tagrara, 2015] Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M., Tounsi, A. (2015), "On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams", *Steel and Composite Structures*, 19(5), 1259-1277.

[Thai, 2010] Thai, H.-T. et Kim, S.-E : Sans vibrations de plaques composites stratifiés en utilisant deux théorie raffinée variable de plaque. International Journal of Mechanical Sciences, 626–633, (2010)

[Tebboune, 2015] Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 443 – 465.

[Touloukian, 1967] Touloukian, T.S. (1967), "Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials",McMillan, New York.

[Tounsi, 2013a] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013a), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.

[Tounsi, 2013b] Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A, Zidour, M. (2013b), "Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes", *Advances in Nano Research*, **1(1)**, 1 – 11.

[Touratier, 1991] Touratier. M: Un efficace theory‖ de plaque standard. Engng Sci, vol. 29, no 8, pages 901-916, (1991)

[Vel, 2004] Vel, S.S., Batra, R.C.: Solutions exactes de la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées en 3D. J. son Vib. 272, 703-730, (2004).

[Whitney, 1973] Whitney. J.M: Facteurs de correction de cisaillement pour les stratifiés orthotropes sous loads‖ statique. Mécanique J.Applied, Vol.40, pages 302-304, (1973).

[Yahoobi, 2010] Yahoobi, H., Feraidoon, A. (2010), "Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load", *World Appl. Sci. J.*, **10**(3), 337-341.

[Yaghoobi, 2013] Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. (2013). "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach", *Meccanica*, **48**, 2019 – 2035.

[Yaghoobi, 2014] Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A., Khoshnevisrad, P. (2014), "Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM" *Steel and Composite Structures*, **17(5)**, 753–776.

[Yang, 2001] Yang, J., Shen, H.S.: Réponse dynamique de plaques minces rectangulaires initialement stressées fonctionnellement graduées. Compos. Struct. 54 (4), 497-508, (2001).

[Yang, 2002] Yang, J., Shen, H.S. (2002), "Vibration characteristics and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environments", *Journal of Sound and Vibration*, **255**, 579–602.

[Yang, 2003] Yang, J., Shen, H.S.: Analyse non linéaire des plaques fonctionnellement graduées en vertu transversale et charges dans le plan. Int. J. Mech non linéaire. 38 (4), 467-482, (2003).

[Zhou, 2004] Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H., Au, F.T.K.: Analyse des vibrations des plaques rectangulaires épaisses sur fondations Pasternak en 3D. Int. J. Numer. Méthodes Eng. 59 (10), 1313-1334, (2004).

[Woo, 2006] Woo, J., Meguid, S.A., Ong, L.S. (2006), "Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates," *J. Sound Vib.*, **289**, 595-611.

[Zemri, 2015] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **54(4)**, 693-710.

[Zenkour, 2006] Zenkour, AM. (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", *Appl Math Model*, **30**(1), 67–84.

[Zenkour, 2005] Zenkour, A.M.A.: Analyse complète des plaques sandwich fonctionnellement grduées: Partie 2. Fléchissement et sans vibration. Int. J. Struct solides. 42, 5243-5258, (2005).

[Zidi, 2014] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory" *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34.

[Zhong, 2007] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. Composites Science and Technology; 67 (3-4): 481-488, (2007).