

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelles



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT 3ème Cycle

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présentée par

SEKKAL Mohamed

Intitulé de la thèse

**Développement d'un nouveau champ de déplacement
pour l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques
en matériau composite avancé**

Soutenu le : / /2018

Composition du jury :

Président	Mr. TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Directeur de thèse	Mr. FAHSI Bouazza	MCA	U.D.L SBA
Examineur	Mr. BENRAHOU Kouider halim	Pr	U.D.L SBA
Examineur	Mr. BENYOUCEF Samir	Pr	U.D.L SBA
Examineur	Mr. DRAICHE Kada	MCA	U de Tiaret
Examineur	Mr. YEGHNEM Redha	MCA	U de Saida

Année universitaire 2018-2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicace

C'est avec profonde gratitude et sincères mots que je dédie ce modeste et humble travail de thèse à :

- ❖ A ma très chère mère : affable, honorable, aimable, l'exemple de l'amour maternel, tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse, l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi, puisses-tu trouver le modeste témoignage de mon profond amour et ma gratitude pour tous les sacrifices que tu t'es imposée.
- ❖ A mon cher père : l'épaule solide, l'œil attentif, compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect, ta passion du travail a été toujours une leçon pour moi. Je te dédie ce modeste travail en témoignage de tous les sacrifices dont tu avais toujours su me combler, que dieu te préserve et te procure santé et longue vie.
- ❖ A ma femme : tes sacrifices, ton soutien moral, ta gentillesse sans égale, ton aide et ton profond attachement m'ont permis de réussir mes études.
- ❖ A mes sœurs Nihed et Inssaf : les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous.
- ❖ A mes grands-parents : vous êtes toujours présents pour les bons conseils.
- ❖ A tous les membres de ma famille, veuillez trouver dans ce humble travail l'expression de mon affection.
- ❖ A ma belle-famille ; en témoignage de l'amour et l'affection que je porte pour vous, je vous dédie ce travail.
- ❖ A tous mes enseignants avec mes remerciements.
- ❖ A tous mes amis et mes camarades d'études.
- ❖ A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie ALLAH, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, monsieur **Fahsi Bouazza**, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à Monsieur **Abdelouahed TOUNSI** pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ces années et pour tous ses conseils et remarques constructives.. Il peut être assuré de mon sincère respect et de ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **BENRAHOU Kouider halim**, **BENYOUCEF Samir**, **YEGHNEM Redha** et **DRAICHE Kada** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des Modélisation et Simulation Multi-Echelles et laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

A titre plus personnel, Je remercie chaleureusement ma femme, pour la grande patience, l'encouragement et la confiance qu'elle m'a témoignée dont elle a fait preuve à la relecture de mon manuscrit. Je tiens à la remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Je remercie de tout mon cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études.

Merci à tous mes amis pour la motivation que leurs amitié m'apportée.

Résumé

Dans la présente thèse deux travaux sont abordés, d'une part une nouvelle théorie de déformation par cisaillement quasi-3D (HSDT quasi-3D) pour les plaques à gradient fonctionnel est proposée. La théorie considère la déformation du cisaillement et les influences d'élasticité par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans l'épaisseur, et respecte les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteur de correction de cisaillement. Le point culminant de la théorie proposée est qu'il utilise des termes intégrés indéterminés dans le champ de déplacement et implique un plus petit nombre de variables et d'équations gouvernantes que les théories quasi-3D conventionnelles, mais ses solutions se comparent bien aux solutions 3D et quasi-3D. Les équations de mouvement sont toujours obtenues par principe de Hamilton et les solutions analytiques pour le flambage et les problèmes dynamiques sont déduites pour les plaques simplement soutenues. Des résultats numériques sont présentés pour prouver l'exactitude de la théorie proposée.

D'autre part, une étude de panneaux sandwich ou une nouvelle théorie de déformation par cisaillement (HSDT) est développée pour la vibration et le flambage des plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG). La théorie proposée présente un nouveau champ de déplacement en utilisant des termes intégrés indéterminés. Seuls quatre inconnus sont utilisés dans cette théorie, ce qui est inférieur à la première théorie classique de la déformation du cisaillement (FSDT) et à d'autres HSDT. Les équations de mouvement sont obtenues par le principe de Hamilton. Les solutions analytiques des plaques sandwich FG sont déterminées en utilisant la méthode Navier. Un bon accord entre les résultats calculés et les solutions disponibles des HSDT existants se révèle démontrer l'exactitude de la théorie développée.

Mots-clés: flambage, vibration, panneaux sandwich, quasi-3D, gradient fonctionnel (FG), principe de Hamilton.

Abstract

In the present thesis two works are tackled, on the one hand a new theory of quasi-3D shear deformation (quasi-3D HSDT) for functional gradient plates is proposed. The theory considers shear deformation and elasticity influences by a hyperbolic distribution of all shifts in thickness, and respects the boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate without the use of the correction factor of the shear. The culmination of the proposed theory is that it uses indeterminate integrated terms in the displacement field and involves a smaller number of variables and governing equations than conventional quasi-3D theories, but its solutions compare well with the solutions 3D and quasi-3D. Motion equations are always obtained by Hamilton principle and analytical solutions for buckling and dynamic problems are deduced for simply supported plates. Numerical results are presented to prove the accuracy of the proposed theory.

On the other hand, a sandwich panel study or a new shear deformation theory (HSDT) is developed for the vibration and buckling of functional gradient (FG) sandwich plates. The proposed theory presents a new displacement field using indeterminate integrated terms. Only four unknowns are used in this theory, which is lower than the first classical theory of shear strain (FSDT) and other HSDTs. The equations of motion are obtained by Hamilton's principle. The analytical solutions of the FG sandwich plates are determined using the Navier method. A good agreement between the calculated results and the available solutions of the existing HSDTs proves to prove the accuracy of the developed theory.

Keywords: Buckling, vibration, sandwich panels, quasi-3D, functional gradient (FG), Hamilton principle.

المخلص

في هذه الأطروحة يتم التعامل مع اثنين من الأعمال، من ناحية ومن المقترح نظرية جديدة لتشوه القص لوحات التدرج وظيفية. لنظرية تعتبر تشوه القص والمرونة يؤثر من خلال توزيع القطعي من جميع التشريد في سمك، ويحترم شروط الحدود على السطح العلوي والسفلي من لوحة دون استخدام عامل التصحيح. القص. تتويجا للنظرية المقترحة هو أنه يستخدم مصطلحات متكاملة غير محددة في مجال النزوح وينطوي على عدد أقل من المتغيرات والمعادلات الحاكمة من نظريات شبه التقليدية، ولكن حلولها مقارنة جيدا مع حلول . يتم الحصول على معادلات الحركة دائما من قبل مبدأ هاميلتون والحلول التحليلية للتواء ومشاكل ديناميكية واستنتاج لوحات تدعم ببساطة. يتم عرض النتائج العددية لإثبات دقة النظرية المقترحة.

من ناحية أخرى، تم تطوير دراسة لوحة شطيرة أو نظرية تشوه القص الجديدة للاهتزاز والتواء من لوحات شطيرة التدرج الوظيفي. تقدم النظرية المقترحة مجال نزوح جديد باستخدام مصطلحات متكاملة غير محددة. يتم استخدام أربعة مجهولة فقط في هذه النظرية، وهي أقل من النظرية الكلاسيكية الأولى لسلالة القص وغيرها من هسدرس. يتم الحصول على معادلات الحركة من قبل مبدأ هاميلتون. يتم تحديد الحلول التحليلية من لوحات شطيرة فغ باستخدام طريقة نافير. وجود اتفاق جيد بين النتائج المحسوبة والحلول المتاحة من هسدرس الموجودة يثبت لإثبات دقة النظرية المتقدمة.

كلمات المفتاحية: التواء، والاهتزاز، لوحات شطيرة، شبه ثلاثي الابعاد، التدرج وظيفية، مبدأ هاميلتون.

Table des matières

Résumé

Abstract

المُلخَص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

Introduction générale.....	01
Chapitre I: Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	
I.1.Introduction	05
I.2.Concept des matériaux FGM	05
I.3. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels.....	08
I.4. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés.....	09
I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	12
I.5.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	12
I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	13
I.5.3. Compaction sèche des Poudres	13
I.5.4. Projection plasma	14
I.5.5. Frittage et Infiltration	14
I.6. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	14
I.7. Aperçu sur les matériaux sandwichs	15
I.7.1.Définition d'un matériau sandwich	15
I.7.2. Les éléments constituant les matériaux sandwichs	16
I.7.2.1. Les peaux	17
I.7.2.2. L'âme.....	17
I.7.2.3. L'interface.....	19
I.7.3. Domaines d'applications des matériaux sandwichs	20
I.7.3.1. Construction aérospatiale	20
I.7.3.2.Construction automobile et ferroviaire	21
I.8.Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	21
I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	22
I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	23
I.8.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	24
I.9.Conclusion	25

Table des matières

Chapitre II: Théorie des plaques

II.1. Introduction.....	26
II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM	26
II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	26
II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	27
II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	28
II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	31
II.4. Solutions exactes des plaques.....	34
II.5. Conclusion	35

Chapitre III: Aperçu sur la recherche bibliographique des différentes théories

III.1. Introduction	36
III.2. théories des plaques monocouches "ELS"	36
III.2.1. Modèle CPT	36
III.2.2. Modèle FSDT	39
III.2.3. Modèles HSDTs	40
III.2.3.1. Modèles basés sur une fonction polynomial.....	41
III.2.3.2. Modèles basés sur une fonction non- polynomiale	41
III.3. Conclusion	43

Chapitre IV: Formulation théoriques

IV.1. Introduction	44
IV.2. Cas d'une plaque quasi 3D	44
IV.2. 1.Cinématique et effort.....	45
IV.2. 2.Equations de mouvement.....	47
IV.2. 3.Solutions analytiques.....	51
IV.3. Cas d'une plaque sandwich	53
IV.4. Conclusion	55

Chapitre V: Résultats et discussion

V.1. Introduction	57
-------------------------	----

Table des matières

V.2. Analyse des résultats	57
V.2.1. Résultats et discussions relatives à l'étude des plaques FG	57
V.2.1.1. Résultats de la vibration libre	57
V.2.1.2. Résultats de l'analyse du flambage.....	61
V.2.2. Résultats et interprétations relatives à l'étude des panneaux sandwich.....	65
V.2.2.1. Résultats de la vibration libre	65
V.2.2.2. Résultats de l'analyse du flambage.....	69
V.3. Conclusion	74
Conclusion Générale et Perspectives.....	75
Référence bibliographiques	

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	07
Figure I.2: Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari 2011].....	08
Figure I.3: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1991].....	09
Figure I.4: Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM [Koizumi 1992].....	10
Figure I.5: Principe de la méthode coulage en bande [Lostec 1997].....	12
Figure I.6: Les principaux domaines d'application des FGM.....	15
Figure I.7: Schéma d'un sandwich.....	16
Figure I.8: différents matériaux de peau.....	17
Figure I.9: différents matériaux d'âme.....	18
Figure I.10 : sandwichs à âmes pleines.....	19
Figure I.11 : Différentes nature d'âme.....	19
Figure I.12 : Structure sandwich nid d'abeille.....	20
Figure I.13 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	21
Figure I.14 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	23
Figure I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	24
Figure I.16 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	25

Chapitre II

Figure II.1: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].....	27
Figure II.2: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].....	28
Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy 1997].....	29

Chapitre IV

Figure IV.1: La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel.....	44
Figure IV.2: La géométrie d'une plaque sandwich avec des peaux en FGM et un noyau homogène.....	53

Liste des figures

Chapitre V

Figure V.1: Effet de l'indice matériels p et rapport d'épaisseur a/h sur la fréquence naturelle ($\bar{\omega}$) des plaques carrées Al/Al ₂ O ₃	60
Figure V.2: Effet de l'indice matériel p et le rapport d'épaisseur a/h sur la charge critique de flambage ($\bar{N}_{cr}$) des plaques rectangulaires Al/Al ₂ O ₃ ($a/b = 0.5$).....	63
Figure V.3: Influence des charges axial sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des plaques FG (Al/Al ₂ O ₃) ($a/b = 0.5$, $a/h = 10$).	64
Figure V.4: Fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$) en fonction du rapport (b/h) de la plaques sandwich symétrique et non symétrique FG pour différentes valeurs de p : La plaque sandwich (a) (2-1-2) FG et (b) (2-1-1) FG.....	69
Figure V.5: Charge de flambage critique non dimensionnelle ($\bar{N}$) par rapport au quotient cote-épaisseur (b/h) des plaques sandwich (2-1-2) FG pour diverses valeurs de p : a) Plaque soumise à une charge compressive uniaxiale ($\gamma = 0$) et (b) Plaque Soumis à une charge de compression biaxiale ($\gamma = 1$).....	72
Figure V.6: Charge de flambage critique non dimensionnelle ($\bar{N}$) par rapport au quotient cote-épaisseur (b/h) des plaques sandwich (2-1-1) FG pour diverses valeurs de p : a) Plaque soumise à une charge compressive uniaxiale ($\gamma = 0$) et (b) Plaque Soumis à une charge de compression biaxiale ($\gamma = 1$).....	73

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	06
---	----

Tableau I.2: Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.....	11
---	----

Chapitre II

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisé dans les théories des plaques isotropes et FGM.....	33
---	----

Chapitre V

Tableau V.1 : <i>Propriétés des matériaux en métal et en céramique</i>	57
---	----

Tableau V.2 : <i>Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\beta}$) des plaques carrées Al/ZrO₂</i>	58
---	----

Tableau V.3: <i>Comparaison des trois premières fréquences non dimensionnelles ($\hat{\omega}$) des plaques carrées Al/Al₂O₃</i>	58
--	----

Tableau V.4: <i>les fréquences naturelles non-dimensionnels ($\Omega = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$) des plaques fonctionnellement graduée Al/Al₂O₃</i>	59
--	----

Tableau V.5: <i>Comparaison de la charge critique de flambage ($\bar{N}_{cr}$) des plaques Al/Al₂O₃</i>	61
---	----

Tableau V.6: <i>Les modèles de déplacement</i>	66
---	----

Tableau V.7: <i>Comparaisons des fréquences fondamentale naturels $\bar{\omega}$ pour la plaque sandwich simplement appuyée avec d'autres théories ($h/b=0.1, a=b$)</i>	66
--	----

Tableau V.8: <i>Comparaison des fréquences naturels $\bar{\omega}$ pour une plaque carrée FG sandwich simplement appuyée avec d'autres théories ($p=2, h/b=0.1$)</i>	67
---	----

Tableau V.9: <i>Comparaison de la charge critique de flambage non-dimensionnelle $\bar{N}$ des plaques carrées FG soumis à une charge de compression uniaxial ($\gamma=0, h/b=0.1$)</i>	70
--	----

Tableau V.10: <i>La comparaison de la charge critique de flambage non-dimensionnelle $\bar{N}$ des plaques carrées FG soumis à une charge de compression biaxial ($\gamma=1, h/b=0.1$)</i>	71
---	----

Liste des notations

t_f	Epaisseur des peaux
t_c	L'épaisseur de l'âme
t_f/t_c	Rapport d'épaisseur
d/t_f	Classe des sandwichs
$V(z)$	Fraction volumique
h	L'épaisseur de la plaque
p	L'indice de la puissance (la loi de puissance)
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	La masse volumique
E_m	Module Young (Métal)
E_c	Module Young (céramique)
a	La largeur de la plaque
b	La longueur de la plaque
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Les composants des déformations
i, j	Nombre naturelle
ν	Coefficient de poissant
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
(u_0, v_0, w_0)	Les déplacements au niveau du plan moyen (z=0)
$\phi_x, \int \theta(x, y, t) dx$	Rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe y
$\phi_y, \int \theta(x, y, t) dy$	Rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe x
$f(z)$	La fonction de forme (fonction de cisaillement)
P_c	modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux céramiques
P_m	modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux métalliques

Liste des notations

p	l'indice matériel
$\int$	Intégrale indéterminée
$g(z)$	La première dérivée de la fonction de forme
k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
δ	Variation
U	L'énergie de déformation
K	L'énergie cinétique de la plaque
V	la variation du travail externe
$\partial/\partial x$	Dérivée partielle par rapport à x
$\partial/\partial y$	Dérivée partielle par rapport à y
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
α	Nombre d'onde selon x
β	Nombre d'onde selon y
C_{ij}	Les coefficients de rigidité
A	la surface supérieure de la plaque
$(\ddot{\cdot})$	La dérivée seconde par rapport au temps
N	Composant de l'effort normal
M	Composant de moment fléchissant
S, Q	Les efforts d'ordre élevé
ε	Vecteur de déformation
k^b	Vecteur de courbure
k^s	Vecteur de rotation normal
γ^0, γ^1	Vecteur d'ordre élevé
i, j	Nombre naturelle
(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)	Sont des charges appliquées dans le plan
$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st})$	composants de moment d'inertie
$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s)$	composants de rigidité
$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s)$ et $(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s)$	composants de rigidité

Liste des notations

(L, L^a, R, R^a)	composants de rigidité (qausi-3d)
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentiels
$\sum$	La somme
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$	Les paramètres arbitraires
ω	Fréquence naturelle
$[K]$	La matrice de rigidité
$[M]$	La matrice de masse
γ	Paramètre de charge non dimensionnel
$ $	Déterminant
$V^{(n)}$	La fraction de volume de la n-ième couche

Les matériaux composites avancés, appelés aussi matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ainsi que les structures en sandwich sont une nouvelle classe de structures composites qui présentent un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables (désirables) pour des applications spécifiques.

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont considérés comme une nouvelle classe de matériau composite hétérogène dans lequel les propriétés varient progressivement sur une ou plusieurs directions. Ce matériau est fabriqué à partir du mélange de deux ou plusieurs matériaux en considérant un certain taux de volume. Les caractéristiques des matériaux de FGM varient selon la taille du matériau par le biais d'une fonction. Un tel matériel a été proposé, développé et utilisé avec succès dans des applications industrielles depuis les années 1980 [Koizumi 1993]. Les structures composites conventionnelles telles que des fibres en matière plastique renforcée (FRP) souffrent d'une discontinuité des caractéristiques des matériaux à l'interface des nappes et des constituants. Par conséquent, les champs de contraintes dans ces régions induisent des problèmes d'interface et des contraintes thermiques dans des environnements à haute température. En outre, une grande déformation plastique de l'interface peut déclencher l'initiation et la propagation de fissures dans le matériau [Vel et al 2004]. Ces problèmes peuvent être réduits en modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs et en adaptant le matériau pour l'application souhaitée.

De grandes applications de structures fonctionnellement classées (FG) ont encouragé le développement de diverses théories des plaques pour étudier avec précision leurs comportements de flexion, de stabilité et de vibration. Ils sont généralement suivis: la théorie classique des plaques (CPT) néglige les influences transversales de la déformation du cisaillement [Feldman et al 1997], [Javaheri et al 2002], [Mahdavian 2009] et [Mohammadi et al 2010], théorie de la déformation du premier ordre de cisaillement (FSDT) avec distribution linéaire des déplacements [Mohammadi et al 2010], [Hosseini-Hashemi et al 2011], [Meksi et al 2015], [Bellifa et al 2016] et [Bouderba et al 2016] et [Boukhari et al. 2016] [Bourada et al. 2016] [Bellifa et al. 2017] [Zidi et al. 2017] [Besseghier et al. 2017], la théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur (HSDT) avec des variations non linéaires des déplacements dans l'épaisseur de la plaque telle que la théorie de la plaque de déformation du cisaillement de troisième ordre (TSDT), théorie des plaques de déformation du cisaillement sinusoïdal (SSDT), théorie de la plaque déformable à cisaillement hyperbolique (HDT), Théories quasi-3D en tenant compte de l'influence d'étirement normal

[Jha et al 2013], [Akavci et al 2015], [Kar et al 2015], [Swaminathan et al 2014], [Belabed et al 2014], [Houari et al 2016] et [Rahmani et al 2017]. Quelle que soit la pratique, certaines de ces théories sont des coûts de calcul en raison du nombre de variables supplémentaires incluses dans le modèle [Jha et al 2013], [Reddy 2011] et [Neves et al. 2012a b] En conséquence, un simple quasi-3D HSDT proposé dans ce travail est nécessaire.

De leur côté, Les structures en sandwich sont largement utilisées dans les domaines de l'aérospatiale, de la marine, de la construction, du transport, et les systèmes d'énergie éolienne en raison de leurs caractéristiques mécaniques exceptionnelles [Tian et al 2016]. Bien que les structures sandwich offre des avantages par rapport aux autres types de structures, la variation brusque de caractéristiques du matériau à l'intérieur des interfaces entre les feuilles de surface et le noyau peut conduire à des contraintes élevées interlaminaires, résultant souvent de la délamination, ce qui constitue un grand problème dans les structures sandwich classiques. Une façon de surmonter ce problème est l'utilisation de matériel à gradation fonctionnelle (FGM). FGM présente un matériau composite non homogène où les caractéristiques du matériau sont progressivement modifiées d'une surface de la structure à l'autre, Ce qui conduit à éliminer les variations brutes de propriétés mécaniques indiquées ci-dessus [Koizumi 1997], [Birman et al 2013] et [Swaminathan et al 2015].

Un certain nombre d'applications de structures à gradient fonctionnel (FG) ont conduit au développement de différents modèles de plaques / faisceaux afin d'examiner avec précision leurs réponses de flexion, de stabilité et de vibration. Ces théories peuvent généralement être présentées par: théorie classique des plaques (CPT) négligeant les effets de la déformation du cisaillement transversal [Feldman et al 1997] et [Mahdavian 2009], théorie de la déformation du premier ordre de cisaillement (FSDT) avec distribution linéaire des déplacements [Reddy 1998], [Hosseini-Hashemi et al 2011] [Meksi et al 2015] et Bellifa et al 2016], théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre supérieur (HSDT) avec des variations non linéaires des déplacements dans l'épaisseur de la structure telles que la théorie de déformation du cisaillement de troisième ordre (TSDT), théorie des plaques de déformation du cisaillement sinusoïdal (SSDT) cisaillement hyperbolique théorie de la plaque déformable (HDT) [Reddy 2000], [Jha et al 2013], [Reddy 2011], [El Meiche et al 2011], [Tounsi et al 2013], [Mahi et al 2015] et [Tounsi et al 2016], théories quasi-3D en tenant compte de l'effet de l'étirement normal [Wu et al 2011], [Hebali et al 2014], [Bourada et al 2015] et [Akavci 2016]. En outre, du fait de lisser les distributions de caractéristiques du matériau, des plaques sandwich FG ont récemment été proposées pour surmonter les problèmes d'interface entre les faces et les noyaux trouvés dans les structures sandwich conventionnelles. De nombreux modèles de

plaques ont été utilisés pour prédire les comportements des plaques sandwich FG: comportement statique [Hamidi et al 2015], comportement de vibration et de flambage [Sobhy 2013], [Ait Amar Meziane et al 2014] [Bennoun et al 2016].

La présente thèse traite deux volets ; le premier vise à développer un simple HSDT quasi-3D pour une analyse des vibrations et du flambement des plaques FG. En prenant une autre hypothèse sur le HSDT quasi-3D existant, la théorie proposée ne contient que quatre inconnus et ses équations gouvernantes sont donc réduites. Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement et les solutions analytiques de Navier pour les plaques simplement appuyées sont comparées aux solutions existantes pour vérifier la validité de la théorie simple proposée. Les propriétés du matériau sont modifiées en continu dans l'épaisseur de la plaque par la forme de la loi de puissance. Des résultats numériques permettent d'examiner les influences de l'indice de gradient et du rapport cote-épaisseur sur la charge critique de flambement et les fréquences naturelles.

Or le deuxième a pour objectif de proposer encore une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour les analyses de vibration et de flambage des plaques sandwich FG. La théorie actuelle diffère d'autres HSDT parce que, dans la théorie proposée, le champ de déplacement utilise des termes intégrés indéterminés et ne contient que quatre variables qui ne sont pas considérées par les autres articles. Les équations de mouvement dérivées ici sont résolues pour les plaques sandwich avec des faces FG. Des solutions sont obtenues pour prédire les charges critiques de flambage et les fréquences naturelles des plaques sandwich FG simplement supportées. Des études de comparaison sont effectuées pour vérifier la validité des résultats actuels.

Notre thèse est composée de cinq chapitres structurés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

L'élaboration de divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques et coques FGM a été systématiquement examinée et discutée dans le deuxième chapitre. Basé sur les modèles ELS, la théorie d'élasticité 3D et la formulation unifiée et un grand nombre de modèles de

calcul ont été proposés pour prédire la réponse de comportement des plaques et coques en FGM sous charges mécaniques et thermiques.

Dans le troisième chapitre, on a étalé les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Dans le quatrième chapitre, nous avons proposé deux solutions générales; la première s'intéresse au comportement des plaques à gradient fonctionnel en analysant la déformation par cisaillement quasi-3D (HSDT quasi-3D) ainsi que les influences d'élasticité par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans l'épaisseur. La deuxième présente une nouvelle théorie de déformation par cisaillement (HSDT) qui est développée pour étudier la vibration et le flambage des plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG).

Le cinquième et dernier chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques des études analytiques présentées dans le quatrième chapitre. En premier lieu, nous nous intéressons aux résultats numériques et leurs interprétations concernant le volet relatif à l'étude de l'analyse libre des vibrations et du flambement des plaques FG. Puis plus loin, nous nous focalisons sur la présentation et commentaires des résultats obtenus relatives à la détermination des fréquences naturelles et les charges critiques de flambage de plaques sandwich FG simplement soutenues.

Enfin, ce manuscrit se termine par une conclusion générale permettant de mettre l'accent sur les différents résultats originaux de ce travail et des perspectives décrivant des voies d'amélioration à poursuivre.

La présente thèse se clôture en fin par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1.Introduction :

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...), ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes inter-faciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [Navid Saeedi 2012].

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Materials «FGM») dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [Baron et al. 2008].

I.2.Concept des matériaux FGM :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials :FGM) fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales [Niino et al. 1988]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou dis-continuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [Kawasaki et al. 1997]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc.

Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini et al. 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

. Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique- métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

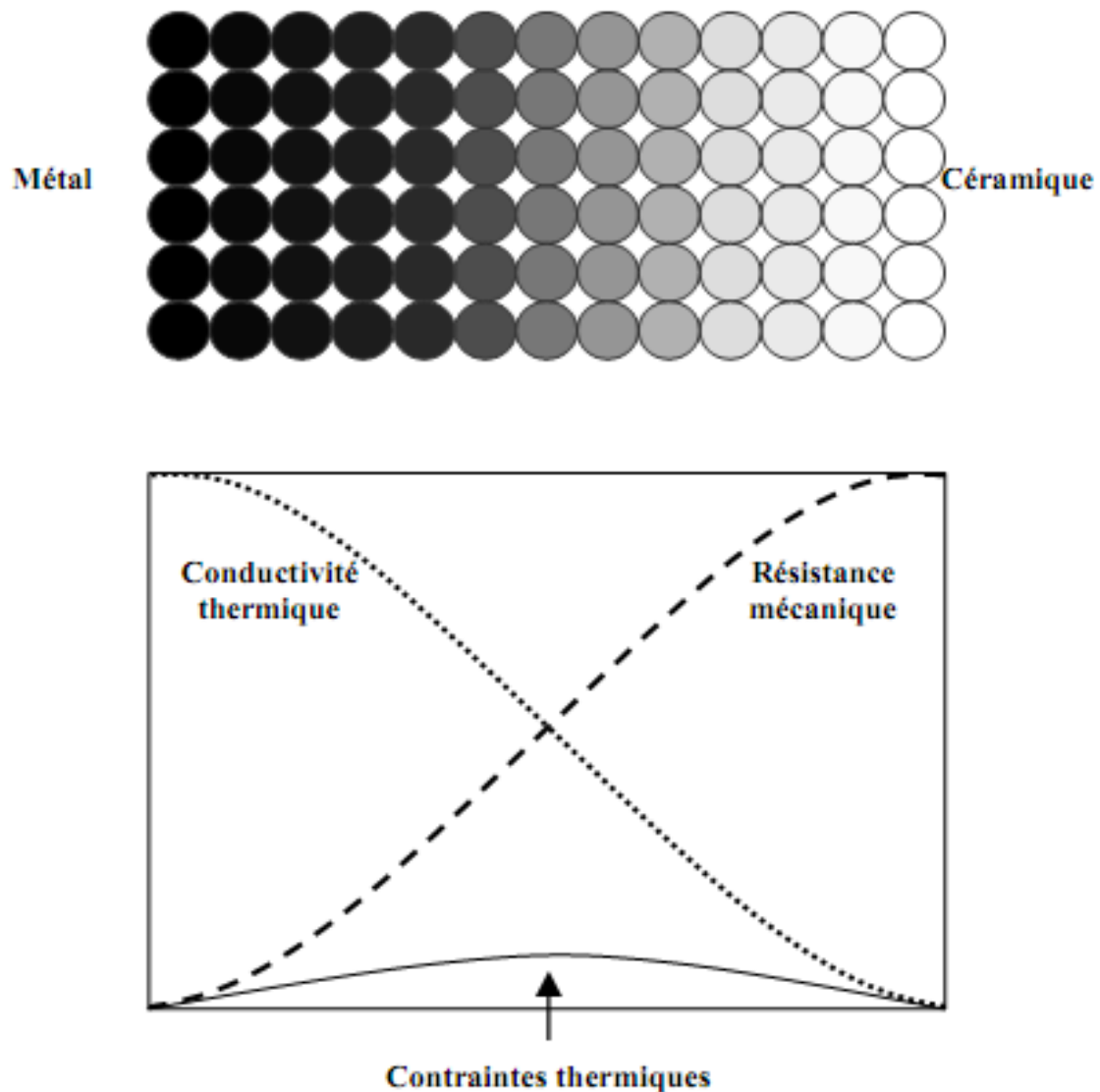


Figure I.1 : *Concept des matériaux à gradient de propriétés.*

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Elle montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

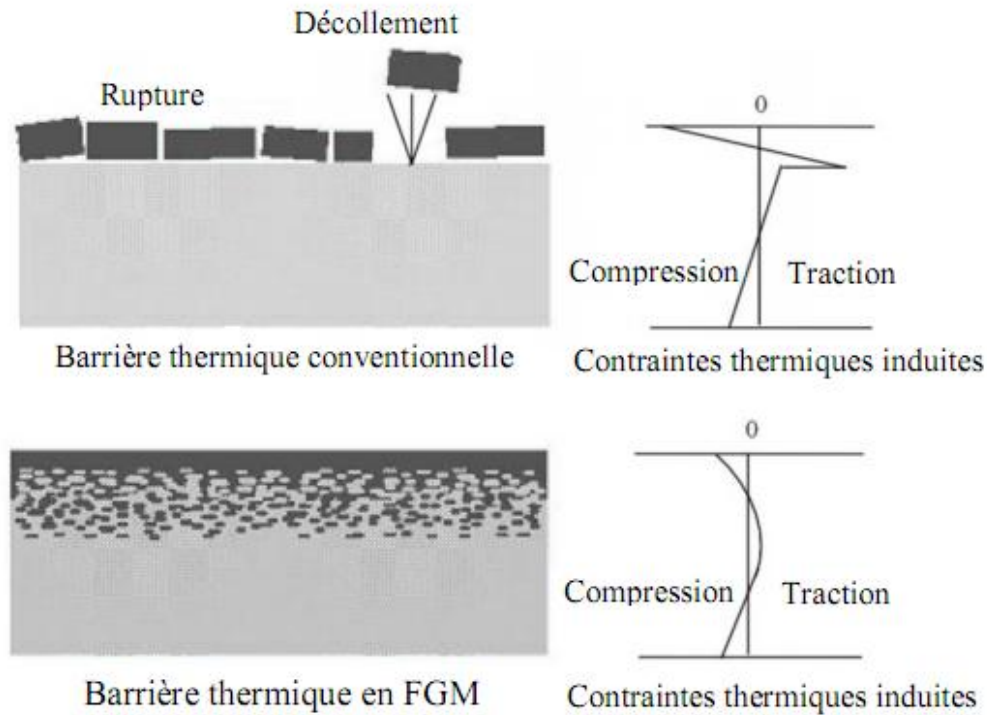


Figure I.2: Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari 2011].

I.3. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels:

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3

Propriétés	1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique		
Structure	Eléments constitutants: Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.3: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1991].

I.4. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés:

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivit par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [Koizumi 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [Nguyen et al. 2007].

En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C [Koizumi 1997].

En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura 1991].

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques....etc. [Okamura 1991].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [Kieback et al. 2003].

A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie.

La figure I.4 montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.

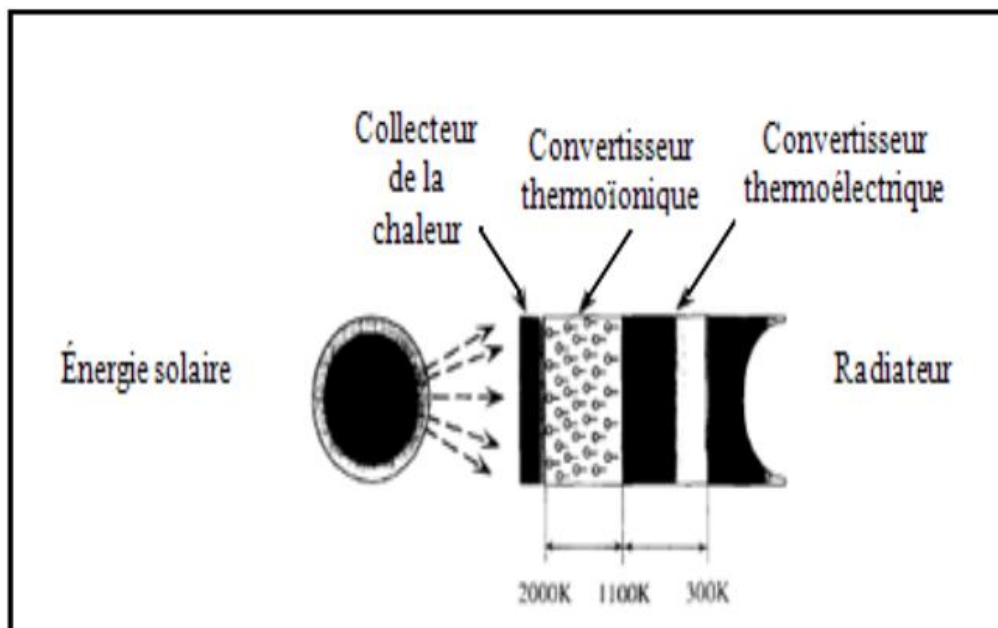


Figure I.4: Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM [Koizumi 1992].

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.2 :

Tableau I.2: Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

Année	Progrès de recherche de FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) à Köln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	étude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95), (Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.5.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.5), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

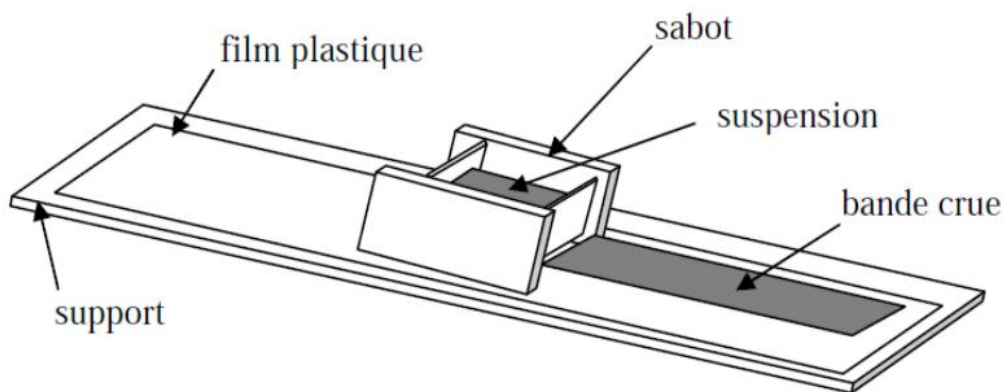


Figure I.5: Principe de la méthode coulage en bande [Lostec 1997].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch 1986].

I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise".

- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya et al. 1992]).

- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.5.3. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliant âge. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop et al. 1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.5.4. Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens et al. 1990].

I.5.5. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi et al. 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.6. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.6. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

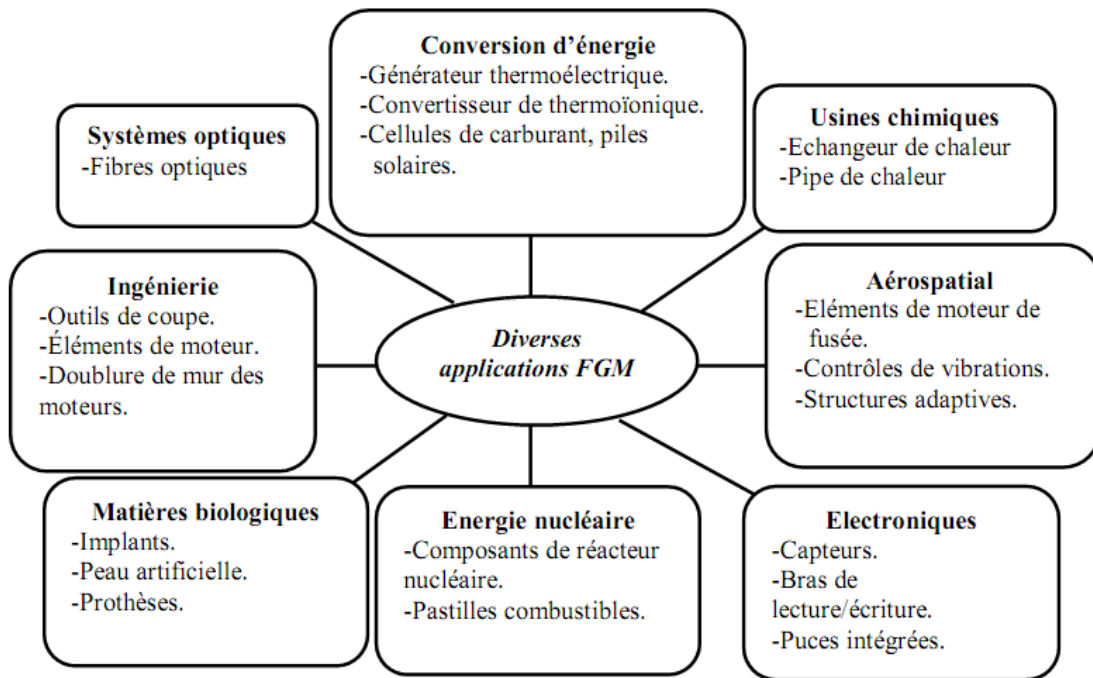


Figure I.6: Les principaux domaines d'application des FGM.

I.7. Aperçu sur les matériaux sandwichs :

I.7.1.Définition d'un matériau sandwich :

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux, figure I.7, et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de

chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f/t_c est compris entre 0,1 et 0,01, où t_c étant l'épaisseur de l'âme. On peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f , où d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux. Pour un sandwich symétrique, peaux de même épaisseur.

$$d = t_c + t_f \quad (\text{I-1})$$

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante:

- Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;
- Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

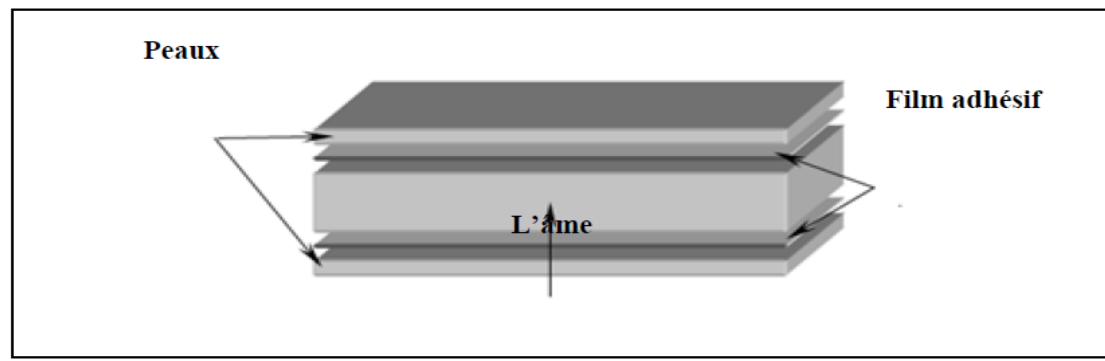


Figure I.7: Schéma d'un sandwich.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwichs possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions.

I.7.2. Les éléments constituant les matériaux sandwichs :

Un matériau sandwich est composé d'au moins d'une âme deux peaux et l'interface d'assemblage.

I.7.2.1. Les peaux :

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite, figure I.8. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

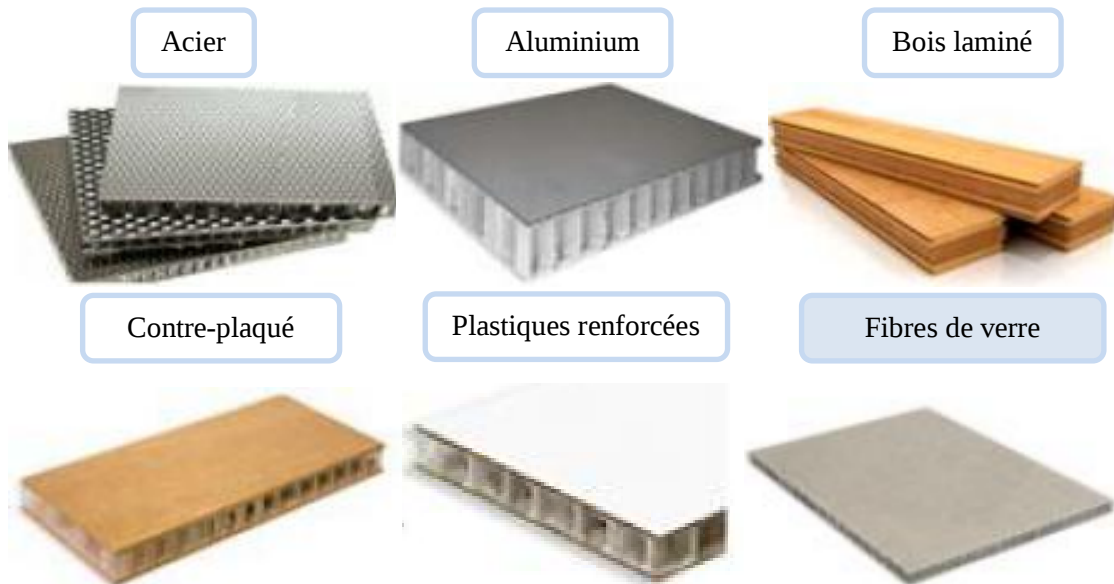


Figure I.8: différents matériaux de peau.

I.7.2.2. L'âme:

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. Son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement, figure I.9. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- **Mousses :**

Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques.

- **Balsa :**

Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.

• Nid d'abeille :

Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida 'nid d'abeille ' par expansion.

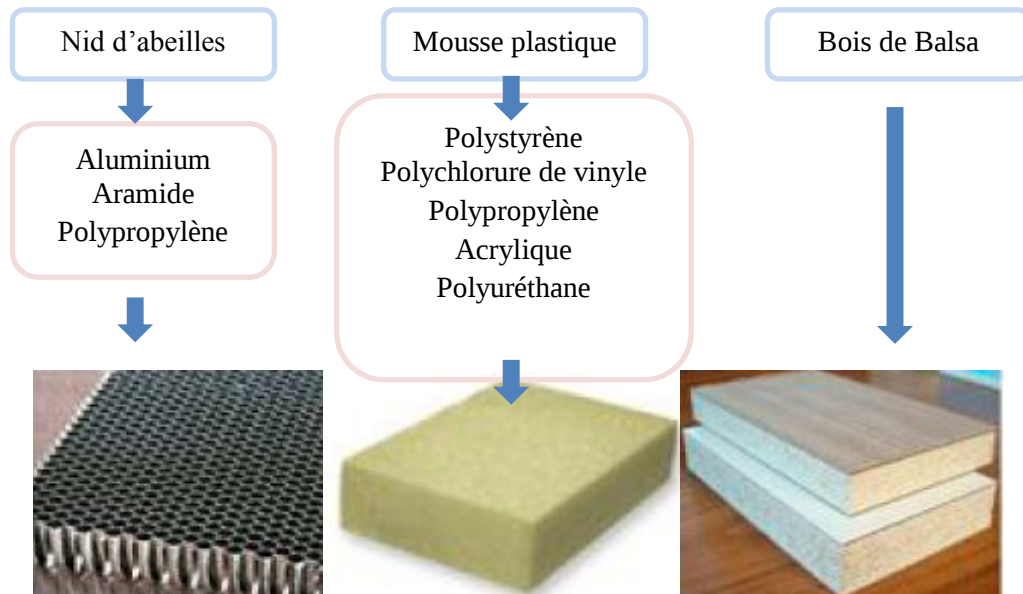


Figure I.9: différents matériaux d'âme.

Les matériaux d'âme les plus utilisés se présentent principalement sous deux formes :

a) Les âmes pleines :

Les âmes le plus couramment utilisées sont :

- Le balsa ou bois cellulaire (Figure.I.10 a)
- Diverses mousses cellulaires (Figure.I.10 b)

Des résines chargées de microsphères creuses de verre appelés mousses syntactiques.

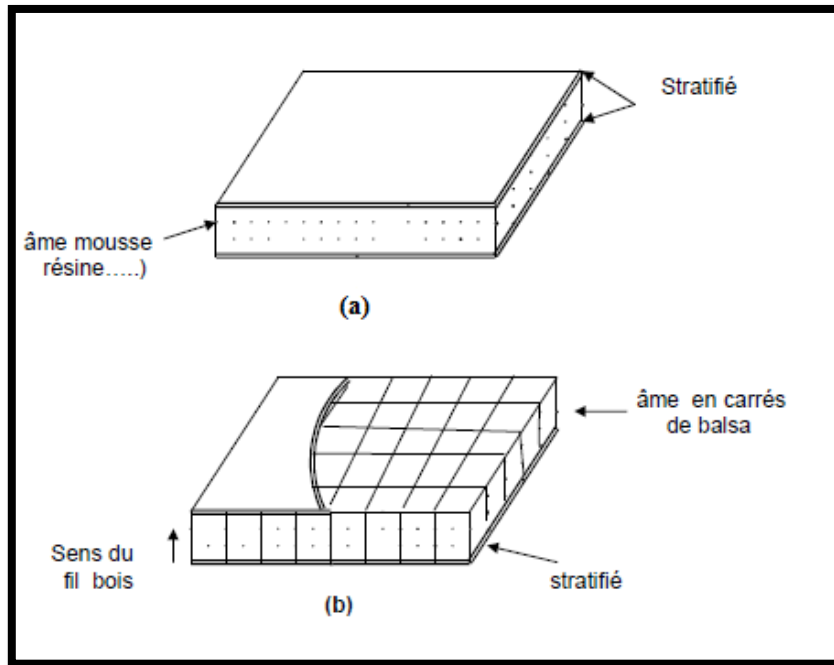


Figure I.10 : sandwichs à âmes pleines.

b) Les âmes creuses :

Elles se présentent essentiellement en nid d'abeille (Figure.I.11) elles sont :

- Des alliages métalliques légers
- Des papiers kraft
- Du papier polyamide, type papier Nomex

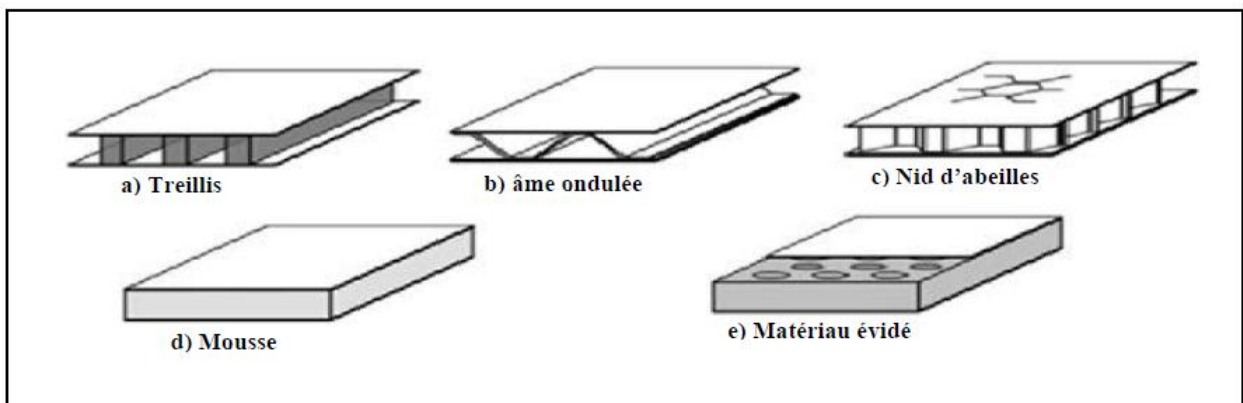


Figure I.11 : Différentes nature d'âme.

I.7.2.3. L'interface:

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

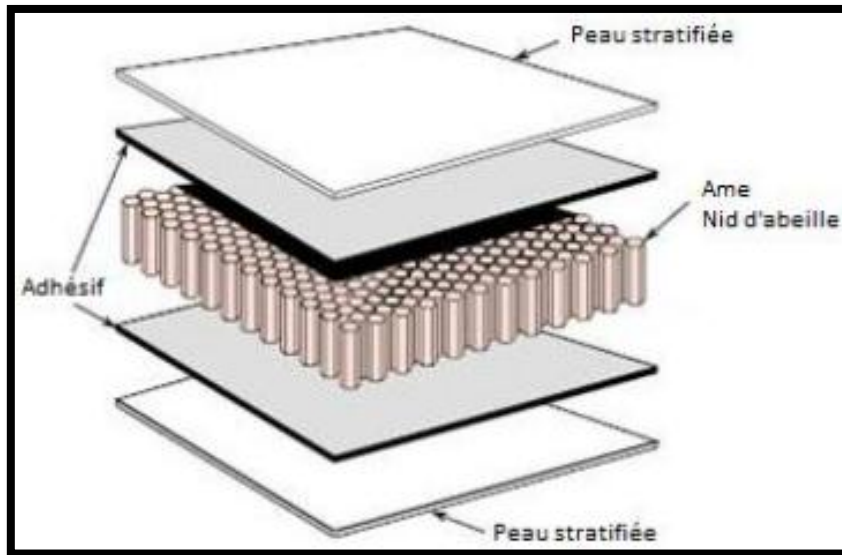


Figure I.12 : *Structure sandwich nid d'abeille.*

I.7.3. Domaines d'applications des matériaux sandwichs :

Les panneaux sandwichs sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

I.7.3.1. Construction aérospatiale :

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwichs et par cocuisson de stratifiés composites (carbone/époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone/époxyde collés sur des âmes en nida aluminium. Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwichs dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithique ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida .

Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/époxyde et l'âme en nida nomex.

I.7.3.2. Construction automobile et ferroviaire :

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex.

I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

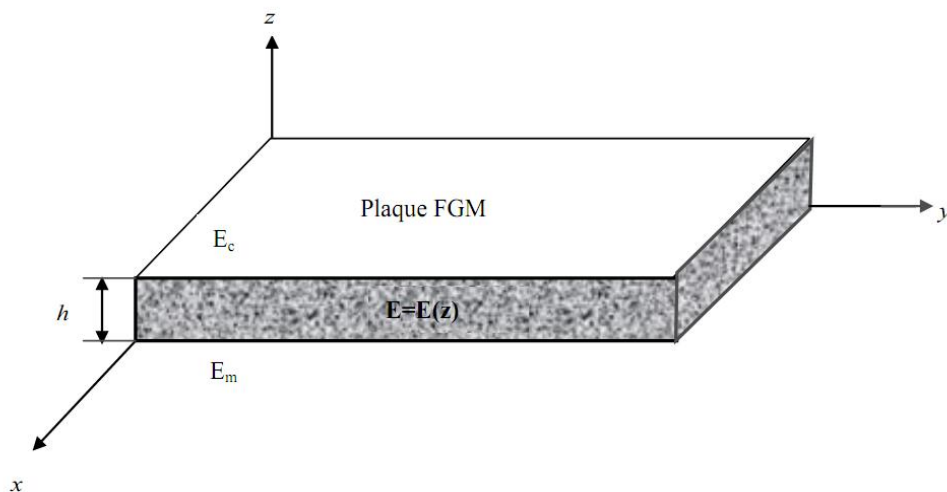


Figure I.13 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit: $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I-2)$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et al. 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I-3)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.14, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

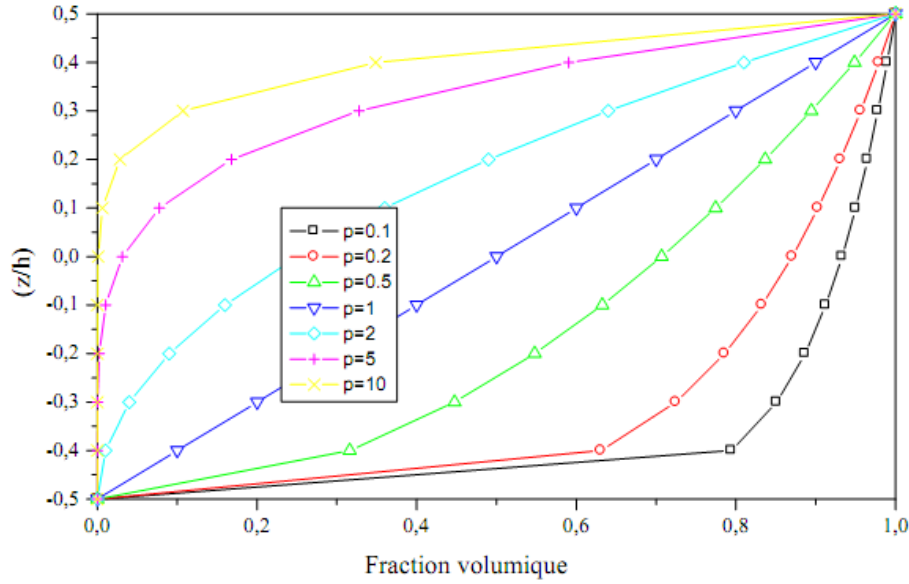


Figure I.14 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao, 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Shyang-ho et al. 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-4a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-4b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-5a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-5b})$$

La figure I.15 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (5a) et (5b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

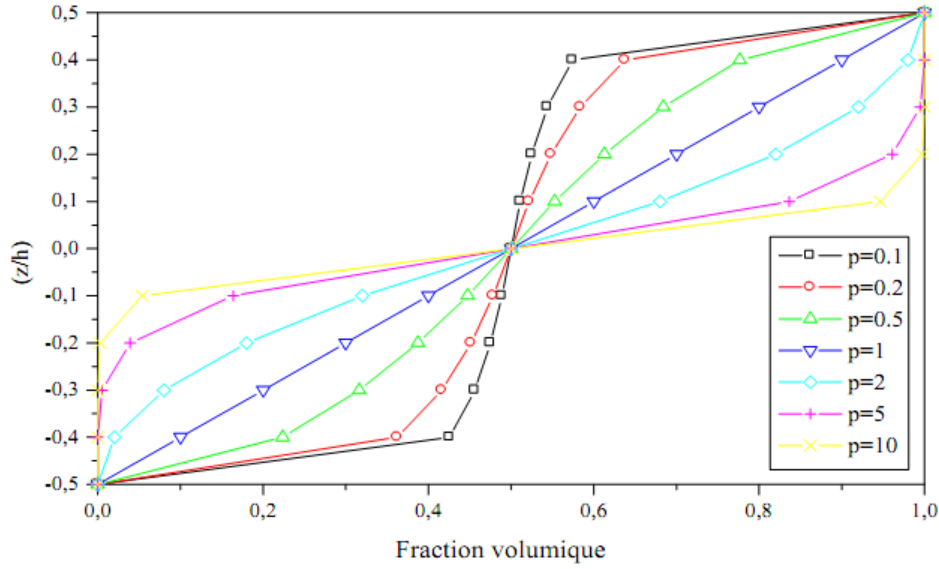


Figure I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.8.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale et al. 1983] :

$$E(z) = E_c e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I-6a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_m}{E_c} \right) \quad (\text{I-6b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.16.

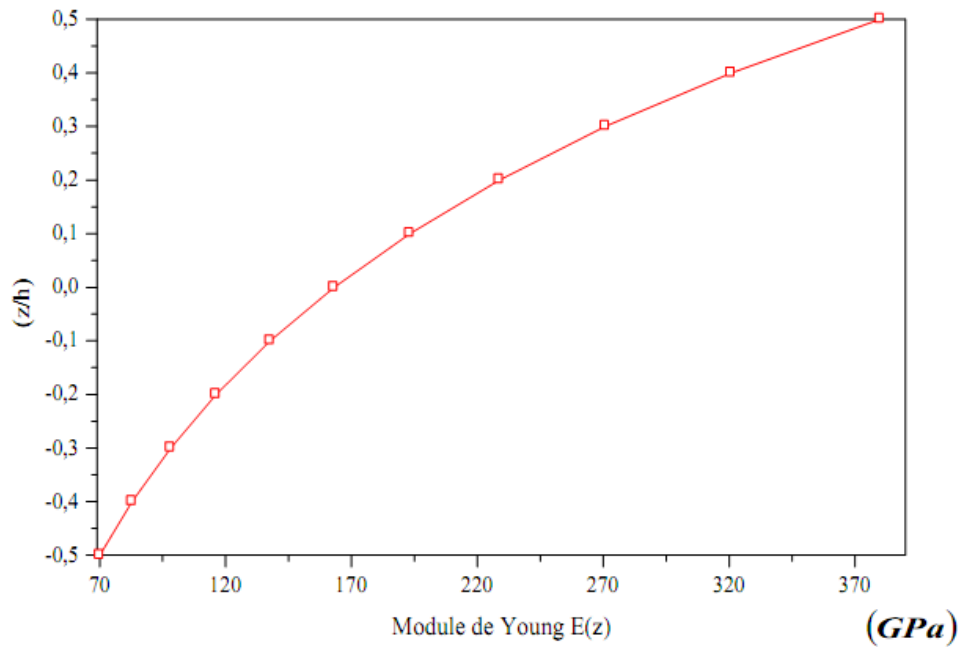


Figure I.16 : Variation du module de Young dans une plaque E -FGM.

I.9.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Un bref aperçu sur les panneaux sandwich est présenté, leur définition, les éléments constitutifs, leur domaine d'application.

En fin les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

Chapitre II

Théorie des plaques

II.1. Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de [Timoshenko 1921] et [Reissner 1945]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT), est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes (figure II.1) :

Hypothèse 1 : Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

Hypothèse 2: La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes.

Hypothèse 3: Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko 1959], [Reddy 1997], [Reddy 1999], En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

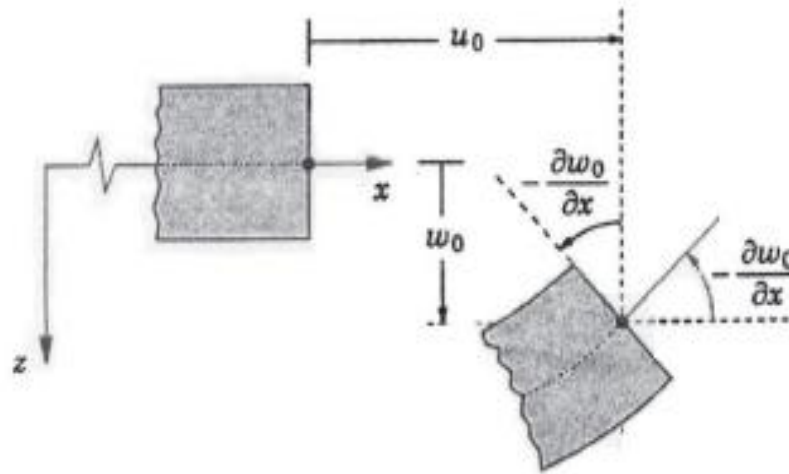


Figure II.1: Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner 1945],

[Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko 1959], [Reddy 1997], [Reddy 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement $\phi_x = -\partial w_0 / \partial x$; $\phi_y = -\partial w_0 / \partial y$.

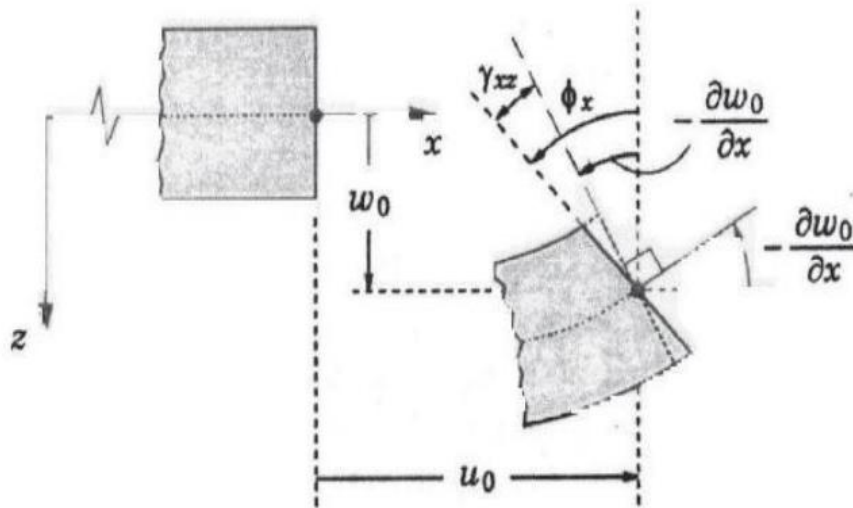


Figure II.2: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la

déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand et al 1949], [Naghdi 1957], [Reissner 1975], [Reddy 1984], et [Kant 2002]. Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

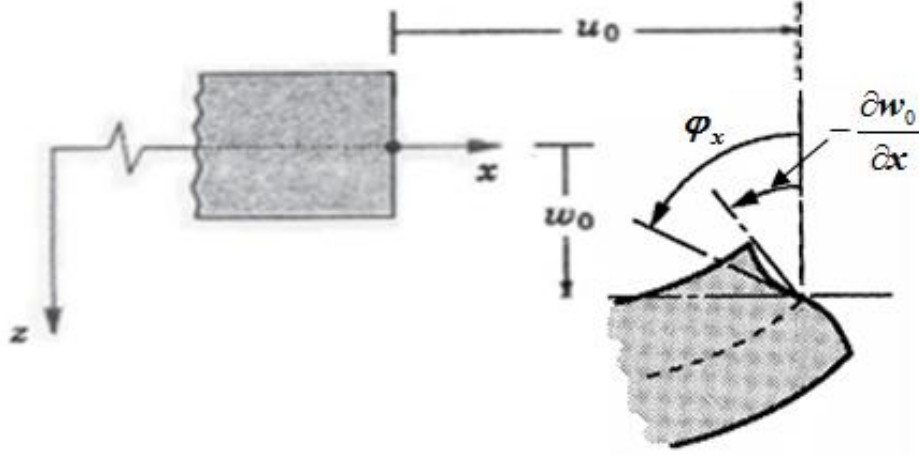


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\varphi_x = -\partial w_0 / \partial x + \phi_x, \varphi_y = -\partial w_0 / \partial y + \phi_y)$, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [Reddy 1997], [Reddy 1999] sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al.

[Pindera 1994] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane et al 2010] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh(\pi z/h)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [Whitney 1973] ; [Nelson et al 1974] ; [Lo et al 1977]; [Touratier 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner [Reissner 1945] avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy 1981] et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant [Reddy 1984]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [Kant et al 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est

donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier 1991]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{(2n+1)}$$

$$= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad (\text{II.11})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Polit et al 1997] et [Dau et al 2006].

Récemment, [Afaq 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.12})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de [Touratier 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes. Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT.Kirchoff [Kirchoff 1850a] et [Kirchoff 1850b]	Théorie classique des plaques	0			Plaques minces
FSDT Midlin [Midlin 1951]	Théorie de déformation des plques du 1er ordre	z	constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [Ambartsumian, 1958]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratiques	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [Reissner, 1975]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama et al. [Karama et al 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Reddy [Reddy 1984]	Tféorie de deformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [Aydogd 2003]	Théorie de déformation	$z\alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et

	exponentielle des plaques				épaisses
Elmeiche, Tounsi et al [Elmeiche et al 2011]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{(h/\pi)\sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2-1)}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aite atmane et al [Aite atmane et al 2010]	Théorie raffinée des plaques	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]}z - \frac{(h/\pi)\sinh(\pi z/h)}{[\cosh(\pi/2)-1]}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [Shimpi 2002]	Théorie raffinée des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

II.4. Solutions exactes des plaques:

Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisque'elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels". Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisque'elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels".

Les premières solutions exactes furent données pour des plaques en flexion cylindrique composées de matériaux isotropes. Ainsi en 1877 [Lévy 1877] donne une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion cylindrique. Pour les cas limités aux plaques multicouches rectangulaires simplement appuyées dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque, [Pagano 1969,1970] présente une solution pour le cas statique [Srinivas et al. 1970]. Ces solutions font partie des solutions les plus connues et les plus employées encore à ce jour dans la littérature. Par la suite une autre méthode permettant

de simuler la flexion des plaques orthotropes avec un empilement de couches symétriques a été présentée par [Reddy et al. 1991] pour le cas statique [Noor et al. 1992] pour le cas dynamique. Pour ces modèles basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, aucune approximation n'est effectuée pour l'estimation de la distribution des contraintes et des déformations.

II.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a étalé les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Une revue des modèles analytiques des plaques FGM est présentée tels que, La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), celle de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ; de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) d'une part. En fin, les Solutions exactes des plaques sont exposées.

Chapitre III

Aperçu sur la recherche bibliographique des différentes théories

III.1. Introduction :

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans l'aérospatiale, la mécanique, le génie civil, le nucléaire et l'automobile en raison de leurs fonctionnalités exceptionnelles telles qu'un ratio élevé de la rigidité et de la résistance de la masse et le faible coût de maintenance. Ces matériaux composites stratifiés classiques présentent une disparité des propriétés mécaniques d'une interface à l'autre en raison de l'agrégation de deux matériaux distincts. En conséquence, la concentration des contraintes se produit habituellement à l'interface. Cela peut conduire à un dommage sous la forme d'une délamination, (à se cisailer dans son épaisseur longitudinalement). Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) ont donc été proposés afin de surmonter ces problèmes. Le FGM est le matériau composite avancé qui est constitué de deux ou plusieurs phases constituantes avec une variation continue des propriétés du matériau d'une surface à une autre, et donc éliminer les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés classiques.

L'objectif de ce chapitre est de fournir un examen de la documentation des théories existantes pour la modélisation et l'analyse des plaques FGM mettant l'accent principal sur les modèles ESL comme les théories CPT, HSDTs TSDT FSDT, les théories simplifiées et les théories mixtes. En outre, un examen détaillé de la documentation se rapportant à l'élaboration de solutions d'élasticité en 3D et une formulation unifiée est également signalée.

III.2. théories des plaques monocouches ‘‘ELS’’ :

III.2.1. Modèle CPT :

La théorie classique des plaques CPT est fondée sur l'hypothèse de Love-Kirchhoff que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au panier intermédiaire après déformation. Ces hypothèses impliquent la disparition du cisaillement et les souches normales, et par conséquent, négligent les effets de déformation de cisaillement. La CPT est le plus simple modèle des théories ESL et il ne convient qu'aux plaques FGM minces où le cisaillement et la déformation normale des effets sont négligeables.

[Feldman et al. 1997] ont étudié le flambement élastique de FGM plaques sous chargement en compression uniaxiale en utilisant une combinaison d'approches structurelles et micromécaniques. Les équations dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues pour la charge de flambement des plaques FGM avec différentes conditions aux limites. [Javaheri et

al. 2002a, 2002b] ont employé la CPT pour vérifier le flambement des plaques FGM et leur comportement dans le cadre de quatre types de charges thermiques [Javaheri et al. 2002a] et charges de compression [Javaheri et al. 2002b]. Basés sur le CPT, [Kiani et al. 2011] ont présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous trois différents types de charges thermiques. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode des éléments finis au lieu des solutions de Navier dans leurs travaux [Javaheri et al. 2002a].

La charge-déformation non linéaire et les réponses de l'après flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique dans le plan et les charges transversales ont été étudiées par [Yanga et al. 2003] en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. [Ghannadpour et al. 2009] ont également utilisé la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier les réponses non linéaires de pression transversale des plaques FGM. Toutefois, ils ont utilisé le principe du minimum d'énergie potentielle pour obtenir les solutions analytiques des plaques avec appui simple.

[Woo et al. 2006] ont étudié la vibration non linéaire de plaques FGM dans un environnement thermique. Les équations non linéaires dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman étaient résolues pour les plaques FGM avec des conditions limites arbitraires à l'aide d'une série de méthodes. [Hu et al. 2011] ont également adopté la CPT avec les hypothèses de Von Karman pour effectuer des analyses de stabilité et de vibrations des plaques FGM sous excitation dans le plan. La vibration libre des plaques FGM avec différentes conditions aux limites reposant sur une fondation élastique a été étudiée par [Chakraverty et al. 2014] à l'aide de la CPT et de la méthode de Rayleigh-Ritz.

Les vibrations non linéaires forcées des coques doublement courbées peu profondes ont été étudiées par [Alijani et al. 2011] à l'aide de la CPT avec les hypothèses de Von Karman et la discrétisation Galerkin multi-modal. [Du et al. 2014] ont étudié la vibration non linéaire de coques cylindriques FGM sous excitation basée sur la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode multi échelle. [Du et al. 2013] ont étudié la vibration non linéaire et leur réponse pour les coques tubulaires en FGM dans les environnements thermiques qui suit une approche similaire. [Ebrahimi et al. 2014] ont étudié la vibration libre des coques cylindriques en utilisant la CPT en conjonction avec la quadrature de différentielle généralisée et les méthodes en quadrature intégrale généralisée.

Les deux prés flambement non linéaires de déformation et imperfections géométriques initiaux ont été inclus dans l'analyse post flambement à l'aide d'une théorie des couches limites du flambement. Le chemin d'équilibre post flambement et la charge de flambement ou de la température ont été déterminées en utilisant une technique de perturbation singulière. [Woo et al. 2003] ont enquêté sur le comportement post flambement de plaques FGM et des coques cylindriques peu profondes sous charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT et les hypothèses de Von Karman. Des solutions analytiques ont été obtenues à l'aide d'une de série solutions mixtes.

[Woo et al. 2001] ont étudié la flexion non linéaire de plaques FGM minces sous charges transversales et un chargement thermique. Les équations dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman étaient analytiquement résolues pour la flexion, et le moment de flexion d'une plaque FGM simplement appuyée en utilisant la méthode des séries de Fourier. [Nguyen et al. 2013a], [Nguyen et al. 2014a] et [Nguyen et al. 2014b] à l'aide de la CPT et le technique de raidisseur enduite de Lekhnitsky. [Nguyen et al. 2012], [Nguyen et al. 2013b] ont effectué l'analyse dynamique non linéaire de l'imperfection des plaques minces en FGM doublement courbées reposant sur une fondation élastique soumises aux charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman.

Il est intéressant de noter que le couplage étirement- flexion existe en plaques FGM du à la variation des propriétés du matériau à travers l'épaisseur. Par conséquent, la surface neutre de la plaque FGM ne coïncide pas avec son milieu. Ce couplage pourrait être éliminé si les équations ont été calculées en se fondant sur la surface neutre. Ces observations ont été confirmées par [Zhang et al. 2015] En reformulant la CPT pour plaques FGM basée sur la surface neutre et par conséquent, obtenir les équations de mouvement sous forme de plaques isotropes. La surface neutre basée sur la CPT a été adoptée par [Bodaghi et al. 2011] Pour étudier le flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous compression non uniforme.

Depuis le couplage de flexion et d'étirement produit les déflexions transversales et les moments de flexion lorsqu'une plaque FGM est soumise à des charges en compression dans le plan. Par conséquent, le flambement de type bifurcation ne se produira pas. Les conditions pour le flambement de type bifurcation prévues par l'action de charges de compression dans le plan ont été examinées par [Aydogdu 2008]. Il est observé que le flambement de type bifurcation survient lorsque la plaque est complètement serrée. Pour une plaque à bords

mobiles, là, le flambement de type bifurcation survient lorsque les charges dans le plan sont appliquées à la surface neutre [Aydogdu 2008].

III.2.2. Modèle FSDT :

La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT a été développée par [Mindlin 1951] pour l'effet de déformation de cisaillement par l'intermédiaire d'une variation linéaire de déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Il est à noter que la théorie développée par [Reissner 1945], [Reissner 1947] présente elle aussi l'effet de déformation de cisaillement. Toutefois, les deux théories ne sont pas similaires (Reissner avec la théorie de Mindlin). La différence majeure entre les deux théories a été établie par [Wang et al. 2001] En dérivant les relations de la flexion entre Mindlin et Reissner pour les problèmes généraux des plaques. Depuis la théorie de Reissner est fondée sur l'hypothèse d'une distribution de contraintes de déformation linéaire et une distribution de contrainte de cisaillement parabolique, sa formulation conduira inévitablement à la variation cylindrique n'étant pas nécessairement linéaire à travers l'épaisseur de la plaque [Wang et al. 2001]. Par conséquent, il serait erroné de se référer à la théorie de Reissner FSDT qui implique une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Une autre différence entre les deux théories est que la contrainte normale qui a été incluse dans la théorie Reissner a été omise dans la théorie de [Mindlin 1975].

[Chen 2005] a étudié la vibration non linéaire de plaques FGM soumises à une action combinée des résistances en compression dans le plan initial et de flexion à l'aide de l'FSDT avec les hypothèses de Von Karman. La fréquence non linéaire de plaques avec appui simple a été obtenue à l'aide de la méthode Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. La vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique a été étudiée par [Fallah et al. 2013] à l'aide de la FSDT et une approche semi-analytique qui est fondée sur une combinaison d'une série de puissances infinies et la méthode Kantorovich.

[Lanhe 2014] et [Bouazza et al. 2010] ont dérivé des solutions analytiques pour les températures de flambement des plaques FGM simplement appuyées sous deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et la solution de Navier. [Yaghoobi et al. 2013a] ont étudié le flambement des plaques sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques et mécaniques. La FSDT et la méthode des séries de puissances Frobenius ont été adoptées pour calculer la charge critique de flambement des plaques FGM sous différentes conditions aux limites.

Les solutions analytiques pour l'analyse de vibrations libres des plaques de type Levy reposant sur une fondation élastique ont été proposées par [Hosseini-Hashemi et al. 2010] à l'aide de la FSDT et les solutions de Levy. [Hosseini-Hashemi et al. 2011c] ont amélioré leurs travaux antérieurs [Hosseini-Hashemi et al. 2010] en tenant compte de l'effet du couplage entre l'étirement et les déplacements transversaux. [Yaghoobi et al. 2013b] ont également suivi une approche similaire pour dériver une solution de type prélèvement pour la charge de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous un chargement thermique.

En plus des recherches effectuées sur les plaques rectangulaires dans les travaux susmentionnés, la FSDT a été également appliquée aux plaques circulaires et plaques tubulaires. [Reddy et al. 1999] ont étudié la flexion avec l'effet d'étirement pour l'analyse des plaques tubulaires en FGM en utilisant la FSDT.

La FSDT était également utilisée pour les modèles des coques en FGM. [Reddy et al. 1998] ont étudié la réponse dynamique des cylindres et des plaques FGM soumises à deux différents types de charges thermiques utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. [Shahsiah et al. 2003a], [Shahsiah et al. 2003b] ont dérivé des solutions analytiques pour le flambement thermique des coques cylindriques en FGM simplement appuyées et soumises à deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et les solutions de Navier. Les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques et coques en FGM sous différents types de charges thermiques ont été obtenues en se basant sur la FSDT. [Behjat et al. 2009] ont étudié la flexion statique, la vibration libre et les réponses transitoires des panneaux cylindriques piézoélectriques en FGM soumises à des charges mécaniques, thermiques et électriques en utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis.

III.2.3. Modèles HSDTs :

La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élève HSDT est modélisé pour les variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou de deux plans (déplacements transversaux) (c'est-à-dire la théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur, et par conséquent en mesure les effets de déformation de cisaillement ou de cisaillement et de déformations normale. Les modèles HSDTs peuvent être développés à l'aide de fonctions de forme polynomiale ou une fonction non-polynomiale.

III.2.3.1. Modèles basés sur une fonction polynomiale

[Qian et al. 2003], [Qian et al. 2004] et [Gilhooley et al. 2007] ont employé une méthode sans maillage local de Petrov et Galerkin et la méthode quasi-3D de [Batra et al. 2002] pour étudier la flexion et la vibration des plaques FGM. [Matsunaga 2008a], [Matsunaga 2008b] a développé une théorie quasi-3D pour l'analyse du flambement et de vibration libre des plaques en FG [Matsunaga 2008b] et les coquilles peu profondes [Matsunaga 2008a].

[Xiang et al. 2011] ont proposé une énième théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de vibrations libres de FG et plaques sandwich composites. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant la zone de déplacement de la TSDT pour tenir compte des valeurs polynomiales. La TSDT est donc déduite comme un cas spécifique. Cette théorie a été étendue aux problèmes de flexion des plaques FG [Xiang et al. 2013a], aux problèmes de vibration libre des plaques isotropes [Xiang et al. 2013b], des plaques sandwich en FGM [Xiang et al. 2013c] et des plaques FGM reposant sur une fondation élastique [Xiang et al. 2014]. [Xiang et al. 2013a] ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnues pour la flexion des plaques FGM à l'aide d'une méthode sans maillage avec cannelure Sobhy RBFs, tandis que [Sobhy 2013] ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnues pour le flambement et vibration libre des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique avec différentes conditions aux limites en utilisant une série de méthodes. [Wattanasakulpong et al. 2013] ont utilisé la TSDT améliorée de [Shi 2007] et la méthode de Ritz pour l'analyse de vibrations libres et les problèmes de vibrations forcées des plaques serrées en FG sous les charges thermiques.

Basé sur le champ de déplacement de [Lo et al. 1997] et [Lo et al. 2015], [Reddy 2011] a développé une HSDT généralisée avec la non linéarité géométrique de Von Karman pour l'analyse thermo-mécanique des plaques FG.

III.2.3.2. Modèles basés sur une fonction non- polynomiale :

La fonction non-polynomiale a été utilisée pour la première fois par [Levy 1877] avec une fonction sinusoïdale pour élaborer une théorie raffinée pour les plaques épaisses isotropes. La fonction sinusoïdale a été adoptée plus tard par [Stein M 1986] et [Tourati M 1991] pour développer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale à cinq variables (SSDT) pour les plaques composites stratifiées et isotropes, respectivement. La SSDT a été largement utilisée pour l'étude de la courbure des plaques composites [Zenkour 2004a], [Zenkour 2004b] et [Ferreira 2005], le flambement des plaques composites [Zenkour 2004c], la flexion

des plaques sandwich FG [Zenkour 2005a] et [Zenkour et al. 2010a], le flambement et la vibration de plaques sandwich en FGM [Zenkour 2005b] et [Zenkour et al. 2010b], les vibrations de plaques FGM [Zenkour 2005c], la flexion des plaques FG [Zenkour 2006], la flexion thermique de Plaques FG reposant sur une fondation élastique [Zenkour 2009], le flambement thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Pour les poutres en nano [Zenkour et al. 2011], [Thai et al. 2012] et les plaques en nano composites [Thai et al. 2014]. Les relations entre la SSDT flexion et la CPT quantités ont été dérivées par [Zenkour 2012] pour les plaques de type levy en FGM.

[Soldatos 1992] a d'abord employé une fonction hyperbolique afin de développer une théorie HSDT pour plaques composites stratifiées. [Akavci 2010] et [Akavci 2014] a proposé une nouvelle fonction HSDT hyperbolique pour développer une analyse pour la flexion de plaques composites [Akavci 2010] et l'analyse de vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique [Akavci 2014].

La fonction exponentielle a été utilisée pour la première fois par [Karama et al. 2003] pour l'élaboration d'une HSDT pour poutres composites. [Aydogdu 2009] a approfondi ses travaux antérieurs [Karama et al. 2003] de plaques composites. [Mantari et al. 2011] ont également recouru à la fonction exponentielle pour développer une HSDT pour les coques composites et sandwich. La HSDT de Mantari a été adoptée par [Mantari et al. 2014a] pour étudier le comportement de flexion des plaques FGM.

En outre, les fonctions non-polynomiales ont également été employées pour développer des théories quasi-3D qui comptent tant pour l'effet de cisaillement et de la déformation. Par exemple, [Zenkour 2007] a employé la fonction sinusoïdale pour développer une théorie quasi-3D pour plaques FG. [Mantari et al. 2012] ont présenté une formulation généralisée dans laquelle de nombreuses théories quasi-3D peuvent être déduites en utilisant des polynômes ou des hybrides ou des fonctions trigonométriques. [Mantari et al. 2014b] ont optimisé la théorie quasi-3D sinusoïdale pour l'analyse de la flexion des coques en FGM. [Mantari et al. 2013] ont amélioré leurs travaux antérieurs [Thai et al. 2014] en incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur des plaques FGM.

III.3. Conclusion :

L'élaboration de divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques FGM a été systématiquement examinée et discuté dans ce chapitre. Basé sur les modèles ELS, la théorie

d'élasticité 3D et la formulation unifiée et un grand nombre de modèles de calcul ont été proposés pour prédire la réponse de comportement des plaques en FGM sous charges mécaniques et thermiques.

Il est à noter que la plupart des études actuelles sur l'analyse 3D des plaques FGM sont limitées à des approches analytiques pour le flambement, la déformation linéaire et les problèmes de vibration libre.

Chapitre IV

Formulation théoriques

IV.1. Introduction :

L'objectif principal de toute théorie est un calcul des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites relatives à la structure, associé à la mise en place d'une loi de comportement.

Dans ce chapitre, Nous avons développé deux nouvelles formulations analytiques pour étudier la réponse des plaques à gradient fonctionnel en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement quasi-3D (HSDT quasi-3D). Cette théorie considère la déformation du cisaillement et les influences d'élasticité par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans l'épaisseur, tout en respectant les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteur de correction de cisaillement. Le point culminant de la présente théorie proposée c'est qu'elle utilise des termes intégrés indéterminés dans le champ de déplacement et implique un plus petit nombre de variables et d'équations gouvernantes que les théories quasi-3D. Nous présentons plus loin encore une autre nouvelle théorie de déformation par cisaillement (HSDT) portant sur l'étude de panneaux sandwich qui est développée pour analyser la vibration et le flambage de ces plaques. Cette deuxième théorie proposée présente un nouveau champ de déplacement en utilisant des termes intégrés indéterminés. Seuls quatre inconnus sont utilisés dans cette théorie, ce qui est inférieur à la première théorie classique de la déformation du cisaillement (FSDT) et à d'autres HSDT.

IV.2. Cas d'une plaque quasi 3D :

Considérons une plaque FG telle que présentée dans la Figure IV.1 avec une épaisseur h , une longueur a et une largeur b .

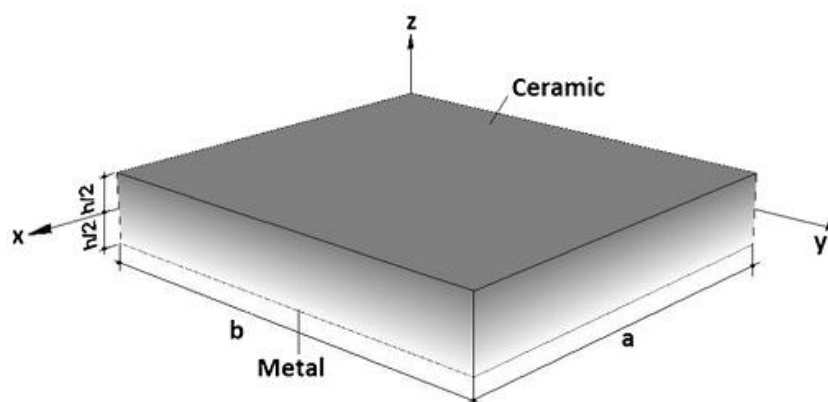


Figure IV.1: La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel.

Les propriétés du matériau qui varie à travers l'épaisseur avec une distribution en loi de puissance, est présenté ci-dessous:

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m \quad (IV-1)$$

Où P_c et P_m sont les modules de Young (E), le coefficient de Poisson (ν) et la masse volumique (ρ) de matériaux céramiques et métalliques situés respectivement sur les surfaces supérieure et inférieure. La fraction volumique du matériau céramique est exprimée comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (IV-2)$$

Où p est l'indice matériel, qui prend des valeurs positif.

IV.2. 1. Cinématique et effort:

Le champ de déplacement satisfaisant aux conditions de contraintes de cisaillement transversales disparaître à un moment donné ($x, y, \pm h/2$) Sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, est exprimé comme suit:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (IV-3a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (IV-3b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z)\theta(x, y, t) \quad (IV-3c)$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. On peut voir que la cinématique dans l'équation (3) ne présente que quatre inconnus (u_0, v_0, w_0 et θ) en considérant l'effet d'étirement de l'épaisseur.

Dans ce travail, le présent quasi-3D HSDT est obtenu en définissant

$$f(z) = -\left[\frac{3\pi z}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \text{ et } g(z) = \frac{2}{15} \frac{df}{dz} \quad (IV-4)$$

Les expressions de déplacement de contraintes, basées sur cette formulation, sont données comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV-5})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV-6a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \theta \quad (\text{IV-6b})$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{IV-6c})$$

Les intégrales présentées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV-7})$$

Où les coefficients A' et B' sont considérés selon le type de solution utilisée, Dans ce cas par la méthode Navier. Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = -\alpha^2, \quad k_2 = -\beta^2 \quad (\text{IV-8})$$

Où α et β définis dans l'expression (25).

Les relations constitutives linéaires sont donnés ci-dessous:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-9})$$

Où les constantes élastiques tridimensionnelles sont définies par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{IV-10a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{IV-10b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV-10c})$$

IV.2. 2. Equations de mouvement:

Le principe de Hamilton est employé ici pour déterminer les équations du mouvement:

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV-11})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; δV est la variation du travail externe effectuée par la charge externe appliquée à la plaque; Et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est exprimée par

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1] dA \end{aligned} \quad (\text{IV-12})$$

Où A se trouve la surface supérieure et les résultantes des contraintes N, M, S et Q sont définies par

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy); \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (\text{IV-13a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f'(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{IV-13b})$$

La variation du travail externe effectué par les charges dans le plan est donnée par:

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta w dA \quad (\text{IV-14})$$

Où

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (\text{IV-15})$$

Où (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont des charges appliquées dans le plan.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \right. \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + J_1^{st} (\dot{w}_0 \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{w}_0) \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2^{st} \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) \right\} dA \quad (\text{IV-16}) \end{aligned}$$

Où $(\dot{})$ la dérivée seconde par rapport au temps t ; $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation. (1); et (I_i, J_i, K_i) sont des inerties de masse exprimées par

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV-17a})$$

$$(J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st}) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, g, z f, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV-17b})$$

En remplaçant les équations (12), (14) et (16) en équation (11), on peut obtenir les équations de mouvement suivantes:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = I_0 \ddot{w}_0 \\
 & + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 A' \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} - k_2 B' \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} \\
 & + g(0) \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{IV-18}$$

En remplaçant l'équation (5) par l'équation (9) et les résultats subséquents en équations (13), les contraintes résultantes sont obtenues en termes des efforts comme forme compacte suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \varepsilon^0 \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix}, \tag{IV-19a}$$

$$N_z = L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s) + R^a \varepsilon_z^0 \tag{IV-19b}$$

Dans lequel

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{IV-20a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{IV-20b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV-20c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{IV-20d})$$

$$Q = \{Q_{xz}^s, Q_{yz}^s\}^t, \quad S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, \quad \gamma^1 = \{\gamma_{xz}^1, \gamma_{yz}^1\}^t \quad (\text{IV-20e})$$

$$F^s = \begin{bmatrix} F_{55}^s & 0 \\ 0 & F_{44}^s \end{bmatrix}, \quad X^s = \begin{bmatrix} X_{55}^s & 0 \\ 0 & X_{44}^s \end{bmatrix}, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV-20f})$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{IV-20g})$$

Et les composants de rigidité sont donnés comme suit:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ \nu \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV-21a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{IV-21b})$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} ([f'(z)]^2, f'(z)g(z), g^2(z)) dz \quad (\text{IV-21c})$$

$$(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s) = (F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) \quad (\text{IV-21d})$$

En substituant les équations (19) dans équations (18), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements $(u_0, v_0, w_0 \text{ et } \theta)$, et les équations appropriées prennent la forme:

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ & + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_2 B') d_{122} \theta + B_{11}^s k_1 A' d_{111} \theta + L d_1 \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{IV-22a})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A') d_{112} \theta + B_{22}^s k_2 B' d_{222} \theta + L d_2 \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_2 \ddot{\theta}, \quad (\text{IV-22b})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} \theta + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') d_{1122} \theta + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} \theta + L^a (d_{11} \theta + d_{22} \theta) + N_x^0 d_{11} w + 2 N_{xy}^0 d_{12} w + N_y^0 d_{22} w = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_1^{st} \ddot{\theta}, \quad (\text{IV-22c})$$

$$-k_1 A' B_{11}^s d_{1111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1222} u_0 - (B_{22}^s k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} v_0 - B_{22}^s k_2 B' d_{2222} v_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} w_0 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') d_{1122} w_0 + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} w_0 - H_{11}^s (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - H_{22}^s (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - (2 H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta + ((k_1 A')^2 F_{55}^s + 2 k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s) d_{11} \theta + ((k_2 B')^2 F_{44}^s + 2 k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s) d_{22} \theta - 2 R (k_1 A' d_{11} \theta + k_2 B' d_{22} \theta) - L (d_1 u_0 + d_2 v_0) + L^a (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) - R^a \theta + g(0) (N_x^0 d_{11} w + 2 N_{xy}^0 d_{12} w + N_y^0 d_{22} w) = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) + J_1^{st} \ddot{w}_0 + K_2^{st} \ddot{\theta}, \quad (\text{IV-22d})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV-23})$$

IV.2. 3. Solutions analytiques:

La méthode de la solution Navier est utilisée pour déduire les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont écrites en tant que produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-24})$$

Où ω est la fréquence des vibrations libres de la plaque, $\sqrt{i} = -1$ l'unité imaginaire.

Ou

$$\alpha = m\pi / a \text{ and } \beta = n\pi / b \quad (\text{IV-25})$$

Considérant que la plaque est soumise à des forces de compression dans le plan de forme $N_x^0 = -N_0, N_y^0 = -\gamma N_0; N_{xy}^0 = 0, \gamma = N_y^0 / N_x^0$ (γ un paramètre de charge non dimensionnel). En remplaçant l'équation (24) dans l'équation (22), le problème suivant est obtenu:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}+k & S_{34}+g(0)k \\ S_{14} & S_{24} & S_{34}+g(0)k & S_{44}+[g(0)]^2 k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-26})$$

Ou

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad S_{12} = \alpha\beta (A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = -\alpha [B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2], \\ S_{14} &= \alpha \left[k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \right] \beta^2 + k_1 A' B_{11}^s \alpha^2 - L, \\ S_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, \quad S_{23} = -\beta [B_{22}\beta^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2], \\ S_{24} &= \beta \left[k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \right] \alpha^2 + k_2 B' B_{22}^s \beta^2 - L, \\ S_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4, \\ S_{34} &= -k_1 A' D_{11}^s \alpha^4 - [(D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B')] \alpha^2\beta^2 - k_2 B' D_{22}^s \beta^4 + L^a (\alpha^2 + \beta^2), \\ S_{44} &= (k_1 A')^2 H_{11}^s \alpha^4 + [2k_1 k_2 A' B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s] \alpha^2\beta^2 + [(k_1 A')^2 F_{55}^s + 2k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s] \alpha^2 \\ &\quad + (k_2 B')^2 H_{22}^s \beta^4 + R^a - 2R(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) + [(k_2 B')^2 F_{44}^s + 2k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s] \beta^2 \\ k &= -N_0 (\alpha^2 + \gamma\beta^2) \\ m_{11} &= I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = J_1 k_1 A' \alpha, \quad m_{22} = I_0, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = k_2 B' \beta J_1, \\ m_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) + J_1^{st}, \\ m_{44} &= K_2 [(k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2] + K_2^{st} \end{aligned} \quad (\text{IV-27})$$

L'équation (26) est une forme générale de stabilité et de l'analyse des vibrations libres des plaques en sandwich FG sous des charges dans le plan. Les charges critiques de flambement (N_{cr}) peuvent être déterminées à partir du problème de stabilité $|S_{ij}| = 0$ alors que le problème de vibration libre est obtenu en supprimant les charges dans le plan.

IV.3. Cas d'une plaque sandwich :

Considérons une plaque sandwich FG rectangulaire avec une épaisseur uniforme h , de longueur a et de largeur b . Le système de coordonnées cartésiennes xyz est considéré de telle sorte que xy est le plan ($z=0$) coïncide avec le milieu de la surface de la plaque sandwich. La couche 1, 2, 3 représentent respectivement la partie inférieure, couche médiane et supérieure. Le noyau de sandwich est isotrope (entièrement céramique) et les peaux sont fonctionnellement graduées à travers l'épaisseur. La peau de la face inférieure varie du métal pure ($z=h_0$) vers céramique pure tandis que la variation de la peau supérieure est du entièrement céramique vers entièrement métallique ($z=h_3$), la géométrie de la plaque sandwich en FGM est présenté dans la Figure IV.2.

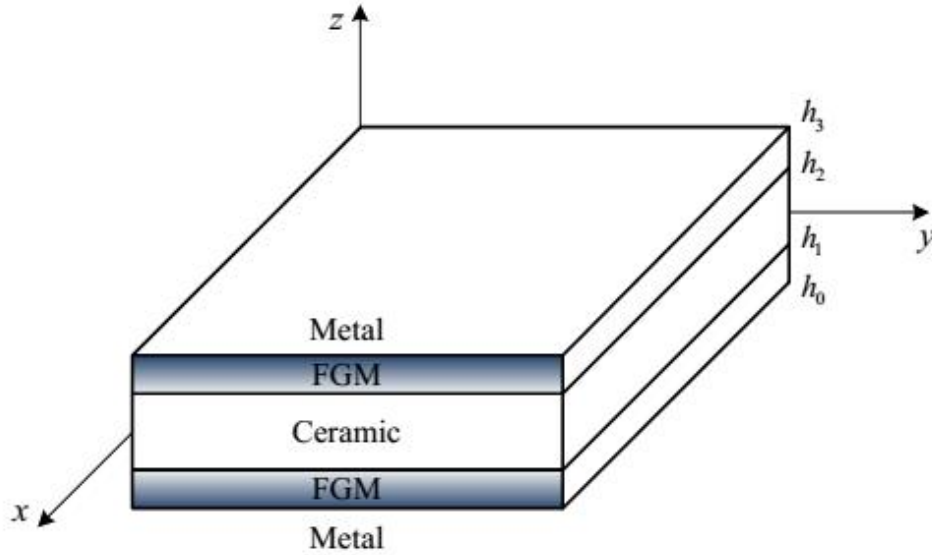


Figure IV.2: La géométrie d'une plaque sandwich avec des peaux en FGM et un noyau homogène.

Il n'y a pas d'interface entre le noyau et les peaux. La fraction volumique de la plaque sandwich est exprimée comme suit:

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p & \text{for } z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p & \text{for } z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (\text{IV-28})$$

Où $V^{(n)}$ est la fraction de volume de la n-ième couche et p est un paramètre qui indique l'indice de puissance et prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Les propriétés matérielles effectives de la couche n, le module de Young $E^{(n)}$, le coefficient de Poisson $\nu^{(n)}$ et la densité de masse $\rho^{(n)}$ en un point peuvent être obtenu par la règle linéaire du mélange [Marur, 1999] comme:

$$P^{(n)}(z) = (P_1 - P_2)V^{(n)}(z) + P_2 \quad (\text{IV-29})$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n de la plaque sandwich en FGM. P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 en fonction de la fraction de volume $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$).

Reprenons le même champ de déplacement du 1er cas en éliminant toutefois le terme $g(z)\theta$ de l'équation (3c), et le champ de déplacement du 2eme cas devient :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{IV-30a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{IV-30b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV-30c})$$

Dans cette partie, la fonction de cisaillement $f(z)$ varie le long de l'épaisseur comme suit :

$$f(z) = z - z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{IV-31})$$

Après un simple développement mathématique qui est identique à celui de la première partie ; les nouvelles équations d'équilibres, les coefficients de la matrice de rigidité et de masse sont données par :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
& - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
\delta \theta : \quad & -k_1 A' \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} - k_2 B' \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
& - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{IV-32}$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2, \quad S_{12} = \alpha \beta (A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = -\alpha [B_{11} \alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \beta^2], \\
S_{14} &= \alpha \left[k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \right] \beta^2 + k_1 A' B_{11}^s \alpha^2, \\
S_{22} &= A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2, \quad S_{23} = -\beta [B_{22} \beta^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \alpha^2], \\
S_{24} &= \beta \left[k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \right] \alpha^2 + k_2 B' B_{22}^s \beta^2, \\
S_{33} &= D_{11} \alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^4, \\
S_{34} &= -k_1 A' D_{11}^s \alpha^4 - [(D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B')] \alpha^2 \beta^2 - k_2 B' D_{22}^s \beta^4, \\
S_{44} &= (k_1 A')^2 H_{11}^s \alpha^4 + [2k_1 k_2 A' B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s] \alpha^2 \beta^2 + (k_2 B')^2 H_{22}^s \beta^4 \\
&+ (k_2 B')^2 A_{55}^s \beta^2 + (k_1 A')^2 A_{44}^s \alpha^2 \\
k &= -N_0 (\alpha^2 + \gamma \beta^2) \\
m_{11} &= I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = J_1 k_1 A' \alpha, \quad m_{22} = I_0, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = k_2 B' \beta J_1, \\
m_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \quad m_{44} = K_2 [(k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2]
\end{aligned} \tag{IV-33}$$

IV.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux solutions générales; la première s'intéresse au comportement des plaques à gradient fonctionnel en analysant la déformation par cisaillement quasi-3D (HSDT quasi-3D) ainsi que les influences d'élasticité par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans l'épaisseur, cette théorie respecte les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteur de

correction de cisaillement et utilise des termes intégrés indéterminés dans le champ de déplacement et implique un plus petit nombre de variables.

La deuxième présente une nouvelle théorie de déformation par cisaillement (HSDT) qui est développée pour étudier la vibration et le flambage des plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG). Cette théorie proposée présente un nouveau champ de déplacement en utilisant des termes intégrés indéterminés. Seuls quatre inconnus sont utilisés ce qui est inférieur à la première théorie classique de la déformation du cisaillement (FSDT) et à d'autres HSDT.

Les études paramétriques présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de ces deux théories en le comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

Chapitre V

Résultats et discussion

V.1. Introduction :

Dans le présent chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques des études analytiques présentées dans le chapitre précédent.

En premier lieu, nous nous intéressons aux résultats numériques et leurs interprétations concernant le volet relatif à l'étude de l'analyse libre des vibrations et du flambement des plaques FG.

Puis plus loin, nous nous focalisons sur la présentation et commentaires des résultats obtenus relatives à la détermination des les fréquences naturelles et les charges critiques de flambage de plaques sandwich FG simplement soutenues.

V.2. Analyse des résultats :

V.2.1. Résultats et discussions relatives à l'étude des plaques FG :

Dans cette partie, les fréquences naturelles et les charges critiques de flambage des plaques FG simplement appuyées sont fournies et comparées avec les solutions existantes pour vérifier la précision du nouveau HSDT quasi-3D proposé. Des plaques fonctionnellement graduée FG en deux combinaisons de matériaux en métal et céramique: Al/ZrO₂ et Al/Al₂O₃ sont considérés. Les propriétés de leurs matériaux sont présentées dans le tableau V.1.

Tableau V.1 : Propriétés des matériaux en métal et en céramique.

Matériel	Module d'Young (GPa)	Masse volumique (kg/m ³)	coefficient de Poisson
Aluminum (Al)	70	2.702	0.3
Zirconia (ZrO ₂)	151	3.000	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3.800	0.3

Pour plus de commodité, les paramètres non dimensionnels suivants sont utilisés:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \bar{\beta} = \frac{\omega ab}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_c^2)\rho_c}{E_c}}, \quad \bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}, \quad \hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{D_{11} - B_{11}^2 / A_{11}} \quad (V-1)$$

V.2.1.1. Résultats de la vibration libre :

Le tableau V.2 montre la comparaison de la fréquence fondamentale des plaques carrées Al/ZrO₂ obtenues à partir du HSDT quasi-3D proposé et le modèle de la plaque [Uymaz et al 2007].

Tableau V.2 : Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\beta}$) des plaques carrées Al/ZrO₂.

a/h	Theorie	Indice matériel							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	[Uymaz et al 2007]	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
	Proposé	1.2671	1.2383	1.2135	1.1571	1.0999	1.0425	0.9841	0.9581
5	[Uymaz et al 2007]	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
	Proposé	1.7830	1.7369	1.6983	1.6149	1.5392	1.4763	1.4176	1.3787
10	[Uymaz et al 2007]	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5958	1.5491	1.5066
	Proposé	1.9388	1.8861	1.8424	1.7504	1.6708	1.6109	1.5575	1.5140
20	[Uymaz et al 2007]	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
	Proposé	1.9854	1.9303	1.8849	1.7902	1.7101	1.6520	1.6012	1.5561
50	[Uymaz et al 2007]	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
	Proposé	1.9990	1.9432	1.8973	1.8017	1.7215	1.6642	1.6143	1.5687
100	[Uymaz et al 2007]	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652
	Proposé	2.0009	1.9450	1.8990	1.8034	1.7232	1.6660	1.6162	1.5706

On peut voir que les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution 3D. Le tableau V.3 présente les effets de l'indice matériel et du rapport d'épaisseur sur la fréquence non dimensionnelle de la plaque FG. Les résultats sont comparés aux solutions de FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a], TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b] et quasi-3D [Matsunaga 2008b].

Tableau V.3: Comparaison des trois premières fréquences non dimensionnelles ($\hat{\omega}$) des plaques carrées Al/Al₂O₃.

a/h	Mode (m,n)	Theorie	Indice matériel				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	Quasi-3D [Matsunaga 2008b]	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Présent	0.2130	0.1834	0.1665	0.1411	0.1321
	2(1,2)	Quasi-3D [Matsunaga 2008b]	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Présent	0.4682	0.4064	0.3692	0.3052	0.2818
	3(2,2)	TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		Présent	0.6791	0.5924	0.5387	0.4388	0.4019

10	1(1,1)	Quasi-3D [Matsunaga 2008b]	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Présent	0.0579	0.0495	0.0450	0.0390	0.0369
	2(1,2)	Quasi-3D [Matsunaga 2008b]	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Présent	0.1385	0.1189	0.1080	0.0924	0.0869
	3(2,2)	TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Présent	0.2130	0.1834	0.1665	0.1411	0.1321
20	1(1,1)	TSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011a]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT [Hosseini-Hashemi et al 2011b]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Présent	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

Il est démontré que les résultats obtenue sont encore plus proches dans de nombreux cas, quasi-3D et les modèle TSDT et FSDT. Dans le tableau V.4, les fréquences fondamentales non dimensionnelles de la plaque simplement appuyées sont calculées pour quatre indices matériels différents et comparées avec la nouvelle solution 3D exacte proposée par [Jin et al 2014] et quasi-3D [Mantari 2015]. Les résultats obtenus présentent une bonne précision.

Tableau V.4: les fréquences naturelles non-dimensionnels ($\Omega = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$) des plaques fonctionnellement graduée Al/Al_2O_3 .

b/a	a/h	p	Theorie		
			[Jin et al 2014]	[Mantari 2015]	Présent
1	10	0	0.1135	0.1137	0.1138
		1	0.0870	0.0883	0.0884
		2	0.0789	0.0806	0.0807
		5	0.0741	0.0756	0.0756
	5	0	0.4169	0.4183	0.4185
		1	0.3222	0.3271	0.3272
		2	0.2905	0.2965	0.2966
		5	0.2676	0.2726	0.2727
	2	0	1.8470	1.8543	1.8589
		1	1.4687	1.4803	1.4836
		2	1.3095	1.3224	1.3255
		5	1.1450	1.1565	1.1577
	10	0	0.0719	0.0719	0.0719
		1	0.0550	0.0558	0.0558
		2	0.0499	0.0510	0.0510
		5	0.0471	0.0480	0.0480
	5	0	0.2713	0.2721	0.2722

	1	0.2088	0.2121	0.2121
	2	0.1888	0.1928	0.1929
	5	0.1754	0.1789	0.1789
2	0	0.9570	1.3075	1.3101
	1	0.7937	1.0371	1.0390
	2	0.7149	0.9297	0.9315
	5	0.6168	0.8248	0.8253

La figure V.1 présente la variation des fréquences naturelles en termes d'indice matériels et de rapport d'épaisseur.

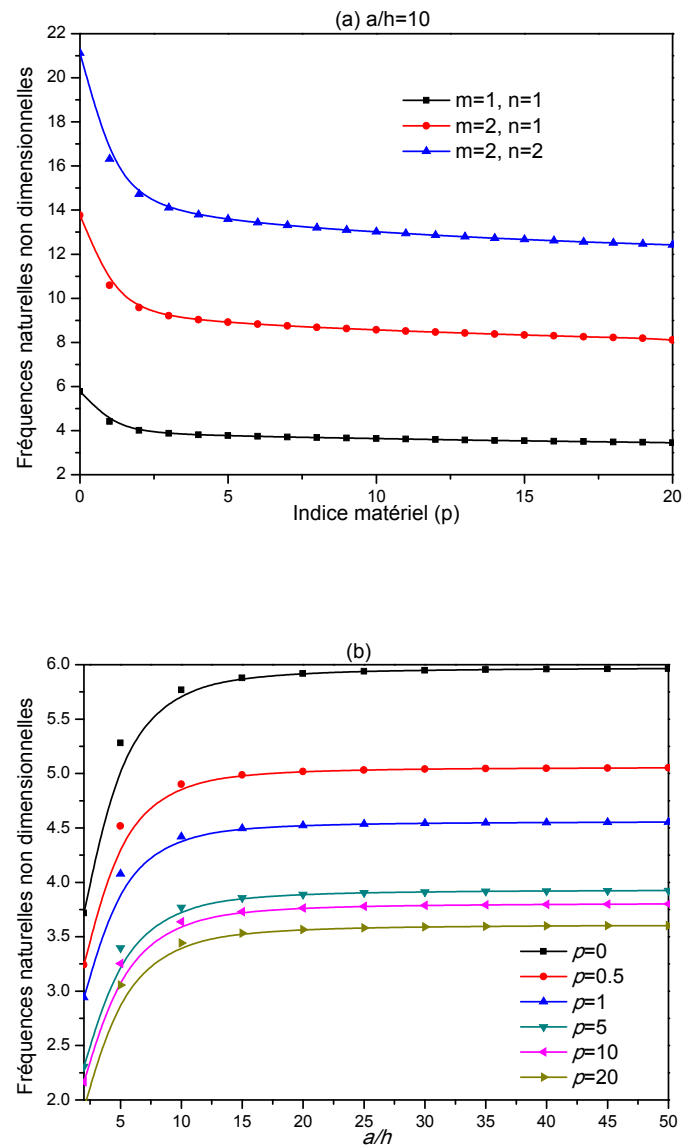


Figure V.1: Effet de l'indice matériels p et rapport d'épaisseur a/h sur la fréquence naturelle ($\bar{\omega}$) des plaques carrées Al/Al_2O_3 .

On peut observer à partir de ces résultats que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'indice matériels. Il est dû au fait qu'une valeur plus élevée de p correspond à une faible valeur de la fraction volumique de la phase céramique, ce qui rend les plaques plus souples [Nguyen 2015]. La figure V.1b montre que, avec une augmentation du rapport d'épaisseur, l'influence de la déformation du cisaillement devient très efficace dans une région relativement grande ($a/h \leq 30$) ou les courbes deviennent plus plates.

V.2.1.2. Résultats de l'analyse du flambage:

Les réponses de flambement des plaques Al/Al₂O₃ sont étudiées en prenant en compte trois types des charges dans le plan: compression uniaxiale ($\gamma = 0$), compression biaxiale ($\gamma = 1$) et compression axiale et traction ($\gamma = -1$). Les résultats calculés sont donnés dans le tableau V.5.

Tableau V.5: Comparaison de la charge critique de flambage ($\bar{N}_{cr}$) des plaques Al/Al₂O₃.

γ	a/b	a/h	Théorie	Indice matériel					
				0	0.5	1	2	5	10
0	0.5	5	HSDT [Thai et al 2012]	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213
			HSDT [Nguyen 2015]	6.7417	4.4343	3.4257	2.6503	2.1459	1.9260
			Présent	6.7005	4.4728	3.4983	2.7347	2.2076	1.9459
		10	HSDT [Thai et al 2012]	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896
			HSDT [Nguyen 2015]	7.4115	4.8225	3.7137	2.8911	2.4155	2.1911
			Présent	7.4126	4.8904	3.8221	3.0168	2.5090	2.2374
		20	HSDT [Thai et al 2012]	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	2.2690
			HSDT [Nguyen 2015]	7.6009	4.9307	3.7937	2.9585	2.4942	2.2695
			Présent	7.6109	5.0028	3.9108	3.0968	2.5963	2.3230
	1	5	HSDT [Thai et al 2012]	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807
			HSDT [Nguyen 2015]	16.1003	10.6670	8.2597	6.3631	5.0459	4.4981
			Présent	15.9193	10.7065	8.3828	6.5148	5.1526	4.5077
		10	HSDT [Thai et al 2012]	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
			HSDT [Nguyen 2015]	18.6030	12.1317	9.3496	7.2687	6.0316	5.4587
			Présent	18.5846	12.2937	9.6083	7.5667	6.2535	5.5625
		20	HSDT [Thai et al 2012]	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668
			HSDT [Nguyen 2015]	19.3593	12.5652	9.6702	7.5386	6.3437	5.7689
			Présent	19.3809	12.7494	9.9658	7.8860	6.6008	5.9020
1	0.5	5	HSDT [Thai et al 2012]	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
			HSDT [Nguyen 2015]	5.3934	3.5475	2.7406	2.1202	1.7167	1.5408
			Présent	5.3604	3.5783	2.7987	2.1878	1.7661	1.5568
		10	HSDT [Thai et al 2012]	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517
			HSDT [Nguyen 2015]	5.9292	3.8580	2.9710	2.3129	1.9324	1.7529
			Présent	5.9301	3.9123	3.0577	2.4134	2.0072	1.7899
		20	HSDT [Thai et al 2012]	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152
			HSDT [Nguyen 2015]	6.0807	3.9445	3.0350	2.3668	1.9953	1.8156
			Présent	6.0887	4.0022	3.1287	2.4774	2.0770	1.8584
	1	5	HSDT [Thai et al 2012]	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403

			HSDT [Nguyen 2015]	8.0501	5.3335	4.1299	3.1815	2.5230	2.2491
			Présent	7.9597	5.3533	4.1914	3.2574	2.5763	2.2539
		10	HSDT [Thai et al 2012]	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264
			HSDT [Nguyen 2015]	9.3015	6.0659	4.6748	3.6344	3.0158	2.7293
			Présent	9.2923	6.14687	4.8042	3.7834	3.1268	2.78123
		20	HSDT [Thai et al 2012]	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834
			HSDT [Nguyen 2015]	9.6796	6.2826	4.8351	3.7693	3.1718	2.8844
			Présent	9.6904	6.3747	4.9829	3.9430	3.3004	2.9510
-1	0.5	5	HSDT [Thai et al 2012]	8.9604	5.8980	4.5551	3.5268	2.8646	2.5617
			HSDT [Nguyen 2015]	8.9890	5.9124	4.5676	3.5337	2.8612	2.5679
			Présent	8.9339	5.9637	4.6645	3.6463	2.9435	2.5946
		10	HSDT [Thai et al 2012]	9.8738	6.4275	4.9481	3.8529	3.2219	2.9195
			HSDT [Nguyen 2015]	9.8820	6.4299	4.9516	3.8548	3.2206	2.9214
			Présent	9.8835	6.5206	5.0962	4.0224	3.3453	3.3453
		20	HSDT [Thai et al 2012]	10.1324	6.5753	5.0574	3.9442	3.3259	3.0253
			HSDT [Nguyen 2015]	10.1345	6.5742	5.0583	3.9447	3.3255	3.0260
			Présent	10.1478	6.6704	5.2145	4.1291	3.4617	3.0974
	1	5	HSDT [Thai et al 2012]	26.2058	17.7704	13.8486	10.5589	7.9590	6.8970
			HSDT [Nguyen 2015]	26.4999	17.9424	13.9872	10.6421	7.9571	6.9626
			Présent*	25.7567	17.6913	13.9068	10.6372	7.9346	6.8033
		10	HSDT [Thai et al 2012]	35.8416	23.5920	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468
			HSDT [Nguyen 2015]	35.9559	23.6497	18.2704	14.1349	11.4447	10.2717
			Présent*	35.7357	23.8550	18.6579	14.5850	11.7741	10.3784
		20	HSDT [Thai et al 2012]	39.4951	25.7100	19.7925	15.4115	12.8878	11.6779
			HSDT [Nguyen 2015]	39.5280	25.7197	19.8065	15.4190	12.8824	11.6857
			Présent*	39.5339	26.0822	20.3846	16.0896	13.3813	11.9329

Le flambage critique se produit à $*(m,n) = (2,1)$

On peut voir que les résultats des travaux présentés sont en bon accord avec les solutions HSDT [Nguyen 2015] et HSDT [Thai et al 2012]. La figure V.2 présente les charges critiques de flambage des plaques rectangulaires par rapport à l'indice matériel.

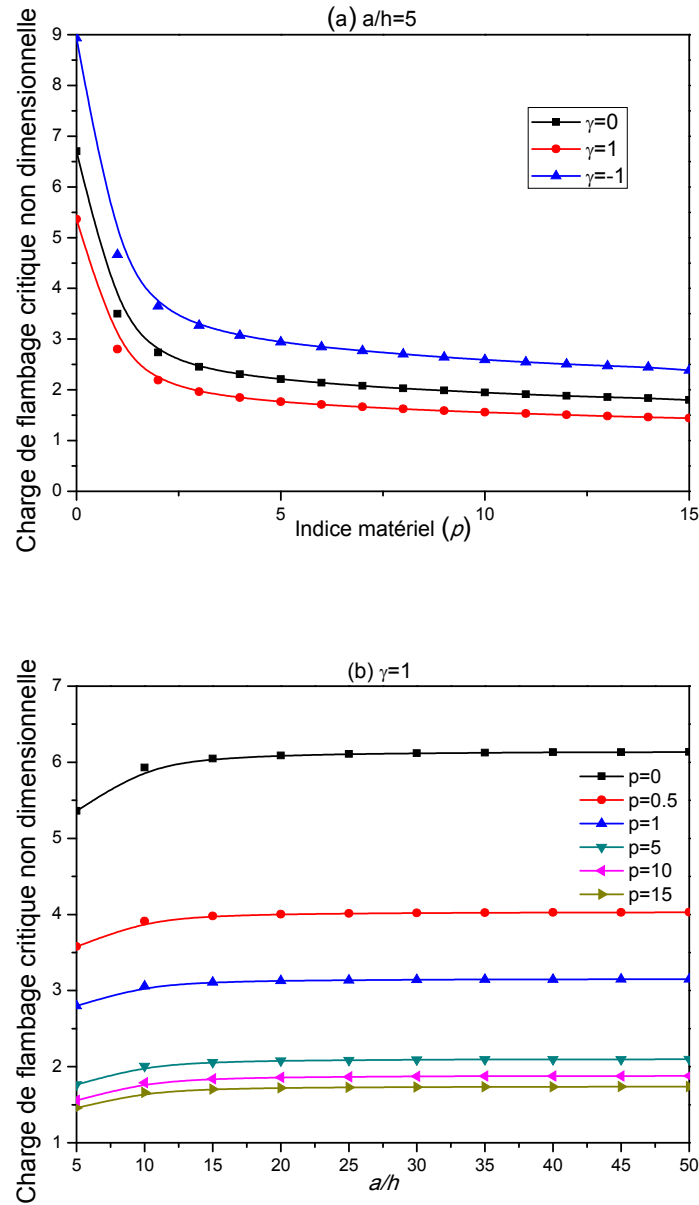


Figure V.2: Effet de l'indice matériel p et le rapport d'épaisseur a/h sur la charge critique de flambage ($\bar{N}_{cr}$) des plaques rectangulaires Al/Al_2O_3 ($a/b = 0.5$).

On voit dans cette figure les charges critiques diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel, et augmentent avec le rapport d'épaisseur jusqu'au point $b/h = 30$ d'où les courbes deviennent plus plates. Les courbes charge–fréquence présentées dans la figure V.3 pour des plaques rectangulaires homogènes et FG ($h/b = 0.5$).

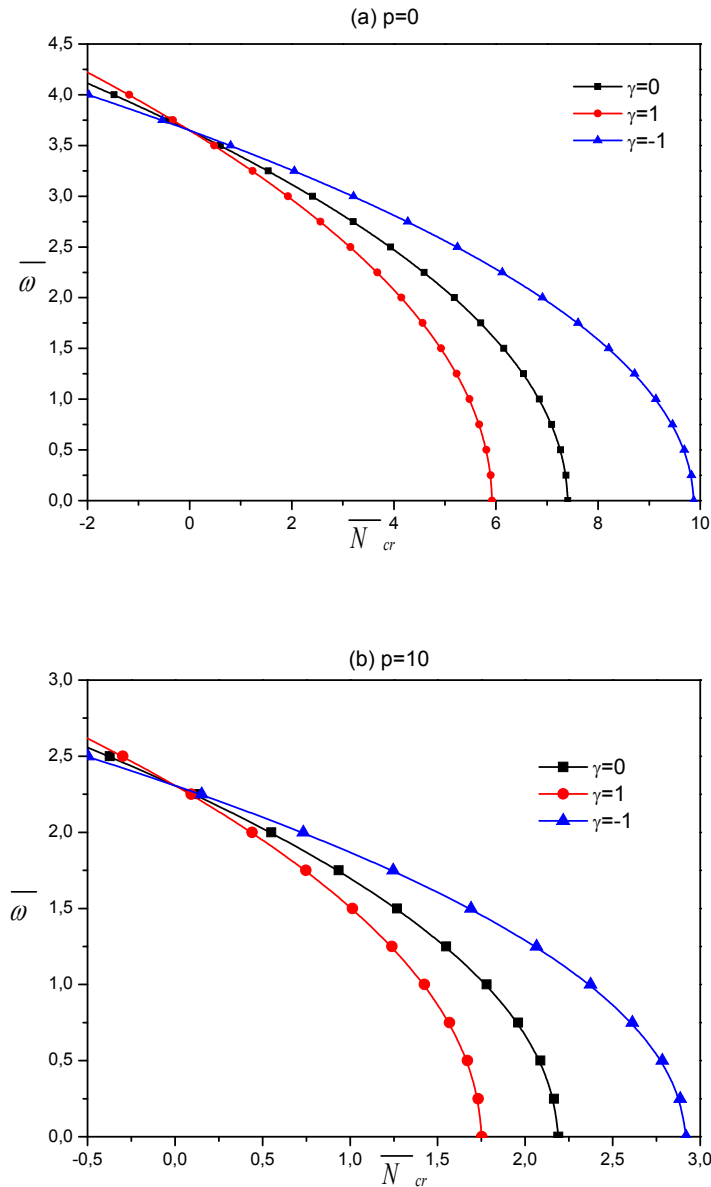


Figure V.3: Influence des charges axial sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des plaques FG (Al/Al₂O₃) ($a/b = 0.5$, $a/h = 10$).

A partir de la figure V.3 on peut constater que toutes les fréquences fondamentales diminuent au fur et à mesure que les charges changent à partir de la traction vers la compression. Dans la zone de compression $\bar{N}_{cr} > 0$, les fréquences fondamentales sont les plus importantes pour des plaques soumises à une compression semi axiale et une tension ($\gamma = -1$) et les fréquences devienne plus petites pour le cas d'un chargement de compression biaxiale ($\gamma=1$). Cependant, cet ordre est modifié dans la zone de traction. A partir des courbes charge-fréquence, les charges critiques de flambement peuvent être déterminées d'une façon indirecte

par une analyse de vibration à travers les courbes charge-fréquence qui correspondent à des fréquences naturelles nulles.

V.2.2. Résultats et interprétations relatives à l'étude des panneaux sandwich :

Dans cette première section, Les fréquences naturelles et les charges critiques de flambage de plaques sandwich FG simplement soutenues sont présentées et comparées avec les solutions existantes pour vérifier la précision du nouveau HSDT proposé. La plaque de FG est considérée comme étant constitué d'aluminium et d'alumine présentant les caractéristiques importantes suivantes:

- Céramique (P_1 : Alumine, Al_2O_3): $E_1 = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_1 = 3800 \text{ kg/m}^3$.
- Metal (P_2 : Aluminum, Al): $E_2 = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_2 = 2707 \text{ kg/m}^3$.

Pour plus de commodité, les paramètres adimensionnels suivants sont utilisés:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \bar{N} = \frac{Na^2}{100h^2 E_0} \quad (V-2)$$

Ou $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ et $E_0 = 1 \text{ GPa}$.

V.2.2.1. Résultats de la vibration libre :

Les fréquences naturelles de la structure sont calculées en utilisant l'équation IV-26. En appliquant des charges dans le plan. Les fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques sandwich FG sont présentées ici pour estimer la précision de la nouvelle HSDT présentée.

Tout d'abord, à des fins de vérification, Les résultats déterminés par le présent HSDT sont comparés à d'autres théories existantes dans la littérature telles que CPT, FSDT, PSDT, SSDT, HySDT et la théorie linéaire tridimensionnelle de l'élasticité présentée par [Li et al. 2008]. La description de divers modèles de déplacement est présentée dans le tableau V.6. Nous prenons également le facteur de correction de cisaillement $K = 5/6$ dans FSDT.

Tableau V.6: Les modèles de déplacement.

Modèle	Theorie	Fonction inconnue
CPT	Théorie classique des plaques	3
FSDT	Première théorie de la plaque de déformation de cisaillement [Mindlin, 1951]	5
PSDT	théorie de la plaque de déformation de cisaillement parabolique [Reddy 2011]	5
SSDT	Théorie de la plaque de déformation du cisaillement sinusoïdal [Touratier 1991]	5
HySDT	théorie de la plaque de déformation de cisaillement hyperbolique [El Meiche et al 2011]	4
Présent	Nouveau HSDT	4

Les résultats des plaques sandwich FG avec cinq distributions de matériaux sont comparés dans le tableau V.7, les résultats basés sur CPT, FSDT, PSDT, SSDT, HySDT et élasticité 3D. Le module de Young E et la densité de masse ρ sont basés sur la répartition de la loi de puissance l'équation IV-2.

Tableau V.7: Comparaisons des fréquences fondamentale naturels $\bar{\omega}$ pour la plaque sandwich simplement appuyée avec d'autres théories ($h/b = 0.1$, $a = b$).

p	Théorie	$\bar{\omega}$					
		1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	CPT	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359
	FSDT	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442
	PSDT	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
	SSDT	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452
	Elasticity	—	—	—	—	—	—
	HySDT	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449
	Présent	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449
0.5	CPT	1.47157	1.51242	1.54264	1.54903	1.58374	1.60722
	FSDT	1.44168	1.48159	1.51035	1.51695	1.55001	1.57274
	PSDT	1.44424	1.48408	1.51253	1.51922	1.55199	1.57451
	SSDT	1.44436	1.48418	1.51258	1.51927	1.55202	1.57450
	Elasticity	1.44614	1.48608	1.50841	1.52131	1.54926	1.57668
	HySDT	1.44419	1.48405	1.50636	1.51922	1.54714	1.57458
	Présent	1.44432	1.48415	1.50644	1.51925	1.54717	1.5745
1	CPT	1.26238	1.32023	1.37150	1.37521	1.43245	1.46497
	FSDT	1.24031	1.29729	1.34637	1.35072	1.40555	1.43722
	PSDT	1.24320	1.30011	1.34888	1.35333	1.40789	1.43934
	SSDT	1.24335	1.30023	1.34894	1.35339	1.40792	1.43931
	Elasticity	1.24470	1.30181	1.33511	1.35523	1.39763	1.44137
	HySDT	1.24310	1.30004	1.33328	1.35331	1.39559	1.43940
	Présent	1.24330	1.30019	1.33344	1.35337	1.39567	1.43931

5	CPT	0.95844	0.99190	1.08797	1.05565	1.16195	1.18867
	FSDT	0.94259	0.97870	1.07156	1.04183	1.14467	1.17159
	PSDT	0.94598	0.98184	1.07432	1.04466	1.14731	1.17397
	SSDT	0.94630	0.98207	1.07445	1.04481	1.14741	1.17399
	Elasticity	0.94476	0.98130	1.02942	1.04532	1.10983	1.17567
	HySDT	0.94574	0.98166	1.03033	1.04455	1.10875	1.17397
	Présent	0.94621	0.98201	1.03069	1.04477	1.10904	1.17398
10	CPT	0.94321	0.95244	1.05185	1.00524	1.11883	1.13614
	FSDT	0.92508	0.93962	1.03580	0.99256	1.10261	1.12067
	PSDT	0.92839	0.94297	1.03862	0.99551	1.10533	1.12314
	SSDT	0.92875	0.94232	1.04558	0.99519	1.04154	1.13460
	Elasticity	0.92727	0.94078	0.98929	0.99523	1.06104	1.12466
	HySDT	0.92811	0.94275	0.99184	0.99536	1.06081	1.12311
	Présent	0.92864	0.94453	0.99222	0.99564	1.06115	1.12317

Le tableau V.7 présente un bon accord par la comparaison des plaques fonctionnellement graduée de cinq différents indice matériel croissants de (0 a 10) avec d'autres HSDTs. Par conséquent, la théorie proposée (avec seulement quatre fonctions inconnues) donne des résultats comparables à ceux déterminés avec des théories d'ordre supérieur avec cinq variables. Comparé à la théorie linéaire 3D de l'élasticité [Li et al 2008], La théorie proposée donne des résultats plus précis que les autres théories telles que PSDT et SSDT et surtout pour le cas de non symétrique (2–1–1) et (2–2–1).

La deuxième comparaison est présentée dans le tableau V.8 pour les deux cas : symétrique (1–2–1) et non- symétrique (2–2–1) pour des plaques sandwich carré fonctionnellement graduée.

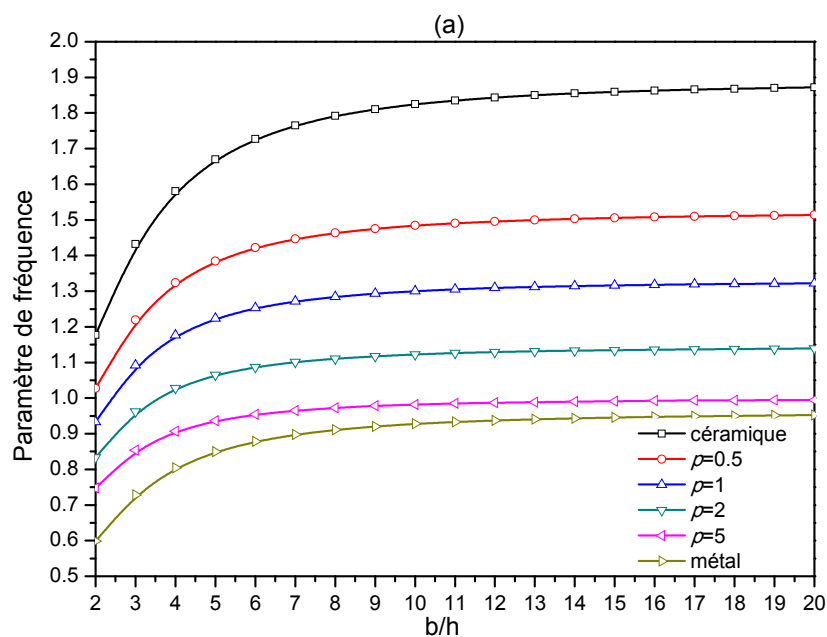
Tableau V.8: Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ pour une plaque carrée FG sandwich simplement appuyée avec d'autres théories ($p = 2, h/b = 0.1$).

<i>m</i>	<i>n</i>	1–2–1					2–2–1				
		CPT	FSDT	SSDT	HySDT	Présent	CPT	FSDT	SSDT	HySDT	Présent
1	1	1.32200	1.30020	1.30244	1.30250	1.30244	1.28650	1.26524	1.26780	1.24375	1.24392
1	2	3.26976	3.14452	3.15686	3.15726	3.15692	3.18172	3.05968	3.07382	3.01698	3.01796
2	2	5.17700	4.88021	4.90849	4.90978	4.90895	5.03724	4.74815	4.78065	4.69456	4.69689
1	3	6.42690	5.98487	6.02622	6.02866	6.02741	6.25311	5.82264	5.87022	5.76658	5.76981
2	3	8.27066	7.57215	7.63601	7.64151	7.63953	8.04649	7.36640	7.44002	7.31319	7.31812
1	4	10.67355	9.57284	9.67121	9.68465	9.68143	10.38339	9.31198	9.42552	9.27437	9.28178
3	3	11.26475	10.05424	10.16193	10.17821	10.17467	10.95830	9.78007	9.90439	9.74847	9.75652
2	4	12.43611	10.99612	11.12321	11.14644	11.1422	12.09731	10.69588	10.84261	10.67885	10.68823
3	4	15.30248	13.23801	13.41755	13.46652	13.46038	14.88418	12.87543	13.08260	12.91005	12.92283
4	4	19.17579	16.13722	16.39820	16.50693	16.49783	18.64932	15.69346	15.99393	15.83764	15.85526

On constate que l'augmentation du nombre de modes conduit à une augmentation des fréquences. Encore une fois, nous avons constaté que les fréquences naturelles obtenues par le présent HSDT sont en bon accord avec d'autres théories de déformation du cisaillement.

En général, les fréquences données par la CPT sont beaucoup plus élevées que celles calculées à partir des théories de déformation du cisaillement. Cela implique que les résultats calculés par la CPT sont grossièrement erronés pour une plaque épaisse et /ou pour des nombres de mode plus élevés. À partir de ces résultats tableaux V.7 et V.8, Les fréquences diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel ρ et que l'épaisseur du noyau, par rapport à l'épaisseur totale de la plaque, diminue.

Les variations des fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques sandwich FG pour différents indices matériels en fonction du rapport cote-épaisseur sont présentées sur la figure V.4 en utilisant la théorie proposée.



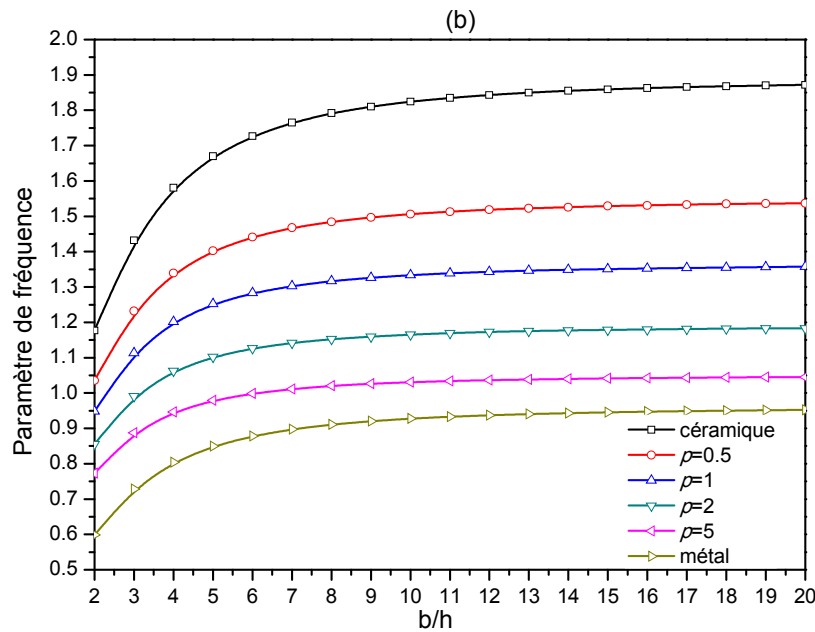


Figure V.4: Fréquence fondamentale ($\bar{\omega}$) en fonction du rapport (b/h) de la plaques sandwich symétrique et non symétrique FG pour différentes valeurs de p : La plaque sandwich (a) (2-1-2) FG et (b) (2-1-1) FG.

On peut déduire de cette figure que la fréquence fondamentale est réduite avec l'augmentation de l'indice de matériel p . Les valeurs maximales sont trouvées pour les plaques en céramique tandis que les minimales sont pour les plaques entièrement métalliques.

V.2.2.2. Résultats de l'analyse du flambage:

Les charges de stabilité critiques de la structure sont calculées en utilisant l'équation IV-26 comme un problème de valeur propre en supprimant la matrice de masse. Les forces critiques de flambage des plaques sandwich FG sont illustrées ici pour démontrer la précision du HSDT proposé.

Les tableaux V.9 et V.10 donnent des forces de flambage critiques des différents types des plaques sandwich FG en utilisant les différents modèles des plaques et différentes valeurs de l'indice matériel p .

Tableau V.9: Comparaison de la charge critique de flambage non-dimensionnelle $\bar{N}$ des plaques carrées FG soumis à une charge de compression uniaxiale ($\gamma = 0$, $h/b = 0.1$).

p	Théorie	$\bar{N}$					
		1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	CPT	13.73791	13.73791	13.73791	13.73791	13.73791	13.73791
	FSDT	13.00449	13.00449	13.00449	13.00449	13.00449	13.00449
	PSDT	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495
	SSDT	13.00606	13.00606	13.00606	13.00606	13.00606	13.00606
	HySDT	13.00552	13.00552	13.00552	13.00552	13.00552	13.00552
	Présent	13.00552	13.00552	13.00552	13.00552	13.00552	13.00552
0.5	CPT	7.65398	8.25597	8.56223	8.78063	9.18254	9.61525
	FSDT	7.33732	7.91320	8.20015	8.41034	8.78673	9.19517
	PSDT	7.36437	7.94084	8.22470	8.43645	8.80997	9.21681
	SSDT	7.36568	7.94195	8.22538	8.43712	8.81037	9.21670
	HySDT	7.36380	7.94046	8.22471	8.43647	8.81029	9.21757
	Présent	7.36523	7.94155	8.2251	8.43684	8.81016	9.21663
1	CPT	5.33248	6.02733	6.40391	6.68150	7.19663	7.78406
	FSDT	5.14236	5.81379	6.17020	6.43892	6.92571	7.48365
	PSDT	5.16713	5.84006	6.19394	6.46474	6.94944	7.50656
	SSDT	5.16846	5.84119	6.19461	6.46539	6.94980	7.50629
	HySDT	5.16629	5.83941	6.19371	6.46450	6.94952	7.50719
	Présent	5.16804	5.84083	6.19437	6.46515	6.94964	7.5063
5	CPT	2.73080	3.10704	3.48418	3.65732	4.21238	4.85717
	FSDT	2.63842	3.02252	3.38538	3.55958	4.09285	4.71475
	PSDT	2.65821	3.04257	3.40351	3.57956	4.11209	4.73467
	SSDT	2.66006	3.04406	3.40449	3.58063	4.11288	4.73488
	HySDT	2.65679	3.04141	3.40280	3.57874	4.11157	4.73463
	Présent	2.65951	3.04362	3.40419	3.58031	4.11263	4.7348
10	CPT	2.56985	2.80340	3.16427	3.27924	3.79238	4.38221
	FSDT	2.46904	2.72626	3.07428	3.27521	3.68890	4.26040
	PSDT	2.48727	2.74632	3.09190	3.19471	3.70752	4.27991
	SSDT	2.48928	2.74844	3.13443	3.19456	3.14574	4.38175
	HySDT	2.48574	2.74498	3.09111	3.19373	3.70686	4.27964
	Présent	2.48966	2.74256	3.09263	3.19556	3.70812	4.28014

Tableau V.10: La comparaison de la charge critique de flambage non-dimensionnelle $\bar{N}$ des plaques carrées FG soumis à une charge de compression biaxial ($\gamma = 1, h/b = 0.1$).

p	Théorie	$\bar{N}$					
		1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	CPT	6.86896	6.86896	6.86896	6.86896	6.86896	6.86896
	FSDT	6.50224	6.50224	6.50224	6.50224	6.50224	6.50224
	PSDT	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	SSDT	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303
	HySDT	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276
	Présent	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276
0.5	CPT	3.82699	4.12798	4.28112	4.39032	4.59127	4.80762
	FSDT	3.66866	3.95660	4.10117	4.20517	4.39336	4.59758
	PSDT	3.68219	3.95660	4.11235	4.21823	4.40519	4.60878
	SSDT	3.68248	3.97097	4.112269	4.21856	4.40519	4.60835
	HySDT	3.68190	3.97023	4.11236	4.21823	4.40514	4.60878
	Présent	3.68261	3.97078	4.11255	4.21842	4.40508	4.60832
1	CPT	2.66624	3.01366	3.20195	3.34075	3.59831	3.89203
	FSDT	2.57118	2.90690	3.08510	3.21946	3.46286	3.74182
	PSDT	2.58357	2.92003	3.09697	3.23237	3.47472	3.75328
	SSDT	2.58423	2.92060	3.090731	3.23270	3.47490	3.75314
	HySDT	2.58315	2.91970	3.09686	3.23225	3.47476	3.75359
	Présent	2.58402	2.92041	3.09719	3.23258	3.47482	3.75315
5	CPT	1.36540	1.55352	1.74209	1.82866	2.10619	2.42859
	FSDT	1.31921	1.51126	1.69269	1.77979	2.04642	2.35737
	PSDT	1.32910	1.52129	1.70176	1.78978	2.05605	2.36734
	SSDT	1.33003	1.52203	1.70224	1.79032	2.05644	2.36744
	HySDT	1.32839	1.52071	1.70140	1.78937	2.05578	2.36731
	Présent	1.32976	1.52181	1.7021	1.79015	2.05632	2.3674
10	CPT	1.28493	1.40170	1.58214	1.62962	1.89619	2.19111
	FSDT	1.23452	1.36313	1.53714	1.58760	1.84445	2.13020
	PSDT	1.24363	1.37316	1.54595	1.59736	1.85376	2.13995
	SSDT	1.24475	1.37422	1.56721	1.59728	1.57287	2.19089
	HySDT	1.24287	1.37249	1.54556	1.59687	1.85343	2.13982
	Présent	1.24435	1.37374	1.54631	1.59779	1.85406	2.14007

On peut déduire de ces deux tableaux que les résultats du modèle proposé sont en excellent accord avec ceux rapportés par d'autres théories de déformation du cisaillement. Par conséquent, le modèle proposé (avec quatre variable seulement) fournit des résultats comparables à celles déterminées avec les théories d'ordre supérieur avec cinq variables. À partir de ces résultats, on constate que les charges critiques de flambage se réduisent en augmentant le paramètre de gradient p . En général, les plaques entièrement en céramique produisent des charges de flambage critique plus élevées. La charge de flambage uniaxial peut

être deux fois que celle du biaxial et ceci indépendamment de la valeur utilisée de p et le type de plaque sandwich FG.

Les figures V.5 et V.6 présentent la variation des charges critiques de flambage symétrique (1-2-1) et non symétrique (2-2-1) pour différents indices matériels p en fonction du rapport cote-épaisseur en utilisant la nouvelle théorie proposée.

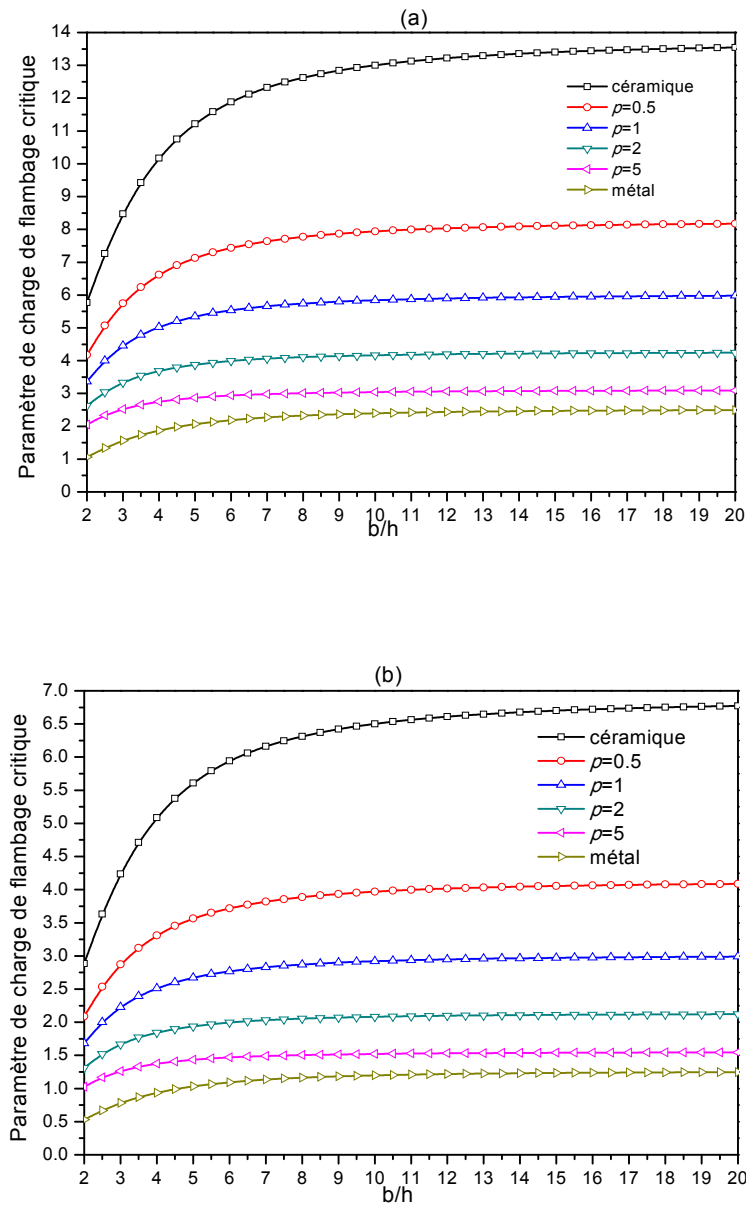


Figure V.5: Charge de flambage critique non dimensionnelle ($\bar{N}$) par rapport au quotient cote-épaisseur (b/h) des plaques sandwich (2-1-2) FG pour diverses valeurs de p : a) Plaque soumise à une charge compressive uniaxiale ($\gamma=0$) et (b) Plaque Soumis à une charge de compression biaxiale ($\gamma=1$).

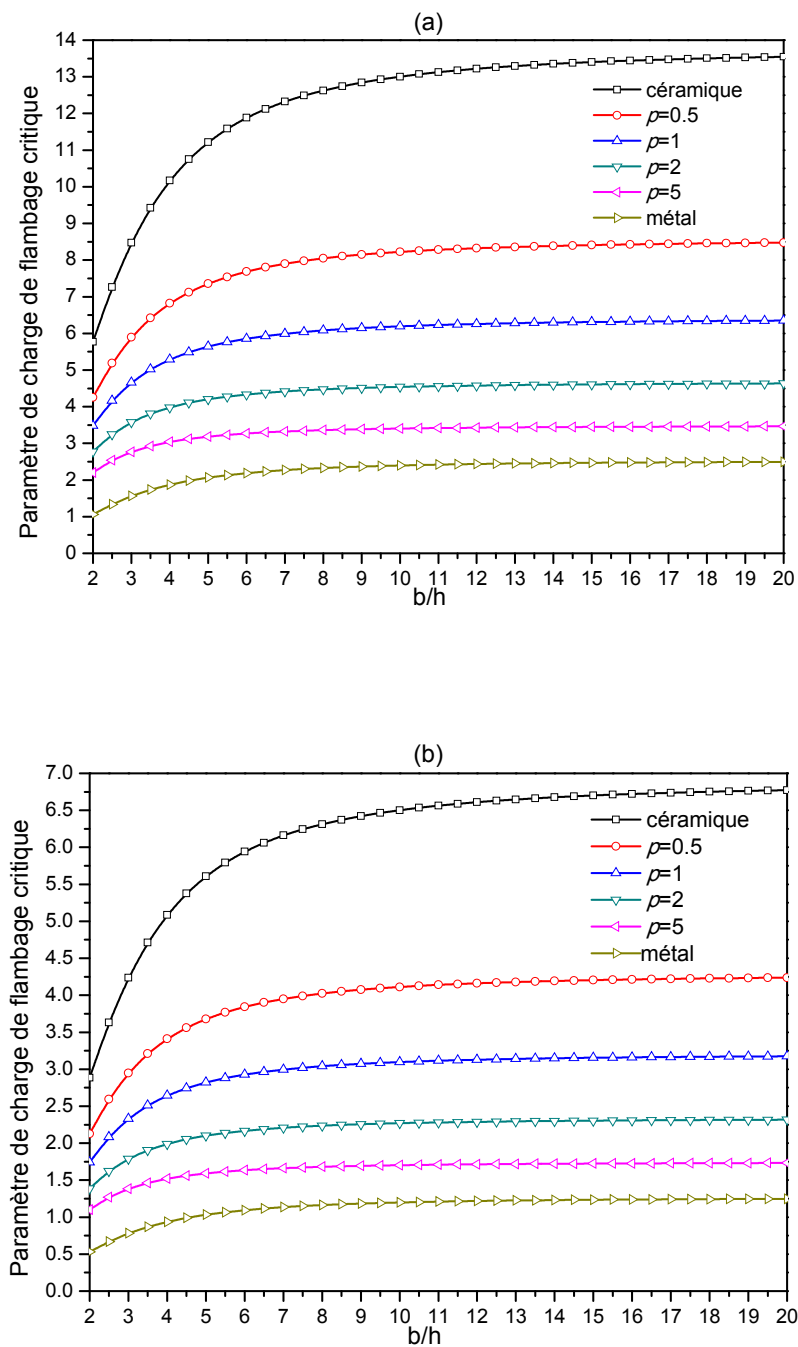


Figure V.6: Charge de flambage critique non dimensionnelle ($\bar{N}$) par rapport au quotient cote-épaisseur (b/h) des plaques sandwich (2-1-1) FG pour diverses valeurs de p : a) Plaque soumise à une charge compressive uniaxiale ($\gamma=0$) et (b) Plaque Soumis à une charge de compression biaxiale ($\gamma=1$).

On peut voir clairement d'après ces figures que la charge critique de flambage diminue avec l'augmentation de l'indice matériel p . En effet, les valeurs maximales sont trouvées pour les plaques de céramique tandis que sont minimales pour les plaques métalliques.

V.3. Conclusion :

Dans ce travail, des résultats numériques et leurs interprétations sont présentés à partir de l'analyse libre des vibrations et du flambement des plaques FG et la détermination des caractéristiques vibratoires des plaques sandwich FG

Pour la nouvelle quasi-3D HSDT pour l'analyse libre des vibrations et du flambement des plaques FG. Les résultats calculés sont en bon accord avec différents modèles HSDT et quasi-3D. Le modèle proposé est jugée appropriée, simple et efficace sur les vibrations et problème de stabilité des plaques FG.

En ce qui concerne la nouvelle HSDT qui a été proposée pour le flambage et l'analyse de vibrations libre des plaques sandwich FG, Des solutions analytiques sont trouvées en examinant la charge critique de flambage et les fréquences naturelles pour différents rapports d'épaisseur et de l'indice de matériel. Des exemples numériques sont présentés pour montrer l'exactitude de la théorie proposée dans la prévision des réponses de stabilité et de vibration des plaques sandwich FG.

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses. Actuellement les FGM sont développés pour une utilisation générale comme des éléments structurels dans les environnements à température extrêmement élevée et des applications différentes. Ainsi, la conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Au terme du travail effectué, portant sur l'analyse libre des vibrations et du flambement des plaques FG et la détermination des caractéristiques vibratoires des plaques sandwich FG; nous avons développé deux nouvelles théories (méthodes analytiques directes) qui sont présentées dans le cadre de cette thèse.

La première est une nouvelle quasi-3D HSDT pour l'analyse libre des vibrations et du flambement des plaques FG. La théorie considère la variation hyperbolique de contrainte de cisaillement transversal. Le modèle de plaque proposé ne contient que quatre inconnus et les équations de mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton. Les solutions Navier sont déterminées pour les plaques simplement appuyées et comparées aux des solutions existantes dans la littérature pour vérifier la validité de la théorie proposée. Les résultats calculés sont en bon accord avec différents modèles HSDT et quasi-3D. Le modèle proposé est jugée appropriée, simple et efficace sur les vibrations et problème de stabilité des plaques FG.

La deuxième est une nouvelle HSDT a été proposée pour le flambage et l'analyse de vibrations libre des plaques sandwich FG. Les solutions exactes pour les problèmes des plaques sandwich FG sont très limitées ; ceci nous a conduit à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants en supposant des considérations de simplification supplémentaires aux HSDT classiques, avec introduction d'un terme intégral indéterminé, le nombre de variables et les équations de mouvement de la théorie proposée sont réduits par un, et donc, rendre cette formulation simple et efficace à utiliser. Des solutions analytiques sont trouvées pour des plaques sandwich simplifiées pour examiner la charge critique de flambage et les fréquences naturelles pour différents rapports d'épaisseur et de l'indice de matériel. Un bon accord entre les résultats calculés et ceux rapportés par les théories de déformation de cisaillement existantes est démontré dans plusieurs exemples numériques qui montrent l'exactitude de la théorie proposée dans la prévision des réponses de stabilité et de vibration des plaques sandwich FG.

En perspectives à ce travail, nous envisagerons d'utiliser les deux nouvelles théories raffinées pour les cas suivants :

- ◆ La prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM ;
- ◆ Utilisation des théories raffinées pour d'autres types d'appuis ;
- ◆ Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet surement de résoudre des problèmes plus compliqués. La méthode des éléments finis permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

Finalement, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux FGM et précisément leurs comportements sous la combinaison des différents types de chargement (thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dûs aux conditions d'environnement.

- [Afaq 2003] Afaq. K.S : Développement d'ONU nouveau modèle verser les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des Effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Ait Amar Meziane et al. 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A, “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, J. Sandw. Struct. Mater., 16(3), 293-318, 2014.
- [Ait Atmane et al. 2010] Ait Atmane, H ., Tounsi, A ., Mechab, I., Adda ,B. E. A : Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement. Int. J. Mech and Mater in Design. 6 (2), 113-121, 2010.
- [Akavci 2016] Akavci, S.S, “Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation”, Composites Part B, 96, 136 – 152, 2016.
- [Akavci 2010] Akavci SS. Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. Mech Compos Mater; 46(2):215–26, 2010.
- [Akavci 2014] Akavci SS. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. Compos Struct; 108:667–76, 2014.
- [Akavci et al. 2015] Akavci, S.S., Tanrikulu, A.H, “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories“, Composites Part B, 83, 203 – 215, 2015.
- [Alijani et al. 2011] Alijani F, Amabili M, Karagiozis K, Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. J Sound Vib; 330(7):1432–54, 2011.
- [Alinia et al. 2009] Alinia MM, Ghannadpour SAM. Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates. Compos Struct; 88(3):354–9, 2009.
- [Ambartsumian 1969] Ambartsumian S.A: Théorie des plaques anisotrope. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Ambartsumian 1958] Ambartsumian, S.A: En théorie de plaques de flexion. Izv Otd Tech Nauk AN SSSR, 5, 69–77, 1958.
- [Aydogdu 2003] Aydogdu, M: Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour les plaques composites stratifiées. Composite Structures, 94–101,

2003.

- [Aydogdu 2008] Aydogdu M. Conditions for functionally graded plates to remain flat under inplane loads by classical plate theory. *Compos Struct*;82(1):155–7, 2008.
- [Aydogdu 2009] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct*; 89(1):94–101, 2009.
- [Bao et al. 1995] Bao G., Wang L., Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Baron et al. 2008] Baron C., Naili S., Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [Batra et al. 2002] Batra RC, Vidoli S. Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle. *AIAA J*; 40(1):91–104, 2002.
- [Behjat et al. 2009] Behjat B, Sadighi M, Armin A, Abbasi M, Salehi M. Static, Dynamic and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method. *J Intell Mater Syst Struct*; 20(13):1635–46, 2009.
- [Belabed et al. 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O, “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Compos.: Part B*, 60, 274-283, 2014.
- [Bellifa et al. 2016] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38(1), 265-275, 2016.
- [Bellifa et al. 2017] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R, “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech.*, 62 (6), 695-702, 2017.
- [Bennoun et al. 2016] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431, 2016.
- [Besseghier et al. 2017] Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R, “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst.*, 19(6), 601-

614, 2017.

- [Birman et al. 2013] Birman, V., Keil, T., Hosder, S, “Functionally graded materials in engineering”, In: Thomopoulos S, Birman V, Genin GM, editors. Structural interfaces and attachments in biology. New York: Springer; 19 – 41, 2013.
- [Bishop et al. 1993] Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B., A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, Journal of Materials Science Letters; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Boch 1986] Boch P., Chartier T., Huttepain M., Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192, 1986.
- [Bodaghi et al. 2011] Bodaghi M, Saidi AR. Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation. Arch Appl Mech; 81(6):765–80, 2011.
- [Bouazza et al. 2010] Bouazza M, Tounsi A, Adda-Bedia EA, Megueni A. Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. Comput Mater Sci;49(4):865–70, 2010.
- [Bouderba et al. 2016] Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R, “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, Struct. Eng. Mech., 58(3), 397-422, 2016.
- [Boukhari et al. 2016] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, Struct. Eng. Mech., 57(5), 837-859, 2016.
- [Bourada et al. 2015] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, Steel Compos. Struct., Int. J., 18(2), 409-423, 2015.
- [Bourada et al. 2016] Bourada, F., Amara, K. and Tounsi, A, “Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory”, Steel Compos. Struct., 21(6), 1287-1306, 2016.
- [Chakraverty et al. 2014] Chakraverty S, Pradhan KK. Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. Int J Appl Mech ;6(4):1450043, 2014.

- [Chen 2005] Chen CS. Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. *Compos Struct*;68(3):295–302, 2005.
- [Dau et al. 2006] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier: Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures multicouche. *Computers and Structures*, 84:1264-1274, 2006.
- [Delale et al. 1983] Delale F., Erdogan F., The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [Du et al. 2013] Du C, Li Y. Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Compos Struct*; 102:164–74, 2013.
- [Du et al. 2014] Du C, Li Y, Jin X. Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Struct*; 78:26–36, 2014.
- [Ebrahimi et al. 2014] Ebrahimi MJ, Najafizadeh MM. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Appl Math Model*;38(1):308–24, 2014.
- [El Meiche et al. 2011] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia : Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle. *International Journal of Mechanical Sciences*, 237–247, 2011.
- [Fallah et al. 2013] Fallah A, Aghdam MM, Kargarnovin MH. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method. *Arch Appl Mech*;83(2):177–91, 2013.
- [Feldman et al. 1997] Feldman, E, Aboudi, J, “Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading”, *Compos Struct*, 38, 29–36, 1997.
- [Ferreira 2005] Ferreira A, Roque C, Jorge R. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Comput Struct*; 83(27):2225–37, 2005.
- [Gilhooley et al. 2007] Gilhooley DF, Batra RC, Xiao JR, McCarthy MA, Gillespie Jr JW. Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Compos Struct*; 80(4):539–52, 2007.
- [Hamidi et al. 2015] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A, “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”,

Steel Compos. Struct., 18(1), 235-253, 2015.

- [Hebali et al. 2014] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A, “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, ASCE J. Eng. Mech., 140, 374-383, 2014.
- [Hildebrand et al. 1949] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [Hosseini-Hashemi et al. 2010] Hosseini-Hashemi S, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omid M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. Appl Math Model;34(5):1276–91, 2010.
- [Hosseini-Hashemi et al. 2011a] Hosseini-Hashemi, S, Fadaee, M, Atashipour, SR, “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”, Int J Mech Sci, 53, 11–22, 2011a.
- [Hosseini-Hashemi et al. 2011b] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S, “Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure”, Compos. Struct. 93(2), 722–735, 2011b.
- [Hosseini-Hashemi et al. 2011c] Hosseini-Hashemi, S, Fadaee, M, Atashipour, SR, “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”, Int J Mech Sci, 53, 11–22, 2011c.
- [Houari 2011] Houari MSA, Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [Houari et al. 2016] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R, “A new simple three -unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, Steel Compos. Struct., 22(2), 257-276, 2016.
- [Hu et al. 2011] Hu Y, Zhang X. Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate. Mech Based Des Struct Mach ;39(3):367–77, 2011.
- [Javaheri 2002a] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates. AIAA J; 40(1):162–9, 2002a.
- [Javaheri 2002b] Javaheri R, Eslami MR. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. ZAMM – J Appl Math Mech; 82(4):277–83, 2002b.

- [Jha et al. 2013] Jha, DK, Kant, T, Singh, RK, “Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects”, *Compos Struct*, 96, 799–823, 2013.
- [Jin et al. 2014] Jin, G., Su, Z., Shi, S., Ye, T., Gao, S, “Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions”, *Compos. Struct.*, 108, 565–577, 2014.
- [Kant et al. 2002] Kant.T, Swaminathan.K, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [Kar et al. 2015] Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K, “Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading”, *Steel Compos. Struct.*, 19(4), 1011-1033, 2015.
- [Karama et al. 2003] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou: Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité. *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [Kawasaki et al. 1997] Kawasaki A., Watanabe R. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics International*, 8842(95):73–83, 1997.
- [Kiani et al. 2011] Kiani Y, Bagherizadeh E, Eslami MR. Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions). *ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech*; 91(7):581–93, 2011.
- [Kieback et al. 2003] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [Kirchhoff 1850a] Kirchhoff, G.R: Sur la balance et le mouvement d'un disque élastique. *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 40, 51-88, 1850a.
- [Kirchhoff 1850b] Kirchhoff, G.R: À propos des vibrations d'une plaque élastique circulaire. *Poggendorffs Annalen*, 81, 258–264, 1850b.
- [Koizumi 1991] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu Japan 520-21, 1991.

- [Koizumi 1992] Koizumi M., Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [Koizumi 1993] Koizumi, M, “The concept of FGM ceramic transactions”, *Funct Grad Mater*, 34, 3–10, 1993.
- [Koizumi 1997] Koizumi M., FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. 1997.
- [Kokini et al. 1990] Kokini K., Takeuchi Y., Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [Lanhe 2014] Lanhe W. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Compos Struct*; 64(2):211–8, 2014.
- [Lévy 1877] Lévy Maurice. « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3.3 , p. 219–306, 1877.
- [Li et al. 2008] Li, Q, Iu, VP, Kou, KP, “Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates”, *J Sound Vib*, 311, 498–515, 2008.
- [Lo et al. 1977] Lo. K.H & R.M. Christensen: Une théorie d'ordre supérieur de la déformation de la plaque. Partie 1: plates homogène, Vol.44, N° 4, pages 669-676, 1977.
- [Lo et al. 1997] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A high-order theory of plate deformation part 2: laminated plates. *J Appl Mech*; 44(4):669–76, 1997.
- [Lo et al. 2015] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates. *J Appl Mech* 1977;44(4):663–8. 82 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128; 70–86, 2015.
- [Lostec 1997] Lostec L., Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, 1997.
- [Mahdavian 2009] Mahdavian, M, “Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading”, *J Solid Mech*, 1, 213–225, 2009.
- [Mahdavian 2009] Mahdavian, M, “Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive

loading”, J Solid Mech, 1, 213–225, 2009.

- [Mahi et al. 2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A, “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, Appl. Math. Model., 39, 2489-2508, 2015.
- [Mantari et al. 2011] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higherorder shear deformation theory. Compos Struct;94(1):37–49, 2011.
- [Mantari et al. 2012] Mantari JL, Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. Compos Struct;94(8):2561–75, 2012.
- [Mantari et al. 2013] Mantari JL, Guedes Soares C. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. Compos B Eng;45(1):268–81, 2013.
- [Mantari et al. 2014a] Mantari JL, Guedes Soares C. Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. Int J Mech Sci; 78:60–71, 2014a.
- [Mantari et al. 2014b] Mantari JL, Guedes Soares C. Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. Compos B Eng; 56:126–36, 2014b.
- [Mantari 2015] Mantari, J.L, “A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation”, Mechanics of Materials, 86, 31–43, 2015.
- [Marur 1999] Marur, PR. , "Fracture behavior of functionally graded materials", PhD thesis. Alabama: Auburn University; 1999.
- [Matsunaga 2008a] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. Compos Struct;84(2):132–46, 2008a.
- [Matsunaga 2008b] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. Compos Struct;82(4):499–512, 2008b.
- [Meksi et al. 2015] Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A, "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", Structural

Engineering and Mechanics, 53(6), 1215-1240, 2015.

- [Mindlin 1951] Mindlin. R.D: Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mistler 1973] Mistler R.E., High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull; 52 (11): 850-854, 1973.
- [Mohammadi et al. 2010] Mohammadi, M, Saidi, A, Jomehzadeh, E, “Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates”, Appl Compos Mater, 17, 81–93, 2010.
- [Moya et al. 1992] Moya J.S., Sanchez-Herencia A.J., Requena J., MORENO R., Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, Materials Letters; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [Murthy 1981] Murthy. M.V.V: Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé. Rapport technique, NASA, 1981.
- [Naghdi 1957] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380, 1957.
- [Navid Saeedi 2012] Navid Saeedi. Une approche très efficace pour l’analyse du dé laminage des plaques stratifiées infiniment longues, PhD thesis, Université de Paris Est, France, 2012.
- [Nelson et al. 1974] Nelson. R.B & D.R.Lorch: Une théorie raffinée pour platesl orthotrope stratifié. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183, 1974.
- [Neves et al. 2012a] Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, Soares, CMM, “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, Compos Struct, 94, 1814–1825, 2012a.
- [Neves et al. 2012b] Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, Soares, CMM, “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, Compos Part B: Eng, 43, 711–725, 2012b.
- [Nguyen et al. 2007] Nguyen T.K., Sab K., Bonnet G., Shear correction factors of functionally graded plates. Mech. Advanced Mater. Struct; 14 (8): 567-575, 2007.

- [Nguyen et al. 2012] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments. *Mech Compos Mater*;48(4):435–48, 2012.
- [Nguyen et al. 2013a] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments. *Compos Struct*; 106:590–600,2013a.
- [Nguyen et al. 2013b] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperaturedependent properties on elastic foundation. *J Vib Control*. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546313494114>. 2013b.
- [Nguyen et al. 2014a] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened FGM cylindrical panels on elastic foundation subjected to mechanical loads. *Eur J Mech A Solids*; 46:60–71, 2014a.
- [Nguyen et al. 2014b] Nguyen DD, Pham TT. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression. *Compos Struct*; 110:200–6, 2014b.
- [Nguyen 2015] Nguyen, T.K, “A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11(2), 203 – 219, 2015.
- [Niino et al. 1988] Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. Method of producing a functionally gradient material. U.S. Patent 4571099, 1988.
- [Noor et al. 1992] Noor Ahmed K., Burton W. Scott. « Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 59.4 , p. 868. ISSN : 00218936, 1992.
- [Okamura 1991] Okamura H., State of the art of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [Pagano 1969] Pagano N. J.. « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending ». en. In : *Journal of Composite Materials* 3.3, p. 398–411. ISSN : 0021- 9983, 1530-793X, 1969.

- [Pagano 1970] Pagano N. J. « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». en. In : Journal of Composite Materials 4.1, p. 20–34. ISSN : 0021-9983, 1530-793X, 1970.
- [Panc 1975] Panc V. Theories of elastic plates. Springer; 1975.
- [Polit et al. 1997] Polit. O and M. Touratier: Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses. Composite Structures, 38(1-4):37-44, 1997.
- [Qian et al. 2003] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Free and forced vibrations of thick rectangular plates using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless Petrov–Galerkin (MLPG) method. Comp Model Eng Sci;4(5):519–34, 2003.
- [Qian et al. 2004] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. Compos B Eng;35(6):685–97, 2004.
- [Rahmani et al. 2017] Rahmani, O., Refaieinejad, V., Hosseini, S.A.H, “Assessment of various nonlocal higher order theories for the bending and buckling behavior of functionally graded nanobeams”, Steel Compos. Struct., 23(3), 339-350, 2017.
- [Reddy 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.
- [Reddy et al. 1991] Reddy K. J., Vijayakumar K., Nagaraja S. « New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates ». In : AIAA Journal 29.11 p. ISSN : 0001-1452, 1533-385X, 1991.
- [Reddy 1997] J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [Reddy et al. 1998] Reddy JN, Chin CD. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. J Therm Stresses;21(6):593–626, 1998.
- [Reddy 1999] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Reddy et al. 1999] Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. Eur J Mech A Solids;18(2):185–99, 1999.

- [Reddy 2011] Reddy JN. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int J Aerosp Lightweight Struct*;1(1):1–21, 2011.
- [Reissner 1945] Reissner.E : Une théorie simple d'ordre supérieur pour plates composite stratifiée. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [Reissner 1947] Reissner E. On bending of elastic plates. *Q Appl Math*;5(1):55–68, 1947.
- [Reissner 1975] Reissner. E: Sur flexion transversale de plaques, y compris les effets de déformation transversale de cisaillement. *Int. J. Solids Structures*; 25(5):495-502, 1975.
- [Shahsiah et al. 2003a] Shahsiah R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. *J Therm Stresses*; 26(3):277–94, 2003a.
- [Shahsiah et al. 2003b] Shahsiah R, Eslami MR. Functionally graded cylindrical shell thermal instability based on improved Donnell equations. *AIAA J*; 41(9):1819–26, 2003b.
- [Shi 2007] Shi G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int JSolids Struct*;44(13):4399–417, 2007.
- [Shimpi 2002] Shimpi, R.P: Théorie des plaques raffinée et ses variantes. *AIAA Journal*, 137–146, 2002.
- [Shyang-ho et al. 2003] Shyang-ho. Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [Sobhy 2013] Sobhy, M, “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos Struct*, 99, 76–87, 2013.
- [Soldatos 1992] Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech*;94(3):195–220, 1992.
- [Srinivas et al. 1970] Srinivas S., Rao A.K. « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ». In : *International Journal of Solids and Structures* 6.11 , p. 1463–1481. ISSN : 0020-7683, 1970.
- [Steffens et al. 1990] Steffens H.D., Dvorak M., Wewel M., Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-*

FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, 1990.

- [Stein 1986] Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA J*; 24(9):1537–44, 1986.
- [Swaminathan et al. 2014] Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T, “Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions”, *Eur. J. Mech. A/Solid.*, 47, 349-361, 2014.
- [Swaminathan et al. 2015] Swaminathan, K, Naveenkumar, D.T, Zenkour, A.M, Carrera, E, “Stress, vibration and buckling analyses of FGM platesda state-of-the-art review”, *Compos Struct*, 120, 10 – 31, 2015.
- [Takahashi et al. 1990] Takahashi M., Itoh Y., Kashiwaya H., Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [Thai et al. 2012] Thai HT, Vo TP. A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int J Eng Sci*; 54:58–66, 2012.
- [Thai et al. 2014] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Comput Struct*; 141:94–112, 2014.
- [Tian et al. 2016] Tian, A, Ye, R, Chen, Y, “A new higher order analysis model for sandwich plates with flexible core”, *J Compos Mater*, 50(7), 949 – 961, 2016.
- [Tounsi et al. 2013] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A, “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Tech.*, 24, 209-220, 2013.
- [Tounsi et al. 2016] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A, “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547 – 565, 2016.
- [Touratier 1991] Touratier. M: Un efficace theoryll de plaque standard. *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [Touratier 1991] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci*;29(8):901–16, 1991.

- [Uymaz et al. 2007] Uymaz, B., Aydogdu, M, “Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions”, *J. Reinf. Plast. Compos.*, 26(18), 1847–1863, 2007.
- [Vel et al. 2004] Vel, SS, Batra, RC, “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plate”, *J Sound Vib*, 272, 703–730, 2004.
- [Wang et al. 2001] Wang CM, Lim GT, Reddy JN, Lee KH. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Eng Struct*;23(7):838–49, 2001.
- [Wattanasakulpong et al. 2013] Wattanasakulpong N, Prusty GB, Kelly DW. Free and forced vibration analysis using improved third order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading. *J Sandwich Struct Mater*; 15(5):583–606, 2013.
- [Whitney 1973] Whitney. J.M: Facteurs de correction de cisaillement pour les stratifiés orthotropes sous loads statique. *Mécanique J.Applied*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [Woo et al. 2001] Woo J, Meguid SA. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct*;38(42):7409–21, 2001.
- [Woo et al. 2003] Woo J, Meguid SA, Liew KM. Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mech*; 165(1–2):99–115, 2003.
- [Woo et al. 2006] Woo J, Meguid SA, Ong LS. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib*; 289(3):595–611, 2006.
- [Wu et al. 2011] Wu, C-P, Chiu, K-H, “RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates”, *Compos Struct*, 93(5), 1433–1448, 2011.
- [Xiang et al. 2011] Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A nth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct*; 93(11):2826–32, 2011.
- [Xiang et al. 2012] Xiang S, Kang G, Xing B. A nth-order shear deformation theory for the free vibration analysis on the isotropic plates. *Meccanica*; 47(8):1913–21, 2012.

- [Xiang et al. 2013a] Xiang S, Kang G. Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory. *Compos Struct*; 99:224–30, 2013a.
- [Xiang et al. 2013b] Xiang S, Kang G. A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *Eur J Mech A Solids*;37:336–43, 2013b.
- [Xiang et al. 2013c] Xiang S, Kang G, Yang M, Zhao Y. Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Compos Struct*;96:226–31, 2013c.
- [Xiang et al. 2014] Xiang S, Kang G, Liu Y. A nth-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*;111:224–31, 2014.
- [Yaghoobi et al. 2013a] Yaghoobi H, Yaghoobi P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*;48(8):2019–35, 2013a.
- [Yaghoobi et al. 2013b] Yaghoobi H, Torabi M. Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions. *J Therm Stresses*;36(9):869–94, 2013b.
- [Yanga et al. 2003] Yanga J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non-Linear Mech*;38(4):467–82, 2003.
- [Zenkour 2004a] Zenkour AM. Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mech*; 171(3–4):171–87, 2004a.
- [Zenkour 2004b] Zenkour AM. Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Compos Struct*;65(3):367–79, 2004b.
- [Zenkour 2004c] Zenkour AM. Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *J Eng Math*; 50(1):75–93, 2004c.
- [Zenkour 2005a] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1-deflection and stresses. *Int J Solids Struct*;42(18–19):5224–42, 2005a.
- [Zenkour 2005b] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2-buckling and free vibration. *Int J Solids Struct*;42(18–19):5243–58, 2005b.

- [Zenkour 2005c] Zenkour AM. On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory. *Int J Struct Stab Dyn*;5(02):279–97, 2005c.
- [Zenkour 2006] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*; 30(1):67–84, 2006.
- [Zenkour 2007] Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech*;77(4):197–214, 2007.
- [Zenkour 2009] Zenkour AM. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci*; 51(11–12):869–80, 2009.
- [Zenkour et al. 2010a] Zenkour AM, Alghamdi NA. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mech Adv Mater Struct*;17(6):419–32, 2010a.
- [Zenkour et al. 2010b] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct*; 93(1):93–102, 2010b.
- [Zenkour et al. 2011] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory. *J Therm Stresses*;34(11):1119–38, 2011.
- [Zenkour 2012] Zenkour AM. Exact relationships between classical and sinusoidal theories for FGM plates. *Mech Adv Mater Struct*;19(7):551–67, 2012.
- [Zhang et al. 2015] Zhang DG, Zhou YH. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput Mater Sci* 2008;44(2):716–20. 80 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128 70–86, 2015.
- [Zidi et al. 2017] Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R, “A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams”, *Struct. Eng. Mech.*, 64(2), 145-153, 2017.