Ministère de l'Enseignement Supérieur et de le Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes
Faculté de la Technologie

Département de Génie Civil
Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics

THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité Génie Civil

Option Structures & Matériaux

Par

Amine OSMANI

Intitulée

Etude de l'instabilité non linéaire des poutres métalliques élancées.

Soutenue publiquement le 03 juillet 2018 Devant le jury composé de :

• Ali BOUCHAFA	MCA	U.D.L – SBA	Président du jury
• Sid Ahmed MEFTAH	Pr	U.D.L – SBA	Directeur de thèse
• Mohamed BACHIR BOUIDJRA	Pr	U.D.L – SBA	Examinateur
• Redha YEGHNEM	Pr	U. de SAIDA	Examinateur
• Bachir BOUDERBA	MCA	CU de TISSEMSILT	Examinateur
• Hassene AIT ATMANE	Pr	U. de CHLEF	Examinateur
• Abdelouahed TOUNSI	Pr	U.D.L – SBA	Invité

-Année Universitaire 2017/2018-

Dédicace :

A mes très chers parents ;

A mon frère et mes sœurs ;

A toute ma famille ;

A mes amis ;

Je dédie ce modeste travail ....

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics du département du génie civil à l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.

Grâce à dieu, aux personnes qui m'ont soutenu et qui ne sont autres que les enseignants et mes collègues du laboratoire que ce travail a pu voir le jour.

En guise de reconnaissance, j'adresse mes sincères remerciements, mon grand respect et ma gratitude à mon encadreur Monsieur MEFTAH Sid Ahmed, Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes pour son aide, ses encouragements et à l'attention qu'il a portée à mon travail et des moments précieux de discussion qu'il m'a réservés. Je le remercie infiniment pour sa confiance, sa gentillesse et sa disponibilité.

Je ne saurais oublier mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi, pour leurs encouragements, leurs soutiens, leurs sacrifices et leur amour. Merci pour tout.

Ma sincère reconnaissance va au Docteur Ali BOUCHAFA pour m'avoir fait l'honneur d'être le président de mon jury de soutenance. J'adresse mes sincères remerciements à messieurs les membres de jury :

M^{r} Mohamed BACHIR BOUIDJRA professeur à la faculté de technologies à l'UDL de Sidi Bel Abbes.
M^{r} Redha YEGHNEM Professeur à l'université de Saida.
M^{r} Bachir BOUDERBA Maitre de conférences au centre universitaire de Tissemsilt.
M^{r} Hassene AIT ATMANE Professeur à l'université de Chlef.

Je voudrais également adresser mes vifs remerciements au professeur Abdelouahed TOUNSI pour son soutien et ses encouragements durant la préparation de ce doctorat et que j'ai l'honneur qu'il soit membre du jury, également le professeur El Abbas ADDA BEDIA pour ses conseils, son soutien de près . Je souhaite exprimer ma sympathie à toutes les personnes que j'ai côtoyées au laboratoire ainsi qu'à l'université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes.

Pour l'intérêt bienveillant qu'ils ont accordé à ce travail, Je voudrais encore une fois leur exprimer ma profonde gratitude.

TABLE DES MATIERES

RESUME

L'effet des déformations de cisaillement sur le déversement élastique des poutres à parois minces à section variables, bi-symétriques ouvertes et fermées coniques sous une combinaison de forces axiales et de flexion est étudié dans cette thèse. Pour ce faire, une théorie géométrique non linéaire de poutre est présentée selon un nouveau modèle cinématique incorporant des composants de déformation de cisaillement. La méthode de Ritz est appliquée pour obtenir les équations d'équilibre gouvernant, puis les charges de flambage sont calculées en résolvant le problème de valeur propre en se basant sur la singularité de la matrice de rigidité tangente. Les résistances de déversement élastique données par la méthode proposée sont généralement en bon accord avec la simulation par éléments finis utilisant le logiciel Abaqus. Les résultats numériques pour les consoles et les poutres à parois minces simplement appuyées avec des sections ouvertes et en box révèlent que la solution de stabilité classique a tendance à surestimer la résistance réelle de déversement des poutres en console.

Mots clés : Déversement, Poutre à section variable en console, Déformation de cisaillement, Méthode de Ritz.

ABSTRACT

The effect of shear deformations on elastic lateral buckling of tapered thin-walled open and closed bi-symmetric section beams under combined bending and axial forces is investigated. For the purpose, a geometrical non-linear beam theory is presented according to a new kinematic model that incorporates shear flexibility components. Ritz method is applied to obtain the governing equilibrium equations, then the buckling loads are computed by solving the eigenvalue problem basing on the singularity of the tangential stiffness matrix. The elastic lateral buckling resistances given by the proposed method are generally in good agreement with the finite element simulation using Abaqus software. The numerical results for cantilevers and simply supported thin walled beams with open and box sections reveal that the classical stability solution tends to overestimate the real lateral buckling resistance of short tapered box cantilever beams.

Keywords: Lateral-torsional buckling, Tapered I beams and cantilevers, Shear flexibility
Ritz method.

ملخص

إن تأثير التشوهات القصية على الانحراف الجانبي المرن للروافد ذات مقاطع عرضية متغيرة و متناظرة ,على شكل مستطيل أو مفتوحة والمكونة من جدران رقيقة والخاضعة لحمولة مشتركة انحناء- قوة محورية، هو موضوع هذه الدراسة. و لهذا تم اعتماد نموذج جديد غير خطي و اختيار حقل انتقال ملائم من اجل دراسة استقرار هذا النوع من الروافد بالاعتماد على نظرية ذات درجة عالية مع ألأخذ بعين الاعتبار التشوهات القصية. طريقة *Ritz* تم اعتمادها من أجل استخراج معادلات التوازن ومن ثم حمولات عدم الاستقرار انطلاقا من مصفوفة الصلابة وذلك لعدة أطوال للروافد.

مختلف الحلول تم مناقشتهم ومقارنتهم مع تلك النتائج العددية باستعمال البرنامج *Abaqus* فكانت هذه النتائج جد متقاربة. و بينت هذه النتائج أنه من أجل المقاومة الجانبية للانحراف للروافد ذات مقاطع عرضية مفتوحة أو على شكل مستطيل , الحلول المتحصل عليها عن طريق الطرق الكلاسيكية تعتبر مبالغ فيها.

الكلمات المفتاحية: الانحراف الجانبي بالالتواء ،روافد ذات مقاطع عرضية متغيرة ,التشوهات القصية, طريقة *Ritz*.

..

NOTATIONS

γ : Angle de glissement ;

γ_{M1} : Coefficient partiel pour la résistance des barres aux instabilités ;

γ_{M0} : Coefficient partiel pour la résistance des sections transversales ;

φ : Angle de rotation ;

τ : Contrainte tangentielle ;

β *:* Caractéristique sectorielle de la section ;

β_W : Facteur dépendant de la classe de la section ;

θ : Angle de torsion ;

ω : Fonction de gauchissement ;

σ_{cr} : Contrainte critique de flambement élastique ;

σ_D : Contrainte de déversement ;

σ_w : Contrainte normale de gauchissement ;

σ_{Dv} : La composante de la torsion uniforme ;

σ_{Dw} : La composante de la torsion non-uniforme ;

δ: La variation virtuelle ;

λ : Paramètre d'élancement ;

χ_{LT} : Coefficient de réduction au déversement ;

A : Surface de la section ;

b : Largeur de la semelle de la section ;

bf : Largeur de la semelle ;

B_ω : Bimoment ;

C : Centre de cisaillement ;

C_1, C_2 et C_3 : Facteurs dépendant du type de chargement et des conditions d'appui ;

C_b : Un facteur d'ajustement tenant compte du chargement ;

E : Module d'élasticité longitudinale ;

fy : Limite d'élasticité ;

G : Module de cisaillement ou de glissement ;

G : Centre de gravité ;

h : Hauteur de l'âme de la section ;

i : Rayon de giration ;

$I\omega$: Moment d'inertie sectoriel de la section ;

I_0 : Moment d'inertie polaire ;

I_R : Quatrième moment d'inertie du centre de cisaillement ;

I_t : Constante de torsion d'ordre supérieur ;

I_w : Constante de gauchissement ;

Iy : Moment d'inertie par rapport à l'axe y ;

Iz : Moment d'inertie par rapport à l'axe z ;

I_f : Moment d'inertie d'une semelle selon son axe fort

J : torsion de St-Venant ;

K : Constante de torsion uniforme ;

K : Coefficient de flambement ;

kc : Coefficient pour les parois élancées en console ;

kv, $k\varphi$: Coefficients d'encastrement aux appuis ;

ky, kz : Courbures ;

l : Longueur totale de la poutre ;

l_D : Longueur de déversement (distance entre deux appuis latéraux);

l_p : Distance entre deux maintiens latéraux pour l'état limite plastique (déversement) ;

lr : Distance entre deux maintiens latéraux pour l'état limite inélastique ;

l_k : Longueur de flambement ;

M_{crD} : Moment critique de déversement élastique

M_y et M_z : Moments de flexion par rapport à l'axe y et z ;

$M_{b,Rd}$: Moment de résistance au déversement ;

$M_{c,Rd}$: Résistance à la flexion par rapport à un axe principal de la section ;

M_{el} : Moment de flexion élastique ;

M_{pl} : Moment de flexion plastique ;

M_t : Moment de torsion ;

M_ψ , $M_{\psi y}$, $M_{\psi z}$,$M_{\psi R}$ et $M_{\psi sv}$: Moments de couplage ;

M_f : Moment de flexion des semelles

M_{sv}: Moment de la torsion de St-Venant ;

M_R: Responsable du gauchissement non linéaire ;

N : Force axiale ;

N_{cr} : Charge critique de flambement élastique,

N_E : Charge critique d'Euler

tf : Épaisseur de la semelle ;

tw : Épaisseur de l'âme ;

v_0, w_0 θ_0 *et* χ_0 : Amplitudes associées aux déplacements suivant les axes X, Y et Z ;

$u^{i,}$ $v^{i,}$ *et* w^{i} : Les déplacements ou les degrés de liberté ;

Wy : Module de section selon l'axe fort (dépend de la classe de section) ;

$\overline{W}_y$: Moment de résistance par rapport à la fibre moyenne des ailes.

$W_{pl,y}$: Module plastique de la section ;

$W_{el,y}$: Module élastique de la section ;

$W_{eff,y}$: Module élastique de la section efficace ;

za : Distance entre le centre de cisaillement C et le point d'application de la charge ;

z_C : Distance entre le centre de gravité G et le centre de cisaillement C.

ϕ_y : La rotation de la section transversale au tour de l'axe *Y*.

ϕ_z : La rotation de la section transversale au tour de l'axe *Z*.

ψ : Coefficient de géométrie.

LISTE DES FIGURES

Fig.4.13 : Interaction entre la charge de déversement Q et la charge axiale P pour la poutre en box à semelle variable de l’exemple 4. (a) charge appliquée sur la semelle de la poutre, (b) Charge appliquée au centre de cisaillement de la poutre.

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE

Généralités :

Dans le monde de la construction, les structures sont réalisées à partir de plusieurs pièces assemblées entre elles dont elles épousent des formes différentes afin de résister aux charges extérieures. Plus précisément on peut distinguer quatre grandes classes d'éléments constitutifs fondamentaux d'une construction selon leur étendue dans l'espace :

1. Les corps pleins,
2. Les plaques et les enveloppes de type voute ou coque
3. Les pièces allongées pleines de type poutre ou tige.
4. Les pièces allongées à parois minces.

Cette thèse est consacrée uniquement à l'étude du comportement au déversement élastique de la quatrième classe des modèles schématiques de calcul.

Une pièce allongée à paroi mince est toute pièce constituée par des corps se présentant sous forme de voiles longs, prismatiques ou cylindriques ; leur caractéristique distinctive réside dans le fait que chacune de leurs trois dimensions est d'un ordre différent de celui des deux autres : l'épaisseur du voile est petite par rapport à une dimension caractéristique de sa section transversale, qui à son tour doit être petite par rapport à la longueur du voile.

Les exemples de telles pièces sont : les profilés métalliques, laminés, soudés ou rivetés, travaillant comme poutres ou comme poteaux, les éléments de formes et de cadres, etc.

Le trait caractéristique des pièces longues en voiles minces réside dans le fait que ces pièces travaillent à la torsion en tant que systèmes dans l'espace, pouvant subir des déformations longitudinales (allongements variables d'un point à un autre) et donc éprouver des contraintes longitudinales proportionnelles à ces déformations.

Le domaine des constructions ne cesse de s'améliorer et d'aller vers la modernité conceptuelle et architecturale. Bâtir des constructions spatiales innovantes et fluides qui offrent une liberté de conception illimitée aux architectes et aux ingénieurs de structures exige d'aller vers le domaine des constructions métalliques. Afin de parvenir à toutes les exigences fonctionnelles de conception et de satisfaire la demande architecturale pour l'esthétique, les structures élancées minces aux nuances d'acier de plus en plus performantes sont adoptées. Elles sont favorisées en raison de leur rendement sur le plan sécurité et économie autrement dit le rapport poids/résistance.

Utiliser des éléments en acier à sections variables offre un avantage économique certain, qui s'illustre par le fait que la matière est mieux répartie dans les zones les plus sollicitées de l'élément, et ainsi avoir une meilleure répartition des contraintes. Cette astuce ingénieuse offre un dimensionnement plus économique et une utilisation de l'acier de façon plus rationnelle.

Le comportement au flambement des éléments à parois minces à sections variables est considéré comme une tâche plus difficile par rapport à ceux qui ont des sections uniformes, cela s'explique par le fait que les paramètres géométriques des éléments à sections variables ne sont pas constants, ils varient selon leur position suivant l'axiale.

Du point de vue analytique, les équations d'équilibre sont de plus en plus compliquées à appréhender en présence du coefficient de raideur qui est lui aussi variable, ainsi il est très difficile d’obtenir une solution pratique et facile.

Par conséquent, il n'est pas surprenant que dans les codes de conception tels que le code européen "Eurocode 3" **[1]**, ne présente aucune recommandation pour le cas de la résistance des poutres à section variable. Il est à noter que la prédiction précise de l'état limite de stabilité est d'une importance fondamentale lors de la conception de ce type d'éléments structurels.

A cet effet, on est dans l’obligation de prendre en compte l’effet de non linéarité du matériau pour effectuer un dimensionnement optimal de l’élément. Ainsi, un investissement impérieux est nécessaire afin de décrire une analyse correcte du comportement de ces éléments.

Objectif de la thèse :

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'effet de déformation de cisaillement sur la résistance au flambement élastique des poutres à parois minces à sections variables pour des sections bisymétriques ouvertes ou fermées soumises à des forces de flexion et axiales combinées.
Dans ce but, les relations de déplacement et de déformation sont d'abord exposées sans aucune hypothèse simplificatrice sur l'amplitude de l'angle de torsion, en présence des termes de flexibilité de cisaillement.
Basé sur la méthode de Ritz, les équations d'équilibre du déversement élastique sont dérivées pour les éléments à section variables à parois minces de sections transversales bisymétriques sous une combinaison de forces de flexion et de forces axiales. Ainsi, les équations résultantes sont couplées et non linéaires.

Le présent document est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, nous présentons des notions fondamentales sur la torsion uniforme des poutres, ainsi la théorie fondamentale de torsion non uniforme des poutres spatiales qui est bien connue par la théorie de Vlassov. La différence des sections transversales à parois minces et son influence sur le comportement des poutres soumises à des efforts de flexion et des efforts de torsion sont discuté dans cette partie.

Le deuxième chapitre est consacré à une revue de la littérature qui traite les phénomènes d’instabilité de flambement et de déversement des éléments à parois minces. Une analyse théorique et règlementaire selon la norme européenne l’Eurocode 3 est présentée en détail.

Nous présentons par la suite, dans le chapitre 3, le développement analytique à partir d'un champ de déplacement qu'on a proposé dans notre analyse. La méthode de Ritz est utilisée pour déduire les équations d'équilibres pour les éléments à parois minces à sections variables de section transversale bisymétrique. Le code Matlab **[2]** est utilisé pour la résolution numérique des équations non linéaire du modèle proposé.

Nous terminons le travail par un quatrième chapitre par une modélisation numérique à l'aide du logiciel commercial par élément fini Abaqus **[3]**. Des éléments coq ont été choisis pour modéliser les différentes parois des éléments traités. Plusieurs longueurs de poutres et différentes valeurs de variation de la section suivant l'axe de la poutre faisaient l'objet d'une étude paramétrique. Les résultats numériques obtenus par la méthode de Ritz ont été validés par ceux donnés par la modélisation à l'aide du logiciel Abaqus.

Etat de la question :

Les éléments à parois minces à section variable que ce soit une section ouverte ou bien fermée apparaissent de plus en plus dans la composition des structures modernes. Leur particularité est le fait qu'une colonne ou bien une poutre offre une résistance meilleure et optimale aux différentes charges extérieures. L'ingéniosité s'illustre par le fait que la matière est mieux utilisée à l'égard d'un élément à section constante. Malgré toute cette séduction technologique de la forme qu'elle présente aux ingénieurs de structures et architectes, ces éléments présentent une faiblesse vis-à-vis aux différents phénomènes d'instabilité, les plus courants sont le flambement et le déversement. Et cela se produit dès qu'un élément à parois mince est soumis à une contrainte de compression qui dépasse le seuil critique de résistance.

Il existe un grand nombre de références dans la littérature qui ont traité le comportement des éléments à parois minces à sections ouvertes ou bien à sections fermées, également à sections constantes et à sections variables dont est l'objet de notre travail dans cette thèse. Plusieurs auteurs ont étudié les phénomènes d'instabilité pour des poutres planes et par la suite ils ont effectué un élargissement de leurs formules pour les poutres spatiales. En premier temps, des formules analytiques ont été présentées pour prédire des résistances de flambement et de déversement des éléments à parois minces à sections ouvertes, ensuite les travaux ont été un peu plus difficiles à étudier notamment lorsqu'il s'agissait de l'effet de variation de la section au niveau de l'axe de l'élément étudié, la prise en compte des grandes déformations de torsion dans les formules et l'effet de couplage des efforts. L'apparition des méthodes numérique, spécialement la Méthode des Eléments Finis avec le développement des outils informatique ont permis aux chercheurs de mieux prédire le comportement de ces éléments sous différents paramètres pour différentes formes. Nous présentons dans cette partie les travaux qui ont été plus pertinents pour le domaine des structures à parois minces, à savoir des travaux analytiques, numériques et ceux effectué à base d'essais.

Vlassov [4] a consacré toute sa vie scientifique à la théorie des structures à parois minces. Sur la base de la théorie mathématique d'élasticité, les méthodes de la résistance des matériaux et de la statique de constructions, il a pu obtenir les résultats les plus claires et simples pour prédire le comportement exact des structures à parois minces. Il a démontré que la théorie pratique connue au paravent par Bernoulli-Euler **[5]** concernant la flexion des poutres n'est plus valable pour les poutres à parois minces par le fait que la section transversale de la pièce fléchie se déforme et ne garde plus sa planéité. Il était le premier à faire apparaitre l'effort du Bimoment dans une poutre à parois mince soumise à un effort de torsion, qui par la suite va provoquer une déformation de la section transversale qu'il lui donne le nom de gauchissement.

En 1925, **Nadai [6]** a étudié le comportement des plaques de largeur variable sous l'effort de torsion. Il a illustré que même si la section transversale est variable le long de la plaque la rigidité de Saint-Venant reste inchangée.

De son côté, **Lee [7]** a appliqué le même principe d'analyse de Nadai pour les poutres, sauf que la variation linéaire de la section transversale touche toutes les dimensions de cette dernière. Il a présenté une nouvelle équation différentielle de torsion non uniforme dont des thermes supplémentaires apparaissaient qui ne figuraient pas dans l'équation des poutres prismatiques. Ces thermes sont mis en évidence par la suite par Vlassov en 1962 **[4]**. Cependant, on note que les équations développées pour les poutres à section constantes ne sont plus valables pour analyser le comportement spatial des poutres à section variable. A cet effet, l'étude des poutres à section variable nécessite une formulation très particulière notamment l'étude du phénomène de déversement qui est considéré comme un point non négligeable pour le dimensionnement de ces éléments soumis à la torsion.

Fogel et **Ketter** en 1962 **[8]** ils ont étudié le comportement des poutres à section variable sollicitées aux efforts normaux et moment de flexion appliqués à leurs extrémités. La variation de l'inertie de la poutre dans le sens de la flexion a été prise avec des approximations polynomiales. Les résultats obtenus ont été présentés sous forme d'abaques. Les effets de plasticité ont été pris en compte ce qui fait que leur analyse est considérée comme une étude complète.

Cywinski [9] a basé son développement sur la méthode énergétique variationnelle proposée par Timoshenko pour étudier les poutres à section variable mono-symétrique. Etant donné que l'expression du bimoment qu'il présente dans sa formulation pour les poutres à section variable est similaire à celle des poutres prismatiques, son travail est considéré comme une analyse approchée

Bazant [10] a présenté des équations d'équilibre des poutres à parois mince et à section variable en I mono-symétrique dont elles ont fut l'objet de sa théorie en 1965. En revanche, sa théorie est loin d'être originale vu que le phénomène de gauchissement n'est pas pris en compte et cela explique que l'expression de la déformation axiale utilisée est la même que celle utilisée pour les poutres à section constante.

Wilde [11] a appliqué les travaux de Vlassov aux cas des poutres à section variable en considérant les parois minces de la poutre comme étant une coque mince dans l'espace en adoptant les mêmes hypothèses de Vlassov qui s'illustre dans l'absence de la distorsion sur le contour et la conservation de la rigidité de la section transversale. Ainsi il met en évidence des équations d'équilibres générales qui traitent les poutres à section variables comme cas particulier. Naturellement, de nouveaux thermes apparaissent dans son équation pour le cas de la torsion en comparaison avec celle de la poutre prismatique. On peut déduire aussi que les équations aux cas particuliers proposées par Lee sont identiques à celles de **Wilde**. Bien que **Wilde** est considéré comme étant le premier chercheur qui a proposé un ensemble général d'équations qui traitent les poutres à parois minces à sections variables, son approche est trop générale étant donnée qu'il considère que la section transversale peut subir des rotations suivant n'importe quel axe, ce qui met en présence un grand nombre de thermes dans sa formulation qui reste également trop limitée par rapport aux petits déplacements.

Culver et **Preg [12]** ont traité l'équilibre des éléments de section en I à hauteur d'âme variable. Ils ont établi des équations d'équilibre en adoptant les travaux de Lee **[7]** à partir des éléments dans leur position déformée pour le cas comprimé et le cas fléchi autour de l'axe fort de la section. Des tables et des abaques paramétrés ont été créés pour présenter les solutions des équations d'équilibre.

Massey et **McGuire [13]** ont traité le comportement au déversement des poutres à section rectangulaire dans la phase élastique. Ils ont négligé le phénomène de gauchissement engendré par la torsion dans leurs équations différentielles proposées. Ils ont comparé leurs résultats fournis par leurs formules avec ceux fournis par des essais sur des modèles réduits. Les résultats ont été présentés sur des abaques.

Kitipornchai et **Trahair [14]**, **[15]** ont appliqué l'approche de **Wilde [11]** pour les sections en I à âme linéairement variable. Leurs deux articles n'ont pas cessé de contribuer de façon majeure aux problèmes des poutres à parois pinces à section variable. En proposant de réécrire les équations d'équilibre en torsion à partir des hypothèses géométriques pour une poutre en I que ça soit doublement ou monosymétrique. Ils ont proposé des équations différentielles similaires à celle de Wilde à l'état déformé de la poutre. Leurs formules deviennent plus compliquées pour le cas des sections monosymetriques, ainsi le phénomène de déversement est étudié pour ce cas. Face à cette complexité des équations différentielles, leur résolution a été faite par la méthode des intégrales finies. Ils ont calibré par la suite leurs résultats numériques par ceux obtenues à partir d'essais sur les poutres en aluminium. Le résultat de la comparaison était considéré comme excellent.

Djalaly [16] a présenté une étude analytique sur les poutres à parois minces à sections ouvertes. Son travail est considéré comme complet étant donné que les résultats qu'il obtenait les utilisait pour le cas des poutres à sections variables en modifiant les thermes de gauchissements dans l'expression de la déformation axiale.

Brown [17] est l'un des premiers chercheurs qui ont étudié le comportement spatial des poutres prismatiques à section variable dans les cas des petites rotations. Il a présenté des valeurs du moment critique de déversement élastique de la poutre de section en I en prenant compte l'influence du niveau d'application de la charge et l'influence de variation de la section également. La procédure de sa formule était d'écrire l'équation de déformation totale de la section, et de résoudre les équations d'équilibres obtenues par la suite par la méthode des différences finies centrées. Ses résultats ne tiennent pas compte des termes supplémentaires de torsion étant donné qu'il a utilisé dans sa formule l'expression de déformation non linéaire des poutres prismatiques.

Galéa [18] a calculé les déplacements et les efforts critiques de flambement des poutres à section en I à hauteur d'âme linéairement variable. Pour cela il utilise le modèle d'élément fini poutre plan qui présente 3 degrés de liberté pour chaque nœud. Son développement numérique est par la suite élargi pour le calcul de stabilité linéaire.

Suivant le même élément fini, **Karabilis** et **Beskos [19]** ont étudié le cas statique ainsi que dynamique des poutres à section variable pour les formes rectangulaire, tubulaire et en I. la formulation numérique est basée sur des équations différentielles d'équilibre.

Olowokere [20] a étudié le déversement élastique des poutres à sections variables en I monosymétriques. Il intègre un ratio de surface entre la section globale et les deux semelles à la base de son analyse. Des abaques ont été créés pour illustrer les résultats obtenus.

Shiomi et **Kurata [21]** proposent de mettre en place une longueur équivalente dans leur méthode de calcul de l'effort normal critique N_{cr}. La méthode des éléments finis est utilisée pour la résolution des formules. 30 éléments de poutres prismatiques ont été choisis pour approcher la variation des sections transversales des poutres. Les résultats donnés par leurs formules ont été calibrés avec ceux données par des essais.

Un travail très complet que **Wekezer [22]**, **[23]** a publié sur ses deux articles. Cela est expliqué par le fait que l'expression du champ de déplacement qu'il a utilisé contient les termes qui décrivent la torsion. En s'appuyant sur la théorie des coques dans son analyse, il s'offre la possibilité d'étudier le comportement des poutres a parois minces à section ouverte et a section variables dans le cas des grands déplacements. Il compare ses résultats par la suite avec ceux de **Kitipornchai** et **Trahair**, et conclue par la suite que l'élément fini qu'il a utilisé peut etre considéré comme une référence numérique pour les chercheurs qui utiliseront la méthode des éléments finis dans leurs travaux.

Wang et al [24] ont cherché le degré optimal de variation d'une poutre sollicitée à une charge transversale. Afin d'y procéder deux méthodes ont été utilisées, la méthode énergétique de **Timoshenko [25]** et l'approche des multiplicateurs de Lagrange. Ils ont conclu que les conditions d'appuis de la poutre permettent d'économiser de manière significative de la matière de la poutre, ils ont noté également que la variation de la section n'a pas une grande influence sur la résistance au déversement dans le cas des sections rectangulaires.

En se basant sur les principes de la mécanique des milieux continus, **Yang** et **Jong [26]** ont présenté des équations d'équilibre à partir de champ de déplacements aux petits déplacements. Leur analyse est aussi considérée comme un des cas particuliers de celle fournit par Wekezer malgré la présence des thermes qui décrivent la torsion dans leur formule.

Funk et Wang [27] ont fait une analyse limitée au cas élastique pour les petits déplacements des poutres à section variable. Pour y procéder, ils ont divisé l'élément fini poutre en n tronçons à partie égale. Les matrices de rigidité ont été créés à l'aide des développements en série. Le calcul des caractéristiques géométriques de chaque section transversale de l'élément étudié a été fait à partir de la méthode d'interpolation Gregory-Newton. Les mêmes démarches ont été reprises pour le cas des poutres spatiales.

Bradford [28] a développé un élément fini poutre à 4 degrés de liberté pour chaque nœud pour étudier le déversement élastique des poutres en I à section variable. Il a pris en compte l'effet de variation de la hauteur de l'âme de poutre sur l'élément et il met en évidence les termes de torsion sur l'expression de déformation. Il apparait qu'il a négligé la distance qui est variable suivant la longueur de la poutre entre le centre de cisaillement C et l'axe de référence qui passe par à mi-hauteur pour les sections mono-symétriques, alors qu'à vrais dire cet écart n'est pas nul. En revanche, l'application de son modèle est correcte pour le cas des poutres à section en I bisymétrique. Il montre par la suite que ses résultats sont en bonnes concordances avec ceux de **Kitipornchai** et **Trahair**.

En 1988, **Bradford [28]** a proposé une formulation complète sur les poutres à parois minces à section ouverte et variable. L'originalité de sa formule s'illustre par le fait de repérer les déplacements transversaux des points de la section par rapport à un axe passant l'axe à mi-hauteur de la section.

Takabatake [29] a étudié le comportement non linéaire des poutres à parois minces de contour fermé à section variable. Il a mis en évidence des équations générales dans le cas dynamique en utilisant le principe d'Hamilton. Il a validé ses résultats avec ceux des méthodes numériques.

Lee et **al**. **[30]** ont étudié les déplacements d'une poutre à section variable dont les appuis sont élastiques. En se basant sur les fonctions de Green pour un calcul exact, ils proposent des équations différentielles de flexion à coefficients non constants.

Fertis et **al**. **[31]**, **[32]** ont fait appel à la méthode des systèmes équivalents pour traiter le cas des sections variables aux variations arbitraires. Cette méthode s'explique par le fait de remplacer la rigidité variable réelle par une rigidité constante équivalente suivant la longueur de la poutre en gardant la même ligne élastique.

À leur tour **Romano** et **Zingone [33]**, **[34]** en se basant sur les résultats de Lee et al. Ont présenté des solutions aux équations différentielles qu'ils mettent en évidence mais pour des poutres à section rectangulaire et variable ainsi que pour différents types d'appuis dans le cas plastique et dans le cas élastoplastique.

En 1993, **Tang [35]**, **[36]** a traité le comportement des poutres spéciales à sections variables en commençant par développer un modèle d'élément fini plan en ajoutant une matrice de torsion indépendante. Son analyse est incomplète étant donné qu'il ne met pas en évidence le phénomène de déversement pour les poutres à parois minces, cela s'explique par le fait qu'il a dissocié le couplage entre la flexion et la torsion de la poutre étudiée. Il a présenté les résultats de 4 types de sections variables à l'aide d'intégration numérique (Gauss), et pour la section en I il a utilisé la matrice infitésimale de manière exacte.

Polyzois et **Qing [37]** analysent le comportent au déversement des poutres à parois minces à section variable selon le code américain AISC **[38]**. Ils ont pris la petite section comme section de référence ainsi que la variation de la section était prise selon la longueur de déversement de la poutre étudié. L'originalité du travail s'illustre sur le fait qu'ils ont tenu en compte le cas des structures à nœuds déplaçables en utilisant des coefficients correcteurs dans le calcul de la contrainte critique.

Braham [39] il propose des formules pour le calcul du moment critique du déversement des poutres à sections variables soumises à des diagrammes de moments linéaires. Il tient en compte dans ses formules uniquement le changement de hauteur de l'âme de la poutre. Le moment critique calculé a été effectué à partir d'une section équivalente qui est par définition la section du milieu de la poutre. On note également que sa méthode de calcul est basée sur les concepts de multiplications de charge de **Merchant-Rankine [40]**.

Rajasekaran [41] a procédé au développement d'un modèle non linéaire pour étudier le comportement des poutres à parois minces à section variable suivant la même démarche établis par Wekezer, Yang et Yau. Les champs de déplacements et des déformations sont traités de manière très rigoureuse, en utilisant la matrice des cosinus directeurs de **Love [42]**. Etant donné que pour repérer les coordonnées de section transversale à partir d'un axe autre que celui de la ligne des centres de gravité G, les termes des moments statiques et des moments d'inerties ne s'annulent plus, il obtient par la suite des expressions très complexes.

Mendera [43] a travaillé sur le calcul de la résistance ultime au flambement des poutres à sections variables. Il a procédé par l'utilisation de l'approche de type Ayrton-Perry en concevant l'équation classique de l'Eurocode 3 **[1]** et d'adapter le calcul de l'effort normal critique N_{cr} par le biais d'une inertie équivalente. Il a présenté des définitions approchées pour des inerties équivalentes.

Gupta [44] a utilisé un élément fini poutre à 4 degrés de liberté à savoir déplacement et rotation selon l'axe faible, rotation de torsion et gauchissement pour analyser le déversement élastique des poutres en I à section variable. Une variation linéaire et parabolique de la hauteur de l'âme est utilisée dans la formulation. Ce type de variation est adopté juste par ce que l'élément fini choisi l'autorise.

Tena-Colunga [45] a étudié à son tour le cas des poutres spatiales à section compacte, ce qui veut dire que l'effet de gauchissement est nul, par la méthode des éléments finis. Afin qu'il puisse intégrer son modèle dans un code par élément fini il a utilisé des matrices de flexibilité élastique dans sa formule. Cette démarche a pour but de proposer de nouvelles formules de dimensionnement dans les tableaux.

Braham [46] a traité le phénomène de déversement des poutres à section monosymetrique à hauteur d'âme linéairement variable soumises à des diagrammes linéaires de moment de flexion. En développant l'angle de torsion en série de sinus, les équations d'équilibres proposées ont été résolues par la méthode de Galerkin. Le moment critique de déversement est déterminé pour le cas des poutres soumises à la flexion pure.

Braham [47], **[48]** a fait appel à la modélisation par élément fini en prenant compte de la non linéarité matériel et géométrique des poutres à parois minces et sections variables. Il a déterminé les valeurs des charges ultimes et critiques des poteaux à partir des expressions polynomiales qu'il a proposées. Les coefficients de ces derniers ont été déterminés à partir d'un lissage des résultats numériques fournis.

Ermopoulos [49] a étudié des poteaux à inertie variable dans le cas des structures à nœud déplaçables. Il a présenté les valeurs des efforts critiques N_{cr} sous forme de tables en fonction des rigidités transmises par les éléments adjacents et du type des nœuds à savoir fixes ou déplaçables.

Les travaux de **Paavola** et **Salonen [50]** sont connus comme les plus récents et plus originals concernant l'analyse numérique sur l'étude du comportement plan des poutres à section variable. Basé sur la théorie des coques, des expressions sous forme matriciel dont le développement est fait analytiquement au départ sont présentées pour des poutres cintrées à section variable. Les résultats numériques présentés étaient pour le cas de section rectangulaire.

En 2000, **Kim** et **Kim [51]** a présenté un travail très remarquable. On note que le couplage flexion-torsion et les grands déplacements ont été pris en compte dans son expression de champs de déplacement. On peut qualifier son travail comme complet à partir de ces deux hypothèses. Ils ont écrit les expressions de déformations et de contraintes des efforts internes généralisés, ils ont déduit par la suite les matrices de rigidités qu'ils dérivent ultérieurement. Malgré ce remarquable travail, il est considéré comme incomplet étant donné qu'ils n'ont pas utilisé les termes de torsion dans leur formule.

Ronagh et al. **[52]** on choisit le centre de cisaillement C comme repère des coordonnés de section transversale. Ce choix de repérage a été pris pour simplifier la définition des fonctions de gauchissement. Malgré l'originalité du travail, leur approche reste très restreinte vue qu'elle n'est applicable que pour le cas des sections doublement symétriques.

Braham [53] a traité le phénomène de déversement des poutres à section monosymetrique à hauteur d'âme linéairement variable soumises à des diagrammes linéaires de moment de flexion. En développant l'angle de torsion en série de sinus, les équations d'équilibres proposées ont été résolues par la méthode de Galerkin. Le moment critique de déversement est déterminé pour le cas des poutres soumises à la flexion pure.

Baptista [54], **[55]** a fait appel à la modélisation par élément fini en prenant compte de la non linéarité matériel et géométrique des poutres à parois minces et sections variables. Il a déterminé les valeurs des charges ultimes et critiques des poteaux à partir des expressions polynomiales qu'il a proposées. Les coefficients de ces derniers ont été déterminés à partir d'un lissage des résultats numériques fournis.

Mohri et al [56] ont développé un modèle non linéaire pour traiter le phénomène post flambement des éléments à parois minces à section ouverte sollicité en compression. Le modèle tiens en compte les relations non linéaires entre les moments fléchissant et les courbures. Les effets de gauchissements ont été pris en compte dans l'équation d'équilibre de torsion. Les équations d'équilibre ont été établies à l'aide de la méthode de Galerkin pour différentes formes de sections, telles que les sections bisymétriques et monosymétriques.

Andrade et al. [57,58] ont analysé le comportement de flambement latéral de torsion élastique des poutres à sections variables à parois minces mono-symétriques par la méthode de Ritz, dont les résultats sont comparés avec ceux obtenus par notre travail dans le chapitre 4.

Lei et Shu [59] ont présenté un nouveau modèle théorique pour le déversement des poutres en I à âme variable, selon les hypothèses de Vlassov à paroi mince.

Mohri et al [60] développent un modèle théorique et numérique pour prédire le comportement des poutres à parois minces à sections ouvertes en présence de grandes torsions. Ils utilisent un modèle en élément fini à deux nœuds avec 7 degrés de libertés sur chaque nœud. Le phénomène du gauchissement, l'effet de couplage flexion-torsion et l'effet des grands déplacements ont été pris en compte dans le modèle. Ainsi ce modèle proposé a été incorporé dans un code en élément finis établis par la maison. De nombreux exemples en comportement linéaire et non linéaire avec présence d'instabilité par bifurcations ont été présentés pour justifier l'efficacité du modèle numérique proposé.

Serma et al. [61] ont présenté une méthodologie approximative rapide qui peut être appliquée aux colonnes présentant une variation générale de la rigidité et soumises à toute distribution de charge axiale.

Asgarian et al. [62] et **Soltani et al. [63]** ont utilisé la méthode des séries de puissance, à la fois dans la stabilité en flexion et les analyses de vibrations des poutres à paroi mince à section variable.

Plus récemment, **Trahair [64]** a décrit un modèle en éléments finis simple pour la résistance au déversement des poutres en console à section variable, basé sur la théorie classique de la stabilité linéaire.

Une analyse de flambement et au post flambement des poutres à parois minces à sections variables ouvertes en console a été présenté par **Mohri et al [65]**. Ils utilisent le même élément fini spatial utilisé en **[60]** mais avec une nouvelle cinématique qui tiens en compte les grandes torsions, le couplage flexion-torsion et des termes décroissants en flexion et en torsion. Ils ont comparé les résultats obtenus avec ceux données par une modélisation numérique à l'aide d'un code commercial qui procède par la MEF en utilisant les éléments coque. Ainsi, ils ont trouvé que les points de bifurcation sont en accord avec les solutions de stabilité non linéaire.

Benyamina et al [66] ont développé un modèle non-linéaire selon un nouveau modèle proposé par la cinématique pour étudier le comportement au déversement élastique des poutres à parois mince à section variable en I. la méthode de Ritz est déployée afin de dériver les équations d'équilibre algébrique. Malgré qu'ils n'ont pas pris en compte l'effet de gauchissement dans la formule générale de déformation de la section, les résultats analytiques obtenus présentent une bonne concordance avec ceux données par une modélisation numérique effectuée à l'aide du code Abaqus **[3]**. Différentes variations de hauteur de l'âme ainsi que la position de l'application de la charge faisaient l'objet de l'étude paramétrique.

Saoula et al [67] ont développé un modèle analytique non linéaire pour étudier l'effet de distorsion sur la résistance au déversement élastique des poutres en box à parois minces à sections prismatiques sous un chargement combiné flexion-effort axial. La théorie de l'ordre élevée a été adoptée dans ce travail. Ils ont utilisé les méthodes de de Ritz et Galarkin pour discrétiser les équations d'équilibre. Les charges critiques au déversement ont été obtenues en déduisant la matrice tangente de rigidité. Les résultats numériques obtenus ont été confrontés avec ceux donnés par la modélisation par élément à l'aide du code commercial Abaqus **[3]**. La longueur de la poutre, l'excentricité de la charge également l'épaisseur des parois faisaient l'objet de l'étude paramétrique de leur travail. Ils ont conclu que les valeurs de la résistance au déversement obtenues par les méthodes classiques telle que l'Eurocode 3 sont surestimées pour le cas des poutres à parois minces.

De nombreuses recherches ont été consacrées aux effets des déformations de cisaillement sur le comportement des structures composites à parois minces sous charges de flexion et de torsion. **Pluzsik et al. [68]** ont proposé un nouveau modèle analytique de poutres composites simplement appuyées avec des sections fermées soumises à des charges sinusoïdales. Dans leur modèle, les effets du gauchissement et de la déformation par cisaillement ont été pris en compte. De la même manière **Laszla et al. [69]** ont utilisé le même modèle pour le flambement de torsion en flexion de poutres composites avec des sections ouvertes.

Sebastian et al. [70] ont montré que la théorie classique qui omet la flexibilité de cisaillement est inexacte pour la prédiction de flambement latéral. Dans un travail récent, **Ziane et al. [71]** ont développé une matrice de rigidité dynamique exacte pour étudier la vibration libre des poutres en box en FGM.

CHAPITRE 1 :

TORSION DES PIECES A PAROIS MINCES

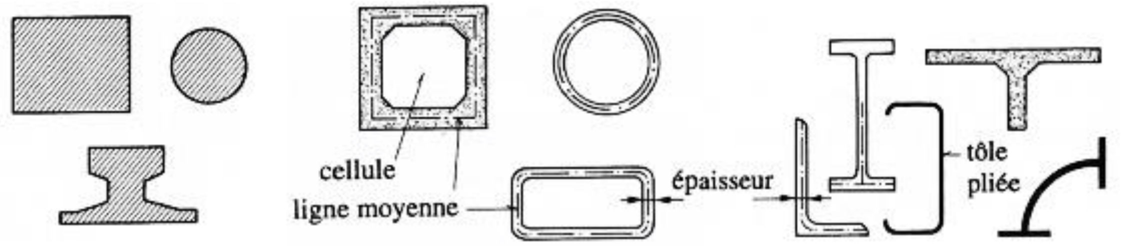
1.1.Introduction :

La Résistance des Matériaux est l'une des sciences fondamentales de l'ingénieur constructeur. Elle lui fournit le moyen de calculer les efforts dans une structure et de dimensionner celle-ci en conséquence, à partir des propriétés des matériaux employés. Les méthodes élémentaires sont suffisantes pour satisfaire ces besoins dans les cas courants, par exemple pour l'étude de constructions modélisables à l'aide des éléments barres ou bien éléments poutres. Toutefois, l'analyse devient vite complexe lorsqu'il s'agit de structures composées de voiles ou de coques minces et la compréhension de leur fonctionnement est beaucoup moins intuitive. En général on a recourt au calcul par éléments finis, mais on ne peut en interpréter les résultats si on n'a pas bien identifié certains phénomènes grâce à une réflexion théorique approfondie.
Parmi les phénomènes physiques qui deviennent plus complexe lorsqu'il s'agit de pièces composées de voiles et de coques minces, la torsion. Les recherches ont démontré qu'il est impératif d'abandonner certaines hypothèses conservées par la RDM lorsqu'une pièce a parois mince est soumise à un effort de torsion notamment la conservation de la section plane après déformation donnée par Saint-Venant. Vlassov a démontré que de telles sections ayant une certaine caractéristique géométrique ne conservent plus leur planéité après déformation sous un effort de torsion, cependant un phénomène ait naissance et c'est le gauchissement.
Cette partie est consacrée à illustrer le phénomène de la torsion pour les poutres ayant des sections droites à parois minces ouvertes et fermées ainsi qu'à expliquer le phénomène de gauchissement qui est associé à ce type de poutre.

1.2. Types de sections droites :

Le génie civil par définition est de répondre aux charges extérieures par une section d'un corps bien défini réalisée à la base d'un matériau qui se présente fréquemment par un béton ou un acier. Les sections de poutres se différent entre elles selon les dimensions et les formes qu'elles présentent. Ainsi on distingue les sections massives, les sections formées parois minces dont l'ensemble peut être ouvert ou bien fermée.

Une section à parois minces est toute section composée d'éléments dont une de ses dimensions appelée épaisseur est plus petite des deux autres. La forme de ce type de section composée est établie à base d'une ligne moyenne, elle définit la section moyenne au milieu de chaque épaisseur d'élément qui compose la section. Si la section moyenne est fermée on dit que la section à parois mince est section fermée comme les sections en box, dans le cas contraire la section à parois minces est ouverte **(Fig.1.1)**.



Sections massives Sections fermées à parois minces Sections ouvertes à parois minces

Fig.1.1 : Sections droites types **[72].**

1.3. Différence de comportement entre section fermée et section ouverte à parois minces :

La formation des contraintes tangentielles d'une poutre sollicitée à un effort de torsion est différente si la section à parois mince est fermée ou bien ouverte. Pour illustrer le phénomène, on fait appel à l'analogie hydrodynamique pour les deux types de sections (**Fig.1.2**). Dans la section ouverte, la ligne moyenne de la section est considérée comme un centre de circulation du fluide, autrement dit la contrainte tangentielle possède deux sens tangentielles dans la même épaisseur, par contre dans la section fermée, le fluide circule au tour du centre de la cellule en gardant un seul sens dans la même épaisseur. Les contraintes produites dans les sections fermées développent ainsi un moment de torsion bien supérieur à celles des sections ouvertes. La différence des efforts des deux sections s'explique par le fait que le bras de levier dans la section fermée équivaut au diamètre par contre celui de la section ouverte équivaut à l'épaisseur de la paroi mince. On conclut par la suite que sous un effort de torsion la section fermée et beaucoup plus résistante que la section ouverte **[73]**.

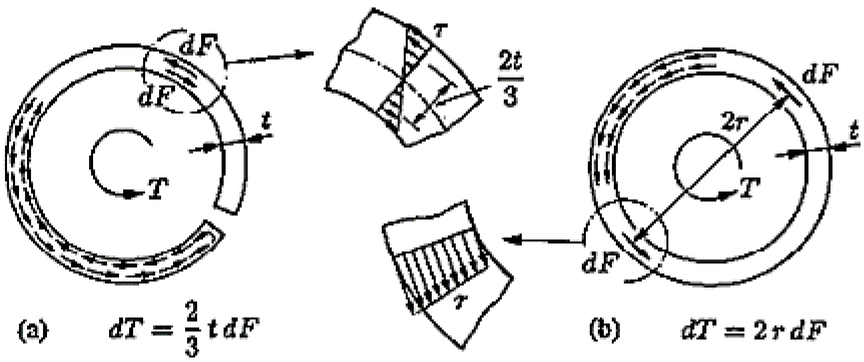


Fig.1.2 : Circulation des contraintes tangentielles de torsion : a) section ouverte ; b) section fermée **[72]**.

Les formules analytiques qui résolvent le problème de torsion uniforme sont uniquement pour quelques formes de sections massives à savoir, le cercle, le triangle équilatéral, la couronne et l'ellipse. A cet effet et pour répondre au problème de la section rectangulaire, on est quasiment dirigé vers la voie approchée à l'exemple des éléments finis. L'analogie hydrodynamique présente une meilleur méthode d'illustration des contraintes tangentielles également et d'indiquer celles qui sont optimales dans une section (**Fig.1.3**).

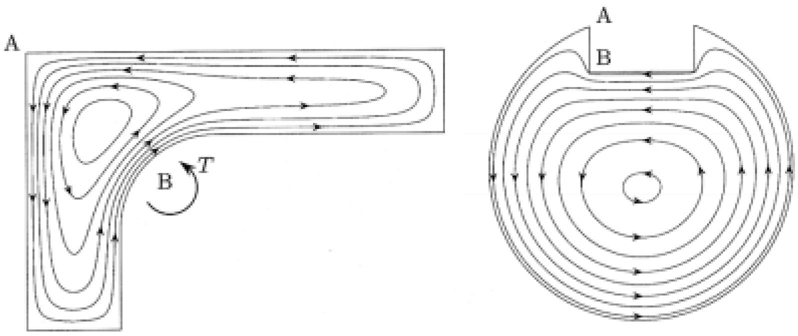


Fig. 1.3 : Circulation des contraintes tangentielles de torsion dans des sections massives **[73]**.

La formation des contraintes tangentielles τ pour une section rectangulaire est présentée dans la **Fig. 1.4**. $\tau_{\max}$ est la valeur maximum des contraintes qui se produit au milieu du grand côté de la section rectangulaire.

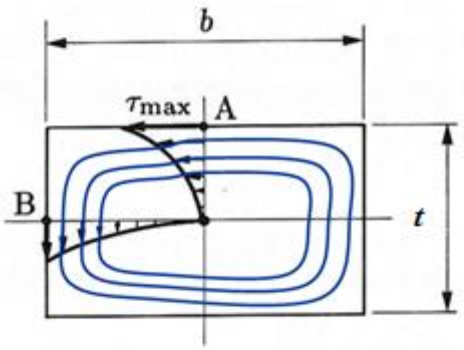


Fig. 1.4 : Contraintes tangentielles de torsion dans une section rectangulaire **[73]**.

1.4.Torsion uniforme :

La torsion uniforme expliquée par Saint-Venant **[78]**, lorsque les sections transversales tout le long de la poutre sont sollicitées à un seul moment de torsion qui est constant et l'équilibre des sections transversales est assuré uniquement par l'ensemble des contraintes tangentielles ce qui rend les sections transversales libre de toutes efforts supplémentaires, autrement dit les sections sont libres de gauchir. Dans le cas où les conditions ne sont pas remplies, la torsion devient non uniforme **[79]**.

1.4.1. Etude du mode de déformation :

Pour présenter le mode de déformation d'une poutre produit par un effort de torsion, on considère une barre de section circulaire dont les mesures sont prises préalablement. Fabriquée en caoutchouc afin de pouvoir la déformer facilement et on trace une grille sur sa surface latérale. Après application d'un effort de torsion, on remarque que les dimensions de la barre avant et après sollicitation sont presque les mêmes en revanche les lignes longitudinales forment des hélices autour de la barre. Le changement de l'angle entre les lignes de grille est considéré comme la seule déformation subite par la barre après un effort de torsion d'où l'angle était droit avant la sollicitation.

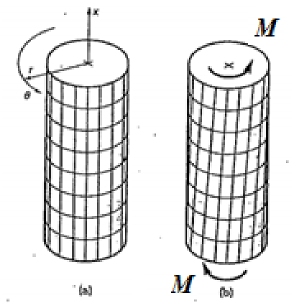


Fig. 1.5 : Déformation apparentes d'un barreau en caoutchouc de section circulaire **[74]**.

La seule déformation consiste donc à une rotation des sections parallèlement les unes aux autres (**Fig.1.5**). Pour déterminer quantitativement la valeur de déformation subite par la barre en caoutchouc, isolons un disque de longueur Δx comme le montre la **Fig.1.6.** La section supérieure est soumise à une rotation par rapport à celle inférieure d'angle $\Delta\varphi$.

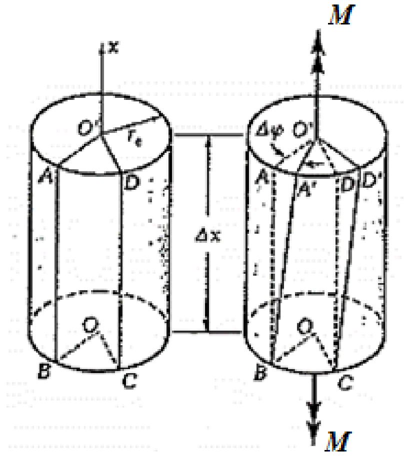


Fig. 1.6 : Lorsqu'une membrure droite de section circulaire est soumise à une torsion, la seule déformation est une rotation des sections, parallèlement les unes aux autres **[74].**

La partie *ABCD* se déforme et prend la position *A'BCD'* qui se trouve en état de cisaillement pure. La barre subit une déformation de cisaillement suivant la longueur Δx qu'on appelle également angle de glissement $\gamma_{x\theta}$ et qui a pour valeur :

$$\gamma_{x\theta} = \frac{AA'}{BA} \tag{1.1}$$

AA' est un arc du rayon *r* qui correspond à la différence d'angle entre la section supérieure et la section inférieure, et l'expression devient :

$$\gamma_{x\theta} = r\frac{d\varphi}{dx} \tag{1.2}$$

Le rapport $d\varphi/dx$ est constant, il représente l'angle de torsion par rapport à la longueur de la barre et on le désigne par θ.

$$\gamma_{x\theta} = r\ \theta \tag{1.3}$$

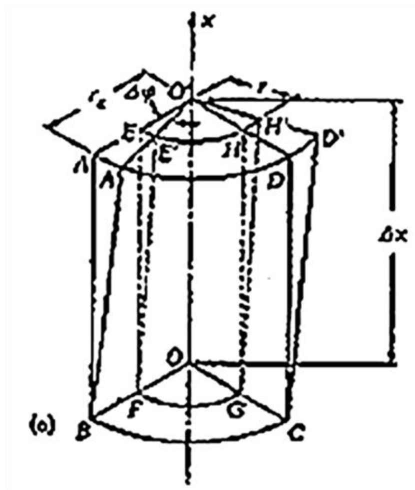


Fig.1.7 : Mesure de la déformation d'un élément d'une membrure de section circulaire en torsion **[74]**.

1.3.2. Relation entre la contrainte et la déformation :

La relation linéaire entre la déformation de cisaillement et la contrainte de cisaillement dans le cas des petites déformations selon la loi de Hook s'écrit sous la forme :

$$\tau_{x\theta} = G\ \gamma_{x\theta} = Gr\theta \tag{1.4}$$

D'où *G* est le module d'élasticité en cisaillement du matériau.

La **Fig.1.8.a** montre la distribution des contraintes de cisaillement sur la face latérale du petit bout de caoutchouc et la **Fig.1.8.b** montre sa distribution suivant sa section.

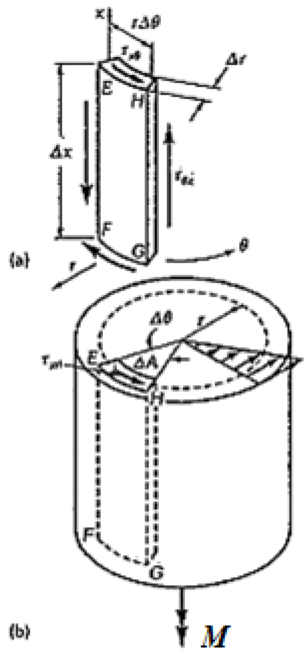


Fig.1.8 : a) contraintes de cisaillement agissant sur un petit élément ; b) répartition de la contrainte de cisaillement sur la section **[74]**.

Condition d'équilibre :

Nous passons maintenant à l'étude de l'équilibre de la barre pour déterminer les efforts internes de résistance. Pour que le bout de barre Δx soit en équilibre, il faut que :

$$\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta}. \tag{1.5}$$

L'effort de cisaillement repris ainsi vaut :

$$dF = \tau_{x\theta}\ dA. \tag{1.6}$$

Et le moment M a pour valeur par la suite d'un bras de levier r :

$$dM = r\ dF = r\ \tau_{x\theta}\ dA = Gr^2\theta dA. \tag{1.7}$$

Et le moment résistant de toute la section vaut :

$$M = \int_A Gr^2\theta\ dA = G\theta\int_A r^2\ dA = G\theta I_p \tag{1.8}$$

Avec I_p moment d'inertie polaire de la section circulaire.

L'expression de l'angle de torsion unitaire θ en fonction du moment de torsion est :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GI_p} \tag{1.9}$$

A partir de l'expression 1.9, on peut déterminer l'angle de rotation total φ de la section de la barre de longueur *L* sollicitée à un effort de torsion *M*.

$$\varphi = \int_0^L \frac{M}{GI_p}\, dx = \frac{ML}{GI_p}\,. \tag{1.10}$$

Et l'expression de la contrainte en fonction du moment de torsion s'écrit également sous la forme :

$$\tau_{x\theta} = \frac{M\ r}{I_p}\,. \tag{1.11}$$

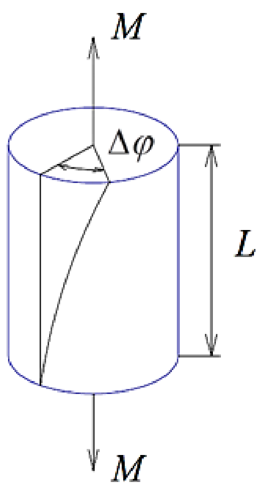


Fig.1.9 : Angle de rotation total entre les deux sections situées aux extrémités d'une membrure située aux extrémités d'une membrure de longueur L, soumise à un moment de torsion **[74]**.

1.5.Torsion uniforme des sections fermées à parois minces :

Comme indiqué au-dessus, dans le cas des poutres à sections fermées de parois minces, on peut admettre que les contraintes de cisaillement ne varient pas suivant l'épaisseur, typiquement similaire de la distribution des contraintes tangentielles produite par une force de cisaillement. Ainsi, on peut considérer que le flux de contrainte de cisaillement $f = \tau t$ est constant suivant la ligne médiane de la paroi. Une théorie a été développée pour le calcul des contraintes des déformations des poutres à sections fermées à parois minces soumises à un effort de torsion par Bredt.

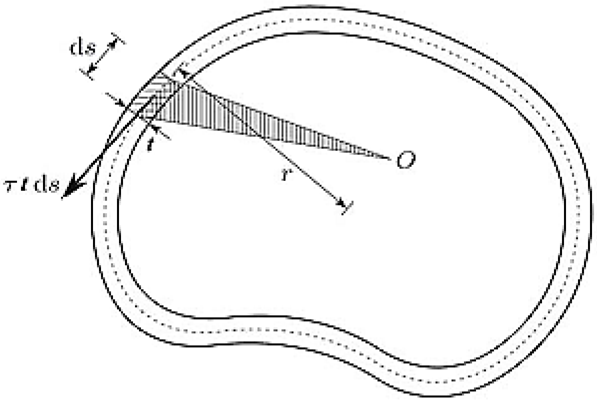


Fig. 1.10 : Détermination de contrainte de cisaillement provoquée par le moment de torsion **[75]**.

Comme le montre la **Fig.1.10**, sur la base d'équilibre de la section, l'expression de l'équation (1.12) présente la relation entre le couple de moment $\mathrm{d}M_t$ de torsion et la contrainte de cisaillement τ . Naturellement, un moment est le produit d'un effort *dF* avec le bras de levier r qui se situe entre le centre de la paroi mince, qui est la ligne médiane de la paroi et le point arbitraire *O*.

$$dM_t = 2\tau t \ ds.r = 2f \ ds.r \qquad (1.12)$$

Avec : f est le flux de cisaillement qui est constant.

On peut écrire l'expression d'un élément de force tangentielle appliquée sur tronçon d'élément de surface $\Omega = t \ ds$, par :

$$dF = \tau t \ ds \qquad (1.13)$$

Après intégration de l'équation (1.12), l'expression du moment de torsion repris par la section devient :

$$M_t = 2\oint f \ r ds = 2f \ A \qquad \text{et} \qquad f = \frac{M_t}{2A} \qquad (1.14)$$

L'expression de la contrainte devient :

$$\tau = \frac{M_t}{2At} \qquad (1.15)$$

Avec :

$$A = \oint r \; ds \tag{1.16}$$

A représente l'aire de la surface limitée par la ligne centrale et le point arbitraire *O.*

L'expression de la contrainte tangentielle τ présentée par l'équation (1.12) est applicable pour un matériau de comportement linéaire et non linéaire, matériaux isotropes ou anisotropes. Elle est considérée comme la première formule développée par Bredt pour les poutres à parois minces à sections fermées.

Le principe de conservation de l'énergie reste la solution idéale pour la détermination des déformations subites de la section à parois minces sous un effort de torsion à cause du manque d'informations sur le comportement de la barre sous un effort de torsion. Cependant, si le matériau a un comportement élastique, le principe de conservation énergétique est appliqué :

$U = W$

D'où W représente le travail des charges extérieures et U l'énergie potentielle élastique, représentées par les expressions suivantes :

$$W = \frac{1}{2} M_t \; \theta \tag{1.17}$$

et

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau \; \gamma \; d\Omega \tag{1.18}$$

Ainsi, l'expression de la déformion angulaire θ au tour de l'axe normale de la section à parois minces sous l'effet d'un effort de torsion M_t s'écrit :

$$\theta = \frac{1}{GM_t} \oint \tau^2 \; tds \tag{1.19}$$

Avec :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \tag{1.20}$$

En remplaçant l'expression de la contrainte (1.12) dans l'équation (1.12), l'expression de la déformation angulaire θ en fonction du module de cisaillement G et des propriétés géométriques de la section transversale J :

$$\theta = \frac{M_t}{4GA^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_t}{GJ} \tag{1.21}$$

Avec :

$$J = \frac{4A^2}{\oint ds/t} \tag{1.22}$$

Le produit GJ représente la rigidité de torsion. On considérant que l'épaisseur de la paroi est constante, L'intégral $\oint ds$ représente naturellement le périmètre de ligne centrale de la paroi mince. J appelé également constante de torsion par Bredt en 1986 est donnée par l'expression (1.23) dans le cas où l'épaisseur des parois sont constantes sur toute la section transversale :

$$J = \frac{4\,A^2 t}{p} \tag{1.23}$$

1.6. Torsion uniforme des sections ouvertes à parois minces de forme quelconque :

On généralise pour le cas d'une section dont la ligne moyenne décrit un contour ouvert quelconque. En effet, M et par suite J sont directement proportionnels au volume limité par la membrane ; or ce volume pour une section composée de plusieurs rectangles allongés est égal à la somme des volumes associés à chaque rectangle. Par conséquent **[72]**:

$$J = \frac{1}{3}\sum bt^3 \tag{1.24}$$

Où les b se mesurent sur la ligne moyenne. Dans chaque rectangle i, on a :

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{J} t_i \tag{1.25}$$

Où :

b est la longueur de la paroi mince hauteur de la section.
t est l'épaisseur de la paroi mince.

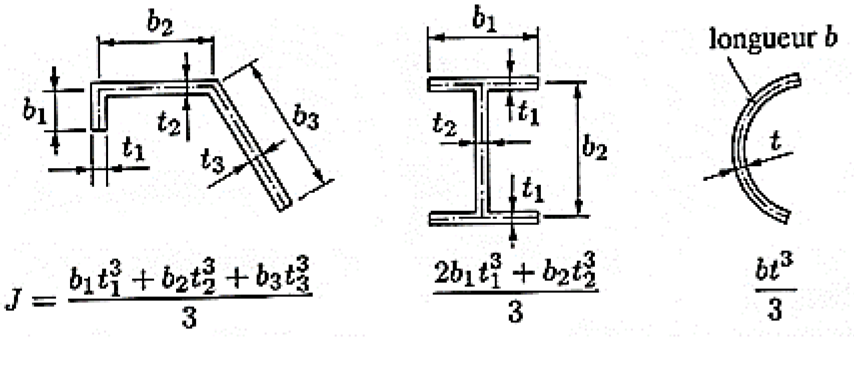


Fig. 1.11 : Sections ouvertes à parois minces : calcul de J **[72].**

1.7.Torsion non uniforme :

La résistance à la torsion dépend de la géométrie de la section et du matériau qui la compose. Le moment de torsion M_x agissant sur une barre est équilibré par des efforts intérieurs de deux types bien distincts : le premier, qui est prépondérant dans les sections fermées, est un flux de cisaillement fermé à l'intérieur de la section du matériau ; le second, qui est prépondérant dans les sections ouvertes est composé de contraintes normales et de contraintes tangentielles induites par la variation de ces mêmes contraintes normales. La résistance à un moment de torsion est donc décomposée en deux modes de résistance : d'une part la torsion uniforme ou de St-Venant M_v et d'autre part la torsion non uniforme M_w.

Les efforts correspondants à un mode de résistance ne peuvent se développer que si la section transversale, qui aimerait gauchir, voit son *gauchissement* empêché par des conditions d'appui adéquates. On dit qu'une section plane gauchit lorsqu'elle ne reste plus plane après déformation sous l'action d'un moment de torsion extérieur **[76]**.

Pour mieux comprendre la différence entre la résistance à la torsion uniforme et la résistance à la torsion non uniforme, prenons le cas de deux poutres en console sollicitées par le même effort de torsion M_x à leur extrémité. La section d'une des poutres à la forme circulaire à parois mince et l'autre présente une section circulaire ouverte à parois mince. La section circulaire fermée reste plane après déformation, tandis que l'autre à section ouverte présente des déformations hors plans de torsion, on dit qu'elles gauchissent. Ce gauchissement qui est présent dans la section à paroi mince à section ouverte est visible dans l'extrémité libre de la poutre, ce qui veut dire que la section ne présente aucune résistance à ce point, donc la section à cette abscisse résiste uniquement au moment de torsion uniforme M_v St-Venant, en revanche de l'autre extrémité de la poutre ou la section est encastré, le gauchissement est empêché, ce qui veut dire qu'elle présente une résistance à une torsion non uniforme M_w. En dehors de ces deux points extrêmes de la poutre qui se trouvent à ses extrémités, toutes les autres sections présentent une résistance mixte M_T , en torsion uniforme et en torsion non uniforme.

$$M = M_v + M_w \tag{1.26}$$

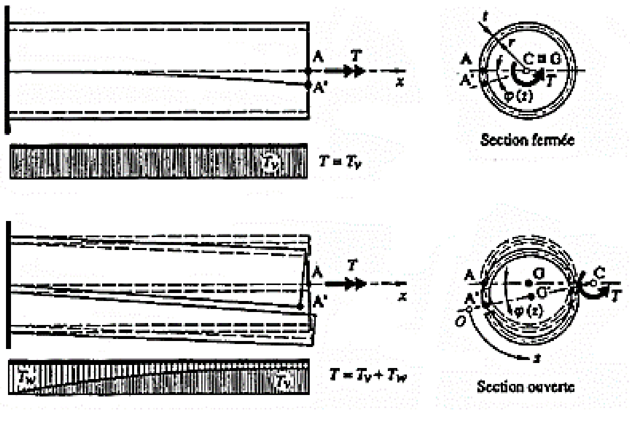


Fig.1.12 : Influence de la forme de la section sur le comportement à la torsion **[76].**

Dans l'étude de la torsion non uniforme, en plus des hypothèses fondamentales de la statique des barres, nous admettons que **[76]** :

- Les contraintes normales sont constantes sur l'épaisseur des parois (parois minces),
- Les contraintes tangentielles agissant sur la ligne moyenne des éléments de parois sont considérées comme constantes sur l'épaisseur de celles-ci.
- La déformation due au cisaillement est négligeable.

1.7.1. Notion de bimoment :

Les contraintes normales et tangentielles sont calculées au niveau de la fibre moyenne des éléments ainsi sollicités à partir des efforts $\left(N, T_y, T_z, M_y, M_z, M_x\right)$, dans la théorie classique. Les contraintes normales sont dues à l'effort normal *N* et aux moments fléchissant M_y *et* M_z au tour des axes *Y* et *Z*, les contraintes tangentielles sont dues aux efforts de cisaillement V_y *et* V_z et au moment de torsion M_x . En plus des déformations sous le moment de torsion de St-Venant M_v, les profilés à parois minces à sections ouvertes telles que en *I*, *U*, *C* ou en Z , des déformations dus à l'effet du gauchissement sont ajoutées, dont elles sont définies comme des déformations longitudinales suivant l'axe des *X*. Un nouvel effort apparait dans le système, en plus des autres efforts, qui va provoquer le gauchissement de la section et à qui on a donnée le nom du bimoment par Vlassov **[4]**.

Pour faire apparaitre l'effort du bimoment dans une section à parois mince à section ouverte et voir comment il fait gauchir la section, prenons une poutre en console de section double Té chargée à son extrémité libre par une force *N* de traction concentrée excentrée suivant les deux axes principaux de la section *Y* et Z par les deux valeurs $e_y = b/2$ et $e_z = h/2$ respectivement **Fig 1.13.a**. Le chargement appliqué sur la poutre est convertis en une charge concentrée appliquée au centre de gravité de la section avec deux moments de flexion M_y et M_z comme le montre la figure **Fig. 1.13.b**.

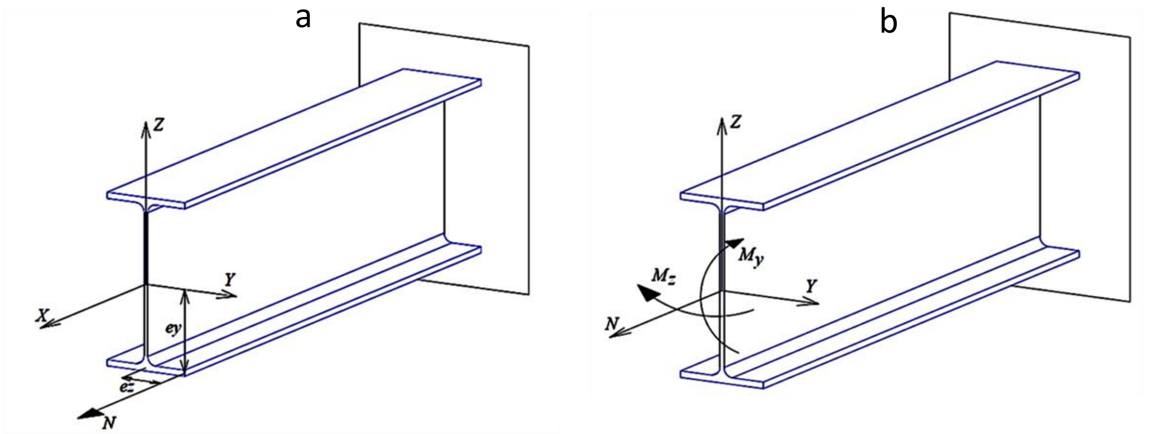


Fig 1.13 : Console de section en double Té sollicitée à deux moments et un effort normal.

En résumé l'ensemble de ses trois effort (N, M_y et M_z) sollicitent en même temps la poutre en console. Par la suite on va isoler les trois sollicitions pour que chacune d'elle sollicite seule la poutre en console, ainsi chaque sollicitation est décomposée en forces concentrés de valeur *N/4* de tel sorte qu'elles gardent la même valeur de la sollicitation totale, voir **Fig.1.14**.

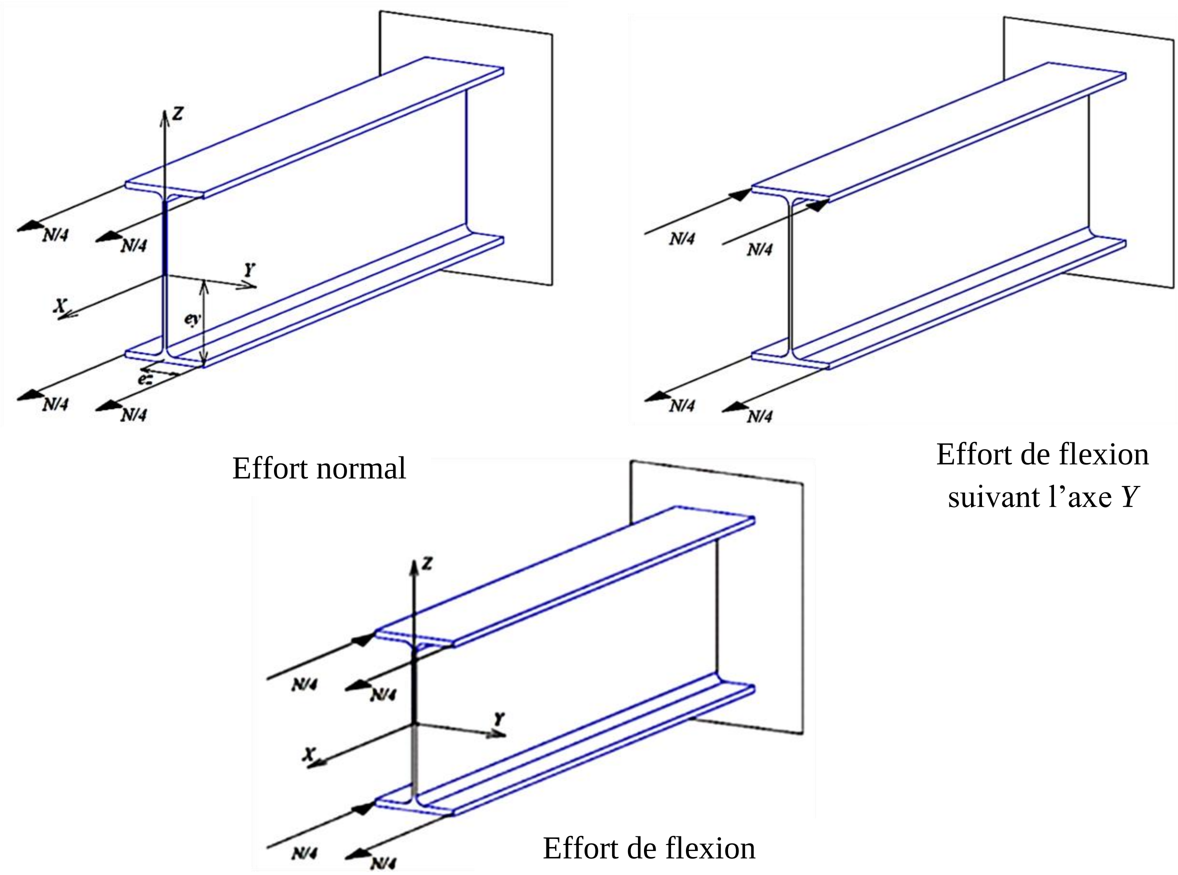


Fig 1.14 : Séparation des trois efforts de la console **[4]**.

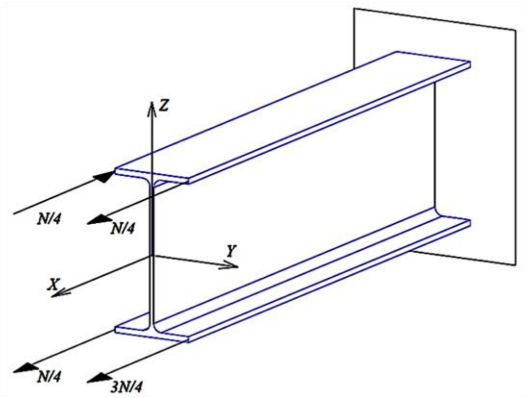


Fig 1.15 : Réunion des trois sollicitations après séparation **[4]**.

Si on réunit à nouveau les trois sollicitations écartées préalablement, on obtient l'état de charge présenté dans la **Fig. 1.15** qui est diffère de l'état de charge initial, donc elle est incomplète.

Afin d'obtenir l'ensemble de la charge initiale totale, un ensemble de forces est ajouté et présenté sur la **Fig. 1.16**. Cette sollicitation complémentaire se présente sous forme de deux moments fléchissant de même valeur mais de sens opposés appliqués sur les deux ailes de la poutre. Les deux moments font fléchir les ailes de la poutre dans des sens opposés **[77]**.

Cette quantité d'effort présenté par un couple de deux moments égaux M'_z, de sens opposés écartés par une distance h et dont la dimension Nm^2 et que par la suite la section transversale de poutre subira le phénomène de gauchissement est appelle par Vlassov **[4]** le **bimoment**. On constate que pour dimensionner une poutre de section ouverte à parois mince, on est dans l'obligation de prendre en considération la résistance de la section transversale au gauchissement par le calcul de l'effort du bimoment B_ω.

$$M'_z = b\,N/4 \tag{1.27}$$

$$B_\omega = h\,M'_z \tag{1.28}$$

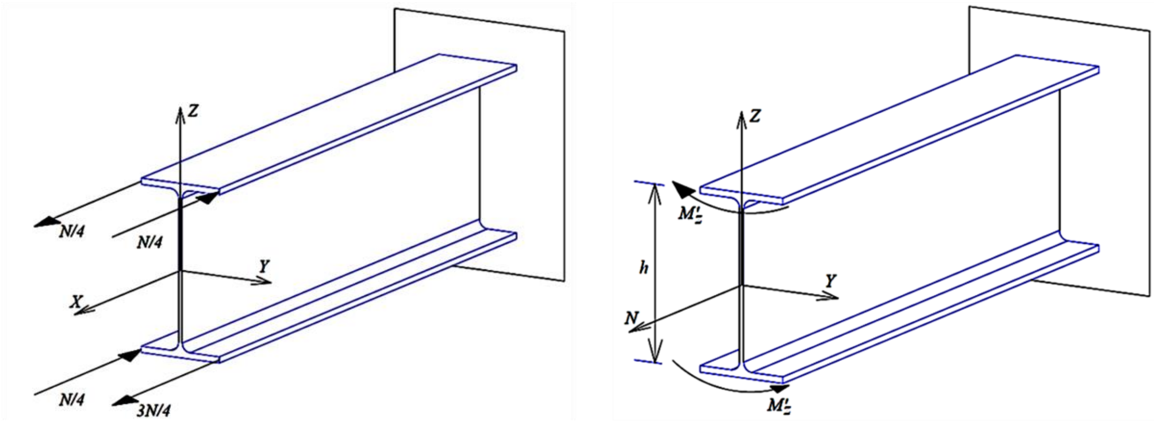


Fig.1.16 : Effort de bimoments.

1.7.2. Distribution des contraintes et des déformations :

Nous avons démontré au paragraphe précédent comment cette nouvelle quantité d'effort appelé bimoment apparait dans les sections à parois minces à section ouvertes sollicités par une combinaison d'efforts de flexion et de traction. Maintenant, nous allons présenter les différentes équations qui présentent les déformations de gauchissement et les contraintes produites d'une poutre en console de section à parois minces à section ouverte de type I sollicité par un seul effort de moment de torsion. Le choix de la poutre en console nous permet de voir de manière parfaite les déformations dues au gauchissement **Fig.1.17**.

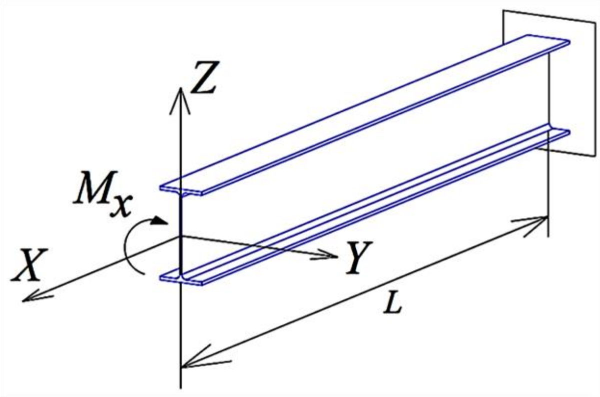


Fig.1.17 : Exemple de la barre à section en double té soumise à un effort de torsion.

Telle que nous avons expliqué au début, une poutre à sections ouvertes à parois minces sollicitées à un moment de torsion, provoque des déformations longitudinales hors plans en plus des déformations angulaires et cela et dus aux flux de contraintes produit dans la section. Cela s'explique par le fait que le flux fermé de contraintes tangentielles τ_v produit dans la section provoque sa rotation d'un angle $\varphi(x)$, ainsi on l'appelle déformation due au moment uniforme M_v de la section. De plus, chaque semelle de la section ouverte est sollicitée à un moment de flexion M_z ' et un effort de cisaillement V_z produisant des déformations longitudinales $v_{\text{sup}}(x)$ et $v_{\text{inf}}(x)$ suivant l'axe X de l'aile supérieure et inférieure respectivement. Autrement dit, les contraintes normales σ_w et tangentielles τ_w qui sont liées aux translations des ailes représentent l'état des contraintes dû à la torsion non uniforme M_w.

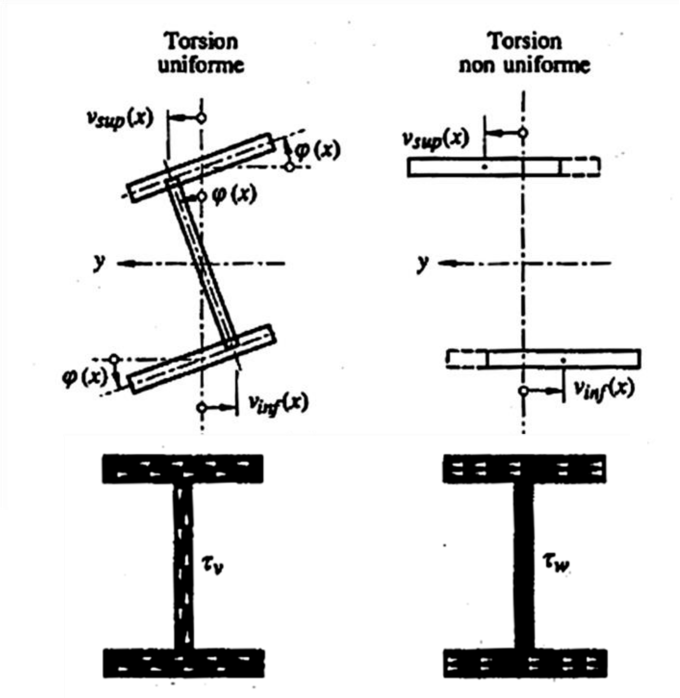


Fig.1.18 : Décomposition des déformations de la section et contraintes tangentielles correspondantes **[76]**.

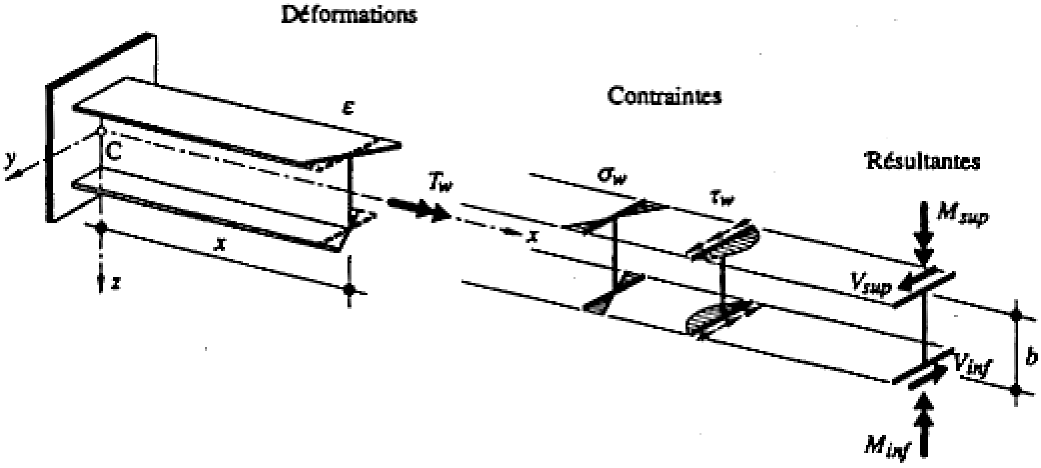


Fig.1.19 : Déformation et contraintes résultant de la flexion des ailes **[76]**.

Le moment de torsion total résistant au moment de torsion sollicitant une poutre à section ouverte à paroi mince est à la fin équilibré par le moment résistant de la torsion uniforme M_v associé à la valeur du moment résistant de la torsion non uniforme M_w.

$$M = M_v + M_w \tag{1.29}$$

1.7.3. Analyse élastique de la torsion non uniforme :

Rappelons que l'expression du moment de torsion uniforme de St Venant traité au paragraphe antérieurement est comme suit :

$$M = \int_A Gr^2\theta \, dA = G\theta \int_A r^2 \, dA = G\theta I_p \tag{1.30}$$

L'angle de torsion par unité de longueur $\theta = d\varphi / dx$ au contraire du cas de la torsion uniforme n'est plus constant dans le cas de la torsion non uniforme. Par convention, on utilisera dorénavant le terme ψ au lieu de θ pour présenter les équations différentielles.

L'équation qui décrit le bimoment est :

$$M_\omega = B_\omega = M_Z \; h = h \frac{dM_{fz}}{dx} \tag{1.31}$$

Avec :

M_{fz} : Le moment de flexion appliqué aux semelles.

h : La distance entre les centres de gravité des semelles de la section en *I*.

L'équation différentielle qui décrit le déplacement de la semelle est :

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = v''(x) = -\frac{M_{fZ}}{EI_s} \tag{1.32}$$

Avec I_s moment d'inertie de la semelle suivant l'axe Z.

D'où l'expression du déplacement latéral v qui s'écrit :

$$v_f = \frac{h}{2}\psi \tag{1.33}$$

L'expression du bimoment s'écrit à nouveau comme suit :

$$M_\omega = -\frac{E\, I_s\, h^2}{2}\psi'''(x) \tag{1.34}$$

Avec :

$$\psi'''(x) = \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3}. \tag{1.35}$$

En remplaçant (2.19) et (2.21) dans (2.18), on arrive à l'équation bien connue de torsion non uniforme :

$$M_t = G\, I_t\, \psi' - E\, I_\omega\, \psi''' \tag{1.36}$$

Dans laquelle $I_\omega = \dfrac{E\, I_s\, h^2}{2}$ présente l'inertie de gauchissement de la section.

Le moment de torsion mixte présenté par son expression dans l'équation (1.29) a vu le jour pour la première fois par Vlassov **[4]**. Ce moment résistant relie à la fois l'angle de torsion des sections φ, le moment d'inertie de St Venant I_t et le moment d'inertie de gauchissement I_ω.

La présence du paramètre I_ω contribue à la prédiction de la résistance à la torsion non uniforme des poutres prismatique à section ouverte faite de parois minces de manière plus exacte et plus réelle.

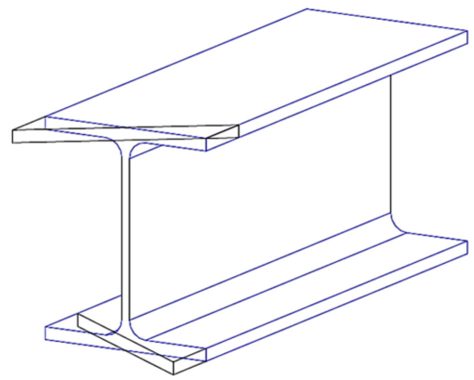


Fig. 1.20 : Déformée de gauchissement d'une poutre en I.

1.7.4. Caractéristiques géométriques des sections ouvertes :

Dans la théorie classique, les caractéristiques géométriques des sections qui interviennent dans le calcul des sections sont : le centre de gravité, l'aire de la section, le moment statique et les moments d'inertie statiques et quadratiques. De plus, afin d'introduire l'effet de gauchissement dans le calcul de la résistance des sections des profilés à parois minces à sections ouvertes sollicités à la torsion non uniforme, d'autres caractéristiques géomatiques sont nécessaires et qui sont : le centre de torsion, la coordonnée sectorielle, le moment d'inertie de torsion uniforme et de gauchissement.

1.7.4.1. Moment d'inertie :

Les moments statiques et quadratiques classiques (liés à la théorie des poutres), sont donnés par les relations suivantes :

$$A=\int dA\,,\qquad S_y=\int_A z\,dA\,,\qquad S_z=\int_A y\,dA$$
$$I_y=\int_A z^2\,dA\,,\qquad I_z=\int_A y^2\,dA\,,\qquad I_{yz}=\int_A yz\,dA \tag{1.37}$$

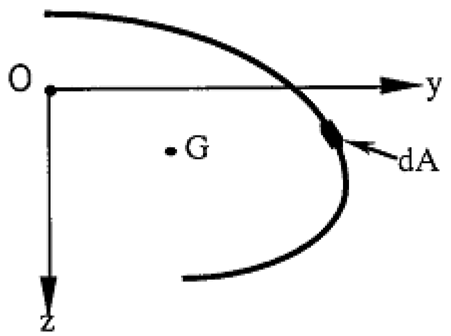


Fig. 1. 21 : Coordonnées de centre de gavité **[77].**

Dans l'analyse des poutres à parois minces et profils ouverts, les coordonnées d'un point qui se trouve sur le contour de la section transversale, est repéré par rapport aux axes principaux centraux. La position de l'origine et de la direction de ces axes principaux est définie par les trois conditions données par les équations suivantes **[77]** :

$$S_y=\int_A z\,dA\,, \tag{1.38.a}$$

$$S_z=\int_A y\,dA\,, \tag{1.38.b}$$

$$I_{yz}=\int_A yz\,dA \tag{1.38.c}$$

Les deux équations (1.17-a et 1.17-b) sont utilisées pour localiser l'origine des coordonnées principales. Ce point particulier est appelé : le centre de gravité de la section transversale. L'équation (1.17-c) donne la direction des axes principaux.

1.7.4.2. Surface sectorielle :

La coordonnée sectorielle est une variable qui intervient dans le calcul de la torsion non uniforme. Elle se réfère par rapport à la ligne moyenne du contour de la section transversale du profilé ouvert (**Fig. 1.22**). La coordonnée sectorielle du point M , mesurée à partir du pôle D et du point initial M_1 , est représentée par deux fois l'aire formée par deux segments DM, DM_1 et l'arc MM_1 **[77]**.

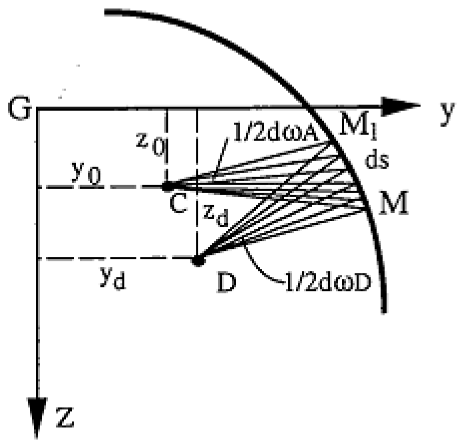


Fig.1.22: Surface sectorielle **[77].**

Où :

D est le pôle auxiliaire de la coordonnée sectorielle qui représente le centre de rotation des points du contour transversal.
M_1 est appelé point initial à partir duquel on mesure la surface sectorielle.
M est le point d'intersection du segment DM et de la tangente au contour transversale de la section en ce point M.
C est le centre de torsion.
Soient ω_C, ω_D les surfaces sectorielles qui correspondent respectivement aux pôles C et D.
L'aire du triangle CMM_1, selon la figure 1.22, est donnée par **[77]** :

$$CMM1 = CAM - CBM_1 - BAMM_1 \tag{1.39}$$

D'où :

$$\text{Aire}(CMM1) = \frac{1}{2}\left[(y-y_0)+dy\right]\left[(z-z_0)+dz\right] - \left(z-z_0+\frac{1}{2}dz\right)dy - \frac{1}{2}(y-y_0)(z-z_0) \tag{1.40-a}$$

L'aire du triangle DMM_1 est donnée par :

$$\text{Aire}(DMM1) = \frac{1}{2}\left[(y-y_d)+dy\right]\left[(z-z_d)+dz\right] - \left(z-z_d+\frac{1}{2}dz\right)dy - \frac{1}{2}(y-y_d)(z-z_d)$$

(1.40-b)

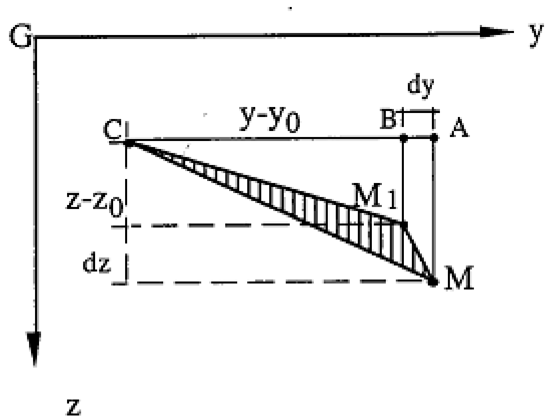


Fig. 1.23 : [77].

Comme la surface sectorielle est le double de l'aire balayée par le point *M*, en se déplaçant sur le contour transversal de la section par rapport à un pôle quelconque, on a :

$$d\omega_C = 2 \text{ x aire}(CMM_1) = (y-y_0)\text{dz} \ - \ (z-z_0)\text{dy} \tag{1.41-a}$$

$$d\omega_D = 2 \text{ x aire}(DMM_1) = (y-y_d)\text{dz} \ - \ (z-z_d)\text{dy} \tag{1.41-b}$$

La différence des deux surfaces sectorielles (1.40-a) et (1.40-b) donne :

$$d(\omega_C - \omega_D) = (z_0 - z_d)\text{dy} - (y_0 - y_d)\text{dz}$$

(1.42)

L'intégration de l'équation (1.21) donne :

$$\omega_C = \omega_D + (z_0 - z_d)\text{y} - (y_0 - y_d)\text{z} + \text{C}_0 \tag{1.43}$$

Où C_0 est une constante arbitraire, dépendant du point initial à partir duquel on mesure les surfaces sectorielles **[77].**

On suppose que le point $M_1(y_1,z_1)$ est l'origine des arcs s et en supposant que les surfaces sectorielles ω_C, ω_D sont également comptées à partir de ce point, c'est-à-dire que pour s=0 on a $\omega_C = \omega_D = 0$. D'après ces conditions :

$$C_0 = -(z_0 - z_d)y_1 + (y_0 - y_d)z_1 \tag{1.44}$$

Après avoir remplacé C_0 par sa valeur, l'équation (1.22) devient :

$$\omega = \omega_C = \omega_D + (z_0 - z_d)(y - y_1) - (y_0 - y_d)(z - z_1) \tag{1.45}$$

A partir de la relation 1.24, on constate que l'unité de ω est de m^2.

Les caractéristiques géométriques liées à la coordonnée sectorielle sont définies par rapport au centre de torsion, elles sont données par :

$$\begin{aligned} S_\omega &= \int_A \omega \, dA \quad , \quad I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA \\ S_{\omega y} &= \int_A z\omega \, dA \quad , \quad S_{\omega z} = \int_A y\omega \, dA \end{aligned} \tag{1.46}$$

1.7.4.3. Centre de torsion :

Le centre de torsion est point bien particulier de la section transversale massive ou bien mince, ouverte ou fermée. Lorsque les charges appliquées à la poutre ne passent pas par ce centre, la flexion de la poutre s'accompagne nécessairement d'une torsion**.** Le centre de torsion a pour propriété de rendre la surface sectorielle orthogonale aux coordonnées (y, z) mesurées dans les axes principaux centraux d'inertie **[77]**, ce qui se traduit par :

$$\int_A y\omega \, dA = 0 \quad , \quad \int_A z\omega \, dA = 0 \tag{1.47}$$

Après avoir remplacé (1.24) par sa valeur, on trouve :

$$\int_A y\omega_D \, dA + \int_A y^2 (z_0 - z_d) \, dA - \int_A (y_0 - y_d) zy \, dA = 0 \tag{1.48.a}$$

$$\int_A z\omega_D \, dA + \int_A (z_0 - z_d) zy \, dA - \int_A (y_0 - y_d) z^2 \, dA = 0 \tag{1.48.b}$$

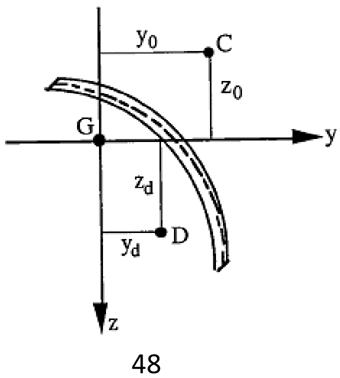


Fig. 1.24 : Centre de torsion d'une section à paroi mince **[77].**

La solution du système 1.27-a et 1.27b d'équation, nous donne :

$$y_0 = y_d + \frac{I_z \int_A \omega_D \; zdA - I_{yz} \int_A \omega_D \; ydA}{I_z I_y - I_{yz}^2}$$

$$z_0 = z_d - \frac{I_y \int_A \omega_D \; ydA - I_{yz} \int_A \omega_D \; zdA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \tag{1.49}$$

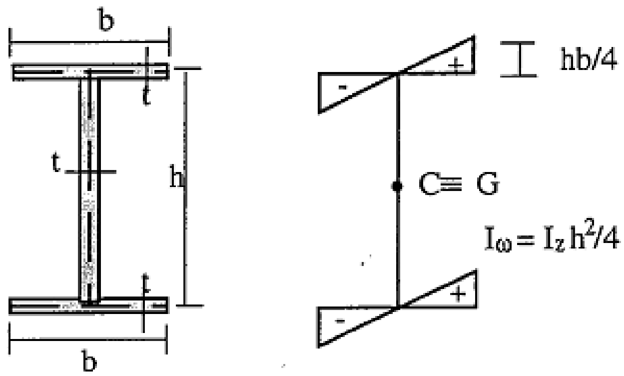
Dans le cas particulier ou les axes y et z de la section sont des axes principaux, l'équation (1.28) devient :

$$y_0 = y_d + \frac{\int_A \omega_D \; zdA}{I_y}$$

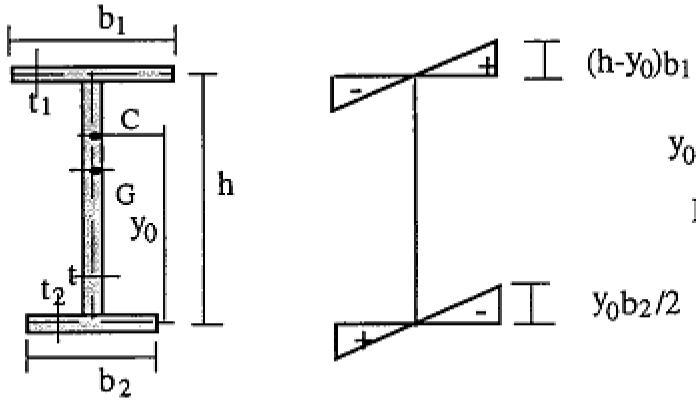
$$z_0 = z_d - \frac{\int_A \omega_D \; ydA}{I_z} \tag{1.50}$$

Il est convenable de se rendre compte que pour les profilés ouverts simples ou composés, ayant un axe de symétrie dans la section transversale, le centre de torsion se trouve sur cet axe. Si la section a deux axes de symétrie le centre de torsion se trouve à l'intersection de ces axes et coïncide dans ce cas avec le centre de gravité **[77].**

Pour les profilés qui suivent, on donne la répartition de la coordonnée sectorielle principale, la position du centre de torsion et l'expression du moment d'inertie de gauchissement en fonction des caractéristiques géométriques de la section **[77].**



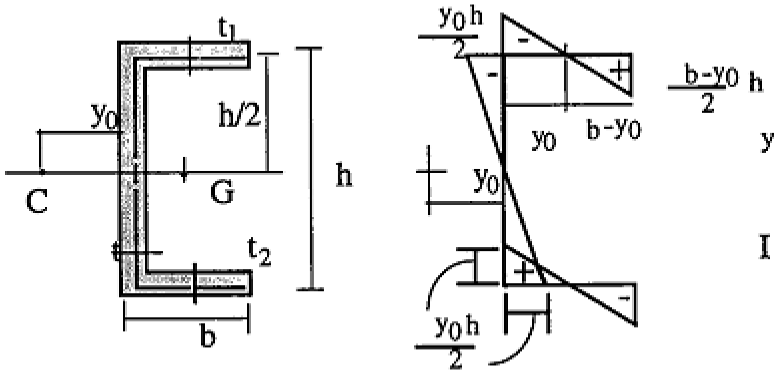
(a) : Profilés en I symétrique



$$y_0 = \frac{b_1^3 t_1}{b_2^3 t_2 + b_1^3 t_1} h$$

$$I_\omega = b_1^3 t_1 (h - y_0)^2 + b_2^3 t_2 y_0^2$$

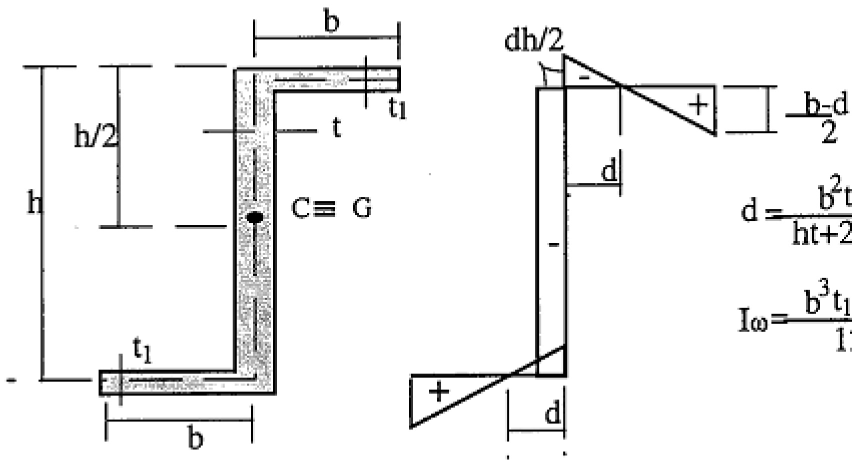
(c) : Profilés en I monosymétrique



$$y_0 = \frac{b\ t_1}{2\,b\,t_1 + \frac{h\,t}{3}}$$

$$I_\omega = y_0^2 I_y + 1/6\ (b - 3y_0)\ b^2\ h^2 t_1$$

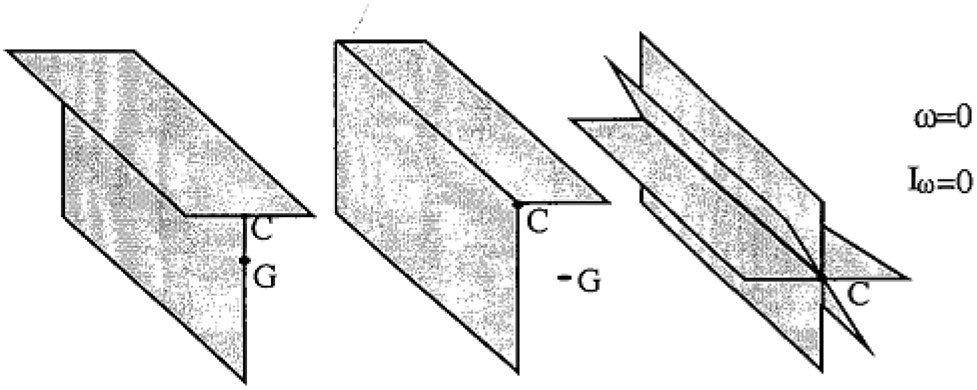
(b) : Profilés en U



$$d = \frac{b^2 t_1}{ht + 2bt_1}$$

$$I_\omega = \frac{b^3 t_1 h^2}{12} \cdot \frac{2ht + bt_1}{ht + 2bt_1}$$

(d) : Profilés en Z



(e) : Profilés constitués d'un faisceau de plaques minces

Fig.1.25 : Caractéristiques géométriques des sections pour la torsion **[77]**.

1.8. Conclusion :

La torsion est la sollicitation subie par un corps soumis à l'action d'un couple de forces opposées agissant dans des plans parallèles et dont l'élément de réduction est un moment de force agissant dans l'axe de la poutre. On a montré sur ce chapitre qu'une pièce change de comportement en fonction de sa section transversale lorsqu'elle est sollicité à un effort de torsion, à savoir entre section fermé ou ouverte, section pleine ou section formé de parois mince.
Vlassov a démontré que le principe de Bernoulli qui met en évidence la conservation des sections planes après déformation doit être abandonné en présence des sections ouvertes formées à parois minces. Cependant il a donnée naissance au phénomène de gauchissement par le développement de la méthode des aires sectorielles. L'effet du gauchissement doit être pris en considération pour l'étude de l'instabilité des poutres aux sections ouvertes à parois minces d'une part. D'autre part, la théorie de Saint-Venant reste valable uniquement pour les sections pleines circulaires.

CHAPITRE 2 :

INSTABILITE DES POUTRES A PAROIS MINCES :

ASPECT ANALYTIQUE ET REGLEMENTAIRE

2.1. Introduction :

Les ouvrages métalliques rencontrent un franc succès dans le monde de la construction et cela à cause des nombreux avantages que recèle l'acier. La plupart des grands secteurs industriels y ont recours. L'utilisation des éléments élancés aux parois minces rend les constructions plus modernes et leur reflètent un aspect plus innovent en offrant une liberté de conception illimité aux architectes et aux ingénieurs de structures. En plus de l'avantage du gain économique, ces éléments sont beaucoup plus sensibles aux divers phénomènes d'instabilité. Cependant leur dimensionnement doit être plus rigoureux et plus précis afin que leur utilisation réponde aux services que présente l'ouvrage.

Dans ce chapitre, nous allons nous consacrer à l'étude de l'instabilité du flambement et du déversement des éléments métalliques. On va commencer par expliquer les différents phénomènes ensuite en déduire les charges critiques du flambent et du déversement ainsi que les charges critiques présentées par le règlement européen l'EC3.

2.2. Flambement :

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élancement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques.

2.2.1. Définition :

Le flambement est un phénomène mécanique d'instabilité qui affecte des éléments de structures soumises à la compression. Lorsque l'élément sollicité à une charge N de compression atteint une certaine valeur de compression, l'élément sollicité subit une flexion dans la direction perpendiculaire à la direction de la charge. La déformation de l'élément se produit dans le sens de faible inertie pour les sections qui procèdent une inertie plus faible vis-à-vis l'autre. Cette charge provocatrice d'éventuelle déformation est appelée charge critique de flambement N_{cr} qui peut avoir une nature mécanique ou bien thermique. Autrement dit, le système d'équilibre d'un élément sollicité en compression est stable si la valeur de la charge N est inférieure à N_{cr}, le système est métastable si N atteint la valeur critique N_{cr}, par la suite il sera instable si la charge N dépasse la valeur critique et ainsi l'élément sollicité se ruine et ne répond plus aux services souhaités **(Fig.2.1).**

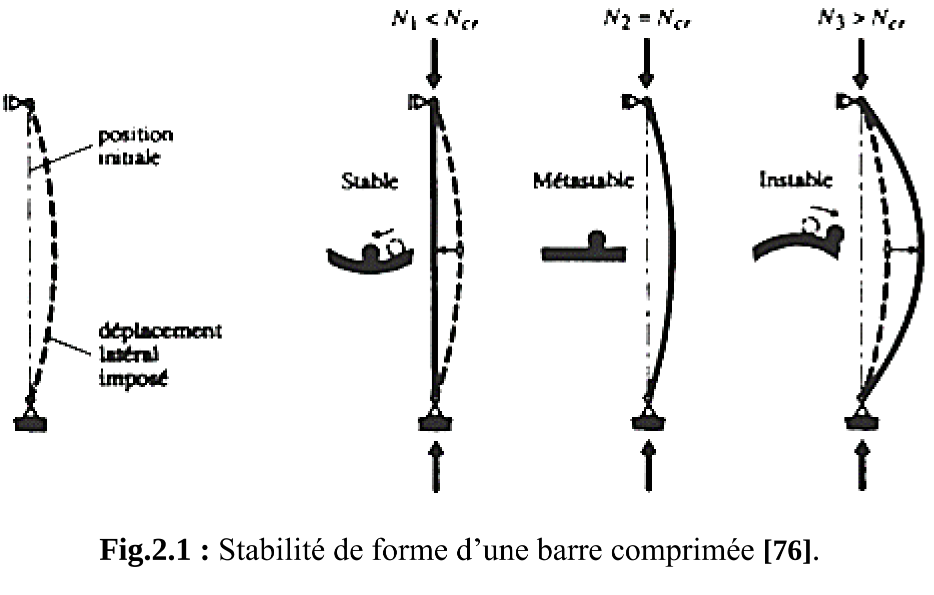


Fig.2.1 : Stabilité de forme d'une barre comprimée **[76]**.

Dans les problèmes classiques de flambement, le système est dit *stable* si la charge N est assez petite, autrement dit après déchargement la barre revient à sa position initiale. Si la charge N est égale à la charge critique N_{cr} qu'on l'appelle aussi charge de flambement, la barre garde sa position déformée après déchargement, la barre se trouve à un nouvel état d'équilibre dit métastable ou indifférent. Pour le dernier cas si la charge N est supérieure à la charge critique N_{cr} le système cesse d'être stable et il est appelé instable, ainsi la barre se dérobe, la déformation s'accentue et devient inacceptable.

2.2.2. Théorie de flambement plan élastique par bifurcation :

En 1744, Euler a été le premier à définir la valeur de la charge critique de flambement qu'on appelle également *charge critique d'Euler*. Pour établir les équations d'équilibre, il considère un élément parfaitement rectiligne sans aucune imperfection de forme initiale, bi articulé aux extrémités et soumis uniquement à une charge de compression centrée. Par conséquence, selon ces hypothèses adoptées par Euler, la charge critique déduite est appelée ***charge critique de bifurcation*** et qu'on appellera par la suite le système dans son état instable par **flambement par bifurcation**. En revanche, si un élément comprimé ne tient plus compte des hypothèses adoptées par Euler, par exemple l'apparition d'une flexion supplémentaire provoquée par une imperfection initiale de l'élément ou bien l'excentrement de la force de compression, l'existence de forces transversales, le phénomène d'instabilité se nomme ainsi le flambement par divergence. Naturellement la valeur de la charge critique déduite d'un tel système imparfait sera inférieur à la charge critique d'Euler dite de bifurcation.

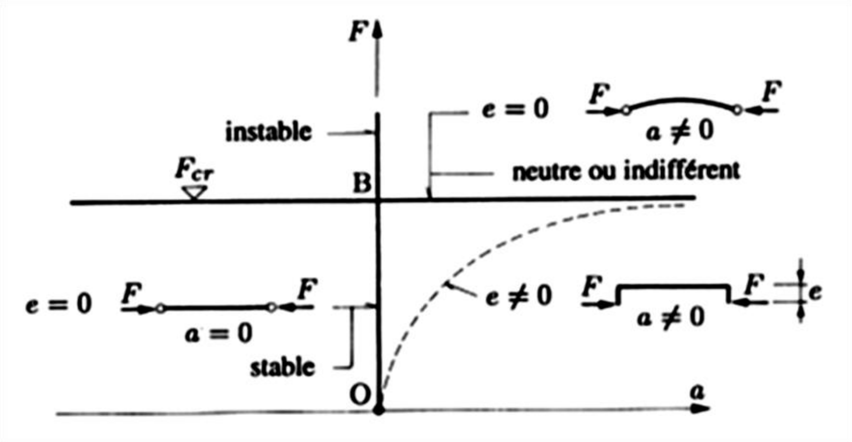


Fig.2.2 : Flambement par bifurcation et par divergence **[73]**.

Le cas de poutre étudié par Euler pour illustrer le phénomène mécanique de flambement est considéré comme un cas fondamental pour établir les équations d'équilibres. Ainsi on trouve : On considère que la section transversale possède une inertie suivant l'axe *Y* qui est plus forte que celle suivant l'axe *Z* :

$$v'' + \frac{N}{EI_z} v = 0 \qquad \text{Suivant l'axe } Z \qquad (2.1)$$

$$w'' + \frac{N}{EI_y} w = 0 \qquad \text{Suivant l'axe } Y \qquad (2.2)$$

Avec v la flèche suivant l'axe *Y* et *w* la flèche suivant l'axe *Z*. la vérification au flambement est toujours faite selon la zone faible, et dans notre cas on considère toujours une vérification selon l'axe de faible inertie qui est l'axe Z.

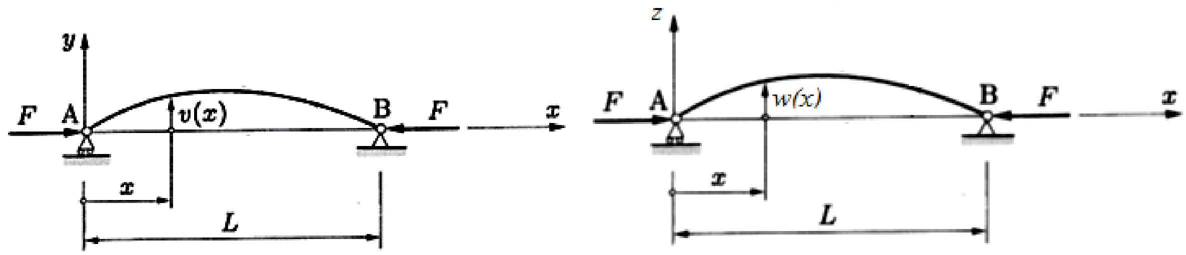


Fig.2.3 : Cas fondamental d'Euler **[73]**.

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \tag{2.3}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont définies à partir des conditions aux limites aux droit des appuis $v(0) = 0$ et $v(L) = 0$. Ainsi la charge critique de flambement devient :

$$N = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \tag{2.4}$$

Avec :

n : Nombre entier.
E : Module d'élasticité du matériau.
I : moment d'inertie de l'axe perpendiculaire à celui de la flèche.
L : longueur de la barre.

Si on prend *n*=0, cela veut dire que l'effort dans chaque section est nul, ce qui ne reflète pas du tout le cas de l'état de notre poutre étant donné qu'elle est fléchie sous un effort existant. Cependant, pour déterminer la petite valeur de la charge critique de bifurcation dite aussi charge critique d'*Euler*, on prend la plus petite valeur de *n* et qui est égale à 1, et la valeur devient :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.5}$$

L'expression finale de *F* définie tout simplement une résistance au flambement d'un élément parfait biarticulé de section constante soumis à une charge de compression centrée. A cet effet, l'expression *F* change de valeur en fonction des conditions aux appuis autre que celles du cas fondamental d'Euler, et par la suite la longueur de la barre *L* change de valeur et à la quelle on attribue le nom de longueur de flambement l_k. Cette dernière est définie comme une distance mesurée entre deux points d'inflexion de la barre étudiée. L'expression de la résistance critique au flambement d'une barre devient :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^{\,2}} \tag{2.6}$$

Les longueurs de flambement sont illustrées sur la figure suivante :

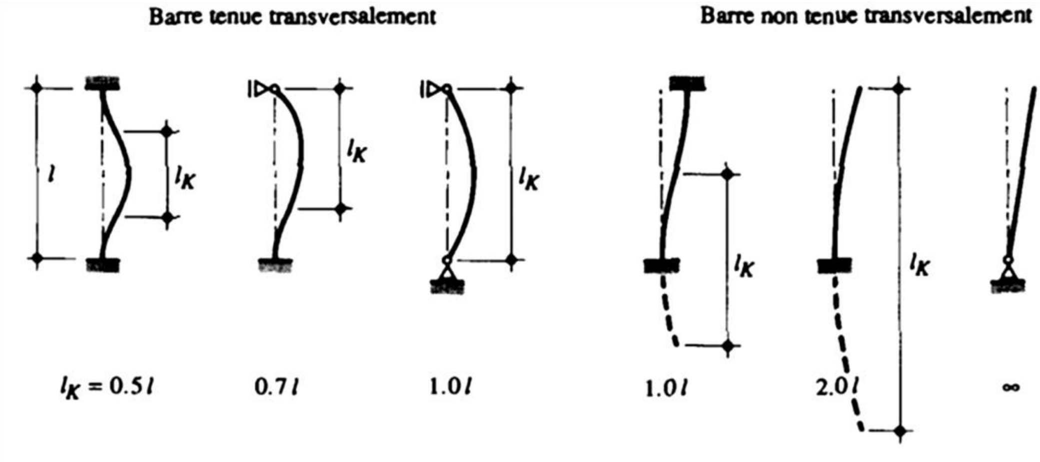


Fig.2.4 : Longueurs de flambement l_k de barres soumises à la compression sous différentes conditions aux appuis **[76]**.

A partir de l'expression (.), on peut déduire l'expression de la contrainte critique de bifurcation qui vaut :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al_K^2} = \pi^2 E\left(\frac{i}{L_K}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_K^2} \tag{2.7}$$

Avec :

A : Aire de la section.
i : Rayon de giration de la section de la barre par rapport au plan de déformation considéré ($i = \sqrt{I/A}$).
λ : Elancement de la pièce.

Courbes de flambement et élancement limite :

On obtient une vue d'ensemble de la sensibilité au flambement par bifurcation en traçant le graphiphe de la fonction $\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda_K^2$, dénommé courbe d'Euler et asymptotique aux axes.

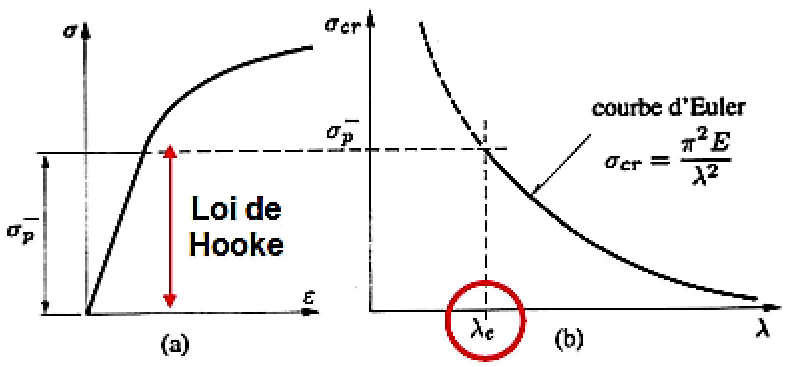


Fig.2.5 : Courbe de flambement d'Euler **[73]**.

La figure présente la courbe de flambement des barres qui font partie du cas fondamental d'Euler établi par la contrainte critique d'Euler σ_{cr} en fonction de l'élancement λ_K . Cette courbe dite également hyperbole d'Euler n'est valable que dans le domaine élastique selon les hypothèses d'Euler. A cet effet, la valeur de la contrainte critique de bifurcation doit être inférieure à celle de la contrainte limite de compression du matériau σ_P^- . On détermine par la suite la valeur de l'abscisse correspondante à σ_P^- et qu'on appelle élancement limite λ_e par l'expression suivante :

$$\lambda_e = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P^-}} \tag{2.8}$$

2.2.3. Flambement élastique par divergence :

Euler à traiter le phénomène mécanique de flambement pour un cas particulier, à savoir une barre parfaitement rectiligne, bi-articulée aux extrémités, sollicitée à une seule et unique force de compression appliquée au centre de la section transversale de la barre. Son cas traité reste purement théorique et il ne reflète jamais les cas qu'on trouve dans la pratique. Une barre métallique sortie de l'usine de laminage n'est jamais parfaite suite aux présences de certaines déformations initiales due à la fabrication des profilés. On note également que les charges appliquées ne sont pas parfaitement centrées dans l'axe de la barre. Il est strictement interdit de négliger la présence des contraintes résiduelles dues à la température de refroidissement après moulage des profilés métalliques. Ainsi, la présence des efforts supplémentaires à celle de la compression en plus de la présence des imperfections physiques de la barre nous conduisent à ce que la charge critique d'Euler n'est plus celle qui définit sa résistance vis-à-vis de l'instabilité au flambement.

A. Poutre droite sous une charge de compression excentrée :

Pour cet exemple, considérons une barre rectiligne de longueur L soumise à des efforts de compression F sur chacun de ses cotés excentrés d'une distance e suivant l'axe central x de la barre.

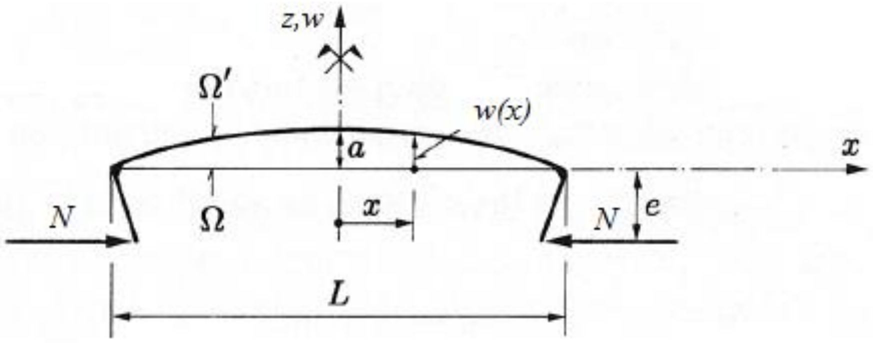


Fig.2.6 : Poutre comprimée excentriquement (EI = cste) **[73]**.

Dans une section d'abscisse x de la configuration déformée Ω', le moment de flexion (3) vaut, en grandeur et en signe

$$M = -N(e+w) \tag{2.9}$$

L'expression de l'équation différentielle dans la section d'abscisse x s'écrit :

$$w'' + \frac{N}{EI}(e+w) = 0 \tag{2.10}$$

Après intégration de l'équation linéaire du second ordre, la solution est :

$$w = C_1 \sin\sqrt{\frac{N}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{N}{EI}}x - e \tag{2.11}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 se déterminent par les deux conditions aux limites

$$w\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \qquad w\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

On en tire $C_1 = 0$ et $C_2 = e \Big/ \cos\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)$; l'équation de la déformée est ainsi :

$$w = e\left(\frac{\cos\sqrt{\frac{N}{EI}}x}{\cos\left(\sqrt{\frac{N}{EI}}\frac{L}{2}\right)} - 1\right) \tag{2.12}$$

On pose $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$.

La flèche maximale a qui se produit au milieu de la barre a pour valeur :

$$a = w_{\max} = w(0) = \mathrm{e}\left(\frac{1}{\cos(kL/2)} - 1\right) \tag{2.13}$$

La représentation graphique de la variation a en fonction de N fournit la courbe à l'allure hyperbolique de la figure, admettant une certaine asymptote horizontale. En effet :

Si $N = 0$, alors $k = 0$, $\cos(kL/2) = 1$ et $a = 0$; la tangente en ce point a pour équation :

$$a = Ne\frac{L^2}{8EI} = a_{\text{lin}} \tag{2.14}$$

Qui n'est autre que la solution linéaire du problème (flèche a_{lin} d'une poutre soumise à un moment constant $N\,e$ **[73]** ;

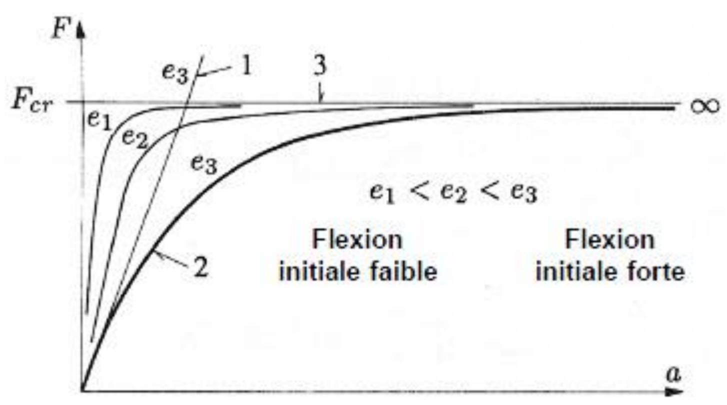


Fig.2.7 : Poutre comprimé excentriquement : (a) Courbes flèche-charge pour diverses valeurs (e_1 , e_2 , e_3) de l'excentricité e :

2) Linéaire, pour $e = e_3$, 2) Second ordre pour $e = e_3$, 3) Asymptote quelle que soit la valeur de e **[72].**

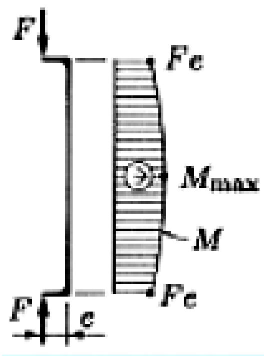


Fig.2.8 : Diagramme des moments de flexion **[72]**.

Si N croit par incréments égaux $(\Delta N_1 = \Delta N_2 = \Delta N_3 ...)$ les incréments correspondants de flèche augmentent toujours davantage $(\Delta a_1 < \Delta a_2 < \Delta a_3 ...)$ soulignant ainsi le caractère divergent du phénomène ;

Le cosinus du dénominateur s'annule lorsque $kL/2 = \pi/2$, ce qui fournit $N = \pi^2 EI/L^2$, ordonnée de l'asymptote horizontale ; lorsque la force de compression tend vers cette valeur, le dénominateur $\cos(kL/2)$ diminue indéfiniment et la flèche a de la poutre croit au-delà de toute limite.

Et on observe qu'elle ne dépend pas de l'excentricité e. De plus, la poutre ne saurait en aucun cas supporter une force supérieure à cette valeur critique.

Le moment de flexion maximal se produit au milieu de la poutre et vaut, en valeur absolue **[73],**

$$M_{max} = N(e+a) = \frac{Ne}{\cos(kL/2)} \tag{2.15}$$

Il croit aussi indéfiniment lorsque N tend vers la valeur limite N_{cr}

B. Barre comprimée avec une courbure initiale légère :

On considère pour ce cas une barre soumise à des forces de compressions sur chacune de ses extrémités. La barre possède une légère flèche initiale w_0.

L'équation différentielle de la déformée finale est de la forme :

$$w''+k^2 \; w+w_0 \; =0 \qquad (2.16)$$

avec $k=\sqrt{\dfrac{N}{EI}}$.

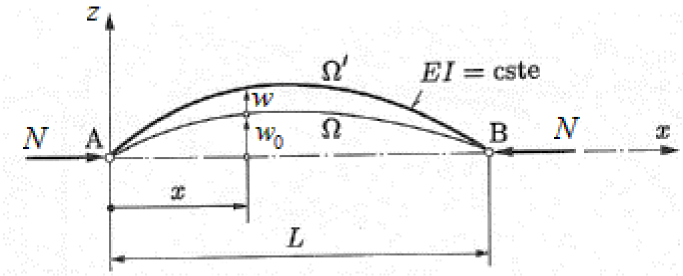


Fig.2.9 : Flambement d'une poutre possédant une déformée initiale $w_0(x)$ **[73]**.

Si la courbe initiale est un arc de sinusoïde d'équation,

$$w_0(x)=w_0 \sin\frac{\pi x}{L} \qquad (2.17)$$

Avec w_0 est la déformation initiale à mi portée.

L'équation différentielle s'écrit :

$$w''+k^2w=-k^2w_0 \sin\frac{\pi x}{L} \qquad (2.18)$$

L'intégrale en est, compte tenu des conditions aux limites $w(0)=w(L)=0$,

$$w(x)=\frac{w_0}{\dfrac{\pi^2}{k^2L^2}-1}\sin\frac{\pi x}{L} \qquad (2.19)$$

Et on observe que la déformée initiale w_0 et le flambement W ont une forme semblable (affinité).

$$w = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1}$$

(2.20)

Et la flèche totale au milieu de la barre vaut :

$$w = w_0 + w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \tag{2.21}$$

On remarque que l'expression de la flèche de la barre est tout simplement équivalente à la flèche initiale de la barre multipliée par la quantité $1\Big/\left(1-\frac{N}{N_{cr}}\right)$. Elle correspond à un facteur de la flèche initiale w_0. Ainsi on peut déduire que l'expression du moment de flexion de la barre peut être écrit de sorte que le moment de flexion initiale est multiplié par la quantité mentionnée précédemment :

$$M = M_0 \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \tag{2.22}$$

Avec $M_0 = Nw_0$

$$K = 1\Big/\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$$

La quantité K appelée facteur d'amplification, permet l'évaluation de l'influence de la résistance à l'instabilité de flambement sur la capacité portante de la barre. Cela s'explique par le fait que les éléments imparfaits sollicités à la compression perdent leur équilibre par divergence et non pas bifurcation **[72]**.

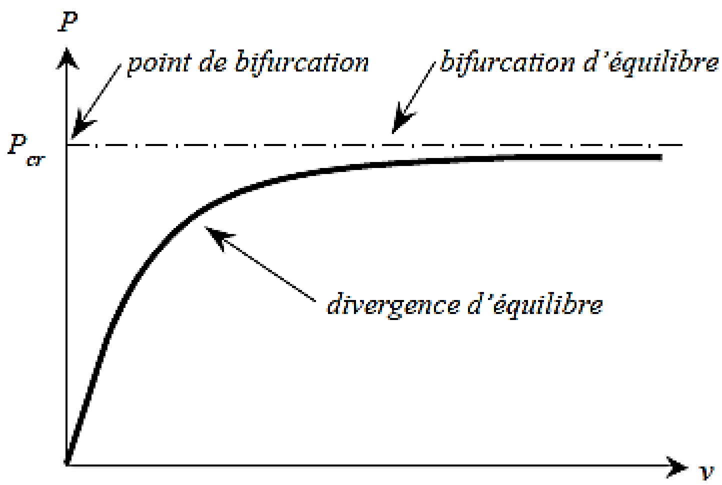


Fig.2.10 : Equilibre par bifurcation et par divergence d'une barre comprimée.

C. Les contraintes résiduelles :

Un corps métallique lorsqu'il est soumis à une différence élevée de température, un ensemble de contraintes internes se crée tout en gardant son équilibre en dehors de toutes forces extérieures. Leur existence qui à l'origine thermique est causé par des différents processus de fabrication des profilés en acier à savoir :

- Laminage à chaud pour les pièces règlementées,
- Soudage des plaques en acier entre elles pour les PRS,
- Découpage pour les poutres alvéolaires ou bien les éléments avec des ouvertures dans l'âme.
- Pliage des plaques pour les profilés formés à froid.

D'une part structurelle, une plastification primaire développée dans la section transversale en dehors de toute charge extérieure fait apparaitre ces contraintes résiduelles, ainsi elle provoque un changement de comportement mécanique de la pièce en diminuant sa rigidité et par la suite elle amplifie les déformations des parois de la section. Leurs présences affectent la valeur de la résistance mécanique d'un élément comprimé si leurs valeurs de compression sont importantes.

2.2.4. Les courbes de flambement européennes :

La convention européenne de la construction métallique, CECM, présente des courbes de flambement qui prennent en considération des paramètres en fonction du rapport d'élancement $\bar{\lambda}$ de la barre pour définir la charge critique de flambement N_{cr} à travers le rapport de contrainte $\bar{\sigma}$. Les paramètres pris en considération dans les travaux de CECM pour établir les courbes réglementaires sont :

- Le type de proportion de la section droite.
- Le mode de fabrication de la pièce.
- Le plan de flambement considéré.

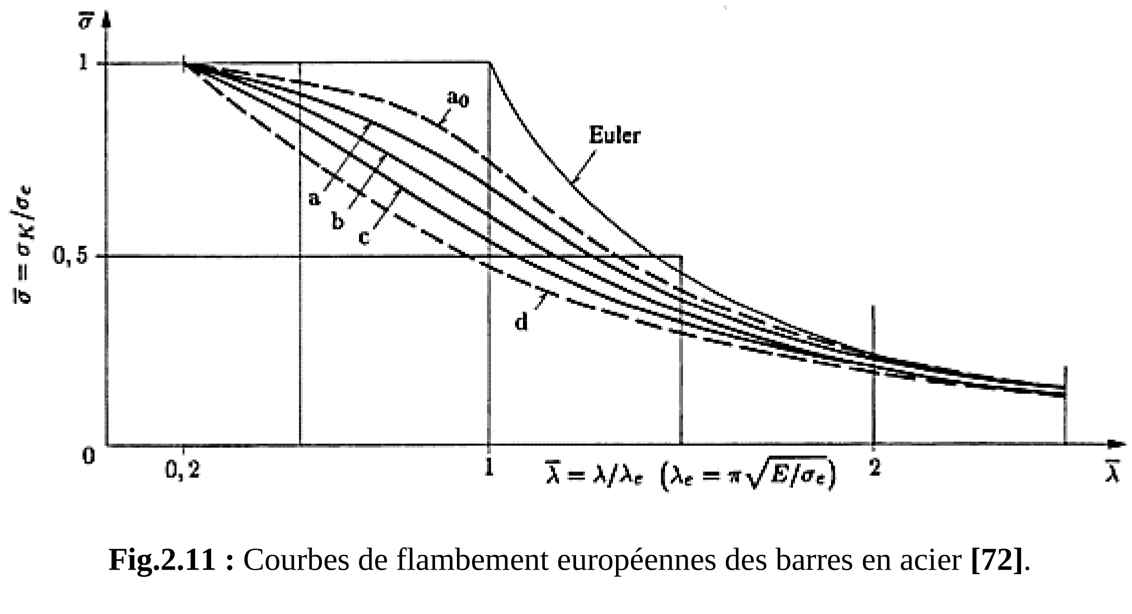


Fig.2.11 : Courbes de flambement européennes des barres en acier **[72]**.

La figure présente quatre courbes de flambement d'une barre simplement comprimée en commençant par celle qui est la plus basse et c'est elle qui présente une forte imperfection de la barre en allant vers celle qui présente l'état fondamental d'Euler.

2.3. Déversement :

2.3.1. Définition du déversement élastique :

Le domaine de l'industrie a connu un grand développement notamment dans le domaine métallurgique et dans la fabrication des pièces métalliques. La fabrication de pièces métalliques laminées aux sections rationnelles a pu voir le jour grâce à la révolution technologique des machines et des processus de laminage et profilage des poutres et poteaux qui ont connue jusqu'à ce jour une utilisation majeur et indispensable pour faire partie des squelettes des constructions les plus modernes. Ainsi on trouve des sections en I, en H ou bien U laminées à chaud, ou bien des plaques aux épaisseurs selon le besoin qui sont soudées entre elles pour avoir une section voulue qu'on appelle également les PRS, Poutre Reconstituées Soudées.

Le comportement mécanique diffère d'une section à une autre selon les sollicitations subites par la pièce métallique. L'ingénieur de structure choisira le type de section nécessaire qui convient pour faire partie des éléments constituants de la structure afin qu'elle puisse résister et répondre aux différentes charges extérieures.

Les sections en double Té sont largement utilisées pour répondre aux efforts de flexion. Elles sont favorisées à cause de la présence de leur grande inertie pour un minimum d'acier qu'elles présentent. Malgré l'efficacité de résistance qu'elles présentent à travers leurs formes, elles restent toujours sensibles au phénomène de déversement.

Pour illustrer ce phénomène d'instabilité, prenons l'exemple d'une poutre de section en I simplement appuyée sollicitée à la flexion pure. Naturellement après application du chargement, la poutre va fléchir suivant le plan de la charge, l'axe de forte inertie de la section. Evidement il va y avoir une partie tendue et une partie comprimée dans la section. Cependant, après avoir atteint une certaine valeur de charge extérieure, la partie comprimée de la section va subir une flexion latérale suivant l'axe de faible inertie de la section pour échapper à l'effort de compression excessif. En plus du déplacement vertical w que subit la poutre au départ, et le déplacement horizontal v de la partie comprimée de la section, un autre déplacement s'ajoutera qui se présente avec une rotation f de la section autour du centre de cisaillement de la section. Cet ensemble de mouvements que connait la section s'appelle un déversement. La poutre en double Té connaitra ce phénomène d'instabilité si elle n'est pas maintenue latéralement afin d'augmenter sa rigidité suivant l'axe de faible inertie.

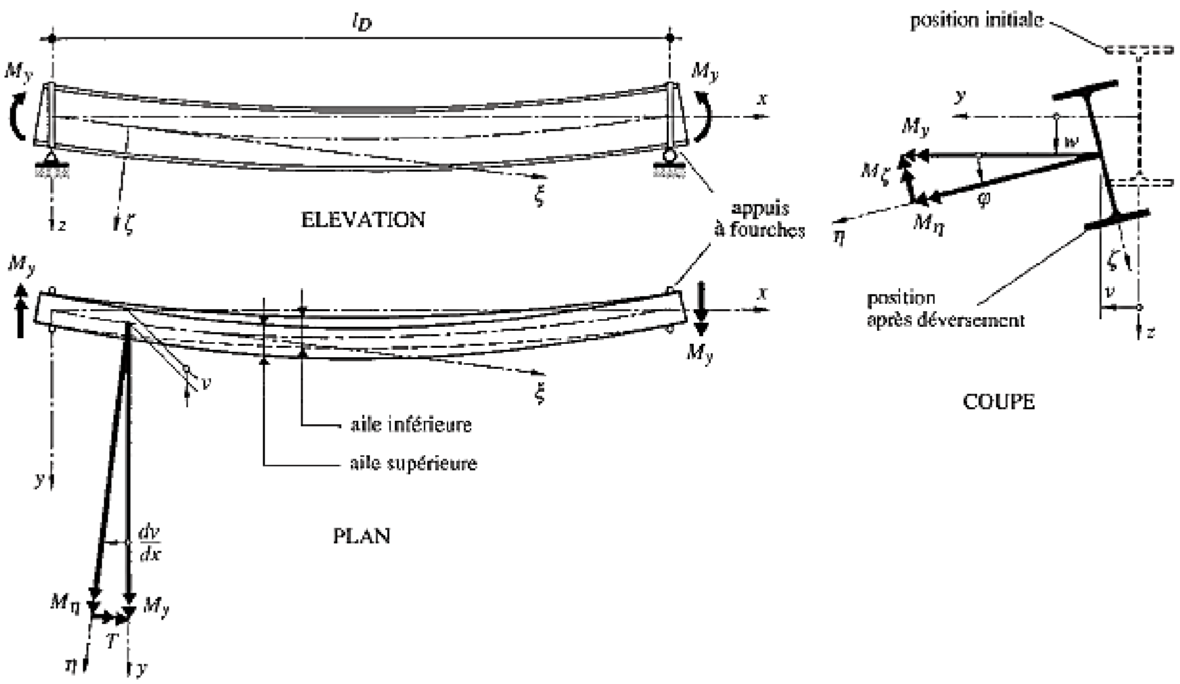


Fig.2.12 : Phénomène de déversement d'une poutre en double Té **[76]**.

2.3.2. Moment critique de déversement élastique (état fondamental) :

L'exemple de la poutre simplement appuyée soumise à la flexion simple est considéré comme un cas fondamentale et particulier pour expliquer le phénomène de déversement d'une poutre bisymétrique qui a déjà été traité par Timoshenko selon ses hypothèses :

- Barre parfaitement rectiligne de section bisymetrique et constante sur toute sa longueur.
- Barre idéale sans imperfections.
- Section de la barre indéformable.
- Appuis de type « appuis a fourche ».
- Matériaux infiniment élastique et linéaire.
- L'inertie de la section I_z est faible vis-à-vis l'inertie I_y.
- Petites déformations $sin\varphi \approx \varphi, cos\varphi = 1$.

Dont on peut établir les équations d'équilibres selon l'état déformé de la poutre suivant les axes (ξ, η, ζ) :

Flexion selon l'axe η, en tenant compte du fait que $M_\eta = M_y\, cos\varphi \approx M_y$:

$$w''(x) + \frac{M_y}{EI_y} = 0 \tag{2.23}$$

Flexion selon l'axe ζ, en tenant compte du fait que $M_{\zeta} = M_y \sin\varphi \approx \varphi\, M_y$:

$$v''(x) + \varphi(x)\frac{M_y}{EI_z} = 0 \tag{2.24}$$

Torsion au tour de l'axe ξ , en tenant compte du fait que $T = M_y \sin\frac{dv}{dx} \approx M_y \frac{dv}{dx}$:

$$EI_{\omega}\, \varphi^3(x) - GK\,\varphi'(x) + M_y\, v'(x) = 0 \tag{2.25}$$

En dérivant une seule fois l'équation 3 et en remplaçant $d^2v(x)/d^2x$ par sa valeur trouvée de l'équation 2, on obtiendra par la suite l'équation différentielle :

$$EI_{\omega}\, \varphi^4(x) - GK\,\varphi''(x) - \frac{M_y{}^2}{EI_z}\, \varphi(x) = 0 \tag{2.26}$$

Dont la solution est :

$$\varphi(x) = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x) + C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x). \tag{2.27}$$

Afin de déterminer les constantes *A, B, C et D* on doit mettre en évidence quatre conditions aux limites à savoir $\varphi = \varphi'' = 0$ pour $x = 0$ et $x = l_D$.

Et ainsi on obtient l'expression du moment critique de déversement élastique :

$$M_{crD} = \frac{\pi}{l_D}\sqrt{GK\; EI_z\left(1 + \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{l_D^2 GK}\right)} \tag{2.28}$$

$x = l_D$: Longueur de déversement (distance entre deux appuis latéraux empêchant le déversement).

- G : Module de glissement.
- K : Constante de torsion uniforme.
- GK : Rigidité de torsion
- E : Module d'élasticité.
- I_z : Moment d'inertie par rapport à l'axe z
- EI_z : Rigidité de flexion latérale.
- I_{ω} : Moment d'inertie sectoriel de la section.
- EI_{ω} : Rigidité de torsion non uniforme.

2.3.3. Moment critique de déversement élastique (formule empirique) :

La poutre soumise à la flexion pure étudiée précédemment est considéré comme un cas particulier à base d'hypothèses pour simplifier l'illustration du phénomène de déversement.

Naturellement, en pratique ce cas ne fait jamais partie d'un élément constituant une structure. Des sections dissymétriques sous des efforts beaucoup plus combinés entre traction, compression, flexion et de torsion font partie des sollicitations majeures d'une poutre, en présence de différentes conditions d'appuis comme des encastrements qui sont les plus fréquents des cas.

Différents auteurs ont traité le cas du phénomène de diversement des poutres a parois minces afin de mettre en pratique une formule plus générale applicable sur différents paramètres. **Clark** et **Hill** et par la suite **Djalaly** ont proposé une équation empirique détaillée pour le calcul de la charge critique de déversement élastique. L'équation empirique proposée tient en compte le type de chargement, son application ainsi que le type des conditions d'appuis, elle est également connue par le surnom de l'équation à trois facteurs.

$$M_{crD} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{k_v\ k_\varphi\ l_D^2}\left[\sqrt{C_2\ z_a + C_3\ \beta\ ^2 + \frac{I_\omega}{I_z}\left(\frac{G\ K\ k_\varphi^2\ l_D^2}{\pi^2 EI_\omega}\right)} +\ C_2 z_a + C_3 \beta\right] \quad (2.29)$$

C_1, C_2 *et* C_3	: Facteurs dépendants du type de chargement et des conditions d'appuis
k_v *et* k_φ	: Coefficients d'encastrement aux appuis.
z_a	: Distance entre le centre de cisaillement C et le point d'application de la charge (positive si ce dernier est situé entre le centre de cisaillement et la semelle tendue).
β	: Caractéristique sectorielle de la section, $\beta = 0$ pour une section bisymétrique.

La caractéristique sectorielle est donnée par l'expression suivante :

$$\beta = z_C + \frac{1}{2I_y}\int_A z\ \ y^2 + z^2\ \ dA \quad (2.30)$$

z_C est la distance entre le centre de gravité G et le centre de cisaillement C. Elle est positive si le centre de cisaillement se trouve entre le centre de gravité et la semelle comprimée.

Les grandeurs caractéristiques β, z_C, I_ω *et* K changent d'expression pour les sections mono-symétriques comme suit :

$$\beta = z_C + \frac{1}{2I_y}\left[b_2\left(\frac{8\ c_2^3\ t_2}{12} + 2\ C_2\ t_2\ b_2^2 + \frac{b_2^3 d}{4}\right) - b_1\left(\frac{8\ c_1^3\ t_1}{12} + 2\ c_1\ t_1\ b_1^2 + \frac{b_1^3 d}{4}\right)\right] \quad (2.31)$$

$$z_C = \frac{b_1\ c_1^3\ t_1 - b_2\ c_2^3\ t_2}{c_1^3\ t_1 + c_2^3\ t_2} \quad (2.32)$$

$$I_\omega = \frac{2\ \ b_1 + b_2\ \ ^2\ c_1^3\ t_1\ c_2^3\ t_2}{3\ \ c_1^3\ t_1 + c_2^3\ t_2} \quad (2.33)$$

$$K = \frac{1}{3}\left[2\, c_1\, t_1^3 + 2\, c_2\, t_2^3 + b_1 + b_2 \quad d^3\right] \tag{2.34}$$

Un tableau accompagne l'expression de déversement précédente sur lequel les valeurs des facteurs C1, C2 et C3 sont présentées en fonction des conditions aux limites de la poutre et des positions d'application de la charge. Ces tableaux sont disponibles dans les travaux de **Mohri et al**. et **Brahma**

2.3.4. Etude normative sur le déversement :

Le travail de Gardner, L., et Nethercot **[83]** avec le règlement européen EC3 **[1]** ont exigé que pour dimensionner une poutre sollicitée à la flexion, chacune de ses sections doit répondre au critère de résistance et au critère d'instabilité à la fois. **Fig. 2.5.**

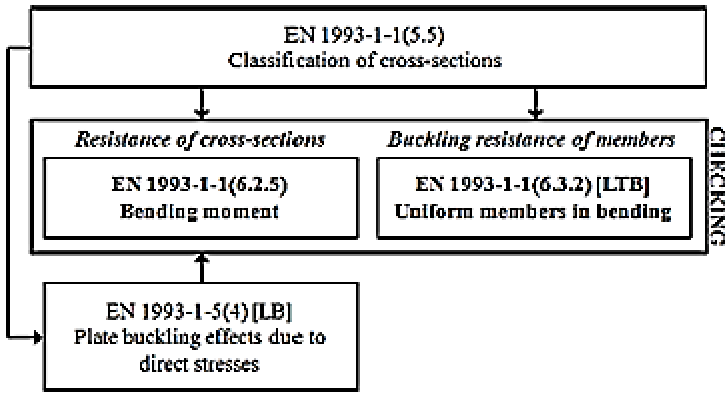


Fig.2.13 : Clauses dans l'EC3 impliquées dans la vérification à la flexion **[1]**.

Les formules de dimensionnement et de vérification des sections transversales présentées par le règlement européen EC3 sont basées sur le principe des rotules plastiques, autrement dit, les résistances des sections sont vérifiées à la phase plastique, à l'exception de cératines sections étant donnée qu'elles ne peuvent pas présenter une résistance ultime plastique, ainsi leurs vérification vont être restreintes juste dans la phase élastique. C'est pour cela, avant d'entamer une vérification de résistance de n'importe quelle section, L'EC3 classe les sections transversales en acier en 4 classes en tenant compte l'effet d'instabilité de voilement local. Le passage par cette clause est considérée comme analyse préliminaire vis-à-vis du risque de voilement local de chaque paroi de la section transversale étudiée soumise à la compression.

La clause EN 1993-1-1(6.2.5) indique la formule qui calcule le moment résistant à la flexion M_{crD}. La formule de calcul présentée par la clause ne tient pas en compte l'effet d'instabilité de déversement de la section transversale mais uniquement le l'effet du risque au voilement local de la paroi comprimée à l'aide du module de section W_y qui est en fonction de la classe de section.

$$M_{crD} = \frac{W_y \, f_y}{\gamma_{M0}} \tag{2.35}$$

Avec : $W_y = W_{pl}$ pour la classe de section 1 et 2.

$W_y = W_{el}$ pour la classe de section 3.

$W_y = W_{eff}$ pour la classe de section 4.

Les allures de la loi de comportement moment-rotation correspondant à chaque classe de section sont présentées ci-dessous, mettant en évidence la résistance et la capacité de rotation qui peuvent être atteintes avant apparition du phénomène de voilement local (correspondant à la branche descendante des courbes), tout risque de déversement étant empêché.

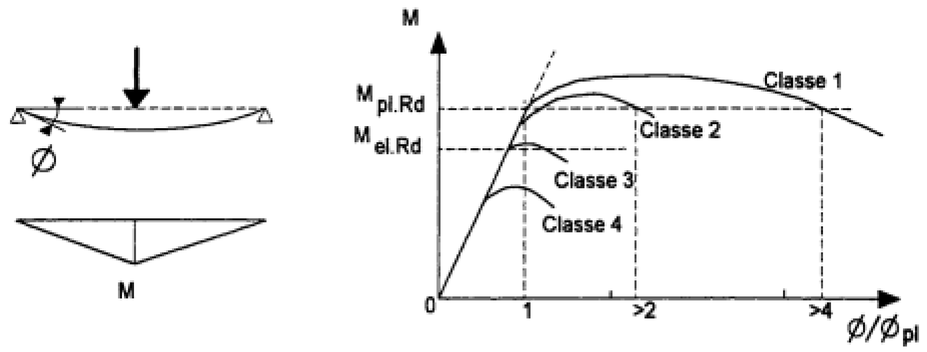


Fig.2.14 : Loi de comportement des différentes classes de section EC4 **[81]**.

2.4. Conclusion :

Les éléments de structures élancés à parois minces présentent un avantage structurel et économique du fait de leur réduction de section pour répondre aux charges extérieures. Mais cela n'empêche qu'elles sont toujours sensibles vis avis aux phonèmes d'instabilités, la majorité d'entre elles se ruinaient par instabilité avant que leur résistance n'atteigne la limite élastique. D'ailleurs il ne faut pas nier que la majorité des structures élancées se ruinent par instabilité mécanique.

Les résistances de ruine ont été calculées préalablement pour des cas simplifiés à des barres parfaites, par conséquent les hypothèses adoptées ne reflètent pas les barrent utilisées en pratique. Cependant, il est dans l'obligation de prendre en compte les différents paramètres afin de prédire un comportement réel de la barre ainsi sollicitée.

Le règlement européen de construction en acier l'Eurocde 3 présente des formules pour prédire la valeur de résistance vis-à-vis des phénomènes d'instabilité de flambent et de déversement traité dans cette thèse. Les formules présentés sont valables uniquement pour les petits déplacements, ainsi pour prédire les charges de résistance d'instabilités dans le domaine poste élastique, on est dans l'obligation de faire appel à des modèles numérique et à la modélisation par la Méthode des éléments fini pour une analyse rigoureuse.

CHAPITRE 3 :

INSTABILITE NON-LINEAIRE DES POUTRES EN A SECTIONS VARIABLES.

3.1. Introduction :

Dans ce chapitre est présenté une formule analytique qui traite l'instabilité non linéaire des poutres et des colonnes à parois minces doublement symétriques pour des sections variables ouvertes I et H et pour des sections fermées en box. Un nouveau modèle cinématique est utilisé dans ce travail établie selon les hypothèses de la théorie des éléments à parois minces en adoptant l'hypothèse de Timoshenko des sections étudiées après déformations. En plus de la présentation classique des déplacements, un nouveau degré de liberté figure dans les relations du champ de déplacement et qui est le gauchissement.

L'effet de déformation de gauchissement dans le déversement élastique des poutres de différentes sections soumises à différentes charges et sous différentes conditions aux limites a été pris en compte dans ce travail.

Le modèle théorique non linéaire présenté dans ce travail est développé selon la théorie d'ordre élevé et dans le cadre des grands déplacements.

Les équations d'équilibre des éléments étudiés ont été obtenues en appliquant la méthode de Ritz. Alors que les charges de flambement sont évaluées en résolvant le problème de la valeur propre en exigeant la singularité de la matrice de rigidité tangentielle

3.2. Modèle théorique :

3.2.1. Propriétés géométriques de la poutre :

Un élément d'une poutre rectiligne à parois minces de section ouverte et variable selon sa portée est représenté dans la figure (**Fig. 3.1**) et un système direct de coordonnées rectangulaire est choisi. On désigne par X l'axe longitudinal et par Y et Z les axes principaux de flexion perpendiculaire à l'axe X

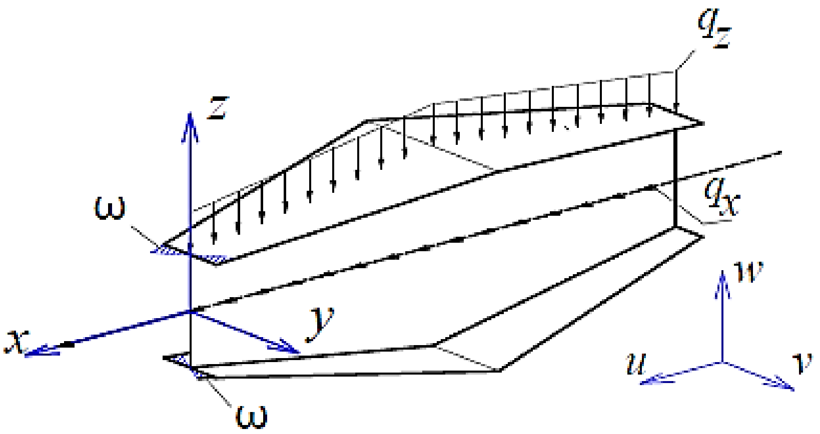


Fig.3.1 : Repère dans une poutre à paroi mince à section ouverte variable suivant la portée.

3.2.2. Cinématique :

Un élément en parois minces de section ouverte est représenté dans la figure **(Fig. 3.2).** L'origine de ces axes est située au centre de gravité *G*. Le centre de cisaillement avec des coordonnées (y_c, z_c) dans le plan *GYZ* est dénoté C. Considérant *M*, un point sur le contour de la section transversale avec ses coordonnées (y, z, ω), ω est la coordonnée sectorielle utilisée dans le modèle de Vlassov **[4]** pour la torsion non-uniforme.

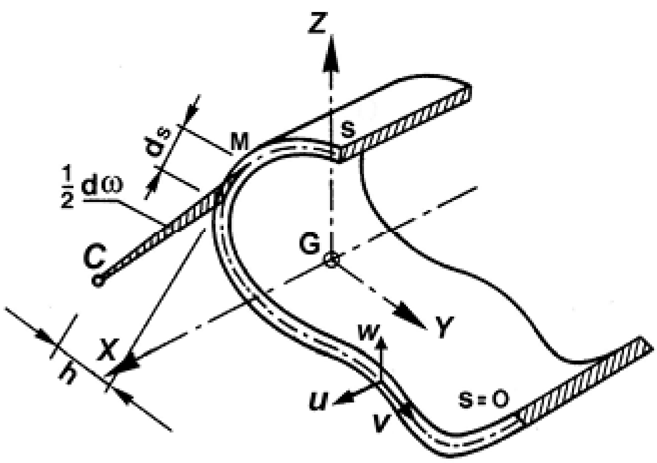


Fig 3.2 : Un élément d'une poutre à parois minces de section ouverte **[66]**.

Les hypothèses fondamentales de la théorie des éléments à paroi mince sont :

- Matériaux élastiques linéaires et homogènes.
- Hypothèse inchangée du contour, le contour de la section transversal à paroi mince ne se déforme pas dans son propre plan.
- les résultantes de force et du moment correspondant à des contraintes circonférentielles σ_{ss} et γ_{ns} sont négligées.

Suivant ces hypothèses, les composantes des déplacements du contour de la section de la poutre (**fig. 3.2**), sont en fonction de ceux du centre de gravité ou de cisaillement *G*. les déformations de la poutre en fonction de x sont : le déplacement axial $u_0(x)$ suivant x, le déplacement vertical (flèche) $w(x)$ suivant *z*, déplacement latéral $v(x)$ suivant y, l'angle de torsion $\theta(x)$. En compagnie de ces déformations illustrées dans les figures (**Fig. 3.2a à d**). Il est à noter que les déformations de distorsion n'accompagnent pas le déplacement axial.

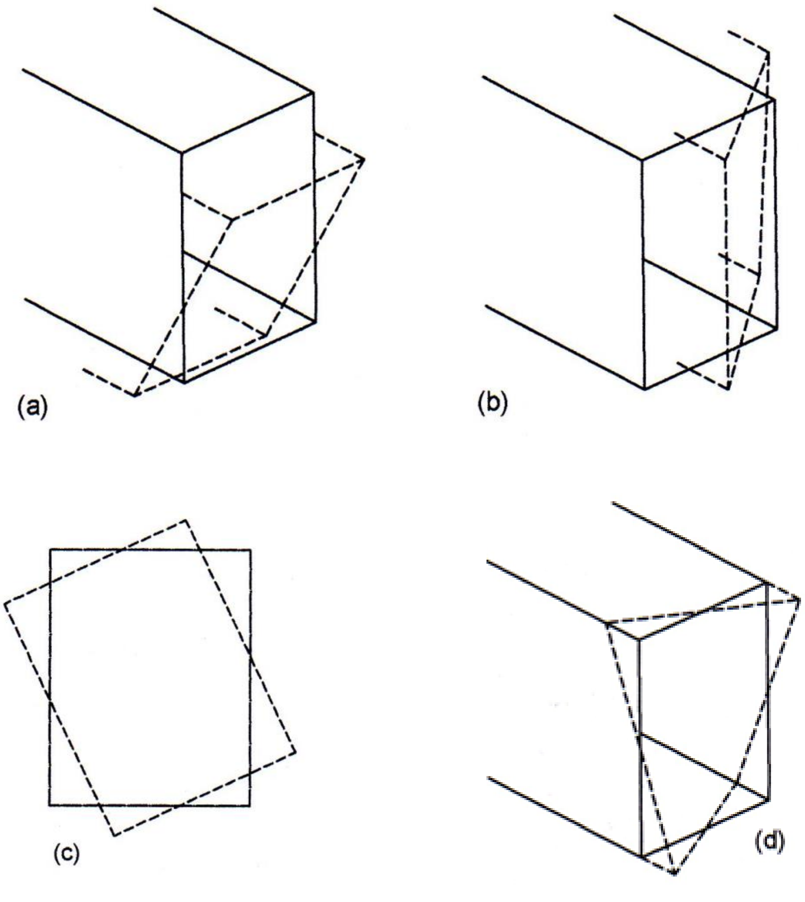


Fig. 3.3: Les degrés de liberté et les formes de déformations d'un élément à parois minces : (a) flexion suivant *y*, (b) flexion suivant *z*, (c) torsion et (d) gauchissement **[86]**.

A partir de ces hypothèses, le rapprochement des déplacements d'un point *M* peut être dérivé de celui du centre de cisaillement *C* pour être sous la forme suivante :

$$u_M = u - y(\phi_z \cos\theta_x + \phi_y \sin\theta_x) - z(\phi_y \cos\theta_x - \phi_z \sin\theta_x) - \omega\theta_x^{'} \tag{3.1}$$

$$v_M = v - z\sin\theta_x - y(1-\cos\theta_x) \tag{3.2}$$

$$w_M = w + y\sin\theta_x - z(1-\cos\theta_x) \tag{3.3}$$

ϕ_y et ϕ_z sont les rotations de la section transversale au tour de l'axe y et l'axe z respectivement. Pour les poutres à parois minces aux sections symétriques le centre de gravité *G* coïncide avec le centre de cisaillement C. Dans ces formules, la notation (.') signifie la première dérivation par rapport à la variable *x*.

Le déplacement proposé par **Mohri et al** **[84]** est vérifié en considérant $\phi_y = w'$ et que $\phi_z = v'$
Le déplacement axial est obtenu par la condition de nullité de déformation tangentielle dans la surface moyenne (deuxième hypothèse). La condition de déformation tangentielle de Green **[82]** le long du contour est utilisée, le déplacement axiale est alors déduit par intégration suivant le contour *'s'* (**Fig. 3.4**) et son expression finale est donnée par :

$$u^{tt'}{}_M = u_M + y^{'} v_M + z^{'} w_M\ . \tag{3.4}$$

En remplaçant les équations (3.1), (3.2) et (3.3) dans l'équation (3.4) on aura : la déformation tangentielle

$$\begin{aligned} u^{tt'}{}_M &= u - y(\phi_z \cos\theta_x + \phi_y \sin\theta_x) - z(\phi_y \cos\theta_x - \phi_z \sin\theta_x) - \omega\theta_x^{'} \\ &+ y^{'}\left(v - z\sin\theta_x - y(1-\cos\theta_x)\right) + z^{'}\left(w + y\sin\theta_x - z(1-\cos\theta_x)\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

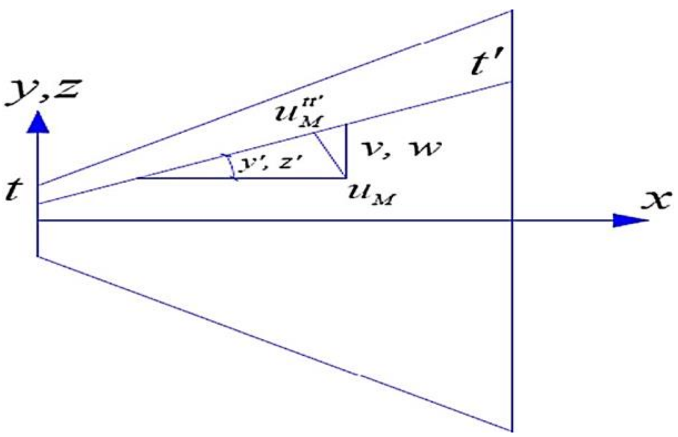


Fig 3.4 : Déplacement axial correspondant au segment à section variable.

La déformation tangentielle de Green et Zerna **[82]** en incorporant les grands déplacements est donnée par :

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right). \tag{3.6}$$

Pour le cas des poutres à parois minces, le tenseur de déformation normale est divisé en déformations linéaires et non-linéaires comme suit :

$$\varepsilon_{tt'}=\varepsilon_{tt'}^{L}+\varepsilon_{tt'}^{nL} \tag{3.7}$$

Où :

La déformation linéaire est donnée par :

$$\varepsilon_{\alpha}^{L}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}, \tag{3.8.a}$$

Et la déformation non linéaire est donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon_{tt'}^{nL}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_M}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_M}{\partial x}\right)^2\right] \tag{3.8.b}$$

Les déformations tangentielles sont données par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_M}{\partial z}+\frac{\partial w_M}{\partial x}+\frac{\partial v_M}{\partial x}\frac{\partial v_M}{\partial z}+\frac{\partial w_M}{\partial x}\frac{\partial w_M}{\partial z}\right) \tag{3.9}$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_M}{\partial y}+\frac{\partial v_M}{\partial x}+\frac{\partial v_M}{\partial x}\frac{\partial v_M}{\partial y}+\frac{\partial w_M}{\partial x}\frac{\partial w_M}{\partial y}\right) \tag{3.10}$$

En remplaçant les équations (3.2), (3.3) et (3.5) dans les équations de (3.7) à (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{tt'}&=u'-y'\left(\phi_z\cos\theta_x+\phi_y\sin\theta_x\right)-y\left(\phi_y'\sin\theta_x+\phi_z'\cos\theta_x\right)+y\theta_x'\left(\phi_z\sin\theta_x-\phi_y\cos\theta_x\right)\\
&+z'\left(\phi_z\sin\theta_x-\phi_y\cos\theta_x\right)+z\left(\phi_z'\sin\theta_x-\phi_y'\cos\theta_x\right)+z\theta_x'\left(\phi_y\sin\theta_x+\phi_z\cos\theta_x\right)\\
&+z'\left(w'\cos\theta_x-v'\sin\theta_x\right)-z\theta_x'\left(v'\cos\theta_x+w'\sin\theta_x\right)+y'\left(w'\sin\theta_x+v'\cos\theta_x\right)\\
&+y\theta_x'\left(w'\cos\theta_x-v'\sin\theta_x\right)+\frac{1}{2}v'^2+\frac{1}{2}w'^2+\frac{1}{2}z^2\theta_x'^2+\frac{1}{2}y^2\theta_x'^2-\omega'\theta_x'-\omega\theta_x''-zy\theta_x'+z'y\theta_x'
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$2\varepsilon_{xy}=\cos\theta_x\left(v'-\phi_z\right)+\sin\theta_x\left(w'-\phi_y\right)-\theta_x'\left(z+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \tag{3.12}$$

$$2\varepsilon_{xz}=\cos\theta_x\left(w'-\phi_y\right)-\sin\theta_x\left(v'-\phi_z\right)-\theta_x'\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}-y\right) \tag{3.13}$$

Dans le cas présent, l'angle de torsion est considéré comme petit, ce qui implique que les équations $\cos\theta_x$ et $\sin\theta_x$ sont approximativement égales à :

$$\cos\theta_x = 1. \tag{3.14}$$

$$\sin\theta_x = \theta_x . \tag{3.15}$$

Après simplification des équations ci-dessus, les équations de déformations sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{tt'} &= u' - y\left(\phi_y'\theta_x + \phi_z'\right) + z\left(\phi_z'\theta_x - \phi_y'\right) + y\theta_x'\left(\gamma_{xz} - \theta_x\gamma_{xy}\right) - z\theta_x'\left(\gamma_{xy} + \theta_x\gamma_{xz}\right) - \omega\theta_x'' \\ &+ \frac{1}{2}\left(R\theta_x'^2 + v'^2 + w'^2\right) - \theta_x'\psi + y'\left(\theta_x\gamma_{xz} + \gamma_{xy}\right) + z'\left(\gamma_{xz} - \theta_x\gamma_{xy}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} + \gamma_{xz}\theta_x - \theta_x'\left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \tag{3.17}$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} - \gamma_{xy}\theta_x - \theta_x'\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - y\right) \tag{3.18}$$

D'où les fonctions ψ et R sont définies par:

$$\psi = \omega' + zy - z'y$$

(3.19)

$$R = y^2 + z^2 \tag{3.20}$$

Les déformations transversales γ_{xy} et γ_{xz} de l'état stationnaire de la poutre à parois minces sont données par l'expression :

$$\gamma_{xy} = v' - \phi_z \tag{3.21}$$

$$\gamma_{xz} = w' - \phi_y \tag{3.22}$$

Après d'autres simplifications, les composants de déformations normales et tangentielles sont présentés comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{tt'} &= u' - y(\phi_z' + \phi_y'\theta_x + \theta_x'\Omega_{xz}) - z(\phi_y' - \phi_z'\theta_x + \theta_x'\Omega_{xy}) \\ &- \omega\theta_x'' + \frac{1}{2}\left(R\theta_x'^2 + v'^2 + w'^2\right) - \theta_x'\psi + y'\Omega_{xy} + z'\Omega_{xz}\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \Omega_{xy} - \theta_x'\left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \tag{3.24}$$

$$2\varepsilon_{xz} = \Omega_{xz} - \theta_x'\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - y\right) \tag{3.25}$$

Ω_{xy} et Ω_{xz} sont les déformations transversales définies dans l'état déformé de la poutre à parois minces, et qui sont définies comme suit :

$$\Omega_{xz} = \gamma_{xz} - \gamma_{xy}\theta_x \tag{3.26}$$

$$\Omega_{xy} = \gamma_{xy} + \gamma_{xz}\theta_x \tag{3.27}$$

A partir de l'équation (3.23), on doit noter que les cinq premiers termes sont liés d'après la théorie des poutres prismatiques. Les six termes ($\psi\theta'$) ont été introduit pour ce nouveau travail, spécialement par **Yeong et al [26]**. Ces termes due à la configuration des poutres a parois minces à sections variables sont proportionnels à la dérivée de l'angle de torsion θ' et du coefficient de géométrie ψ.
Les deux derniers termes sont originaux et ils n'ont jamais été considérés au paravent par les chercheurs. Ces paramètres permettent d'évaluer la contribution de la déformation au cisaillement sur le comportement à la flexion des poutres à parois minces à sections transversales variables.

Une fois les composants de déformations sont définis, le *tenseur de Piola-Kirchhoff* de contraintes pour un matériau élastique peut être présenté sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma^i_{xx} \\ \tau^i_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^i_{xx} \\ \gamma^i_{xs} \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

E et *G* dénotent le module de Young (le module d'élasticité longitudinale) et le module de cisaillement.

3.3. Les équations d'équilibre :

Les équations d'équilibre sont à dériver à partir de condition stationnaire de potentiel total. En désignant par U l'énergie de déformation de l'élément et par W le travail des charges conservatrices appliquées, la condition stationnaire de potentiel total, donné par :

$$\delta(U - W) = 0 \tag{3.29}$$

Les expressions des contraintes résultantes des sections transversales symétriques des poutres à parois minces sont les suivants :

$$N = E\int_A \varepsilon_{tt'} dA = E\tilde{A}.(u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{\tilde{I}_0}{2}\theta'^2) \tag{3.30}$$

$$M_y = E\int_A \varepsilon_{tt'} z dA = -E\left[\tilde{I}_y(\phi_y' - \phi_z'\theta_x + \theta_x'\Omega_{xy}) - \tilde{I}_{yy'}\Omega_{xz}\right] \tag{3.31}$$

$$M_z = -E\int_A \varepsilon_{tt'} y dA = E\tilde{I}_z(\phi_z' + \phi_y'\theta_x - \theta_x'\Omega_{xz}) - E\tilde{I}_{zz'}\Omega_{xy} \tag{3.32}$$

$$B_\omega = -E\int_A \varepsilon_{tt'}\omega dA = E\left[\tilde{I}_\omega \theta'' + \tilde{I}_{\psi\omega}\theta'\right] \tag{3.33}$$

$$T_y = 2G\int_A \varepsilon_{xy} dA = GK_y \tilde{A}\Omega_{xy} \tag{3.34}$$

$$T_z = 2G\int_A \varepsilon_{xz} dA = GK_z \tilde{A}\Omega_{xz} \tag{3.35}$$

$$M_{sv} = 2G\int_A \left[\varepsilon_{xz}\left(y - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right) - \varepsilon_{xy}\left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\right] dA = G\tilde{J}\theta' \tag{3.36}$$

$$M_R = E\int_A \varepsilon_{tt} R^2 dA = N\tilde{I}_0 + \frac{1}{2}E\tilde{I}_t \theta'^2 \tag{3.37}$$

$$N_{y'} = -E\int_A \varepsilon_{tt'} y' \mathrm{d}A = E\tilde{I}_{zz'}(\phi_z' + \phi_y'\theta_x - \theta_x'\Omega_{xz}) - E\tilde{I}_{z'}\Omega_{xy} \tag{3.38}$$

$$N_{z'} = -E\int_A \varepsilon_{tt'} z' \mathrm{d}A = E\tilde{I}_{yy'}(\phi_y' - \phi_z'\theta_x + \theta_x'\Omega_{xy}) - E\tilde{I}_{y'}\Omega_{xz} \tag{3.39}$$

$$M_\psi = -E\int_A \varepsilon_{tt'}\psi dA = E\left[\tilde{I}_\psi \theta' + \tilde{I}_{\psi\omega}\theta''\right] \tag{3.40}$$

D'où $\tilde{A}$, $\tilde{I}_y$, $\tilde{I}_z$, $\tilde{J}$, $\tilde{I}_\omega$, $\tilde{I}_0$ et $\tilde{I}_t$ sont les propriétés géométriques de la section transversale de la poutre en respectant la position du centre de cisaillement. En présence de la variation de la section transversale de l'élément, tous ces paramètres varient avec la position de la coordonnée x de l'axe normal de la poutre.

Les termes $\tilde{I}_\psi$ et $\tilde{I}_{\psi\omega}$ des équations (3.33) et (3.40) résultent à partir du couplage torsion non uniforme et la variation de la hauteur de la section transversale ω et ψ, leurs expressions sont comme suit :

$$\tilde{I}_{\psi\omega} = \int_A \psi\omega dA \tag{3.41.a}$$

$$\tilde{I}_\psi = \int_A \psi^2 dA \tag{3.41.b}$$

Ces termes correspondant aux équations (3.41.a) et (3.41.b) ont beaucoup été discutés sur la stabilité sous la combinaison torsion-flexion des poutres à parois minces donné par **Yeong et al [26]**. Les nouveaux termes géométriques $\tilde{I}_{y'}$,$\tilde{I}_{yy'}$ $\tilde{I}_{z'}$ et $\tilde{I}_{zz}$ qui définissent la variation de la section sont définies comme suit :

$$\tilde{I}_{zz'} = \int_A zz' dA \tag{3.42.a}$$

$$\tilde{I}_{z'} = \int_A z'^2 \, dA \tag{3.42.b}$$

$$\tilde{I}_{yy'} = \int_A yy' \, dA \tag{3.42.c}$$

$$\tilde{I}_{y'} = \int_A y'^2 \, dA \tag{3.42.d}$$

K_y et K_Z sont les facteurs correcteurs de cisaillement qui correspondent à l'axe de forte inertie et l'axe de faible inertie respectivement. Afin de simplifier l'écriture des équations pour les sections en *I* et les sections en box de forme rectangulaire, on utilise les formules empiriques comme suit **[25]** :

$$K_y = \frac{5A_w}{6\tilde{A}} \tag{3.42.e}$$

$$K_z = \frac{5A_f}{6\tilde{A}} \tag{3.42.f}$$

D'ou A_f et A_w sont les surfaces des sections de la semelle et l'âme de la poutre respectivement.

La variation de l'énergie de déformation d'un élément est :

$$\delta U = \iint_{LA} (\sigma_{tt'} \delta\varepsilon_{tt'} + 2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}) \, dA \, dx \,. \tag{3.43}$$

D'où σ_{ij} est le tenseur de contrainte de Piola–Kirchhoff. $\delta\varepsilon_{tt'}$, $\delta\varepsilon_{xy}$ et $\delta\varepsilon_{xz}$ sont les variations des tenseurs de déformation de Green obtenues à partir des relations (3.23), (3.24) et (3.25) comme suit :

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{tt'} =& \delta u' - y\delta\phi_y'\theta_x - y\phi_y'\delta\theta_x - y\delta\phi_z' + z\delta\phi_z'\theta_x + z\phi_z'\delta\theta_x - z\delta\phi_y' + y'\delta\Omega_{xy} + z'\delta\Omega_{xz} \\ &+ y\delta\theta_x'\Omega_{xz} + y\theta_x'\delta\Omega_{xz} - z\delta\theta_x'\Omega_{xy} - z\theta_x'\delta\Omega_{xy} - \delta\theta_x'\psi + R\theta_x'\delta\theta_x' + v'\delta v' + w'\delta w' - \omega\delta\theta_x''\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$2\delta\varepsilon_{xy} = \delta\Omega_{xy} - \delta\theta_x' \left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \tag{3.45}$$

$$2\delta\varepsilon_{xz} = \delta\Omega_{xz} - \delta\theta_x' \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - y \right) \tag{3.46}$$

A partir des équations (3.30 - 3.40), la variation de l'énergie de déformation peut être exprimée comme une fonction résultante de déformation qui agit sur la section transversale de l'élément à paroi mince, l'expression de variation de l'énergie de déformation δU devient :

$$\delta U = \delta U(N) + \delta U(M_y) + \delta U(M_z) + \delta U(B_\omega) + \delta U(T) + \delta U(T_z) + \delta U(M_{sv}) + \delta U(M_R) + \delta U(N_{y'}) + \delta U(N_{z'}) + \delta U(M_\psi) \tag{3.47}$$

Dans l'équation au-dessus, les huit premiers termes représentent respectivement la contribution des résultantes des déformations de N, M_y , M_z , B_ω T_y, T_z ,M_{sv} et M_R . Ils sont exprimés par :

$$\delta U(N) = \int_L N(\delta u_0^{'} + v'\delta v' + w'\delta w')dx \tag{3.48}$$

$$\delta U(M_y) = \int_L \left[\left(-M_y + M_z\theta_x \right)\delta\phi_y^{'} + M_y\phi'_z\delta\theta_x - M_y\Omega_{xy}\delta\theta'_x - M_y\theta'_x\,\delta\Omega_{xy} \right]dx \tag{3.49}$$

$$\delta U(M_z) = \int_L \left[\left(M_z + M_y\theta_x \right)\delta\phi_z^{'} + M_z\phi'_y\delta\theta_x - M_z\Omega_{xz}\delta\theta'_x - M_z\theta'_x\,\delta\Omega_{xz} \right]dx \tag{3.50}$$

$$\delta U(B_\omega) = \int_L B_\omega \delta\theta_x{''} dx \tag{3.51}$$

$$\delta U(T_y) = \int_L T_y \delta\Omega_{xy} dx \tag{3.52}$$

$$\delta U(T_z) = \int_L T_z \delta\Omega_{xz} dx \tag{3.53}$$

$$\delta U(M_{sv}) = \int_L M_{sv} \delta\theta'_x\, dx \tag{3.54}$$

$$\delta U(M_R) = \int_L M_R \theta'_x \delta\theta'_x\, dx \tag{3.55}$$

Cependant les dernières quantités sont spécifiques pour la spécification de la variation de la section transversale des poutres à parois minces, écrites comme suit :

$$\delta U(N_{y'}) = -\int_L N_{y'} \delta\Omega_{xy} dx \tag{3.56}$$

$$\delta U(N_{y'}) = -\int_L N_{z'} \delta\Omega_{xz} dx \tag{3.57}$$

$$\delta U(M_\psi) = \int_L M_\psi \delta\theta'_x\, dx \tag{3.58}$$

Dans les équations au-dessus, les forces additionnelles $N_{y'}$ et $N_{z'}$ sont associées respectivement avec les déformations de cisaillement Ω_{xy} et Ω_{xz} .

Il est admis que le phénomène d'instabilité le plus complexe est largement observé pour le cas des structures restreintes. Dans ces circonstances, l'effet de couplage entre les déformations axiales, de flexion et de torsion a été obtenu. Afin de fournir une étude théorique consistante des poutres à parois minces à sections variables, la force axiale q_x appliquée sur la ligne centrale sans aucun excentrement est combinée en agissant sur la direction latérale. Contrairement à la force axiale, la force latérale q_z agissant sur la ligne *SS'* situé sur le contour de la section avec une excentricité e_z (**Fig.3.5)**. On obtient :

$$\delta W = \int_L \left(q_x \ \delta u_0(x) + q_z \ \delta w_S \right) \, dx \, . \tag{3.59}$$

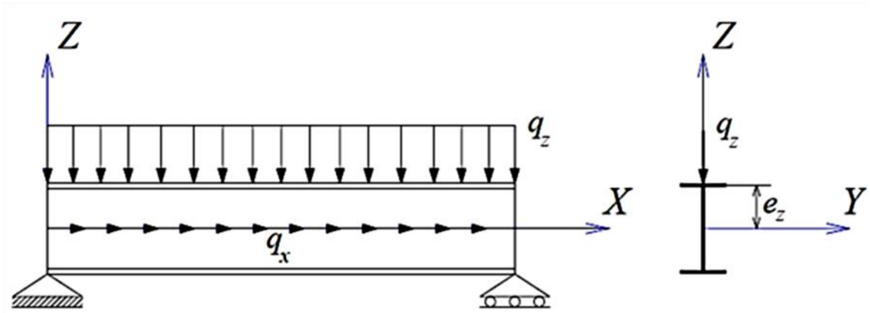


Fig 3.5 : Elément poutre à parois minces soumis aux charges axiales et latérales uniformément réparties.

Dans cette équation, w_S est le déplacement vertical correspondant à la ligne (*SS')*. Ce déplacement est la dérivé du point de cisaillement de l'Eq (3.3) selon les hypothèses cinématiques quadratiques. Par conséquent, lorsque la fonction circulaire $\cos\theta_x = 1 - \frac{\theta_x^{\ 2}}{2}$, on obtient l'expression finale du travail externe:

$$\delta W = \int_L \left(q_x \delta u_0(x) + q_z \delta w \ + q_z e_z \theta_x \delta\theta_x \right) \, dx \tag{3.60}$$

En utilisant les équations (3.29, 3.47, 3.48-3.60)**,** la variation du potentiel total est alors une fonction des déplacements virtuels et aussi de leurs dérivées δu, δv, δw , $\delta\phi_y$, $\delta\phi_z$ et $\delta\theta$. Les équations d'équilibre général pour un élément à paroi mince bi-symétrique sont dérivées comme suit :

$$N' = q_x \tag{3.61}$$

$$\int_L \left[-M_y \theta'_x - N_{y'} + T_y + (M_z \theta'_x + N_{z'} - T_z)\theta_x + Nv' \right] \delta v' dx = 0 \tag{3.62}$$

$$\int_L \left[\left[-M_z \theta'_x - N_{z'} + T_z - (M_y \theta'_x + N_{y'} - T_y)\theta_x + Nw' \right] \delta w' - q_z \delta w \right] dx = 0 \tag{3.63}$$

$$\int_L \left[(M_z + M_y\theta_x)\delta\phi'_z + \left[(M_y\theta'_x + N_{y'} - T_y) + (-M_z\theta'_x - N_{z'} + T_z)\theta_x\right]\delta\phi_z\right]dx = 0 \qquad (3.64)$$

$$\int_L \left[(-M_y + M_z\theta_x)\delta\phi'_y + \left[(M_y\theta'_x + N_{y'} - T_y)\theta_x + (M_z\theta'_x + N_{z'} - T_z)\right]\delta\phi_z\right]dx = 0 \qquad (3.65)$$

$$\int_L \begin{bmatrix} \left[M_y\,\phi'_z + M_z\,\phi'_y - (M_y\theta'_x + N_{y'} - T_y)\gamma_{xz} + (M_z\theta'_x + N_{z'} - T_z)\gamma_{xy} - q_z\theta\right]\delta\theta_x \\ -\left[M_y\Omega_{xy} + M_z\Omega_{xz} - M_{sv} - M_\psi - M_R\theta'_x\right]\delta\theta'_x + B_\omega\delta\theta''_{x\,x} \end{bmatrix} dx = 0$$

(3.66)

Ces équations permettent de prédire les charges élastiques de flambement pour des éléments bi-symétriques des poutres en box.

Lorsque les charges axiales sont réduites à une force axiale concentrée *P* agissant au niveau de l'extrémité de la poutre et la charge de flexion q_z au niveau e_z (Fig.4), les équations d'équilibre suivantes sont présentées comme suit :

$$N = -P \qquad (3.67)$$

$$\int_L \left[(-R_y + R_z\theta_x)\delta v' - Pv'\delta v'\right]dx = 0 \qquad (3.68)$$

$$\int_L \left[(R_z + R_y\theta_x)\delta w' + Pw'\delta w' + q_z\delta w\right]dx = 0 \qquad (3.69)$$

$$\int_L \left[(\tilde{M}_Z)\delta\phi'_z + \left[(R_y) - R_z\theta_x\right]\delta\phi_z\right]dx = 0 \qquad (3.70)$$

$$\int_L \left[\tilde{M}_y\delta\phi'_y - \left[R_y\theta_x + R_z\right]\delta\phi_y\right]dx = 0 \qquad (3.71)$$

$$\int_L \begin{bmatrix} \left[M_y\,\phi'_z + M_z\,\phi'_y - R_y\gamma_{xz} + R_z\gamma_{xy} - q_z\theta\right]\delta\theta_x \\ -\left[\tilde{M}_y\gamma_{xy} + \tilde{M}_z\gamma_{xz} - M_{sv} - M_\psi - M_R\theta'_x\right]\delta\theta'_x + B_\omega\delta\theta''_x \end{bmatrix} dx = 0 \qquad (3.72)$$

Ou :

$$M_y\theta'_x + N_{y'} - T_y = R_y \qquad (3.73)$$

$$M_z \theta'_x + N_{z'} - T_z = R_z \tag{3.74}$$

$$M_z + M_y \theta_x = \tilde{M}_z \tag{3.75}$$

$$M_y - M_z \theta_x = \tilde{M}_y \tag{3.76}$$

3.4. Analyse du déversement :

La présente étude est consacrée à la stabilité des poutres-colonnes sous la charge concentrée Q appliquée à la position x = 0 pour les poutres simplement appuyées et dans le bord libre pour les poutres en porte-à-faux.

Dans le cas de poutres simplement appuyées avec gauchissement libre sur les appuis, les modes de déplacement en flexion et en torsion sont approximatives par des fonctions polynomiales. Puisque l'origine de l'axe des X est à mi- portée, l'approximation suivante est faite pour les composantes de déplacement correspondant au premier mode de déversement.

$$\{v \quad w \quad \theta_x\} = \sum_{i=1}^{n} \{v_i \quad w_i \quad \theta_i\} \left(\left(\frac{2x}{L} \right)^{2i} - 1 \right) \tag{3.77-a}$$

$$\{\phi_y \quad \phi_z\} = \sum_{i=1}^{n} \{\phi_{yi} \quad \phi_{zi}\} \left(\frac{x}{L} \right)^{2i-1} \tag{3.77-b}$$

Et leurs formes de variations virtuelles sont :

$$\{\delta v \quad \delta w \quad \delta\theta_x\} = \sum_{i=1}^{n} \{\delta v_i \quad \delta w_i \quad \delta\theta_i\} \left(\left(\frac{2x}{L} \right)^{2i} - 1 \right) \tag{3.78-a}$$

$$\{\delta\phi_y \quad \delta\phi_z\} = \sum_{i=1}^{n} \{\delta\phi_{yi} \quad \delta\phi_{zi}\} \left(\frac{x}{L} \right)^{2i-1} \tag{3.78-b}$$

Où v_0, w_0, ϕ_{y0}, ϕ_{z0} sont les amplitudes de déplacement associées. Avec les relations (3.77) et (3.78), les déplacements disparaissent aux supports $x = \pm L/2$ et sont au maximum à l'origine (x = 0). Tandis que, dans le cas d'une poutre en porte-à-faux, les fonctions de forme sont exprimées comme suit :

$$\{v \quad w \quad \theta_x\} = \sum_{i=1}^{n} \{v_i \quad w_i \quad \theta_i\} \left(\frac{x}{L} \right)^{i+1} \tag{3.79.a}$$

$$\{\phi_y \quad \phi_z\} = \sum_{i=1}^{n} \{\phi_{yi} \quad \phi_{zi}\} \left(\frac{x}{L} \right)^{i} \tag{3.79.b}$$

Et leurs forms de variations virtuelles sont :

$$\{\delta v \quad \delta w \quad \delta\theta_x\} = \sum_{i=1}^{n}\{\delta v_i \quad \delta w_i \quad \delta\theta_i\}\left(\frac{x}{L}\right)^{i+1} \tag{3.80.a}$$

$$\{\delta\phi_y \quad \delta\phi_z\} = \sum_{i=1}^{n}\{\delta\phi_{yi} \quad \delta\phi_{zi}\}\left(\frac{x}{L}\right)^{i}$$ (3.80-

b)

Les solutions numériques dérivées à partir des équations d'équilibre (3.68-3.72) sont établies, selon la méthode de Ritz. Après intégration des équations indiquées (3.68-3.72) sur toute la longueur du contour de ligne médiane, des équations d'équilibre non linéaires couplées sont établis. La matrice tangente K_t est définie comme la matrice Jacobienne des équations d'équilibre obtenues par rapport **aux modes d'amplitude de déplacement**. On considère ensuite l'état fondamental correspondant à la déflexion initiale à l'état de pré-flambement. Il peut être raisonnable de supposer que les composantes de déplacement correspondant à l'état fondamental sont sous la forme :

$$\{v \quad w \quad \phi_y \quad \phi_z \quad \theta_x\}^T = \{0 \quad w \quad \phi_y \quad 0 \quad 0\}^T .$$
(3.81)

Les charges de flambement sont obtenues en mettant (*d et* $K_t = 0$) de l'état fondamental, après détermination des coefficients de Ritz w_i et ϕ_{yi} ($i = 1 .. N$) en fonction des charges appliquées Q et P à partir de la version linéarisée des équations d'équilibre en relation avec les équations (3.69 et 3.71).

3.5. Conclusion :

Une analyse non linéaire sur le déversement des poutres métalliques à parois minces de sections variables ouvertes et fermées faisait l'objet de ce chapitre.
Un modèle théorique non linaire a été présenté correspondant à un nouveau modèle cinématique établi selon la théorie des éléments à parois minces en adoptant l'hypothèse de Timoshenko sur les sections transversales. Un nouveau phénomène également qui est le gauchissement faisait partie de cette analyse non linéaire.

Les équations qui régissent l'équilibre élastique sont réalisées à partir de l'état stationnaire. Deuxièmement, les modes de déplacements en flexion, en torsion et en distorsion sont rapprochés par une fonction sinusoïdale afin d'en tirer les équations d'équilibre algébriques. Un système d'équations pour les poutres en box et simplement appuyées est obtenu. De ce système, une équation analytique est proposée pour la résistance au déversement et au flambement en fonction des caractéristiques géométriques de la section, de la rigidité classique, et la hauteur de charge.

CHAPITRE 4 :

RESULTATS ET DISCUTIONS.

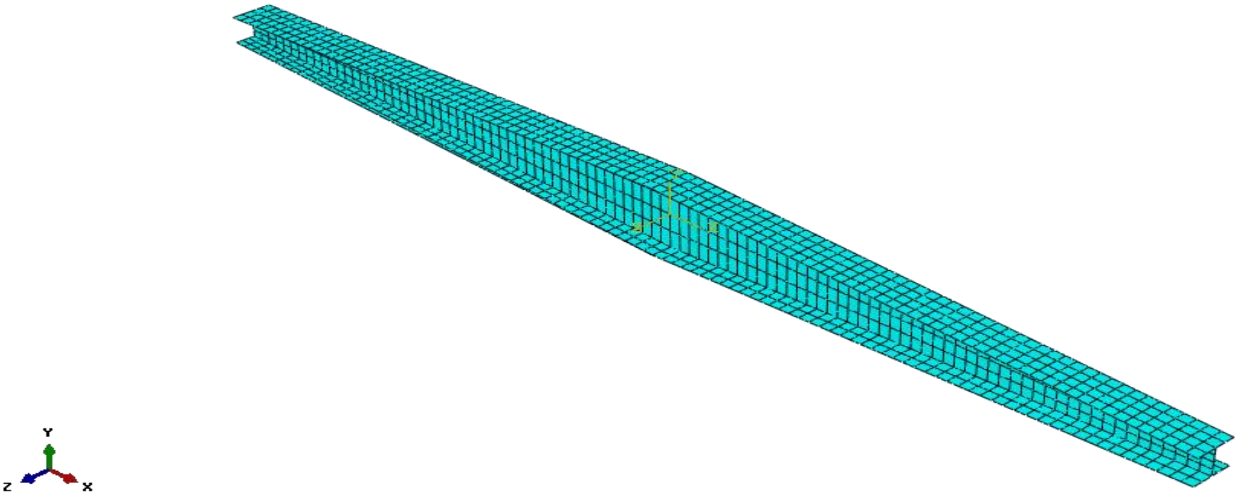
4.1. Introduction :

L'objectif de cette partie est de vérifier la validité du présent modèle théorique compte tenu de la non-linéarité géométrique pour l'analyse du flambement et du déversement des poutres à parois minces à sections variables. Les charges de flambement et de déversement fournies par la présente méthode avec et sans déformation de cisaillement sont comparées avec celles données par la simulation par éléments finis à l'aide du logiciel Abaqus **[3]** également par les résultats donnés par **Andrade et al [58].**

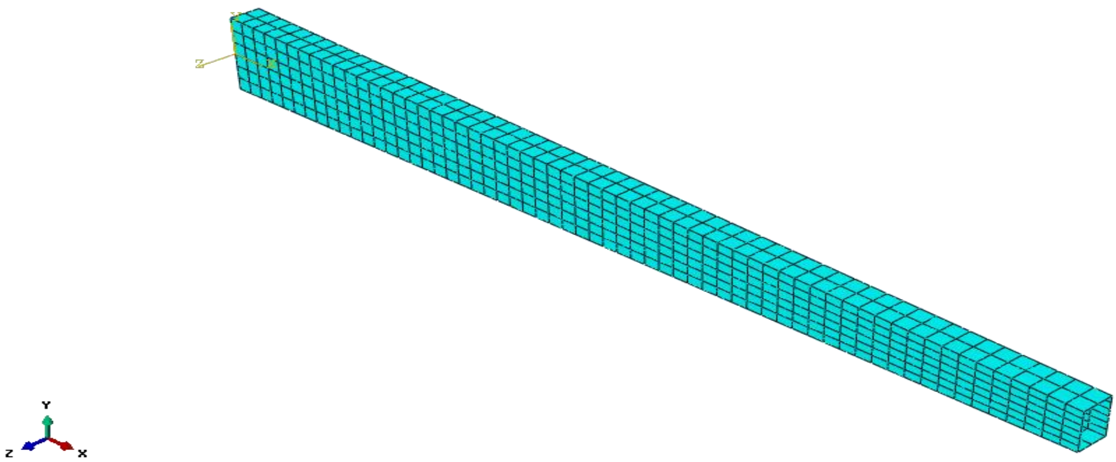
Des paramètres faisaient l'objet de la validation du modèle proposé pour l'analyse de la stabilité du déversement et du flambement à savoir le type de section à parois minces ouvertes ou fermées, le coefficient de variation de la section α, la charge axiale et la portée de la poutre étudiée.

4.2. Résultats et validation numériques :

Une analyse Numérique par éléments finis est effectuée en utilisant le code commercial Abaqus **[3]**. Dans ce code, chaque paroi mince d'une poutre étudiée est modélisée par l'élément coque S8R5 avec un maillage régulier comme indiqué dans (**Fig.4.1**).



a) Poutre à section variable en I simplement appuyée.



b) Poutre en box à âme variable en console.

Fig.4.1 : Modélisation des poutres de section en I et en box à l'aide du code Abaqus **[3]**.

La comparaison des résultats présentés ci-dessous constitue les charges critiques obtenues avec la présente méthode en tenant compte la déformation par cisaillement (*QcrSD*), la théorie sans déformation par cisaillement (*Qcr*) et l'analyse par éléments finis donnée par le code Abaqus.

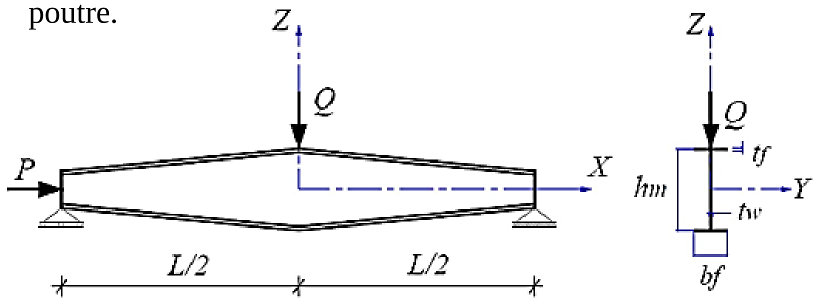
Les erreurs relatives associées aux valeurs *QcrSD* et *Qcr* sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$\Delta_1 = \frac{\left|Q^{SD}{}_{cr} - Q^{FEM}{}_{cr}\right|}{Q^{FEM}{}_{cr}} \times 100 \tag{4.1}$$

$$\Delta_2 = \frac{\left|Q_{cr} - Q^{FEM}{}_{cr}\right|}{Q^{FEM}{}_{cr}} \times 100 \tag{4.2}$$

4.2.1. Exemple 1 : Déversement des poutres en I à âme variable :

Dans cet exemple, on considère la stabilité au déversement des poutres aux inerties variables simplement appuyées (**Fig.4.2**). La longueur des poutres varie entre *6 m* à *12 m*. Les charges élastiques de flambage sont évaluées pour les paramètres de variation de section (*α = 0,0, 0,20, 0,40* et *0,60*). La charge concentrée *Q* est appliquée à la semelle supérieure à mi- portée de la poutre.



h_{max}=600 mm; b=150mm;

t_f=12.7mm and t_w=9.5 mm

Fig.4.2 : Poutre en IPE 600 simplement appuyée avec variation de la hauteur de l'âme de l'exemple 1.

L (m)	α	Chargement sur semelle superieure					
		Moment de déversement [kN.m]				Ecart d'erreur relative	
		Andrade et al [58]	MEF (Abaqus)	Méthode Sans déformation de cisaillement Q_{cr}	Méthode prposée avec déformation de cisaillement Q_{cr}^{SD}	(Δ_1 %) [Q_{cr}^{SD}/MEF]	(Δ_2 %) [Q_{cr}/MEF]
6	0,0	100.75	98.03	101.81	101.80	3.85	3.86
	0,2	85.07	81.39	81.33	81.41	0.02	0.07
	0,4	72.55	68.36	65.27	65.45	4.26	4.52
	0.6	65.84	58.70	60.84	60.92	3.78	3.65
9	0,0	40.24	39.31	42.84	42.85	9.00	8.97
	0,2	36.06	35.139	36.11	36.13	2.82	2.76
	0,4	32.81	31.63	31.27	31.32	0.98	1.14
	0.6	31.03	29.23	28.70	28.67	1.92	1.81
12	0,0	22.03	21.57	23.60	23.60	9.41	9.41
	0,2	20.36	19.89	20.40	20.40	2.56	2.56
	0,4	19.03	18.49	17.82	17.83	3.57	3.62
	0.6	18.22	17.49	15.98	15.97	3.85	3.86

Tab.4.1.a : Poutre en I600 à âme variable simplement soumis à une charge latérale concentrée de l'exemple1. Sur la semelle supérieur e_z = *0.3 m*.

L (m)	α	Chargement sur semelle superieure					
		Moment de déversement [kN.m]				Ecart d'erreur relative	
		Charge Axiale (KN) (P_{cr} / 2)	MEF (Abaqus)	Méthode Sans déformation de cisaillement Q_{cr}	Méthode prposée avec déformation de cisaillement QcrSD	(Δ_1 %) [Q_{cr}^{SD}/MEF]	(Δ_2 %) [Q_{cr}/ MEF]
6	0,0	206.	71.93	72.71	72.66	1.015	1.084
	0,2	205.	60.24	61.53	61.56	2.191	2.141
	0,4	201	50.71	53.14	53.15	4.812	4.792
	0.6	194	44.53	48.78	48.75	9.477	9.544
9	0,0	92.	29.2	29.87	29.87	2.295	2.295
	0,2	92.	26.28	26.92	26.91	2.397	2.435
	0,4	91.	23.911	24.77	24.76	3.551	3.592
	0.6	90.	22.40	23.62	23.62	5.446	5.446
12	0,0	52	16.13	16.52	16.51	2.356	2.418
	0,2	52	14.96	15.33	15.32	2.406	2.473
	0,4	52.	14.00	14.40	14.39	2.786	2.86
	0.6	51.	13.36	13.95	13.95	4.416	4.42

Tab.4.1.b : Poutre en I600 à âme variable simplement soumis à une combinaison de charge axiale et charge latérale concentrées de l'exemple1. Sur la semelle supérieure $e_z = 0.3\ m$.

Le tableau **Tab.4.1.a** montre les charges de déversement des poutres à âme variable simplement appuyées obtenues à partir de différentes méthodes. Ces résultats démontrent l'exactitude de la méthode proposée par rapport à ceux donnés par **Andrad et al [58]** et par la MEF. Il convient de noter d'après cet exemple qu'aucun effet significatif sur la réduction des charges de déversement, en raison de la déformation par cisaillement, n'a été rapporté. Cependant, la différence entre la méthode proposée et les résultats de la MEF ne dépasse pas les valeurs de *Δ1 = 9,5%.*

D'autre part, l'effet de la charge axiale de compression *P* sur la réduction du déversement est rapporté dans le **Tab.4.1.b.** A partir de ces résultats, il a été clairement prouvé que les charges de déversement des poutres prismatiques sont fortement influencées par les charges axiales de compression par rapport aux poutres à âme variable. On obtient une réduction significative de *30%* observée pour $\alpha = 0,0$ et $L = 12m$ contre *13%* pour $\alpha = 0.6$.

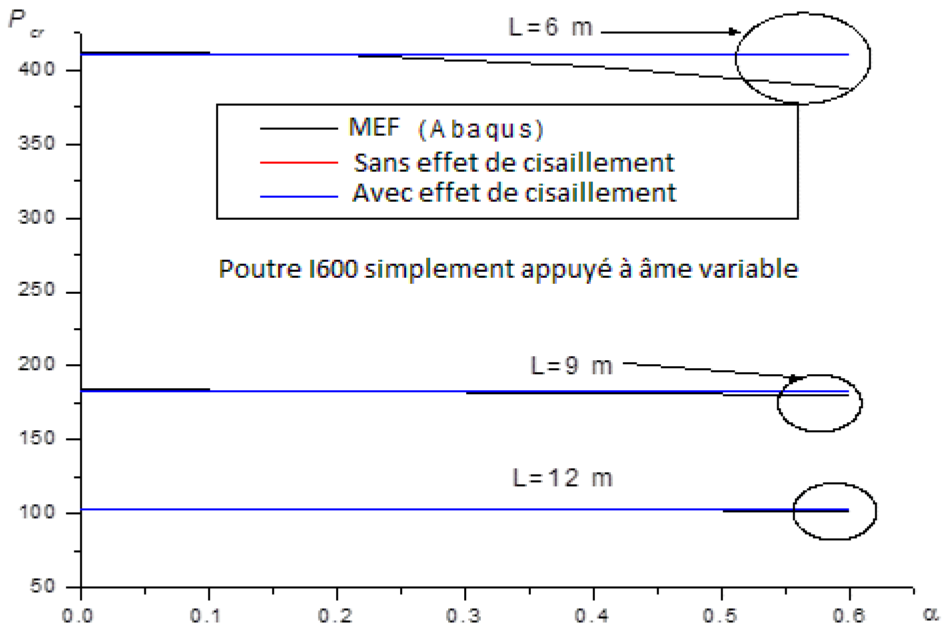


Fig.4.3 : Effet du paramètre de variation de section α sur la charge critique axiale P_{cr} de la poutre de l'exemple 1.

A partir de la **Fig.4.3** on constate que les résultats obtenus par la méthode proposée et ceux qui ne tiennent pas en compte la déformation par cisaillement sont très proches de ceux fournis par la MEF. Etant donné que le mode de flambement axial correspond à la déviation autour de l'axe *z*, les charges de flambement axial restent inchangées avec le paramètre de la variation d'inertie *α*.

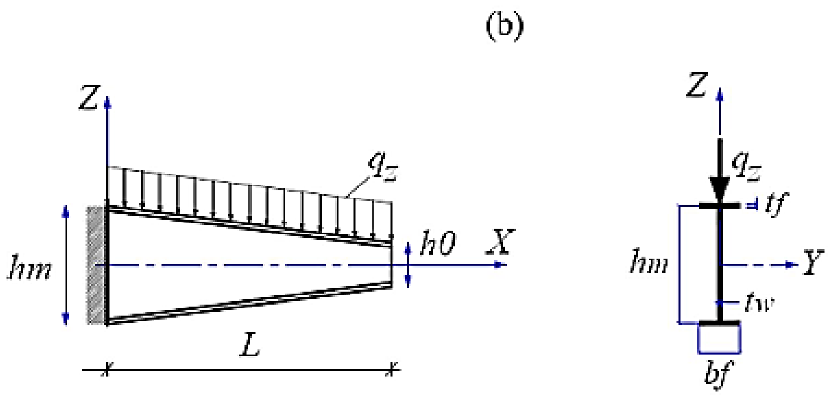


Fig.4.4 : Poutre en IPE 600 en console avec variation de la hauteur de l'âme sous une charge uniformément repartie.

Le cas (b) concerne l'estimation des charges critiques de déversement q_{cr} des poutres en console I600 avec un paramètre de variation de section (α = 0,5), soumises à des charges réparties uniformes **(Fig.4.4)**. La portée de la console varie entre 3 m et 10 m.

Dans le cas (b), les charges critiques de déversement des consoles en I600 à sections variables estimées par la présente méthode sont comparées avec celles données par la modélisation à l'aide du code Abaqus.

Les tableaux **Tab.4.2-a** et **Tab.4.2-b** fournissent la variation des charges de déversement avec le nombre n considéré dans la série de puissance et la charge appliquée par compression sur les bords libres.

L	**Charge axiale de compression (kN)**	***q_{cr} (Present) avec n=2 kN***	***q_{cr} (Present) avec n=3 kN***	***q_{cr} (Present) avec n=4 kN***	***q_{cr} (Present) avec n=5 kN***	***q_{cr} (MEF, Abaqus) (kN)***
3	P=0	140.512	131.94	131.23	131.01	131.35
	$P_{cr}/2$=205.805	117.739	110.051	109.527	109.366	109.52
4	P = 0	61.556	56.781	56.648	56.521	56.378
	$P_{cr}/2$=116.015	53.128	48.601	48.548	48.454	48.052
6	P = 0	19.011	16.818	16.834	16.74	16.569
	$P_{cr}/2$=39.084	17.130	15.032	15.053	15.014	14.886
10	P = 0	4.288	3.517	3.488	3.477	3.365
	$P_{cr}/2$=18.602	3.520	2.854	2.820	2.813	2.727

Tab.4.2-a: Poutre en console en IPE600 avec variation de la hauteur de l'âme de (α=0.5) chargée au niveau de la semelle supérieure. Comparaison de la charge critique de deversement q_{cr} avec et sans application de la charge de compression.

L	**Charge axiale de compression (*kN*)**	***q_{cr} (Present) avec n=2 kN***	***q_{cr} (Present) avec n=3 kN***	***q_{cr} (Present) (kN)***	***q_{cr} (Present) (kN)***	***q_{cr} (M) (kN)***
3	P=0	1047.786	697.701	657.674	652.534	608.75
	$P_{cr}/2$=205.805	655.226	461.936	446.173	443.696	420.30
4	P=0	348.212	226.958	213.287	211.927	199.52
	$P_{cr}/2$=116.015	217.161	150.409	144.820	144.183	137.69
6	P=0	75.029	47.563	44.385	44.179	42.444
	$P_{cr}/2$=39.084	54.185	36.028	34.216	34.094	32.925
10	P=0	11.495	7.062	6.482	6.462	6.214
	$P_{cr}/2$=18.602	7.293	4.786	4.486	4.474	4.329

Tab.4.2-b: Poutre en console en IPE600 avec variation de la hauteur de l'âme de (α=0.5) chargée au niveau de la semelle inférieure. Comparaison de la charge critique de déversement q_{cr} avec et sans application de la charge de compression.

Les résultats présents mènent aux remarques suivantes :

1. Un excellent accord est obtenu entre les charges de déversement élastique q_{cr} obtenues par la méthode proposée et celles données par FEM.

2. On remarque que les charges de déversement convergent lorsque le nombre n est augmenté ($n \geq 3$).

3. On peut conclure que pour une meilleure précision sur les charges de déversement, il n'est pas nécessaire de prendre plus de 3 termes dans l'expansion de la série de puissance.

4. La présence de la charge de compression axiale $P = 0{,}5\ P_{cr}$ diminue la résistance au déversement aux moyennes de 16% lorsque la charge uniformément repartie est appliquée sur la semelle supérieure et de 29% lorsque l'application de la charge est sur la semelle inférieure.

4.2.2. Exemple 2 : Déversement des poutres en I avec largeur variable des semelles :

L'exemple considéré consiste à une poutre en I avec largeur de semelles variables simplement appuyée (**Fig.4.5**), sous des charges latérales concentrées appliquées à mi- portée de la poutre. Les charges considérées agissent sur la semelle supérieure.

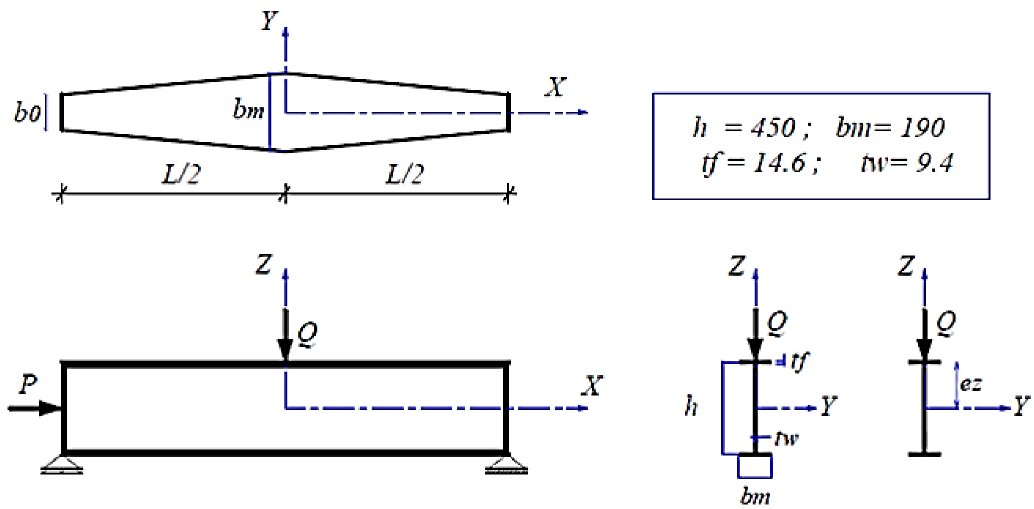


Fig.4.5 : Poutre en IPE450 à âme variable simplement appuyée de l'exemple2**.**

Le **Tab.4.3.a** fourni les moments de déversement sans forces axiales de compression. On remarque, à partir de ce cas, que la déformation par cisaillement n'affecte pas la résistance au déversement.

L (m)	α	Chargement semelle superieure				
		Moment de déversement [kN.m]			Ecart d'erreur relative	
		MEF (Abaqus)	Méthode sans déformation de cisaillement Qcr	Méthode proposée avec déformation de cisaillement QcrSD	(Δ_1 %) [Q_{cr}^{SD}/MEF]	(Δ_2 %) [Q_{cr}/MEF]
6	0,0	174.24	183.83	183.81	5.49	5.50
	0,2	150.41	154.66	154.60	2.79	2.83
	0,4	128.36	122.50	122.47	4.59	4.57
	0.6	105.02	111.18	111.13	5.82	5.87
9	0,0	70.33	72.39	72.39	2.93	2.93
	0,2	61.60	65.90	65.98	7.11	6.98
	0,4	53.14	54.75	54.75	3.03	3.03
	0.6	44.17	44.85	44.84	1.52	1.54
12	0,0	38.65	38.71	38.70	0.13	0.16
	0,2	34.01	36.49	36.48	7.26	7.29
	0,4	29.58	30.29	30.29	2.40	2.40
	0.6	24.77	24.73	24.73	0.16	0.16

Tab.4.3.a : Poutre en I450 à semelle variable simplement appuyée soumise à une charge de flexion sur la semelle supérieure del'exemple2.

Comme indiqué dans le dernier exemple, on a encore observé que la charge de compression affecte fortement le déversement des poutres prismatiques avec une réduction significative de *32%* obtenue pour la portée *L = 12m*.

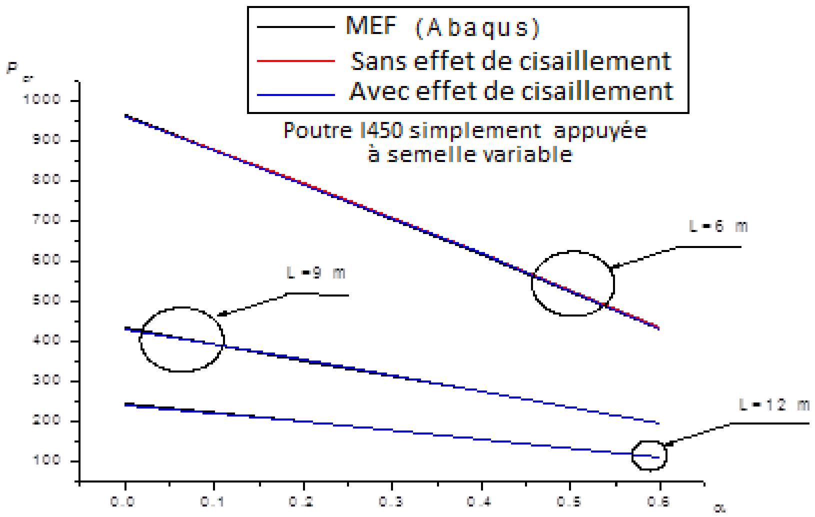


Fig.4.6 : Effet du paramètre de variation de la semelle α sur la charge critique de flambement de la poutre de l'exemple 2.

Comme représenté sur la **Fig.4.6,** à l'inverse de la poutre à âme variable, les semelles variables sont fortement affectées par la réduction des charges de flambement axial. Dans ces circonstances, la charge de flambage axial diminue de manière monotone avec le paramètre de variation α.

L (m)	α	Chargement semelle superieure					
			Moment de déversement [kN.m]			Ecart d'erreur relative	
		Charge axiale (*kN*) (P_{cr} / 2)	MEF (Abaqus)	Méthode sans déformation de cisaillement Q_{cr}	Méthode proposée avec déformation de cisaillement Q_{cr}^{SD}	(Δ_1 %) [M_{0b}/FEM]	(Δ_2 %) [Ritz/FEM]
6	0,0	483	120.96	127.17	127.05	4.79	5.13
	0,2	394	108.8	113.02	112.94	3.66	3.88
	0,4	306	94.50	98.25	98.21	3.78	3.97
	0.6	215	79.23	82.51	82.49	3.95	4.14
9	0,0	216	50.75	50.60	50.57	0.36	0.30
	0,2	175	45.54	43.45	43.44	4.83	4.59
	0,4	136	39.31	37.42	37.41	5.08	4.81
	0.6	96	33.70	32.50	32.49	3.72	3.56
12	0,0	122	28.53	28.79	28.78	0.87	0.91
	0,2	99	25.45	24.67	24.67	3.16	3.06
	0,4	77	22.30	21.19	21.19	5.24	4.98
	0.6	54	18.96	18.36	18.35	3.32	3.16

Tab.4.3.b : Poutre en I450 à semelle variable simplement appuyée soumise à une combinaison de charge axiale et de flexion sur la semelle supérieure del'exemple2.

4.2.3. Exemple 3 : Déversement des poutres en caisson simplement appuyées à âme variable :

La stabilité des poutres en caisson simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie est étudiée dans cet exemple.

Pour ce cas de charge, les solutions analytiques fournies par la présente méthode en employant à la fois des fonctions de forme polynomiale et trigonométrique sont comparées aux résultats donnés par la modélisation à l'aide du code Abaqus en utilisant les éléments coques.

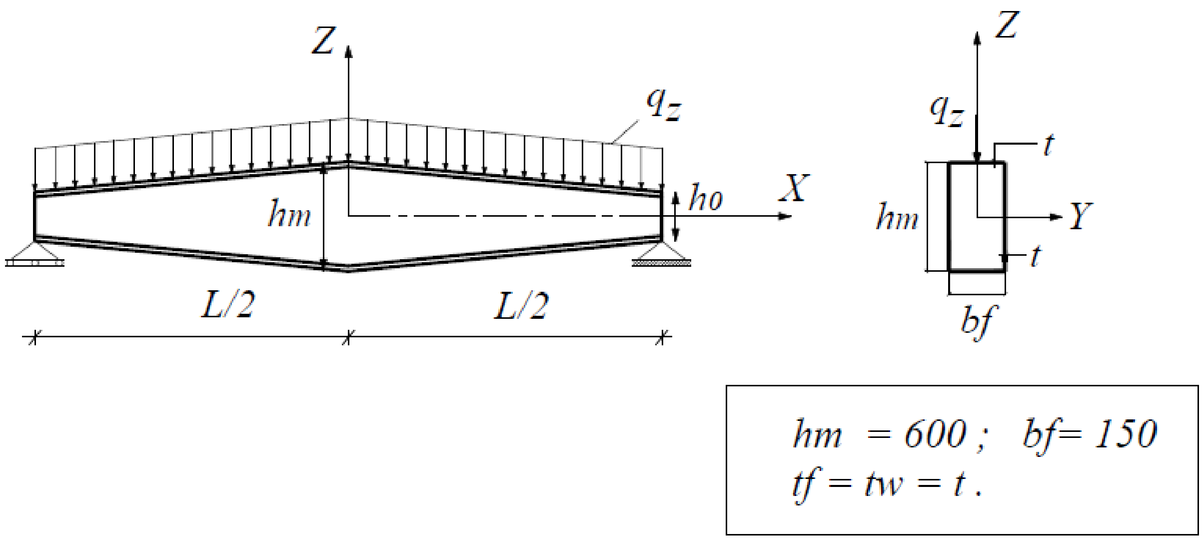


Fig.4.7 : Poutre en box simplement appuyée à âme variable de l'exemple 3.

La portée des poutres étudiées varie entre 6 m et 12 mètres. Le paramètre de variation de la section α est compris entre 0,5 et 1 (cas prismatique). Le terme n de la série de puissance a été successivement augmenté afin d'obtenir une prédiction satisfaisante de la charge de flambement.

La comparaison des charges critiques q_{cr} est donnée dans le tableau 4.4.a et le tableau 4.4.b. Les résultats sont en bon accord avec les solutions données par Abaqus. Lorsque les fonctions trigonométriques sont utilisées, les erreurs relatives sont inférieures à 7,5%. Alors que lorsque les fonctions de forme polynomiale sont employées, celles-ci conduisent à une estimation moins précise des charges de flambage pour n ≤ 3. Ces valeurs sont très conservatrices lorsqu'elles sont comparées aux solutions de modélisation numérique par Abaqus.

L (m)	α	Chargement semelle superieure				
		Moment de déversement [kN.m]			Ecart d'erreur relative	
		MEF (Abaqus)	Méthode sans déformation de cisaillement Q_{cr}	Méthode proposée avec déformation de cisaillement Q_{cr}^{SD}	(Δ_1 %) [Q_{cr}^{SD}/MEF]	(Δ_2 %) [Q_{cr}/MEF]
6	0,0	174.24	183.83	183.81	5.49	5.50
	0,2	150.41	154.66	154.60	2.79	2.83
	0,4	128.36	122.50	122.47	4.59	4.57
	0.6	105.02	111.18	111.13	5.82	5.87

9	0,0	70.33	72.39	72.39	2.93	2.93
	0,2	61.60	65.90	65.98	7.11	6.98
	0,4	53.14	54.75	54.75	3.03	3.03
	0.6	44.17	44.85	44.84	1.52	1.54
12	0,0	38.65	38.71	38.70	0.13	0.16
	0,2	34.01	36.49	36.48	7.26	7.29
	0,4	29.58	30.29	30.29	2.40	2.40
	0.6	24.77	24.73	24.73	0.16	0.16

Tab.4.4.a : Comparaison des charges de flambement de la poutre de l'exemple 2.

L (m)	**α**	**Chargement semelle superieure**					
			Moment de déversement [kN.m]			**Ecart d'erreur relative**	
		Charge axiale (*kN*) (P_{cr} / 2)	**MEF (Abaqus)**	**Méthode sans déformation de cisaillement Qcr**	**Méthode proposée avec déformation de cisaillement QcrSD**	**(Δ_1 %) [M_{0b}/MEF]**	**(Δ_2 %) [Ritz/MEF]**
6	0,0	483	120.96	127.17	127.05	4.79	5.13
	0,2	394	108.8	113.02	112.94	3.66	3.88
	0,4	306	94.50	98.25	98.21	3.78	3.97
	0.6	215	79.23	82.51	82.49	3.95	4.14
9	0,0	216	50.75	50.60	50.57	0.36	0.30
	0,2	175	45.54	43.45	43.44	4.83	4.59
	0,4	136	39.31	37.42	37.41	5.08	4.81
	0.6	96	33.70	32.50	32.49	3.72	3.56
12	0,0	122	28.53	28.79	28.78	0.87	0.91
	0,2	99	25.45	24.67	24.67	3.16	3.06
	0,4	77	22.30	21.19	21.19	5.24	4.98
	0.6	54	18.96	18.36	18.35	3.32	3.16

Tab.4.4.b : Comparaison des charge de flambement et de déversement de la poutre en I450 soumise à une combinaison de charges axiale et de flexion de l'exemple 2.

L	α	Présent n=2	Présent n=3	Présent n=4	Présent n=5	Fonction Trigonométrique	Abaqus [3]
L=6m	1	3388.827	3349.840	3349.306	3349.298	3401.872	3239.3
	0.8	3009.510	3022.661	3025.200	3025.356	2993.326	2844.5
	0.5	2416.631	2469.720	2469.991	2469.861	2372.643	2328.00
L=10m	1	758.444	749.430	749.310	749.308	759.620	758.60
	0.8	673.737	677.178	677.795	677.834	667.960	646.19
	0.5	542.313	555.135	555.201	555.163	529.002	525.26
L=12m	1	442.694	437.386	437.316	437.314	443.201	412.28
	0.8	393.271	395.337	395.704	395.727	389.666	375.48
	0.5	316.736	324.343	324.382	324.359	308.566	293.73

Tab.4.5: Comparaison des charges de flambement des poutres en box simplement appuyées à âme variable soumise à une charge uniformément répartie sur la semelle supérieure et sans force axiale de compression.

4.2.4. Exemple 4 : Déversement des poutres en caisson en console à âme variable :

Une poutre en caisson à section variable comme le montre la **Fig.4.8** est considérée. Le long de l'axe longitudinal, la console présente une section uniforme des semelles, alors que la hauteur de l'âme varie linéairement. Les propriétés géométriques sont $h = 0{,}6m$, $b = 0{,}2m$; Les épaisseurs des semelles et des âmes sont $t_f = t_w = 30mm$. La portée de la console varie de *3m* à *8m* et le paramètre de variation α est fixé à la valeur de *0,5*.

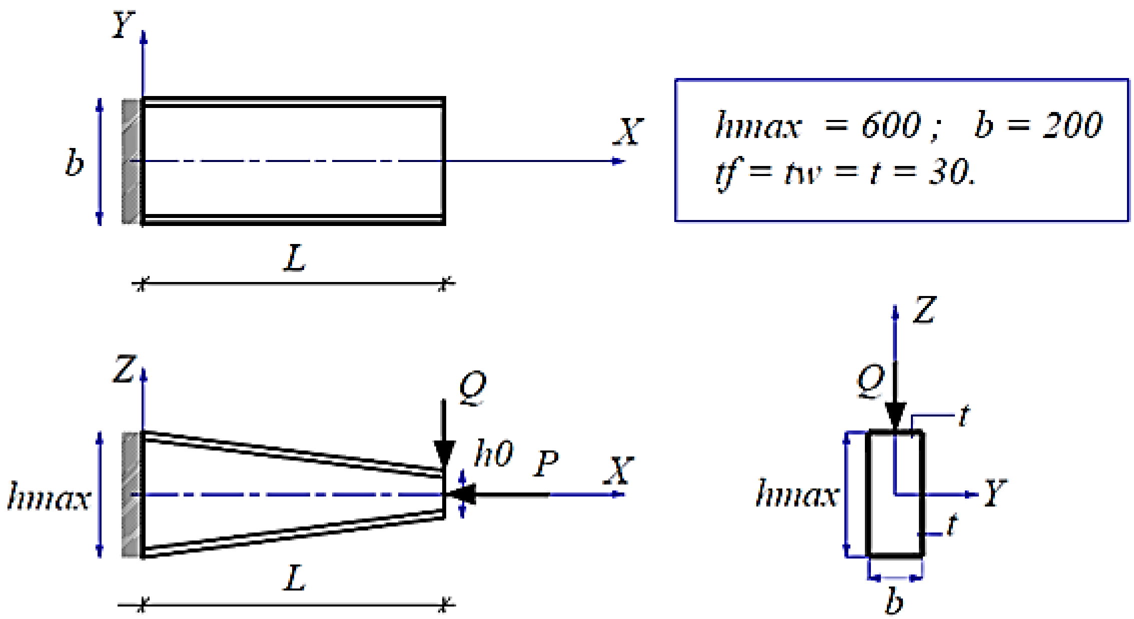
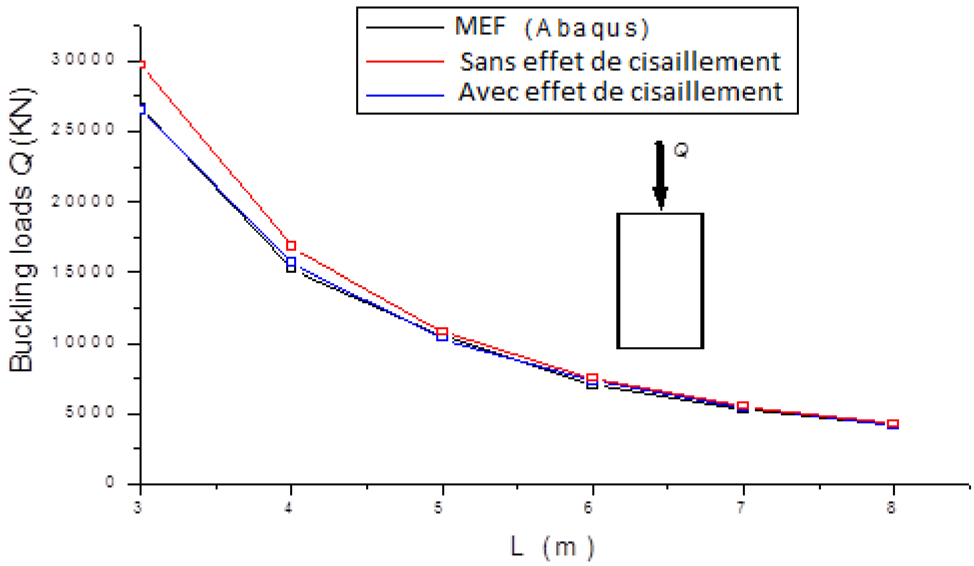


Fig.4.8 : Ame variable de la poutre en box en console de l'exemple 4**.**

(a)



(b)

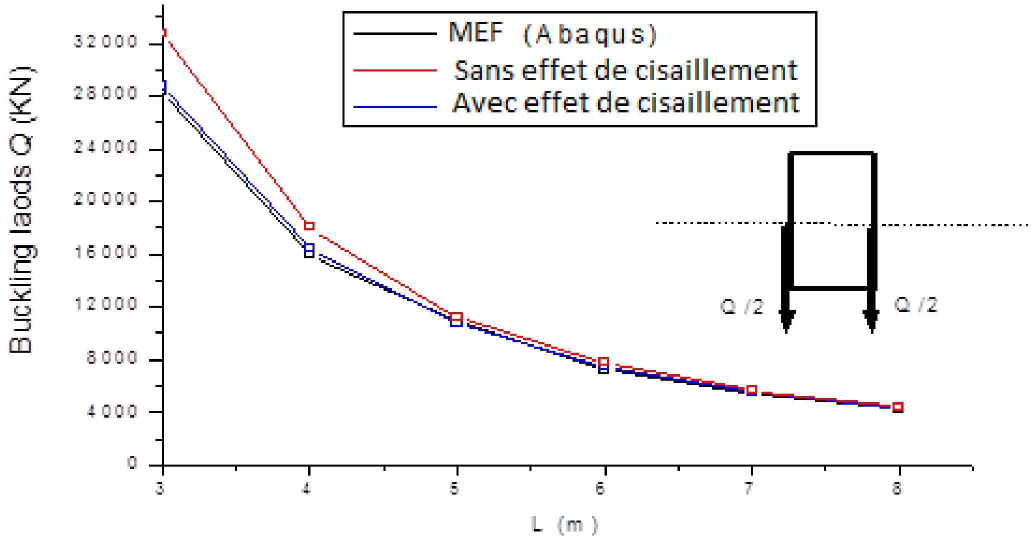


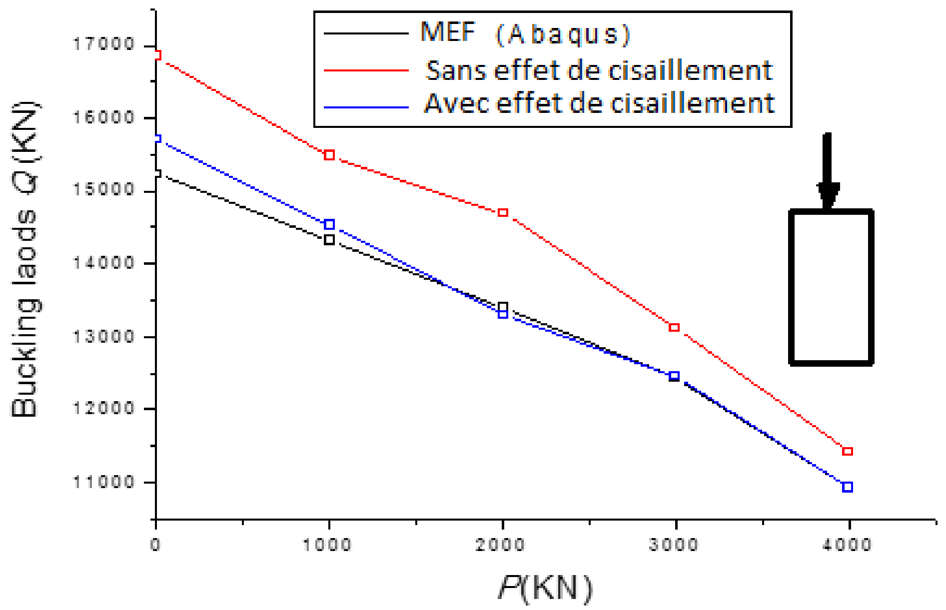
Fig.4.9 : Charge critique de déversement Q_{cr} pour la poutre à âme variable en box de l'exemple 4.

La poutre est soumise à une force à l'extrémité. Les charges de flexion *Qcr* et *QcrSD* résultants à $P = 0$, évaluées pour différentes positions de charge, sont représentées sur la **Fig.4.9**. Ces grandeurs de charge sont respectivement relatives à la semelle supérieure et aux centres de cisaillement.

On peut observer à partir de la **Fig.4.9 (a et b)** que l'effet de déformation par cisaillement est significatif pour la poutre courte et que les résultats de la charge de flexion avec et sans déformation par cisaillement convergent chaque fois que la longueur de la poutre augmente.

Les résultats donnés par le modèle proposé en utilisant la méthode de Ritz sont en bon accord avec ceux donnés par la simulation numérique par éléments finis. Cependant, les charges de déversement évaluées par le modèle proposé obtiennent des approximations raisonnables. En fait, l'erreur est de *Δ1 = 3,75%.* La méthode classique qui ignore les déformations de cisaillement tend à surestimer la charge de flexion avec une erreur *Δ2 = 15%.*

(a)



(b)

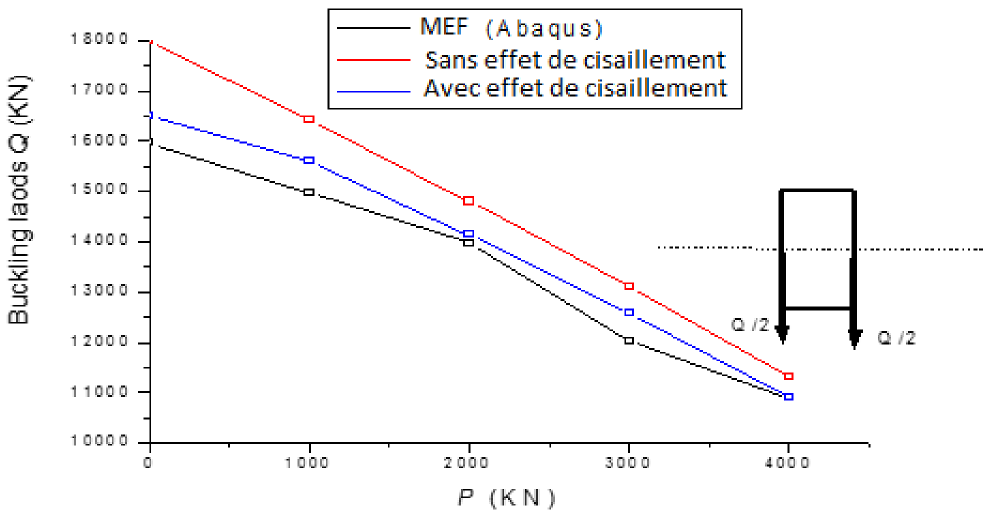


Fig.4.10 : Interaction entre la charge de déversement *Q* et la charge axiale *P* de la poutre en box à âme variable de l'exemple 4. (a) charge appliquée sur la semelle supérieure, (b) charge appliquée sur le centre de cisaillement de la poutre.

D'autre part, les effets de déformation par cisaillement sont significatifs pour les poutres en caissons chargées au niveau du centre de cisaillement, et plus acceptables lorsque la charge est appliquée sur la semelle.

L'effet de la charge axiale de compression *P* sur la réduction de la résistance au déversement est rapporté sur la **Fig4.10.a** et **Fig4.10.b**, ceux-ci correspondant respectivement aux charges agissant au niveau de la semelle et du centre de cisaillement. La portée de la poutre en console est de *4 m*.

On peut voir à partir de ces résultats que les erreurs relatives $\Delta 1$ et $\Delta 2$ diminuent avec les augmentations de l'intensité de la charge de compression. Par exemple, dans le cas d'une poutre en caisson aux âmes variables chargée au niveau de la semelle, représentée sur la **Fig4.10.a,** l'erreur $\Delta 1$ varie Entre 3% pour P = 0 et *0%* pour P = 4000 *kN*, alors que l'erreur $\Delta 2$ varie de *10%* pour $P = 0$ à *4,5%* pour $P = 4000$ *kN*.

Sous la charge latérale positionnée au centre de cisaillement comme est montrée sur la **Fig4.10.a,** l'erreur relative $\Delta 1$ est comprise entre *3,5%* pour $P = 0$ *kN* à *0,25%* pour $P = 4000$ *kN* et $\Delta 2$ de *12%* à *4%*.

4.2.5. Exemple 5 : Déversement des poutres en console avec variation de la largeur des semelles :

Dans cet exemple, la stabilité au déversement d'une poutre en caisson en console aux largeurs des semelles variables est étudiée (**Fig.11**). La portée de la poutre varie de *3 m* à *6 m*. Les charges élastiques de flambement sont évaluées pour les paramètres de variation de la largeur de la semelle ($\alpha = 0,5$).

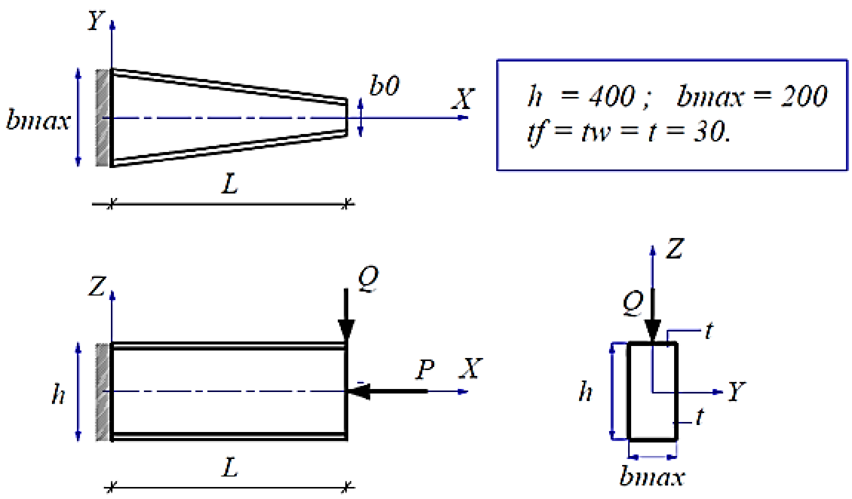
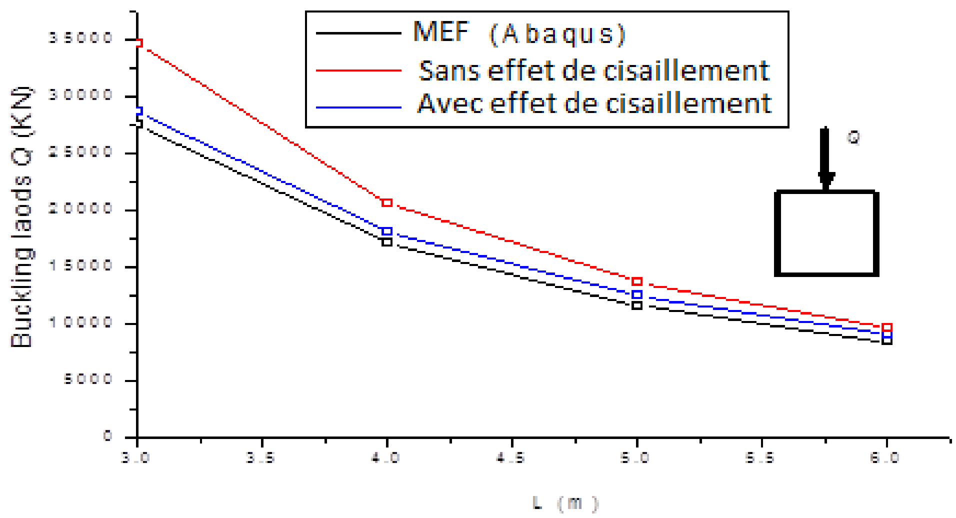


Fig.4.11 : Poutre en box en console à semelle variable de l'exemple 4.

(a)



(b)

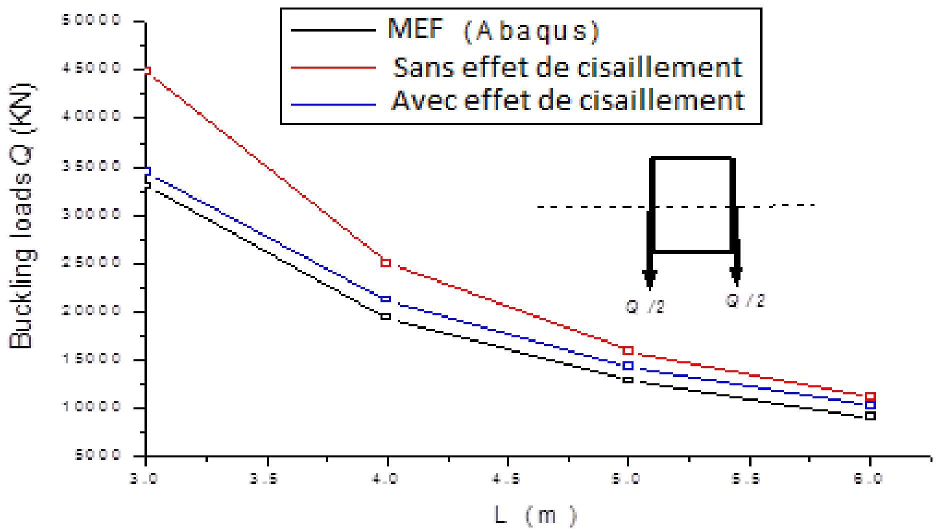


Fig.4.12 : Charge de déversement de la poutre en box à âme variable de l'exemple 4.

(Fig 4.12.a et Fig 4.12.b) fournissent les charges de déversement évaluées avec de différentes positions de chargement suivant la hauteur. On deduit les commentaires suivants :

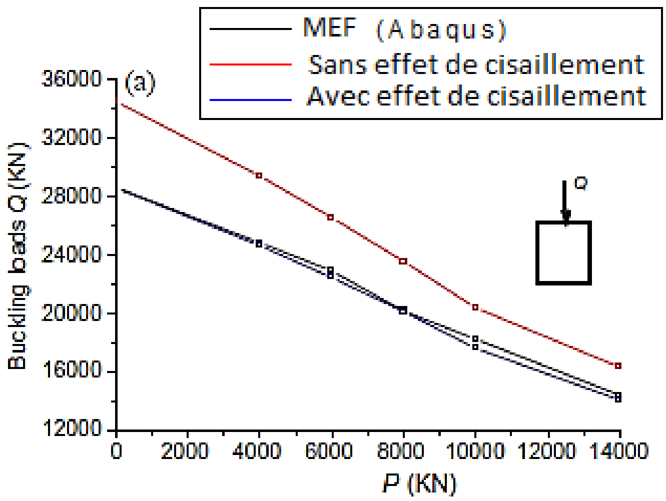
1. Le modèle théorique proposé donne une approximation suffisante pour éviter le mode de déversement par rapport au modèle classique, dans lequel la déformation par cisaillement est omise. A cet effet, le modèle proposé permet d'obtenir des approximations raisonnables, en particulier dans les cas où la charge est placée sur la semelle avec $\Delta 1 \leq 8\%$.

2. La position de charge au centre de cisaillement, présente des erreurs relativement plus élevées, avec des valeurs plus prononcées de *Δ1*, atteignant *13%*.

3. A partir des résultats obtenus, la méthode classique qui ignore la déformation par cisaillement n'est plus valable pour la prédiction de la stabilité de l'élément poutre en caisson aux semelles variables. L'erreur *Δ2* est supérieure à *15%*.

4. On voit que le modèle classique surestime la charge de déversement pour les poutres courtes (*L = 3m*). Pour cette poutre, l'effet de déformation par cisaillement est plus notable, avec une erreur relative importante *Δ2 = 36%.*

Les courbes d'interaction des éléments en caisson aux semelles variables avec *L = 3 m* sont représentées sur la **Fig 4.13.a** et la **Fig 4.13.b**.



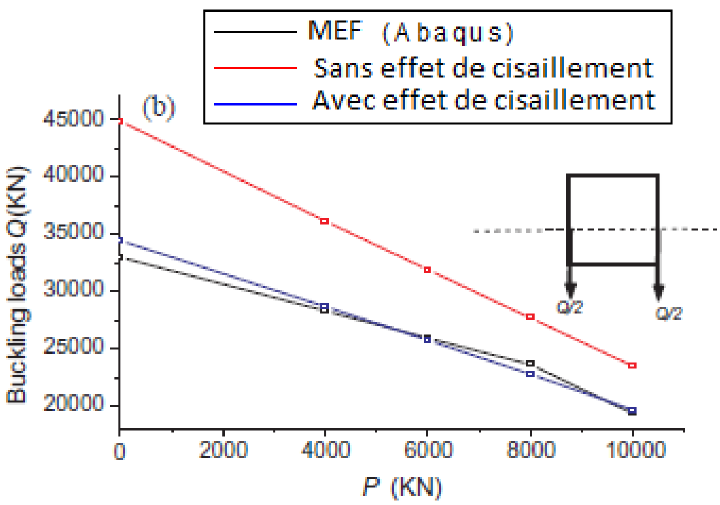


Fig.4.13 : Interaction entre la charge de déversement Q et la charge axiale P pour la poutre en box à semelle variable de l'exemple 4. (a) charge appliquée sur la semelle de la poutre, (b) Charge appliquée au centre de cisaillement de la poutre.

Les charges numériques de déversement déduites de la méthode proposée concordent très bien avec celles fournit pat la MEF avec $\Delta 1 \leq 4.5\%$. La méthode classique qui ignore la déformation par cisaillement surestime énormément la résistance réelle du déversement. On peut constater que le modèle classique conduit à des erreurs relatives plus prononcées $\Delta 2$ en atteignant la valeur de *36%*. Il semble juste de dire qu'il existe une limite de validation pour le modèle classique.

Par contre, indépendamment des positions latérales de chargement, lorsque la poutre est chargée sur la semelle (**Fig.13.a**), l'erreur relative $\Delta 1$ change est comprise entre *0%* pour $P = 0\ kN$ et *3,5%* pour $P = 1000\ kN$. Dans le cas de la poutre en caisson chargé au centre de cisaillement (**Fig.13.b**), l'erreur $\Delta 2$ varie de *17%* pour $P = 8000\ kN$ à *36%* pour $P = 0\ kN$.

4.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons comparé les résultats du modèle théorique non linéaire proposé dans ce travail et qui a été formulé au chapitre 3, avec ceux des modèles numériques en éléments finis élaboré par le code Abaqus également avec les résultats des travaux donnés par **Andrade et al** afin de valider et d'évaluer la performance de la formule analytique proposée dans l'analyse du déversement élastique des poutres de section en I et en box aux sections variables.

Nous avons également consolidé la validation de notre modèle analytique par une étude paramétrique des modèles numériques élaborés par Abaqus. A cet effet, pour décrire le comportement des poutres à paroi mince de section variable qu'elles soient ouvertes ou bien fermées les écarts mis en évidence sont tout à fait satisfaisants ainsi que les données de la formule proposée convergent à celles du modèle numérique.

CONCLUSION GENERALE

Ce travail de thèse a été consacré pour une analyse complète et détaillée des phénomènes d'instabilité mécanique de flambement et de déversement des poutres à parois minces à section variables à sections ouvertes et fermées. Nous avons présenté au début le comportement des différentes sections à parois minces qu'elles soient ouvertes ou fermées vis-à-vis de la torsion. Ainsi le phénomène de gauchissement produit par un nouvel effort qui est le bimoment a été illustré pour la première fois par Vlassov, il est considéré comme une partie non négligée.

Nous avons montré également les différentes expressions qui définissent les efforts de résistance de flambement et de déversement. Euler est considéré le premier a établir une expression théorique exacte sur la base d'hypothèses pour définir la résistance au flambement d'une barre comprimée. Malheureusement son expression ne couvre pas la résistance au flambement élastique des barres réelles et industrielles, cependant le CECM a pris en considération toutes les imperfections que peut subir une barre industrielle pour prédire sa résistance au flambement élastique.

Le but de cette thèse était de traiter le phénomène d'instabilité de flambement et de déversement des poutres à parois minces à sections variables de section ouvertes et fermées. Plusieurs auteurs ont travaillé sur ce domaine mais aucun d'eux n'a pris en considération l'effet de gauchissement de la section droite des poutres fléchies. A cet effet, un modèle analytique a été développé à la base d'un nouveau champ de déplacement ainsi proposé en tenant en compte l'effet de déformation de la section transversale. L'effet du gauchissement a été introduit à travers les cordonnées sectorielles et que par la suite on a déduit la quantité du bi moment. Les équations d'équilibres énergétiques ont été déduites par la méthode de Ritz. Par la suite le code Matlab était un outil utilisé pour la résolution numérique des équations ainsi obtenues.

Nous avons présenté par la suite, dans le chapitre 3, le développement analytique à partir d'un champ de déplacement qu'on a proposé dans notre analyse. La méthode de Ritz est utilisée pour déduire les équations d'équilibres pour les éléments à parois minces à sections variables de section transversale dissymétrique. Le code Matlab est utilisé pour la résolution numérique des équations non linéaires du modèle proposé.

Différents paramètres ont été pris en considération pour mettre en évidence l'efficacité du modèle analytique proposée à savoir le degré de variation de la section transversale le long de la poutre étudiée, le point d'application de la charge au niveau de la section transversale, les conditions d'appuis, le type de la section utilisée qui se présente par des sections en I et des sections en box et le type de chargement. Les résultats numériques obtenus ont été confrontés avec ceux donnés par la modélisation par la Méthode des Eléments Finis à l'aide du code commercial Abaqus.

L'étude des effets de la déformation de cisaillement sur la prédiction du déversement révèle que cet effet peut être important pour les poutres en console en box à section variable de courte portée, en particulier lorsque la charge est appliquée au centre de cisaillement d'un élément en box à semelle variable.

Cependant, dans le cas de poutres en I à section variable simplement appuyée, sous la combinaison de forces axiales et de forces de flexion, l'effet de déformation en cisaillement n'a pas d'incidences particulières sur les charges de flambement.

D'autre part, les résultats indiquent que les erreurs relatives $\Delta 1$ et $\Delta 2$ diminuent avec l'augmentation de l'intensité de la charge de compression.

Il a été indiqué que lorsque les déformations de cisaillement sont omises dans la théorie classique de la stabilité, la charge critique des éléments en box à section variable en console est extrêmement surestimée.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

[1] Eurocode 3, Design of steel structures, Part1.1: General rules of buildings European committee for Standardisation, draft Document ENV 1993-1-1, Brussels, 1992.

[2] MATLAB 7.1. Natick (MA): The MathWorksInc; 2006.

[3] ABAQUS; ABAQUS Standard User's Manual, Version 6.5, ABAQUS Inc. Providence, RI (2005).

[4] Vlassov VZ. Thin walled elastic beams. Moscow, 1959 [French translation : Pièces longues en voiles minces]. Paris : Eyrolles; 1959. p. 1962.

[5] Gere, J. M. and Timoshenko, S.P. 1997. Mechanics of Materials, PWS Publishing Company.

[6] Nadai A, Elastische platten. Julius Springer, Berlin, 1925.

[7] Lee L.H.N. ; Non uniform torsion of tapered I-beams. Journal of the Franklin Institute, Vol. 262, July 1956, pp. 37-44.

[8] Fogel C.M. Ketter R.L. ; Elastic strength of tapered columns. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 88, ST 5, October 1962, pp. 67-106.

[9] Cywinski Z. ; Teoria skrecania pretow cienkosciennych o zmiennej sztywnosci. Archiwum Inzynierii Ladowej, Tom 10, Février 1964, pp. 161-183.

[10] Bazant Z.P. ; Non uniform torsion of thin-walled bars of variable section. International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 25, 1968, pp. 17-39.

[11] Wilde P. The torsion of thin-walled bars with variable cross-section. Archiwum Mechaniki Stosowanej, N°20, April 1968, pp. 431-443.

[12] Culver G. Preg S.M. ; Elastic stability of tapered beam-columns. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, ST 2, February 1968, pp. 455-470.

[13] Massey C. Mc Guire P.J. ; Lateral stability of non uniform cantilevers. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, ST 5, June 1971, pp. 673-686.

[14] Kitipornchai S. Trahair N.S. ; Elastic stability of tapered I-beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, ST 3, March 1972, pp. 713-728.

[15] Kitipornchai S. Trahair N.S. ; Elastic behaviour of tapered monosymmetric I-beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 101, ST 8, August 1975, pp. 1661-1678.

[16] Djalaly H. ; La théorie du second-ordre de la stabilité élastique des barres à parois minces et profil ouvert et son application. Annales de l'ITBTP, N°171, Septembre 1974, pp. 130-162.

[17] Brown T.G. ; Lateral torsional buckling of tapered I-beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 107, ST 4, April 1981, pp. 689-697.

[18] Galéa Y. ; Flambement des poteaux à inertie variable. Construction Métallique, N°1, 1981, pp. 21-46.

[19] Karabilis D.L. Beskos D.E. ; Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams. Computers & Structures, Vol. 16, N°6, 1983, pp. 731-748.

[20] Olowokere O. ; On the design of web tapered, unequal flanged structural steel columns. Journal of Constructional Steel Research, N°4, 1984, pp. 81-116.

[21] Shiomi H. Kurata M. ; Strength formula for tapered beam-columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 110, N°7, July 1984, pp. 1630-1643.

[22] Wekezer J.W. ; Elastic torsion of thin-walled bars of variable cross-sections. Computers & Structures, Vol. 19, N°3, 1984, pp. 401-407.

[23] Wekezer J.W. ; Instability of thin-walled bars. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 111, N°7, July 1985, pp. 923-935.

[24] Wang C.M. Thevendran V. Teo K.L. Kitipornchai S. ; Optimal design of tapered beams for maximum buckling strength. Engineering Structures, Vol. 8, N°4, 1986, pp. 276-284.

[25] Timoshenko S.P. ; Théorie de la stabilité élastique. Dunod, 1966.

[26] Yeong BY, Jong DY. Stability of beams with tapered I-sections. J Eng Mech 1987;113(9):1337–57.

[27] Funk R. Wang K. ; Stiffnesses of non prismatic member. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 114, N°2, February 1988, pp. 489-494.

[28] Bradford M.A. Cuk P.E. ; Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 4, N°5, May 1988, pp. 977-997.

[29] Takabatake H. ; Cantilevered and linearly tapered thin-walled members. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 116, N°74, April 1990, pp. 733-750.

[30] Lee S.Y. Ke H.Y. Kuo Y.H. ; Exact static deflection of a non uniform Bernoulli-Euler beam with general elastic end restraints. Computers & Structures, Vol. 36, N°1, 1990, pp. 91-97.

[31] Fertis G. Keene M.E. ; Elastic and inelastic analysis of non prismatic members. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 116, N°2, February 1990, pp. 475-489.

[32] Fertis G. Taneja R. ; Equivalent systems for inelastic analysis of prismatic and non-prismatic members. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, N°2, February 1991, pp. 473-489.

[33] Romano F. Zingone G. ; Deflections of beams with varying rectangular cross-section. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 118, N°6, October 1992, pp. 2129-2134.

[34] Romano F. Ganduscio S. Zingone G. ; Elasto-plastic deflections for prismatic and non prismatic beams. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 119, N°6, June 1993, pp. 1117-1135.

[35] Tang X. ; Second-order tapered beam-column elements. Computers & Structures, Vol. 46, N°5, 1993, pp. 931-941.

[36] Tang X. ; Shape functions of tapered beam-column elements. Computers & Structures, Vol. 46, N°5, 1993, pp. 943-953.

[37] Polyzois D. Li Quing ; Stability of web tapered beams. Proceedings of the Annual Technical Session of the Structural Stability Research Council, 1993, pp. 179-193.

[38] American Institute for Steel Construction ; Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design. AISC, Chicago, Illinois, 1986.

[39] Braham M. Caron J.P. ; Lateral buckling of web tapered beams further computer simulations ; comparison with the Astron design method. ECCS-TC8 Meeting, Gent, 27-28 May 1993.

[40] Merchant W. ; The failure load of rigid jointed frameworks as influenced by stability. The Structural Engineer, Vol. 32, 1954.

[41] Rajasekaran S. ; Equations for tapered thin-walled beams of generic open section. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 120, N°8, August 1994, pp. 1607-1629.

[42] Love A. E. H. ; A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover, 1944.

[43] Mendera Z. ; Tapered steel columns design rules as an addition to Eurocode 3 recommendations. International Advanced Course and Workshop, Tempus JEP 218493/3, Cracow, June 1994, pp. 91-103.

[44] Gupta P. Blandford G.E. ; Lateral torsional buckling of non prismatic I-beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 122, N°7, July 1996, pp. 748-755.

[45] Tena-Colunga A. ; Stiffness formulation for non prismatic beam elements. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 122, N°12, December 1996, pp. 1484-1489.

[46] Braham M. ; Elastic lateral torsional buckling of web tapered I-beams subjected to end moments. Proceedings of the Steel Structures and Bridges Conference, Brno, May 1997.

[47] Braham M. ; Buckling of web-tapered columns in the plane of their web. Proceedings of the Eight International Conference on Steel Structures, Timisoara, 25-28 Septembre 1997.

[48] Braham M. Maquoi R. ; Merchant-Rankine's concept brought again into honour for web-tapered I-section steel members. Festschrift Joachim Lindner, Mars 1998.

[49] Ermopoulos J.C. ; Equivalent buckling length of non uniform members. Journal of Constructional Steel Research, Vol. 42, N°2, 1997, pp. 141-159.

[50] Paavola J. Salonen E.M. ; Strain and stress analysis of a curved tapered beam model. Computers & Structures, Vol. 72, N°4-5, 1999, pp. 565-577.

[51] Kim S.B. Kim M.Y. ; Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. Engineering Structures, N°22, 2000, pp. 446-458.

[52] Ronagh H.R. Bradford M.A. Attard M.M. ; Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory. Computers & Structures, Vol. 77, N°3, 2000, pp. 285-299.

[53] Braham M. ; Le déversement élastique des poutres en acier à section en I monosymétrique et hauteur linéairement variable soumises à un gradient de moments de flexion. Document non publié, Décembre 2000.

[54] Baptista A.M. Muzeau J.P. Elastic design of tapered beam-columns subjected to concentrated axial and transversal loads. Proceedings of the 3rd European Conference on Steel Structures, Eurosteel 2002, Coimbra, 19-20 September 2002.

[55] Baptista A.M. Muzeau J.P. Boissonnade N. Evaluation of the elastic critical load of tapered columns with circular or square hollow sections. Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, SDSS 2002, Budapest, 26-28 September 2002.

[56] Mohri F, Azrar L, Potier-Ferry M. Flexural-torsional post-buckling analysis of thin walled elements with open sections. Thin-Wall Struct 2001; 39(11): 907–38.

[57] Andrade A, Camotim D. Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications. J Eng Mech ASCE 2005; 131(6):586–97. June 1, 2005.

[58] Andrade A, Camotim D, Dinis PB. Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. Comput Struct 2007; 85: 1343–59.

[59] Lei Z, Shu TG. Lateral buckling of web-tapered I-beams: a new theory. J Constr Steel Res 2008 ; 64(12) :1379–93.

[60] Mohri F, Eddinari A, Damil N, Potier F.M. A beam finite element for non-linear analyses of thin-walled elements. Thin-Walled Structures 46 (2008) 981–990.

[61] Serna MA, Ibáñez JR, López A. Elastic flexural buckling of non-uniform members: closed-form expression and equivalent load approach. J Constr Steel Res 2011;67(7):1078–85.

[62] Asgarian B, Soltani M, Mohri F. Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. Thin-Wall Struct 2013; 62: 96–108.

[63] Soltani M, Asgarian B, Mohri F. Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin walled beams by the power series method. J Constr Steel Res 2014;96: 106–26.

[64] Trahair. Bending and buckling of tapered steel beam structures. Eng Struct 2014;59: 229–37.

[65] Mohri F, Meftah SA, Damil N. A large torsion beam finite element model for tapered thin-walled open cross sections beams. Eng Struct 2015;99:132–48.

[66] Benyamina AB, Meftah SA, Mohri F, Daya EM. Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams. Eng Struct 2013;56: 1207–19.

[67] Saoula A, Meftah SA, Mohri F, El Mostafa D. Lateral buckling of box beam elements under combined axial and bending loads. Journal of Constructional Steel Research 116 (2016) 141–155.

[68] Pluzsik A, Kollar LP. Torsion of closed section, orthotropic, thin-walled beams. Int J Solids Struct 2006; 43: 5307–36.

[69] Laszla P, Kollar LP. Flexural–torsional buckling of open section composite columns with shear deformation. Int J Solids Struct 2001; 38: 7525–41.

[70] Machado SP, Cortinez VH. Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation. Eng Struct 2005; 527: 1185–96.

[71] Ziane N, Meftah SA, Belhadj HB, Tounsi A, AddaBedia EA. Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM box beams. Int J Mech Sci 2013; 66: 273–82.

[72] François Frey. Analyse des structures et milieux continus. Traité de génie civil volume 2. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

[73] E. Davalle. Cours du 3ème semestre bachelor. Mécanique des structures I. Laboratoire de simulation en mécanique des solides – LSMS.

[74] André Berzagui , Résistance Des Matériaux 3 éme édition.

[75] Benyamina Abdelrahmane Bekaddour. Etude de l'instabilité des structures Métalliques. Thèse de doctorat en génie civil. Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes. 2014.

[76] Manfred A. Hirt, Rolf Bez. Construction métallique. Traité de génie civil volume 10. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

[77] Brouki A. Déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes : Aspect numériques et réglementaire. Thèse de doctorat en génie mécanique option génie civil. Université de Metz, 1998.

[78] Standards Australia, AS 4100 Steel structures, 1998 edition and 2012 amendment.

[79] Stephen. P. Timoshenko et James. M. Gere. Theory of elastic stability. International student edition, second edition, McGraw-Hill International Book Company, 1963.

[80] Massonnet C. (1992); Résistance des matériaux – Tome I. De Boeck-Wesmael, Bruxelles.

[81] EN 1994-1-1. Eurocode 4: Calcul des structures mixte acier-béton- partie 1-1: règles générales et règles pour les bâtiments, Afnor ; 2004.

[82] Green A.E., Zerna W. (1968); Theoretical elasticity, 2nd ed., Oxford University Press, Ely House, London 1968, U.K.

[83] Gardner, L., and Nethercot, D. A. Designers' Guide to EN 1993-1-1 Eucorode 3: Design of steel structures general rules and rules for building. London: Thomas Telford Publishing, 2004.

[84] Mohri F, Azrar L, Potier FM. Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams. Thin-Walled Structures 40 (2002) 1013–1036.

[85] Boissonnade N. Mise au point d'un élément fini de type poutre a section variable et autres applications à la construction métallique. Thèse de doctorat. Université Blaise Pascal – Clermont II. 2002.

[86] SAOULA A. Etude de l'instabilité des poutres métalliques à parois minces. Thèse de doctorat en science en génie civil. Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes. 2015.