UNIVERSITÉ DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT ES SCIENCES

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option :ANALYSE FONCTIONNELLE

présenté par

Bendaoud Abed Sid Ahmed

LES ESPACES DE LEBESGUE ET SOBOLEV
ET
LEURS GÉNÉRALISATIONS

MEMBRES DU JURY :

Pr.	Hakem Ali	(Uni.de Bel Abbes)	Président,
M.C.A.	Lazreg Jamal Eddine	(Univ.de Bel Abbes)	Examinateur,
Pr.	Belaidi Benharrat	(Univ.de Mostaganem)	Examinateur,
M.C.A.	Souid Mohamed Said	(Univ.de Tiaret)	Examinateur,
Pr.	Senouci Abdelkader	(Univ.de Tiaret)	Encadreur,
Pr.	Ouahab Abdelghani	(Univ.de Bel Abbes)	Co-encadreur.

Date de soutenance le 21/02/2019

REMERCIEMENTS

Louange à Notre Seigneur ALLAH le Haut tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour élaborer ce travail. C'est à lui que j'exprime ma gratitude et ma reconnaissance.

Je remercie Pr : **Senouci Abdelkader** Professeur à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, qui a dirigé ce travail, je lui suis très reconnaissant pour sa grande disponibilité, pour son soutien amical et professionnel et son aide permanente au cours de ses années tout en me faisant profiter de son intuition et la qualité des relations que j'ai eu avec lui.

Je remercie Pr : **Ouahab Abdelghani** Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès de nous avoir supporté malgré sa surcharge pédagogique et scientifique.

Je remercie Pr : **Hakem Ali** Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, pour l'immense honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Pr. **Belaidi Benharrat** Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem. C'est un grand honneur pour qu'il ait acceptée d'être membre du jury de cette thèse.

Je remercie M.C.A. **Lazreg Jamal Eddine** Maitre de conférence "A" à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

Je remercie M.C.A. **Souid Mohamed Said** Maitre de conférence "A" à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de lire cette thèse et en acceptant de se déplacer pour participer au jury de celle-ci.

Je voudrai aussi présenter ma gratitude à tous les professeurs qui ont attribué de près ou de loin à ma formation. Je remercie aussi mes collègues Messieurs Halim Benali et Maazouz Kada pour leurs soutiens.

DÉDICACE

Je dédie cette thèse à ma mère, mon père, mon épouse, mes frères et soeurs et leurs enfants ... à toute la famille et amis proches et lointains.

Les espaces de Lebesgue et Sobolev et leurs généralisations

BENDAOUD Abed Sid Ahmed

2018

Table des matières

Introduction

Les espaces $L^{p(x)}$ apparaissent pour la première fois en 1931 dans un article de W. Orlicz (voir [42]). La première recherche systématique a été effectuée en 1950 par H. Nakano (voir [41]) puis un peu plus tard poursuivie par I. Musielak (voir [40]). La théorie des espaces de fonctions (dans $\mathbb{R}$) avec un exposant variable est développée par I. Tsenov ([63]), I. I. Sharapudinov ([56]), et V. V. Zhikov ([66] et [67]).

Dans les années quatre-vingt ces espaces ont été étudiés pour être appliqués aux problèmes de la mécanique (voir par exemple [66]). Quelques propriétés de ces espaces sont établies par O. Kovacik, et J. Rakosnik, (voir [31]). Les normes dans $L^{p(x)}$ sont considérées d'une manière plus détaillée par D. E. Edmunds, et J. Lang, et A. Nekvinda (voir [19]).

A partir des années quatre vingt-dix ces espaces sont intensivement étudiés à cause de la publication de M. Růžička (voir [45]) qui constitue un cadre naturel pour le modèle mathématique de certains fluides electrorhoéologiques qui est lié à un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles à coefficients variables. Beaucoup de mathématiciens ont été intéressés par cette partie de l'analyse fonctionnelle et par conséquent un nombre assez important de résultats intéressants a été obtenu. L'une des plus importantes différences qui existent entre l'espace L^p classique et $L^{p(x)}$ est que ce dernier n'est pas invariant par rapport à la translation. Ce problème cause beaucoup de difficultés dans certaines questions, par exemple l'inégalité de Young dans les convolutions, la densité des fonctions de classe C^∞ dans l'espace de Sobolev. Il y'a aussi le problème de la bornétude de l'opérateur de Hardy-Littlewood.

La thèse comprend cinq chapitres.
Dans le premier chapitre on rappelle certaines définitions et propriétés liées aux espaces classiques de Lebesgue. On considère les inégalités de Hölder, Minkowsky, les notions de complétude, réflexivité, séparabilité, continuité par rapport à la translation, l'injection, la densité dans ces espaces. A la fin du chapitre on donne un bref aperçu sur l'opérateur de Hardy-Littlewood et le produit de convolution.
Au deuxième chapitre, on aborde l'inégalité intégrale classique de Hardy pondérée sur la demi-droite et sur $\mathbb{R}^n$ où le paramètre de sommabilité est $p \geq 1$. La partie suivante concerne les inégalités quand $0 < p < 1$. A la fin du chapitre on expose un travail soumis pour publication intitulé "Some generalizations of integral inequalities similar to Hardy's inequality" (voir [54]).

Dans le troisième chapitre sont données les définitions relatives à l'espace $L^{p(x)}$ qui est connu sous le nom de l'espace de Lebesgue généralisé, c'est à dire un espace de Lebesgue où le paramètre de sommabilité p est variable. Comme dans le cas classique on étudie les différentes propriétés (inégalités intégrales, complétude, et autres) en notant les ressemblances et les différences avec celles de l'espace classique de Lebesgue. On déduit que dans les espaces $L^{p(x)}$ n'est pas vérifiée la propriété de "l'invariance de la translation" et la formule de Young concernant la convolution, aussi il y'a le problème de la bornétude de l'opérateur de Hardy-Littlewood, d'où l'intérêt croissant des mathématiciens pour palier à ces inconvénients (voir [31], [50], [14],...etc).
Le chapitre quatre comprend un travail déjà publié sous le titre "Inequalities for weighted Hardy operators in weighted variable exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$". Ici sont généralisés quelque résultats (sous formes de publications) relatifs aux espaces classiques de Lebesgue, au cas $L^{p(x)}$.
Au dernier chapitre, à part les espaces classiques de Sobolev, on définit ceux de Sobolev généralisés. La démarche est similaire à celle du chapitre 3 où on note les ressemblances et les différences et ce dans le cadre des notions d'injection et de densité. Les résultats connus dans les espaces classiques ne sont pas toujours valables au cas où p est une fonction. Dans ce contexte plusieurs auteurs ont entamé des recherches sur l'injection de $W^{k,p(x)(\Omega)}$ (espace de Sobolev généralisé) dans $L^{q(x)(\Omega)}$, la densité des espaces $C^{\infty}(\Omega)$ et $C_0^{\infty}(\Omega)$ dans $W^{k,p(x)}(\Omega)$ en cherchant sous quelles conditions supplémentaires ceci est valable (voir [22], [27], [49],...).

A la fin du manuscrit on trouve une conclusion et une bibliographie assez détaillée.

Chapitre 1

Espaces classiques de Lebesgue.

1.1 Définitions et inégalités intégrales.

1.1.1 Définitions

Notations :.
1) On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle.
1)' On note par p.p pour dire presque partout.
2) $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.
3) On définit le support d'une fonction continue f par

$$supp f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \neq 0\}}.$$

4) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est noté par $C(\mathbb{R}^n)$.
5) On dit que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, et à support compact.

Lemme 1.1.1. ***(Lemme de Fatou)*** *Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k non-négatives et mesurables sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et presque partout sur Ω existe la limite finie ou infinie $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Alors $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ est mesurable et de plus :*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx, \tag{1.1}$$

[1]

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k(x)dx. \tag{1.2}$$

[1] $\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)$ désigne la limite inférieure de la suite f_k.

Démonstration. Voir [37], [9]. $\square$

Remarque 1.1.2. *Si* $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = +\infty$ *sur* Ω, $|\Omega| > 0$, *on pose* $\int_\Omega f(x)dx = +\infty$.

Théorème 1.1.3. *(**Convergence monotone**) Soient* $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k *des fonctions non-négatives et mesurables sur un ensemble* Ω *mesurable,* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, *de plus* $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ *p.p. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx. \tag{1.3}$$

Démonstration. Voir [37], [9]. $\square$

Théorème 1.1.4. *(**Convergence dominée**) Soient* $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k *des fonctions mesurables sur un ensemble* Ω *mesurable,* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *et p.p. existe sur* Ω *la limite finie* $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$. *S'il existe une fonction* $G(x)$ *intégrable et non-négative, telle que p.p. sur* Ω

$$\big|f_k(x)\big| \le G(x), \tag{1.4}$$

alors $\forall k \in \mathbb{N}$ *les fonctions* f_k *et la fonction* $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, *sont intégrable sur* Ω *et*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega f(x)dx. \tag{1.5}$$

Démonstration. Voir [37], [9]. $\square$

Remarque 1.1.5. *La plus petite possible fonction* g *dans (1.4) est la fonction* G *définie comme suit :*

$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|, \qquad \forall x \in E.$$

Théorème 1.1.6. *(**Théorème de Fubuni**)*
Soit E *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ *et* $F \subset \mathbb{R}^m$ *(un ensemble mesurable) et la fonction* $f(x,y)$ *intégrable sur* $E \times F$. *Alors pour presque tous les* $x \in E$ $f(x,y)$ *est intégrable sur* F, *pour presque tous les* $y \in F$ $f(x,y)$ *est intégrable sur* E *et :*

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \Big(\int_F f(x,y)dy \Big) dx = \int_F \Big(\int_E f(x,y)dx \Big) dy. \tag{1.6}$$

Démonstration. Voir [37], [9]. □

Conséquence 1.1.7. *Si $f(x,y)$ est mesurable sur $E \times F$ et est finie l'une des intégrales :*

$$\int_E \Big(\int_F |f(x,y)| dy \Big) dx \ , \quad \int_F \Big(\int_E |f(x,y)| dx \Big) dy \ ,$$

alors toutes les intégrales de (1.6) existent et de plus cette dernière est vérifiée.

Remarque 1.1.8. *Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.*

Exemple 1.1.9. $n = m = 1$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \Big) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \Big) dy = -\frac{\pi}{4}$$

Théorème 1.1.10. *(**Théorème de Luzin**) Pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur un segment $[a,b]$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $\varphi(x)$ continue sur $[a,b]$ telle que*

$$\Big| \{x, \ f(x) \neq \varphi(x)\} \Big| < \epsilon. \tag{1.7}$$

Démonstration. Voir [30] Ch. V théorème 9. □

Dans ce qui suit on définit l'espace de Lebesgue (espace de fonctions).

Définition 1.1.11. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si :*

(1) f est mesurable sur Ω.

(2) $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int |f|^p dx \Big)^{1/p} < \infty$.

Exemple 1.1.12. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_1 \\ -1 & \text{si } x \in E/E_1, \end{cases}$$

avec $E_1 \subset E$, E_1 non mesurable, alors

(1) n'est pas vérifieé.

(2) $\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E dx\right)^{1/p} = |E|^{\frac{1}{p}} < \infty$, *donc* $f \notin L^p(E)$.

Définition 1.1.13. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \inf_{e\subset\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x); \tag{1.8}$$

$$\inf_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup_{e\subset\Omega} \inf_{x\in\Omega/e} f(x). \tag{1.9}$$

Définition 1.1.14. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, mesurable et soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $|\Omega| > 0$. *On dit que* $f \in L^\infty(\Omega)$ *si* f *est mesurable et*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} vrai |f(x)| < \infty. \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.15. *On pose* $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ *pour* $|\Omega| = 0$.

Théorème 1.1.16. ***(Théorème de Riesz)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, un ensemble mesurable et* f *une fonction mesurable sur* Ω*, alors :*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{1.11}$$

Démonstration. . Voir [1], et [10]. □

1.1.2 Inégalités de Hölder.

Lemme 1.1.17. *Soit* $p \geq 1$*, alors*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.12}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.1.18. *Pour* $0 < p < 1$*, on a*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.13}$$

Corollaire 1.1.19. *Soit $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors*

$$\forall A, B \geq 0, \quad \big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{1.14}$$

Démonstration. Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.12) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$\big(AB\big)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q.$$

□

Lemme 1.1.20. *Soit Ω un ensemble mesurable, si les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont mesurables sur Ω, et g est non négative, alors :*

$$\inf_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int f(x)g(x)dx \leq \sup_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx. \tag{1.15}$$

Démonstration. Soit $e \subset \Omega$ tel que $|e| = 0$, alors

$$\int_\Omega fgdx = \int_{\Omega\backslash e} fgdx \leq \sup_{\Omega\backslash e} f(x) \int_\Omega gdx,$$

alors

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega/e} f(x) \int_\Omega g(x)dx,$$

d'où

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \inf_{x\in e} \sup_{x\in\Omega\backslash e} f(x) \int_\Omega gdx = \sup_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega gdx$$

D'une manière analogue on prouve l'inégalité gauche de (1.15). □

Corollaire 1.1.21. *Soit Ω un ensemble mesurable, si les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont mesurables sur Ω et $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$, alors :*

$$\Big| \int_\Omega f(x)g(x)dx \Big| \leq \big\|f\big\|_{L^\infty(\Omega)} \big\|g\big\|_{L^1(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Démonstration.

$$\Big|\int_\Omega fg dx\Big| \le \int_\Omega |fg|dx \le \sup_{x\in\Omega} vrai|f(x)| \int |g|dx$$
$$\le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

□

Théorème 1.1.22. ***(Inégalité de Hölder)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p \le \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$, alors :

(i) Si $1 \le p \le \infty$

$$\int_\Omega |fg|dx \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \tag{1.17}$$

(ii) Si $0 < p < 1$, $\forall x \in \Omega,\ g(x) \ne 0$

$$\int_\Omega |fg|dx \ge \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Pour la preuve de (1.17) et (1.18) on utilise l'inégalité de Young (1.12) et (1.13).

Corollaire 1.1.23. *Soit $p > 0$, $p_1 \le \infty$, $-\infty \le p_2 \le \infty$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, alors*

(i) Si $p \le p_1$

$$\|fg\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|g\|_{L^{p_2}(\Omega)}, \tag{1.19}$$

(ii) Si $p > p_1$, $\forall x \in \Omega,\ g(x) \ne 0$

$$\|fg\|_{L^p(\Omega)} \ge \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|g\|_{L^{p_2}(\Omega)}. \tag{1.20}$$

Pour la preuve de (1.19) et (1.20) on applique respectivement (1.17) et (1.18) avec $\frac{1}{p_1/p} + \frac{1}{p_2/p} = 1$.

Proposition 1.1.24. *Soit* $p_i \in]1, \infty[$, $i = 1, 2, ..., k$, *et* $1 < r < \infty$ *tel que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ *(les* p_i *sont dits* r *conjugués),* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, *alors*

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L^r(\Omega) \ et \ \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)} \tag{1.21}$$

Démonstration. Par récurrence. □

Corollaire 1.1.25. *Soit* $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, *alors*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\Omega)} \tag{1.22}$$

où $\alpha \in (0.1)$, *et tel que* $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Démonstration. La preuve est analogue à (1.19). □

Corollaire 1.1.26. *Soit* $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, *alors* $\forall \epsilon > 0$ *on a*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \alpha^{\alpha}\Big(1-\alpha\Big)^{1-\alpha}\Big(\epsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} + \epsilon^{-\alpha}\|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}\Big). \tag{1.23}$$

où $\alpha \in (0.1)$, *et tel que* $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Démonstration. .
l'inégalité (1.23) d'écoule de l'inégalité (1.22) si on prend en considération

$$\|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\Omega)}.\|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\Omega)} = \Big(\epsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\Big)^{\alpha}\Big(\epsilon^{-\alpha}\|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}\Big)^{1-\alpha}$$

et en utilisant aussi l'inégalité (1.12). □

1.1.3 Inégalités de Minkowsky.

Lemme 1.1.27. *Soit* $f, g \in L^{\infty}(\Omega)$, *alors on a l'inégalité suivante :*

$$\|f_1 + f_2\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|f_2\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Démonstration. .
Soit e_1 et e_2 deux ensembles tels que $|e_1| = |e_2| = 0$, on pose $e = e_1 \cup e_2$, alors $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\sup_{\Omega/e_i} |f_i| \leq \|f_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| &\leq \sup_{\Omega/e}(|f_1| + |f_2|) \leq \sup_{\Omega/e} |f_1| + \sup_{\Omega/e} |f_2| \\
&\leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon \\
\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| &\leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon,
\end{aligned}$$

on fait tendre ϵ vers 0, d'où :

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\|f_1 + f_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

□

Théorème 1.1.28. ***(Inégalité de Minkowsky)*** *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, alors :*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.24}$$

Démonstration. Voir [10]. □

Corollaire 1.1.29. *Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L^p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} f_k\Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \Big\|f_k\Big\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.25}$$

Démonstration. Par récurrence. □

Corollaire 1.1.30. ***(Inégalité de Minkowsky pour les sommes infinies)*** *Soit $f_k \in L^p(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big\|f_k\Big\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.26}$$

Démonstration. On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.
A l'aide du critère de Cauchy pour les séries numériques et l'inégalité de Minkowsky pour les sommes finies on montre que la somme $S_m = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L^p(\Omega)}$ est une suite de Cauchy et puisque L^p est complet, on déduit que

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)}$$

on passe à la limite quand $m \to \infty$ et en vertu de la continuité des semi-normes $\sum_{k=1}^{m} f_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, lorsque $m \to \infty$, on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big\| f_k \Big\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

Théorème 1.1.31. *Soit $0 < p < 1$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $f, g \in L^p(\Omega)$, alors*

$$\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} + \big\|g\big\|_{L^p(\Omega)}\Big) \tag{1.27}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité classique $\forall a, b > 0$,

$$\Big(a+b\Big)^p \leq c\Big(a^p + b^p\Big), \tag{1.28}$$

si $p \geq 1$, $c = 2^{p-1}$ et si $0 < p < 1$, alors $c = 1$. On applique cette inégalité avec $a = |f|$ et $b = |g|$, on obtient :

$$\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_\Omega |f|^p dx + \int_\Omega |g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

on applique l'inégalité (1.28), avec $c = \max(1, 2^{\frac{1}{p}-1}) = 2^{\frac{1}{p}-1}$, et donc

$$\begin{aligned}\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(\Big(\int_\Omega |f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} + \big\|g\big\|_{L^p(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.32. *Soit $a_i > 0,\ i = 1, ..., m,$ alors on a l'inégalité suivante :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} a_i\Big)^p \leq c\Big(\sum_{k=1}^{m} a_i^p\Big) \tag{1.29}$$

avec $c = max(1, m^{p-1})$.

Démonstration. Par récurrence à partir de l'inégalité (1.28). □

Corollaire 1.1.33. *Soit $0 < p < 1$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq m^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{m} \Big\| f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.30}$$

Démonstration. A partir du Corollaire 1.1.29 et du Lemme 1.1.32. □

Théorème 1.1.34. ***(Inégalité intégrale de Minkowsky)***[2]
Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et $1 \leq p \leq \infty$, f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors

$$\Big\| \int_F f(.,y)dy \Big\|_{L^p(E)} \leq \int_F \Big\| f(.,y) \Big\|_{L^p(E)} dy. \tag{1.31}$$

Démonstration. Voir [10]. p. 316-317. □

Théorème 1.1.35. *Soient $E \subset \mathbb{R}^m$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors pour $0 < q \leq p \leq \infty$ on a*

$$\Big\| \|f(x,y)\|_{L^q_y(F)} \Big\|_{L^p_x(E)} \leq \Big\| \|f(x,y)\|_{L^p_x(E)} \Big\|_{L^q_y(F)}. \tag{1.32}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\Big\| \|f(x,y)\|_{L^q_y(F)} \Big\|_{L^p_x(E)} &= \Big\| \Big(\int_F |f(x,y)|^q dy \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p_x(E)} \\ &= \Big\| \int_F |f(x,y)|^q dy \Big\|^{\frac{1}{q}}_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)}\end{aligned}$$

[2]Cette inégalité est interprétée de la manière suivante :
Si f est mesurable sur $E \times F$, pour presque tous les $y \in F$, $f(.,y) \in L^p$ et la fonction $\|f(.,y)\|_{L^p(E)}$ intégrable sur F, alors pour presque tous les $x \in E$, la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur F, la fonction $\int_F f(.,y)dy \in L^p(E)$ est l'inégalite (1.31) est verifiée.

$$
\begin{aligned}
&\leq \Big(\int_F \Big\| |f(x,y)|^q \Big\|_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} dy \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_F \Big\| f(x,y) \Big\|^q_{L_x^p(E)} dy \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big\| \big\| f(x,y) \big\|_{L_x^p(E)} \Big\|_{L_y^q(F)}.
\end{aligned}
$$

□

1.2 Propriétés des espaces de Lebesgue.

1.2.1 Dual de L^p.

Définition 1.2.1. *On dit que $l : E \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur E si :*

(1) $l(af + bg) = al(f) + bl(g)$ pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $f, g \in E$.
(2) $\big|l(f)\big| \leq c\big\|f\big\|_E$.

Proposition 1.2.2. *L'application $l : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad g \in L^q(\Omega), \tag{1.33}$$

est une fonctionnelle linéaire continue.
L'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $L^p(\Omega)$ est noté par $(L^p(\Omega))^*$.

Démonstration. .
1) La linéarité est évidente.
2) La continuité

$$\big|l(f)\big| = \Big| \int_\Omega f(x)g(x)dx \Big| \leq \int_\Omega \big|f(x)\big|\big|g(x)\big|dx,$$

par application de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$
\begin{aligned}
\big|l(f)\big| &\leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq c\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}
$$

avec $c = \big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Remarque 1.2.3. *L'espace dual $(L^p(\Omega))^*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ normé :*

$$\big\|l\big\| = \sup\{\big|l(f)\big| : \ \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\}. \tag{1.34}$$

1.2.2 Convergences dans L^p.

Définition 1.2.4. *On dit qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge en mesure vers une fonction $f(x)$ si pour tout $\sigma > 0$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\{x \ : \ \big|f_n(x) - f(x)\big| \geq \sigma\}\Big| = 0. \tag{1.35}$$

Théorème 1.2.5. *Si une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, elle converge vers la même fonction $f(x)$ en mesure.*

Démonstration. Voir [30] Chapitre V, §4 ; Théorème 7. □

Théorème 1.2.6. *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables convergeant en mesure vers $f(x)$. Alors, de cette suite on peut extraire une sous suite $\{f_{n_k}(x)\}$ convergeant vers $f(x)$ presque partout .*

Démonstration. Voir [30] Chapitre V, §4 ; Théorème 8. □

Définition 1.2.7. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$. On dit que (f_n) converge faiblement vers f si*

$$\lim_{n\to\infty} l\big(f_n\big) = l\big(f\big) \textit{ pour tout } l \in (L^p(\Omega))^*. \tag{1.36}$$

Théorème 1.2.8. *Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que $l(f) = 0$ pour toute $l \in (L^p(\Omega))^*$ alors $f = 0.$ p.p.*

Démonstration. . On distingue 3 cas :
a) $1 < p < \infty$, on pose

$$g(x) = \begin{cases} \big|f(x)\big|^{p-2}\overline{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $f \in L^p(\Omega)$, alors $g \in L^q(\Omega)$, en effet :

$$\big\|g\big\|_{L^q} = \Big(\int_\Omega \big|g(x)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \big\|f\big\|_{L^p}^{p-1} < \infty.$$

De plus on a

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)dx = \int_\Omega \left|f(x)\right|^p dx = \left\|f\right\|_{L^p}^p.$$

Donc, si $l\big(f\big) = 0$ on a $\left\|f\right\|_{L^p}^p = 0$ d'où $\left\|f\right\|_{L^p} = 0$ et par suite $f = 0$ p.p.
b) $p = 1$, posons

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{\left|f(x)\right|} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $g \in L^\infty(\Omega)$, et

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)dx = \int_\Omega \left|f(x)\right|dx = \left\|f\right\|_{L^1}.$$

Donc, si $l\big(f\big) = 0$ on a $\left\|f\right\|_{L^1} = 0$ et donc $f = 0$ p.p.
c) $p = \infty$, on pose

$$A = \{x,\ \left|f(x)\right| > 0\}\ si\ f \neq 0.$$

Donc $\left|A\right| > 0$, et soit $B \subset A$ mesurable telle que $0 < \left|B\right| < \infty$, on prend

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{\left|f(x)\right|} & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $g \in L^1(\Omega)$, et

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)dx = \int_\Omega \left|f(x)\right|dx = \left\|f\right\|_{L^\infty}.$$

Donc, si $l\big(f\big) = 0$ on a $\left\|f\right\|_{L^\infty} = 0$ et donc $f = 0$ p.p. □

Théorème 1.2.9. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$, alors :*

$$\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|f_n\right\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.37}$$

Démonstration. On distingue deux cas :
a) $1 \leq p < \infty$.
On pose

$$l\big(f\big) = \int_\Omega gfdx, \quad avec\ g(x) = \left|f(x)\right|^{p-2}\overline{f(x)}.$$

Alors d'après la preuve du théorème précédent on a $l(f) = \|f\|_{L^p}^p$ et par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f\|_{L^p}^p = l(f) = \lim_{n\to\infty} l(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g f_n dx \leq \|g\|_{L^q} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}.$$

Comme $\|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}^{p-1}$ on a

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}^{p-1} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p},$$

d'où

$$\|f\|_{L^p} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{L^p}.$$

b) $p = \infty$, on pose $a = \|f\|_{L^\infty}$ et

$$A_\epsilon = \{x \in \Omega,\ |f(x)| > a - \epsilon\}.$$

Alors il existe une sous suite d'ensembles B_k tels que $A_\epsilon \cap B_k$ décroit vers A_ϵ, posons

$$g_{k,\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{si } x \in A_\epsilon \cap B_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De l'inégalité de Hölder on d'éduit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_{k,\epsilon} f_n dx = \int_{A_\epsilon \cap B_k} 1 \times |f(x)| dx \leq |A_\epsilon \cap B_k| \lim_{n\to\infty} \|f\|_{L^\infty}.$$

Mais

$$\int_{A_\epsilon \cap B_k} |f(x)| dx \geq (a - \epsilon) |A_\epsilon \cap B_k|,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{L^\infty} \geq a - \epsilon = \|f\|_{L^\infty} - \epsilon.$$

On fait tendre ϵ vers 0, et on obtient le résultat. □

Théorème 1.2.10. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors le dual de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ pour une certaine $g \in L^q(\Omega)$ unique et de plus :*

$$\|l\| = \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.38}$$

Démonstration. Voir [37] théorème 2.14. □

Définition 1.2.11. *On dit qu'une suite de fonctions* $\big(f_n(x)\big)$ *de* L^p *converge en moyenne vers* $f(x) \in L^p$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *si l'égalité suivante est vérifiée*

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^p} = 0. \tag{1.39}$$

Proposition 1.2.12. *Si une suite de fonctions* $\big(f_n(x)\big)$ *de* L^p, $1 \leq p \leq \infty$ *converge en moyenne vers* $f(x)$*, alors elle converge faiblement vers la même fonction* $f(x)$*.*

Démonstration. (A l'aide de l'inégalité de Hölder)
On a

$$\int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\big|g(x)\big|dx \leq \big\|f_n - f\big\|_{L^p}\big\|g\big\|_{L^q}$$

par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\big|g(x)\big|dx \leq \lim_{n\to\infty}\big\|f_n - f\big\|_{L^p}\big\|g\big\|_{L^q}$$

et comme f_n converge en moyenne vers f, alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\big|g(x)\big|dx = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Big(f_n(x) - f(x)\Big)\Big(g(x)\Big)dx = 0$$

et donc f_n converge faiblement vers f. □

Remarque 1.2.13. *Si* $p = 1$ *alors la convergence faible est vérifiée* $\forall g(x)$ *mesurable et bornée, et donc la proposition 1.2.12 est aussi vérifiée.*

1.2.3 Complétude, réflexivité et séparabilité.

Théorème 1.2.14. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$*, alors* L^p *est un espace de Banach.*

Démonstration. . Voir [10]. □

Définition 1.2.15. *Soit* E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* E''*. On dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E''$*.*

Théorème 1.2.16. L^p *est réflexif pour* $1 < p < \infty$*.*

Démonstration. Voir [9] Chapitre IV.3. Théorème IV.10. □

Définition 1.2.17. *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Théorème 1.2.18. *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Voir [9] Chapitre IV.3. Théorème IV.13. □

1.2.4 Continuité par rapport à la translation de fonctions dans L^p.

Théorème 1.2.19. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p < \infty$, alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ on a :*

$$\lim_{h \to 0} \left\| f^0(x+h) - f(x) \right\|_{L^p(\Omega)} = 0, \tag{1.40}$$

où

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \Omega, \\ 0 & si\ x \notin \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Voir [10]. □

Remarque 1.2.20. $x + h \in \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega - h$

Remarque 1.2.21. *Pour $p = \infty$ le théorème n'est plus valable.*
En effet soit $|\Omega| > 0$, on considère $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $0 < |\Omega_1| < |\Omega|$ et

$$f^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega / \Omega_1. \end{cases}$$

alors

$$\|f^0(x+h) - f(x)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\chi_{\Omega_1}(x+h) - \chi_{\Omega_1}(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \|1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \nrightarrow 0$$

Lemme 1.2.22. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C(\Omega)$, alors*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)}. \tag{1.41}$$

Démonstration. Voir [10]. □

Proposition 1.2.23. *Soit $f \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$ (espace des fonctions bornées et uniformément continues), alors*

$$\lim_{h\to 0}\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \lim_{h\to 0}\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_{\overline{C}(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad (1.42)$$

Démonstration. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \left|x-y\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \epsilon,$$
$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \left|h\right| < \delta,$$
$$\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_{\overline{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|f(x+h)-f(x)\right| \leq \epsilon$$

en vertu du lemme 1.2.22, on obtient l'égalité (1.42). □

1.2.5 Injection et densité.

Définition 1.2.24. *Soient $(X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ 2 espaces vectoriels normés, alors on dit que X s'injecte continûment dans Y, et on le note par*

$$X \hookrightarrow Y,\ si :$$

1) X est sous-espace vectoriel de Y.
2) Il existe une constante $M > 0$ telle que $\|x\|_Y \leq M\|x\|_X$, $\forall x \in X$.

Remarque 1.2.25. *$I : X \to Y$, $\forall x \in X$ est l'opérateur d'injection où*

$$\|I\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|x\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Exemple 1.2.26. *Soient Ω un ouvert, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < p < q \leq \infty$ et $\mid \Omega \mid < \infty$, alors*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \quad (1.43)$$

Démonstration. .
(i) Soit $1 < p < q < \infty$, en utilisant l'inégalité de Hölder avec $q/p > 1$ et son conjugué $\frac{q}{q-p}$, on obtient

$$\int_\Omega \left|f\right|^p dx = \int_\Omega \left|f\right|^p.1dx \leq \Big(\int_\Omega \left|f\right|^q dx\Big)^{p/q}.\Big(\int_\Omega dx\Big)^{\frac{q-p}{q}},$$

élevant à la puissance $1/p$, on déduit que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)},\ \forall f \in L^p(\Omega). \tag{1.44}$$

(ii) $p < q = \infty$, alors on a

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Maintenant soit $f \in L^q(\Omega)$ alors $\|f\|_{L^q(\Omega)} < \infty$, et d'après l'inégalité (1.44) on obtient que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, et donc $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.. $\square$

Notations :
- $C^\infty(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables.
- $C_0^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

Théorème 1.2.27. ***(Théorème de densité).***
(1) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p < \infty$; alors $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
(2) Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$; alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Par exemple $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ veut dire :
$\forall f \in L^p(\Omega)$, $\exists$ une suite $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Autrement dit f peut être approximée par la suite f_k au sens de la semi-norme dans $L^p(\Omega)$.

1.3 Convolutions et fonction maximale.

1.3.1 Convolutions.

Définition 1.3.1. *Soient $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (c-à-d $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$, K compact ; $f, g \in L_1(K)$) l'operation*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy, \tag{1.45}$$

est appelée convolution des fonctions f et g au point x (si l'intégrale est finie) c-à-d, si $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $(f * g)(x)$ est finie.

Proposition 1.3.2. .

(1) $f * g = g * f$ *commutative.*

(2) $f * (g * h) = (f * g) * h$ *associative.*

(3) $F(f * g) = (Ff).(Fg)$ *où* F *désigne la transformation de Fourier.*

(4) Soient f *et* $g \in C(R^n)$.
Si $f * g = 0$, *alors* $f(x) = 0$ *ou* $g(x) = 0$ *(Théorème de Titchmarch).*

Lemme 1.3.3. ***(Invariance de la norme dans*** $L_p(\mathbb{R}^n)$ ***par rapport à la translation).*** *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $h \in \mathbb{R}^n$ *et* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *alors :*

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.46}$$

Démonstration. .
1. $1 \leq p < \infty$.

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

on fait le changement de variable $x + h = y \Leftrightarrow x = y - h$ d'où :

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

2. $p = \infty$.

$$\|f(x+h)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} vrai|f(x+h)| = \inf_{\{e:|e|=0\}} \sup_{\mathbb{R}^n/e} |f(x+h)|$$

où e est l'ensemble de mesure nulle.
On fait le changement de variable $x + h = y$; c-à-d $\mathbb{R}^n/e \Rightarrow (\mathbb{R}^n/e) + h = \mathbb{R}^n/(e + h)$ (somme arithmétique). On pose $X = e + h$; si $|e| = 0$ alors $|X| = 0$ et réciproquement.

$$\inf_{\{e:|e|=0\}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n/(e+h)} |f(y)| = \inf_{\{X:|X|=0\}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n/X} |f(y)| = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$, *alors* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\big\|f * g\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \big\|g\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.47}$$

Démonstration.

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

on utilise l'inégalité intégrale de Minkowsky

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big\|f(x-y)g(y)\Big\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big\|f(x-y)\Big\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)} \Big|g(y)\Big| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big\|f(x)\Big\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)} \Big|g(y)\Big| dy \\
&= \Big\|f(x)\Big\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \Big|g(y)\Big| dy \\
&= \Big\|f(x)\Big\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)} \Big\|g(y)\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \Big\|g(y)\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \Big\|f(x)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|g*f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ alors

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \Big\|f\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \Big\|g\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Lemme 1.3.5. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L_p(\Omega + h)$, *alors*

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\Omega)} = \|f(x)\|_{L_p(\Omega+h)}. \tag{1.48}$$

Démonstration. Analogue à celle du lemme 1.3.3 avec $x + h = y$, $\Omega \to \Omega + h$. □

Remarque 1.3.6. *lemme 1.3.5* $\Rightarrow$ *lemme 1.3.3 avec* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *car* $\mathbb{R}^n + h = \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.7. ***(Inégalité de Young)****.*
soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* r *tels que*

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}), \qquad \text{où } p' \text{ est le conjugué de } p.$$

$f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f*g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *alors*

$$\|f*g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.49}$$

Démonstration. .
(1) $p = 1 \Rightarrow r = q$ (voir proposition 1.3.4 $\|f*g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$).
(2) $q = \infty \Rightarrow r = p'$

$$\big|(f*g)(x)\big| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\big|g(y)\big|dy$$

En vertu de l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\leq \Big\|f(x-y)\Big\|_{L_y^{p'}(\mathbb{R}^n)}\Big\|g(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big\|f(x)\Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\Big\|g(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\big\|f*g\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\mathbb{R}^n} vrai\big|(f*g)(x)\big|$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^n}\big|(f*g)(x)\big| \leq \Big\|f\Big\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\Big\|g\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(car $p' = r$), donc :

$$\Big\|(f*g)(x)\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Big\|f\Big\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\Big\|g\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(3) $1 < p \leq q < \infty$

$$\big|(f*g)(x)\big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\big|g(y)\big|dy$$

$$\big|f(x-y)\big|\big|g(y)\big| = \Big(\big|f(x-y)\big|^r\Big)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big(\big|g(y)\big|^p\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p\Big)^{\frac{1}{q}}$$

on a $(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}) + (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) + \frac{1}{q} = 1$ (à partir des hypothèses du théorème). Alors de l'inégalité de Hölder pour 3 facteurs on obtient :

$$\big|(f*g)(x)\big| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\big|f(x-y)\big|^r\Big)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big(\big|g(y)\big|^p\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p\Big)^{\frac{1}{q}}dy$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|^r dy\Big)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|g(y)\big|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p dy\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc

$$\big|(f*g)(x)\big| \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{r}{q}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p dy\Big)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.50)$$

On élève à la puissance q puis on intègre (1.50), et par conséquent :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\big|(f*g)(x)\big|^q dx \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{q-r}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{q-p}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p dy\Big)dx.$$

Dans $\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p dy\Big)dx$ on change l'ordre d'intégration, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|^r\big|g(y)\big|^p dx\Big)dy = \|f\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\big|g(y)\big|^p dy = \|f\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalement on a obtenu

$$\begin{aligned}\|(f*g)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f\|^{q-r}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|^{q-p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|f\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \|f\|^q_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

d'où

$$\|(f*g)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

1.3.2 Fonction maximale (Opérateur de Hardy-Littlewood).

Définition 1.3.8. *Soit f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^n$, Mf est dite fonction maximale si*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\big|B(x,r)\big|}\int_{B(x,r)}\big|f(y)\big|dy. \tag{1.51}$$

Lemme 1.3.9. *Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, $\forall\alpha>0$ et*

$$E_\alpha = \{x\ :\ \big|g(x)\big| > \alpha\}; \tag{1.52}$$

et g est intégrable, alors $\lambda(\alpha) \leq \frac{A}{\alpha}$, ($A = \int_{\mathbb{R}^n}\big|g(y)\big|dy$ et $\lambda(\alpha)$ désigne la mesure de E_α, appelée distribution de la fonction g).

Démonstration.

$$\begin{aligned}A = \int_{\mathbb{R}^n}\big|g(y)\big|dy &\geq \int_{|g(x)|>\alpha}\big|g(y)\big|dy \geq \int_{|g(x)|>\alpha}\alpha dy\\ &= \alpha\int_{|g(x)|>\alpha}dy = \alpha\lambda(\alpha).\end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.10. *Soit $g \in L^p(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|g(y)\right|^p dy = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha). \tag{1.53}$$

Où $\lambda(\alpha)$ désigne la mesure de E_α comme définie dans le lemme 1.3.9 ; et si $g \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\left\|g\right\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{\alpha,\ \lambda(\alpha) = 0\}. \tag{1.54}$$

Démonstration. Voir [58] Chapitre I, §1. Lemme 1.5. □

Lemme 1.3.11. *Soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ qui est recouvert par une famille de boules (B_j), alors on peut extraire une sous suite $B_1, B_2, ...,$*
$B_k, ...$ $(B_k \cap B_l = \emptyset$ si $k \neq l)$ (finie où infinie) telle que

$$\sum_k \left|B_k\right| \geq C\left|E\right|, \tag{1.55}$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de la dimension n ; par exemple $C = 5^{-n}$.

Démonstration. Voir [58] Chapitre I, §1. Lemme 1.5. □

Théorème 1.3.12. ***(Hardy-Littlewood).*** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, alors*

a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$, la fonction Mf est p.p. finie.

b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pour chaque $\alpha > 0$,

$$\left|\{x :\ (Mf)(x) > \alpha\}\right| \leq \frac{C_1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\right| dx, \tag{1.56}$$

où $C_1 = cste$ qui dépend de n.

c) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 < p \leq \infty$,

$$\left(Mf\right) \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ et } \left\|Mf\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \left\|f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.57}$$

où A_p dépend de p et n.

Démonstration. .
b) Montrons que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha \geq 0$ $\big|\{x : \big(Mf\big)(x) > \alpha\}\big| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big| dy$

$$E_\alpha = \{x : \big(Mf\big)(x) > \alpha\}.$$

Soit $x \in E_\alpha$, il existe une boule B_x de sorte que

$$\frac{1}{\big|B_x\big|} \int_{B(x,r)} \big|f(y)\big| dy > \alpha \tag{1.58}$$

c'est à dire que

$$\int_{B(x,r)} \big|f(y)\big| dy > \alpha \big|B_x\big|$$

$\big(B_x\big)_{x \in E_\alpha}$ forment un recouvrement de E_α, alors d'après le lemme 1.3.11 on peut extraire une sous suite $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ telle que

$$\sum_k \big|B_k\big| \geq C \big|E_\alpha\big|$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big| dy &\geq \int_{\cup_k B_k} \big|f(y)\big| dy \\ &= \sum_k \int_{B_k} \big|f(y)\big| dy \\ &\geq \sum_k \alpha \big|B_k\big| \\ &\geq \alpha C \big|E_\alpha\big| \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big| dy \geq \alpha C \big|E_\alpha\big|$$

d'où

$$\begin{aligned} \big|E_\alpha\big| &\leq \frac{1}{C\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big| dy \\ &= \frac{C_1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big| dy \end{aligned}$$

a), c) Nous montrons maintenant simultanément (a) et (c) :
Soit

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}, \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors

(i) $\left|f(x)\right| \leq \left|f_1(x)\right| + \frac{\alpha}{2}$,

(ii) $Mf(x) \leq \big(Mf_1\big)(x) + \frac{\alpha}{2}$,

Conclusions

$$A = \{x : \ \big(Mf\big)(x) > \alpha\} \subset \{x : \ \big(Mf_1\big)(x) > \frac{\alpha}{2}\}.$$

En effet, si $x \in A$, alors $\big(Mf\big)(x) > \alpha$ et donc $\big(Mf_1\big)(x) + \frac{\alpha}{2} > \alpha$ d'où $\big(Mf_1\big)(x) > \frac{\alpha}{2}$.
Alors

$$\lambda(\alpha) = \Big|\{x : \ \big(Mf\big)(x) > \alpha\}\Big| \leq \Big|\{x : \ \big(Mf_1\big)(x) > \frac{\alpha}{2}\}\Big| \leq \frac{C}{\alpha/2}\int_{\mathbb{R}^n} \big|f_1(y)\big| dy \tag{1.59}$$

D'après le lemme 1.3.10 ($\int_{\mathbb{R}^n} \big(Mf\big)^p dx = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha)$), d'où

$$\big\|Mf\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \big(Mf\big)^p dx = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha).$$

Apres intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\big\|Mf\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= -\Big[\alpha^p\lambda(\alpha)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha \ (car\ si\ \alpha \to \infty\ alors\ \lambda(\alpha) \to 0) \\
&\leq p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{2A}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} \big|f_1(y)\big| dy d\alpha \\
&= p2A\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{|f|>\frac{\alpha}{2}} \big|f(y)\big| dy d\alpha \\
&\leq 2Ap\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big| dy \int_0^{2|f(y)|} \alpha^{p-2} d\alpha \\
&= \frac{2^p Ap}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big|^p dy \\
&= \frac{2^p Ap}{p-1}\big\|f\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

donc

$$\big\|Mf\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p\big\|f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ où\ A_p = \Big(\frac{2^p Ap}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Chapitre 2

Inégalités de Hardy.

2.1 Inégalités classiques de Hardy pour $p \geq 1$.

2.1.1 Introduction.

Pendant les années vingt du dernier siecle, Hardy établit une inégalité intégrale connue de nos jours sous le nom de "Inégalité intégrale de Hardy"

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\Big)^p dx \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^\infty f^p(x)dx.$$

La constante $(\frac{p}{p-1})^p$ est la plus petite possible.

Pendant la 1^{ere} période (1906-1928), plusieurs mathématiciens comme G. H. Hardy, E. Landau, G .Polya, I .Schur et M. Riesz, ont contribué à l'etablissement et au developpement de cette inégalité (voir [34]), ce qui a donné naissance aux inégalités discrètes, continues et avec poids de Hardy.

À partir des années soixante grâce aux travaux de (P. Beesack 1961) (voir [8]), ont été etablis les lien entre la validité de l'inégalité de Hardy avec des fonctions de poids plus générales et l'existence de solutions (positives) de l'équation ordinaire

$$\frac{d}{dx}\Big(v(x)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^{p-1}\Big) + u(x)y^{p-1} = 0.$$

D'autres approches ont été développées pendant cette même période, dont celles de (Portnov 1964) (voir [44]) et (Sysoeva 1965) (voir [60]) qui consistent à déterminer le poids u connaissant v, ou inversement, de sorte à ce que l'inégalité de Hardy soit vérifiée et l'approche de (Kufner et Triebel 1978) (voir [35]) qui expriment les poids en fonction d'une fonction auxiliaire. Mais la caractérisation des poids telle qu'elle est connue actuellement, apparait avec (Talenti 1969) (voir [61]) et (Tomaselli 1969) (voir [62]).

Définition 2.1.1. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $x \in (0, \infty)$, *on définit :*

$$\big(H_1 f\big)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \tag{2.1}$$

(la valeur moyenne de la fonction f *dans l'intervalle* $(0, x)$*),*

$$\big(H_2 f\big)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy. \tag{2.2}$$

2.1.2 Inégalité de Hardy avec poids.

Théorème 2.1.2. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *pour toute fonction* f *définie sommable sur l'intervalle* $(0, \infty)$, *on a :*

$$1) \Big\| x^\alpha \Big(H_1 f\Big)(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)} \leq \Big(\frac{1}{q} - \alpha\Big)^{-1} \Big\| x^\alpha f(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)}, \quad si \ \alpha < \frac{1}{q} \tag{2.3}$$

$$2) \Big\| x^\alpha \Big(H_2 f\Big)(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)} \leq \Big(\alpha - \frac{1}{q}\Big)^{-1} \Big\| x^\alpha f(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)}, \quad si \ \alpha > \frac{1}{q} \ . \tag{2.4}$$

Démonstration. .
1) Si $\alpha < \frac{1}{q}$ on pose

$$\begin{aligned} J &= \Big\| x^\alpha (H_1 f)(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)} \\ &= \Big\| \int_0^x x^{\alpha-1} f(y) dy \Big\|_{L^p(0,\infty)} \end{aligned}$$

posons $z = \frac{y}{x}$ alors $dy = xdz$

$$J = \Big\| \int_0^1 x^\alpha f(xz) dz \Big\|_{L^p(0,\infty)}$$

$$\leq \int_0^1 \left\| x^\alpha f(xz) \right\|_{L_x^p(0,\infty)} dz$$

on pose $t = xz$ alors $dt = zdx$ et donc $dx = \frac{dt}{z}$

$$\begin{aligned}
\left\| x^\alpha f(xz) \right\|_{L_x^p(0,\infty)} &= \Big(\int_0^\infty x^{p\alpha} \big| f(xz) \big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= z^{-\alpha - \frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty t^{p\alpha} \big| f(t) \big|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= z^{-\alpha - \frac{1}{p}} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L^p(0,\infty)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_0^1 z^{-\alpha - \frac{1}{p}} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L^p(0,\infty)} dz \\
&= \Big(1 - \frac{1}{p} - \alpha \Big)^{-1} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L^p(0,\infty)} \\
&= \Big(\frac{1}{q} - \alpha \Big)^{-1} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L^p(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

2) Si $\alpha > \frac{1}{q}$ de manière analogue on démontre l'inégalité (2.4). □

2.1.3 Une inégalité de Hardy dans $\mathbb{R}^n$.

On s'interesse à l'opérateur de Hardy $\widetilde{H}_n$ défini pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ par

$$(\widetilde{H}_n f)(r) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y) dy.$$

Théorème 2.1.3. *Soient $p \geq 1$ et $\alpha < np - 1$, alors pour toute fonction f non-négative mesurable sur $\mathbb{R}^n$ on a*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y) dy \Big)^p r^\alpha dr \leq \Big(\frac{np}{np - 1 - \alpha} \Big)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) |x|^{\alpha - n + 1} dx, \quad (2.5)$$

et si $-1 < \alpha < np - 1$ alors la constante $(\frac{np}{np-1-\alpha})^p$ est optimale.

Démonstration. Voir [43]. □

Remarquons que pour $n = 1$ et f définie sur $(0, \infty)$ on obtient l'opérateur usuel de Hardy i.e.

$$(\widetilde{H}_1 f)(r) = (Hf)(r) = \frac{1}{r} \int_0^r f(y)dy.$$

Corollaire 2.1.4. *Soient $p > 1$ et $\alpha < p - 1$, alors pour toute fonction f non-négative mesurable sur $(0, \infty)$ on a*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{r} \int_0^r f(y)dy \Big)^p r^\alpha dr \leq \Big(\frac{p}{p - 1 - \alpha} \Big)^p \int_0^\infty f^p(x) x^\alpha dx, \tag{2.6}$$

et si $-1 < \alpha < p - 1$, alors la constante $(\frac{p}{p-1-\alpha})^p$ est optimale.

2.2 Inégalités classiques de Hardy pour $0 < p < 1$.

2.2.1 Introduction

Théorème 2.2.1. *Considérons l'inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \Big)^p x^\alpha dx \leq C \int_0^\infty f^p(x) x^\alpha dx. \tag{2.7}$$

1. Si $p > 1$ et $\alpha < p - 1$ alors il existe $C > 0$ telle que l'inégalité (2.7) soit vérifiée $\forall f \geq 0$ mesurable sur $(0, \infty)$ où la constante optimale $C = \Big(\frac{p}{p-1-\alpha} \Big)^p$.
2. Si $p > 1$ et $\alpha \geq p - 1$ alors $\forall C > 0$ l'inégalité (2.7) ne peut avoir lieu.
3. Si $0 < p < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (arbitraire) alors $\forall C > 0$ l'inégalité (2.7) ne peut avoir lieu.

Démonstration. 1. Pour $p > 1$ et $\alpha < p - 1$ voir corollaire 2.1.4.
2. Si $p > 1$ et $\alpha \geq p - 1$, considérons $a > 0$ et posons

$$f(x) = \chi_{(a,a+1)}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in (a, a+1), \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

on a

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \Big)^p x^\alpha dx \geq \int_{a+1}^\infty \Big(\frac{1}{x} \int_0^x \chi_{(a,a+1)}(t)dt \Big)^p x^\alpha dx$$

$$= \int_{a+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} 1dt\Big)^p x^\alpha dx$$
$$= \int_{a+1}^{\infty} x^{\alpha-p} dx$$
$$= \infty,$$

et

$$\int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx = \int_0^\infty \chi^p_{(a,a+1)}(x)x^\alpha dx = \int_a^{a+1} x^\alpha dx$$
$$= (a+1)^{\alpha+1} - a^{\alpha+1} < \infty.$$

L'inégalité (2.7) ne peut donc avoir lieu pour tout $f \geq 0$ mesurable.
3. Si $0 < p < 1$. Fixons $a > 0$ et posons $f(x) = \chi_{(a,a+1)}(x)$, on a :
a. Si $\alpha \geq p-1$ on a pour le premier membre de l'inégalité (2.7)

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^\alpha dx \geq \int_{a+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} 1dt\Big)^p x^\alpha dx$$
$$= \int_{a+1}^{\infty} x^{\alpha-p} dx$$
$$= \infty,$$

alors que pour le second

$$\int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx = \int_0^\infty \chi^p_{(a,a+1)}(x)x^\alpha dx = \int_a^{a+1} x^\alpha dx$$
$$= (a+1)^{\alpha+1} - a^{\alpha+1} < \infty.$$

On déduit que l'inégalité (2.7) ne peut avoir lieu pour tout $f \geq 0$ mesurable.
b. Si $\alpha < p-1$, supposons qu'il existe $C > 0$ pour laquelle l'inégalité (2.7) est vraie $\forall f \geq 0$ mesurable.
Alors on a pour $f(x) = \chi_{(a,a+1)}(x)$ ($a > 0$ arbitraire)

$$C \geq \frac{\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^\alpha dx}{\int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx} \geq \frac{\int_{a+1}^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} 1dt\Big)^p x^\alpha dx}{\int_a^{a+1} x^\alpha dx}$$
$$\geq \frac{\int_{a+1}^\infty x^{\alpha-p}dx}{a^\alpha \int_a^{a+1} dx}$$
$$\geq \frac{1}{-\alpha+p-1}\frac{(a+1)^{\alpha-p+1}}{a^\alpha} \to \infty,$$

lorsque $a \to 0$ et par suite l'inégalité (2.7) ne peut avoir lieu pour tout $f \geq 0$ mesurable. □

2.2.2 Inégalité de Hardy pour les fonctions monotones.

On a vu au paragraphe précédent que pour $0 < p < 1$ l'inégalité de Hardy avec poids x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ n'a pas lieu pour toute fonction meurable sur $(0, \infty)$, par contre elle est vérifiée avec l'hypothèse supplémentaire de monotonie. Ce résultat a été établi par V. I. Burenkov 1989 (voir [11]) utilisant une technique de discrétisation basée sur le lemme suivant

Lemme 2.2.2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *alors il existe des constantes* c_1, c_2 *telle que pour toute fonction monotone non négative sur* $(0, \infty)$ *on a*

$$c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k) \leq \int_0^\infty x^\alpha f(x)dx \leq c_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k). \qquad (2.8)$$

où $c_1 = 2^{-\alpha-1}$, $c_2 = 2^\alpha$.

L'inégalité de type Hardy est prouvée sans la constante optimale et ceci à l'aide du lemme précédent. Plus tard V. I. Burenkov a donné une autre preuve où il précise la constante optimale (voir [11]).

Théorème 2.2.3. *Soit* $0 < p < 1$, *si* $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$, *alors pour toute fonction* f *non-négative et non-croissante sur* $(0, \infty)$ *on a*

$$\|x^\alpha (Hf)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq \Big(1 - \frac{1}{p} - \alpha\Big)^{-\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)} \qquad (2.9)$$

Pour la preuve on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2.4. *Soit* $0 < p < 1$, *si* $\forall k \geq 1$, $a_k \geq 0$ *et* $a_{k+1} \leq a_k$ *alors*

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \Big(k^p - (k-1)^p\Big).$$

Démonstration. Voir [11]. □

Lemme 2.2.5. *Soit* $-\infty < a < b \leq \infty$ *et soit* $f \geq 0$ *une fonction non-croissante sur* $]a, b[$. *Si* $0 < p \leq 1$, *alors*

$$\Big(\int_a^b f(y)dy\Big)^p \leq p \int_a^b (y-a)^{p-1} f^p(y)dy. \qquad (2.10)$$

Démonstration. Voir [11]. □

Démonstration. **(du théorème 2.2.3)**.
On a d'apres le lemme 2.2.5 et le théorème de Fubbini

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^{\alpha p}dx &= \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^p dx \\ &\leq \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p} p\int_0^x t^{p-1}f^p(t)dtdx \\ &= p\int_0^\infty t^{p-1}f^p(t)\Big(\int_t^\infty x^{(\alpha-1)p}dx\Big)dt,\end{aligned}$$

et comme $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^{\alpha p}dx &\leq \frac{p}{-\alpha p + p - 1}\int_0^\infty t^{p-1}f^p(t)t^{\alpha p - p + 1}dt \\ &= \frac{p}{-\alpha p + p - 1}\int_0^\infty f^p(t)t^{\alpha p}dt.\end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit est obtenue une inégalité du type de Hardy sous une condition plus faible que la monotonie (voir [55]).

2.2.3 Une inégalité de Hardy avec une condition plus faible que la monotonie.

Lemme 2.2.6. *Soit $C_1 > 0$, $0 < p < 1$, $\alpha < np - 1$, et soit f une fonction non-négative et measurable sur $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a :*

$$f(h) \leq \frac{C_1}{|h|^n}\Big(\int_{B_{(0,|h|)}} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy\Big)^{1/p}. \tag{2.11}$$

Alors

$$\Big(\int_{B(0,r)} f(h)dh\Big)^p \leq p^p C_1^{p(1-p)} \int_{B(0,r)} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy, \tag{2.12}$$

Théorème 2.2.7. *Soient $C_1 > 0$, $0 < p < 1$ et $\alpha < np-1$, si f une fonction mesurable et non negative sur $\mathbb{R}^n$ et verifie $\forall r > 0$, $(\int_{B_r} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy)^{\frac{1}{p}} < \infty$ et pour presque tout $h \in \mathbb{R}^n$:*

$$f(h) \leq \frac{C_1}{|h|^n}\Big(\int_{B_{|h|}} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy\Big)^{1/p}. \tag{2.13}$$

Alors il existe $C_2 > 0$ telle que :

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)dy\Big)^p r^\alpha dr \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)|y|^{\alpha-n+1}dy \tag{2.14}$$

où

$$C_2 = \frac{1}{v_n^p}\frac{p^p\ C_1^{p(1-p)}}{np-\alpha-1} \tag{2.15}$$

est une constante optimale.

Si on pose dans le théorème précédent $n = 1$ on aura :

Corollaire 2.2.8. *Si $n = 1$, on trouve pour $\alpha < p - 1$ et pour presque tout $x > 0$:*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^\alpha dx \leq C_3 \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx \tag{2.16}$$

où

$$C_3 = \frac{p^p\ C_1^{p(1-p)}}{p-\alpha-1} \tag{2.17}$$

pour toute fonction f verifiant pour tout $r>0$, $\left(\int_0^r f^p(t)|t|^{p-1}dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ et satisfaisant la condition suivante :

$$f(x)\leq \frac{C_1}{x}\Big(\int_0^x f^p(t)t^{p-1}dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.18}$$

où C_3 est optimale.

Le travail suivant est lié à l'opérateur généralisé de Hardy et a fait l'objet d'une publication (voir [4]).

2.2.4 Une inégalité pour l'opérateur de Hardy généralisé.

Soit w une fonction de poids définie sur $(0,\infty)$. L'opérateur de Hardy généralisé est défini comme suit :

$$(H_w f)(r)=\frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)w(x)dx,$$

où $0<W(r)=\int_0^r w(t)dt<\infty$ pour tout $r>0$.
Notons que si $w(x)\equiv 1$ alors l'opérateur précédent n'est autre que l'opérateur usuel de Hardy

$$(Hf)(r)=\frac{1}{r}\int_0^r f(x)dx.$$

Lemme 2.2.9. *Soient $0<p<1$, $C_6>0$, $A>0$, w une fonction de poids definie sur $(0,\infty)$ qui satisfait la condition :*

$$w(t)\leq C_6 w(y) \quad pour \quad 0<y<t<\infty. \tag{2.19}$$

Si f est une fonction measurable et non negative sur $(0,\infty)$, telle que pour presque tout $0<t<\infty$, on ait

$$f(t)\leq A\Big(\int_0^t w(y)y^{p-1}dy\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_0^t f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.20}$$

alors pour tout $x>0$

$$(H_w f)(x)\leq \frac{C_7}{xw(x)^{\frac{1}{p}}}\Big(\int_0^x f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.21}$$

où $C_7=pA^{1-p}C_6^{\frac{2}{p}-1}p^{\frac{1}{p}-1}$.

Théorème 2.2.10. *Soient* $0 < p < 1$, $C_6 > 0$, $A > 0$, w *une functions de poids definie sur* $(0, \infty)$ *qui satisfait la condition (2.19), et* $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. *Si* f *est une fonction non-negative mesurable sur* $(0, \infty)$ *satisfaisant l'inégalité (2.20), alors*

$$\|x^{\alpha}(H_w f)(x)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq C_8 \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}, \tag{2.22}$$

où

$$C_8 = A^{1-p} C_6^{\frac{2}{p}-1} (1 - \alpha - \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.23}$$

Si $w(x) \equiv 1$ alors $C_6 = 1$ et l'inégalité (2.20) devient

$$f(x) \leq A\Big(\int_0^x y^{p-1} dy\Big)^{-\frac{1}{p}} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy\Big)^{\frac{1}{p}} = A\Big(\frac{x^p}{p}\Big)^{-\frac{1}{p}} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$f(x) \leq A p^{\frac{1}{p}} \frac{1}{x} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

On pose $C_9 = A p^{\frac{1}{p}}$, alors $C_9^{p(1-p)} = A^{p(1-p)} p^{1-p}$, d'où $pA^{p(1-p)} = p^p C_9^{p(1-p)}$, et donc on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.11. *Soient* $0 < p < 1$, $C > 0$, $A > 0$, $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. *Si* f *est une fonction non-negative mesurable sur* $(0, \infty)$ *qui satisfait l'inégalité*

$$f(x) \leq \frac{C_9}{x} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

alors on a

$$\|x^{\alpha}(Hf)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_{10} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_{p,}(0,\infty)}, \tag{2.24}$$

où

$$C_{10} = C_9^{1-p} p (1 - \alpha - \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.25}$$

Le paragraphe suivant à fait l'objet d'un travail soumise (voir [54]).

2.3 Quelques généralisations d'inégalités intégrales similaires à l'inégalité de Hardy.

2.3.1 Introduction

En 1920, Hardy a présenté l'inégalité suivante :

$$\int_0^\infty \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p dx \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^\infty f^p(x)dx, \tag{2.26}$$

où $p > 1$, et f une fonction mesurable non-négative sur $(0, \infty)$ et

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \textit{pour tout } x > 0.$$

La constante $(\frac{p}{p-1})^p$ est optimale. Les inégalités de Hardy ont plusieurs applications dans l'analyse et dans la theorie des equations differentielles (ordinaires ou partielles), pour plus de details voir [2], [46]. Pour certains resultats concernant les inégalités de type Hardy voir ([4], [3] et [55]).

En 1964, Levinson [36] à établi une inégalité en intégrant de a à b comme suit

$$\int_a^b \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p dx \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_a^b f^p(x)dx, \tag{2.27}$$

où $0 < a < b < \infty$, et f une fonction non-négative p intégrable, $p > 1$, et

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{pour tout} \quad x > a.$$

En 2012, Sulaiman [59] a prouvé deux inégalités de Hardy-type comme suit

1. Si $p \ge 1$

$$p\int_a^b \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p dx \le (b-a)^p \int_a^b \Big(\frac{f(x)}{x}\Big)^p dx - \int_a^b \Big(1-\frac{a}{x}\Big)^p f^p(x)dx \tag{2.28}$$

2. Si $0 < p < 1$

$$p\int_a^b \Big(\frac{F(x)}{x}\Big)^p dx \geq \Big(1-\frac{a}{b}\Big)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^p}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx, \quad (2.29)$$

où $f > 0$, une fonction intégrable sur $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ et

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

En 2013, Sroysang [57] à généralisé les inégalités (2.28) et (2.29) en introduisant le paramètre q.

1. Si $p \geq 1$, $q > 0$,

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x)dx \qquad (2.30)$$

2. Si $0 < p < 1$, $q > 0$,

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \geq \frac{(b-a)^p}{b^q}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^q}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx, \qquad (2.31)$$

où $f > 0$, une fonction intégrable sur $[a,b] \subseteq (0,\infty)$, et

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

Plus tard Shank Wu et al (voir [64] et [65]), ont généralisé les inégalités (2.30) et (2.31), en remplaçant x^q par une fonction g^q. Ce resultat est exprimé dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Soient* $0 < p < \infty$, $q > 0$, f *une fonction positive p-intégrable,* $g > 0$ *sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ *telle que* g *est non-décroissante.*

(i) Si $p \geq 1$, *alors*

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)} dx - \int_a^b (x-a)^p \frac{f^p(x)}{g^q(x)} dx. \tag{2.32}$$

(ii) Si $0 < p < 1$, *alors*

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)} dx \geq \frac{(b-a)^p}{g^q(b)} \int_a^b f^p(x) dx - \frac{1}{g^q(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x) dx, \tag{2.33}$$

où

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \textit{pour tout } x > a.$$

Dans [64] et [65] l'auteur à prouvé les inégalites (2.32) et (2.33) pour une fonction non-décroissante g avec paramètres positifs p et q. Dans le présent travail ont a établi et prouvé les inégalités intégrales suivantes similaires à l'inégalité de Hardy c'est à dire
a) Des inégalités de type (2.32) et (2.33) pour l'opérateur $F(x)$, et g non-décroissante avec $p < 0, q > 0$.
b) Des inégalités de type (2.32) et (2.33) pour l'opérateur $F(x)$, et g non-croissante avec $-\infty < p < \infty, q > 0$.
c) Des inégalités de type (2.32) et (2.33) pour l'opérateur $F(x) = \int_x^b f(t)dt$, g non-décroissante et g non-croissante avec $-\infty < p < \infty, q > 0$.

2.3.2 Quelques Lemmes utiles

Dans cette section, on etudie les lemmes suivants qui sont utiles pour la preuve de nos resultats. Les inégalités (2.34) et (2.35) sont connues comme inégalités intégrales de Hölder. L'inégalité (2.36) est aussi connue (voir [32]).

Lemme 2.3.2. *Si* $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Si* f, g *sont deux fonctions non-négatives et* $f \in L_p(a, b), g \in L_{p'}(a, b)$ *alors*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \Big(\int_a^b f^p(x) dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b g^{p'}(x) dx \Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.34}$$

Lemme 2.3.3. *Si* $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Si* f, g *sont deux fonctions non-négatives et* $f \in L_p(a,b), g \in L_{p'}(a,b)$ *alors*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \Big(\int_a^b f^p(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b g^{p'}(x)dx\Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.35}$$

Lemme 2.3.4. *Si* $p < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Si* f, g *sont deux fonctions non-négatives et* $f \in L_p(a,b), g \in L_{p'}(a,b)$ *alors*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \Big(\int_a^b f^p(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b g^{p'}(x)dx\Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.36}$$

2.3.3 Résultats principaux.

Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour tout $x > a$.

Théorème 2.3.5. *Soit* $q > 0$. *Supposons que* f *est une fonction positive* p*-intégrable.*

1. $g > 0$ *sur* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ *telle que* g *est non-décroissante.*

Si $p < 0$, *alors*

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq (b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(b)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p f^p(x)}{g^q(b)}dx. \tag{2.37}$$

2. $g > 0$ *sur* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ *telle que* g *est non-croissante.*

(i) Si $p \geq 1$, *alors*

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq (b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(b)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p f^p(x)}{g^q(b)}dx. \tag{2.38}$$

(ii) Si $0 < p < 1$, *alors*

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \geq (b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p f^p(x)}{g^q(x)}dx. \tag{2.39}$$

(iii) Si $p < 0$, *alors*

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq (b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p f^p(x)}{g^q(x)}dx. \tag{2.40}$$

Démonstration. 1. Soit $p < 0$. Utilisons (2.36) et d'aprés l'hypothèse que g est non-décroissante, on obtient

$$\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx = \int_a^b g^{-q}(x)\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)^p dx$$
$$\geq \int_a^b g^{-q}(x)\Big[\Big(\int_a^x f^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^x dt\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big]^p dx$$
$$= \int_a^b g^{-q}(x)\int_a^x f^p(t)dt(x-a)^{p-1}dx$$
$$= \int_a^b dx \int_a^x g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}f^p(t)dt$$
$$= \int_a^b dt \int_t^b g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}f^p(t)dx$$
$$\geq \int_a^b g^{-q}(b)f^p(t)\Big(\int_t^b (x-a)^{p-1}dx\Big)dt$$
$$= \int_a^b g^{-q}(b)f^p(t)\Big[\frac{(b-a)^p-(t-a)^p}{p}\Big]dt$$
$$= \frac{1}{p}\Big[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(b)}dt - \int_a^b (t-a)^p\frac{f^p(t)}{g^q(b)}dt\Big],$$

et on retrouve l'inégalité (2.37).

2. Soit g non-croissante.

(i) Si $p \geq 1$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'hypothèse que g est non-croissante, on obtient

$$\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx = \int_a^b g^{-q}(x)\Big(\int_a^x f(t)dt\Big)^p dx$$
$$\leq \int_a^b g^{-q}(x)\Big[\Big(\int_a^x f^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^x dt\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big]^p dx$$
$$= \int_a^b g^{-q}(x)\int_a^x f^p(t)dt(x-a)^{p-1}dx$$
$$= \int_a^b dx \int_a^x g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}f^p(t)dt$$
$$= \int_a^b dt \int_t^b g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}f^p(t)dx$$

$$\leq \int_a^b g^{-q}(b) f^p(t) \Big(\int_t^b (x-a)^{p-1} dx \Big) dt$$

$$= \int_a^b g^{-q}(b) f^p(t) \Big[\frac{(b-a)^p - (t-a)^p}{p} \Big] dt$$

$$= \frac{1}{p} \Big[(b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(b)} dt - \int_a^b (t-a)^p \frac{f^p(t)}{g^q(b)} dt \Big].$$

Ainsi l'inégalité desirée (2.38) est prouvée.

(ii) Si $0 < p < 1$. En vertu de l'inégalité inverse de Hölder et l'hypothèse que g est non-croissante, on trouve

$$\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)} dx = \int_a^b g^{-q}(x) \Big(\int_a^x f(t) dt \Big)^p dx$$

$$\geq \int_a^b g^{-q}(x) \Big[\Big(\int_a^x f^p(t) dt \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^x dt \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big]^p dx$$

$$= \int_a^b g^{-q}(x) \int_a^x f^p(t) dt (x-a)^{p-1} dx$$

$$= \int_a^b dx \int_a^x g^{-q}(x) (x-a)^{p-1} f^p(t) dt$$

$$= \int_a^b dt \int_t^b g^{-q}(x) (x-a)^{p-1} f^p(t) dx$$

$$\geq \int_a^b g^{-q}(t) f^p(t) \Big(\int_t^b (x-a)^{p-1} dx \Big) dt$$

$$= \int_a^b g^{-q}(t) f^p(t) \Big[\frac{(b-a)^p - (t-a)^p}{p} \Big] dt$$

$$= \frac{1}{p} \Big[(b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(t)} dt - \int_a^b (t-a)^p \frac{f^p(t)}{g^q(t)} dt \Big],$$

donc l'inégalité (2.39) est prouvée.

(iii) Si $p < 0$, on utilise (2.36) et l'hypothèse que g est non-croissante, alors on obtient un resultat similaire au cas $0 < p < 1$. Puisque $p < 0$, on obtient l'inégalité inverse de (2.39).

$\square$

Remarque 2.3.6. *Le théorème 2.3.5, 2.(i) et le théorème 2.3.5, 2.(ii) est une reponse à un problème ouvert proposé par Sroysang et S. Wu (voir* [64] *et* [65]*).*

Si dans le théorème 2.3.5, 2.(i) et 2.(ii) on pose $p = q$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.7. *Soit $g > 0$ sur $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ tel que g est non-croissante.*

(i) Si $p \geq 1$, alors

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(b)}\right)^p dx - \int_a^b \left(\frac{(x-a)f(x)}{g(b)}\right)^p dx. \tag{2.41}$$

(ii) Si $0 < p < 1$, alors

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \geq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^p dx - \int_a^b \left(\frac{(x-a)f(x)}{g(x)}\right)^p dx. \tag{2.42}$$

Remarque 2.3.8. *Les inégalités (2.41) et (2.42) sont similaires aux inégalites (3.7) et (3.8) (voir Corollary 3.6 p.1099* [65]*).*

Soit $f(t)$ une fonction p-intégrable et $F^*(x) = \int_x^b f(t)dt$, pour tout $a < x < b$.
On introduit l'opérateur $F^*(x)$ dans les théoremes et corollaires suivants pour obtenir des inégalités similaires à (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) et (2.33).

Théorème 2.3.9. *Soient $1 \leq p < \infty$ et $q > 0$. Supposons que $f, g > 0$, définies sur $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ et f est p-intégrable. Alors pour tout $a < x < b$ on a*

1. Si g est non-croissante

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)} dx - \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)} (b-x)^p dx. \tag{2.43}$$

2. Si g est non-décroissante

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)} dx \leq \frac{(b-a)^p}{g^q(a)} \int_a^b f^p(x) dx - \frac{1}{g^q(a)} \int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \tag{2.44}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini.
1. Si g est non-croissante

$$\int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)}dx = \int_a^b g^{-q}(x)\Big(\int_x^b f(t)dt\Big)^p dx$$

$$\leq \int_a^b g^{-q}(x)\int_x^b f^p(t)dt(b-x)^{p-1}dx$$

$$= \int_a^b \int_x^b g^{-q}(x)f^p(t)(b-x)^{p-1}dtdx$$

$$= \int_a^b \int_a^t g^{-q}(x)f^p(t)(b-x)^{p-1}dxdt$$

$$\leq \int_a^b \int_a^t g^{-q}(t)f^p(t)(b-x)^{p-1}dxdt$$

$$= \int_a^b g^{-q}(t)f^p(t)\int_a^t (b-x)^{p-1}dxdt$$

$$= \frac{1}{p}\int_a^b g^{-q}(t)f^p(t)\Big[(b-a)^p-(b-t)^p\Big]dt$$

$$= \frac{(b-a)^p}{p}\int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(t)}dt - \frac{1}{p}\int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(t)}(b-t)^p dt$$

2. Si g est non-décroissante

$$\int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)}dx = \int_a^b g^{-q}(x)\Big(\int_x^b f(t)dt\Big)^p dx$$

$$\leq \int_a^b g^{-q}(x)\int_x^b f^p(t)dt(b-x)^{p-1}dx$$

$$= \int_a^b \int_x^b g^{-q}(x)f^p(t)(b-x)^{p-1}dtdx$$

$$= \int_a^b \int_a^t g^{-q}(x)f^p(t)(b-x)^{p-1}dxdt$$

$$\leq g^{-q}(a)\int_a^b f^p(t)\int_a^t (b-x)^{p-1}dxdt$$

$$= \frac{g^{-q}(a)}{p}\int_a^b f^p(t)\Big[(b-a)^p-(b-t)^p\Big]dt$$

$$= \frac{(b-a)^p}{p\ g^q(a)} \int_a^b f^p(t)dt - \frac{1}{p\ g^q(a)} \int_a^b f^p(t)(b-t)^p dt$$

□

En particulier, si on pose $q = p$ dans le Théorème 2.3.9, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.10. *Soit $p \geq 1$. Supposons que $f, g > 0$ et f est p-intégrable sur $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. Alors*

1. Si g est non-croissante

$$p \int_a^b \Big(\frac{F^*(x)}{g(x)}\Big)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)^p dx - \int_a^b \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)^p (b-x)^p dx. \quad (2.45)$$

2. Si g est non-décroissante :

$$p \int_a^b \Big(\frac{F^*(x)}{g(x)}\Big)^p dx \leq \Big(\frac{(b-a)}{g(a)}\Big)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g^p(a)} \int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \quad (2.46)$$

Si on pose $g(x) = x$ dans le théorème 2.3.9, 2. et dans le Corollaire 2.3.10, 2., on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 2.3.11. *soient $p \geq 1$ et $q > 0$. Supposons que $f > 0$ est p-intégrable sur $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. Alors*

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{x^q} dx \leq \frac{(b-a)^p}{a^q} \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{a^q} \int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \quad (2.47)$$

Corollaire 2.3.12. *Soit $p \geq 1$. Supposons que $f > 0$ est p-intégrable sur $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. Alors*

$$p \int_a^b \Big(\frac{F^*(x)}{x}\Big)^p dx \leq \Big(\frac{b}{a} - 1\Big)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{a^p} \int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \quad (2.48)$$

Théorème 2.3.13. *Soient* $0 < p < 1$ *et* $q > 0$. *Supposons que* $f, g > 0$ *sur* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$ *et* f *est* p*-intégrable. Alors pour tout* $a < x < b$ *on a :*

1. Si g *est non-croissante :*

$$p\int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)}dx \geq \frac{(b-a)^p}{g^q(a)}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g^q(a)}\int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \tag{2.49}$$

2. Si g *est non-décroissante :*

$$p\int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)}dx \geq (b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}(b-x)^p dx. \tag{2.50}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité inverse de Hölder et le théorème de Fubini.
1. Si g est non-croissante

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)}dx &= \int_a^b g^{-q}(x)\Big(\int_x^b f(t)dt\Big)^p dx \\
&\geq \int_a^b g^{-q}(x)\int_x^b f^p(t)dt(b-x)^{p-1}dx \\
&= \int_a^b\int_x^b g^{-q}(x)f^p(t)(b-x)^{p-1}dtdx \\
&= \int_a^b\int_a^t g^{-q}(x)f^p(t)(b-x)^{p-1}dxdt \\
&\geq g^{-q}(a)\int_a^b f^p(t)\int_a^t (b-x)^{p-1}dxdt \\
&= \frac{g^{-q}(a)}{p}\int_a^b f^p(t)\Big[(b-a)^p - (b-t)^p\Big]dt \\
&= \frac{(b-a)^p}{p\ g^q(a)}\int_a^b f^p(t)dt - \frac{1}{p\ g^q(a)}\int_a^b f^p(t)(b-t)^p dt.
\end{aligned}$$

2. Si g est non-décroissante

$$\int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)}dx = \int_a^b g^{-q}(x)\Big(\int_x^b f(t)dt\Big)^p dx$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_a^b g^{-q}(x) \int_x^b f^p(t)dt(b-x)^{p-1}dx\\
&= \int_a^b \int_x^b g^{-q}(x) f^p(t)(b-x)^{p-1}dtdx\\
&= \int_a^b \int_a^t g^{-q}(x) f^p(t)(b-x)^{p-1}dxdt\\
&\geq \int_a^b \int_a^t g^{-q}(t) f^p(t)(b-x)^{p-1}dxdt\\
&= \int_a^b g^{-q}(t) f^p(t) \int_a^t (b-x)^{p-1}dxdt\\
&= \frac{1}{p}\int_a^b g^{-q}(t) f^p(t)\Big[(b-a)^p-(b-t)^p\Big]dt\\
&= \frac{(b-a)^p}{p}\int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(t)}dt - \frac{1}{p}\int_a^b \frac{f^p(t)}{g^q(t)}(b-t)^p dt.
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.3.14. *Le théorème 2.3.9 et le théorème 2.3.13 sont une réponse à un autre problème ouvert proposé par B. Sroysang et S. Wu (voir* [64], [65]*).*

Si on prend $q = p$ dans le théorème 2.3.13, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.15. *Soit $0 < p < 1$. Supposons que $f, g > 0$ et f est p-intégrables sur $[a,b] \subseteq (0,\infty)$. Alors*

1. *Si g est non-croissante*

$$
p\int_a^b \Big(\frac{F^*(x)}{g(x)}\Big)^p dx \geq \Big(\frac{(b-a)}{g(a)}\Big)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g^p(a)}\int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \tag{2.51}
$$

2. *Si g est non-décroissante :*

$$
p\int_a^b \Big(\frac{F^*(x)}{g(x)}\Big)^p dx \geq (b-a)^p \int_a^b \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)^p dx - \int_a^b \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)^p (b-x)^p dx. \tag{2.52}
$$

Si on pose $g(x) = x$ dans le théorème 2.3.13, 2., on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.3.16. *Soit* $0 < p < 1$ *et* $q > 0$. *Supposons que* $f > 0$ *et* f *p-intégrable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. *Alors*

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{x^q} dx \geq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q} dx - \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q}(b-x)^p dx. \tag{2.53}$$

Si de plus, on pose $q = p$ dans le Corollaire 2.3.16, on obtient

Corollaire 2.3.17. *Soit* $0 < p < 1$. *Supposons que* $f > 0$ *est p-intégrable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. *Alors*

$$p \int_a^b \Big(\frac{F^*(x)}{x}\Big)^p dx \geq (b-a)^p \int_a^b \Big(\frac{f(x)}{x}\Big)^p dx - \int_a^b \Big(\frac{b}{x} - 1\Big)^p f^p(x) dx. \tag{2.54}$$

Théorème 2.3.18. *Soit* $p < 0$ *et* $q > 0$. *Supposons que* $f, g > 0$ *sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ *et* f *est p-intégrable. Alors pour tout* $a < x < b$ *on a*

1. *Si* g *est non-croissante*

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)} dx \leq \frac{(b-a)^p}{g^q(a)} \int_a^b f^p(x) dx - \frac{1}{g^q(a)} \int_a^b f^p(x)(b-x)^p dx. \tag{2.55}$$

2. *Si* g *est non-décroissante*

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{g^q(x)} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)} dx - \int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}(b-x)^p dx. \tag{2.56}$$

Démonstration. La preuve est similaire a celle du théorème 2.3.13 ; comme $p < 0$, par conséquent, on obtient respectivement les inégalites inverses de (2.49) et (2.50). □

Si on pose $g(x) = x$ dans le théorème 2.3.18 2., on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.19. *Soit* $p < 0$ *et* $q > 0$. *Supposons que* $f > 0$ *et* f *p-intégrable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. *Alors*

$$p \int_a^b \frac{F^{*p}(x)}{x^q} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q} dx - \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q}(b-x)^p dx. \tag{2.57}$$

Chapitre 3

Espaces $L^{p(x)}$.

3.1 Définitions et inégalités intégrales.

3.1.1 Définitions.

Notations.
Ω est un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, $|\Omega| > 0$.
$\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables telles que $p : \Omega \to [1, \infty]$.
On pose :

$$\Omega_a = \Omega_a(p) = \{x \in \Omega,\ p(x) = a,\ a \in [1, \infty]\},$$

en particulier : $\Omega_1 = \{x \in \Omega,\ p(x) = 1\}$ *et* $\Omega_\infty = \{x \in \Omega,\ p(x) = \infty\}$,
puis :

$$\Omega_0 = \Omega/(\Omega_1 \cup \Omega_\infty),$$

$$\overline{p} = \sup_{x\in\Omega} vrai\ p(x), \quad \underline{p} = \inf_{x\in\Omega} vrai\ p(x),\ si\ |\Omega_0| > 0,$$

$$c_p = \left\|\chi_{\Omega_1}\right\|_\infty + \left\|\chi_{\Omega_0}\right\|_\infty + \left\|\chi_{\Omega_\infty}\right\|_\infty$$

$$r_p = 1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}},$$

où χ désigne la fonction caractéristique des ensembles correspondants.

Définition 3.1.1. *On note par $L^{p(x)}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f mesurables et telles que :*

$$I_p(f) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} \left|f(x)\right|^{p(x)} dx + \sup_{x\in\Omega_\infty} vrai\left|f(x)\right| < \infty. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.2. *La fonctionnelle* $I_p(f) : L^{p(x)}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty)$ *est appelée modular de l'espace* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Dans ce qui suit on cite certaines propriétés de $I_p(f)$.

Proposition 3.1.3. .

(1) $I_p(f) \geq 0$, $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(2) $I_p(f) = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p.*

(3) $I_p(-f) = I_p(f)$, $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(4) I_p *est convexe.*

(5) Si $\left|f(x)\right| \geq \left|g(x)\right|$ *pour* $x \in \Omega$ *presque partout, et si* $I_p(f) < \infty$*, alors* $I_p(f) \geq I_p(g)$.

(6) Si $0 < I_p(f) < \infty$*, alors l'application* $\lambda \to I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ *est continue et décroissante sur l'intervalle* $[1,\infty)$.

Démonstration. (1), et (2) sont obtenues à partir des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.
(3) Egalité évidente.
(4) voir [40].
(5) Est déduite d'une propriété de l'intégrale de Lebesgue.
(6) Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$ alors

$$\frac{\left|f(x)\right|}{\lambda_1} \leq \frac{\left|f(x)\right|}{\lambda_2}$$

$$\int_\Omega \frac{\left|f(x)\right|}{\lambda_1} dx \leq \int_\Omega \frac{\left|f(x)\right|}{\lambda_2} dx.$$

et donc $I_p\big(\lambda_1\big) \leq I_p\big(\lambda_2\big)$. La continuité est evidente. □

Définition 3.1.4. *On définit sur* $L^{p(x)}(\Omega)$ *la norme suivante :*

$$\left\|f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ I_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1\} \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.5. *Si $p(x) = cste$*

$$\begin{aligned} I_p(\frac{f}{\lambda}) = \int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx &= \int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^p}\int |f|^p \leq 1 \end{aligned}$$

On trouve

$$\int |f|^p \leq \lambda^p \Longrightarrow \Big(\int |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda$$

Donc

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \Big\{\inf \lambda > 0,\ \ tq\ \ I_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} = \Big(\int |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}.$$

Lemme 3.1.6. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors*

$$I_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1\ \forall f\ \textit{telle que}\ 0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty. \tag{3.3}$$

Démonstration. On prend une suite $\big(\lambda_n\big)$ décroissante qui converge vers $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, d'où la suite $\big(\frac{|f|}{\lambda_n}\big)_n$ est croissante et converge vers $\dfrac{\big|f\big|}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$, alors en vertu du lemme de Fatou et de la propriété (6) de la proposition 3.1.3 on obtient :

$$\int_\Omega \Big(\frac{\big|f\big|}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\lambda_n}\Big)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Si $x \in \Omega_\infty$, (3.3) est évidente.
Finalement on a $I_p\Big(\dfrac{\big|f\big|}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1.$ □

Corollaire 3.1.7. *Pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ telle que $0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty$*

$$\textit{Si}\ \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1,\ \ \textit{alors}\ I_p\big(f\big) \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Démonstration. On a

$$\Big(\frac{1}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \geq \frac{1}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \geq 1,\ \textit{où}\ p(x) \geq 1$$

$$\frac{\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \leq \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)}dx \leq 1,$$

où la dernière inégalité découle du lemme 3.1.6 ; d'où $I_p\big(f\big) \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$.

□

Lemme 3.1.8. *Si $\overline{p} < \infty$ alors*

$$I_p\Big(\frac{f}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) = 1 \quad \forall f \textit{ telle que } 0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty. \tag{3.5}$$

Démonstration. .
Posons

$$K = \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx.$$

Soit $0 < \lambda \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ tel que $\big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\big)^{\overline{p}}.K \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} I_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx &= \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\Big|^{p(x)} \Big|\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx \\ &\leq \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\Big)^{\overline{p}} \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx \\ &= \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\Big)^{\overline{p}} I_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big). \end{aligned}$$

Si $I_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) < 1$ alors $I_p\big(\frac{f}{\lambda}\big) \leq 1$ et donc on peut trouver $\lambda < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ tel que $I_p\Big(\frac{f(x)}{\lambda}\Big) \leq 1$ qui contredit la définition de $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ (car $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \lambda$ tel que $I_p\big(\frac{f(x)}{\lambda}\big) \leq 1$).
Alors $I_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \geq 1$ et d'après le lemme 3.1.6 on a

$$I_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) = 1.$$

□

Lemme 3.1.9. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors*

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}} \leq I_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) \leq \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\underline{p}}, \ si \ \ \mu \geq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \tag{3.6}$$

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\underline{p}} \leq I_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) \leq \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}}, \ si \ \ 0 < \mu \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Démonstration. On prouve (3.7). Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $0 < \mu \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, et donc $\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu} \geq 1$, on a

$$I_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) = \int_\Omega \Big|\frac{f}{\mu}\Big|^{p(x)} dx = \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{p(x)} dx,$$

mais

$$\int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}} dx,$$

alors

$$I_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) \leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}} dx \leq \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}},$$

la dernière inégalité découle de (3.3).
Le même raisonnement est valable pour l'inégalité d'à gauche, et l'inégalité (3.6) est traitée d'une manière analogue à l'inégalité (3.7). □

Lemme 3.1.10. *Soit $0 < \underline{p} \leq \overline{p} \leq \infty$. Si $I_p\big(\frac{f}{a}\big) < b$, pour $a > 0$, $b > 0$, alors*

$$\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^v, \tag{3.8}$$

avec

$$v = \begin{cases} 1/\underline{p} & \text{si } b \geq 1 \\ 1/\overline{p} & \text{si } b \leq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $b \geq 1$ et $I_p\big(\frac{f}{a}\big) = \int_\Omega \big|\frac{f(x)}{a}\big|^{p(x)} dx < b$, alors

$$\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{ab^{1/\underline{p}}}\Big|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{b} \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{a}\Big|^{p(x)} dx \leq 1,$$

et donc par définition de la norme dans $L^{p(x)}$ où $\lambda = ab^{1/\underline{p}}$, on a $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{1/\underline{p}}$ pour $b \geq 1$.
D'une manière analogue on montre que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{1/\overline{p}}$ pour $b \leq 1$, et donc $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{v}$. $\square$

3.1.2 *Quelques exemples relatifs à l'espace $L^{p(x)}$.*

Exemple 3.1.11. *Soit* $\Omega = (-1, 1)$

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & si \;\; 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & si \;\; 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} I_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx &= \int_0^1 2^2 dx \\ &= 4 < \infty, \end{aligned}$$

d'où

$$f \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Exemple 3.1.12. *Soit* $\Omega =]0, 1[$ *;*

$$p(x) = \frac{1}{x} \;\; et \;\; f(x) = 4^{-x} x^{\frac{-x}{2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_p(f) &= \int_0^1 4^{-1} x^{\frac{-1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^{\frac{-1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{8} < \infty, \end{aligned}$$

d'oú $f \in L^{p(x)}(\Omega)$

Exemple 3.1.13. *Soit* $\Omega =]0,1[$, $p(x) = \dfrac{1}{x}, f(x) = x^{-x}$.
Donc

$$I_p(f) = \int_0^1 x^{-1}dx = |\ln x|_0^1 = \infty,$$

d'oú

$$f \notin L^{p(x)}(\Omega).$$

Exemple 3.1.14. *(Calcul de la norme dans* $L^{p(x)}(\Omega)$*).*
Soit $\Omega = (-1,1)$.

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & si \;\; 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \;\; -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & si \;\; 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_p(\frac{f}{\lambda}) &= \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{2}{\lambda}dx + \int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}dx \\ &= \lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

Donc on résoud l'inégalité

$$\lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} - 1 \leq 0.$$

Posons $\lambda^{-1} = x > 0$*, on obtenu* $x^2 + 2x - 1 \leq 0$.
Alors $\Delta = 8$*, donc* $x_1 = -\sqrt{2} - 1, x_2 = \sqrt{2} - 1$.
Donc $S = [0, \sqrt{2} - 1]$*, alors* $\sup \lambda = \sqrt{2} - 1$ *et* $\inf \lambda = (\sqrt{2} - 1)^{-1}$,
d'oú

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = (\sqrt{2} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Définition 3.1.15. *Soit* $p(x) \in [1, \infty)$ *alors on dit que la fonction* $q(x)$ *est la conjuguée de* $p(x)$ *si :*

$$q(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x \in \Omega_1, \\ 1 & \text{pour } x \in \Omega_\infty, \\ \frac{p(x)}{p(x)-1} & \text{pour } x \in \Omega_0. \end{cases}$$

3.1.3 Inégalités de Hölder.

Théorème 3.1.16. *(**Inégalite de Hölder**) Soient $p(x)$ et $q(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors l'inégalité*

$$\int_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx \leq r_p\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{3.9}$$

est vérifiée pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(x)}(\Omega)$, où $r_p = 1+\frac{1}{\underline{p}}-\frac{1}{\overline{p}}$ avec $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)} = 1$; et $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ I_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1\}$.

Démonstration. On suppose que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \neq 0$, $\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \neq 0$ et $|\Omega_0| \neq 0$. On pose $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$ et $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}$, $p = p(x)$, $q = q(x)$, on applique l'inégalité $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ (voir [14]), puis on intègre sur $\Omega_0 = \Omega/\Omega_1 \cup \Omega_\infty$ en utilisant l'inégalité (3.3), comme on a :

$$I_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1 \quad \forall f \text{ telle que } 0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty,$$

d'où en vertu de l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \frac{f(x)g(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}dx &\leq \int_{\Omega_0} \frac{1}{p}\Big|\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_0} \frac{1}{q}\Big|\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}}I_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) + \frac{1}{\underline{q}}I_q\Big(\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}}+\frac{1}{\underline{q}} \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}}+1-\frac{1}{\overline{p}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \big|f(x)g(x)\big|dx &\leq \Big(1+\frac{1}{\underline{p}}-\frac{1}{\overline{p}}\Big)\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\big\|g\big\|_{L^{q(x)}(\Omega_0)} \\ &= r_p\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\big\|g\big\|_{L^{q(x)}(\Omega_0)}.\end{aligned}$$

Pour $x \in \Omega_1$ ou $x \in \Omega_\infty$ on retrouve l'inégalité de Hölder classique. $\square$

Remarque 3.1.17. *Si $p(x) = p = cste$, alors $\overline{p} = \underline{p}$ et $r_p = 1$, ainsi on retrouve l'inégalité classique de Hölder.*

Corollaire 3.1.18. *On peut définir sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante*

$$\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ \int_{\Omega_0} \frac{2}{p(x)}\Big|\frac{f}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx \leq 1\}, \tag{3.10}$$

avec laquelle on exprime l'inégalité de Hölder comme suit

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Démonstration. On procède comme dans le Théorème 3.1.16, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}dx &\leq \int_{\Omega_0} \frac{1}{p}\Big|\frac{f}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_0} \frac{1}{q}\Big|\frac{g}{\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{2}{p}\Big|\frac{f}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{2}{q}\Big|\frac{g}{\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega_0} \big|f(x)g(x)\big|dx \leq \big\|f\big\|^*_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\big\|g\big\|^*_{L^{q(x)}(\Omega_0)}.$$

Pour Ω_∞, Ω_1 on est ramené aux cas classiques. □

Remarque 3.1.19. *Avec la norme (3.10) on retrouve l'inégaité de Hölder.*

3.1.4 Généralisation de l'inégalité de Hölder.

L'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)}$ est valable mais pas comme une conséquence directe de l'inégalité de Hölder comme dans le cas classique (car $\|f^{r(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{r(x)}}(\Omega)} \neq \|f\|^{r(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}$).

Lemme 3.1.20. *Soit $0 < s(x) \leq p(x) < \overline{p} < \infty$, $x \in \Omega/\Omega_\infty$, alors*

$$\big\|f\big\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \big\|f^{s(x)}\big\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \big\|f\big\|^{\overline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)},\ pour\ \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1, \tag{3.11}$$

et

$$\big\|f\big\|^{\overline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \big\|f^{s(x)}\big\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \big\|f\big\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)},\ pour\ \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1. \tag{3.12}$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ telle que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, et soit $0 < s(x) \leq p(x) < \overline{p} < \infty$, $x \in \Omega/\Omega_\infty$, alors

$$\begin{aligned}\|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} &= \inf\{\mu \geq 1,\ I_{\frac{p}{s}}\Big(\frac{f^{s(x)}}{\mu}\Big) \leq 1\} \\ &= \inf\{\mu \geq 1,\ \int_\Omega \Big|\frac{f(x)^{s(x)}}{\mu}\Big|^{\frac{p(x)}{s(x)}} dx \leq 1\} \\ &= \inf\{\mu \geq 1,\ \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\mu^{\frac{p(x)}{s(x)}}}\ dx \leq 1\}.\end{aligned}$$

On pose $\lambda = \big(\mu^{s(x)^{-1}}\big)$, alors $\mu = \lambda^{s(x)}$ et donc

$$\|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} = \inf\{\lambda^{s(x)} \geq 1,\ \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}\ dx \leq 1\}$$

, et comme $\lambda \geq 1$, alors

$$\lambda^{\underline{s}} \leq \lambda^{s(x)} \leq \lambda^{\overline{s}},$$

et donc

$$\|f^{\underline{s}}\|_{L^{\frac{p(x)}{\underline{s}}}(\Omega)} = \|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\overline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|f^{\overline{s}}\|_{L^{\frac{p(x)}{\overline{s}}}(\Omega)},$$

et d'une manière analogue on prouve la seconde inégalité. □

Proposition 3.1.21. *Soit $p(x) \geq 1$, $q(x) \geq 1$ et $r(x) \geq 1$ avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)}$, et soit $\sup_{x \in \Omega/\Omega_\infty} r(x) < \infty$, alors*

$$\|fg\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{3.13}$$

avec $c = \sup \frac{r(x)}{p(x)} + \sup \frac{r(x)}{q(x)}$.

Démonstration. On a l'inégalité du corollaire 1.1.19 :

$$\big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q.$$

On remplace dans cette inégalité A par $f/\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ et B par $g/\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$, alors

$$\int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{r(x)} dx \leq \sup \frac{r(x)}{p(x)} \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx$$

$$+\sup\frac{r(x)}{q(x)}\int_{\Omega/\Omega_\infty}\Big|\frac{g(x)}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx$$
$$\leq \sup\frac{r(x)}{p(x)}+\sup\frac{r(x)}{q(x)}=c,$$

et donc

$$I_r\Big(\frac{f(x)g(x)}{c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big)\leq 1.$$

Et finalement on a

$$\big\|fg\big\|_{L^{r(x)}(\Omega)}\leq c\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

$\square$

Remarque 3.1.22. *Si $r(x)=1$, on retrouve l'inégalité (3.9) avec $c=r_p$.*

Remarque 3.1.23. *Si $p(x)=p=cste$, $q(x)=q=cste$, $r(x)=r=cste$, alors $c=1$ et on retrouve l'une des inégalites classique de Hölder.*

Lemme 3.1.24. *Soient $p_i(x)\geq 1$, $a_i\geq 0$, $i=1,2;...,m$ tels que $\sum_{k=1}^m\frac{1}{p_k(x)}=1$, alors*

$$a_1a_2...a_m\leq\frac{a_1^{p_1(x)}}{p_1(x)}+\frac{a_2^{p_2(x)}}{p_2(x)}+...+\frac{a_m^{p_m(x)}}{p_m(x)}. \tag{3.14}$$

Démonstration. Voir [31]. $\square$

Proposition 3.1.25. *Soit $p_k(x)\geq 1$, $k=1,2;...,m$ tel que $\sum_{k=1}^m\frac{1}{p_k(x)}=1$ $x\in\Omega$, alors*

$$\int_\Omega\big|f_1(x)f_2(x)...f_m(x)\big|dx\leq c\big\|f_1\big\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)}\big\|f_2\big\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)}...\big\|f_m\big\|_{L^{p_m(x)}(\Omega)}, \tag{3.15}$$

avec

$$c=\sum_{k=1}^m\frac{1}{\underline{p}_k}. \tag{3.16}$$

Démonstration. Découle du lemme 3.1.24 et du théorème 3.1.16. $\square$

Remarque 3.1.26. *Si $p_k(x)=p_k=cste$, alors $p_k(x)=\underline{p}_k$ et $c=\sum_{k=1}^m\frac{1}{p_k(x)}=1$, d'où l'inégalité généralisée classique de Hölder.*

Proposition 3.1.27. *Soit $p, q, r \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $1 \leq p(x) \leq r(x) \leq q(x) < \infty$ et $p(x) \neq q(x)$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, on a*

$$\|f\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\|f\|^{u}_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^{v}_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{3.17}$$

où

$$u = \begin{cases} sup\ vrai\ \frac{p(x)}{r(x)}\frac{q(x)-r(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1, \\ \\ inf\ vrai\ \frac{p(x)}{r(x)}\frac{q(x)-r(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1. \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} sup\ vrai\ \frac{q(x)}{r(x)}\frac{r(x)-p(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \geq 1, \\ \\ inf\ vrai\ \frac{q(x)}{r(x)}\frac{r(x)-p(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1. \end{cases}$$

(Ici on considère que $\frac{0}{0} = 1$).

Démonstration. Soit $f \neq 0$, en premier lieu supposons que $r(x) < q(x)$ presque pour tout $x \in \Omega$, on prend des fonctions s, t telles que

$$s(x) = \frac{q(x) - p(x)}{q(x) - r(x)}, \quad t(x) = \frac{q(x) - p(x)}{r(x) - p(x)},$$

alors $s, t \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $1 < s(x), t(x) < \infty$ et $\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{t(x)} = 1$, et donc en vertu du théorème 3.1.16, on obtient :

$$I_r\Big(\frac{f}{\|f\|^{u}_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^{v}_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq r_s\Big\|\frac{|f|^{\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{ur(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big\|_{L^{s(x)}(\Omega)}\Big\|\frac{|f|^{r(x)-\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{vr(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big\|_{L^{t(x)}(\Omega)},$$

et de la définition de u et l'inégalité (3.3) on a

$$\begin{aligned} I_s\Big(\frac{|f|^{\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{ur(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) &= \int_\Omega \Big(\frac{|f|^{\frac{p(x)}{s(x)}s(x)}}{\|f\|^{ur(x)s(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)dx \\ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|^{p(x)}}{\|f\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)dx \\ &= I_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}}}\Big) \leq 1, \end{aligned}$$

et de la même manière on montre que :

$$I_t\Big(\frac{\big|f\big|^{r(x)-\frac{p(x)}{s(x)}}}{\big\|f\big\|^{vr(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq I_q\Big(\frac{f}{\big\|f\big\|_{L^{q(x)}}}\Big) \leq 1,$$

comme $r_s \geq 1$ et de la convexité de I_r on déduit

$$I_r\Big(\frac{f}{r_s\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq \frac{1}{r_s}I_r\Big(\frac{f}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1,$$

et donc on a d'après la définition de la norme $\big\|.\big\|_{L^{r(x)}(\Omega)}$

$$\big\|f\big\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\big\|f\big\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\big\|f\big\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)},$$

avec $c = r_s$.
Maintenant, soient $r(x) = q(x)$, G tel que $G = \{x \in \Omega : \ r(x) = q(x)\}$, alors

$$\inf_{x\in\Omega} vrai \frac{p(x)}{r(x)}\frac{q(x)-r(x)}{q(x)-p(x)} = 0, \quad \sup_{x\in\Omega} vrai \frac{q(x)}{r(x)}\frac{r(x)-p(x)}{q(x)-p(x)} = 1,$$

et donc $\big\|f\big\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, $\big\|f\big\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)} \geq \big\|f\big\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$ et

$$\begin{aligned} I_r\Big(\frac{f\chi_G}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) &= I_q\Big(\frac{f\chi_G}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \ (car \ r(x) = q(x)) \\ &\leq I_q\Big(\frac{f\chi_G}{\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq I_q\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1. \end{aligned}$$

Et pour $r(x) < q(x)$ p.p $x \in \Omega/G$, voir la première partie de la preuve, donc

$$I_r\Big(\frac{f\chi_{\Omega/G}}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq r_s,$$

finalement

$$\begin{aligned} I_r\Big(\frac{f}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) &\leq I_r\Big(\frac{f\chi_\Omega}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) + I_r\Big(\frac{f\chi_{\Omega/G}}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \\ &\leq r_s + 1, \end{aligned}$$

on trouve l'inégalité voulue mais avec comme constante $c = r_s + 1$. □

3.1.5 Inégalités de Minkowsky.

On se propose de définir une autre norme qui est analogue à une norme définie dans les espaces d'Orlicz (voir [31]).

Définition 3.1.28. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. On définit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\|f\|_p = \sup_{I_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big| < \infty, \tag{3.18}$$

où $1/p(x) + 1/q(x) = 1$.

Proposition 3.1.29. *(**Inégalité de Minkowsky**).*
Si $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors on a

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{3.19}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \sup_{I_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega \Big(f(x)+g(x)\Big)\varphi(x)dx \Big| \\ &\leq \sup_{I_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big| + \sup_{I_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx \Big| \\ &\leq \|f\|_p + \|g\|_p. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.30. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $f_k \in L^{p(x)}(\Omega)$ pour tout $k = \{1, 2, ..., m\}$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^m f_k \Big\|_p \leq \sum_{k=1}^m \|f_k\|_p. \tag{3.20}$$

Démonstration. Par récurrence à partir de la proposition (3.1.29). □

Définition 3.1.31. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. On peut définir sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\|f\|_p^{(1)} = \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big|, \tag{3.21}$$

avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$.

Proposition 3.1.32. *pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a l'équivalence des normes suivantes*

$$c\big\|f\big\|_p^{(1)} \leq \big\|f\big\|_p \leq \big\|f\big\|_p^{(1)}, \tag{3.22}$$

avec

$$c = 2^{1-\frac{\overline{q}}{\underline{q}}}. \tag{3.23}$$

Démonstration. Voir [50]. □

Dans ce qui suit selon la norme (3.21), l'inégalité intégrale de Minkowsky est verifiée.

Proposition 3.1.33. *Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, tel que $\overline{p} < \infty$ et $\underline{p} > 1$, alors*

$$\Big\| \int_\Omega f(.,y)dy\Big\|_{p,\ x}^{(1)} \leq \int_\Omega \Big\|f(.,y)\Big\|_{p,\ x}^{(1)} dy. \tag{3.24}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_\Omega f(.,y)dy\Big\|_{p,\ x}^{(1)} &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \Big| \int_\Omega \Big(\int_\Omega f(x,y)dy\Big)\varphi(x)dx\Big| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega dy \int_\Omega \Big|\varphi(x)f(x,y)\Big|dx \\
&= \int_\Omega \Big(\sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega \Big|f(x,y)\varphi(x)\Big|dx\Big)dy \\
&= \int_\Omega \Big\|f(.,y)\Big\|_{p,\ x}^{(1)} dy.
\end{aligned}$$

□

Sous les mêmes conditions que la proposition 3.1.33 avec la norme (3.18), on obtient le resultat suivant.

Corollaire 3.1.34. *Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, tel que $\overline{p} < \infty$ et $\underline{p} > 1$. Alors*

$$\Big\| \int_\Omega f(.,y)dy\Big\|_{p,\ x} \leq c\int_\Omega \Big\|f(.,y)\Big\|_{p,\ x} dy, \tag{3.25}$$

avec $c = 2^{-1+\frac{\overline{q}}{\underline{q}}}$.

Démonstration. L'inégalité (3.25) découle de la proposition 3.1.32 et la proposition 3.1.33. □

3.1.6 Inégalités de Hardy.

Dans ce paragraphe on cite 2 résultats relatifs à l'inégalité de Hardy dans les espaces L^p classiques généralisés à $L^{p(x)}$.
1. On considère une inégalité du type de celle de Hardy dans $L^{p(x)}_{(0,l)}$:

$$\Big\|\frac{1}{x}Hf\Big\|_{L^{p(x)}(0,l)} \leq C\Big\|f\Big\|_{L^{p(x)}(0,l)}, \quad pour \ f \geq 0, \tag{3.26}$$

où $C > O$ est une constante qui dépend de l et $p(x)$, et $(Hf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, $l > 0,\ f \in L^{p(x)}(0,l)$.
Cette inégalité a fait l'objet de différents travaux (voir [13], [17]), selon les résultats de ces derniers, la condition suffisante pour que (3.26) soit satisfaite est la suivante :

$$A = \lim_{x \to 0} \big|p(x) - p(0)\big| \ln\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \ ,$$

où $p(x)$ est définie comme suit $p(x) : (0,l) \ \rightarrow \ [1,\infty)$, est une fonction mesurable sur $(0,l)$, $p(x) \neq \infty$ (pour plus de details voir [13].)
2. L'inégalité de Hardy classique liée aux intégrales fractionnaires peut être formulée comme suit :

$$\Big\|x^{\beta-\alpha}\int_0^x \frac{f(y)dy}{y^\beta(x-y)^{1-\alpha}}\Big\|_{L^p(0;b)} \leq C\Big\|f\Big\|_{L^p(0;b)}, \tag{3.27}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\alpha - \frac{1}{p} < \beta < \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $0 < b \leq \infty$.
Pour plus de details voir [51].

Dans ce théorème on généralise (3.27) en supposant $0 < \alpha < n$, et $x_0 \in \overline{\Omega}$.

Théorème 3.1.35. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine borné et $p(x)$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$1 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty, \ x \in \overline{\Omega} \tag{3.28}$$

$$\big|p(x) - p(y)\big| \leq \frac{A}{\ln\frac{1}{|x-y|}} \ , \quad \big|x - y\big| \leq \frac{1}{2} \ , \ x, y \in \overline{\Omega}. \tag{3.29}$$

Alors l'inégalité de type Hardy est satisfaite :

$$\Big\|\big|x - x_0\big|^{\beta-\alpha}\int_\Omega \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^\beta|x-y|^{n-\alpha}}\Big\|_{L^{p(x)}} \leq C\Big\|f\Big\|_{L^{p(x)}}, \tag{3.30}$$

quelque soit β dans l'intervalle

$$\alpha - \frac{x}{p(x_0)} < \beta < \frac{x}{q(x_0)}. \tag{3.31}$$

(Pour plus de details voir [51]).

Remarque 3.1.36. *La condition (3.29) est usuellement dite condition de Dini-Lepschitz.*

3.2 Quelques proporietés des espaces $L^{p(x)}$.

3.2.1 Quelques inégalités.

Lemme 3.2.1. *Soit* $\|f\|_p < \infty$ *et* $I_q(g) < \infty$*, alors*

$$\Big|\int_\Omega f(x)g(x)dx\Big| \leq \begin{cases} \|f\|_p & \text{si } I_q(g) \leq 1, \\ I_q(g)\|f\|_p & \text{si } I_q(g) > 1. \end{cases}$$

Démonstration. Pour la preuve voir [31]. □

Lemme 3.2.2. *Soit* $1 < p(x) < \infty$ *et* $I_p\big(f\big) < \infty$*, si* $\|f\|_p \leq 1$*, alors*

$$I_p\big(f\big) \leq 1. \tag{3.32}$$

Démonstration. Soit $|\Omega_1| = |\Omega_\infty| = 0$.
Supposons le contraire : $I_p\big(f\big) > 1$, on rappelle que l'application $\lambda \to I_p\big(\frac{f}{\lambda}\big)$ est continue et décroissante, alors il existe $\lambda > 1$ tel que $I_p\big(\frac{f}{\lambda}\big) = 1$ (car si $\lambda = 1$ implique que $I_p\big(f\big) > 1$ et $I_p\big(f\big) = 1$ en même temps, donc c'est impossible ; et de même pour $\lambda < 1$ impossibilité).
Posons

$$g(x) = \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)-1} signf(x),\ x \in \Omega.$$

On a

$$I_q\big(g\big) = \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)(p(x)-1)} |signf(x)|dx = \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx = I_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = 1,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\geq \int_\Omega |f(x)g(x)|dx = \int_\Omega |f(x)|\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)-1} |signf(x)|dx \\ &= \lambda \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx = \lambda I_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = \lambda > 1, \end{aligned}$$

qui contredit le fait que $\|f\|_p \leq 1$. □

Proposition 3.2.3. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ tel que $\|f\|_p \leq 1$, alors*

$$I_p\big(f\big) \leq c_p \|f\|_p, \tag{3.33}$$

où $c_p = \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty$.

Démonstration. Voir [31]. $\square$

3.2.2 Espaces $L^{p(x)}$ et $\widetilde{L}^{p(x)}$.

Proposition 3.2.4. *Soit $q(x)$ telle que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, alors pour $1 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty$: l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ coïncide avec l'espace*

$$\widetilde{L}^{p(x)}(\Omega) = \Big\{ f(x) : \ \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big| < \infty \ \textit{pour tout} \ \varphi(x) \in L^{q(x)}(\Omega) \Big\} \tag{3.34}$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ donc $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty$ alors d'après l'inégalité de Hölder (3.1.16), on a

$$\Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big| \leq r_p \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)} < \infty,$$

pour tout $\varphi \in L^{q(x)}(\Omega)$. Donc $f \in \widetilde{L}^{p(x)}(\Omega)$.
Inversement, soit $f \in \widetilde{L}^{p(x)}(\Omega)$ et donc $\|f\|_p < \infty$.
Au début on suppose que $\|f\|_p \leq 1$, et on pose

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} |f(x)|^{p(x)-1} & \text{si } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre maintenant que $\varphi_0(x) \in L^{q(x)}(\Omega)$ et $I_q(\varphi_0) \leq 1$.
Supposons que $I_q(\varphi_0) > 1$, alors

$$\begin{aligned} I_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx &= \int_\Omega |f(x)|^{q(x)\big(p(x)-1\big)} dx \\ &= \int_\Omega \Big(|f(x)|^{p(x)-1} \Big)^{q(x)} dx \\ &\geq \int_{\Omega/\Omega_\infty(q)} |\varphi_0(x)|^{q(x)} dx > 1. \end{aligned}$$

Soit

$$f_{N,k}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq k \ et \ |f(x)| \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\varphi_{N,k}(x) = |f_{N,k}|^{p(x)-1} \in L^{q(x)}(\Omega)$. A partir de de l'inégalité $I_p(f) > 1$, on peut déduire qu'il existe $N_0 \to \infty$ et $k_0 \to \infty$, tel que

$$\int_{\Omega/\Omega_\infty(p)} |f_{N_0,k_0}(x)|^{p(x)} dx > 1. \tag{3.35}$$

Donc

$$1 < I_p(f_{N_0,k_0}) \leq \|f_{N_0,k_0}\|_p \|f_{N_0,k_0}^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

A partir du lemme (3.1.9), on obtient

$$1 < \|f_{N_0,k_0}\|_p \max\{\left[I_p(f_{N_0,k_0})\right]^{\frac{1}{\overline{q}}}, \left[I_p(f_{N_0,k_0})\right]^{\frac{1}{\underline{q'}}}\},$$

donc

$$\min\{\left[I_p(f_{N_0,k_0})\right]^{1-\frac{1}{\overline{q}}}, \left[I_p(f_{N_0,k_0})\right]^{1-\frac{1}{\underline{q'}}}\} \leq \|f_{N_0,k_0}\|_p,$$

de l'inégalité (3.35) découle $1 < \|f_{N_0,k_0}\|_p$, d'où on déduit que

$$\sup_{I_q(\varphi)\leq 1} \left| \int_\Omega f(x)\varphi_{N,k}(x) dx \right| > 1,$$

où

$$\varphi_{N,k}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } |x| \leq k \ et \ |f(x)| \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc $I_q(\varphi_{N,k}) \leq I_q(\varphi)$ ce qui contredit la supposition que $\|f\|_p \leq 1$. Donc $\varphi_0(x) \in L^{q(x)}(\Omega)$ et $I_q(\varphi_0) \leq 1$, alors

$$\int_{\Omega_0} |f(x)|^{p(x)} dx \leq 1.$$

Ensuite, soit $\|f\|_p > 1$, alors $\frac{f(x)}{\|f\|_p} \in L^{p(x)}(\Omega)$ comme elle est démontrée en première étape et donc $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ grâce à la linéarité de $L^{p(x)}(\Omega)$ sous la condition $\overline{p} < \infty$. $\square$

3.2.3 Complétude, réflexivité et separabilité.

Proposition 3.2.5. *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy de fonctions de $L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_\Omega \big|f_m(x) - f_n(x)\big||g(x)|dx < \epsilon, \tag{3.36}$$

pour tout $m, n \geq n_0$ et pour tout g telle que $I_q\big(g\big) \leq 1$ On décompose Ω sous forme d'ensembles disjoints G_k de mesure finie et on définit les fonctions $g_k = \Big(1 + \big|G_k\big|\Big)^{-1}\chi_{G_k},\ k \in \mathbb{N}$. Alors

$$I_q\big(g_k\big) = \int_{G_k} \Big(1 + \big|G_k\big|\Big)^{-q(x)} dx + \Big(1 + \big|G_k\big|\Big)^{-1} \leq 1.$$

En remplaçant g par g_k dans (3.36), on trouve

$$\int_{G_k} \big|f_m(x) - f_n(x)\big|\Big(1 + \big|G_k\big|\Big)^{-1} dx \leq \epsilon,$$

d'où

$$\int_{G_k} \big|f_m(x) - f_n(x)\big|dx \leq \epsilon\Big(1 + \big|G_k\big|\Big),\ m, n \geq n_0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Ceci montre que la suite $\{f_n\}$ est de Cauchy dans $L^1(G_k)$, et donc convergente dans chaque $L^1(G_k)$, et par récurrence on trouve une sous suite $\{f_n^{(k)}\}_n$ et une fonctions $f^{(k)} \in L^1(G_k)$ telle que $f_n^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$ pour $x \in G_k$ presque partout, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$f_m^{(l)}(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)\chi_{G_k}(x) = f(x),\ \textit{pour}\ x \in \Omega\ \textit{p.p.}$$

En remplaçant f_m par $f_m^{(l)}$ dans (3.36) et en utilisant le lemme de Fatou on trouve

$$\int_\Omega \big|f(x) - f_n(x)\big|\big|g(x)\big|dx \leq \sup_m \int_\Omega \big|f_m^{(l)} - f_n(x)\big|\big|g(x)\big|dx \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$ et chaque g avec $I_q\big(g\big) \leq 1$. Ainsi $\big\|f - f_n\big\|_p \leq \epsilon$. □

Conclusion : $L^{p(x)}$ est un espace de Banach.

Théorème 3.2.6. *Les conditions suivantes sont equivalentes :*

(i) $p \in L^{\infty}(\Omega)$.

(ii) Pour chaque fonctionnelle linéaire continue G *sur* $L^{p(x)}(\Omega)$ *il existe une seule fonction* $g \in L^{q(x)}(\Omega)$ *telle que*

$$G(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \ , \quad f \in L^{p(x)}(\Omega), \tag{3.37}$$

où la norme de $G(f)$ *verifie* $c_p^{-1}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \|G\| \leq r_p\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$.

Démonstration. Voir [31]. Théorème 2.6. □

Corollaire 3.2.7. .

(i) L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ *est* $L^{q(x)}(\Omega)$ *si et seulement si* $p \in L^{\infty}(\Omega)$. *(*$q(x)$ *est la fonction conjuguée de* $p(x)$, $q(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$*).*

(ii) $L^{p(x)}$ *est réflexif si et seulement si*

$$1 < \underline{p} \leq \overline{p} < \infty.$$

Démonstration. Voir [31]. Corollaire 2.7. □

Théorème 3.2.8. *Si* $\overline{p} < \infty$*, alors* $L^{p(x)}$ *est séparable.*

Démonstration. Voir [31]. □

Remarque 3.2.9. *1. Si* $p = cste$, $\underline{p} = \overline{p} = p$*, d'où d'aprés corollaire 3.2.7 (ii)* L^p *est réflexif pour* $1 < p < \infty$ *(résultat connu pour les espaces classiques de Lebesgue).*
2. Si $p = cste$, $1 \leq \overline{p} = p < \infty$, L^p *est séparable (résultat est bien connu pour les espaces classiques de Lebesgue).*

3.2.4 Convergences.

Proposition 3.2.10. *Si $\overline{p} < \infty$ alors :*

$$I_p\big(f_n\big) \to 0 \text{ si et seulement si } \big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0. \tag{3.38}$$

Démonstration. .
Si $\big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0$, alors à partir de la proposition 3.2.3, $I_p\big(f_n\big) \to 0$ quand $n \to \infty$.
Maintenant, soit $I_p\big(f_n\big) \to 0$, et soit $\epsilon \in \big(0;1\big]$ pour n suffisamment grand, on a $I_p\big(f_n\big) < \epsilon \leq 1$, et donc

$$\begin{aligned} I_p\Big(f_n I_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}}\Big) &= \int_{\Omega/\Omega_\infty} \big|f_n(x) I_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}}\big|^{p(x)} dx + \sup_{x\in\Omega_\infty} vrai \big|f_n(x) I_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}}\big| \\ &\leq I_p\big(f_n\big)^{-1} \int_{\Omega/\Omega_\infty} \big|f_n(x)\big|^{p(x)} dx + I_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}} \sup_{x\in\Omega_\infty} vrai \big|f_n(x)\big| \\ &= I_p\big(f_n\big)^{-1} I_p\big(f_n\big) = 1. \end{aligned}$$

Si on prend $\lambda = I_p(f_n)^{\frac{1}{p}}$, on ontient

$$\big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq I_p\big(f_n\big)^{\frac{1}{\overline{p}}} < \epsilon^{\frac{1}{\overline{p}}}.$$

Finalement $\big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0$. □

Proposition 3.2.11. *Soit $\overline{p} < \infty$ si $f_n \to 0$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, alors $f_n \to 0$ en mesure.*

Démonstration. .
On suppose le contraire. Donc il existe $\epsilon, \delta \in \big(0;1\big]$ et une sous-suite $\{n_k\}$ telle que

$$\inf_k \Big|\{x \in \Omega : \ \big|f_{n_k}(x)\big| > \epsilon\}\Big| \geq \delta,$$

alors d'après la proposition 3.2.10 on trouve $I_p\big(f_{n_k}\big) \geq \delta\epsilon^{\overline{p}}$ et cela contredit le fait que $f_n \to 0$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$. □

3.2.5 Injection.

Définition 3.2.12. *Soient 2 espaces de Banach X et Y. On écrit*

$$X \hookrightarrow Y \text{ si },\tag{3.39}$$

X est continûment injecté dans Y (voir L^p classique définition 1.2.24).

Proposition 3.2.13. *Soit $0 < \big|\Omega\big| < \infty$, et $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega) \text{ si et seulement si } p(x) \leq q(x) \text{ p.p } x \in \Omega,\tag{3.40}$$

où la norme de l'opérateur d'injection n'excède pas $|\Omega| + 1$.

Démonstration. Voir [31]. □

Remarque 3.2.14. *Ce resultat est une généralisation du cas classique concernant l'injection d'espaces (voir exemple 1.2.26).*

Proposition 3.2.15. *Soient $1 \leq \underline{q} \leq q(x) \leq \overline{q} \leq \infty$, $\forall f \in L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^n),\tag{3.41}$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\big\|f\big\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq c \max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}\Big).\tag{3.42}$$

Démonstration. Première étape, soit $\overline{q} < \infty$ et $\lambda > 0$ alors

$$\begin{aligned} I_q\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)} dx \\ &\leq \int_{\{x:\ |f(x)| \leq \lambda\}} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{\underline{q}} dx + \int_{\{x:\ |f(x)| > \lambda\}} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{\overline{q}} dx \\ &\leq \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^{\underline{q}} + \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^{\overline{q}}. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}\Big)$ alors on a

$$I_q\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\underline{q}} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\overline{q}} \leq 1.$$

Deuxième étape $\overline{q} = \infty$ alors $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} vrai\big|f(x)\big| < \infty$. Soit $\lambda = 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\Big)$, alors

$$\begin{aligned} I_q\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) &= \int_{\mathbb{R}^n/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} vrai\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big| \\ &\leq \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^{\underline{q}} + \frac{\big\|f\big\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda} \\ &\leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\underline{q}} + \frac{1}{2} \leq 1. \end{aligned}$$

Alors :

$$\big\|f\big\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

Et finalement on conclue que

$$\big\|f\big\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

□

Lemme 3.2.16. ***(Propriété de la semi-additivité)***
Soit $\Omega' \cup \Omega'' = \Omega$ (avec $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$), et soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\overline{p} < \infty$. Alors $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a

$$\max\{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')}, \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega'')}\} \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')} + \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega'')}. \quad (3.43)$$

Démonstration. On pose $a = \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')}$, et $b = \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega'')}$ et on suppose que $a \geq b$; alors

$$\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\max(a,b)}\Big|^{p(x)} dx \geq \int_{\Omega'} \Big|\frac{f(x)}{a}\Big|^{p(x)} dx = I_{p_{\Omega'}}\Big(\frac{f}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}\Big) = 1.$$

D'après le lemme 3.1.9, on peut écrire

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}{a}\Big)^{\overline{p}} \geq 1$$

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}{a}\Big)^{\overline{p}} \geq I_p\Big(\frac{f}{a}\Big) \geq 1,$$

d'où

$$\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{a} \geq \frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}{a} \geq 1,$$

et donc $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq \max\big(a, b\big)$, où la dernière égalité découle du Lemme 3.1.8. Et pour démontrer l'inégalité de droite, on pose

$$\frac{f(x)}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{\chi_{\Omega'}f(x)}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{\chi_{\Omega''}f(x)}{b},$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Big|\frac{f(x)}{a+b}\Big|^{p(x)}dx &\leq \int_{\Omega}\Big|\frac{a}{a+b}\frac{\chi_{\Omega'}f(x)}{a}\Big|^{p(x)}dx + \int_{\Omega}\Big|\frac{b}{a+b}\frac{\chi_{\Omega''}f(x)}{b}\Big|^{p(x)}dx\\ &\leq (\frac{a}{a+b})^{\underline{p}} + (\frac{b}{a+b})^{\underline{p}}\\ &\leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.\end{aligned}$$

D'où $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq a+b$ (d'après la définition de $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$). □

Lemme 3.2.17. *Soit $0 < p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x) \leq \infty$ et $|\Omega_\infty(p_2)| = 0$, alors*

$$L^{p_1(x)}(\Omega) \cap L^{p_2(x)}(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \subseteq L^{p_1(x)}(\Omega) + L^{p_2(x)}(\Omega), \tag{3.44}$$

où $L^{p_1(x)}(\Omega) + L^{p_2(x)}(\Omega)$ désigne la somme arithmétique des espaces.

Démonstration. Découle du lemme 3.2.16. □

3.2.6 $p(x)$-continuité.

Définition 3.2.18. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, on dit que f est $p(x)$-continue si*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon) > 0 \text{ telle que } I_p\big(f_h - f\big) < \epsilon \text{ pour } h \in \mathbb{R}^n,\ \big|h\big| < \delta,$$

où $f_h(x) = f(x+h),\ x \in \mathbb{R}^n$, autrement dit

$$\lim_{h\to 0}\int |f(x+h) - f(x)|^{p(x)}dx = 0.$$

Remarque 3.2.19. *Il existe des fonctions $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ qui ne sont pas $p(x)$-continues. Voir exemple ci-dessous.*

Exemple 3.2.20. *Soient* $n = 1$, $\Omega = \big(-1, 1\big)$ *et* $1 \le r < s < \infty$

$$p(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in \big[0;1\big), \\ s & \text{si } x \in \big(-1;0\big). \end{cases}$$

Et

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{s}} & \text{si } x \in \big[0;1\big), \\ 0 & \text{si } x \in \big(-1;0\big). \end{cases}$$

Alors f *n'est pas* $p(x)$*-continue.*

Démonstration. .
On a

$$\int_{-1}^{1} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx = \lambda^{-r} \int_{0}^{1} \big|x\big|^{-\frac{r}{s}} dx < \infty.$$

Alors $f \in L^{p(x)}(\Omega)$.
Soit $h \in \big(0;1\big)$, alors

$$f(x+h) = \begin{cases} \big(x+h\big)^{-\frac{1}{s}} & \text{si } x+h \in \big[0;1\big) \ \textit{donc } x \in \big[-h; 1-h\big) \\ 0 & \text{si } x+h \in \big(-1;0\big) \ \textit{donc } x \in \big(-1-h; -h\big). \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} I_p\Big(\frac{f_h}{\lambda}\Big) &= \int_{-1-h}^{1-h} \Big|\frac{f(x+h)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx \\ &= \lambda^{-s} \int_{-h}^{0} \big|x+h\big|^{-1} dx + \lambda^{-r} \int_{0}^{1-h} \big|x+h\big|^{-\frac{r}{s}} dx \\ &\ge \lambda^{-s} \int_{-h}^{0} \big|x+h\big|^{-1} dx = \infty, \quad \textit{pour tout } \lambda > 0, \end{aligned}$$

donc $f_h \notin L^{p(x)}(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$. □

Remarque 3.2.21. *Cet exemple nous montre bien que l'espace* $L^{p(x)}$ *n'est pas invariant par rapport à la translation.*

Théorème 3.2.22. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *contient une boule* $B(x_0, r) = \{x \in \Omega, \big|x - x_0\big| < r\}$ *sur laquelle la fonction* p *est continue et non constante, alors il existe une fonction* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *pour laquelle* f *n'est pas* $p(x)$*-continue.*

Démonstration. Voir [31]. □

Remarque 3.2.23. *Ici on note l'une des plus importantes différences entre les espaces classiques et généralisés de Lebsgue c'est-à-dire dans les espaces* L^p *la norme est invariante par rapport à la translation, alors que dans* $L^{p(x)}$ *elle ne l'est pas.*

3.2.7 Densité.

Proposition 3.2.24. *Si $\overline{p} < \infty$, alors l'espace des fonctions bornées sur Ω est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Démonstration. Soient $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $G_n = \{x \in \Omega \backslash \Omega_\infty \ : \ |x| < n\}$. On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \big|f(x)\big| \leq n \ et \ x \in G_n \cup \Omega_\infty, \\ n \ sign f(x) & \text{si } \big|f(x)\big| > n \ et \ x \in G_n \cup \Omega_\infty, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

D'où f_n est bornée sur Ω et comme on a

$$\big|n \ sign f(x)\big| \leq |f(x)|,$$

d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 1.1.4, on a

$$\int_{\{G_n \cup \Omega_\infty \ \ |f(x)|>n\}} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx \to 0 \ quand \ n \to \infty.$$

Comme on a :

$$\big|f_n(x) - f(x)\big|^{p(x)} \leq \big|f_n(x) - f(x)\big|,$$

d'où

$$\int_{\{G_n \cup \Omega_\infty \ \ |f(x)|>n\}} \big|f_n(x) - f(x)\big|^{p(x)} dx \leq \int_{\{G_n \cup \Omega_\infty \ \ |f(x)|>n\}} \big|f_n(x) - f(x)\big| dx,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_p\big(f_n - f\big) &= \int_\Omega \big|f_n(x) - f(x)\big|^{p(x)} dx \\ &= \int_{\{G_n \cup \Omega_\infty \ \ |f(x)|>n\}} \big|f_n(x) - f(x)\big|^{p(x)} dx \to 0 \ si \ n \to \infty. \end{aligned}$$

Et donc $f_n \to f$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$. □

Proposition 3.2.25. *Soit $p \in \mathcal{P} \cap L^\infty(\Omega)$, alors*

(1) L'ensemble $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

(2) Si Ω est un ouvert, alors $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Voir [31]. □

Remarque 3.2.26. *Les proposition 3.2.24 et 3.2.25 sont une généralisation de resultats dans les espaces de Lebesgue classiques.*

Corollaire 3.2.27. *Si $p \in \mathcal{P}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, alors $L^{p(x)}$ est séparable.*

Démonstration. Voir [31]. Corollaire 2.12. □

3.3 Convolutions et fonction maximale.

3.3.1 Convolutions.

L'opération de convolution dans les espaces classiques de Lebesgue est décrite par l'inégalité de Young (voir en détails chapitre convolution dans L^p).

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

avec $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.
Si $q = 1$, on a

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Malheureusement ces inégalités ne peuvent pas être généralisées dans les espaces $L^{p(x)}$ pour p non constant ceci est dû au fait que ces espaces ne sont pas invariants par rapport à la translation (par contre quand p est constant on a $\|f(x+h)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$).

Dans ce qui suit, on montre que l'opérateur de translation est bornée dans $L^{p(x)}$ si et seulement si $p(x)$ est une constante, autrement dit ceci est possible seulement dans le cadre des espaces classiques de Lebesgue.

Proposition 3.3.1. *Soient $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et l'operateur de translation τ_h défini comme suit $(\tau_h f)(y) = f(y-h)$. Alors τ_h est une application bornée de $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si p est constante.*

Démonstration. Si p est constant, alors le résultat est bien connu dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Inversement, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\tau_h f\right\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)} &= \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ I_p\Big(\frac{\tau_h f}{\lambda}\Big) \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{f(x-h)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx \leq 1\}.
\end{aligned}$$

On pose $y = x - h$ alors $x = y + h$, et donc

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)} &= \inf\{\lambda,\ \lambda > 0,\ \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{f(y)}{\lambda}\Big|^{p(y+h)} dy \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda,\ \lambda > 0,\ \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{f(y)}{\lambda}\Big|^{(\tau_{-h}p)(y)} dy \leq 1\}
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_{L^{(\tau_{-h}p)(y)}(\mathbb{R}^n)},$$

en vertu de la définition de la norme dans $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$.
Et donc $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tau_{-h}p(x)}(\mathbb{R}^n)$, alors à partir de la proposition 3.2.13, on a $p \geq \tau_{-h}p$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, c'est à dire que

$$p(x) \geq p(x+h) \text{ presque pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.45}$$

Posons $y = x - h$ alors $x = y + h$ d'où

$$p(y+h) \geq p(y) \text{ presque pour tout } y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.46}$$

Finalement de (3.45) et (3.46) on a $p(x) \geq p(x+h) \geq p(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et comme h est arbitraire, alors p est constante. $\square$

Remarque 3.3.2. *La proposition précédente est aussi valable si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \varnothing$, (on suit la même démarche de la preuve et on trouve que $p(x) \geq p(x+h) \geq p(x)$ sur $(\Omega - h) \cap \Omega$).*

Théorème 3.3.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p, r \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq \underline{p} \leq \overline{p} < \infty$, $1 \leq \underline{r} \leq \overline{r} < \infty$, alors la convolution $* : \big(f, g\big) \mapsto f * g$ est bornée en tant q'une application de $L^{p(x)}(\Omega) \times L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{r(x)}(\Omega)$ si et seulement si $\underline{p} \geq \overline{r}$.*

Démonstration. Voir [14]. $\square$

On peut encore illustrer ce résultat avec un contre-exemple.

Exemple 3.3.4. *Soit $p(x)$ définie comme suit*

$$p(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x < 0, \\ \\ p_2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Avec $1 < p_1 < p_2 < \infty$, et

$$g(x) = \begin{cases} \big|x-2\big|^{\alpha-1} & \text{si } \big|x\big| \leq 3, \\ 0 & \text{si } \big|x\big| \geq 3. \end{cases}$$

Avec $0 < \alpha < \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ où

$$f(x) = \begin{cases} \big|x+1\big|^{-v} & \text{si } x \in \big(-2; 0\big), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $0 < v < \frac{1}{p_1}$; alors $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$, mais $g * f \notin L^{p(x)}(\mathbb{R})$

En effet :
$g \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\int_{\mathbb{R}} \big|g(x)\big| dx = \int_{-3}^{3} \big|x-2\big|^{\alpha-1} dx < \infty, \; car \; \alpha - 1 > -1,$$

et $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$ car

$$I_p\big(f\big) = \int_{\mathbb{R}} \big|f(x)\big|^{p(x)} dx = \int_{-2}^{0} \big|x+1\big|^{-vp_1} dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} \big|x+1\big|^{-vp_1} dx + \int_{-1}^{0} \big|x+1\big|^{-vp_1} dx < \infty \; (car \; 0 < vp_1 < 1).$$

Maintenant on calcule $g * f$

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt \geq \int_{x-3}^{-1} \big|t+1\big|^{-v} \big|x-t-2\big|^{\alpha-1} dt,$$

on pose $s = -t-1$, alors $t = -s-1$, et donc

$$g * f(x) \geq \int_{0}^{2-x} \Big(s\Big)^{-v} \Big(x-1+s\Big)^{\alpha-1} ds,$$

et on pose $\xi = \frac{s}{x-1}$, alors $s = \big(x-1\big)\xi$, et donc

$$g * f(x) \geq \int_{0}^{\frac{2-x}{x-1}} \xi^{-v} \Big(x-1\Big)^{-v} \Big(x-1\Big)^{\alpha-1} \Big(\xi+1\Big)^{\alpha-1} \Big(x-1\Big) d\xi$$

$$= \Big(x-1\Big)^{-v+\alpha} \int_{0}^{\frac{2-x}{x-1}} \xi^{-v} \Big(\xi+1\Big)^{\alpha-1} d\xi$$

$$\geq \frac{c}{\big(x-1\big)^{v-\alpha}} \quad avec \; c = \int_{0}^{1} \xi^{-v} \Big(1+\xi\Big)^{\alpha-1} d\xi.$$

Alors

$$\int \big|g * f\big|^{p(x)} dx \geq \int_{0}^{1} \frac{c^{p_2}}{\big|x-1\big|^{(v-\alpha)p_2}} dx,$$

et cette intégrale diverge car $\big(v-\alpha\big)p_2 > 1$, et donc $g * f \notin L^{p(x)}(\mathbb{R})$.

La proposition suivante est une conséquence du théorème précédent. Elle exprime le fait que même dans le cas particulier où $q = 1$, l'inégalité de Young pour les convolutions n'est pas vérifiée dans le cas des espaces $L^{p(x)}$.

Proposition 3.3.5. *Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < \underline{p} \leq \overline{p} < \infty$, alors l'inégalité*

$$\|f * g\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.47}$$

est vérifiée pour une certaine constante $c > 0$, et quelle que soit $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ et quelle que soit $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si p est une constante.

Démonstration. Si l'inégalité est vraie, alors d'après le théorème 3.3.3 on a $\underline{p} \geq \overline{p}$ pour tout sous-ensemble ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et donc p est constante. Inversement, si p est constante, alors cette inégalité est une conséquence directe de l'inégalité de Young pour les espaces classiques de Lebesgue. □

Dans les théorèmes qui suivent, on aborde certains cas particuliers limites. On peut obtenir des inégalités du type inégalité de Young.
Ici on considère 2 cas particuliers :
a) $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1 + \frac{1}{r}$, $r =$ *constante.*
b) $-1 + \frac{1}{\underline{p}} + \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{r(x)} \leq \frac{1}{\overline{p}} + \frac{1}{q_1} - 1$ où $1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$.

Théorème 3.3.6. *Soit $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1 + \frac{1}{r}$ avec $r = cste \geq 1$. Si $k \in L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)$ alors $k * f \in L^r(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Voir [47]. □

Théorème 3.3.7. *Soit $k \in L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$, alors $k * f \in L^{r(x)}(\mathbb{R}^n)$, si*

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}},$$

où $r(x)$ est une fonction bornée et $r(x) \geq 1$ telle que

$$\frac{1}{\underline{p}} + \frac{1}{q_2} - 1 \leq \frac{1}{r(x)} \leq \frac{1}{\overline{p}} + \frac{1}{q_1} - 1.$$

Démonstration. Voir [47]. □

3.3.2 Fonction maximale.

Le but de ce chapitre est de comparer certaines propriétés de la fonction maximale dans L^p classique et $L^{p(x)}$, en considérant certaines inégalités. Par exemple elle peut être estimée à l'aide de la norme (semi-norme) de f dans L^p (voir Théorème 1.3.12 pour le cas classique) et dans $L^{p(x)}$ (voir Théorème 3.3.12). Dans ce dernier on impose à la fonction $p(x)$ la condition dite de Dini-Lipschitz qui est nécessaire.

Définition 3.3.8. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $r > 0$, on définit :*

$$M_{(r)}(f)(x) = \frac{1}{\left|B_r(x)\right|} \int_{B_r(x)\cap\Omega} \left|f(y)\right| dy, \tag{3.48}$$

et

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} M_{(r)}(f)(x). \tag{3.49}$$

$M(f)$ est dite fonction maximale ou opérateur de Hardy-Littlewood.

Lemme 3.3.9. ***(Condition de Dini-Lipschitz).***
Soient Ω un ouvert tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p:\ \Omega \to [1;\infty)$ une fonction uniformément continue. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une constante C_0 telle que pour tout $x, y \in \Omega$, $\left|x-y\right| < \frac{1}{2}$, est vérifiée l'inégalité suivante :

$$\left|p(x) - p(y)\right| \leq \frac{C_0}{-\ln\left|x-y\right|}\ .$$

(ii) Il existe une constante C_1 telle que pour toute boule ouverte $B \subset \mathbb{R}^n$ avec $\left|\Omega \cap B\right| > 0$, est vérifiée l'inégalité suivante :

$$\left|B\right|^{\underline{p}-\overline{p}} \leq C_1.$$

Démonstration. Voir [14]. □

Remarque 3.3.10. .
L'inégalité $\left|p(x)-p(y)\right| \leq \frac{C_0}{-\ln\left|x-y\right|}$ $\forall x, y \in \Omega,\ |x-y| < \frac{1}{2}$ est dite condition de Dini-Lipschitz.

Lemme 3.3.11. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $p : \ \Omega \to [1; \infty)$ une fonction mesurable satisfaisant la condition du lemme 3.3.9, alors il existe une constante C qui dépend de p telle que pour toute fonction $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1$,*

$$\left|M_{(r)}(f)(x)\right|^{p(x)} \leq C\Big(M_{(r)}\Big(\left|f(.)\right|^{p(.)}\Big)(x) + 1\Big), \text{ pour tout } r > 0, \quad (3.50)$$

et

$$\left|M(f)(x)\right|^{p(x)} \leq C\Big(M\Big(\left|f(.)\right|^{p(.)}\Big)(x) + 1\Big). \quad (3.51)$$

Démonstration. Voir [14]. □

La bornetude de l'opérateur de Hardy-Littlewood fut longtemps un problème non résolu. Dans ce qui suit, l'opérateur en question est borné sous la condition de Dini-Lipshitz.

Théorème 3.3.12. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et soit $p : \ \Omega \to [1; \infty)$ une fonction mesurable, alors :*

(i) Si $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ avec $1 \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty$, alors $M(f)$ est finie p.p sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Si p satisfait la condition du lemme 3.3.9 et $1 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty$ sur Ω, alors il existe une constante $C_{\Omega,p} > 0$ telle que quelle que soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, est vérifiée l'inégalité suivante :

$$\|Mf\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C_{\Omega,p}\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Démonstration. .
(i) De la proposition 3.2.13 pour $p(x) = 1$ et $q(x) = p(x)$, on a $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ (car Ω est borné), d'où si $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors $f^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ comme Ω est borné. En effet, d'après théorème 1.3.12 on déduit le résultat pour $p \equiv 1$ (espaces classiques).
(ii) Soit $q(x) = \frac{p(x)}{\underline{p}}$, comme $q(x) = \frac{p(x)}{\underline{p}} \geq \frac{p(x)}{p(x)}$, donc $q(x) \geq 1$ et $1 < \underline{p}$, $q(x) = \frac{p(x)}{\underline{p}}$, donc $q(x) \leq p(x)$, d'où $1 \leq q(x) \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty$. Comme Ω est borné, alors il existe une constante A telle que $\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq A\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. Maintenant, soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ telle que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \frac{1}{A}$, alors $\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1$, comme $q(x)$ satisfait la condition du

lemme 3.3.9 (car $p(x)$ le vérifie) et $\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1$.
On a

$$I_p\big(M(f)\big) = \int \big|M(f)\big|^{p(x)}dx = \int \big|Mf(x)\big|^{q(x)\underline{p}}\,dx = \big\|\big(M(f)\big)^{q(x)}\big\|^{\underline{p}}_{L^{\underline{p}}(\Omega)},$$

en appliquant lemme 3.3.11, on obtient

$$\begin{aligned} I_p\big(M(f)\big) &\leq \Big\|C_p\Big(M\Big(\big|f(.)\big|^{q(.)}\Big)+1\Big)\Big\|^{\underline{p}}_{L^{\underline{p}}(\Omega)} \\ &\leq C_p^{\underline{p}}\Big(\big\|M\big(\big|f(.)\big|^{q(.)}\big)\big\|_{L^{\underline{p}}(\Omega)} + \big\|1\big\|_{L^{\underline{p}}(\Omega)}\Big)^{\underline{p}}, \end{aligned}$$

et donc d'après le théorème 1.3.12(c) car $\underline{p} > 1$ on a

$$\begin{aligned} I_p\big(M(f)\big) &\leq C_p^{\underline{p}}\Big(C_{\underline{p}}\big\||f(.)^{q(.)}|\big\|_{L^{\underline{p}}(\Omega)} + \big\|1\big\|_{L^{\underline{p}}(\Omega)}\Big)^{\underline{p}} \\ &= C_p^{\underline{p}}\Big(C_{\underline{p}}I_p(f)^{\frac{1}{\underline{p}}} + \big\|1\big\|_{L^{\underline{p}}(\Omega)}\Big)^{\underline{p}} \\ &= C_{\Omega,p}. \end{aligned}$$

Donc $I_p\big(M(f)\big)$ et ainsi $\big\|M(f)\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ sont bornées et ne dépendent pas de f avec $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \frac{1}{A}$; comme $M\big(f\big)$ et $\|.\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ sont homogènes avec le scalaire positive (c'est à dire $M\big(\lambda f\big) = |\lambda| M\big(f\big)$ et $\|\lambda f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |\lambda|\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$), et donc

$$\big\|M(f)\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = A\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\Big\|M\Big(\frac{f}{A\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)\Big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq AC_{\Omega,p}\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)};$$

(où la dernière inégalité découle du lemme 3.1.10 avec $a = 1$, $b = C_{\Omega,p}$)
ce qui prouve le résultat recherché. □

Chapitre 4

Inégalités relatives aux opérateurs de Hardy pondérés dans les espaces de Lebesgue avec $0 < p(x) < 1$.

Le présent chapitre a fait l'objet d'une publication internationnale parue (voir [7]), le lien : http ://mi.mathnet.ru/eng/emj285

4.1 Introduction.

Les espaces fonctionnels de Lebesgue ayant comme paramètre d'intégrabite une fonction p, apparaissent dans les travaux de Orlicz les années 30 (1931). L'un des plus importants articles relatifs à ces espaces est celui de *Kovačih* et *Râkosnik* [31] paru en 1991, avec des applications dans les modèles de fluides éléctrortheorlogicaux [45]. Ce qui a attiré plus l'attention sur les espaces avec un paramètre d'intégrabilité variable est que sous certains hypothèses sur $p(.)$, l'operateur maximale de Hardy Littlewood est borné sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, voir [18].

Le but de ce travail est d'obtenir des inégalités de poids pour l'opérateur pondéré classique de Hardy, ainsi que pour son dual appliqués d'un espace de Lebesgue $L^{p(x)}$ de paramètre variable $0 < p(x) < 1$ vers $L^{p(x)}$. Ici les fonctions sont non-négatives mesurables sur $(0,\infty)$ satisfaisant une condition plus faible par rapport à la monotonie.

Il est bien connu que pour l'espace L^p avec $0 < p < 1$, l'inégalité de Hardy est non satisfaite pour une fonction non-négative mesurable quelconque, mais elle l'est pour une fonction monotone non-négative. Toutefois dans [11], p.p. 90-91, la constante optimale de l'inégalité de Hardy-type pour une fonction non-négative non-croissante a été trouvée (voir pour plus de details [11]). Dans un autre travail, la condition de la monotonie a été remplacée par une autre plus faible (voir [55]), en particulier, le résultat suivant a été prouvé.

Soit pour $x > 0$, $f \in L_1^{loc}(0,\infty)$,

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Théorème 4.1.1. *Soit $x > 0$, $0 < p < 1$, et $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Si f est une fonction non-negative Lebesgue mesurable sur $(0,\infty)$ et pour un certain $M > 0$, elle verifie l'inégalité*

$$f(x) \leq \frac{M}{x}\Big(\int_0^x f^p(y)y^{p-1}dy\Big)^{1/p}, \tag{4.1}$$

pour tout $x > 0$, alors

$$\|x^\alpha (Hf)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq N\|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)}, \tag{4.2}$$

où

$$N = M^{1-p}p^{1-\frac{1}{p}}(1-\alpha-\frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.3}$$

La constante N est optimale (la plus petite possible).

L'inégalité (4.2) a été étendue à l'operateur de Hardy pondéré (pour plus de details voir [4]). Le resultat suivant a été prouvé dans [4].

Dans ce qui suit w désigne une fonction de poids sur $(0,\infty)$, c-à-d une fonction positive et Lebesgue mesurable sur $(0,\infty)$. Pour $0 < p < \infty$ l'espace ponderé $L_{p,w}(0,\infty)$ est l'espace de toutes les fonctions à valeurs réelles où les quasi-normes sont finies

$$\|f\|_{L_{p,w}(0,\infty)} = \Big(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

L'opérateur de Hardy généralisé (pondéré) est defini comme suit

$$(H_w f)(x) = \frac{1}{W(x)}\int_0^x f(t)w(t)dt, \quad x > 0,$$

où $0 < W(x) = \int_0^x w(t)dt < \infty$ pour tout $t > 0$.
Notons que pour $w(t) \equiv 1$, l'operateur H_w est l'operateur usuel de Hardy

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Lemme 4.1.2. *Soit $0 < p < 1$, $c_1 > 0$, $A > 0$, w une fonction de poids sur $(0,\infty)$ satisfaisant la condition*

$$w(t) \leq c_1 w(y) \quad \textit{pour} \quad 0 < y < t < \infty. \tag{4.4}$$

Si f est une fonction non-negative Lebesgue measurable sur $(0,\infty)$ telle que pour presque tout $0 < t < \infty$,

$$f(t) \leq A\Big(\int_0^t w(y)y^{p-1}dy\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_0^t f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.5}$$

alors pour tout $x > 0$

$$(H_w f)(x) \leq \frac{c_2}{xw(x)^{\frac{1}{p}}}\Big(\int_0^x f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.6}$$

où $c_2 = p^{\frac{1}{p}} A^{1-p} c_1^{\frac{2}{p}-1}$.

Remarque 4.1.3. *Si dans Lemme 4.1.2, $w = 1$, l'inegalite (4.5) prend la forme (4.1) avec $M = Ap^{\frac{1}{p}}$ et $c_1 = 1$, par conséquent $c_2 = p^{\frac{1}{p}} A^{1-p}$ (voir [4])*

Remarque 4.1.4. *Si f est une fonction non-croissante sur $(0,\infty)$, alors (4.5) est valable avec $A = 1$ (voir [4]).*

Théorème 4.1.5. *Soient $0 < p < 1$, $c_1 > 0$, $A > 0$, w une fonction de poids sur $(0,\infty)$ satisfaisant la condition (4.4), et $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Si f est une fonction non-négative Lebesgue mesurable sur $(0,\infty)$ verifiant (4.5), alors*

$$\|x^\alpha (H_w f)(x)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq D\|t^\alpha f(t)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}, \tag{4.7}$$

où

$$D = A^{1-p} c_1^{\frac{2}{p}-1} (1 - \alpha - \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}}. \tag{4.8}$$

Dans le travail de Bandaliev [6], deux inégalités de poids ont été prouvées pour l'operateur classique de Hardy dans des espaces de Lebesgue pondérés où le paramètre de sommabilité est une fonction de x et ceci pour des fonctions monotones non-negative definies sur $(0, \infty)$. Dans ce travail des inégalites de poids sont prouvées pour l'operateur de Hardy pondéré et l'operateur dual de Hardy classique ponderé. En particulier si $w = 1$ et f est une fonction non-croissante, on obtient les resultats de Bandaliev's (voir Theoreme 4.2.8) et certains corollaires pour $p(x) = p = constante$.

4.2 Préliminaires.

Soit H_w^* l'operateur dual de H_w dans $L_2(0, \infty)$. Alors pour tout $f, g \in L_2(0, \infty)$

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{W(x)} \int_0^x f(t) w(t) dt \Big) g(x) dx = \int_0^\infty \Big(\int_t^\infty \frac{g(x)}{W(x)} dx \Big) f(t) w(t) dt$$

$$= \int_0^\infty w(t) (H^* g)(x) f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty w(t) \Big(\int_t^\infty \frac{g(x)}{W(x)} dx \Big) f(t) dt,$$

Ainsi l'egalite $(H_w f, g)_{L_2(0,\infty)} = (f, H_w^* g)_{L_2(0,\infty)}$ est satisfaite pour l'operateur H_w^* defini comme suit

$$\Big(H_w^* f \Big)(x) = w(x) \int_x^\infty \frac{g(t)}{W(t)} dt, \quad x > 0.$$

Lemme 4.2.1. *Soient* $0 < p < 1$, $B > 0$, w *une fonction de poids sur* $(0, \infty)$ *telle que pour tout* $x > 0$, $\int_0^x w(y) dy < \infty$. *Si* f *est une fonction non-negative Lebesgue mesurable sur* $(0, \infty)$ *telle que pour presque tout* $0 < x < \infty$

$$\int_x^\infty f^p(y) w(y) y^{p-1} dy < \infty$$

et

$$f(x) \le \frac{B}{x}\Big(\int_x^\infty f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{1/p} w(x)^{\frac{1}{1-p}}\Big(\int_0^x w(y)dy\Big)^{\frac{1}{1-p}}, \tag{4.9}$$

alors pour $r > 0$

$$(H_w^* f)(r) = c_3 w(r)\Big(\int_r^\infty f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{1/p}, \tag{4.10}$$

où $c_3 = pB^{1-p}$.

Démonstration. D'aprés (4.9) on a

$$x^{1-p}f(x)^{1-p} \le B^{1-p}\Big(\int_x^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}-1} w(x)\int_0^x w(y)dy.$$

Ainsi

$$\frac{f(x)}{W(x)} \le B^{1-p}\Big(\int_x^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}-1} w(x)f(x)^p x^{p-1}$$

$$= pB^{1-p}(-1)\Big[\Big(\int_x^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]'.$$

En intégrant sur l'intervalle (r, ∞), on obtient

$$\int_r^\infty \frac{f(x)}{W(x)}dx$$

$$\le pB^{1-p}\lim_{b\to+\infty}\Big(\Big(\int_r^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}} - \Big(\int_b^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)$$

$$\le pB^{1-p}\Big(\int_r^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

d'où

$$(H_w^* f)(r) = w(r)\int_r^\infty \frac{f(x)}{W(x)}dx \le pB^{1-p}w(r)\Big(\int_r^\infty f(y)^p w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Si $w(x) = 1$ dans (4.9) et (4.10), alors on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.2. *Soit $0 < p < 1$. Si f est une fonction non-negative Lebesgue mesurable sur $(0,\infty)$ telle que pour tout $0 < x < \infty$,*
$\int_x^\infty f^p(y)y^{p-1}dy < \infty$ et pour certain $B > 0$ l'inegalite

$$f(x) \le \frac{B}{x^{p'}}\Big(\int_x^\infty f^p(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.11}$$

est satisfaite, alors pour $r > 0$

$$(H^*f)(r) \le c_3\Big(\int_r^\infty f^p(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.12}$$

où $c_3 = pB^{1-p}$ et p' est le conjugué de p.

Remarque 4.2.3. *Les inegalites (4.11) et (4.12) sont respectivement les analogues de l'inegalite (4.1) et l'inegalite (2.2) dans [4] pour l'operateur dual classique de Hardy.*

Théorème 4.2.4. *Soient $0 < p < 1$, $x > 0$ et $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Si f est une fonction non-negative Lebesgue mesurable sur $(0,\infty)$ vérifiant l'inegalité (4.11), alors*

$$\|\delta^\alpha(H^*f)(\delta)\|_{L_{p(0,\infty)}} \le c_4\|y^{\alpha+1}f(y)\|_{L_p(0,\infty)}, \tag{4.13}$$

où $c_4 = pB^{1-p}(\alpha p+1)^{-\frac{1}{p}}$.

Démonstration.

$$K_1 = \|\delta^\alpha(H^*f)(\delta)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \Big[\int_0^\infty \delta^{\alpha p}(H^*f)^p(\delta)d\delta\Big]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \Big[\int_0^\infty \delta^{\alpha p}\Big(\int_\delta^{+\infty}\frac{f(y)}{y}dy\Big)^p d\delta\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

D'aprés l'inégalité (4.12) on trouve

$$K_1 \le \Big[\int_0^\infty \delta^{\alpha p}c_3^p\Big(\int_\delta^\infty f^p(y)y^{p-1}dy\Big)d\delta\Big]^{\frac{1}{p}}$$
$$= c_3\Big[\int_0^\infty f^p(y)y^{p-1}\Big(\int_0^y \delta^{\alpha p}d\delta\Big)dy\Big]^{\frac{1}{p}}$$
$$= pB^{1-p}(\alpha p+1)^{-\frac{1}{p}}\|y^{\alpha+1}f(y)\|_{L_p(0,\infty)}.$$

□

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace Euclidien de dimension n, Ω un sous ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^n$. Supposons que p est une fonction Lebesgue mesurable sur Ω telle que $0 < \underline{p} \le p(x) \le \overline{p} < \infty$, $\underline{p} = ess\ \inf_{x\in\Omega} p(x)$, $\overline{p} = ess\ \sup_{x\in\Omega} p(x)$ et w est une fonction de poids sur Ω, c-à-d une fonction non-negative, mesurable presque partout (p.p) sur Ω.

Définition 4.2.5. *$L_{p(x),w}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f mesurables sur Ω telles que*

$$I_{p,w}(f) = \int_\Omega (|f(x)|w(x))^{p(x)}dx < \infty. \tag{4.14}$$

Notons que l'expression

$$\|f\|_{L_{p(.),w}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|w(x)}{\lambda}\Big)^{p(x)}dx \le 1\}, \tag{4.15}$$

definit une quasi-norme dans $L_{p(x),w}(\Omega)$.
$L_{p(x),w}(\Omega)$ est un espace quasi-Banach muni d'une quasi-norme (voir [50] et [31]).

Le corollaire suivant a été prouvé dans [6].

Corollaire 4.2.6. *Soient $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < \infty$ et $r(x) = \frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}$. Supposons que w_1 et w_2 sont deux fonctions de poids sur Ω satisfaisant la condition :*

$$\Big\|\frac{w_1}{w_2}\Big\|_{L_{r(.)}(\Omega)} < \infty.$$

Alors l'inegalité

$$\|f\|_{L_{p(.),w_1}(\Omega)} \le (A_1+B_1+\|\chi_{\Omega_2}\|_{L_\infty(\Omega)})^{1/\underline{p}}\Big\|\frac{w_1}{w_2}\Big\|_{L_{r(.)}(\Omega)}\|f\|_{L_{q(.),w_2}(\Omega)}, \tag{4.16}$$

est valable pour $f \in L_{q(x),w_2}(\Omega)$, où

$$\Omega_1 = \{x\in\Omega:\ p(x) < q(x)\} \qquad \Omega_2 = \{x\in\Omega:\ p(x) = q(x)\},$$
$$A_1 = \sup_{x\in\Omega_1}\frac{p(x)}{q(x)} \qquad B_1 = \sup_{x\in\Omega_1}\frac{q(x)-p(x)}{q(x)}.$$

Le lemme suivant est bien connu (voir [5]).

Lemme 4.2.7. *Soient* $1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < \infty$, *pour tout* $x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ *et* $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$. *Si* $p \in C(\Omega_1)$, *alors l'inegalite*

$$\Big\| \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega_1)} \Big\|_{L_{q(.)}(\Omega_2)} \leq C_{p,q} \Big\| \|f\|_{L_{q(.)}(\Omega_2)} \Big\|_{L_{p(.)}(\Omega_1)} \tag{4.17}$$

est valable, où

$$C_{p,q} = \Big(\|\chi_{\Delta_1}\|_\infty + \|\chi_{\Delta_2}\|_\infty + \frac{\overline{p}}{\underline{q}} + \frac{\underline{p}}{\overline{q}} \Big) (\|\chi_{\Delta_1}\|_\infty + \|\chi_{\Delta_2}\|_\infty), \tag{4.18}$$

$$\underline{q} = ess \inf_{\Omega_2} q(x) \qquad \overline{q} = ess \sup_{\Omega_2} q(x),$$

$$\Delta_1 = \{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2;\ p(x) = q(x)\ \}, \qquad \Delta_2 = \Omega_1 \times \Omega_2 / \Delta_1,$$

et $C(\Omega_1)$ *est l'espace des fonctions continues sur* Ω_1 *et* $f:\ \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction mesurable quelconque telle que* $\Big\| \|f\|_{L_{q(.)}(\Omega_2)} \Big\|_{L_{p(.)}(\Omega_1)} < \infty$.

Le Théorème suivant est prouvé dans [6].

Théorème 4.2.8. *Soient* $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, *et* f *une fonction non-negative et non-croissante define sur* $(0,\infty)$. *Supposons que* w_1 *et* w_2 *sont deux fonctions de poids definies sur* $(0,\infty)$. *Alors pour tout* $f \in L_{p(x),w_1}(0,\infty)$ *l'inégalité*

$$\|Hf\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} C_{p,q} d_p \Big\| \frac{t^{1/\overline{p}'} \|\frac{w_2}{x}\|_{L_{q(.)}(t,\infty)}}{w_1} \Big\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}, \tag{4.19}$$

est valable, où

$$C_{p,q} = \Big(\|\chi_{\Delta_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{\Delta_2}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \underline{p}\Big(\frac{1}{\underline{q}} - \frac{1}{\overline{q}}\Big)\Big) (\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{S_2}\|_{L_\infty(0,\infty)}),$$

$S_1 = \{x \in (0,\infty),\ p(x) = \underline{p}\}$, $S_2 = (0,\infty)/S_1$ *et* $d_p = \Big(1 - \frac{\overline{p}-\underline{p}}{\overline{p}} + \|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)}\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$.

4.3 Principaux résultats.

On considère l'opertaeur de Hardy pondéré

$$(H_w f)(x) = \frac{1}{W(x)} \int_0^x f(t)w(t)dt.$$

Théorème 4.3.1. *Soient* $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < 1$, $\alpha < 1 - \frac{1}{\underline{p}}$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ *et* f *une fonction non-negative Lebesgue measurable define sur* $(0,\infty)$ *satisfaisant l'inegalite (4.5) avec* $p(x) = \underline{p}$ *et* w *une fonction de poids satisfaisant la condition (4.4). Supposons que* w_1 *et* w_2 *sont deux fonctions de poids definies sur* $(0,\infty)$. *Alors pour toute fonction* $f \in L_{p(x),w_1}(0,\infty)$ *l'inegalité*

$$\|(H_w f)(x)\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)}$$

$$\le c_2 C_{p,q} d_p \Big\| \frac{w^{1/\underline{p}} y^{1/\underline{p}'} \| \frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)} \|_{L_{q(.)}(y,\infty)}}{w_1} \Big\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}, \tag{4.20}$$

est valable, pour $c_2 = \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} c_1^{\frac{2}{\underline{p}}-1} A^{1-\underline{p}}$.

Démonstration. D'aprés le lemme 4.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \|H_w f\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} &= \|w_2 H_w f\|_{L_{q(.)}(0,\infty)} \\ &\le \Big\| \frac{c_2 w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)} \Big(\int_0^x f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)} \\ &= c_2 \Big\| \frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)} \Big(\int_0^x f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)}. \end{aligned}$$

Soit $I_1 = \Big\| \frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)} \Big(\int_0^x f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)}$, alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big\| \Big(\int_0^\infty \Big[f^{\underline{p}}(y) w(y) \Big] \chi_{(0,x)}(y) \Big[\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)} \Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)} \\ &= \Big\| \int_0^\infty \Big[f^{\underline{p}}(y) w(y) \Big] \chi_{(0,x)}(y) \Big[\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)} \Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1} dy \Big\|^{1/\underline{p}}_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)} \end{aligned}$$

$$= \Big\| \| [f^{\underline{p}}(y)w(y)]\chi_{(0,x)}(y)\Big[\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1}\|_{L_1(0,\infty)}\Big\|^{1/\underline{p}}_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)}$$

En appliquant le lemme 4.2.7, on obtient

$$I_1 \leq C_{p,q}\Big(\int_0^\infty \Big\|[f^{\underline{p}}(y)w(y)]\chi_{(0,x)}(y)\Big[\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1}\Big\|_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)} dy\Big)^{1/\underline{p}}$$

$$= C_{p,q}\Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(y)w(y)y^{\underline{p}-1}\Big\|\chi_{(0,x)}(y)\Big[\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\Big]^{\underline{p}}\Big\|_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)} dy\Big)^{1/\underline{p}}$$

$$= C_{p,q}\Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(y)w(y)y^{\underline{p}-1}\Big\|\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\Big\|^{\underline{p}}_{L_{q(.)}(y,\infty)} dy\Big)^{1/\underline{p}}$$

$$= C_{p,q}\Big\|f(y)w^{1/\underline{p}}(y)y^{1/\underline{p}'}\Big\|\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\Big\|_{L_{q(.)}(y,\infty)}\Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}.$$

Soit $\quad I_2 = \Big\|f(y)w^{1/\underline{p}}(y)y^{1/\underline{p}'}\Big\|\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\Big\|_{L_{q(.)}(y,\infty)}\Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}$,

alors d'aprés le corollaire 4.2.6, on a

$$I_2 \leq d_p\Big\|\frac{w^{1/\underline{p}}(y)y^{1/\underline{p}'}\|\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\|_{L_{q(.)}(y,\infty)}}{w_1}\Big\|_{L_{r(.)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)},$$

par consequent

$$\|H_w f\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} \leq c_2 C_{p,q} d_p\Big\|\frac{w^{1/\underline{p}}(y)y^{1/\underline{p}'}\|\frac{w_2(x)}{xw^{1/\underline{p}}(x)}\|_{L_{q(.)}(y,\infty)}}{w_1}\Big\|_{L_{r(.)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}.$$

□

Pour l'operateur dual H_w^*, on a le Théorème suivant.

Théorème 4.3.2. *Soient $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $\alpha < 1 - \frac{1}{\underline{p}}$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ et f une fonction non-negative Lebesgue mesurable definie sur $(0,\infty)$ satisfaisant l'inegalité (4.9) avec $p(x) = \underline{p}$ et w une fonction de poids satisfait la condition du lemme 4.1.2. Supposons que w_1 et w_2 sont deux fonctions de poids definies sur $(0,\infty)$.*
Alors pour toute fonction $f \in L_{p(x),w_1}(0,\infty)$, l'inegalité

$$\|(H_w^* f)(x)\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)}$$

$$\leq c_3 C_{p,q} d_p \Big\| \frac{w^{1/\underline{p}}(y) y^{1/\underline{p}'} \|w_2(x)w(x)\|_{L_{q(.)}(0,y)}}{w_1} \Big\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}. \tag{4.21}$$

est satisfaite, où $c_3 = pB^{1-p}$.

Démonstration. D'aprés le Lemme 4.2.1, on a

$$\|H_w^* f\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} = \|w_2 H_w^* f\|_{L_{q(.)}(0,\infty)}$$

$$\leq c_3 \Big\| w_2(x)w(x) \Big(\int_x^\infty f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)}.$$

Soit $\quad J_1 = \Big\| w_2(x)w(x) \Big(\int_x^\infty f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)},$

ainsi

$$J_1 = \Big\| \Big(\int_0^\infty \Big[f^{\underline{p}}(y) w(y) \Big] \chi_{(x,\infty)}(y) \Big[w_2(x)w(x) \Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1} dy \Big)^{1/\underline{p}} \Big\|_{L_{q(.)}(0,\infty)}$$

$$= \Big\| \int_0^\infty \Big[f^{\underline{p}}(y) w(y) \Big] \chi_{(x,\infty)}(y) \Big[w_2(x)w(x) \Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1} dy \Big\|^{1/\underline{p}}_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)}$$

$$= \Big\| \| [f^{\underline{p}}(y) w(y)] \chi_{(x,\infty)}(y) \Big[w_2(x)w(x) \Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1} \|_{L_1(0,\infty)} \Big\|^{1/\underline{p}}_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)}.$$

D'apres le Lemme 4.2.7, on obtient

$$J_1 \leq C_{p,q} \Big(\int_0^\infty \Big\| [f^{\underline{p}}(y) w(y)] \chi_{(x,\infty)}(y) \Big[w_2(x)w(x) \Big]^{\underline{p}} y^{\underline{p}-1} \Big\|_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)} dy \Big)^{1/\underline{p}}$$

$$= C_{p,q} \Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} \Big\| \chi_{(x,\infty)}(y) \Big[w_2(x)w(x) \Big]^{\underline{p}} \Big\|_{L_{\frac{q(.)}{\underline{p}}}(0,\infty)} dy \Big)^{1/\underline{p}}$$

$$= C_{p,q} \Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(y) w(y) y^{\underline{p}-1} \Big\| w_2(x)w(x) \Big\|^{\underline{p}}_{L_{q(.)}(0,y)} dy \Big)^{1/\underline{p}}$$

$$= C_{p,q} \Big\| f(y) w^{1/\underline{p}}(y) y^{1/\underline{p}'} \|w_2(x)w(x)\|_{L_{q(.)}(0,y)} \Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}.$$

Finallement, d'apres le Corollaire 4.2.6, on a

$$\Big\| f(y) w^{1/\underline{p}}(y) y^{1/\underline{p}'} \|w_2(x)w(x)\|_{L_{q(.)}(0,y)} \Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}$$

$$\leq d_p \left\| \frac{w^{1/\underline{p}}(y) y^{1/\underline{p}'} \|w_2(x)w(x)\|_{L_{q(.)}(0,y)}}{w_1} \right\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}.$$

Ainsi

$$\|H_w^* f\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} \leq c_3 C_{p,q} d_p \left\| \frac{w^{1/\underline{p}}(y) y^{1/\underline{p}'} \|w_2(x)w(x)\|_{L_{q(.)}(0,y)}}{w_1} \right\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}.$$

$\square$

Si on prend en compte la Remarque 4.1.3 et la Remarque 4.1.4 et en remplaçant (4.5) par (4.1) dans la preuve du Théorème 4.3.1, on obtient le Corollaire suivant

Corollaire 4.3.3. *Soient $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $\alpha < 1 - \frac{1}{\underline{p}}$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ et f une fonction non-négative Lebesgue mesurable definie sur $(0,\infty)$ verifiant l'inegalité (4.1). Supposons que w_1 et w_2 sont deux fonctions de poids definies sur $(0,\infty)$. Alors quelle que soit $f \in L_{p(x),w_1}(0,\infty)$, l'inegalite*

$$\|Hf\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} \leq K C_{p,q} d_p \left\| \frac{y^{1/\underline{p}'} \|\frac{w_2(x)}{x}\|_{L_{q(.)}(y,\infty)}}{w_1} \right\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)}, \tag{4.22}$$

est valable, où $K = \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} A^{1-\underline{p}}$.

Remarque 4.3.4. *Si f est une fonction non-negative non-croissante sur $(0,\infty)$, l'inegalité (4.1) est satisfaite avec $M = p^{\frac{1}{p}}$ et dans le Corollaire 4.3.3 $K = \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}$, par conséquent on obtient l'inegalité (4.19) du Théorème 4.2.8.*

On considere l'operateur $(H^* f)$ avec $w(x) = 1$, on trouve

$$(H^* f)(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy.$$

En remplaçant (4.10) par (4.12) dans la preuve du Theoreme 4.3.2, on obtient le Corollaire suivant pour l'operateur $H^* f$.

Corollaire 4.3.5. *Soient* $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $\alpha < 1 - \frac{1}{\underline{p}}$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ *et* f *une fonction non-negative Lebesgue mesurable satisfaisant l'inegalité (4.12). Supposons que* w_1 *et* w_2 *sont deux fonctions de poids definies sur* $(0,\infty)$*. Alors quelle que soit* $f \in L_{p(x),w_1}(0,\infty)$*, l'inegalité*

$$\|H_1^* f\|_{L_{q(.),w_2}(0,\infty)} \leq pB^{1-p} C_{p,q} d_p \left\| \frac{y^{1/p'} \|w_2(x)\|_{L_{q(.)}(0,y)}}{w_1} \right\|_{L_{r(.)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(.),w_1}(0,\infty)},$$

est verifiée, où B, $C_{p,q}$, d_p *sont respectivement les constantes dans le Corollaire 4.2.2 et le Corollaire 4.3.3.*

Remarque 4.3.6. *Notons que le Corollaire 4.3.3 dans le cas où* f *est une fonction non-negative non-croissante et* $p(x) = q(x) = \underline{p} =$ *constante avec* $w_1(x) = w_2(x) = x^\alpha$ *a été prouvé dans [11] avec la constante optimale dans une inegalité du type de Hardy.*

Chapitre 5

Notions sur les espaces de Sobolev classiques et généralisés.

5.1 Espaces classiques de Sobolev.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$[1] pour tout $i = 1, 2, ..., n$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i; \quad \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$
$x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n})$
$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$, $|\alpha|^{ieme}$ dérivée partielle.
$C_0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact.
$\omega \subset\subset \Omega$ ouvert ω fortement inclus dans Ω, c-a-d $\overline{\omega}$ compact et $\overline{\omega} \subset \Omega$.
La notion de dérivée faible apparaît dans les travaux du mathématécien russe S. L. Sbolev dans les années trente. Cette notion est fondamentale pour l'étude de l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles. Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Les intégrales seront comprises au sens de l'intégrale de Lebesgue.

[1] $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Lemme 5.1.1. *Soient* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ *et* $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$, *alors on a*

$$\int_\Omega f(D^\alpha \varphi)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha f)\varphi dx. \tag{5.1}$$

Démonstration. Par recurence à l'aide d'une intégration par partie $|\alpha|$ fois. $\square$

En utilisant le résultat du lemme 5.1.1 on peut définir une autre notion de dérivée appelée dérivée au sens de Sobolev (dite aussi dérivée faible).

Définition 5.1.2. *[12]. Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$[2] $f, g \in L_1^{loc}(\Omega)$. *Alors la fonction* $g \in L_1^{loc}(\Omega)$ *est dite dérivée au sens de Sobolev (ou dérivée faible) d'ordre* α *de la fonction* f, *si pour toute fonction* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega g\varphi d\,x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha(\varphi)dx. \tag{5.2}$$

Notation. $g := D_w^\alpha f := (D_w^\alpha f)_\Omega$[3].

Si $\alpha = (0, ..., 0)$, alors on écrit $D_w^\alpha f = f$.

La dérivée faible peut exister sans l'existence de la dérivée classique.

Exemple 5.1.3. *1. Soit* $f(x) = |x|$ *sur* $[-1, 1]$, *la dérivée ordinaire de* f *n'existe pas sur* $[-1, 1]$ *mais il existe* $g \in L_1^{loc}(-1, 1)$ *telle que* $\forall \phi \in C_0^1(-1, 1)$, *on ait*

$$\int_{-1}^1 f\phi'\,dx = -\int_{-1}^1 g\phi\,dx,$$

avec $g(x) = Sgn(x) = (|x|)'_w$.
2. La fonction signe $Sgn(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $Sgn(x) = -1$ *si* $x < 0$ *est localement intégrable, mais n'a pas de derivée faible.*

Lemme 5.1.4. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha \neq 0$. *De plus, soit* f *une fonction définie sur* Ω, *telle que* $\forall x \in \Omega$ *elle admet une dérivée ordinaire (au sens classique)* $(D^\alpha f)(x)$ *et* $D^\alpha f \in C(\Omega)$, *alors* $D^\alpha f = D_w^\alpha f$.

[2] $\mathbb{N}_0^n = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \cup \{0, 0, ..., 0\}$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., n$.
[3] Dans $D_w^\alpha f$, w vient du mot anglais weak.

$$\int_\Omega f\, D^\alpha(\varphi)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha f)\, \varphi d\, x. \tag{5.3}$$

Remarque 5.1.5. *Pour définir la dérivée faible $D_w^\alpha f$ on n'a pas besoin de l'existence de dérivée d'ordre inférieur.*

Exemple 5.1.6. *Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = Sgn(x_1) + Sgn(x_2)$. On sait que $(\frac{\partial f}{\partial x_1})_w$ et $(\frac{\partial f}{\partial x_2})_w$ n'existent pas mais $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})_w = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.*

Lemme 5.1.7. *(Dérvée faible sous le signe intégral) [12]. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble ouvert, $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble mesurable et soit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \neq 0$. On suppose que la fonction f est définie sur $\Omega \times A$, pour presque tout $y \in A$, $f(.,y) \in L_1^{loc}(\Omega)$ et il existe une dérivée faible $D_w^\alpha f(.,y)$ sur Ω. De plus, on suppose que $f, D_w^\alpha f \in L_1(K \times A)$ pour chaque compact $K \subset \Omega$. Alors sur Ω*

$$D_w^\alpha \left(\int_A f(x,y)\, d\, y \right) = \int_A (D_w^\alpha f)\, (x,y)\, d\, y. \tag{5.4}$$

Idée de preuve : On utilise la définition 5.1.2 et le théorème de Fubini. (Pour plus de détails voir [12] lemme 3. p. 24).

Le lemme suivant est souvent utile dans les preuves.

Lemme 5.1.8. *[12]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L_1^{loc}(\Omega)$. Alors :*

$$\left[\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \right] \Leftrightarrow [f = 0\, p.p].$$

5.1.1 Définitions équivalentes.

Définition 5.1.9. *[12]. (Approximation theorem for weak derivatives.) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \neq 0$ et $f, g \in L_1^{loc}(\Omega)$. La fonction g est dite une dérivée faible d'ordre α de la fonction f sur Ω ($g = D_w^\alpha f$) s'il existe une suite de fonctions $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ et $D^\alpha f_n \to g$ dans $L_1^{loc}(\Omega)$, alors la dérivée faible $D_w^\alpha f$ de la fonction f est donnée par $g = D_w^\alpha f = D^\alpha f \in L_1^{loc}(\Omega)$.*

Définition 5.1.10. *[12]*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $l \in \mathbb{N}$ et $f, g \in L_1^{loc}(\Omega)$. La fonction g est une dérivée au sens de distribution (faible)d'ordre l de la fonction f sur Ω ($g = D_w^l f = f^{(l)}$) s'il existe une fonction $h \sim f$ sur Ω avec $h^{(l-1)}$ absolument continue [4] *telle $h^{(l)} \sim g$ ($h^{(l)}$ existe presque partout sur Ω.)*

Théorème 5.1.11. *Les définitions 5.1.2 et 5.1.9 sont équivalentes.*

Démonstration. Voir [12] thm 1.p.22. □

Remarque 5.1.12. *Pour chaque $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ la dérivée $D^\alpha f$ existe au sens de la théorie des distributions, i.e, comme une fonctionnelle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*[5]

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \langle D^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(D^\alpha \varphi) dx. \tag{5.5}$$

Du point de vue de la théorie des distributions la dérivée faible $D_w^\alpha f$ d'une fonction $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ existe si, est seulement si, la dérivée au sens des distributions $D^\alpha f$ est une distribution régulière, i.e., une fonctionnelle réprésentée par une fonction $g \in L_1^{loc}(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \langle D^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\, \varphi) d\, x.$$

Cette fonction g est une dérivée faible d'ordre α de la fonction f sur Ω.

5.1.2 Propriétés des dérivées faibles

Lemme 5.1.13. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \neq 0$ et $f, g, h \in L_1^{loc}(\Omega)$ et $g = D_w^\alpha f$, $h = D_w^\alpha f$ sur Ω. Alors $g \sim f$.*

Idée de la preuve. On utilise la définition 5.1.2 et le lemme 5.1.8.

Lemme 5.1.14. *Supposons que $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ et que les dérivées faibles $g = D_w^\alpha f$, $h = D_w^\beta g$ existent sur Ω pour tout multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, alors*

$$h = D_w^\beta D_w^\alpha f = D_w^{\alpha+\beta} f.$$

Démonstration. On applique la définition 5.1.2. □

[4] On rappelle que la fonction g est absolument continue sur $[a.b]$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que quels que soient les intervalles disjoints $(a_j, b_j) \subset (a, b), j = 1, ..., s$, vérifiant $\sum_{j=1}^{j=s}(b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_{j=1}^{j=s}(f(b_j) - f(a_j)) < \epsilon$. La fonction g est locallement absolument continue sur l'ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ si elle est absolument continue sur chaque intervalle férmé $[a, b] \subset \Omega$.

[5] L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$: est le dual topologique de l'espace $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$.

5.2 Les espaces $w^{l,p}(\Omega), W^{l,p}(\Omega), \widetilde{W}^{l,p}(\Omega)$

Soit Ω un sous ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On introduit pour $l \in \mathbb{N}$ et pour $1 \leq p \leq \infty$ la définition des espaces de Sobolev.

5.2.1 Définitions

Définition 5.2.1. *($w^{l,p}(\Omega)$ [39], [12]). Soient $l \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$. La fonction f appartient à l'espace semi-normé de Sobolev $w^{l,p}(\Omega)$ si $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, admet une dérivée faible $D_w^\alpha f \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ satisfaisant $|\alpha| = l$, muni de la semi-norme*

$$\|f\|_{w^{l,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=l} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \tag{5.6}$$

Définition 5.2.2. *($W^{l,p}(\Omega), \widetilde{W}^{l,p}(\Omega)$ [39], [12]). Soient $l \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$. La fonction f appartient à l'espace de Sobolev $W^{l,p}(\Omega) = w^{l,p}(\Omega) \bigcap L_p(\Omega)$ si $f \in L^p(\Omega)$, et admet une dérivée faible $D_w^\alpha f \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ satisfaisant $|\alpha| = l$, muni de la norme*

$$\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{w^{l,p}(\Omega)} < \infty, \tag{5.7}$$

On définit l'espace $\widetilde{W}^{l,p}(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{l} w^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\widetilde{W}^{l,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq l} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \tag{5.8}$$

En particulier $w^{0,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) = \widetilde{W}^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Définition 5.2.3. *(condition du cône) [39], [12]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on dit qu'il possede la proprieté du cône s'il existe un cône $K = \bigcup_{y\in B}(0, y)$ tel que $\forall x \in \Omega$ on peut trouver un cône K_x congru au cône donné K ayant comme sommet le point x, et $K_x \subset \Omega$.*

Remarque 5.2.4. *(1) Quand on ecrit $\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ cela signifie que toutes les dérivées d'ordre superieur l existent et appartiennent à l'espace $L^p(\Omega)$.*

(2) $\sum_{0\le|\alpha|\le l}\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ *cela signifie que toutes les dérivées existent et appartiennent à l'espace* $L^p(\Omega)$.

(3) Les espaces $w^{l,p}(\Omega)$, $W^{l,p}(\Omega)$, $\widetilde{W}^{l,p}(\Omega)$ *coincident si l'ouvert* Ω *vérifie la condition du cône.*

Théorème 5.2.5. *(Complétude) [1]. Les espace* $W^{l,p}(\Omega),,\widetilde{W}^{l,p}(\Omega)$ *sont des espaces de Banach .*

Idée de preuve : On utilise la completude de l'espace $L^p(\Omega)$ et la définition de la dérivée faible.

Remarque 5.2.6. *La norme (5.7) est equivalente à la norme*

$$\|f\|^{(1)}_{W^{l,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left(|f|^p + \sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha_w f|^p\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.9}$$

pour $1\le p<\infty$ *et*

$$\|f\|^{(1)}_{W^{l,\infty}(\Omega)} := \max\{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \max_{|\alpha|=l}\|D^\alpha_w f\|_{L^\infty(\Omega)}\}, \tag{5.10}$$

Si $p=2$, *on note* $H^l(\Omega) := W^{l,2}(\Omega)$ *et pour* $f\in H^l(\Omega)$, $\|f\|_{l,\Omega} = \|f\|_{l,2,\Omega}$. *Les espaces* $H^l(\Omega)$ *sont des espaces de Hilbert où le produit scalaire est définie par*

$$\langle f,g\rangle_{l,\Omega} = \int_\Omega\left(f\overline{g} + \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha_w f\,\overline{D^\alpha_w g}\right)dx, \tag{5.11}$$

Lemme 5.2.7. *(Inégalité de Minkowsky pour les espaces de Sobolev). Soit* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *un ouvert, et* $A\subset\mathbb{R}^m$, $l\in\mathbb{N}, 1\le p\le\infty$. *On suppose que*

(1) f *est mesurable sur* $\Omega\times A$,

(2) $f(.,y)\in W^{l,p}(\Omega)$ *pour presque tout* $y\in A$.

Alors

$$\left\|\int_A f(x,y)dy\right\|_{W^{l,p}(\Omega)} \le \int_A \|f(x,y)\|_{W^{l,p}(\Omega)}dy \tag{5.12}$$

Démonstration. On applique le lemme 5.1.7 (dérivée faible sous le signe intégrale) et l'inégalité de Minkovsky pour les espaces $L^p(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\|\int_A f(x,y)dy\|_{W^{l,p}(\Omega)} &= \|\int_A f(x,y)dy\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=l}\|D_w^\alpha\int_A f(x,y)dy\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \int_A \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega)}dy + \sum_{|\alpha|=l}\int_A\|D_w^\alpha f(x,y)\|_{L^p(\Omega)}dy \\ &= \int_A\|f(x,y)\|_{W^{l,p}(\Omega)}dy.\end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.8. *(Continuité par rapport à la translation pour les espaces de Sobolev). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $l \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$. Alors $\forall f \in W^{l,p}(\Omega)$*

$$\lim_{h\to 0}\|f(x+h)-f(x)\|_{W^{l,p}(\Omega_{(h)})} = 0, \tag{5.13}$$

oú $h \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_{(h)} = \{x \in \Omega : x+h \in \Omega\}$.

Démonstration. On applique la définition de la norme $\|.\|_{W^{l,p}}$ et la continuité de la translation pour les espaces L^p (ou continuité en moyenne pour les fonctions de $L^p(\Omega)$)

$$\lim_{h\to 0}\|f(x+h)-f(x)\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

□

Remarque 5.2.9. *Le lemme (5.2.8) n'est pas valable pour $p = \infty$. (Voir [12]).*

5.2.2 Reflexivité et séparabilité

On a les propriétés suivantes

Proposition 5.2.10. *L'espace $W^{l,p}(\Omega)$ est*

(i) *un espace réflexif pour* $1 < p < \infty$,

(ii) *un espace séparable pour* $1 \le p < \infty$.

Démonstration. Voir [1] ou [33] thm 5.4.2, p. 263. □

5.2.3 Types de domaines

Définition 5.2.11. *(Domaine étoilé) [12], [39]. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit*

(1) étoilé par rapport au point $y \in \Omega$ si $\forall x \in \Omega$ le segment $[x, y] \subset \Omega$.

(2) étoilé par rapport la boule ouverte $B \subset \Omega$, si $\forall y \in B$ et $\forall x \in \Omega$ $[x, y] \subset \Omega$.

Exemple 5.2.12. *1. Un domaine convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé par rapport à chaque point $y \in \Omega$ et chaque boule $B \subset \Omega$. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si, est seulement si,il est étoilé par rapport à chaque point $y \in \Omega$*
2. Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à l'intérieur de la courbe décrite par l'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (l'astroide) n'est pas étoilé sauf par rapport à l'origine .

Définition 5.2.13. *(condition du cône) [39], [12]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on dit qu'il possede la proprieté du cône s'il existe un cône $K = \bigcup_{y \in B}(0, y)$ tel que $\forall x \in \Omega$ on peut trouver un cône K_x congru au cône donné K ayant comme sommet le point x, et $K_x \subset \Omega$.*

Exemple 5.2.14. *$\Omega = \mathbb{R}^n$ satisfait la condition du cône .*

Lemme 5.2.15. *[12]. Si un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé par rapport à une boule, alors il satisfait la condition du cône.*

Démonstration. Voir [12] pp. 99 lemme .3. □

5.2.4 Théorèmes de densité

Théorème 5.2.16. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Si $u \in w^{l,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, alors il existe une suite*

$$(u_n)_{n \geq 1} \in C^\infty(\Omega) \bigcap w^{l,p}(\Omega)$$

telle que

$$\|u_n - u\|_{w^{l,p}(\Omega)} \to 0. \tag{5.14}$$

Démonstration. Voir [39] sous-section 1.4.1 théorème 1 pp 26. □

Théorème 5.2.17. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Si $1 \leq p < \infty$, alors*

(1) L'espace $W^{l,p}(\Omega) \bigcap C^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{l,p}(\Omega)$,

(2) L'espace $\widetilde{W}^{l,p}(\Omega) \bigcap C^{\infty}(\Omega)$ *est dense dans* $\widetilde{W}^{l,p}(\Omega)$.

Démonstration. Voir [39] sous-section 1.4.1 théorème 2 pp 26. □

Définition 5.2.18. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. *Pour* $k > 0$ *et* $1 \leq p < \infty$, *on définit* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *en tant que sous-espace de* $W^{k,p}(\Omega)$ *et*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)} \ \text{ dans } W^{k,p}(\Omega).$$

Corollaire 5.2.19.

$$W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

En d'autres termes $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

5.2.5 Théorèmes d'injection.

Dans [12] sont prouvés les 2 théorèmes suivants.

Théorème 5.2.20. ***(Injection dans l'espace des fonctions continues).*** *Soient* $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *un ouvert satisfaisant la condition du cône. Si*

$$l > \frac{n}{p} \ \text{ pour } \ 1 < p < \infty, \qquad l \geq n \ \text{ pour } \ p = 1.$$

Alors chaque fonction $f \in W^{l,p}(\Omega)$ *est équivalente à la fonction* $g \in C_b(\Omega)$[6] *et*

$$\|g\|_{C(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)}, \tag{5.15}$$

où $C > 0$ *est une constante indépendante de* f, *c'est à dire* $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b(\Omega)$.

Lemme 5.2.21. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert vérifiant la condition du cône avec les paramètres* $r > 0$, $h > 0$, $l \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0^n$ *et* $|b| < l$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *dépendant seulement de* n, l, r *et* h, *telle que* $\forall f \in (W^{l,p}(\Omega))^{loc}$ *pour presque tous les* $x \in \Omega$, *on a*

$$|(D_w^b f)(x)| \leq C\Big(\int_{\Omega} |f(y)|dy + \sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} \frac{|(D_w^{\alpha} f)(y)|}{|x-y|^{n-l+|b|}}dy\Big). \tag{5.16}$$

[6] $C_b(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur Ω.

Remarque 5.2.22. *Si $b = 0$ dans (5.16), on obtient*

$$|f(x)| \leq A_1\Big(\int_\Omega |f(y)|dy + \sum_{|\alpha|=l}\int_\Omega \frac{|(D_w^\alpha f)(y)|}{|x-y|^{n-l}}dy\Big), \tag{5.17}$$

où A_1 est une constante indépendante de f.

Théorème 5.2.23. ***(Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev).***
Soient $1 < p < q < \infty$, $1 \leq m \leq n$. Alors $\exists C = C(p,q,m,n) > 0$, telle que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\||x|^{-\lambda} * f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.18}$$

où $\lambda = \frac{n}{p'} + \frac{m}{q}$.

Remarque 5.2.24. *Si $n = 1$, alors l'inégalité (5.18) est dite inégalité de Hardy-Littlewood, et si $n = m \geq 2$ elle est dite inégalité de Sobolev.*

Théorème 5.2.25. ***(Injection dans l'espace L^q).***
Soient $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $l < \frac{n}{p}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert satisfaisant la condition du cône. Pour q^* définie par

$$l = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}) \qquad ou \qquad q^* = \frac{np}{n-pl} > p. \tag{5.19}$$

Alors pour chaque fonction $f \in W^{l,p}(\Omega)$, $\exists g \sim f$, $g \in L^{q^*}(\Omega)$ telle que :

$$\|g\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)}, \tag{5.20}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f, c'est à dire

$$W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega).$$

Démonstration. Soit $1 \leq q \leq q^*$, d'apres l'inégalité (5.17) on a

$$|f(x)| \leq A_1\Big(\|f\|_{L^1(B_r)} + \sum_{|\alpha|=l}\int_\Omega \frac{|(D^\alpha f)(y)|}{|x-y|^{n-l}}dy\Big),$$

d'où

$$\|f(x)\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq A_1\Big\|\|f\|_{L^1(B_r)}\Big\|_{L^{q^*}(\Omega)} + \Big\|\sum_{|\alpha|=l}\int_\Omega \frac{|(D^\alpha f)(y)|}{|x-y|^{n-l}}dy\Big\|_{L^{q^*}(\Omega)}.$$

On applique l'inégalité de Hölder

$$\|f(x)\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq A_1\Big(\|f\|_{L^p(B_r)}(mes(B_r))^{1-\frac{1}{p}}(mes(\Omega))^{\frac{1}{q^*}}+\sum_{|\alpha|=l}\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|(D^\alpha f)(y)|}{|x-y|^{n-l}}dy\Big\|_{L^{q^*}(\Omega)}\Big)$$

$$\leq A_1\Big(\|f\|_{L^p(\Omega)}(mes(\Omega))^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q^*}}+\sum_{|\alpha|=l}\Big\||x-y|^{n-l}*D^\alpha f(y)|\Big\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

On pose $|x-y|=X$ et on applique l'inégalité (5.18)

$$\||x|^{l-n}*\dot{D}^\alpha f(y)\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^n)} \leq A_2\|\dot{D}^\alpha f(y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.21}$$

où

$$\dot{D}^\alpha f(y)=\begin{cases} D^\alpha f(y) & si\ y\in\Omega,\\ 0 & si\ y\in\mathbb{R}^n/\Omega.\end{cases}$$

De (5.21) on obtient

$$\|f(x)\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq A_1\Big(\|f\|_{L^p(\Omega)}(mes(\Omega))^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q^*}}+A_2\sum_{|\alpha|=l}\Big\|\dot{D}^\alpha f(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)$$

$$\leq A_3\Big(\|f\|_{L^p(\Omega)}\sum_{|\alpha|=l}\Big\|\dot{D}^\alpha f(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)=A_3\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)},$$

où $A_3=A_1\max\big(A_2, mes(\Omega)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q^*}}\big)$. □

Conséquence 5.2.26. *Si $p\leq q\leq q^*$, alors*

$$W^{l,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

5.3 Espaces de Sobolev généralisés

5.3.1 Définitions et quelques propriétes des espaces de Sobolev généralisés

Définition 5.3.1. *[20] [31] L'espace $W^{m,p(x)}(\Omega)$ est la classe de toutes les fonctions f sur Ω qui possédent les derivees faibles $D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, $|\alpha|\leq m$, $m\in\mathbb{N}$, et*

$$\|f\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}<\infty. \tag{5.22}$$

Définition 5.3.2. *[23] [31] On definit* $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ *comme la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{m,p(x)}(\Omega)$ *par rapport à la norme (5.22).*

Théorème 5.3.3. *Les espaces* $W^{m,p(x)}(\Omega)$ *et* $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ *sont des espaces de Banach, et sont séparables si* $p \in L^\infty(\Omega)$ *et réflexifs si* $1 < \underline{p} \leq \overline{p} < \infty$.

Démonstration. Voir [31]. □

5.3.2 Les Théorèmes de Densité.

Samko [49] et Fan and Zhao [22], avaient prouvé independemment que si $p(x)$ vérifie la condition log-Hölder, alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{k,p(.)}(\mathbb{R}^n)$. Edmunds and Rakosnik ont montré que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω borné, $\partial\Omega \in Lip$ et $p(x)$ verifie une condition similaire à celle du log-Hölder, alors $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p(.)}(\Omega)$.

Lemme 5.3.4. *[27] Si* $\overline{p} < \infty$, *alors* $C^\infty(I) \cap W^{1,p(x)}(I)$ *est dense dans* $W^{1,p(x)}(I)$, *ici* $I = (-1, 1)$.

Démonstration. Soit $u \in W^{1,p(x)}(I)$, on fixe $\epsilon > 0$. D'apres [31] théorème 3.4, il existe une fonction $g \in C^\infty(I) \cap L^{p(x)}(I)$ telle que $\|u' - g\|_{L^{p(x)}(I)} \leq \epsilon$. Fixons $z \in I$. Posons

$$v(y) = u(z) + \int_z^y g(x)dx,$$

pour $y \in I$ on a $v' = g$, d'où

$$\begin{aligned} |v(y) - u(y)| &= \Big|u(z) + \int_z^y g(x)dx - u(z) - \big(u(y) - u(z)\big)\Big| \\ &= \Big|u(z) + \int_z^y g(x)dx - u(z) - \int_z^y u'(x)dx\Big| \\ &\leq \int_z^y \big|g(x) - u'(x)\big|dx \leq \|u' - g\|_{L^1(I)}. \end{aligned}$$

D'apres la proposition 3.2.13 on a $\|u' - g\|_{L^1(I)} \leq 2\|u' - g\|_{L^{p(x)}(I)} < 2\epsilon$. D'apres la même proposition et l'inégalité ci-dessus on a $\|v - u\|_{L^{p(x)}(I)} \leq 2\|v - u\|_{L^\infty(I)} = 2 \sup vrai_{\Omega_\infty} |v(y) - u(y)| \leq 2\|u' - g\|_{L^1(I)} < 4\epsilon$, et donc

$$\|v - u\|_{W^{1,p(x)}(I)} = \|v - u\|_{L^{p(x)}(I)} + \|u' - g\|_{L^{p(x)}(I)} < 5\epsilon.$$

Comme $v \in C^\infty(I)$ et comme ϵ est arbitraire, $C^\infty(I) \cap W^{1,p(x)}(I)$ est dense dans $W^{1,p(x)}(I)$. □

Théorème 5.3.5. *[27] Si $\overline{p} < \infty$, alors $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p(x)}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R})$, fixons $\epsilon > 0$. On note par I_x l'intervalle ouvert $(x-1, x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi(x) \in C_0^\infty([-1,1])$ (prolongée par zéro à l'exterieur de $[-1,1]$) une fonction non-négative L-Lipchtzienne telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k)$ est identiquement égale à 1.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on choisit une fonction v_k de $C^\infty(I_k)$ telle que $\|u - v_k\|_{W^{1,p(x)}(I_k)} < \epsilon/2^{|k|}$ (utilisant le lemme 5.3.4). Posons $v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k(x)\varphi(x-k)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R})} &= \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(u(x) - v_k(x)\big)\varphi(x-k) \Big\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R})} \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big\| \big(u(x) - v_k(x)\big)\varphi(x-k) \Big\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R})} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\big\|u - v_k\big\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R})} + \Big\| \big\{ \big(u(x) - v_k(x)\big)\varphi(x-k) \big\}' \Big\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R})} \Big]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\big\|u - v_k\big\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R})} + \Big\| \big(u(x) - v_k(x)\big)'\varphi(x-k) + \big(u(x) - v_k(x)\big)\varphi'(x-k) \Big\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R})} \Big]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(1+L\big)\big\|u - v_k\big\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R})} + \big\|(u - v_k)'\big\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R})} \\
&= \big(1+L\big) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\|u - v_k\big\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R})} \\
&\leq \big(1+L\big)\epsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-|k|} = 3\big(1+L\big)\epsilon.
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{l\to\infty} \Big\| u(x) - \sum_{k=-l}^{l} v_k(x)\varphi(x-k) \Big\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R})} \leq 3\big(1+L\big)\epsilon,$$

il s'ensuit qu'il existe un entier l tel que

$$\Big\| u(x) - \sum_{k=-l}^{l} v_k(x)\varphi(x-k) \Big\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R})} \leq 3\big(1+L\big)\epsilon.$$

Comme $\sum_{k=-l}^{l} v_k(x)\varphi(x-k) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, et ϵ est arbitraire, alors on conclut la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $W^{1,p(x)}(\mathbb{R})$. $\square$

Théorème 5.3.6. *Si Ω est un ensemble borné dans $\mathbb{R}^n$ où la frontière est Lipshitzienne, $p \in L_+^\infty(\Omega)$*[7] *et $p(x)$ satisfait la condition (dite condition de (F-Z)*[8]*) sur $\overline{\Omega}$, i.e. il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$-|p(x) - p(y)| log|x - y| \leq L \qquad \forall x, y \in \overline{\Omega},$$

alors $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Voir [23] □

Théorème 5.3.7. *soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert non-vide, et soit $p : \Omega \to [1, \infty)$ une fonction mesurable satisfait la condition suivante :*
Pour tout $x \in \Omega$, il existe $0 < r(x) \leq 1$, $h(x) > 0$ et un vecteur $\xi(x) \in \mathbb{R}^n/\{0\}$ telle que

$$h(x) < |\xi(x)| \leq 1,$$
$$B(x, r(x)) + C(x) \subset \Omega,$$

où $C(x) = C_{\xi(x),h(x)}$,

$$p(x) \leq p(x + y), \quad p.p\ x \in \Omega,\ y \in C(x).$$

Alors $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p(x)}(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Voir [20]. □

Soient $K(x)$ une fonction mesurable avec support dans la boule $B_r = B(0, r)$, $r < \infty$ et

$$K_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} K(\frac{x}{\epsilon}).$$

On considère la famille d'opérateurs

$$(K_\epsilon f)(x) = \int_\Omega K_\epsilon(x - y) f(y) dy,$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$.
On définit

$$\Omega_r = \{x : \ dist(x, \Omega) \leq r\} \supseteq \Omega.$$

Soit aussi

$$Q = \begin{cases} sup_{x \in \Omega_r} q(x) = \frac{\underline{p}}{\underline{p}-1} & si\ |\Omega_1(p)| = 0, \\ \infty & si\ |\Omega_1(p)| > 0. \end{cases}$$

[7] $L_+^\infty(\Omega) = \{p(x),\ p(x) \in L^\infty(\Omega),\ \underline{p} > 1\}$
[8] (F-Z) veut dire Fan and Zhao.

Théorème 5.3.8. *Soient $K(x) \in L^Q(B_r)$ et $p(x)$ qui satisfait les conditions suivantes*

$$1 \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty, \quad pour\ x \in \Omega_r.$$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{log\frac{1}{|x-y|}}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}.$$

Alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir [49]. □

Remarque 5.3.9. *Pour $m > 1$, la densité pour les espaces de Sobolev généralisés est plus compliquée car il faut au moins une condition supplémentaire (log-Hölder) ou (F-Z) par rapport aux espaces classiques de Sobolev.*

5.3.3 Les Théorèmes d'injections

Le résultat suivant est une conséquence de l'injection $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, (voir proposition 3.2.13).

Théorème 5.3.10. *[23] Si $p(x) \leq q(x)$, p.p, $x \in \Omega$, alors $W^{m,q(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p(x)}(\Omega)$.*

Théorème 5.3.11. *[15] [31] Soit $q(x) = \frac{np(x)}{n-p(x)}$[9], alors on n'a pas toujours l'injection suivante*

$$W^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega). \tag{5.23}$$

On peut illustrer le théorème avec un contre exemple.
Soit $n = 2$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$, $1 < r < s < 2$ et $\sigma = 2(s - r)/r$. On note par A l'ensemble des points $x \in \Omega$, où les coordonnées polaires $t = |x|$, $\varphi = arccosx$, satisfont l'inégalité $0 < \varphi < t^\sigma$; on défnit

$$p(x) = \begin{cases} r & si\ x \in \Omega/A, \\ s & si\ x \in A. \end{cases}$$

Le conjugué de Sobolev est

$$q(x) = \begin{cases} 2r/(2-r) & si\ x \in \Omega/A, \\ 2s/(2-s) & si\ x \in A. \end{cases}$$

[9] $q(x) = \frac{np(x)}{n-p(x)}$ est appelé conjugué de Sobolev pour l'espace $W^{m,p(x)}(\Omega)$.

Alors la fonction $f(x) = |x|^{\mu}$ avec $\mu = (s-2)/r$ appartient a $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et n'appartient pas a $L^{q(x)}(\Omega)$ (pour plus de details voir [31]).

Le théorème précédent constituait un problème ouvert jusq'aux années 2000, plus tard on a ajouté d'autres conditions pour que l'injection (5.23) soit vérifiée.

Théorème 5.3.12. *1. Soit Ω un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ avec la propriété du cône, $p \in L_+^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\overline{p} < n$, et $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue. Si $q \in L_+^{\infty}(\Omega)$ satisfait*

$$q(x) \leq p^*(x) = \frac{np(x)}{n - p(x)}, \quad \forall x \in \Omega,$$

alors on a

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

et l'injection est compacte si $q(x) \ll p^*(x)$[10].
2. Soient $p \in L_+^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ $\overline{p} < n$, et $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uniformement continue. Si $q \in L_+^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ satisfait

$$p(x) \leq q(x) \ll p^*(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

alors $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir [24]. □

Théorème 5.3.13. *Soit $p, q \in C(\overline{\Omega})$ et $p, q \in L_+^{\infty}(\Omega)$. Supposons que*

$$mp(x) < n, \quad q(x) < \frac{np(x)}{n - mp(x)}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Alors il existe une injection continue et compacte $W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Voir [23]. □

Théorème 5.3.14. *Si $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est Lipchitzienne et $q(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est mesurable et satisfont*

$$p(x) \leq q(x) \leq p^*(x) = \frac{np(x)}{n - kp(x)}, \quad p.p\ x \in \overline{\Omega},$$

alors il existe une injection continue $W^{k,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$.

[10]Pour $\alpha, \beta \in L_+^{\infty}(\Omega)$, on note par $\alpha \ll \beta$ dans Ω ou par $\alpha \ll \beta$ $\forall x \in \Omega$ on a $\inf_{x \in \Omega}(\beta(x) - \alpha(x)) > 0$.

Démonstration. Voir [22]. □

Théorème 5.3.15. *Si $p(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est uniformement continue et satisfait la condition*

$$1 < \underline{p} \leq \overline{p} < \frac{n}{k},$$

alors pour toute fonction mesurable $q(x)$ définie sur Ω avec

$$p(x) \leq q(x) \qquad p.p\ x \in \overline{\Omega},$$

et

$$\inf_{x \in \overline{\Omega}} vrai(p^* - q(x)) > 0,$$

on a $W^{k,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Voir [22]. □

Théorème 5.3.16. *Si Ω est borné, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, et $q(x)$ (est la même comme dans théorème 5.3.15), alors il existe une injection continue compacte $W^{k,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$.*

Démonstration. Voir [22]. □

Remarque 5.3.17. *Si $p(x) \equiv p$ alors les théorèmes 5.3.14 5.3.15 et 5.3.16 sont les mêmes que les théorèmes d'injection connus dans le cas classique (voir [1]).*

On constate que pour les espaces généralisés, l'injection est plus compliquée par rapport aux espaces classiques, c'est-à-dire on impose d'autres conditions supplémentaires.

Conclusion

Un pas majeur a été fait en ce qui concerne les recherches sur les espaces avec paramètres variables et ceci grâce à la parution de l'article de O. Kovacik, et J. Rakosnik au début des années 90, (voir [31]). Dans ce dernier article ont été établies certaines propriétés de base concernant les espaces de Lebesgue (avec p variable) et ceux de Sobolev (p variable) dans $\mathbb{R}^n$. Depuis les années deux mille beaucoup d'efforts ont été fournis pour bien comprendre ces espaces. A la fin du siècle dernier plusieurs facteurs ont contribué au commencement d'une période d'étude systématique de ces espaces avec paramètres variables.
1. A été trouvée la condition dite Log-Hölder continuity qui a permis aux chercheurs de prouver une multitude de résultats en commençant par la bornétude de l'opérateur maximal (Hardy-Littlewood).
2. La relation a été établie entre ces espaces avec paramètres variables et les intégrales variationnelles avec une croissance non standard et les conditions de coercivité.
3. On a constaté que ces non standards variationnells problèmes sont liés avec la théorie de ce qu'on appelle electrorheological fluids.
4. L'émergence de nouveaux groupes de recherches sur la thématique (Faro, Freiburg, Helsinki, Hiroshima Lanzhaou, Parma, Prague, et Tbilisi).
Parmi les différents problèmes qui ont apparu lors de l'étude de ces espaces on peut citer quelques-uns :
a. Celui de la bornétude de l'opérateur de Hardy-Littlewood.
b. Généralisation de l'interpolation complexe et réelle au cas $L^{p(x)}$ (on a déjà prouvé le théorème de Reisz-Thorin dans $L^{p(x)}$).
c. La densité des fonctions C^∞ dans l'espace $W^{k,p(x)}$ de Sobolev avec p variable. La 1^{er} résultat est dù à Edmunds et Ràkosnik qui ont montré que la classe C^∞ est dense dans $W^{k,p(x)}$ sous une certaine condition de monotonicité sur $p(x)$qui s'est avérée assez compliquée pour l'application ; un peu plus tard Samko (voir [49]) a établi une condition dite Log-Hölder continuity sur le paramètre $p(x)$, qui est suffisante pour la densité, ce qui en fait consiste une importante avancée.
d. Concernant l'injection certains problèmes étaient ouverts jusqu'aux années 2000, par exemple : il existe $p(x)$ continue sur un domaine régulier Ω tel que $W^{1,p(x)}$ ne s'injecte pas dans $L^{q^*(x)}$, où q^* est le paramètre conjugué de Sobolev c.-à-d. $q^*(x) = \frac{np(x)}{n-p(x)}$.
La thématique est d'actualité et de nos jours plusieurs mathématiciens de différents pays continuent leurs recherches sur cette théorie et ses applications aux differentes branches des mathématiques.

Bibliographie

[1] Adams.R.A., Sobolev spaces, Academic Press, Inc., Boston, 1978.

[2] A. Aikawa, M. Essen, Potentiel theory-selected topics. Lecture notes in Math. vol. 1633. Springer. Berlin (1996).

[3] N. Azzouz, V. I. Burenkov, A. Senouci, A weighted Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ with sharp constant. M.I.A. Volume 18, number 2 (2015). 787-799.

[4] N. Azzouz, B. Halim, A. Senouci, An inequality for the weighted Hardy operator for $0 < p < 1$. Eurasian Mathematical journal., ISSN 2077-9879. Volume 4, Number 3(2013), 60-65.

[5] R.A. Bandaliev, On an inequality in Lebesgue space with mixed norm and with variable summability exponent, Mat. Zametki, 3(84) (2008), 323-333. (in Russian). English translation : Math. Notes, 3(84) (2008), 303-313.

[6] R.A. Bandaliev, On Hardy-type inequalitys in weighted variable exponent spaces $L_{p(x),w}$ for $0 < p < 1$. Eurasian Mathematical journal., ISSN 2077-9879. Volume 4, Number 4(2013), 5-16.

[7] **S. A. Bendaoud, A. Senouci, Inequalities for weighted Hardy operators in weighted variable exponent Lebesgue space with** $0 < p(x) < 1$**, Eurasian Mathematical journal, ISSN 2077-9879, Volume9, Number 1 (2018), 30-39.**

[8] P. R. Beesack, Hardy's inequality and its extensions. Pacific J. Math., nř 11 (1961) : 39-61.

[9] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et applocation, MASSON, Paris 1983.

[10] V. I. Burenkov, Main inequalities in L_p , Moscow-university 1989.

[11] V. I. Burenkov, On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions, Trudy Matem. Inst. Steklov 194(1992),

58-62 (in Russian); English translation in proc. Steklov Inst. Math. 1993, no4. (194), 59-63.

[12] Burenkov.V.I., Sobolev spaces on domains, B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig,1998.

[13] D. Cruz-Uribe, SFO and F. I. Mamedov. On a general weighted Hardy type inequality in the variable exponent Lebesgue space. Revista Mat. Comp. DOI : 10.1007/s13163-011-0076-5.

[14] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Rů*žič*ka, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, SPIN Springer's internal project number, December 2, 2010.

[15] L. Diening, P. Hästö, and A. Nekvinda, Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces in Proceedings of the Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (FSDONA 04), pp. 38-58, Milovy, Czech, 2004.

[16] L. Diening, Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl. 7(2), 245-254(2004).

[17] L. Diening and S. Samko, Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces. Fract. Calc. and Appl. Anal., 10(1) (2007), 1-17.

[18] L. Diening, Theoretical and numerical results for electrorheological fluids, Vorgelet von, Februar 2002.

[19] D. E. Edmunds, J. Lang, A. Nekvinda, On $L^{p(x)}$ norms, Proc. R. Soc. Lond, Ser. A 445,219-225 (1999).

[20] D. E. Edmunds and J. Rákosník : Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}(\Omega)$, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 437 (1992), 229-236.

[21] D. E. Edmunds and J. Rákosník : Sobolev embedding with variable exponent, Studia Math. 143 (2000), 267-293.

[22] X. L. Fan, J. Shen and D. Zhao : Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749-760.

[23] X. L. Fan and D. Zhao : On the spaces spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 424-446.

[24] X. L. Fan, Y. Zhao and D. Zhao : Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 255 (2001), 333-348.

[25] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1952.

[26] G. H. Hardy, Note on a theorem of Hilbert, Math. Z., 6 (1920), 314-317.

[27] P. Harjulehto and P. Hästö : An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, Future Trends in Geometric Function Theory (D. Herron (ed.), RNC Workshop, Jyväskylä, 2003), 85-93.

[28] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Pere, Variable exponent lebesgue space on metric spaces : The Hardy-Littlewood maximal operator, Math. helsinki, analysis, varsobgroup. 2004.

[29] V. Kokilashvili, S. Samko, Singular Integrals in Weighted Lebesgue Spaces with Variable Exponent. Georgian Math. J.,2 2003, vol.10, No 1, 145-156.

[30] A. Kolmongorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition MIR, Moscou, 2^{eme} edition, 1973.

[31] O. Kovacik, J. Rakosnik, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 41(1991), No. 4, 592-618.

[32] Kuang Jichang, Applied inegalities, Hunan Education Press, Changsha 1992.

[33] Kufner. A., O. John and S. Fucík : Function Spaces. Noordhoff Int. Publ., Leyden, 1977. MR 0482102.

[34] A. Kufner, L. Maligranda, et L.E. Persson. The prehistory of the Hardy inequality. Amer. Math. Monthly 113 (2006) : 715-732.

[35] A. Kufner, et H. Triebel. Generalisation of Hardy's inequality. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari , $n°$ 156 (1978) : 1-21.

[36] N. Levinson., Generalizations of inequality of Hardy, Duke Maths. J., 31 (1964), 389-394.

[37] E. Lieb, M. Loss, Analysis. American Mathematical Society. volume 14. 2000, Primary 28-01, 42-01, 46-01, 49-01.

[38] J. Lukeš, L. Pick, D. Pokorný, On geometric properties of the space $L^{p(x)}$, Rev Mat Complut(2011)24 : 115-130, Springer, 2011.

[39] V. G. Maz'ya and Sergei V.Poborchi Differentiable Functions on Bad Domains.

[40] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Springer, Berlin (1983).

[41] H. Nakano, Modulared Semi-Ordered Linear Spaces, Maruzen, Tokyo (1950).

[42] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, StudiaMath. 3, 200-212(1931).

[43] A. Ouardani, Les inégalité de Hardy et leurs variants. Magisteur. Univ-Tiaret 2008.

[44] V. R. Portnov, Two imbeddings for the spaces Lp, and their applications (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, $n°$ 155 (1964) : 761-764.

[45] M. Rúžička, Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748. Springer, Berlin (2000).

[46] S. H. Saker., Lyapunov's type inequalities for fourth-order differential equations. Abst. Appl. Anal. 2012. 795825(2012).

[47] S. G. Samko, Convolution and potential type operations in $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. Integr. Transform. and Special Funct., 1998, v. 7, no 3-4, 261-284.

[48] S. G. Samko, Convolution type operation in $L^{p(x)}$. Integr. Transform. and Special Funct., 1998, v. 7, no 1-2, 123-144.

[49] S. Samko : Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$, pp. 333-342 in Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics (Newark, DE, 1997), Int. Soc. Anal. Appl. Comput. 5, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[50] S. G. Samko, Diferentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$. Contemporary Mathematics, Volume 212. 1998.

[51] S. G. Samko, Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces. Fract. Calc. and Appl. Anal. 2003, vol. 6, no 4, 355-362.

[52] S. G. Samko, Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the Lebesgue space with variable exponent, An international journal theory and applications, Volume 6, Number 4 (2003).

[53] **A. Senouci, S. A. Bendaoud, Hardy type integral inequalities involving many functions for $0 < p < 1$., Book of Abstracts, pages 165-167., International conference of OMSTA., 10-13 july 2017., Ahi Evran University Kirshir-Turkey.**

[54] **A. Senouci, S. A. Bendaoud, Some generalizations of integral inequalities similar to Hardy's inequality, Afrika Matematika, (submitted).**

[55] A. Senouci, T. Tararykova, Hardy-type inequality for $0 < p < 1$. Evraziiskii Matematicheskii Zhurnal, 2 (2007), 112-116.

[56] I. I. Sharapudinov, On a topology of the space $L[0; 1]$), Matem. Zametki 26(1979), no4, 613-632.

[57] B. Sroysang, A generalization of some integral inequalities similar to Hardy's inequality, Math. Aeterna, 3 (2013), 593-596.

[58] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1970.

[59] W. T. Sulaiman, Reverses of Minkowski's, Hölder's, and Hardy's integral inequalities, Int. J. Mod. Math. Sci., 1 (2012), 14-24.

[60] F. A. Sysoeva, Generalistions of a certain Hardy inequality. Izv. Vyss. Uceb. Zaved. Mathematika 6, no 49 (1965) : 140-143.

[61] G. Talenti, Asseroazioni sopra una classe di disuguaghanza. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, no 39 (1969) : 171-185.

[62] G. N. Tomaselli, A class of inequalities. Ball. Un. Mat. Ital., no 2 (1969) : 622-631.

[63] I. Tsenov, Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s, Uch, Zap, Dagestan Gos, Univ, 7,25-37(1961).

[64] S. Wu, B. Sroysang, A further generalization of certain integral inequalities similar to Hardy's inequality, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2015).

[65] S. Wu, B. Sroysang, S. Li, A further generalization of certain integral inequalities similar to Hardy's inequality, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 1093-1102.

[66] V. V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Math. USSR, Izv. 29,33-66(1987).

[67] V. V. Zhikov, On passing to the limit in nonlinear variational problem. Mat. Sb. 183, 47-84 (1992).