

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université DJILLALI LIABES de Sidi Bel Abbes
Faculté de TECHNOLOGIE
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



THESE DE DOCTORAT

Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences
Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et matériaux

Présentée par

Mme DRIZ Hafida

Etude de l'influence des paramètres géométriques et matériels sur le comportement vibratoire des plaques épaisses

Soutenue le : 23 /01 /2019

Devant le jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	Président	UDL-SBA
BENACHOUR Abdelkader	Pr	Directeur de thèse	UDL-SBA
YEGHNEM Redha	Pr	Examineur	UDE -SAIDA
FAHSI Bouazza	MCA	Examineur	UDL-SBA
BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	MCA	Examineur	C.U. RELIZANE
DRAICHE Kada	MCA	Examineur	UDE- TIARET

Année Universitaire 2018/2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

Je remercie mon DIEU LE TOUT PUISSANT de m'avoir donné la force pour achever ce travail. Merci MON DIEU d'avoir rendu ma vie réjouissante et significative. Je le prie encore pour m'aider à apprendre plus.

Les travaux décrits dans ce manuscrit ont été effectués au Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'université Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes, un merci plein de respect pour le professeur E. ADDA BEDIA, de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire et pour sa disponibilité le long de la réalisation de ce travail. Je remercie très sincèrement le Professeur A. BENACHOUR, d'avoir accepté d'être rapporteur de mon mémoire et pour la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ces trois années de thèse.

Je remercie infiniment le professeur A. TOUNSI, qui a eu la lourde tâche de diriger cette thèse, pour sa patience et ses encouragements et pour l'intérêt continu porté à mon travail. Je remercie vivement les personnes qui ont fait partie de mon Jury : Mr TOUNSI A., Mr FAHSI B., Mr YEGHNEM R., Mr BOUSAHLA A., et Mr DRAICHE K.

Je voudrais également remercier tous les membres de l'équipe du laboratoire, de m'avoir fait partager leurs connaissances et leur savoir-faire durant ces quatre années de thèse ainsi que tous les enseignants du Département de Génie Civil (Université Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes). Mes remerciements s'adressent également à toutes les autres personnes avec lesquelles j'ai eu le plaisir de collaborer au cours de ces quatre ans.

Je voudrais remercier ma mère pour son amour et son sacrifice. J'exprime mes profonds remerciements à mon père qui nous protège tout le temps. Grand merci à mon marie pour sa patience et ses encouragements et sans oublier ma belle petite fille Besma et mes chers fils Abdennour et Abdeljalil. Je tiens à remercier de tout mon cœur mes frères et mes sœurs pour leurs encouragements, et Grand merci à ma grande famille.

Je remercie aussi tous ceux qui ont travaillé de près ou de loin sur mon sujet. Merci à tous et à toutes.

Table de matière

الملخص.....	vii
Abstract.....	viii
Résumé.....	ix
Liste des notations.....	x
Liste des figures.....	xii
Liste des tableaux.....	xiv
Introduction générale.....	15

Chapitre I : Généralité sur les matériaux à gradients évalués FGM

I.1 Introduction.....	18
I.2 Concept des matériaux FGM.....	19
I.3 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	20
I.4 Avantage et inconvénients de la FGM	21
I.4.1 Avantages de la FGM	21
I.4.2 Inconvénient de la FGM.....	22
I.5 Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels	22
I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	24
I.6.1 La loi exponentielle	24
I.6.2 La loi de puissance	25
I.6.3 Une fonction sigmoïde	26
I.7 Conclusion	27

Chapitre II : Les structures sandwichs

II.1 Introduction.....	28
II.2 Définition.....	29
II.3 les éléments constituant les structures sandwichs.....	29
II.3.1 Les peaux.....	29
II.3.2 L'âme	30
II.3.3 L'interface (l'adhésif).....	30
II.4 Type des structures sandwich.....	30

II.5	Domaine d'application des matériaux sandwichs	31
II.6	Sollicitations et modes de dégradations des sandwichs.....	32
II.7	Théorie des plaques sandwichs	34
II.7.1	Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs	34
II.8	Conclusion.....	35

Chapitre III : Théories des plaques

III.1	Introduction	36
III.2	Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés	37
III.2.1	Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CLPT)	37
III.2.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	38
III.2.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	40
III.3	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	41
III.4	Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques	45
III.5	Conclusion	45

Chapitre IV : Les modèles étudiés et développement Analytique

IV.1	Introduction	46
IV.2	Configuration géométrique	47
IV.2.1	Type A : Les plaques FGM	47
IV.2.2	Type B : Les plaques sandwich avec cœur en FGM	48
IV.2.3	Type C : Les plaques sandwich avec des faces en FGM	49
IV.3	Formulations théoriques.....	50
IV.3.1	Cinématique et déformations	50
IV.3.2	Equations de mouvement	52
IV.3.3	Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées	55
IV.4	Conclusion	57

Chapitre V : Résultats et discussion

V.1	Introduction	58
V.2	Exemples numériques et discussions	59
V.2.1	Résultats de l'analyse de flexion	59

V.2.1.1) Exemple 1	59
V.2.1.2) Exemple 2	63
V.2.1.3) Exemple 3	64
V.2.2) Résultats de l'analyse des vibrations et du flambement.....	70
V.2.2.1) Exemple 4	70
V.2.2.2) Exemple 5	72
V.2.2.3) Exemple 6	73
V.3 Conclusion	73
Conclusion générale	78
Références bibliographiques	79

الملخص

في هذا العمل نقترح نظرية جديدة لتشوه القص العالي لتحقيقات الثني ، الانبعاج ، والاهتزاز الحر في لوحات الساندويتش المتماثلة والمتدرجة الخواص . النظرية تحتوي على أربعة متغيرات فقط، وهي أقل من نظرية تشوه القص الأولى و نظرية القص العالي التقليدية.

النموذج المقترح يأخذ بالاعتبار تغيرات زائدة المقطع لضغط القص العمودي ، ، ويحترم الشروط الحدية لانعدام الاجهادات على الأسطح العلوية و السفلية و الخالية من قوة الشد للصفحة ، يقدم العمل الحاضر حقل جديد لحركة الإزاحة الذي يضم شروط التكامل الغير محدد.

في هذا العمل ، معادلات الحركة تحدد لثلاثة أنواع من التركيبات :الصفائح المتدرجة الخواص ، ونوعين من صفائح الساندويتش الاول بلب صفيحة متدرجة الخواص ، و الثاني بطبقتين خارجيتين من الصفائح المتدرجة الخواص. ويتم الحصول على النتائج التحليلية للتنبؤ الانحناء و لحركة الإزاحة العمودية ،الضغط ،قوى التقوس الحاسمة ، و الاهتزازات الحرة للصفائح البسيطة الاسناد .

يتم إجراء دراسة مقارنة لإثبات دقة النموذج المقترح .

الكلمات المفتاح: الانحناء ؛ الانبعاج ؛ اهتزاز ؛ لوحة ساندويتش ؛ مواد متدرجة الخواص؛ نظرية الصفائح.

ABSTRACT

A novel higher shear deformation theory (HSDT) is proposed for the bending, buckling and free vibration investigations of isotropic and functionally graded (FG) sandwich plates. It contains only four variables, which is even less than the first shear deformation theory (FSDT) and the conventional HSDTs. The model accounts for a parabolic variation of transverse shear stress, respects the traction free boundary conditions and contrary to the conventional FSDTs, the present one presents a novel displacement field that incorporates undetermined integral terms. Equations of motion determined in this work are applied for three types of FG structures: FG plates, sandwich plates with FG core and sandwich plates with FG faces. Analytical solutions are given to predict the transverse displacements, stresses, critical buckling forces and natural frequencies of simply supported plates and a comparison study is carried out to demonstrate the accuracy of the proposed model.

Keywords:

Bending; buckling; vibration; sandwich plate; functionally graded materials; plate theory.

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) est proposée pour l'analyse à la flexion, au flambement et à la vibration libre des plaques sandwich isotropes et fonctionnellement graduées. Elle contient seulement quatre variables, ce qui est même inférieur que la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les théories HSDT classiques. Le modèle tient compte d'une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversal, respecte les conditions aux limites de traction et, contrairement aux FSDT classiques, la nouvelle théorie présente un nouveau champ de déplacement incorporant des termes d'intégral indéterminés. Les équations de mouvement déterminées dans ce travail sont appliquées pour trois types de structures fonctionnellement graduées : plaques en FGM, plaques sandwich avec cœur en FGM et plaques sandwich avec des faces en FGM. Des solutions analytiques sont fournies pour prédire les déplacements transversales, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences propres des plaques simplement appuyées.

Une étude comparative avec les résultats de la littérature est réalisée pour démontrer l'efficacité et la précision du modèle proposé.

Mots clés :

Flexion, vibration, plaque sandwich, matériaux fonctionnellement gradués, théorie des plaques.

Liste des notations

G	Module de cisaillement
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	$\nu(z)$ Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ,
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion

A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Liste des figures

Figure I.1 – FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction	19
Figure I.2 – Concept des matériaux à gradient de propriétés	20
Figure I.3 – Les principaux domaines d’application des FGM.	21
Figure I.4 – Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	23
Figure I.5 – La distribution composante des matériaux.	24
Figure I.6 – Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	25
Figure I.7 – Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	26
Figure I.8 – Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	28
Figure II.1 – Schématisation d’une structure sandwich.	29
Figure II.2 – Exemples de topologies d’une variété de réseaux cellulaires configurés comme noyaux de structures de panneaux sandwich.	31
Figure II.3 – différentes sollicitations (M , N , T) appliquées à un sandwich.....	32
Figure II.4 – les différents modes de rupture des structures sandwichs	34
Figure III.1 – Plaque de Love Kirchhoff	38
Figure III.2 – Plaque de Reissner-Mindlin	39
Figure III.3 – Illustration de la plaque d’ordre élevé	40
Figure III.4 – Approximations de la contrainte du cisaillement : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre élevé)	41
Figure III.5 – Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon trois théories	41
Figure III.6 – Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l’épaisseur	44
Figure III.7 – Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l’épaisseur.....	44
Figure IV.1 – A.géométrie d’une plaque FGM rectangulaire ; B. Plaque sandwich avec cœur FG et des faces isotropes ; C. Plaque sandwich avec cœur isotrope et faces en FG	47
Figure IV.2 – La variation de la fraction volumique de la plaque FGM type A	48
Figure IV.3 – La variation de la fraction volumique de la plaque sandwich (1.2.1)	49
Figure IV.4 – La variation de la fraction volumique de la plaque sandwich type C pour différents rapport SKIN-CORE-SKIN	50

FigureV.1 – Contraintes non dimensionnelles à travers l'épaisseur de la plaque en Al / Al₂O₃. 62

FigureV.2 – Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de (p) pour les plaques sandwich carrées en (Al / Al₂O₃) et (Al / ZrO₂) soumises à une charge sinusoïdale (a/h=10, types B et C) 69

FigureV.3 – Effet de l'indice de puissance p sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) et Charge critique de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques sandwich carrées Al / Al₂O₃ (a/h=10, type C). 76

Liste des tableaux

Tableau I.1 – Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal	20
Tableau V.1 – Propriétés matérielles du métal et de la céramique	59
Tableau V.2 – Comparaison des contraintes non dimensionnelles et des déplacements des plaques carrées Al / Al ₂ O ₃ (a/h=10 , Type A).....	60
Tableau V.3 – Comparaison des contraintes non dimensionnelles et des déplacements des plaques sandwichs carrées en Al / Al ₂ O ₃ (a/h=10 , Type B).....	63
Tableau V.4 – Déplacement transversaux non dimensionnelles du centre (\hat{w}) des plaques sandwichs carrées en Al/ZrO ₂ (a/h=10, type C)	65
Tableau V.5 – Contrainte axiale non dimensionnelle ($\hat{\sigma}_x(h/2)$) des plaques sandwich carrées en Al / ZrO ₂ (a/h=10 , type C).....	66
Tableau V.6 – Contrainte non dimensionnelle de cisaillement ($\bar{\tau}_{xz}(0)$) des plaques sandwich carrées Al / ZrO ₂ (a/h=10, type C).....	67
Tableau V.7 – Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) des plaques carrées Al*/ ZrO ₂ (type A).....	70
Tableau V.8 – Comparaison de la charge critique de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques carrées Al / Al ₂ O ₃ (type A).....	71
Tableau V.9 – Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) des plaques sandwich carrée Al / Al ₂ O ₃ (type B).	72
Tableau V.10 – Charges critiques non dimensionnelles de flambement des plaques sandwich carrées Al / Al ₂ O ₃ soumises à des charges de compression biaxiales ($(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, type B)...	73
Tableau V.11 – Fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) des plaques sandwich carrées Al / Al ₂ O ₃ (a / h = 10, type C).....	74
Tableau V.12 – Charges critiques non dimensionnelles de flambement des plaques sandwich carrées Al / Al ₂ O ₃ soumises à des charges de compression biaxiales ($(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, a / h = 10, type C).....	75

Introduction générale

Les matériaux à gradient de fonction (FGM) sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Le grand intérêt de l'emploi des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est la possibilité de contrôler les constituants et donc d'obtenir des composants présentant les caractéristiques locales souhaitées, en ce qui concerne les caractéristiques mécaniques, thermiques et autres.

Les FGM ont été utilisées avec succès dans les applications industrielles depuis les années 1980 (Koizumi 1993, Boudierba et al. 2013, Zidi et al. 2014, Ait Yahia et al. 2015, Bourada et al. 2015, Larbi Chaht et al. 2015, Abdelbari et al. 2016, Houari et al 2016, Abdelhak et al 2016, Ahouel et al 2016, Khetir et al 2017). En raison des grandes applications des structures fonctionnellement graduées (FG), diverses théories des plaques ont été proposées pour étudier avec précision leurs réponses en flexion, en stabilité et en vibration. En général, nous pouvons citer trois catégories principales de ces théories des plaques: la théorie classique des plaques (CPT) en ignorant l'influence de la déformation du cisaillement transversal (Feldman et Aboudi 1997, Javaheri et Eslami 2002, Mahdavian 2009, Mohammadi et al. 2010, Chen et al. 2006, Baferani et al. 2011), théorie de déformation de cisaillement du premier (FSDT) avec distribution linéaire des déplacements (Mohammadi et al. 2010, Chen et al. 2006, Baferani et al. 2011, Praveen et Reddy 1998, Della Croce et Venini 2004, Efraim et Eisenberger 2007, Zhao et al. Ala 2009a, b, Hosseini-Hashemi et al 2011, Adda Bedia et al 2015, Meksi et al 2015, Hadji et al 2016, Bellifa et al 2016, Boudierba et al 2016), théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) avec une distribution d'ordre supérieur des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque telle que la théorie des plaques de déformation par cisaillement du 3^{ème} ordre (TSDT), la théorie des plaques de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT), théorie hyperbolique (HDT), (Reddy 2000, 2011, Benachour *et al.* 2011, Bakora and Tounsi 2015, Talha and Singh 2011, Bounouara *et al.* 2016, Ait Amar Meziane *et al.* 2014, Khalfi *et al.* 2014, Meradjah *et al.* 2015, Attia *et al.* 2015, Belkorissat *et al.* 2015, Mahi *et al.* 2015, Matsunaga 2008, Mantari *et al.* 2012, Benferhat *et al.* 2016, Barati and Shahverdi 2016, Barka *et al.* 2016, Bourada *et al.* 2016, Bousahla *et al.* 2016, Chikh *et al.* 2016, Beldjelili *et al.* 2016, Mouaici *et al.* 2016, Mouffoki *et al.* 2017, Bellifa *et al.* 2017a, Klouche *et al.* 2017, Besseghier *et al.* 2017), les théories quasi-3D prenant en compte l'effet d'étirement normal (Carrera et al. 2008, Wu et Chiu 2011, Neves et al. 2012a, b, Mantari

et Soares 2012, Chen et al. 2009, Jha et al. 2013, Hebali et al. 2014, Fekrar et al. 2014, Bousahla et al. 2014, Belabed et al 2014, Bennai et al 2015, Hamidi et al 2015, Benbakhti et al 2016, Draiche et al 2016, Bennoun et al 2016, Ait Atmane et al 2017, Benahmed et al. 2017, Benchohra et al. 2017, Bouafia et al. 2017).

D'autres théories HSDT peuvent être consultés dans la littérature, par exemple, Kar et Panda (2015a, b, c, d, 2016), Hirwani et Panda (2016), Hirwani et al. (2016), Kar et al. (2016, 2017), Mahapatra et al. (2017) et Hirwani et al. (2017). De plus, afin de régler les distributions des caractéristiques du matériau, des structures sandwich FG ont récemment été utilisées pour éviter les problèmes d'interface entre les faces et le cœur rencontrés dans les plaques sandwich classiques. De nombreux modèles de plaques ont été utilisés pour examiner les comportements des plaques sandwich FG: réponses statiques à la flexion (Abdelaziz et al. 2011, Tounsi et al. 2013, Neves et al. 2013, Zenkour 2005a, Brischetto 2009, Carrera et al. 2011, Bessaim et al. 2013), les comportements de vibration et de stabilité (Zenkour 2005b, Brischetto 2009, Carrera et al. 2011, Bessaim et al. 2013, Li et al. 2008, El Meiche et al. 2011, Sobhy 2013, Natarajan et Manickam 2012, Neves et al. 2012c, Taibi et al. 2015, Menasria et al. 2017, Meksi et al. 2017). Dans les théories HSDT et quasi-3D, les contraintes de cisaillement transverses sont affinées à travers l'épaisseur, et donc aucun coefficient de correction de cisaillement n'est nécessaire. Récemment, Mantari et Granados (2015) ont proposé un nouveau et simple FSDT avec quatre variables dans lequel des termes d'intégrales sont utilisés pour la première fois dans la cinématique de la plaque. Cependant, dans cette théorie, des facteurs de correction du cisaillement sont requis.

Le but de cette recherche est de développer une nouvelle HSDT où les termes intégraux sont utilisés dans la cinématique de la plaque et alors cette théorie est appliquée pour étudier la flexion, la vibration et le flambement des plaques FGM et les plaques sandwichs. L'utilisation du terme intégral dans la cinématique de la plaque conduit à une diminution du nombre d'inconnues et les équations du mouvement. Trois types de plaques FGM sont considéré principalement: plaques FGM, plaques sandwich avec cœur en FGM et des plaques sandwich avec des faces FGM. Des solutions analytiques sont déduites pour déterminer les déplacements transversales, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles pour les plaques simplement appuyées. Un bon accord entre les résultats calculés et les solutions disponibles des modèles de déformation par cisaillement existants est confirmé pour démontrer la précision de la théorie développée.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Dans **le premier chapitre**, on a présenté des Généralité sur les matériaux fonctionnellement gradues FGM tels que leur définition, principaux classification, les différents domaines d'applications, et une comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels.

Une synthèse bibliographique sur les structures sandwiches est exposée en **deuxième chapitre** tout en citant leurs utilisations, domaines d'application et sollicitations, ainsi nous présentons la théorie des plaques sandwiches.

Le troisième chapitre, rassemble une étude bibliographique sur les différents travaux réalisés sur le comportement des plaques à gradient de propriétés (FGMs), suivie par quelques problèmes ainsi les différentes théories des plaques majoritairement employées pour les modéliser.

Nous avons présenté en **quatrième chapitre**, une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement pour analyser le comportement à la flexion, au flambement et à la vibration des plaques en FGM et pour deux types de sandwichs fonctionnellement graduées tout en assumant que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur selon la loi de puissance.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation du modèle utilisé à travers quelques exemples connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques isotropes et les plaques sandwichs en FGM

Et enfin, on achève cette étude par une **conclusion** relative à ce travail de recherche.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENTS ÉVALUÉS FGM_s

I.1 Introduction

L'industrie moderne dans la mécanique de construction, l'aéronautique, le génie civil et plus généralement le domaine des transports sont à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Un matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques, et pour atteindre cet objectif, il faut nécessairement utiliser des matériaux composites.

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie grâce à leurs performances dominantes. Par exemple, une couche élastique homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un environnement à hautes températures. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métallique), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface.

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel FGM (Functionally Graded Materials) pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes et feuilletés dans le maintien de l'intégrité de la structure. Un tel fonctionnement leur permet d'être fabriqués comme des structures différentes dans l'accord aux exigences de services divers

I.2 Concept des matériaux FGM

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par Mr. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau (I.1). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques microscopiquement hétérogènes (figure I.1). Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été édités (par exemple, Suresh et Mortensen 1998 ; Miyamoto et autres 1999 ; Birman et Byrd 2007).

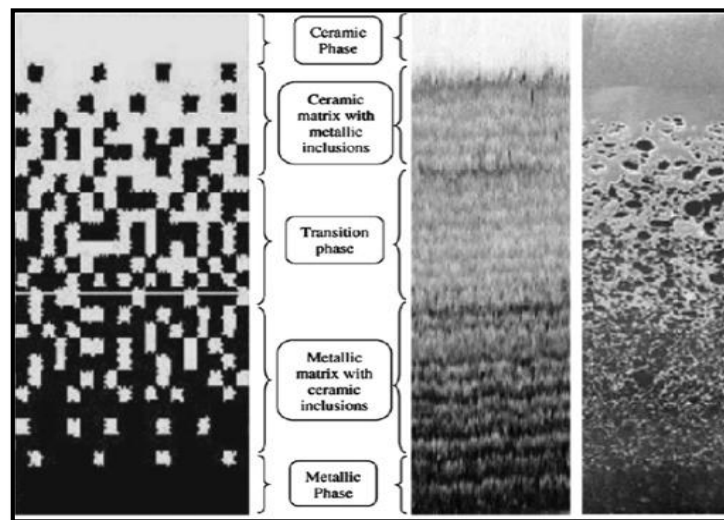


Figure I.1 – FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction (Talha.M, 2015)

Tableau I.1– Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal (Nguyen, 2008)

Face à haute température	Céramique	Bonne résistance thermique Bonne résistance à l'oxydation Faible conductivité thermique
Les couches intermédiaires <i>(Continuité du matériau d'un point à l'autre)</i>	Céramique-métal	Elimination des problèmes d'interface Relaxer les contraintes thermiques
Face à basse température	métal	Bonne résistance mécanique Haute conductivité thermique Très bonne ténacité

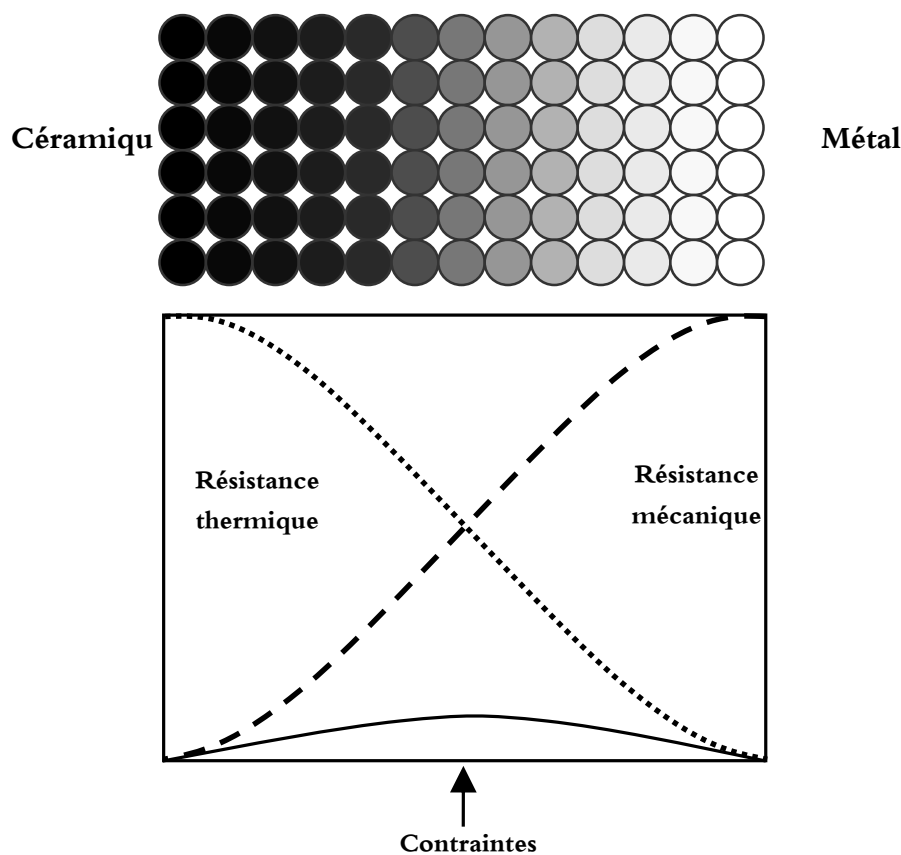


Figure I.2 –Concept des matériaux à gradient de propriétés (Adda Hadj, 2017)

I.3 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines (figure I.3). Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau.

Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs (Houari , 2011).

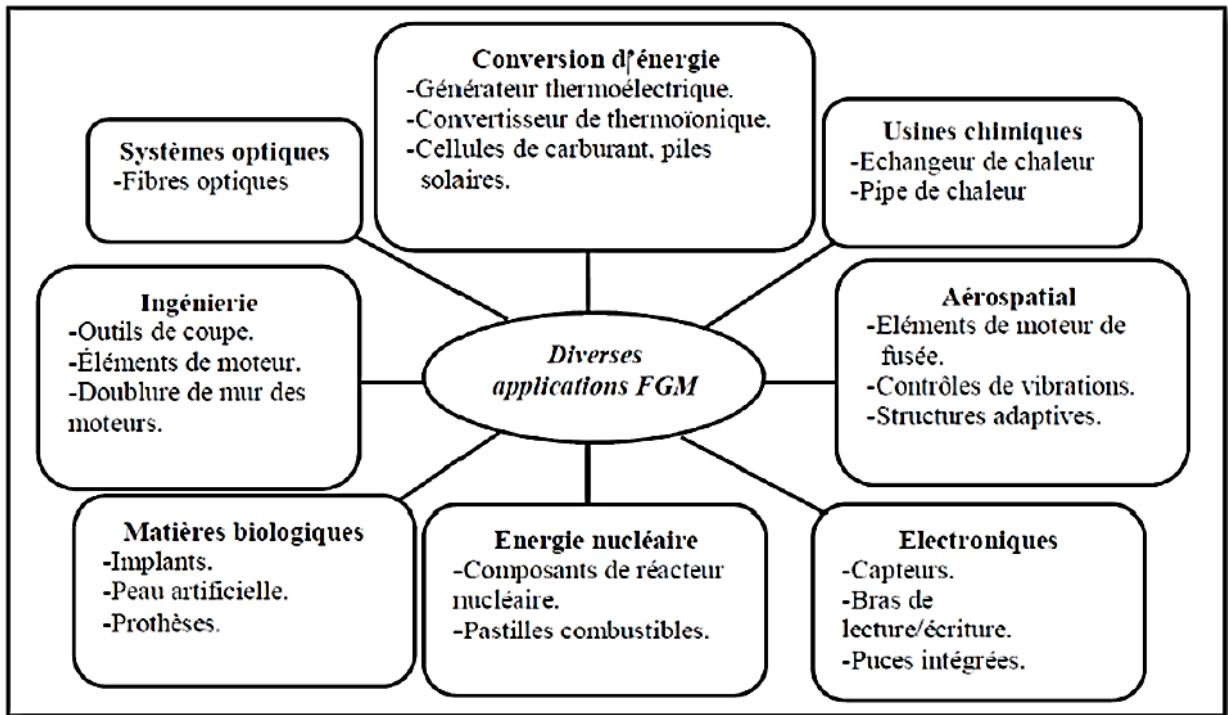


Figure I.3 –Les principaux domaines d'application des FGM (Bessaim, 2013)

I.4 Avantage et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients:

I.4.1 Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que (Narottam P. Bansal 2011) :

- ✚ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;

- ✚ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- ✚ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;
- ✚ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- ✚ Suppression de délaminage ;
- ✚ Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- ✚ Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.4.2 Inconvénient de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam P. Bansal 2011].

I.5 Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM.

Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.4 ; Il en résulte un gradient qui

déterminera les propriétés des FGM Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al 1986).

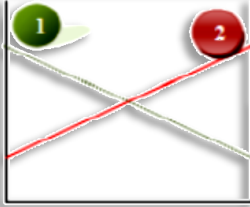
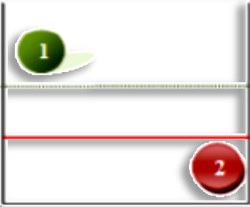
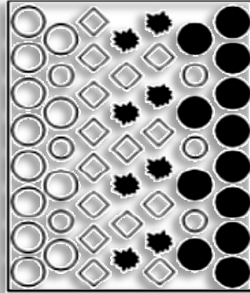
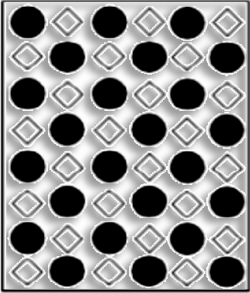
<p>Propriétés</p>	<p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>		
<p>Structure</p>	<p>Eléments constitutants:</p> <p>Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇</p>		
<p>Matériaux</p>	<p>Exemple</p>	<p>FGM</p>	<p>NON-FGM</p>

Figure I.4– Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi et al 1997).

Yoshihisa (2004) a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.5). Le matériau plan composé à une caractéristique plane(a), et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux (b) et (c) un matériau à gradient de propriété.FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

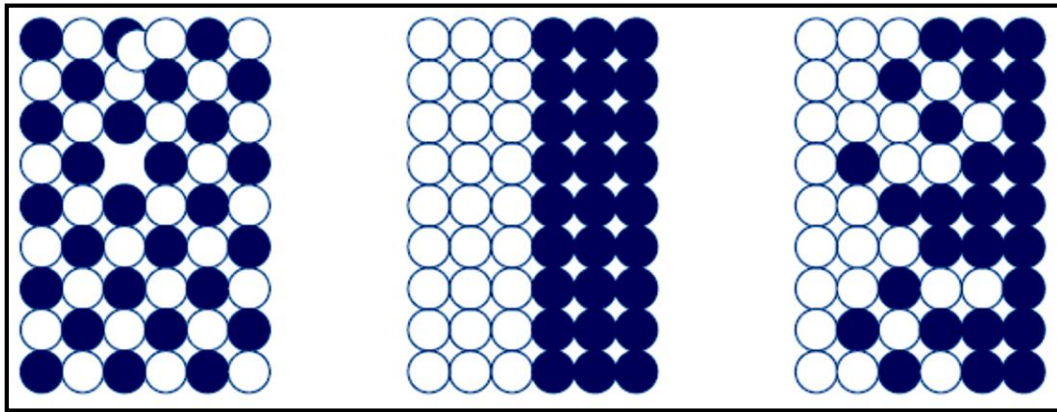


Figure I.5– La distribution composante des matériaux : (a) Matériau plan composé, (b) Matériau relié, (c) Matériau à gradient de propriété (Yoshihisa , 2004).

I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

I.6.1 La loi exponentielle

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture. Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux $E(z)$ à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.1a)$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.1b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure I.6

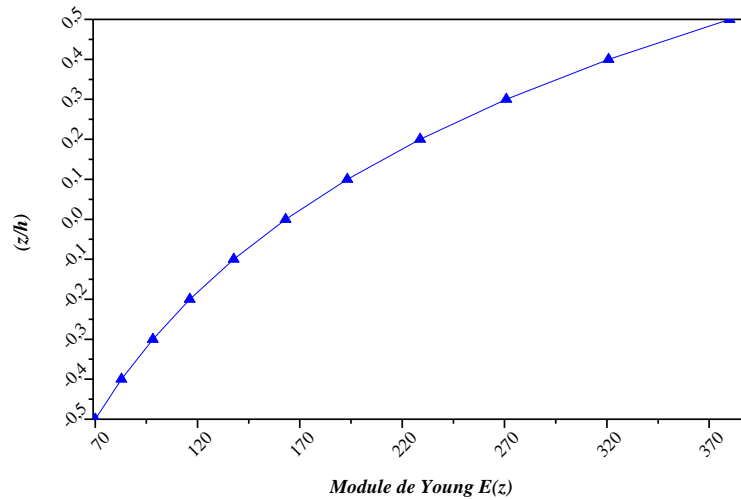


Figure I.6– Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

I.6.2 La loi de puissance

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.2a)$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2b)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du moule de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

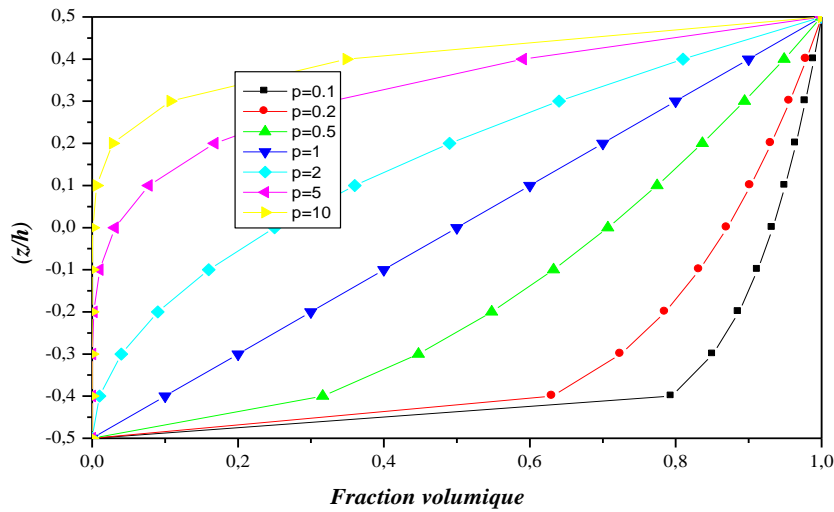


Figure I.7– Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.3 Une fonction sigmoïde

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.3b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4b)$$

La Figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4a) et (I.4b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

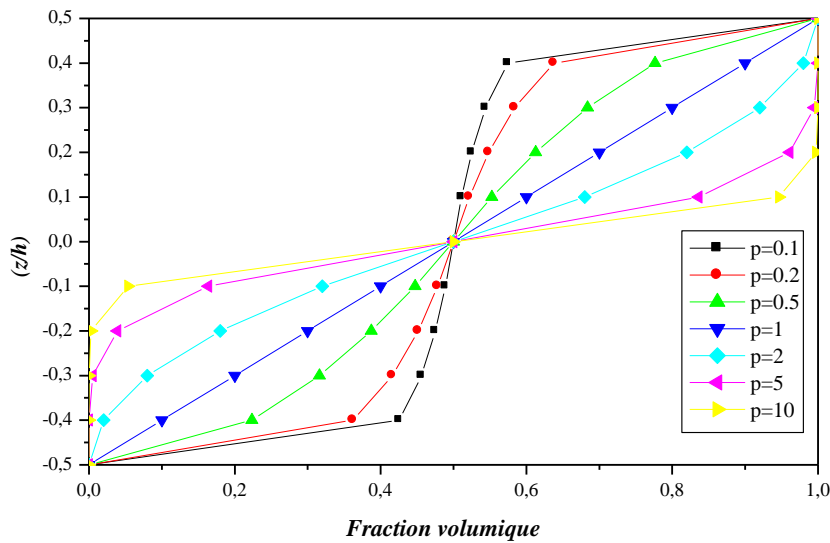


Figure I.8– Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.7 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux FGM, historique et définition, leurs propriétés, ensuite on s'est intéressé aux domaines d'application, leurs différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles du matériau "module de Young, coefficient de poisson et masse volumique" à travers l'épaisseur d'une plaque fonctionnellement graduée, ces lois peuvent être puissances, exponentielles ou même sigmoïde, La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet d'inventer des nouvelles structures, peuvent exploiter dans le domaine de génie civil.

CHAPITRE II

LES STRUCTURES SANDWICHES

II.1 Introduction

Le défi de concevoir une structure aussi légère que possible sans sacrifier la résistance est fondamental dans beaucoup d'applications d'ingénierie et principalement dans l'industrie aéronautique. Inévitablement, cette exigence impose la nécessité de stabiliser et de renforcer les surfaces minces pour leur permettre d'endosser des efforts souvent complexes et combinés. La conception traditionnelle des structures a continué d'inventer de nouvelles solutions pour résoudre cette difficulté en utilisant, par exemple, des raidisseurs longitudinaux et des anneaux de stabilisation. Mais, les solutions proposées ont souvent manqué d'élégance dans leurs conceptions, surtout que le simple fait d'utiliser des paires de peaux fines avec un milieu stabilisateur entre les deux faces est, dans plusieurs situations, plus efficace que de stabiliser une surface en créant une résistance aux forces déformantes.

Pour évaluer une nouvelle structure, le concepteur doit prendre en compte un certain nombre de considérations importantes. La nouvelle structure doit être économique à construire, et de pouvoir fonctionner, fiable et confortable. Il existe évidemment plusieurs façons de satisfaire ces exigences et le matériau de construction joue là un rôle prépondérant.

La raison la plus répandue pour l'utilisation des matériaux sandwichs est le gain de poids. Cependant, il existe d'autres raisons : coût, stabilité, sûreté, résistance au choc, durée de vie, propriétés à la fatigue, dégradation à l'environnement, bruit, isolation thermique, plus grande capacité de charge, maintenance réduite et facilité de réparation, un fini attractif et plus de capacités d'atténuation des vibrations.

Le concept sandwich a prouvé qu'il permet une protection relativement bonne contre le feu. C'est-à-dire que la chute de température est relativement importante à travers l'épaisseur et que la chaleur n'est pas transférée aisément.

II.2 Définition

Un matériau sandwich est un matériau constitué d'un cœur, généralement léger et ayant de faibles caractéristiques mécaniques, pris en sandwich (d'où le nom du matériau) entre deux peaux faites d'un matériau ayant de fortes caractéristiques mécaniques. Les peaux minces rigides et résistantes sont collées sur un cœur fait d'un matériau tendre et léger. Les matériaux sandwichs ont ainsi une très bonne résistance à la flexion et une très grande légèreté.

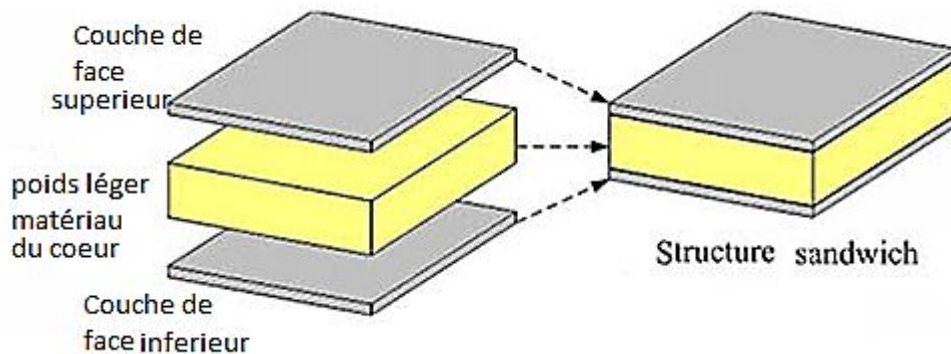


Figure II.1– Schématisation d'une structure sandwich.

La performance globale des structures en sandwich dépend des propriétés des matériaux constituants (feuilles de face, adhésif et noyau), des dimensions géométriques et du type de chargement. La conception et l'application appropriées de la construction en sandwich dépendent d'une caractérisation et d'une compréhension approfondies non seulement des matériaux constitutifs du sandwich, mais également de la structure dans son ensemble sous des charges quasi statiques et dynamiques (Daniel 2009).

II.3 Les éléments constituant les structures sandwichs

II.3.1 Les peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

II.3.2 L'âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- ✚ Mousses : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques.
- ✚ Balsa : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- ✚ Nid d'abeille : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' Nid d'abeille '

II.3.3 L'interface (l'adhésif)

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

II.4 Type des structures sandwich

Aujourd'hui, une grande variété de noyaux sandwichs est appliquée en génie des structures (voir figure II.2).

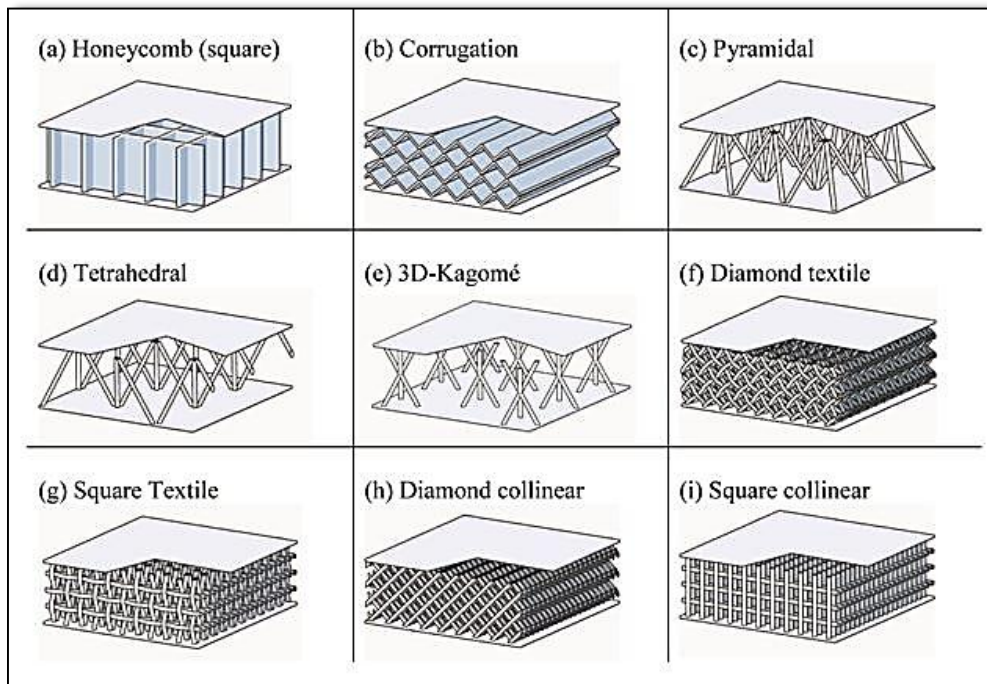


Figure II.2– Exemples de topologies d'une variété de réseaux cellulaires configurés comme noyaux de structures de panneaux sandwich.

II.5 Domaine d'application des matériaux sandwichs

L'usage des structures sandwichs, continue à augmenter rapidement pour diverses applications qui vont des satellites, avions, bateaux, automobiles, voitures sur rail, éoliennes et construction de pont pour n'en mentionner, que quelques-unes. Les performances des structures sandwichs comme matériau, sont en constante évolution avec à chaque fois de nouvelles fonctionnalités comme l'amortissement des vibrations et des bruits, la haute résistance au feu et aux environnements agressifs. Il y a, aujourd'hui, de bonnes raisons de penser que dans la prochaine décennie, les ingénieurs et les constructeurs voudront construire des structures industrielles et des engins de transports encore plus grands et certainement plus légers. Avec la technologie actuelle, il est possible de remplacer de grandes parties des structures et superstructures, souvent en matériau conventionnel, avec un matériau sandwich. Ceci permettra à la structure d'être plus légère, plus stable et plus économiques grâce à une moindre consommation de fuel.

Le sandwich est aussi utilisé par une large gamme de constructions navales et maritimes et de nouveaux marchés sont encore à venir. Les conceptions de terres d'aujourd'hui permettent uniquement l'utilisation du béton, de l'acier et de quelques alliages d'aluminium. Dans le futur le concept du sandwich peut être introduit comme matériau de substitution pour différents modules composant ces structures, telles que les chambres de stockage et l'isolation en période hivernale.

II.6 Sollicitations et modes de dégradations des sandwichs

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- ✓ Moment de flexion,
- ✓ Moment de torsion,
- ✓ Effort normal,
- ✓ Effort tranchant.

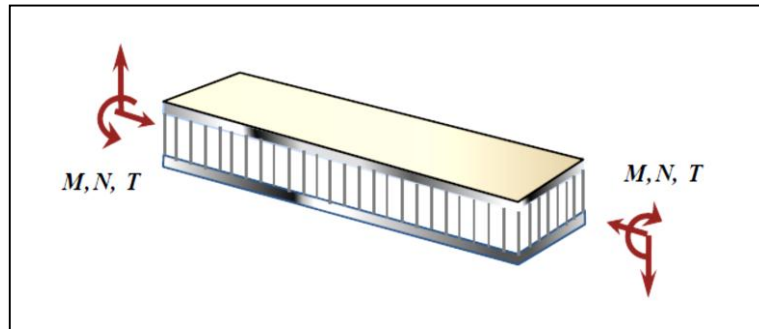
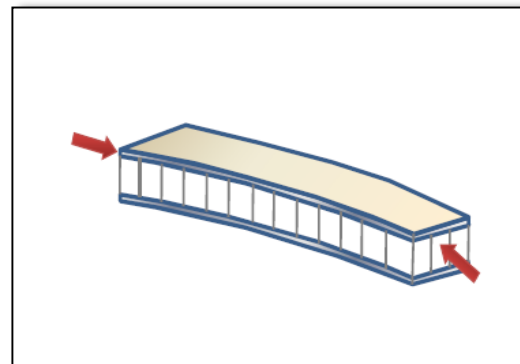


Figure II.3 – Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich (C. Hexcel).

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécaniques de ces structures.

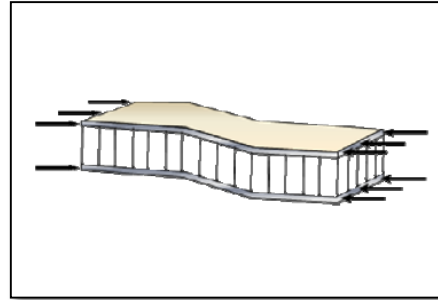
Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.



Flambement généralisé des peaux

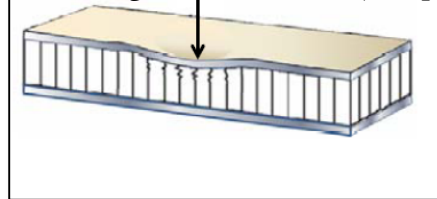
Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit « augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.



L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique

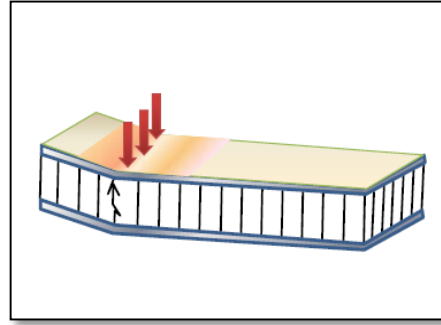
Flambement généralisé de l'âme (crimping)



Modes locaux de rupture par indentation

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement

du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme. Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

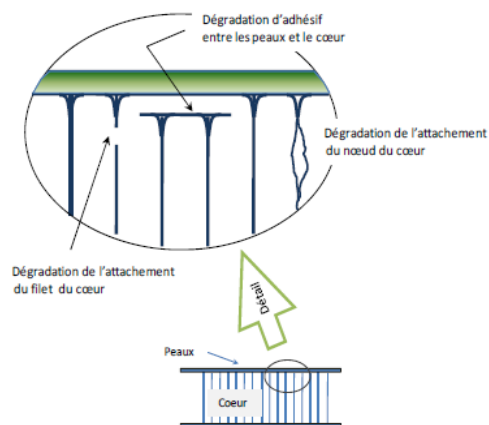


La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types :

- ✓ Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- ✓ Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- ✓ Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

Rupture de l'âme en cisaillement



Dégradation de l'adhésive

Figure II.4 –Les différents modes de rupture des structures sandwichs (C. Hexcel)

II.7 Théorie des plaques sandwiches

Un matériau sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure). L'épaisseur de l'âme sera notée h_c et l'épaisseur totale du sandwich H ($H = h_1 + h_c + h_2$). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen (Hadji 2012).

II.7.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes (Hadji 2012):

- ✚ L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$).
- ✚ Les déplacements de le cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- ✚ Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- ✚ Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ϵ_{zz} est négligée.
- ✚ L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}, σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- ✚ Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.
- ✚ Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwichs, ainsi que les différents modes de dégradation. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des différentes théories des plaques développées dans la littérature.

CHAPITRE III

THÉORIES DES PLAQUES

III.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (CPT : Classical plate theory). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) (FSDT : The first-order shear deformation plate theory) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur (HSDT : High-order shear deformation plate theory) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

III.2 Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ($\epsilon_z = 0$), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions (Belabed 2016). Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée.

Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

- 1) Les théories classiques des plaques ,
- 2) Les théories de premier ordre des plaques ,
- 3) Les théories de cisaillement d'ordre supérieur des plaques .

III.2.1 Théorie classique des plaques de Love–Kirchhoff (CLPT)

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love–Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane et des dérivées de la flèche.

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (III.1). La figure III.1 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love–Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et sur-estimer les charge critique de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de "plaques minces".

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.1c})$$

Où $u_0; v_0; w_0$, sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne ($z=0$).

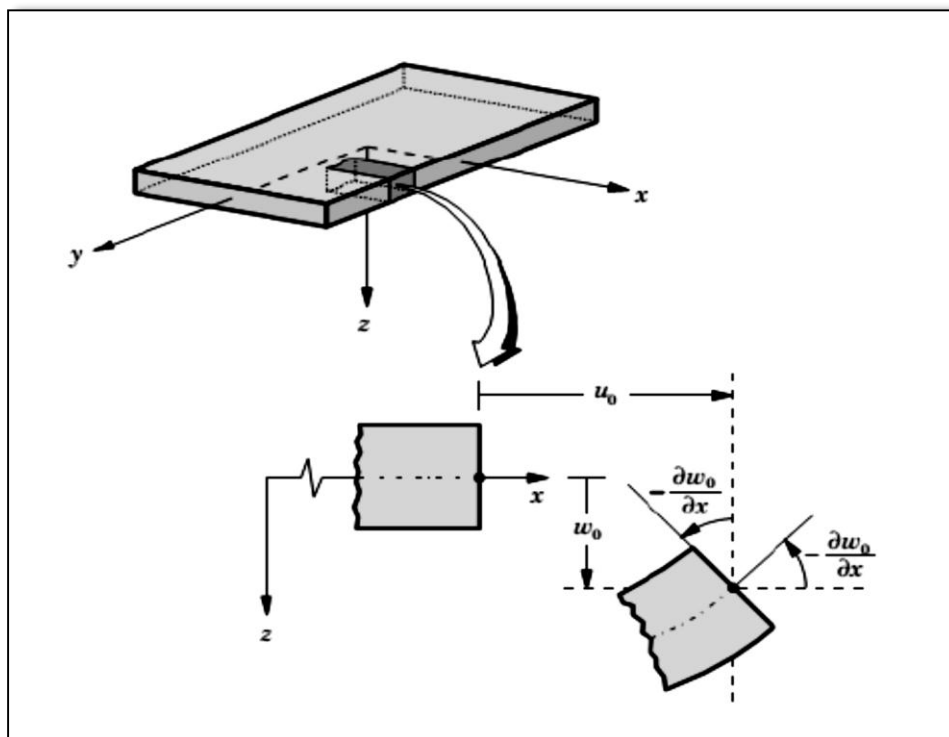


Figure III.1– Plaque de Love Kirchhoff (Reddy 2007)

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First order shear deformation theory FSDT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko (Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.3c})$$

Où $u_0; v_0; w_0, \phi_x, \phi_y$ sont les déplacements du plan médian de la plaque (Figure III.2), représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des plaques classique décrite dans la section précédente en remplaçant $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$

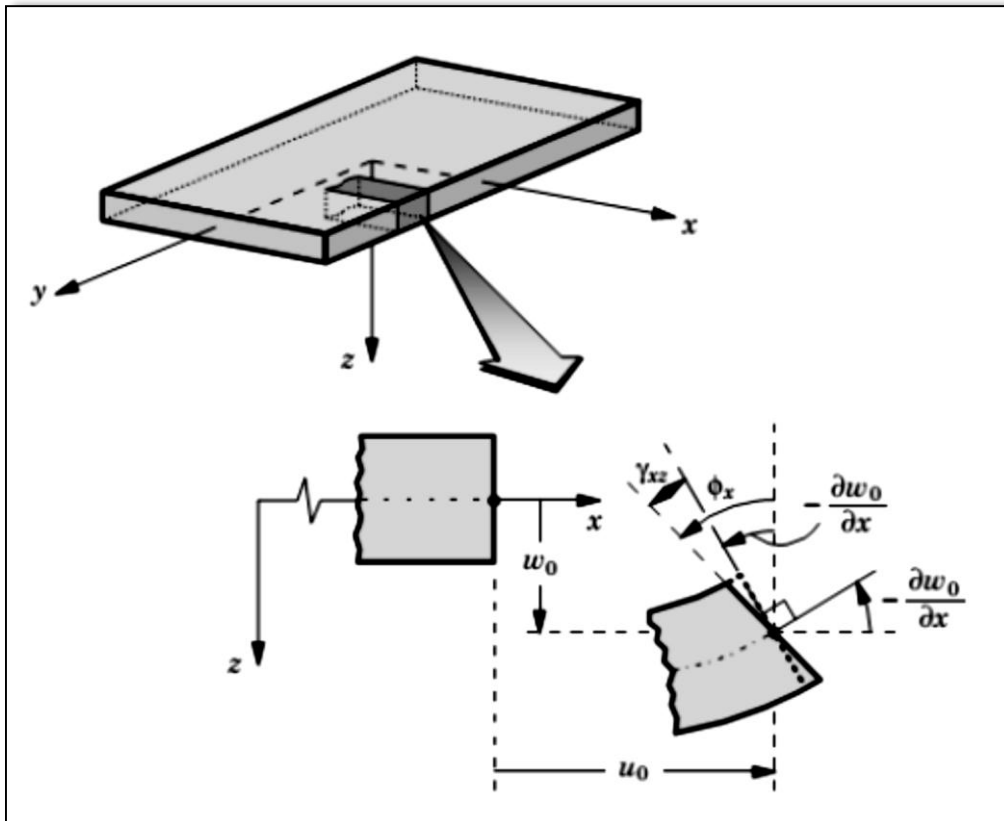


Figure III.2 –Plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 2007)

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CPT par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique. La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al, 1949 ; Naghdi , 1957 ; Reissner , 1975 ; Reddy , 1984 ; Kant et Swaminathan, 2002). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

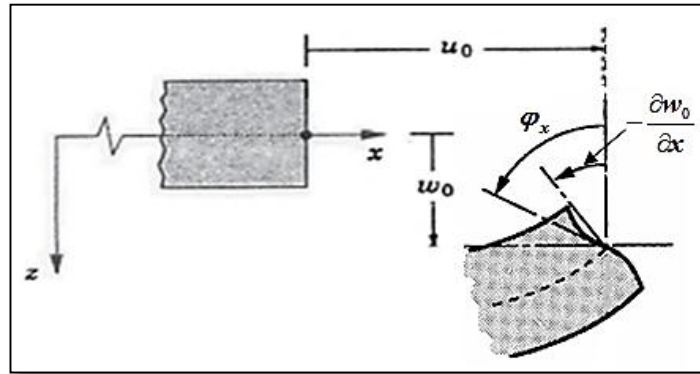


Figure III.3- Illustration de la plaque d'ordre élevé .

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.3c})$$

Avec $(u_0; v_0; w_0)$ et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$, $\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y$, $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\psi(z) = z$.

Une synthèse sur l'aspect « éléments finis » et le lien avec les théories du premier ordre et d'ordre élevé est développée dans la section suivante.

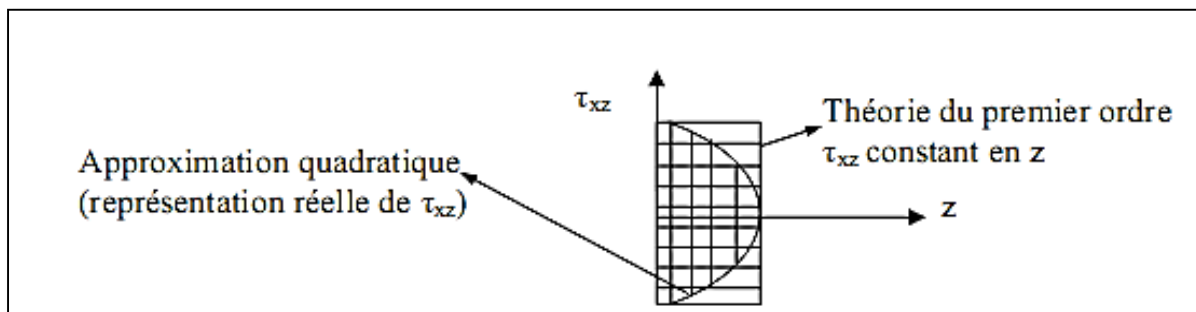


Figure III.4– Approximations de la contrainte de cisaillement : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre élevé) (TAFLA 2007).

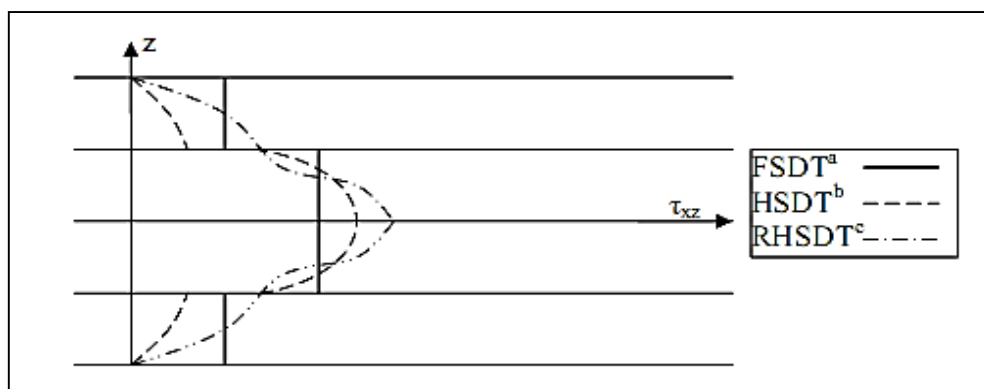


Figure III.5– Distribution des contraintes de cisaillement selon trois théories (TAFLA 2007)

a :FSDT (First order shear deformation theory) ;

b :HSDT (High order shear deformation theory) ;

c :RHSDT (Refined high order shear deformation theory) ;

De tels modèles, cas particulier des formulations HSDT, sont décrits dans le paragraphe suivant.

III.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$.

Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure III.3) [Whitney 1973], [Nelson 1974], [Lo 1977] et [Touratier 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III-4})$$

- L'approche de Reissner [Reissner 1945], Panc et Kaczkowski, avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-5})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy 1981] et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-6})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal u_3 , est constant [Reddy 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [Duong 2008].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches de deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant [Kant 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur [Touratier 1991]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques [Polit 1997] et [Dau 2006].

Récemment, Afaq et al, proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche [Afaq 2003]. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$(III-8) \quad f(z) = z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) [Touratier 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement interlaminaire et les contraintes de l'interface, restent elles discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [Duong 2008].

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de [Aydogdu 2005] avec ;

$$f(z) = z\alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \quad (III-9)$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

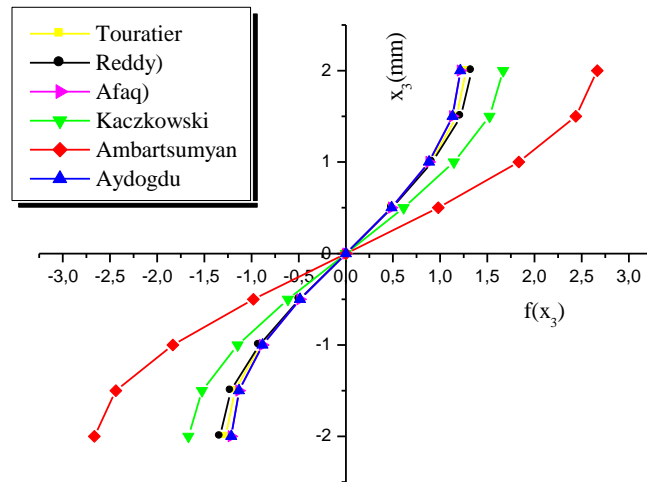


Figure III.6– Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

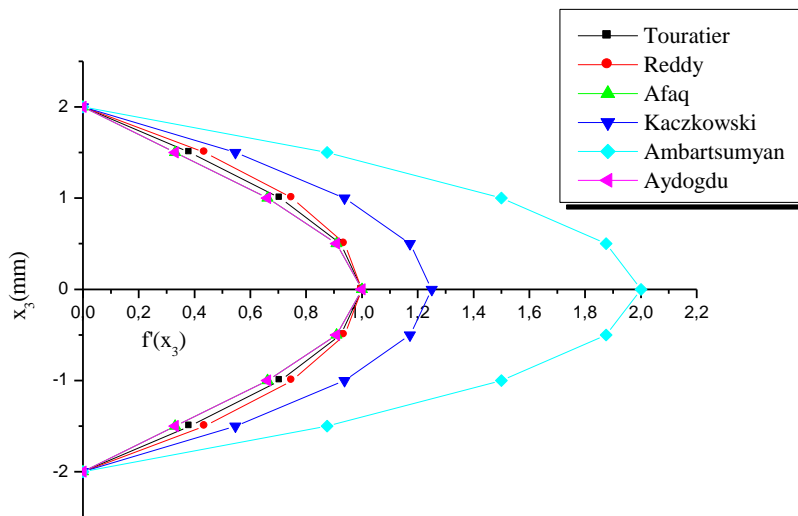


Figure III.7 – Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures. III.6 et III.7 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée.

Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

III.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi (Shimpi, R.P. 2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane et al. 2010 ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM.

Récemment Thai et Kim (Thai, H.-T. et Kim, S.-E. 2010 et 2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles de calcul des plaques minces et épaisses, ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine. A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

CHAPITRE IV

LES MODÈLES ÉTUDIÉS ET DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE

IV.1 Introduction

La mécanique des milieux continus (MMC), est une branche de la mécanique qui a pour objectifs l'étude des mouvements, des déformations, des champs de contraintes au sein de milieux continus (solide ou fluides). Cette branche qui peut être considérée comme étant la science de l'ingénieur par excellence, permet de comprendre et de décrire le monde matériel qui nous entoure et les phénomènes courants qui s'y déroulent. Elle est basée sur les lois universelles de la mécanique classique, appelées lois de conservations (masse, quantité de mouvement, moment de rotation et énergie) associées aux informations portées sur les propriétés intrinsèques du milieu étudié par les équations de constitution, telles que la loi de Hooke en élasticité. La mécanique des milieux continus permet d'analyser des phénomènes physiques grâce à une description mathématique rigoureuse.

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

Dans ce chapitre, on va présenter une formulation analytique pour analyser la réponse à la flexion, au flambement et à la vibration libre des plaques sandwich en FGM simplement appuyées, On considère que les propriétés matérielles varient d'une façon continue à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance de distribution en termes de fractions de volumes des constituants. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton et comparées aux solutions existantes pour vérifier la validité de la théorie développée.

IV.2 Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwich rectangulaire à gradient fonctionnel, de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur uniforme h réalisée à partir d'un mélange de céramique et de métal. Les coordonnées x , y et z sont prises selon la longueur, la largeur, et l'épaisseur, respectivement, comme il est montré dans la figure ci-dessous. La plaque est soumise à une charge mécanique transversale sur la face supérieure et soumise à une charge axiale de compression à mi-surface. Trois différents types de plaques fonctionnellement graduées sont examinés (voir figure IV.1):

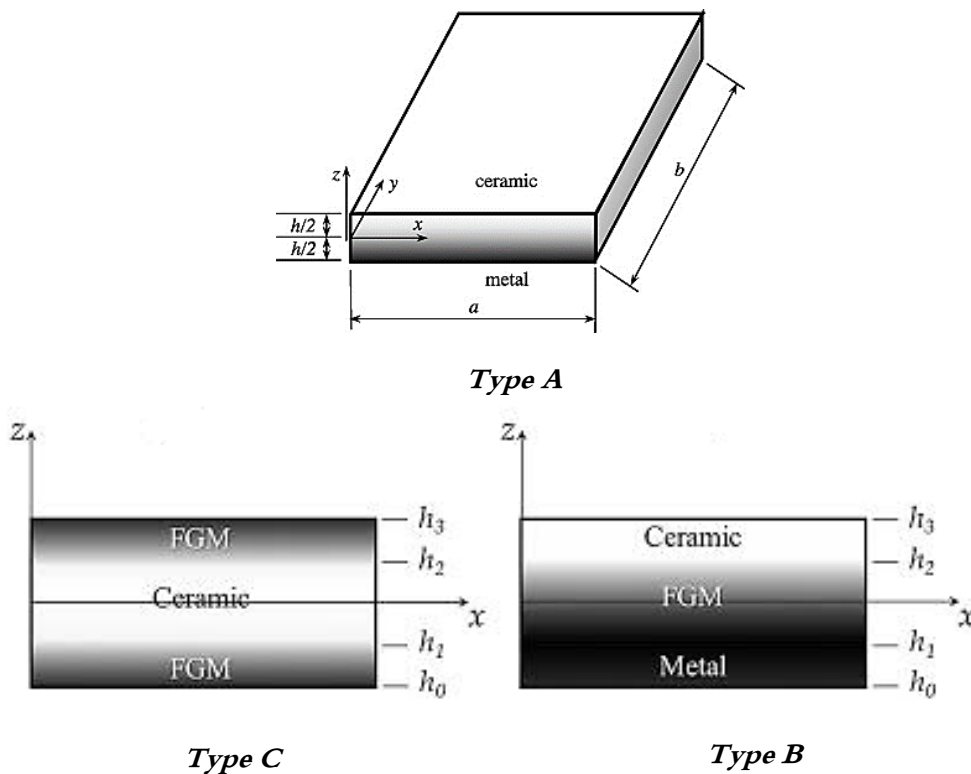


Figure IV.1 –A.géométrie d’une plaque FGM rectangulaire ; B. Plaque sandwich avec cœur FG et des faces isotropes ; C.Plaque sandwich avec cœur isotrope et faces en FG

IV.2.1Type A : Les plaques FGM

Cette plaque est graduée du métal à la céramique de sa face inférieure vers la face supérieure (figure IV.1a). La fraction volumique du matériau céramique est exprimée comme suit (Ait Atmane et al., 2015; Boukhari et al., 2016; El-Hassar et al., 2016; Laoufi et al., 2016; Fahsi et al., 2017; El -Haina et al., 2017; Zidi et al., 2017):

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \tag{IV.1}$$

Où p est l'exposant de loi de puissance, qui est non négatif et $z \in [-h/2, h/2]$

R

La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans la Figure IV.2

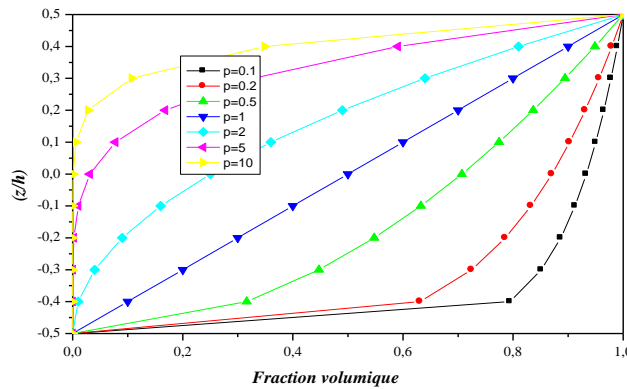


Figure IV.2–La variation de la fraction volumique de la plaque FGM type A

IV.2.2 Type B : Les plaques sandwich avec cœur en FGM

Les propriétés du cœur FGM sont supposées être classées du métal à la céramique. La surface inférieure est en métal isotrope, tandis que la surface supérieure est en céramique isotrope (figure IV.1b). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la plaque sont notées par : $h_0 = -h/2$; h_1 ; h_2 ; $h_3 = h/2$, respectivement. h_1 et h_2 varient selon le rapport d'épaisseur des couches. La fonction de fraction volumique de la phase céramique $V_c^{(j)}$ est exprimée par:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0 & \text{for } z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^p & \text{for } z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (IV.2)$$

La couche centrale de la plaque dépend de la valeur de p . Les couches supérieure et inférieure de la plaque sont indépendante de la valeur de p , puisque ces couches sont entièrement en céramique et en métal respectivement. Lorsque p prend la valeur de zéro, on obtient une plaque en bi-matériau (Céramique/Métal).

Figure IV.3 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque sandwich de type B pour (1.8.1)

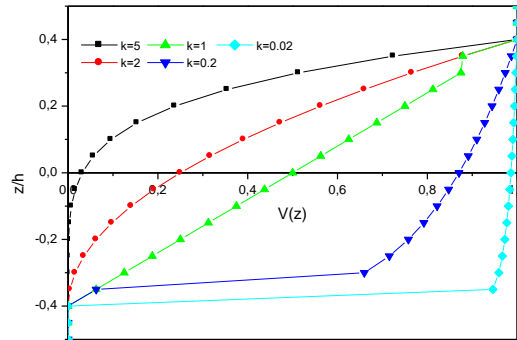


Figure IV.3–La variation de la fraction volumique de la plaque sandwich (1.8.1)

IV.2.3 Type C : Les plaques sandwich avec des faces en FGM

Les faces de ce type sont considérées comme graduées du métal à la céramique isotrope (figure IV.1c). La couche centrale est considérée comme une couche isotrope entièrement en céramique. La fonction de fraction volumique $V_c^{(j)}$ de la phase céramique est formulée par:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p & \text{for } z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p & \text{for } z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Où p est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

La couche centrale de la plaque est indépendante de la valeur p puisque cette couche est entièrement en céramique. Cependant, lorsque la valeur p prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique. La plaque sandwich de ce type est symétrique par rapport au plan moyen.

Figure IV.4 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque sandwich de type C pour différents rapport face-cœur-face.

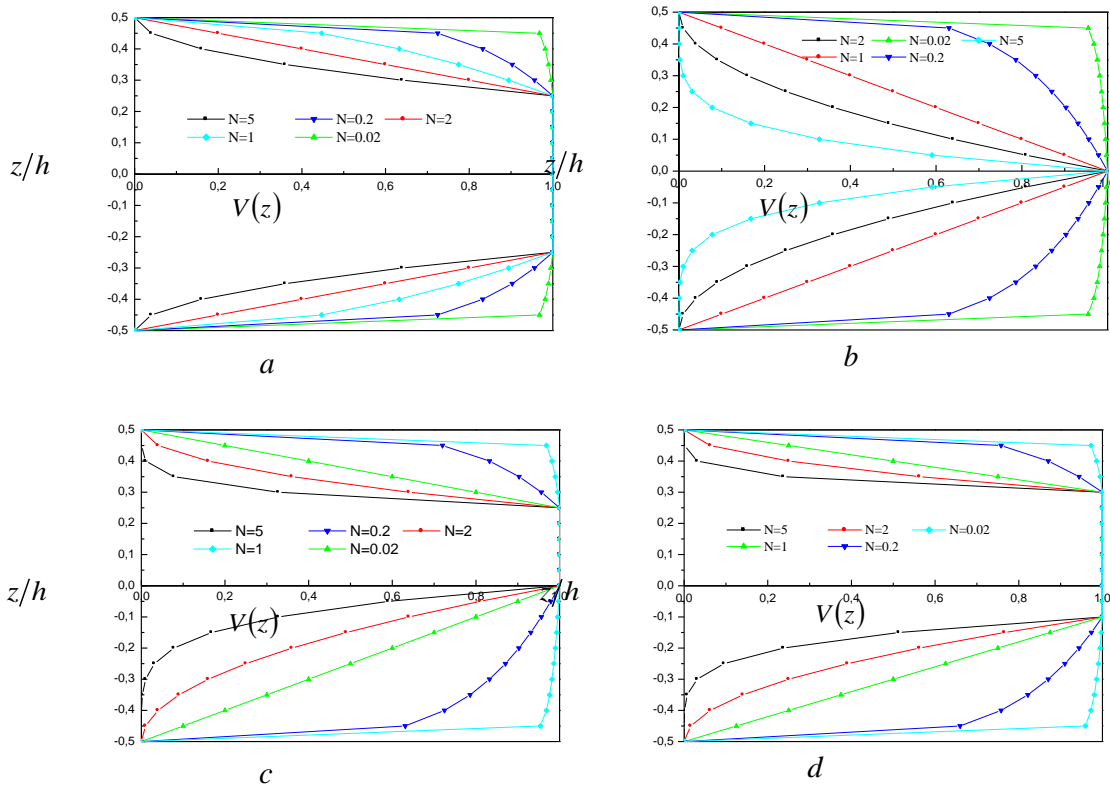


Figure IV.4- La variation de la fraction volumique de la plaque sandwich type C pour différents rapports SKIN-CORE-SKIN : a. plaque sandwich FG (1.2.1) ; b. plaque sandwich FG (1.0.1) ; c. plaque sandwich FG (2.1.1) ; d. plaque sandwich FG (2.2.1)

IV.3 Formulations théoriques

IV.3.1 Cinématique et déformations

Dans ce travail, la théorie de déformation de cisaillement conventionnelle HSDT est modifiée en considérant certaines suppositions simplificatrices afin que le nombre d'inconnues soit diminué. Le champ de déplacement du HSDT conventionnel est défini par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y, t) \tag{IV.4a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y, t) \tag{IV.4b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \tag{IV.4c}$$

Où $u_0; v_0; w_0; \varphi_x; \varphi_y$ sont les cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque, $f(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

En considérant cela (Hebali et al., 2016; Merdaci et al., 2016; Chikh et al., 2017; Bellifa et al., 2017b) et, la cinématique de la présente théorie peut être ;

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (IV.5a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (IV.5b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (IV.5c)$$

Dans cette étude, la fonction de forme est définie par:

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.6)$$

On peut voir que la cinématique dans l'équation (IV.4) ne présente que quatre inconnues (u_0, v_0, w_0 and θ). Les déformations non nulles associées a la cinématique dans l'équation (IV.4) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

$$\text{Où} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (IV.8a)$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.8b)$$

Les intégrales apparaissant dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la solution de Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} ; \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} ; \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.9)$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisé, dans ce cas via Navier. Par conséquent A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, B' = -\frac{1}{\beta^2}, k_1 = \alpha^2, k_2 = \beta^2, \quad (\text{IV.10})$$

Où α et β sont utilisées dans l'expression (IV.26)

Les caractéristiques matérielles effectives à la j -ième couche de plaques FG selon la loi de puissance sont définies par:

$$P^{\phi}(z) = (P_c - P_m)V_c^{\phi}(z) + P_m \quad (\text{IV.11})$$

Où P_m et P_c sont le module de Young (E), le coefficient de Poisson (ν), les densités de masse (ρ) du métal et des matériaux céramiques, respectivement.

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composants de contrainte et de déformation, respectivement. Les coefficients C_{ij} sont donnés par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.13})$$

IV.3.2 Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est employé ici pour déduire les équations du mouvement. Le principe peut être exprimé analytiquement comme :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV.14})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation, δV est la variation du travail externe effectué par la charge extérieure appliquée à la plaque, δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\
&= \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s \right. \\
&\quad \left. + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

Où A est la surface supérieure de la plaque, et les résultantes des efforts, N , M et S sont exprimées par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz \quad (i = x, y, xy) \quad \text{et} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \tag{IV.16}$$

La variation du travail effectué par les forces axiales et transversales est exprimée par:

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA - \int_A \bar{N} \delta w_0 dA \tag{IV.17a}$$

Et

$$\bar{N} = N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{IV.17b}$$

Où q et (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont des forces appliquées transversales et axiales, respectivement.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être calculée comme suit:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\
&= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\
&\quad + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\
&\quad + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\
&\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

Où par convention le point-exposant représente la différenciation par rapport à la variable de temps t , $\rho(z)$ est la masse volumique exprimée par l'équation (IV.11) et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massiques qui sont définies par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \tag{IV.19a}$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) p(z) dz \quad (IV.19b)$$

Les équations de mouvement peuvent être déduites en remplaçant δU , δV et δK des équations (IV-15), (IV-17) et (IV-18) dans l'équation (IV-14), intégrant par parties et en collectant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$.

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q + \bar{N} &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 \\ &+ J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= \\ -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) &+ \\ + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) & \end{aligned} \quad (IV.20)$$

En remplaçant l'équation (IV.12) dans l'équation (IV.16) et en intégrant dans l'épaisseur de la plaque, les résultantes de contrainte sont exprimées comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (IV.21a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.21b)$$

Et les composants de rigidité sont exprimés comme suit:

$$(A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, f(z), z^2, z f(z), f(z)^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (IV.22a)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44}[g(z)]^2 dz, \quad (IV.22b)$$

En remplaçant les équations (IV.21) dans l'équation (IV.20), les équations du mouvement peuvent être écrites en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) comme suit :

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{11} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{12} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{12} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_1 \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta}, \quad (IV.23a)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{13} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{22} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{11} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{11} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_2 \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_2 \ddot{\theta}, \quad (IV.23b)$$

$$B_{11} d_{11} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{12} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{11} v_0 + B_{22} d_{22} v_0 - D_{11} d_{11} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{11} w_0 - D_{22} d_{22} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_1 \theta + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{11} \theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_2 \theta + N + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \quad (IV.23c)$$

$$- (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_1 u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{12} u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{11} v_0 - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2) d_2 v_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{11} w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - ((k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{11} \theta + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \quad (IV.23d)$$

Où d_{ij} , d_{ijl} and d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (IV.24)$$

IV.3.3 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées

En utilisant la méthode de la solution de Navier, les expressions des déplacements qui vérifient les conditions aux limites sont exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (IV.25)$$

Où ω est la fréquence des vibrations libre de la plaque, $\sqrt{-1}$ l'unité imaginaire. Les coefficients α et β sont donnés par:

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b$$

La charge transversale q est également exprimée par la série double de sinus de Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{IV.27})$$

Où $Q_{mn} = q_0$ pour une distribution sinusoïdale de la charge. Considérant que la plaque est soumise à des forces de compression axiales de forme: $N_x^0 = -N_0$, $N_y^0 = -\gamma N_0$, $N_{xy}^0 = 0$ (ici γ est un paramètre de charge non dimensionnel). En remplaçant l'équation. (III.25) et (III.27) dans l'équation (III.23), le problème suivant est obtenu:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}+k & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

Où

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), S_{12} = -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}) \\ S_{13} &= \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2) \\ S_{14} &= \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2) \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2) \\ S_{24} &= \beta(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2) \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \\ S_{34} &= -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2\beta^2 - k_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2) \\ S_{44} &= -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2\beta^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 \\ &\quad - (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2 \\ k &= -N_0 (\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2) \\ m_{11} &= -I_0, m_{13} = \alpha I_1, m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha, \\ m_{22} &= -I_0, m_{23} = \beta I_1 \\ m_{24} &= -k_2 B' \beta J_1, m_{33} = -I_0 - I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{34} &= J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

$$m_{44} = -K_2 \left((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 \right)$$

L'équation est une forme générale pour l'étude de la flexion, de la stabilité et de la vibration libre des plaques et les sandwichs en FGM sous des forces axiales et transversales.

Pour résoudre un problème statique, la force axiale de compression N_o et matrice de masse $[M]$ sont réglés sur des zéros. Les charges critiques de flambement (N_{cr}) peut être déterminé à partir du problème de flambement $|S_{ij} = 0|$ tandis que le problème de vibration libre est résolu en omettant les forces axiales et transversales.

IV.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement statique et vibratoire des plaques et des sandwichs en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant des théories d'ordre élevé HSDT. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis qu'il est de cinq ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. Les équations du mouvement pour des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées posées sur des fondations élastiques sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques.

La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieur et inférieur de la plaque. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats de l'autre théorie tel que FSDT, SSDT, et Quasi 3D.

CHAPITRE V

RESULTATS & DISCUSSIONS

V.1 Introduction

La construction en sandwich FGM existe généralement en deux types: « peaux FGM – noyau homogène » et « peaux homogènes – noyau FGM ». Pour le cas du noyau homogène, le cœur souple est couramment utilisé en raison de la légèreté et haute rigidité à la flexion dans la conception structurelle. Le cœur rigide homogène est également employé dans des environnements thermiques par exemple.

Donc, l'objectif visé dans ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement statique et vibratoire et de flambement des différents types de plaques en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables seulement, tandis que cinq dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie actuelle satisfait les conditions d'équilibre sur les faces supérieure et inférieure des plaques étudiées sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur.

On suppose que les propriétés des différentes plaques étudiées varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

Dans cette section, les déplacements transversaux, les contraintes, les fréquences propres et les charges critiques de flambement des plaques isotropes et les plaques sandwich en FG simplement appuyées sont discutés et comparés aux solutions disponibles pour vérifier la précision de la simple théorie HSĐT proposé.

V.2 Exemples numériques et discussions

Deux combinaisons de matériaux de métal et de céramique: Al / ZrO₂ et Al / Al₂O₃ sont examinées dans des exemples numériques. Leurs propriétés matérielles se trouvent dans le tableau V.1. Pour plus de commodité, les paramètres sans dimension suivants sont utilisés:

$$\bar{u}(z) = \frac{100 E_c h^3}{q_0 a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{w} = \frac{10 E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \hat{w} = \frac{10 E_0 h}{q_0 a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$E_0 = 1 \text{ GPa}, \bar{\sigma}_x(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \hat{\sigma}_x(z) = \frac{10h^2}{q_0 a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}(0, 0, z),$$

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}, \hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{100 E_0 h^3}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega ab}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_c^2) \rho_c}{E_c}}, \hat{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_0/E_0}, \rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$$

Tableau V.1- Propriétés matérielles du métal et de la céramique

Matériau	Module d'Young (GPa)	Densité de masse (kg/m ³)	Coefficient de Poisson
<i>Aluminum (Al)</i>	70	2702	0.3
<i>Aluminum (Al)</i>	70	2707	0.3
<i>Zirconia (ZrO₂)</i>	151	3000	0.3
<i>Alumina (Al₂O₃)</i>	380	3800	0.3

V.2.1 Résultats de l'analyse de flexion

V.2.1.1 Exemple 1

Dans cet exemple, le tableau (V.2) montre la comparaison des déplacements transversaux centraux non dimensionnels, des contraintes axiales et transversales des plaques carrées de **type A** en Al / Al₂O₃ soumises à des charges sinusoïdales. Les résultats obtenus sont en excellent accord avec diverses théories de déformation par cisaillement SSDT (Zenkour, 2006), TSDT (Thai et Kim, 2013) [58], HSDT (Mantari et al., 2012), Nguyen et al. (2014) et quasi-3D (Carrera et al., 2008; Wu et Chiu, 2011). La figure (V.1) présente les distributions de \bar{w} , $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{xz}$ dans l'épaisseur de la plaque. Le déplacement transversal (\bar{w}) devient maximal pour la plaque métallique et minimum pour la plaque céramique. On peut voir que la contrainte axiale maximale ($\bar{\sigma}_x$) augmente avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance (p) cependant, pour certaines valeurs de l'indice de loi de puissance ($p \leq 1$), il se produit des contraintes de compression

minimales situées à l'intérieur de la plaque. Comme prévu, pour les plaques homogènes, la contrainte de cisaillement maximale est produite dans le plan médian. Cependant, la valeur maximale est située sur une autre surface en raison de la caractéristique asymétrique de la FGM dans l'épaisseur de la plaque.

Tableau V.2– Comparaison des contraintes non dimensionnelles et des déplacements des plaques carrées Al / Al₂O₃ (a/h=10, Type A)

P	Theory	$\bar{u}(-h/4)$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x(h/3)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\tau}_{xz}(h/6)$
1	Present	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2608
	Ref^(a)	0.6413	0.5890	1.4897	0.6111	0.2611
	Quasi-3D^(b)	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D^(c)	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SSDT^(d)	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT^(e)	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT^(f)	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2608
2	Present	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2637
	Ref^(a)	0.8982	0.7573	1.3959	0.5442	0.2742
	Quasi-3D^(b)	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D^(c)	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT^(d)	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT^(e)	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT^(f)	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2737
4	Present	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
	Ref^(a)	1.0500	0.8816	1.1792	0.5669	0.2546
	Quasi-3D^(b)	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D^(c)	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT^(d)	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
	HSDT^(e)	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TSDT^(f)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
8	Present	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088
	Ref^(a)	1.0759	0.9746	0.9473	0.5857	0.2094
	Quasi-3D^(b)	1.0830	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D^(c)	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	SSDT^(d)	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT^(e)	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT^(f)	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088

^(a) Nguyen et al. (2014)

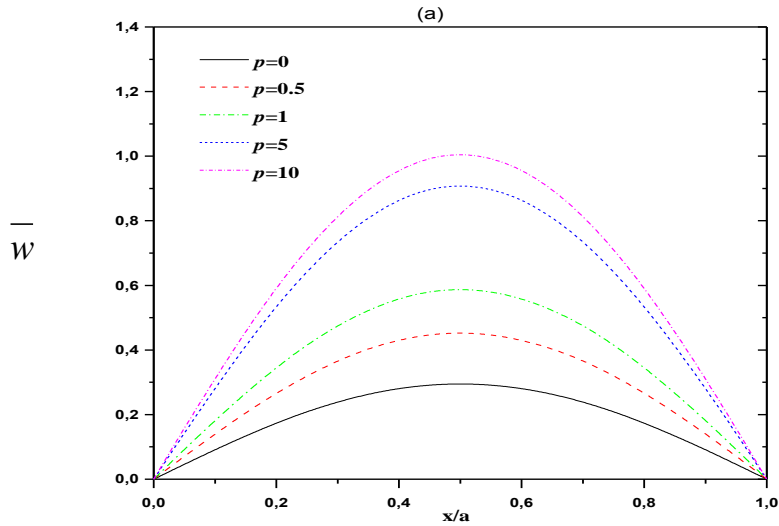
^(b) Carrera et al. (2008)

^(c) Wu and Chiu (2011)

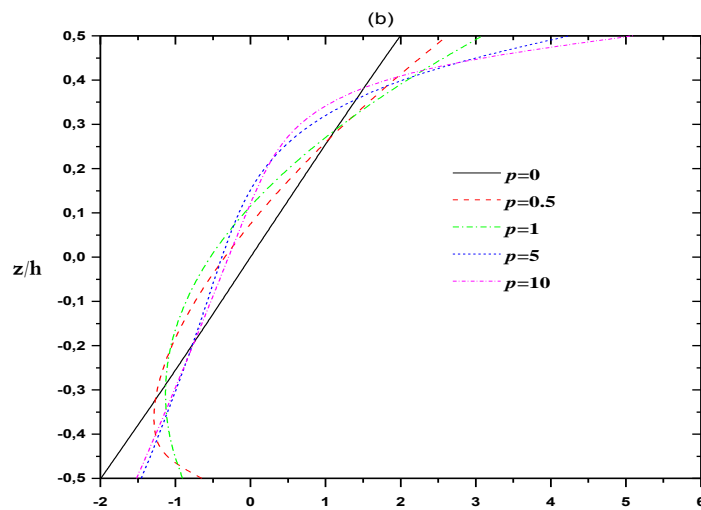
^(d) Zenkour (2006)

^(e) Mantari et al. (2012)

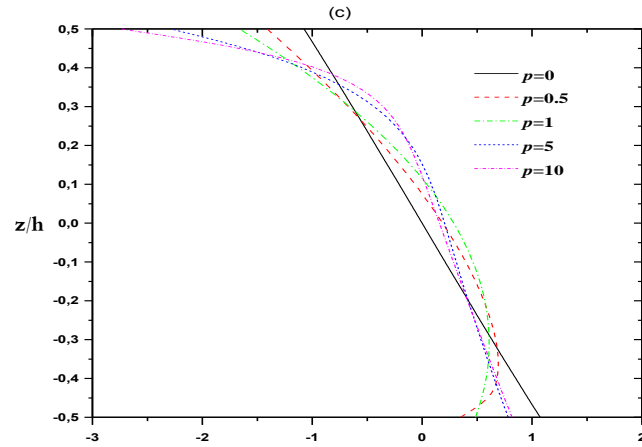
^(f) Thai and Kim (2013)



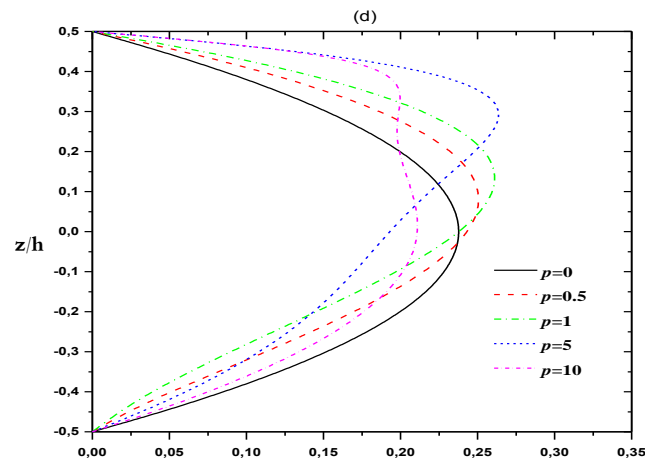
(a) Déplacement transversal non dimensionnelle \bar{w}



(b) Contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$



(c) Contrainte non dimensionnelle de cisaillement dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$



(d) Contrainte non dimensionnelle de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$

Figure V.1- Contraintes non dimensionnelles à travers l'épaisseur de la plaque en Al/ Al2O3 (type A)

V.2.1.2 Exemple 2

Dans cet exemple, le comportement statique est examiné pour une plaque sandwich carrée (1-2-1) Al / Al₂O₃ de type B. Les valeurs calculées sont comparées aux résultats fournis par d'autres travaux existants Nguyen et al (2014), FSDT (Brischetto, 2009) et quasi-3D (Neves et al., 2012b; Neves et al., 2013; Carrera et al.2011) dans le tableau (V.3). On peut observer que les résultats calculés sont en très bon accord avec les solutions existantes. Cet accord entre les résultats actuels et ceux donnés par d'autres références, en particulier avec les théories quasi-3D est démontré. La distribution de $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque pour diverses valeurs de p est illustrée sur les Figures 3 (a et b).

Tableau V.3– Comparaison des contraintes non dimensionnelles et des déplacements des plaques sandwichs carrées en Al / Al₂O₃ (a/h=10 , Type B)

P	Theorie	$\bar{u}(-h/4)$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x(h/3)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\tau}_{xz}(h/6)$
0	Present	0.3246	0.3745	1.4758	1.0130	0.2192
	Ref ^(a)	0.3247	0.3744	1.4761	1.0130	0.2161
	Quasi-3D ^(b)	–	0.3711	–	–	0.2227
0.5	Present	0.5531	0.5239	1.5746	0.6954	0.2526
	Ref ^(a)	0.5542	0.5245	1.5750	0.6965	0.2509
	Quasi-3D ^(b)	–	0.5238	–	–	0.2581
1	Present	0.7319	0.6336	1.5709	0.5437	0.2724
	Ref ^(a)	0.7337	0.6345	1.5691	0.5447	0.2733
	FSDT ^(c)	–	0.6337	–	–	0.2458
	Quasi-3D ^(d)	–	0.6324	–	–	0.2594
	Quasi-3D ^(e)	–	0.6305	–	–	0.2788
	Quasi-3D ^(b)	–	0.6305	–	–	0.2789
4	Present	1.0466	0.8279	1.2624	0.5577	0.2611
	Ref ^(a)	1.0550	0.8331	1.2539	0.5614	0.2697
	FSDT ^(c)	–	0.8191	–	–	0.1817
	Quasi-3D ^(d)	–	0.8307	–	–	0.2398
	Quasi-3D ^(e)	–	0.8202	–	–	0.2778
	Quasi-3D ^(b)	–	0.8199	–	–	0.2747
10	Present	1.0654	0.8728	0.9381	0.5695	0.1912
	Ref ^(a)	1.0798	0.8807	0.9258	0.5758	0.1982
	FSDT ^(c)	–	0.8556	–	–	0.1234
	Quasi-3D ^(d)	–	0.8740	–	–	0.1944
	Quasi-3D ^(e)	–	0.8650	–	–	0.2059
	Quasi-3D ^(b)	–	0.8645	–	–	0.2034
^(a) Nguyen et al. (2014)						
^(b) Neves et al. (2013)						
^(c) Brischetto (2009)						
^(d) Carrera et al. (2011)						
^(e) Neves et al. (2012)						

V.2.1.3 Exemple 3

Le troisième exemple concerne le comportement en flexion des plaques sandwiches Al / ZrO₂ de type C pour différents rapports d'épaisseur peau-noyau-peau. Les tableaux 4 à 6 présentent les déformations centrales, les contraintes axiales et transversales des plaques. Les déplacements transversaux augmentent avec l'augmentation de l'indice de puissance. Les tableaux 4 à 6 présentent une comparaison des déplacements transversaux non dimensionnels, des contraintes axiales et de cisaillement des plaques calculées par la théorie proposée et de celles de Zenkour (2005b), Nguyen et al (2014) et des solutions quasi 3D (Neves et al. . 2013, Bessaim et al., 2013; Zenkour, 2013). On peut voir qu'un bon accord est démontré pour toutes les valeurs de l'exposant de la loi de puissance et pour les différents rapports d'épaisseur peau-noyau-peau.

Les distributions des contraintes axiales et de cisaillement sur l'épaisseur sont indiquées sur les figures 3c et d. On peut observer que les contraintes maximales sont produites aux interfaces des couches (Figure 3c). Comme prévu, les contraintes de cisaillement maximales sont situées dans le plan médian de la plaque (1-2-1).

Tableau V.4–Déplacement transversaux non dimensionnelles du centre (\hat{w}) des plaques sandwichs carrées en Al/ZrO₂ (a/h=10, type C)

P	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Present	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606
	Ref ^(a)	0.19597	0.19597	0.19597	0.19595	0.19597	0.19597
	TSDT ^(b)	0.19606	0.19606	–	0.19606	0.19606	0.19606
	SSDT ^(b)	0.19605	0.19605	–	0.19606	0.19605	0.19605
	Quasi-3D ^(c)	0.19487	0.19487	–	0.19487	0.19487	0.19487
	Quasi-3D ^(d)	–	0.19490	0.19490	0.19490	0.19490	0.19490
	Quasi-3D ^(e)	–	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486
1	Present	0.32358	0.30632	0.29675	0.29199	0.28085	0.27094
	Ref ^(a)	0.32348	0.30622	0.29666	0.29191	0.28077	0.27086
	TSDT ^(b)	0.32358	0.30632	–	0.29199	0.28085	0.27094
	SSDT ^(b)	0.23349	0.30624	–	0.29194	0.28082	0.27093
	Quasi-3D ^(c)	0.32001	0.30275	–	0.28867	0.27760	0.26815
	Quasi-3D ^(d)	–	0.30700	0.29750	0.29290	0.28200	0.27220
	Quasi-3D ^(e)	–	0.30430	0.29448	0.29007	0.27874	0.26915
2	Present	0.37335	0.35231	0.33779	0.33289	0.31617	0.30263
	Ref ^(a)	0.37322	0.35221	0.33769	0.33279	0.31608	0.30255
	TSDT ^(b)	0.37335	0.35231	–	0.33289	0.31617	0.30263
	SSDT ^(b)	0.37319	0.35218	–	0.33280	0.31611	0.30260
	Quasi-3D ^(c)	0.36891	0.34737	–	0.32816	0.31152	0.29874
	Quasi-3D ^(d)	–	0.35190	0.33760	0.33290	0.31640	0.30320
	Quasi-3D ^(e)	–	0.35001	0.33495	0.33068	0.31356	0.30060
5	Present	0.40927	0.39183	0.37307	0.37145	0.35960	0.33480
	Ref ^(a)	0.40911	0.39170	0.37295	0.37134	0.34950	0.33472
	TSDT ^(b)	0.40927	0.39183	–	0.37145	0.34960	0.33480
	SSDT ^(b)	0.40905	0.39160	–	0.37128	0.34950	0.33474
	Quasi-3D ^(c)	0.40532	0.38612	–	0.36546	0.34361	0.32966
	Quasi-3D ^(d)	–	0.39050	0.37220	0.37050	0.34900	0.33470
	Quasi-3D ^(e)	–	0.38934	0.36981	0.36902	0.34649	0.33255
10	Present	0.41772	0.40407	0.38442	0.38551	0.36215	0.34824
	Ref ^(a)	0.41754	0.40393	0.3843	0.38540	0.36202	0.34815
	TSDT ^(b)	0.41772	0.40407	–	0.38551	0.36215	0.34824
	SSDT ^(b)	0.41750	0.40376	–	0.38490	0.34916	0.34119
	Quasi-3D ^(c)	0.41448	0.39856	–	0.37924	0.35577	0.34259
	Quasi-3D ^(d)	–	0.40260	0.38350	0.38430	0.36120	0.34800
	Quasi-3D ^(e)	–	0.40153	0.38111	0.38303	0.35885	0.34591

^(a) Nguyen et al. (2014)

^(b) Zenkour (2005a)

^(c) Zenkour (2013)

^(d) Neves et al. (2013)

^(e) Bessaim et al. (2012)

Tableau V.5– Contrainte axiale non dimensionnelle ($\hat{\sigma}_x (h/2)$) des plaques sandwich carrées en Al / ZrO₂ ($a/h=10$, type C).

P	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Present	1.99432	1.99432	1.99432	1.99432	1.99432	1.99432
	Ref ^(a)	1.99482	1.99482	1.99482	1.99482	1.99482	1.99482
	TSDT ^(b)	2.04985	2.04985	–	2.04985	2.04985	2.04985
	SSDT ^(b)	2.05452	2.05452	–	2.05452	2.05452	2.05452
	Quasi-3D ^(c)	2.00773	2.00773	–	2.00773	2.00773	2.00773
	Quasi-3D ^(d)	–	2.00660	2.00640	2.00660	2.00650	2.00640
	Quasi-3D ^(e)	–	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524
1	Present	1.54416	1.46274	1.35680	1.39383	1.28829	1.29151
	Ref ^(a)	1.54441	1.46297	1.35703	1.39406	1.28852	1.29174
	TSDT ^(b)	1.57923	1.49587	–	1.42617	1.32062	1.32309
	SSDT ^(b)	1.58204	1.49859	–	1.42892	1.32342	1.32590
	Quasi-3D ^(c)	1.57004	1.48833	–	1.41781	1.30907	1.31204
	Quasi-3D ^(d)	–	1.48130	1.37680	1.41370	1.30920	1.31330
	Quasi-3D ^(e)	–	1.46131	1.35053	1.39243	1.28274	1.29030
2	Present	1.78357	1.68660	1.52964	1.59370	1.43671	1.44684
	Ref ^(a)	1.78383	1.68682	1.52988	1.59393	1.43693	1.44707
	TSDT ^(b)	1.82167	1.72144	–	1.62748	1.47095	1.47988
	SSDT ^(b)	1.82450	1.72412	–	1.63025	1.47387	1.48283
	Quasi-3D ^(c)	1.81509	1.72030	–	1.62591	1.46372	1.47421
	Quasi-3D ^(d)	–	1.69940	1.54560	1.60880	1.45430	1.46590
	Quasi-3D ^(e)	–	1.68472	1.52101	1.59170	1.42887	1.44497
5	Present	1.95003	1.87686	1.67870	1.78138	1.57598	1.60437
	Ref ^(a)	1.95031	1.87709	1.67895	1.78159	1.57620	1.60459
	TSDT ^(b)	1.99272	1.91302	–	1.81580	1.61181	1.63814
	SSDT ^(b)	1.99567	1.91547	–	1.81838	1.61477	1.64106
	Quasi-3D ^(c)	1.97912	1.91504	–	1.82018	1.60953	1.63906
	Quasi-3D ^(d)	–	1.88380	1.69090	1.79060	1.58930	1.61950
	Quasi-3D ^(e)	–	1.87516	1.66856	1.77919	1.56627	1.60203
10	Present	1.98347	1.93407	1.72865	1.84911	1.62818	1.66700
	Ref ^(a)	1.98382	1.93431	1.72890	1.84933	1.62840	1.67019
	TSDT ^(b)	2.03036	1.97126	–	1.88376	1.66660	1.70417
	SSDT ^(b)	2.03360	1.97313	–	1.88147	1.61979	1.64851
	Quasi-3D ^(c)	2.00692	1.97075	–	1.89162	2.18558	1.67350
	Quasi-3D ^(d)	–	1.93970	1.74050	1.85590	1.63950	1.68320
	Quasi-3D ^(e)	–	1.93266	1.71835	1.84705	1.61792	1.66754

^(a) Nguyen et al. (2014)

^(b) Zenkour (2005a)

^(c) Zenkour (2013)

^(d) Neves et al. (2013)

^(e) Bessaim et al. (2012)

Tableau V.6 – Contrainte non dimensionnelle de cisaillement ($\bar{\tau}_{xz}(0)$) des plaques sandwich carrées Al / ZrO₂ (a/h=10, type C).

P	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Present	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857
	Ref ^(a)	0.23581	0.23581	0.23581	0.23581	0.23581	0.23581
	TSDT ^(b)	0.23857	0.23857	–	0.23857	0.23857	0.23857
	SSDT ^(b)	0.24618	0.24618	–	0.24618	0.24618	0.24618
	Quasi-3D ^(c)	0.23910	0.23910	–	0.23910	0.23910	0.23910
	Quasi-3D ^(d)	–	0.25380	0.22910	0.24610	0.24610	0.24630
	Quasi-3D ^(e)	–	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794
1	Present	0.29203	0.27104	0.27077	0.26117	0.25951	0.25258
	Ref ^(a)	0.28953	0.26882	0.26852	0.25906	0.25736	0.25054
	TSDT ^(b)	0.29203	0.27104	–	0.26117	0.25951	0.25258
	SSDT ^(b)	0.29907	0.27774	–	0.26809	0.26680	0.26004
	Quasi-3D ^(c)	0.36531	0.34366	–	0.32853	0.31785	0.30845
	Quasi-3D ^(d)	–	0.27450	0.26400	0.26430	0.25940	0.24960
	Quasi-3D ^(e)	–	0.27050	0.27017	0.26060	0.25890	0.25196
2	Present	0.32622	0.28838	0.28799	0.27188	0.26939	0.25834
	Ref ^(a)	0.32336	0.28607	0.28569	0.26982	0.26731	0.25645
	TSDT ^(b)	0.32622	0.28838	–	0.27188	0.26939	0.25834
	SSDT ^(b)	0.33285	0.29422	–	0.27807	0.27627	0.26543
	Quasi-3D ^(c)	0.41778	0.38601	–	0.36417	0.34824	0.33543
	Quasi-3D ^(d)	–	0.27600	0.28770	0.26680	0.26360	0.25230
	Quasi-3D ^(e)	–	0.28792	0.28742	0.27138	0.26885	0.25776
5	Present	0.38634	0.31454	0.31346	0.28643	0.28265	0.26512
	Ref ^(a)	0.38250	0.31182	0.31087	0.28420	0.28047	0.26327
	TSDT ^(b)	0.38634	0.31454	–	0.28643	0.28265	0.26512
	SSDT ^(b)	0.39370	0.31930	–	0.29150	0.28895	0.27153
	Quasi-3D ^(c)	0.46890	0.42723	–	0.39918	0.37791	0.36234
	Quasi-3D ^(d)	–	0.27120	0.33770	0.26550	0.26690	0.25460
	Quasi-3D ^(e)	–	0.31419	0.31293	0.28606	0.28217	0.26463
10	Present	0.43206	0.33242	0.33013	0.29566	0.29080	0.26895
	Ref ^(a)	0.42744	0.32936	0.32732	0.29326	0.28854	0.26705
	TSDT ^(b)	0.43206	0.33242	–	0.29566	0.29080	0.26895
	SSDT ^(b)	0.44147	0.33644	–	0.29529	0.29671	0.27676
	Quasi-3D ^(c)	0.49051	0.44435	–	0.41385	0.39045	0.37390
	Quasi-3D ^(d)	–	0.26710	0.38060	0.26390	0.26920	0.25680
	Quasi-3D ^(e)	–	0.33210	0.32959	0.29534	0.29036	0.26850

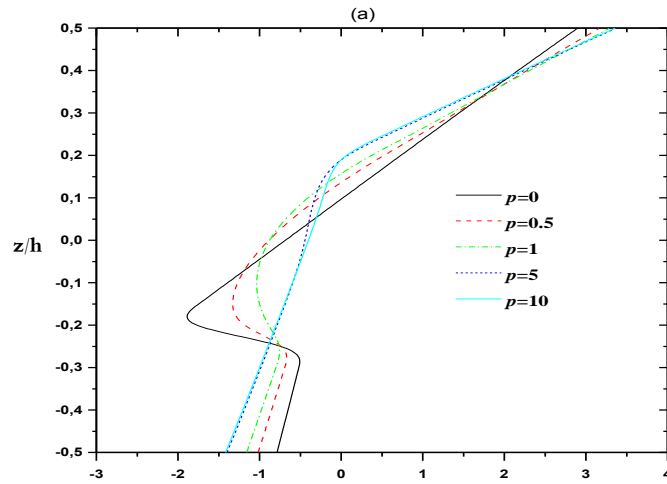
^(a)Nguyen et al. (2014)

^(b)Zenkour (2005a)

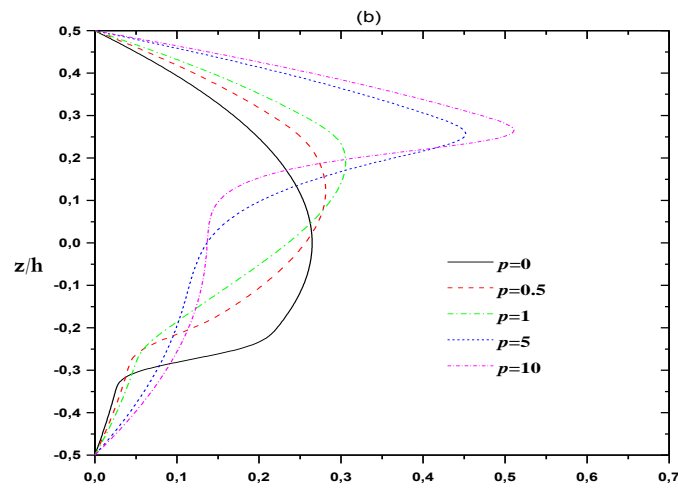
^(c)Zenkour (2013)

^(d)Neves et al. (2013)

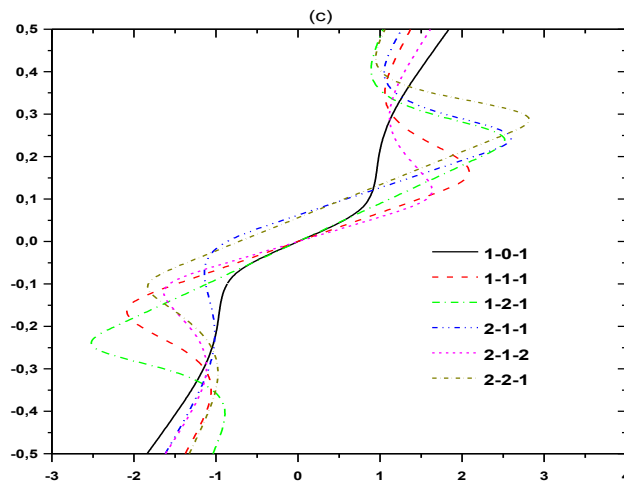
^(e)Bessaim et al. (2012)



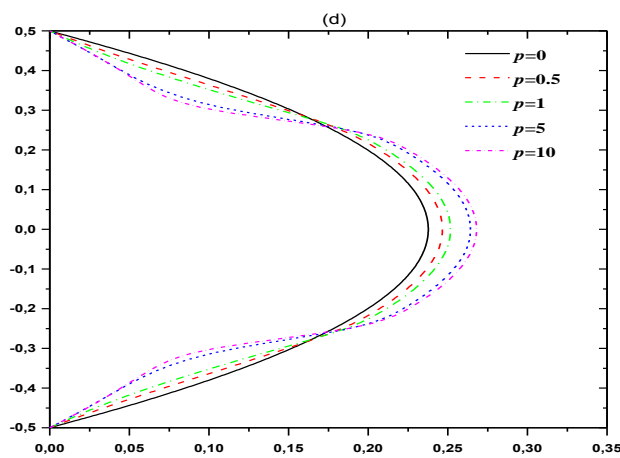
(a) $\bar{\sigma}_x$ (Plaque 1-2-1 Al/Al₂O₃, Type B)



(b) $\bar{\tau}_{xz}$ (Plaque 1-2-1 Al/Al₂O₃, Type B)



(c) Contrainte non dimensionnelle de cisaillement dans le plan τ_{xy} (type C)



(d) Contrainte non dimensionnelle de cisaillement transverse τ_{xz} (type C)

Figure V.2– Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de p pour les plaques sandwich carrées en (Al / Al₂O₃) et (Al / ZrO₂) soumises à une charge sinusoïdale ($a/h=10$, types B et C)

V.2.2 Résultats de l'analyse des vibrations et du flambement

V.2.2.1 Exemple 4

Les tableaux 7 et 8 présentent les fréquences fondamentales non dimensionnelles et les charges critiques de flambement des plaques de type A. Les résultats fournis dans le tableau 8 sont calculés pour différentes configurations de plaque avec deux types de forces dans le plan: la compression uniaxiale ($\gamma = 0$) et les compressions biaxiales ($\gamma = 1$).

Les résultats calculés sont comparés à ceux déterminés par un TSDT (Thai et Choi, 2012) et un modèle 3D (Uymaz et Aydogdu, 2007). Une bonne corrélation entre ces théories est démontrée, même pour les plaques épaisses. Les tableaux 7 et 8 montrent que les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement augmentent avec (a/h) , et diminuent avec l'augmentation de (p) .

Tableau V.7– Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) des plaques carrées Al^*/ZrO_2 (type A).

a/h	Theory	Power-law index p							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	Present	1.2452	1.2162	1.1913	1.1347	1.0782	1.0233	0.9684	0.9433
	Ref ^(a)	1.2453	1.2162	1.1913	1.1356	1.0784	1.0234	0.9685	0.9435
	3D ^(b)	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
5	Present	1.7683	1.7216	1.6824	1.5975	1.5212	1.4601	1.4059	1.3690
	Ref ^(a)	1.7683	1.7208	1.6818	1.5974	1.5212	1.4601	1.4058	1.3690
	3D ^(b)	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
10	Present	1.9317	1.8785	1.8340	1.7397	1.6583	1.5986	1.5492	1.5083
	Ref ^(a)	1.9317	1.8773	1.8332	1.7393	1.6583	1.5986	1.5492	1.5083
	3D ^(b)	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066
20	Present	1.9821	1.9267	1.8806	1.7833	1.7003	1.6415	1.5943	1.5521
	Ref ^(a)	1.9821	1.9254	1.8797	1.7827	1.7003	1.6415	1.5943	1.5521
	3D ^(b)	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
50	Present	1.9971	1.9410	1.8944	1.7962	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
	Ref ^(a)	1.9971	1.9397	1.8935	1.7956	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
	3D ^(b)	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
100	Present	1.9993	1.9431	1.8964	1.7981	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	Ref ^(a)	1.9993	1.9418	1.8955	1.7975	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	3D ^(b)	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652

^(a) Nguyen et al. (2014)

^(b) Uymaz and Aydogdu (2007)

Tableau V.8- Comparaison de la charge critique de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques carrées Al / Al₂O₃ (type A).

(γ_1, γ_2)	a/b	a/h	Theory	Power-law index p						
				0	0.5	1	2	5	10	
(1,0)	0.5	5	Present	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	
			Ref ^(a)	6.7204	4.4221	3.4164	2.6450	2.1479	1.9210	
			TSDT ^(b)	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	
		10	Present	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896	
			Ref ^(a)	7.4053	4.8190	3.7111	2.8896	2.4163	2.1897	
			TSDT ^(b)	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896	
	20	Present	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	4.4807		
		Ref ^(a)	7.5993	4.9298	3.7930	2.9581	2.4944	4.4800		
		TSDT ^(b)	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	4.4807		
	1	5	Present	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	
			Ref ^(a)	16.0216	10.6215	8.2247	6.3430	5.0513	4.4800	
			TSDT ^(b)	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	
			10	Present	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
				Ref ^(a)	18.5786	12.1181	9.3391	7.2630	6.0346	5.4530
				TSDT ^(b)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
		20	Present	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	
			Ref ^(a)	19.3528	12.5616	9.6675	7.5371	6.3416	5.7674	
			TSDT ^(b)	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	
(1,1)		0.5	5	Present	3.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
				Ref ^(a)	3.3763	3.5377	2.7331	2.1160	1.7183	1.5368
				TSDT ^(b)	3.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
	10		Present	5.9243	3.8552	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517	
			Ref ^(a)	5.9243	3.8552	2.9689	2.3117	1.9330	1.7517	
			TSDT ^(b)	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517	
	20	Present	3.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152		
		Ref ^(a)	6.0794	3.9438	3.0344	2.3665	1.9955	1.8153		
		TSDT ^(b)	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152		
	1	5	Present	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5256	2.2403	
			Ref ^(a)	8.0108	5.3108	4.1124	3.1715	2.5256	2.2400	
			TSDT ^(b)	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403	
		10	Present	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	
			Ref ^(a)	9.2893	6.0590	4.6696	3.6315	3.0173	2.7265	
			TSDT ^(b)	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	
		20	Present	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	
			Ref ^(a)	9.6764	6.2808	4.8337	3.7686	3.1723	2.8837	
			TSDT ^(b)	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	

^(a) Nguyen et al. (2014)

^(b) Praveen and Reddy (1998)

V.2.2.2 Exemple 5

Le but de cet exemple est de prouver la précision du modèle proposé pour prédire les comportements dynamiques des plaques sandwiches Al / Al₂O₃ de type B. On note dans cet exemple que les plaques sont constituées d'un mélange de métal situé sur la surface supérieure et de céramique sur la partie inférieure. Trois rapports d'épaisseur $a/h=5, 10$ et 100 et trois épaisseurs peau-noyau-peau (1-1-1, 1-2-1 et 2-2-1) sont considérées dans cette étude.

Un excellent accord est trouvé entre la fréquence fondamentale calculée à partir de la présente étude et celle des HSDT (Natarajan et Manickam, 2012) (HSDT9 et HSDT13 sont les modèles de plaques HSDT avec respectivement 9 et 13 variables) dans les tableaux 9 et 10.

Tableau V.9– Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) des plaques sandwich carrée Al / Al₂O₃ (type B).

a/h	Theory	1-1-1				1-2-1			2-2-1		
		0	0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	Present	1.1104	1.1492	1.1672	1.2131	1.1625	1.1903	1.2651	1.1986	1.2360	1.3256
	Ref ^(a)	1.1147	1.1414	1.1561	1.1996	1.1574	1.1827	1.2569	1.1916	1.2268	1.3160
	HSDT9 ^(b)	1.1021	1.1449	1.1639	1.2113	1.1597	1.1884	1.2644	1.1965	1.2350	1.3249
	HSDT13 ^(b)	1.0893	1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
10	Present	1.2169	1.2389	1.2517	1.2927	1.2588	1.2792	1.3494	1.2853	1.3219	1.4162
	Ref ^(a)	1.2172	1.2359	1.2478	1.2883	1.2567	1.2763	1.3466	1.2827	1.3187	1.4130
	HSDT9 ^(b)	1.2138	1.2373	1.2506	1.2921	1.2578	1.2785	1.3492	1.2846	1.3216	1.4161
	HSDT13 ^(b)	1.2087	1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
100	Present	1.2617	1.2751	1.2854	1.3239	1.2980	1.3148	1.3824	1.3198	1.3558	1.4518
	Ref ^(a)	1.2617	1.2752	1.2853	1.3238	1.2984	1.3147	1.3824	1.3198	1.3558	1.4518
	HSDT9 ^(b)	1.2617	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	HSDT13 ^(b)	1.2616	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519

^(a)Nguyen et al. (2014)

^(b)Natarajan and Manickam (2012)

Tableau V.10– Charges critiques non dimensionnelles de flambement des plaques sandwich carrées Al / Al₂O₃ soumises à des charges de compression biaxiales $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, type B).

a/h	Scheme	Theory	p				
			0	0.5	1	5	10
5	1-1-1	Present	2.0334	2.2644	2.3782	2.6572	2.7436
		Ref ^(a)	2.0513	2.2342	2.3333	2.5978	2.6834
	1-2-1	Present	1.9206	2.2918	2.4697	2.9345	3.0918
		Ref ^(a)	1.9456	2.2725	2.4387	2.8964	3.0545
	2-2-1	Present	2.1234	2.5314	2.7462	3.2822	3.4462
		Ref ^(a)	2.1369	2.5023	2.7056	3.2351	3.4009
10	1-1-1	Present	2.3496	2.5286	2.6288	2.9048	2.9975
		Ref ^(a)	2.3508	2.5165	2.6123	2.8848	2.9773
	1-2-1	Present	2.3078	2.5854	2.7447	3.2200	3.3951
		Ref ^(a)	2.3095	2.5768	2.7322	3.2063	3.3816
	2-2-1	Present	2.3918	2.8012	3.0265	3.6196	3.8101
		Ref ^(a)	3.3928	2.7898	3.0116	3.6028	3.7937
100	1-1-1	Present	2.4773	2.6302	2.7238	2.9971	3.0921
		Ref ^(a)	2.4773	2.6302	2.7236	2.9969	3.0918
	1-2-1	Present	2.4730	2.6998	2.8496	3.3270	3.5090
		Ref ^(a)	2.4730	2.7015	2.8495	2.3268	3.5087
	2-2-1	Present	2.4963	2.9036	3.1322	3.7469	3.9479
		Ref ^(a)	2.4963	2.9038	3.1320	3.7467	3.9476

^(a) Nguyen et al. (2014)

V.2.2.3 Exemple 6

Dans le dernier exemple, les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement des plaques sandwichs Al / Al₂O₃ de type C sont comparées dans les tableaux 11 et 12 avec celles de SSDT, TSDT (Zenkour, 2005) [63], HDT (El Meiche et al., 2011), quasi-3D (Bessaim et al., 2013; Neves et al., 2012c) et 3D (Li et al., 2008). Six types de plaques sont considérés dans cette étude avec des valeurs différentes de l'indice de puissance. On peut observer que le modèle proposé fournit une excellente solution pour les plaques de type C. Cela implique que le modèle proposé est approprié et efficace pour étudier les comportements de flexion, de vibration et de flambement des plaques sandwich.

La figure V.3 présente la variation des fréquences fondamentales et des charges critiques de flambement des plaques sandwich par rapport à l'indice de puissance. On peut en conclure que l'augmentation de l'indice de puissance entraîne une diminution de ces deux quantités.

Les plaques sandwich (1-0-1) et (1-2-1) produisent respectivement les valeurs les plus basses et les plus élevées de fréquence naturelle et de flambement critique. Cela est dû au fait que ces structures présentent les fractions de volume les plus faibles et les plus élevées de la phase céramique, ce qui en fait les plus doux et les plus dures.

Tableau V.11– Fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) des plaques sandwich carrées Al / Al₂O₃ (a / h = 10, type C).

p	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Present	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
	Ref^(a)	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489
	TSDT^(b)	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
	SSDT^(b)	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452
	HDT^(c)	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449
	Quasi-3D^(d)	1.82682	1.82682	-	1.82682	1.82682	1.82682
	3D^(e)	1.82682	1.82682	-	1.82682	1.82682	1.82682
0.5	Present	1.44424	1.48408	1.50640	1.51922	1.54715	1.57451
	Ref^(a)	1.44348	1.48355	1.50597	1.51885	1.54680	1.57437
	TSDT^(b)	1.44424	1.48408	1.51253	1.51922	1.55199	1.57451
	SSDT^(b)	1.44436	1.48418	1.51258	1.51927	1.55202	1.57450
	HDT^(c)	1.44419	1.48405	1.50636	1.51922	1.54714	1.57458
	Quasi-3D^(d)	1.44621	1.48611	-	1.52130	1.55016	1.57670
	3D^(e)	1.44614	1.48608	-	1.52131	1.54926	1.57668
1	Present	1.24320	1.30011	1.33339	1.35333	1.39565	1.43934
	Ref^(a)	1.24332	1.30024	1.33352	1.35345	1.39579	1.43948
	TSDT^(b)	1.24320	1.30011	1.34888	1.35333	1.40789	1.43934
	SSDT^(b)	1.24335	1.30023	1.34894	1.35339	1.40792	1.43931
	HDT^(c)	1.24310	1.30004	1.33328	1.35331	1.39559	1.43940
	Quasi-3D^(d)	1.24495	1.30195	-	1.35527	1.39987	1.44143
	3D^(e)	1.24470	1.30181	-	1.35523	1.39763	1.44137
5	Present	0.94598	0.98184	1.03059	1.04466	1.10897	1.17397
	Ref^(a)	0.94611	0.98193	1.03067	1.04473	1.10905	1.17403
	TSDT^(b)	0.94598	0.98184	1.07432	1.04466	1.14731	1.17397
	SSDT^(b)	0.94630	0.98207	1.07445	1.04481	1.14741	1.17399
	HDT^(c)	0.94574	0.98166	1.03033	1.04455	1.10875	1.17397
	Quasi-3D^(d)	0.94716	0.98311	-	1.04613	1.11723	1.17579
	3D^(e)	0.94476	0.98103	-	1.04532	1.10983	1.17567
10	Present	0.92839	0.94297	0.99211	0.99551	1.06107	1.12314
	Ref^(a)	0.92854	0.94305	0.99219	0.99558	1.06114	1.12320
	TSDT^(b)	0.92839	0.94297	1.03862	0.99551	1.10533	1.12314
	SSDT^(b)	0.92875	0.94332	1.04558	0.99519	1.04154	1.13460
	HDT^(c)	0.92811	0.94275	0.99184	0.99536	1.06081	1.12311
	Quasi-3D^(d)	0.92952	0.94410	-	0.99684	1.07015	1.12486
	3D^(e)	0.92727	0.94078	-	0.99523	1.06104	1.12466

^(a) Nguyen et al. (2014)

^(b) Zenkour (2005b);

^(c) El Meiche *et al.* (2011);

^(d) Bessaim *et al.* (2013);

^(e) Li *et al.* (2008)

Tableau V.12 – Charges critiques non dimensionnelles de flambement des plaques sandwich carrées Al / Al₂O₃ soumises à des charges de compression biaxiales $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, $a / h = 10$, type C).

p	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Present	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	Ref^(a)	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566
	TSDT^(b)	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	SSDT^(b)	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303
	HDT^(c)	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276
	HSDT^(d)	2.50266	2.50266	2.50266	2.50266	2.50266	2.50266
	Quasi-3D^(d)	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652
0.5	Present	3.68219	3.97042	4.11235	4.21823	4.40499	4.60841
	Ref^(a)	3.67832	3.96760	4.10999	4.21622	4.40304	4.60760
	TSDT^(b)	3.68219	3.97042	4.11235	4.21823	4.40499	4.60841
	SSDT^(b)	3.68284	3.97097	4.11269	4.21856	4.40519	4.60835
	HDT^(c)	3.68190	3.97023	4.11236	4.21823	4.40514	4.60878
	HSDT^(d)	3.59354	3.87157	4.00853	4.11071	4.29073	4.48676
	Quasi-3D^(d)	3.58096	3.85809	3.99480	4.09641	4.27592	4.47110
1	Present	2.58357	2.92003	3.09697	3.23237	3.47472	3.75328
	Ref^(a)	2.58410	2.92060	3.09759	3.23299	3.47544	3.75403
	TSDT^(b)	2.58357	2.92003	3.09697	3.23237	3.47472	3.75328
	SSDT^(b)	2.58423	2.92060	3.09731	3.23270	3.47490	3.75314
	HDT^(c)	2.58315	2.91970	3.09686	3.23225	3.47476	3.75359
	HSDT^(d)	2.53913	2.86503	3.03679	3.16779	3.40280	3.67204
	Quasi-3D^(d)	2.53062	2.85563	3.02733	3.15750	3.39207	3.66013
5	Present	1.31910	1.52129	1.70176	1.78978	2.05605	2.36734
	Ref^(a)	1.32948	1.52155	1.70203	1.79002	2.05633	2.36760
	TSDT^(b)	1.32910	1.52129	1.70176	1.78978	2.05605	2.36734
	SSDT^(b)	1.33003	1.52203	1.70224	1.79032	2.05644	2.36744
	HDT^(c)	1.32839	1.52071	1.70140	1.78937	2.05578	2.36731
	HSDT^(d)	1.32331	1.50935	1.68594	1.77072	2.03078	2.33036
	Quasi-3D^(d)	1.31829	1.50409	1.68594	1.76507	2.02534	2.32354
10	Present	1.24363	1.37316	1.54595	1.59736	1.85376	2.13995
	Ref^(a)	1.24406	1.37341	1.54622	1.59758	1.85403	2.14020
	TSDT^(b)	1.24363	1.37316	1.54595	1.59736	1.85376	2.13995
	SSDT^(b)	1.24475	1.37422	1.56721	1.59728	1.57287	2.19087
	HDT^(c)	1.24287	1.37249	1.54556	1.59687	1.85343	2.13982
	HSDT^(d)	1.24090	1.36547	1.53468	1.58421	1.83573	2.10897
	Quasi-3D^(d)	1.23599	1.36044	1.53036	1.57893	1.73083	2.10275

^(a) Nguyen et al. (2014)

^(b) Zenkour (2005b);

^(c) El Meiche *et al.* (2011);

^(d) Neves *et al.* (2012c)

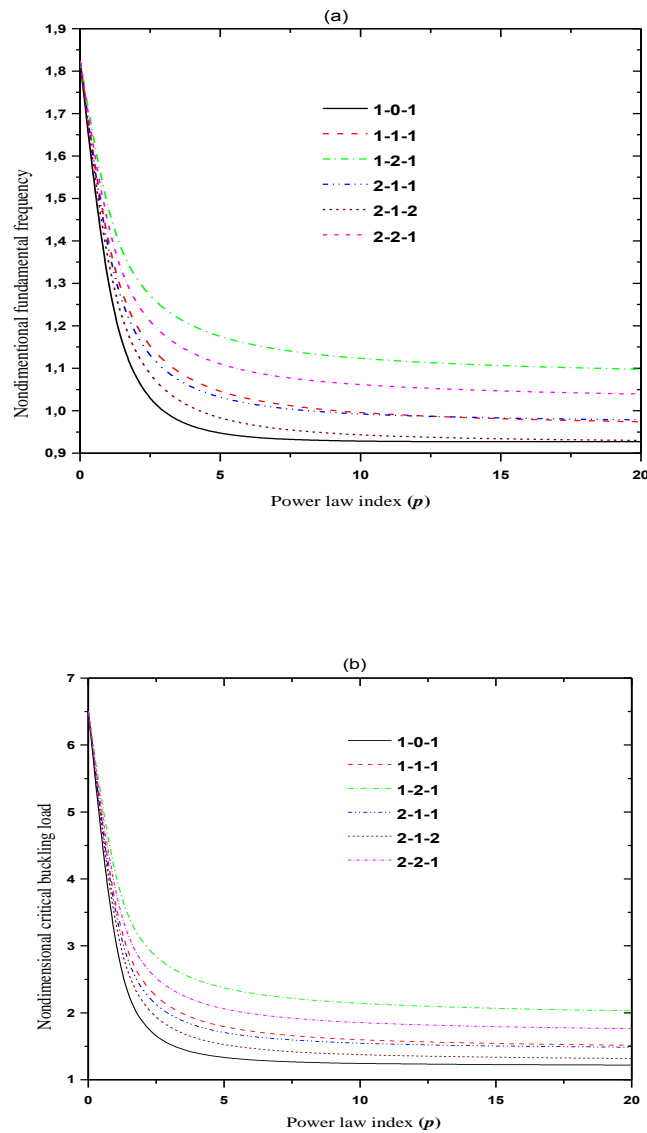


Figure V.3—Effet de l'indice de puissance p sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) et Charge critique de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques sandwich carrées Al / Al₂O₃ ($a/h=10$, type C).

V.3 Conclusion

Une nouvelle théorie HSDT a été développée pour les comportements de flexion, de flambage et dynamiques des plaques sandwiches isotropes et FG. En envisageant de simplifier davantage les suppositions sur les HSDT classiques, en utilisant un terme intégral indéterminé, le nombre de variables et les équations de mouvement du HSDT proposé sont réduits de un et rendent donc ce modèle simple et efficace à utiliser.

Trois types différents de plaques FG sont examinés: plaques FGM (type A), deux types de plaques sandwich, à savoir, les plaques sandwiches en FGM (Type C) dont les couches (supérieure et inférieure) en FGM et la couche centrale en matériau homogène (céramique dans notre cas), et les plaques sandwiches en FGM (Type B) dont les couches (supérieure et inférieure) en matériau homogène et la couche centrale en FGM.

Des solutions analytiques sont déterminées pour des plaques sandwich simplement appuyées afin d'étudier les déplacements transversaux, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles pour différents valeurs d'indice de puissance et pour des différents rapports d'épaisseur des couches peau-noyau-peau.

Un bon accord entre les résultats calculés et ceux fournis par les modèles de déformation par cisaillement existants est observé dans la présente étude qui démontre la précision du modèle actuel dans la prédiction des réponses statiques, de flambement et dynamiques des plaques sandwiches fonctionnellement graduées FG.

Conclusion générale

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des structures sandwiches sous la forme de plaques et poutres s'est considérablement développé jusqu'à nos jours que ce soit dans l'industrie automobile, génie civil, transport routier, ferroviaire et plus récemment en aéronautique. Les structures sandwiches présentent des avantages de réduction des coûts, de légèreté, de résistance mécanique et à la corrosion et permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application souhaitée.

Dans la présente étude, l'analyse à la flexion, à la vibration libre et au flambement des plaques sandwich FGM a été développé en supposant que les déplacements de cisaillement transverse varient comme une fonction parabolique à travers l'épaisseur de la plaque. Les équations de mouvement et les conditions aux limites associées sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Afin de prouver l'exactitude de la théorie actuelle, les résultats de la théorie actuelle ont été comparés aux résultats publiés d'autres théories de la déformation par cisaillement.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (thermique, hygrothermique) et en tenant compte l'effet de la température sur le flambement des plaques sandwichs ainsi que les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives.

En fin, on peut dire que cette contribution s'inscrit dans le cadre des recherches de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements mécaniques, du flambement et de la vibration libre.

Références bibliographiques

- Abdelaziz HH**, Atmane HA, Boumia L, Tounsi A, Abbas ABE. (2011), "Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory". *Chinese J Aeronaut*; **24**(4):434–448.
- Abdelbari, S.**, Fekrar, A., Heireche, H., Saidi, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2016), "An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler–Pasternak elastic foundations", *Wind and Structures*, **22**(3), 329–348.
- Abdelhak, Z.**, Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E.A. (2016), "Thermal buckling response of functionally graded sandwich plates with clamped boundary conditions", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, **18**(2), 267–291.
- Adda Hadj, M.**, Merdaci, S., Mahmoudi, N., "An Overview of Functionally Graded Materials «FGM»" Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development, boumerdes 2017
- Afaq. K.S**, (2003). Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III – Paul Sabatier.
- Ahouel, M.**, Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2016) "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", *Steel and Composite Structures*, **20**(5), 963–981.
- Ait Amar Meziane, M.**, Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16**(3), 293–318.
- Ait Atmane, H.**, Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel and Composite Structures*, **19**(2), 369–384.
- Ait Atmane, H.**, Tounsi, A., Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int J Mech Mater Des*, **13**(1), 71–84.
- Ait Yahia, S.**, Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015). "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various

higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53**(6), 1143 – 1165 .

Ambartsumyan. S.A., (1969). Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 187–212.

Aydogdu.Metin , (2005) Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 1740–1755

Baferani, AH, Saidi, AR, Jomehzadeh, E. (2011), “An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates”, *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*, **225**, 526–536.

Bakora, A., Tounsi, A. (2015) “Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, **56**(1), 85–106.

Barati, M.R., Shahverdi, H. (2016), "A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions", *Structural Engineering and Mechanics*, **60**(4), 707–727.

Barka, M., Benrahou, K.H., Bakora, A., Tounsi, A. (2016), "Thermal post-buckling behavior of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on Pasternak elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, **22**(1), 91–112.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A., & Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Structures and Systems*, **18**(4), 755–786.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel and Composite Structures*, **18**(4), 1063–1081.

- Bellifa, H.**, Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **38**, 265 – 275.
- Bellifa, H.**, Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017a), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Structural Engineering and Mechanics*, **62**(6), 695 – 702.
- Bellifa, H.**, Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017b), “An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures*, **25**(3), 257-270.
- Benachour, A.**, Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites Part B*, **42**, 1386-1394.
- Benahmed, A.**, Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., Tounsi, A. (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, **12**(1), 9-34.
- Benbakhti, A.**, Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N., Tounsi, A. (2016), "A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermomechanical bending analysis of FGM sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **22**(5), 975 – 999.
- Benchohra, M.**, Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2017), “A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Struct. Eng. Mech.*, (Accepted).
- Benferhat, R.**, Hassaine Daouadji, T., Hadji, L., Said Mansour, M. (2016), “Static analysis of the FGM plate with porosities”, *Steel and Composite Structures*, **21**(1), 123 – 136.
- Bennai, R.**, Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel and Composite Structures*, **19**(3), 521 – 546.
- Bennoun, M.**, Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23**(4), 423 – 431.

- Bessaim, A.**, Houari, MS, Tounsi, A, Mahmoud,S, Adda Bedia, EA. (2013), “sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *J Sandwich Struct Mater*, **15**, 671–703.
- Besseghier, A.**, Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 19(6), 601 – 614.
- Birman V.**, Byrd L.W., 2007, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, Applied Mechanics Reviews, 60, 195–216.
- Boch.P Chartier** . Huttepain. M Tapa casting of AL2O3/ZrO2 Laminated composites , 1986.
- Bouafia, K.**, Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A., Tounsi, A. (2017), “A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams”, *Smart Structures and Systems*, **19**(2), 115–126.
- Bouderba, B.**, Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, **58**(3), 397–422.
- Bouderba, B.**, Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013) “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14**(1), 85 – 104.
- Boukhari, A.**, Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837–859.
- Bounouara, F.**, Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016) “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, 20(2), 227–249.
- Bourada, M.**, Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. -2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409 – 423
- Bourada, F.**, Amara, K., Tounsi, A. (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory", *Steel and Composite Structures*, 21(6), 1287–1306.
- Bousahla, A.A.**, Benyoucef, S., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2016), “On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion”, *Structural Engineering and Mechanics*, **60**(2), 313–335.

- Bousahla, A.A.**, Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, **11**(6), 1350082.
- Brischetto, S.** (2009), "Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores", *J Mech Mater Struct*, **4**, 13–33.
- Chikh, A.**, Bakora, A., Heireche, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2016), " Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **57**(4), 617–639.
- Chikh, A.**, Tounsi, A., Hebali, H., Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Structures Systems*, **19**(3), 289–297.
- Carrera, E**, Brischetto, S, Robaldo, A. (2008), "Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates", *AIAA J*, **46**(1), 194–203.
- Carrera, E**, Brischetto, S, Cinefra, M, Soave, M. (2011), "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Compos Part B: Eng*, **42**(2) 123–133.
- Chen, CS**, Chen, TJ, Chien, RD. (2006), "Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates", *Thin-Wall Struct*, **44**(8), 844–851.
- Chen, C**, Hsu, C, Tzou, G. (2009), "Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory", *J Reinf Plast Compos*, **28**, 1215–1234.
- Croce, LD**, Venini, P. (2004), "Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates", *Comput Methods Appl Mech Eng*, **193**, 705–725.
- Daniel.M.Isaac** (2009) and Emmanuel E. Gdoutos; Failure Modes of Composite Sandwich Beams; Springer .
- Dau.F** , O. Polit, and M. Touratier. (2006) C1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures. Computers and Structures, 84:1264–1274.
- Draiche, K.**, Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", *Geomechanics and Engineering*, **11**(5), 671–690.

Van Anh DUONG (2008) Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées .

Efrain, E., Eisenberger, M. (2007), "Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates", *J Sound Vib*, **299**, 720–738.

El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates", *Struct. Eng. Mech.*, **63**(5), 585–595.

El-Hassar, S.M., Benyoucef, S., Heireche, H., Tounsi, A. (2016), "Thermal stability analysis of solar functionally graded plates on elastic foundation using an efficient hyperbolic shear deformation theory", *Geomechanics and Engineering*, **10**(3), 357–386.

El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Adda Bedia, EA. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Int J Mech Sci*, **53**(4), 237–247.

Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., AddaBedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2017), "A four variable refined n th-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomechanics and Engineering*, **13**(3), 385–410.

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", *Meccanica*, **49**, 795 – 810.

Feldman, E., Aboudi, J. (1997), "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", *Compos Struct*, **38**, 29–36.

HADJI Lazreg, contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM, thèse de doctorat en sciences, 2012–2013, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes.

Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y. and Adda Bedia, E.A. (2016), "Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(2), 315–325.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 235 – 253.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static

and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Engineering Mechanics*, **140**, 374 – 383.

Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A., Kaci, A. (2016), "A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates", *Steel and Composite Structures*, **22**(3), 473–495.

C.Hexcel, «HexWeb™ honeycomb sandwich design technology.», 2004. [En ligne]. Available: <http://www.hexcel.com/composite.com>.

Hilderband, F.B., Reissner, E., Thomas, G.G. (1949), “Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N° 1833.

Hirwani, C.K., Mahapatra, T.R., Panda, S.K., Sahoo, S.S., Singh, V.K., Patle, B.K. (2017), “Nonlinear free vibration analysis of laminated carbon/epoxy curved panels”, *Defence Science Journal*, **67**(2), 207–218.

Hirwani, C.K., Panda, S.K. (2016), “Nonlinear transient finite–element analysis of delaminated composite shallow shell panels”, *AIAA Journal*, **55**(5), 1734–1748.

Hirwani, C.K., Panda, S.K., Mahapatra, S.S., Mandal, S.K., Srivastava, L., Buragohain, M.K. (2016), “Flexural strength of delaminated composite plate – An experimental validation”, *International Journal of Damage Mechanics*, (In press).

Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2016), "A new simple three–unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel and Composite Structures*, **22**(2), 257 –276.

Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2011), “Two–variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Therm. Stress.*, **34**(4), 315–334.

Hosseini–Hashemi, S., Fadaee, M, Atashipour, SR. (2011), “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”, *Int J Mech Sci*, **53**, 11–22.

Jha, DK., Kant, T, Singh, RK. (2013), “Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects”, *Compos Struct*, **96**, 799–823.

Javaheri, R., Eslami M. (2002), “Buckling of functionally graded plates under in–plane compressive loading”, *J Appl Math Mech*, **82**, 277–283.

- Kant, T. K. Swaminathan,** (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329–344.
- Kar, V.R.,** Panda, S.K. (2015a), "Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(11), 2006–2024.
- Kar, V.R.,** Panda, S.K. (2015b), "Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method", *Composite Structures*, 129, 202–212.
- Kar, V.R.,** Panda, S.K. (2015c), "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel and Composite Structures*, 18(3), 693–709.
- Kar, V.R.,** Panda, S.K. (2015d), "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Structural Engineering Mechanics*, 53(4), 661–679.
- Kar, V.R.,** Panda, S.K. (2016), "Nonlinear free vibration of functionally graded doubly curved shear deformable panels using finite element method", *Journal of Vibration and Control*, 22(7), 1935–1949.
- Kar, V.R.,** Panda, S.K., Mahapatra, T.R. (2016), "Thermal buckling behaviour of shear deformable functionally graded single/doubly curved shell panel with TD and TID properties", *Advances in Materials Research*, 5(4), 205–221.
- Kar, V.R.,** Mahapatra, T.R., Panda, S.K. (2017), "Effect of different temperature load on thermal postbuckling behaviour of functionally graded shallow curved shell panels", *Composite Structures*, 160, 1236–1247.
- Khalfi, Y.,** Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Computational Methods*, 11(5), 135007.
- Khetir, H.,** Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng. Mech.*, (In press).
- Klouche, F.,** Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates", *Struct. Eng. Mech.*, 63(4), 439–446.
- Koizumi, M.** (1993), "The concept of FGM Ceramic transactions", *Funct Grad Mater*, 34, 3–10.

Koizumi, M., FGM activities in Japan, *Composites*, 28(1-2):1-2.1997

Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect" *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 425 – 442.

Laoufi, I., Ameer, M., Zidi, M., Adda Bedia, E.A., Bousahla, A.A. (2016), "Mechanical and hygrothermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, **20**(4), 889-911.

Lo, K.H & R.M.Christensen, (1977). A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate's *journal of applied mechanics*, Vol.44, N° 4, pages 663-668/669-676.

Li, Q, Iu, VP, Kou, KP. (2008), "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *J Sound Vib*, **311**, 498-515.

Mahapatra, T.R., Kar, V.R., Panda, S.K., Mehar, K. (2017), "Nonlinear thermoelastic deflection of temperature-dependent FGM curved shallow shell under nonlinear thermal loading", *Journal of Thermal Stresses*, **40**(9), 1184-1199.

Mahdavian, M. (2009), "Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading", *J Solid Mech*, **1**, 213-225.

Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489-2508.

Mantari, JL, Oktem, AS, Soares, OG. (2012), "Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory", *Compos Struct*, **94**, 714-723.

Mantari, JL, Soares, CG. (2012), "Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates", *Compos Struct*, **94**(8), 2561-2575.

Mantari, J.L., Granados, E.V. (2015), "Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT", *Composites Part B*, **75**, 148 – 155.

Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, **82**, 499-512.

- Meksi, A.**, Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", *Structural Engineering and Mechanics*, **53**(6), 1215–1240.
- Meksi, R.**, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2017), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, (In press).
- Menasria, A.**, Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **25**(2), 157–175.
- Meradjah, M.**, Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, **18**(3), 793–809.
- Merdaci, S.**, Tounsi, A., Bakora, A. (2016), "A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates", *Steel Compos. Struct.*, **22**(4), 713–732.
- Mohammadi, M.**, Saidi, A., Jomehzadeh, E. (2010), "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Appl Compos Mater*, **17**, 81–93.
- M. Talha** , Ankit Gupta (2015) "Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures" , *Progress in Aerospace Sciences* 79, 1–14
- Mouaici, F.**, Benyoucef, S., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind and Structures*, **22**(4), 429–454.
- Mouffoki, A.**, Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Structures Systems*, **20**(3), 369–383.
- Miyamoto, Y.**, Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G. ebook 1999 "Functionally Graded Materials Design, Processing and Applications"
- Murthy. M.V.V**, (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA.
- Naghdi.P.M**, (1957) "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math*, 14: 369–380

- Natarajan, S**, Manickam, G. (2012), “Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory”, *Finite Elem Anal Des*, **57**, 32–42.
- Narottam P.** Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi, Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions ;John Wiley & Sons;page 110, 4 août 2011 .
- Nelson. R.B & D.R.Lorch**, (1974). A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177–183
- Nguyen.T.K.**, Quelques méthodes pour l’estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, Thèse de doctorat, Université Paris-Est ,2008.
- Nguyen, V.H.**, Nguyen, T.K., Thai H-T, Vo, T.P. (2014), “A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates”, *Composites: Part B*, **66**, 233–246.
- Neves, AMA**, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, Soares, CMM. (2012a) "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Struct*, **94**, 1814–1825.
- Neves, AMA**, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, Soares, CMM. (2012b), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Part B: Eng*, **43**, 711–725.
- Neves, A**, Ferreira, A, Carrera, E, Cinefra, M, Jorge, R, Soares, C. (2012c), "Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions", *J Appl Math Mech*, **92**, 749–766.
- Neves, AMA**, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, Soares, CMM. (2013), “Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique”, *Compos Part B: Eng*, **44**, 657–674.
- Polit.M** and M. Touratier. A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44, 1997.
- Praveen,GN**, Reddy, JN. (1998), “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates”, *Int J Solids Struct*, **35**, 4457–4476.

- Reddy. J.N,** (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745–752.
- Reddy. JN,** (1997). *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton.
- Reddy, JN.** (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int J Numer Methods Eng*, **47**, 663–684.
- Reddy JN.,** *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, Boca Raton: CRC Press, 2007.
- Reddy, JN.** (2011), “A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates”, *Int J Aersp Lightweight Struct*, **1**, 1–21.
- Reissner.E,** (1945). The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl.Mech.*, vol. 12, pages 69/77
- Reissner. E,** (1975). On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495–502.
- Sobhy, M.** (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos Struct*, **99**, 76–87.
- Suresh, S, and A Mortensen.** *Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*. London: IOM Communications Ltd, 1998.
- TAFLA.A,(2007)** .Éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches. Thèse de doctorat de l’Université de Reims Champagne-Ardenne.
- Taibi, F.Z.,** Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **17**(2), 99–129.
- Talha, M,** Singh, BN. (2010), “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, *Appl Math Model*, **34**, 3991–4011.
- Thai, H-T,** Kim, SE. (2013), “A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos Struct*, **96**, 165–173.

Thai, H-T, Choi, DH. (2012), “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Appl Math Model*, **36**, 1008–1022.

Timoshenko, S. P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959. Theory of plates and Shells. McGraw-Hill, New York. Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.

Touratier.M 1991, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901–916.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.

Uymaz, B, Aydogdu, M. (2007), “Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions”, *J Reinf Plast Compos*, **26**(18), 1847–1863.

Whitney. J.M, (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302–304.

Wu, C-P, Chiu, K-H. (2011), “RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates”, *Compos Struct*, **93**(5), 1433–1448.

Yoshihisa Uchida. Properties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B, Vol. 39-B, 2004.

Zenkour, AM. (2005a), “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1 – Deflection and stresses”, *Int J Solids Struct*, **42**, 5224–542.

Zenkour, AM. (2005b), “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration”, *Int J Solids Struct*, **42**, 5243–5258.

Zenkour, AM. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials”, *Appl Math Model*, **30**, 67–84.

Zenkour, AM. (2013), “Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory”, *J Sandwich Struct Mater*, **15**, 629–656.

Zhao, X, Lee, YY, Liew, KM. (2009a), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Compos Struct*, **90**, 161–171.

Zhao, X, Lee, YY, Liew, KM. (2009b), “Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”, *J Sound Vib*, **319**, 918–939.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014). “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34 .

Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017), “A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **64**(2), 145–153.