



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

BP 89 SBA 22000-ALGERIE-

TEL/FAX 048-77-66-20

THESE

Présentée par

CHARIF Fayssal

Pour obtenir le diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle

Spécialité: Mathématiques

Option : Systèmes dynamiques et applications

Intitulée

Modèles Mathématiques Avec Impulsions

Soutenue le : 07-12-2017

Devant le jury composé de :

Président : Mohamed HELAL, MCA. UNIV. S.B.A

Examineurs : Ahmed LAKMECHE, MCA. UNIV. S.B.A

Ghouti DJELLOULI, MCA. UNIV de Saida

Directeur de thèse : Abdelkader LAKMECHE, Prof. UNIV. S.B.A

Remerciements

Je remercie le Bon Dieu, tout puissant de m'avoir donné la force et le courage qui m'ont permis de surmonter beaucoup de difficultés pour pouvoir accomplir cette étape scientifique particulière qu'est la thèse de doctorat.

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer mes vifs remerciements :

A Mr. A. LAKMECHE mon encadreur pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé pendant toute la période de mon travail. Je tiens à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler avec lui.

Je tiens également à remercier Monsieur le Président de jury Mohamed HELAL pour son aide considérable, ses indications, et ses idées claires et constructives qu'il m'a apprises.

Toute l'expression de ma profonde reconnaissance et ma grande gratitude s'adressent au Messieurs les membres de jury Ahmed LAKMECHE et Ghouti DJELLOULI d'avoir accepté d'apprécier ce travail.

Je tiens également à associer ce travail à tous mes collègues de promotion que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant cette période de formation.

Finalement, mes remerciement à tous les professeurs du Département de Mathématiques.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents.

A ma soeur.

A mes frères.

A toute ma famille.

A toutes mes amis surtout.

A mes collègues.

A tous mes enseignants.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	5
1.1 Équations aux différences	5
1.2 Modèles logistiques	6
1.3 Application de Fredholm et projecteurs	6
1.4 Généralités sur les équations différentielles	8
1.5 Flots définis par des équations différentielles ordinaires	9
1.6 Stabilité des équilibres	11
1.7 La stabilité d'un point fixe d'une application	11
1.8 Stabilité de l'équilibre pour un système linéaire	12
1.9 Stabilité au sens de Lyapunov	13
1.10 Solutions périodiques	13
1.11 Théorie de bifurcation	15
1.11.1 La réduction de Lyapunov-Schmidt	15
2 Un modèle Proie-Prédateur	17
2.1 Existence des solutions	17
2.2 Positivité des solutions	18
2.3 L'existence globale des solutions	18
2.4 Bornitude des solutions	19
2.5 Stabilité des équilibres	19
2.6 Périodicité des solutions	20
2.7 Simulations numériques	23

3	Modèles Proie-prédateur avec impulsion dépendant de l'état	24
3.1	Existence et stabilité des solutions pour $\tau = 0$	24
3.1.1	Existence de solution triviale pour $\tau = 0$	25
3.1.2	Stabilité orbitale de $(x_s, 0)$	26
3.1.3	Stabilité exponentielle de $(x_s, 0)$	27
3.1.4	Existence de solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 pour $\tau = 0$	29
3.1.5	Stabilité de la solution $Z_{(0,1)}$	33
3.1.6	Simulations numériques	35
3.2	Existence et stabilité des solutions périodiques non-triviales positives d'ordre 1 pour $p = q = 0, \tau \neq 0$	36
3.2.1	Existence de solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 pour $p, q = 0, \tau \neq 0$	36
3.2.2	Stabilité de la solution $Z_{(1,0)}$	37
3.3	Existence de solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 pour $\tau, q, p \neq 0$	37
3.4	Bifurcation de la solution périodique non-triviale périodique pour $p, q \neq 0, \tau \neq 0$	40
3.5	Annexe	43
4	Modèles de chimiothérapie	59
4.1	Analyse du modèle	60
4.2	Stabilité de la solution triviale ζ	62
4.3	Analyse de bifurcation	64
5	Modèles de traitement chimiothérapeutique par des médicaments à effet instantané	69
5.1	Stabilité de la solution triviale	72
5.2	Cas Critique	75
5.3	Annexe	84
	Conclusions et perspectives	100
	Bibliographie	101

Introduction

Cette thèse a pour thème l'étude des modèles mathématiques avec impulsions. Nous nous intéressons à deux problèmes de dynamique des populations. Le premier concerne le cas d'un modèle de Proie-Prédateur avec impulsion dépend de l'état, le deuxième concerne les modèles mathématiques impulsifs de la chimiothérapie du cancer.

Les modèles considérés sont des systèmes d'équations différentielles continues avec des équations discrètes. L'analyse mathématique de ces modèles permet de dégager des stratégies de contrôle de la maladie pour la réduire ou l'éradiquer complètement.

Le chapitre préliminaire présente des définitions et des résultats préliminaires nécessaires pour la suite de la thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous analysons les propriétés asymptotiques pour un système Proie-Prédateur, qui nous aident à étudier le même modèle avec impulsions dans le chapitre suivant.

Dans le troisième chapitre, nous considérons un modèle Proie-Prédateur avec des effets impulsifs dépendant de l'état, dont le modèle est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) & x(t) \neq h_1 \wedge h_2, \\ \dot{y} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bx}) & x(t) \neq h_1 \wedge h_2, \\ \Delta x = 0 & x(t) = h_1, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = \tau & x(t) = h_1, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -px & x(t) = h_2, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = -qy & x(t) = h_2. \end{cases}$$

Ce modèle a été développé dans [48] puis repris dans [11]

L'analyse mathématique de ce modèle permet d'étudier l'existence des solutions périodiques triviales et non triviales d'ordre 1 et leurs stabilités. A la fin de ce chapitre nous illustrons certains de nos résultats par des simulations numériques.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions un modèle de traitement chimiothérapeutique par deux médicaments l'un à effet instantané et l'autre avec effet continu pour une population de cellules constituées de cellules normales et cellules tumorales, les cellules tumorales sont constituées de cellules sensibles et résistantes. Ainsi, nous obtenons un modèle de chimiothérapie impulsif, le modèle considéré ici est inspiré de [7], [37] - [49]. Le modèle est décrit par les équations différentielles impulsives suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} - \lambda_1(x_2 + x_3) \right) - \theta_1 x_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_2} - \lambda_2(x_1 + x_3) \right) - m x_2 - \theta_2 x_2, \\
\frac{dx_3}{dt} &= r_3 x_3 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_3} - \lambda_3(x_1 + x_2) \right) + m x_2 - \theta_3 x_3, \\
x_1(t_i^+) &= T_1 x_1(t_i), \\
x_2(t_i^+) &= (T_2 - R) x_2(t_i), \\
x_3(t_i^+) &= T_3 x_3(t_i) + R x_2(t_i).
\end{aligned}$$

Nous étudions également, la stabilité de la solution triviale correspondant à l'éradication de la tumeur, et nous cherchons les conditions nécessaires à l'éradication de la tumeur. Ainsi, nous discutons la perte de la stabilité des solutions périodiques non triviales. Cette perte de stabilité est caractérisée par une bifurcation, et elle correspond à la persistance de la tumeur.

Le dernier chapitre est dédié à l'étude d'un modèle de traitement chimiothérapeutique par des médicaments à effet instantané pour une population de cellules constituées de cellules normales et cellules tumorales, les cellules tumorales sont constituées de cellules sensibles et résistantes. Ainsi, nous obtenons le modèle de chimiothérapie impulsif suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} - \lambda_1(x_2 + x_3) \right), \\
\dot{x}_2(t) &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_2} - \lambda_2(x_1 + x_3) \right) - m x_2, \\
\dot{x}_3(t) &= r_3 x_3 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_3} - \lambda_3(x_1 + x_2) \right) + m x_2, \\
A_1(x_1, x_2, x_3)(n\tau_0 + t_1) &= t_1 x_1(n\tau_0 + t_1), \\
A_2(x_1, x_2, x_3)(n\tau_0 + t_1) &= (T_2 - R_A) x_2(n\tau_0 + t_1), \\
A_3(x_1, x_2, x_3)(n\tau_0 + t_1) &= T_3 x_3(n\tau_0 + t_1) + R_A x_2(n\tau_0 + t_1), \\
B_1(x_1, x_2, x_3)((n+1)\tau_0) &= \Theta_1 x_1((n+1)\tau_0), \\
B_2(x_1, x_2, x_3)((n+1)\tau_0) &= (\Theta_2 - R_B) x_2((n+1)\tau_0), \\
B_3(x_1, x_2, x_3)((n+1)\tau_0) &= \Theta_3 x_3((n+1)\tau_0) + R_B x_2((n+1)\tau_0).
\end{aligned}$$

L'analyse mathématique de ce modèle permet d'étudier la stabilité des solutions périodiques triviales et l'apparition des solutions périodiques non-triviales, à l'aide de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt.

A la fin de cette thèse nous donnons des conclusions et des perspectives pour la suite de ce travail, puis une bibliographie contenant les références de cette thèse. .

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions de base des systèmes dynamiques, et nous donnons quelques propriétés fondamentales utiles pour l'étude asymptotique des systèmes linéaires et non-linéaires.

1.1 Équations aux différences

Définition 1.1.1 ([40]). Une équation aux différences du premier ordre est une équation de la forme

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

L'équation aux différences (1.1) est linéaire si f est une fonction linéaire par rapport à son deuxième argument, sinon elle est non linéaire.

Une solution de l'équation aux différences (1.1) est une suite $y_n; n \geq 0$; qui satisfait l'équation (1.1) pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

En plus de l'équation aux différences elle-même, il peut également y avoir une condition initiale

$$y_0 = \alpha.$$

Dans le cas simple où f dépend seulement de y_n , i.e.

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

On peut calculer la solution $y_1 = f(y_0)$ et $y_2 = f(y_1) = f[f(y_0)]$, ainsi de suite, en général on aura $y_n = f(y_{n-1}) = f^n(y_0)$.

Ce procédé est désigné sous le nom "Equation aux différence".

Il est souvent d'intérêt primaire de déterminer le comportement du y_n quand $n \rightarrow \infty$.

Si $y_n = y_{n-1}$ pour tous n , la solution y_n s'appelle solution d'équilibre (solution stationnaire).

1.2 Modèles logistiques

L'un des premiers modèles mathématiques est ce qu'on appelle le modèle exponentiel.

Dans le cas déterministe pour une seule espèce N , on obtient $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$, où $N(t)$ est le nombre des individus de la population N .

Dans le cas discret on obtient $N_{k+1} = hN_k$.

En 1836, Le mathématicien belge Pierre Francois Verhulst [30, 40] a proposé le modèle logistique suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad (1.2)$$

où r est le taux de croissance de la population modélisée par N , N étant le nombre d'individu, et K est la capacité de charge. En général r et K sont des constantes positives. L'équation (1.2) a deux points stationnaires $N = 0$ et $N = K$. Une linéarisation de (1.2) près de $N = 0$ montre que l'équilibre $N = 0$ est instable. La linéarisation près de $N = K$ montre que l'équilibre $N = K$ est stable. La solution analytique de (1.2) est donnée par :

$$N(t) = \frac{N(0)K \exp(rt)}{K + N(0)(\exp(rt) - 1)}, \quad t > 0.$$

Nous pouvons vérifier que la population converge vers K quand t tend vers $+\infty$.

Dans le cas de plusieurs espèces en interactions on peut citer un modèle très répandu

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = r_i N_i(t) \left(1 - \frac{N_i(t)}{K_i}\right) + C_i N_i f_i(N_1, \dots, N_{i-1}, N_{i+1}, \dots, N_l),$$

où N_i est le nombre d'individu de l'espèce i qui en interaction avec espèces $N_1, \dots, N_{i-1}, N_{i+1}, \dots, N_l$, avec C_i et f_i représentent l'effet de l'interaction.

Les solutions de ce modèles sont en général bornées ce qui est plus réaliste que le cas linéaire.

D'autres modèles où une partie des espèces sont modélisés par des équations logistiques et le reste par d'évolutions autres que logistiques, existent aussi.

Notons que dans le cas des modèles Proie-Prédateur, les modèles ne sont pas tous des modèles logistiques, en particulier l'équation décrivant l'évolution du Prédateur.

1.3 Application de Fredholm et projecteurs

Application de Fredholm

Dans tout ce qui suit, on suppose que X et Y sont deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Pour toute application linéaire L de X dans Y , on note le noyau de L par $\ker L = L^{-1}\{0\}$ et l'image de L par $\text{Im} L = L(\text{dom} L)$.

Définition 1.3.1 ([57]). On dit que l'application linéaire $L : \text{dom}L \subset X \rightarrow Y$ est une application de Fredholm si les conditions suivantes sont vérifiées :

$\ker L$ est de dimension finie,

$\text{Im}L$ est un fermé de Y de codimension finie, où la codimension de $\text{Im}L$ dans Y est la dimension de l'espace vectoriel quotient $Y/\text{Im}L = \{y + \text{Im}L : y \in Y\}$, on la note $\text{codim Im}L$: L'indice de l'application de Fredholm L est l'entier

$$\text{ind}(L) = \dim(\text{Ker}L) - \text{codim}(\text{Im}L).$$

Projecteurs

Définition 1.3.2 ([57]). Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E est idempotent lorsque $f \circ f = f$.

Un endomorphisme idempotent est aussi appelé projecteur.

Étant donné un projecteur P , on a

$$E = \ker P \oplus \text{Im}P.$$

Pour toute application de Fredholm $L : X \rightarrow Y$, il existe un couple (P, Q) de projecteurs continus $P : X \rightarrow X$ et $Q : Y \rightarrow Y$ telles que :

$$\text{Im}P = \text{Ker}L, \quad \text{et} \quad \text{Ker}Q = \text{Im}L.$$

En effet, $\ker L$ étant de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique noté G_1 . On prend pour P la projection sur $\ker L$ parallèlement à G_1 , donc $\text{Im}P = \ker L$. De même $\text{Im}L$ étant un fermé de codimension finie, il admet un supplémentaire topologique noté G_2 . On prend pour Q la projection sur G_2 parallèlement à $\text{Im}L$, donc $\ker Q = \text{Im}L$.

Puisque $X = \text{Im}P \oplus \ker P$ donc $X = \ker L \oplus \ker P$. De même, puisque $Y = \text{Im}Q \oplus \ker Q$ donc $Y = \text{Im}L \oplus \text{Im}Q$.

Par conséquence la restriction L_P de L sur $\text{dom}L \cap \ker P$ dans $\text{Im}L$ est inversible d'inverse $K_P : \text{Im}L \rightarrow \text{dom}L \cap \ker P$, il en résulte que $PK_P = 0$. Dans $\text{Im}L$, on a

$$LK_P = L(I - P)K_P = L_P(I - P)K_P = L_P K_P = I.$$

De même, dans $\text{dom}L$ on a

$$K_P L = K_P L(I - P) = K_P L_P(I - P) = I - P.$$

Dans la suite, $K_{PQ} : Y \rightarrow \text{dom}L \cap \ker P$ telle que $K_{PQ} = K_P(I - Q)$ désigne l'inverse générale de L .

Théorème de Schwartz

Théorème 1.3.3 ([10]). Soient E et F des espaces vectoriels réels de dimension finie et $U \subset E$ un ouvert, si f appartient à $C^2(U, F)$, on a pour tout $(h; k) \in E^2$

$$D_h(D_k f) = D_k(D_h f).$$

En particulier si $f \in C^2(U, F)$, on a pour tout $(i, j) \in (1, p^2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Rayon spectral

Définition 1.3.4 ([46]). Si $A = Mn(C)$ est l'algèbre des matrices carrées complexes d'ordre n , le spectre d'une matrice $a \in A$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice, mais dans le cas plus général où $A = L(X)$ est l'algèbre des endomorphismes d'un espace de Banach X de dimension infinie, il est important de savoir que $\sigma(T)$, pour $T \in L(X)$, est en général plus grand que l'ensemble des valeurs propres.

1.4 Généralités sur les équations différentielles

Soit le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t \in (0, b) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.4.1. La fonction $x \in C^1(\Omega)$ est dite solution de (1.3) si x vérifie le système (1.3).

Théorème 1.4.2 (Cauchy-Lipschitz [51]). On considère le système différentiel (i.e. équation différentielle multidimensionnelle)

$$x' = f(t, x) \quad (1.4)$$

où f est continue sur un ouvert $\Omega = I \times U$, I intervalle de $\mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Soient $x_0 \in U$ et $t_0 \in I$.

Résultat local : Si f est localement lipschitzienne par rapport à x , il existe une unique solution maximale $x(t)$ de (1.4) vérifiant $x(t_0) = x_0$. Son intervalle de définition est un ouvert.

Résultat global : Si f est K -Lipschitzienne par rapport à x uniformément en t sur l'intervalle $[t_0 - a, t_0 + a] \subset I$. Il existe une unique solution $x(t)$ de (1.4) qui satisfait $x(t_0) = x_0$ définie sur $[t_0 - c; t_0 + c]$ avec $c < \min(a, 1/K)$.

Remarque 1.4.3. Si f est de classe C^1 sur Ω , alors f satisfait une condition de Lipschitz locale d'après le théorème des accroissements finis, et les hypothèses du résultat local sont satisfaites. De plus, dans ces deux résultats, si f est de classe C^k alors la solution du problème de Cauchy est de classe C^{k+1} .

Théorème 1.4.4 (Cauchy-Lipschitz [16]). Si f est continue sur Ω et s'il existe une constante $l > 0$ telle que

$$\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \leq l \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega, \quad t > 0,$$

alors le problème (1.3) admet une solution globale et elle est unique.

1.5 Flots définis par des équations différentielles ordinaires

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0.$$

La solution est donnée par $X(t) = \exp(At)X_0$, et elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit l'application

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$t \rightarrow \phi(t, x_0) = \exp(At)x_0,$$

on a $\phi(0, x_0) = x_0$, $\phi(t+s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0))$.

Remarque 1.5.1. $\phi(\cdot, x_0)$ est la trajectoire de la solution qui passe par x_0 . Si on fait varier x_0 et t , on obtient ce qu'on appelle un flot.

Soit le système non linéaire

$$x' = f(x),$$

on désigne par $J(x_0) = (\alpha, \beta)$ l'intervalle maximale d'existence de la solution de

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Définition 1.5.2 ([24]). Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(E)$, pour $x_0 \in E$ on note par $\phi(t, x_0)$ la solution de (1.5) définie sur son intervalle maximale $J(x_0)$. Pour $t \in J(x_0)$ l'ensemble des applications $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ s'appelle le flot de l'équation différentielle $x' = f(x)$.

Remarque 1.5.3. L'application $\phi : J(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow \phi(t, x_0)$, représente une trajectoire, passant par x_0 à l'instant 0.

Théorème 1.5.4 ([24]). Soit f de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour $x_0 \in E, t \in J(x_0)$ et $s \in J(\phi_t(x_0))$, on a $s+t \in J(x_0)$ et $\phi_{s+t}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0))$.

Définition 1.5.5. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application

$$X : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

de classe C^k définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est appelée un champ de vecteurs de classe C^k sur U . À un tel champ de vecteur, on associe le système différentiel

$$\{x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \Leftrightarrow x' = X(x). \quad (1.6)$$

Un tel système différentiel est dit autonome, est un cas particulier de l'équation (1.4) où la fonction f ne dépend pas explicitement du temps.

L'ouvert U est appelé l'espace des phases du champ de vecteurs (ou du système différentiel associé).

De façon générale, on appelle champ de vecteur différentiable un champ de vecteur de

classe C^k avec $k \geq 1$. D'après le Théorème 1.1.1, pour tout $x_0 \in U$, il existe une unique solution maximale $x(t)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = X(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Notons également que, toute condition $x(t_0) = x_0$ peut être transformée grâce à une translation évidente de la variable temps en une condition initiale $x(0) = x_0$.

Définition 1.5.6 ([41]). L'application $\phi_t : x_0 \rightarrow x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur au temps t de la solution maximale $x(t)$ du problème de Cauchy (1.7) est appelée le flot au temps t du champ X .

Le flot du champ de vecteurs X est l'application ϕ qui associe à (t, x_0) la valeur au temps t de la solution maximale $x(t)$ du problème de Cauchy (1.7) :

$$(t, x_0) \rightarrow \phi(t, x_0) = \phi_t(x_0) = x(t).$$

Si ϕ est définie pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$ et toute condition initiale $x_0 \in U$, alors le flot est dit complet.

Définition 1.5.7 ([41]). L'orbite (ou courbe intégrale) Γ du champ de vecteurs X passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donnés par la solution de (1.7) avec la donnée initiale x_0 . Cette courbe est orientée par le sens de variation de t . En chacun de ses point $x(t)$, sa tangente est la droite passant par $x(t)$ dirigée par le vecteur $X(x(t))$. On distingue éventuellement l'orbite positive $\Gamma_+ = \{x(t), t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\Gamma_- = \{x(t), t \leq 0\}$.

Corollaire 1.5.8 ([41]). Les orbites du champ de vecteurs X forment une partition de l'espace des phases U appelé portrait de phase.

Définition 1.5.9 ([32]). Le point $x^* \in \Omega$ est dit point d'équilibre du système (1.3) si $f(x^*) = 0$.

Définition 1.5.10 ([41]). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \Omega$ et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\Omega \setminus \{0\}$,

1. V est dite définie positive si :
 - $V(0) = 0$, et
 - $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.
2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.
3. V est dite semi-définie positive si :
 - $V(0) = 0$, et
 - $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in U$.
4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

1.6 Stabilité des équilibres

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.8)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit x^* un point d'équilibre de l'équation (1.8).

Définition 1.6.1 ([32]). L'équilibre x^* de (1.8) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.8) on a

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon.$$

Définition 1.6.2 ([32]). L'équilibre x^* de (1.8) est dit instable, s'il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, tel qu'il existe une solution $x(t)$ de (1.8) vérifiant

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|x(t) - x^*\| \geq \varepsilon.$$

Définition 1.6.3 ([32]). L'équilibre x^* de (1.8) est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.8) on a

$$\|x(0) - x^*\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

1.7 La stabilité d'un point fixe d'une application

Dans ce qui suit, E dénote un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.7.1 ([57]). Le point fixe 0 d'une application $f : E \rightarrow E$ est Lyapunov stable si pour chaque voisinage U de 0, il existe un autre voisinage $V(\subset U)$ de 0 tels que

$$f^n V = f(f^{n+1})V(\subset U) \forall n \geq 0.$$

Définition 1.7.2 ([57]). Le point fixe 0 de $f : E \rightarrow E$ est asymptotiquement stable s'il est Lyapunov stable et s'il existe V tels que $f^n(x) \rightarrow 0$, pour $n \rightarrow +\infty$. Le point fixe 0 est exponentiellement stable si $\exists V$ ouvert voisinage de 0, $\gamma > 0$ et $k \in (0, 1)$ tels que 0 est Lyapunov stable et $\forall x \in V, \quad \|f^n(x)\|_E \leq \gamma k^n, \quad n \rightarrow \infty$.

Définition 1.7.3 ([57]). Le point fixe 0 de $f : E \rightarrow E$ s'appelle Lyapunov instable, s'il n'est pas Lyapunov stable. Ceci signifie que : $\exists \varepsilon > 0$ tels que $\forall \delta > 0, \exists x$ avec $\|x\| \leq \delta$ et $\exists n > 0$ avec $\|f^n(x)\| > \varepsilon$.

Théorème 1.7.4 ([57]). Soit $f : E \rightarrow E$ une application différentiable en 0 avec $f(0) = 0$, et soit $f'(0) = L \in \zeta(E)$ sa dérivée de Fréchet à 0. Si le spectre de L se situe dans un sous-ensemble compact de la boule unité, alors 0 est exponentiellement stable.

1.8 Stabilité de l'équilibre pour un système linéaire

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.9)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (avec $s = 1, \dots, n$) les valeurs propres de la matrice A et x^* le point d'équilibre du système linéaire (1.9).

Théorème 1.8.1 ([9]). i) Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles nulles ou négatives alors l'équilibre x^* est stable.

ii) Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives alors l'équilibre x^* est asymptotiquement stable.

iii) Si l'une des valeurs propres de A a une partie réelle positive alors l'équilibre x^* est instable.

Considérons le système (1.8), on note par $J_f(x^*) := \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$, la matrice jacobienne de f évaluée au point x^* .

Le système linéaire (1.9) où $A = J_f(x)$ s'appelle l'approximation linéaire du système non linéaire (1.8) en x^* .

L'étude de la stabilité de l'origine pour l'approximation linéaire permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre x^* de (1.8). Plus précisément on a

Théorème 1.8.2 ([9]). 1. Si $x = 0$ est asymptotiquement stable (c'est à dire toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative) pour (1.9) alors x^* l'est pour (1.8).

2. Si $x = 0$ est instable (c'est à dire qu'il existe au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive) pour (1.9) alors x^* est instable pour (1.8).

3. Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^* pour (1.8).

1.9 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.10)$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \Omega$, et $f(0) = 0$. Soient $x^* = 0$ un point d'équilibre de (1.10), et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine et admettant des dérivées partielles continues.

On note par

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x)$$

la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteurs f [28]. Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de V et se note $L_f V$. Pour toute solution $x(t)$ de (1.10) on a

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t)).$$

Théorème 1.9.1 ([28]). *L'origine du système (1.10) est dite stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction $V(x)$ telle que,*

1. $V(x)$ est définie positive,
2. $V'(x)$ est semi-définie négative.

*Une telle fonction est dite **fonction de Lyapunov**.*

L'origine du système (1.10) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x)$ telle que,

- i) $V(x)$ est définie positive,
- ii) $V'(x)$ est définie négative.

Théorème 1.9.2 ([26]). *Soient $\dot{x} = f(x)$ un système autonome définie sur Ω dans $\mathbb{R}^n$, et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable. Si pour une certaine solution $x(t)$, la dérivée $\dot{V}$ de la fonction $t \rightarrow V(x(t))$ satisfait l'inégalité $\dot{V} \geq 0$, alors $\omega(x) \cap \Omega$ est contenu dans l'ensemble $\{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$.*

1.10 Solutions périodiques

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.11)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continument différentiable et ω -périodique en t . Soit $\gamma(t)$ est une solution ω -périodique de (1.11), l'équation variationnelle de (1.11) correspondant à $\gamma(t)$ est définie par

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(t))y. \quad (1.12)$$

Soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale de (1.12), la matrice $\Phi(t)$ est appelée la matrice de monodromie, les multiplicateurs de Floquet de (1.12), sont les valeurs propres de $\Phi(t)$. Si μ est un multiplicateur de la forme $\exp(\omega\lambda)$, alors λ est appelé un exposant de Floquet.

Définition 1.10.1. Soit $x(t, x_0)$ une solution de (1.11) satisfaite $x(0) = x_0$, l'application de Poincaré est définie par $P(x_0) = x(\omega, x_0)$, où ω est la période de f .

L'orbite de x_0 sous P est l'ensemble $O^+(x_0) = \{x_0, Px_0, P^2x_0, \dots\}$ tel que P^n est la n -ème composition de P avec lui même.

Théorème 1.10.2. L'application de Poincaré possède les propriétés suivantes

1- Au voisinage d'une orbite périodique, P est une application monotone de classe c^1 , de plus

$$DP(x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(\omega, x_0) = \psi(\omega).$$

La matrice $\psi(\omega)$ est tout simplement la matrice obtenue en supprimant la n -ème ligne et la n -ème colonne de la matrice de monodromie $\Phi(\omega)$, et donc les $n - 1$ premiers multiplicateurs de Floquet sont les valeurs propres du dérivé $DP(x_0)$.

2- L'orbite $\Gamma(x_0)$ d'un point x_0 est périodique si x_0 est un point fixe de P .

Théorème 1.10.3 ([44]). Si toutes les valeurs propres de $DP(x_0)$ sont de module < 1 , alors pour tout x suffisamment proche de x_0 , $P^n(x)$ converge vers x_0 exponentiellement quand $n \rightarrow \infty$.

Soit $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p, f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_p(x, y))$ une application de classe C^1 .

Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^p)$ i.e.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.13)$$

Alors, il existe un voisinage ouvert de a , $U_a \subset U$, un voisinage ouvert de b , $V_b \subset V$ et une application de classe C^1 , $g : U_a \rightarrow V_b$ tels que

1. $g(a) = b$
2. $\forall (x, y) \in U_a \times V_b, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$
3. La différentielle de g en a est donnée par la formule

$$Dg(a) = -(D_y f(a, b))^{-1} \circ D_x f(a, b)$$

ou bien

$$Dg(a) = J_g(a) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a, b) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a, b) \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Si f est de classe C^r , $r \geq 1$, il en est de même pour g .

1.11 Théorie de bifurcation

Dans beaucoup de problèmes non linéaires on est confronté au problème d'existence de solutions multiples, dans certains cas on dispose d'un paramètre μ pour détecter d'éventuelles nouvelles solutions en le faisant varier. De point de vue mathématique, on est mené à considérer une équation fonctionnelle $f(\mu, u) = 0$, avec $f(\mu^*, 0) = 0$. La théorie de bifurcation traite l'existence des valeurs μ^* pour les quelles les solutions non triviales (μ, u) s'embranchent non loin des solutions triviales $(\mu^*, 0)$.

Définition 1.11.1 ([1]). Soient X, Y deux espaces de Banach. On considère l'équation de la forme

$$f(\mu, u) = 0, \quad (1.15)$$

où $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ est telle que

$$f(\mu, 0) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution $u = 0$ s'appellera la solution triviale de (1.15). L'ensemble

$$\Sigma_S = \{(\mu, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0, f(\mu, u) = 0\},$$

s'appellera l'ensemble de solutions non triviales de (1.15).

Définition 1.11.2. Une valeur de bifurcation (une valeur pour le paramètre μ) est une valeur pour laquelle le comportement asymptotique du système change d'un état qualitatif à un état différent.

Remarque 1.11.3. Le problème principal de la théorie de bifurcation est d'établir des conditions pour avoir un point de bifurcation.

Si $f \in C^1(\mathbb{R} \times X, Y)$, une condition nécessaire pour que μ^* soit un point de bifurcation peut être immédiatement déduit du théorème des fonctions implicites.

Proposition 1.11.4 ([1]). Si μ^* est un point de bifurcation de (1.15) alors $f'_u(\mu^*, 0) \in L(X \times Y)$ n'est pas inversible.

Démonstration. Si $f'_u(\mu^*, 0)$ est inversible, le théorème de fonction implicite implique ce localement près de $(\mu^*, 0)$, la solution unique de $f(\mu, u) = 0$ est $u = 0$. $\square$

1.11.1 La réduction de Lyapunov-Schmidt

Soient $f \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ et $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que $L = f'_u(\mu^*, 0)$ n'est pas inversible.

Soient $V = \text{Ker}(L)$ et $R = \text{Im} L$.

On suppose que

1- V a un complément topologique W dans X .

2- R est fermé et a un complément topologique Z dans Y .

Si 1 et 2 sont vérifiées alors (W et Z sont fermés) et $X = V \oplus W, Y = R \oplus Z$.

En particulier, pour n'importe quel $u \in X$ il existe un unique $v \in V$ et $w \in W$ tels que $u = v + w$.

De même, on peut définir les projections conjuguées P, Q de Y sur Z et R respectivement. Soient $u = v + w$ avec $v \in P$ et $w \in Q$ alors le système $Pf(\mu, v + w) = 0, Qf(\mu, v + w) = 0$ est équivalent à (1.15).

La dernière équation s'appelle l'équation auxiliaire.

Les références [1], [13] et [33] contiennent suffisamment de détails sur la réduction de Lyapunov-Schmidt.

Un modèle Proie-Prédateur

Dans ce chapitre nous voulons tirer les principales propriétés asymptotiques du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx}), \end{cases} \quad (2.1)$$

qui nous aident à étudier le même modèle avec impulsions, où

$\lambda - dh > 0$, et $p, q \in]0, 1[$.

$x(t)$: densité de la proie au temps t ,

$y(t)$: densité des prédateurs au temps t ,

a : taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur,

b : taux de prédation du prédateur sur la proie par unité de temps,

d : taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie,

λ : le temps de chercher des proies,

h : le temps de capturer les proies.

2.1 Existence des solutions

En posant $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système (2.1) devient

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)), \\ z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

avec

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx}) \end{pmatrix}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc localement lipschitzienne. Par application du théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence locale des solutions est assurée.

2.2 Positivité des solutions

A partir du système (2.1) nous avons

$$x(t) = x_0 \exp \int_0^t (a - by(s)) ds,$$

et

$$y(t) = y_0 \exp \int_0^t \left(-d + \frac{\lambda bx(s)}{1 + b h x(s)} \right) ds.$$

Proposition 2.2.1.

1. $(0, 0)$ est un équilibre trivial de (2.1).
2. Si $x_0 > 0$ (resp. $y_0 > 0$) alors pour tout $t > 0$, $x(t) > 0$ (resp. $y(t) > 0$).

Remarque 2.2.2. Pour $x_0 = 0$ (resp. $y_0 = 0$), (2.1) a une solution semi triviale $(0, y_0 \exp(-dt))$ (resp. $(x_0 \exp(at), 0)$).

2.3 L'existence globale des solutions

Pour l'existence globale, nous utilisons la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. Soit $H : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ Définie pour $x, y > 0$ par

$$H(x, y) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + b h x) - d \ln x + b y - a \ln y. \quad (2.2)$$

Alors H est l'intégrale première du système (2.1), i.e. si (x, y) est une solution de (2.1), alors

$$\forall t > 0, H(x(t), y(t)) = \text{cste.}$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x(a - by)}{y(-d + \frac{\lambda b x}{1 + b h x})}, \text{ for } x \neq x^* \text{ and } y \neq 0.$$

Alors

$$-d \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\lambda b \dot{x}}{1 + b h x} = a \frac{\dot{y}}{y} - b \dot{y}.$$

Donc

$$-d \ln x + \frac{\lambda}{h} \ln(1 + b h x) = a \ln y - b y + \text{cste.}$$

□

2.4 Bornitude des solutions

En utilisant l'équation (2.2), nous avons

Lemme 2.4.1. *La solution $(x(t), y(t))$ est bornée.*

Démonstration. Soit $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + b h x)$ et $\tilde{g}(y) = g(y) - \frac{b}{2} y$.
où $f(x) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + b h x) - d \ln x$ et $g(y) = b y - a \ln y$.

On a $\tilde{f}'(x) = -\frac{d}{x} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} + d \right) h b}{1 + b h x} = \frac{\left(\frac{\lambda}{h} - d \right) h b x - 2d}{2x(1 + b h x)}$.

x	0	$\frac{2dh}{(\lambda-dh)hb}$	$\frac{2dh}{(\lambda-dh)hb}$	$+\infty$
$\tilde{f}'(x)$		-		+
$\tilde{f}(x)$	$+\infty$	$\searrow \tilde{f}\left(\frac{2}{hb}\right)$	$\tilde{f}\left(\frac{2}{hb}\right) \nearrow$	$+\infty$

d'après le tableau de variation de la fonction $\tilde{f}$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$, $\tilde{f}(x) > 0$ i.e.

$$\forall x > A, f(x) > \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + b h x).$$

De même, $\tilde{g}'(y) = \frac{b}{2} - \frac{a}{y} = \frac{by-2a}{2y}$.

y	0	$\frac{2a}{b}$	$\frac{2a}{b}$	$+\infty$
$\tilde{g}'(y)$		-		+
$\tilde{g}(y)$	$+\infty$	$\searrow \tilde{g}\left(\frac{2a}{b}\right)$	$\tilde{g}\left(\frac{2a}{b}\right) \nearrow$	$+\infty$

d'après le tableau de variation de la fonction $\tilde{g}$, il existe $B > 0$ tel que $\forall y > B$, $\tilde{g}(y) > 0$ i.e.

$$\forall y > B, g(y) > \frac{b}{2} y.$$

Ainsi, si (x, y) est en dehors du compact $[0, A] \times [0, B]$,

$$H(x, y) = f(x) + g(x) > \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + b h x) + \frac{b}{2} y.$$

On en déduit que

$$0 < x(t) < \max\left\{A, \frac{\exp\left(\frac{2hH(x_0, y_0)}{\lambda-dh}\right) - 1}{bh}\right\} \text{ et } 0 < y(t) < \max\left\{B, \frac{2}{b}H(x_0, y_0)\right\}.$$

D'où le résultat. $\square$

2.5 Stabilité des équilibres

Le système (2.1) admet un équilibre trivial $E_0 = (0, 0)$. En outre, pour $\lambda > dh$, il existe un autre équilibre non trivial $E^* = \left(\frac{d}{\lambda b - d b h}, \frac{a}{b} \right)$.

Théorème 2.5.1.

1. Le point d'équilibre trivial E_0 est instable.
2. Le point d'équilibre non trivial E^* est stable.

Démonstration.

1. Soit $f_1(x, y) = x(a - by)$, $f_2(x, y) = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx})$, et $f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$. Nous avons

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ \frac{\lambda yb}{(1+bhx)^2} & -d + \frac{\lambda bx}{1+bhx} \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = a > 0$ et $\lambda_2 = -d < 0$. Donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable.

2. Nous avons $Df(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{db}{\lambda b - dbh} \\ \frac{a(\lambda b - dbh)^2}{\lambda b^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $\lambda > dh$, La matrice admet deux valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda}}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda}}$ avec une partie réelle égale à zéro. Dans ce cas nous ne pouvons pas déduire la stabilité de E^* .

Soit V une fonction de Lyapunov définie par

$$V(x, y) = H(x, y) - H(\frac{d}{b(\lambda - dh)}, \frac{a}{b}).$$

Alors $V(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+ / \{(\frac{d}{b(\lambda - dh)}, \frac{a}{b})\}$, $V(\frac{d}{b(\lambda - dh)}, \frac{a}{b}) = 0$ et $V'(x, y) = 0$.

Par conséquent, nous concluons à la stabilité neutre de l'équilibre E^* .

□

2.6 Périodicité des solutions

Théorème 2.6.1. Les solutions du système (2.1) sont périodiques.

Démonstration. La figure (2.1) montre quatre zones, notées I, II, III et IV, dans lesquelles x et y sont monotones. Notre technique de démonstration consiste à suivre une trajectoire au travers de ces zones pour montrer qu'elle est périodique.

Soit donc $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ le point initial, qu'on suppose sans perte de généralité sur l'axe $y = y^*$ tel que $x_0 > x^*$. Soit $(x(t), y(t))$ la solution de (2.1) qui démarre de point initial (x_0, y_0) .

Etape 1. La solution parcourt les quatre zones successivement.

- il existe $t_1 > 0$ à partir duquel $M(t) = (x(t), y(t))$ rentre dans IV.
 En effet, si $M(t)$ reste dans III ($\forall t$), alors puisque x et y sont monotones et bornées (voir lemme 2.4.1), ils convergent tous les deux vers des limites respectives x_∞, y_∞ . D'après (2.1), on en déduit que $\dot{x}$ et $\dot{y}$ convergent vers 0, car, si $\dot{x}$ (resp. $\dot{y}$) tend vers $l_1 \neq 0$ (resp. $l_2 \neq 0$), alors x (resp. y) est équivalent à $l_1 t$ (resp. $l_2 t$), donc x (resp. y) ne converge pas. En conséquence, toujours grâce à (2.1), (x_∞, y_∞) est un point stationnaire. Et, puisque y croît, $y_\infty > \frac{a}{b}$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$.
 Ainsi, $M(t)$ sort de la zone III et rentre dans la zone IV.
- il existe $t_2 > t_1$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans I.
 En effet, si $M(t)$ reste dans IV ($\forall t$), alors puisque x et y sont monotones et bornées (voir lemme 2.4.1), alors ils convergent vers x_∞, y_∞ . De plus, par le même raisonnement $\dot{x}$ et $\dot{y}$ convergent vers 0. En conséquence, (x_∞, y_∞) est un point stationnaire. Et, puisque x, y décroît, alors $x_\infty < \frac{d}{b(\lambda-dh)}$ et $y_\infty > \frac{a}{b}$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$.
 Ainsi, $M(t)$ sort de la zone IV et rentre dans la zone I.
- il existe $t_3 > t_2$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans II.
 En effet, si $M(t)$ reste dans I ($\forall t$), alors puisque x et y sont monotones et bornées, alors ils convergent vers x_∞, y_∞ . De plus, par le même raisonnement $\dot{x}$ et $\dot{y}$ convergent vers 0. En conséquence, (x_∞, y_∞) est un point stationnaire. Et, puisque x croît, $x_\infty > 0$ et y décroît, $y_\infty < \frac{a}{b}$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$.
 Ainsi, $M(t)$ sort de la zone I et rentre dans la zone II.
- il existe $t_4 > t_3$ à partir duquel $M(t)$ rentre dans III.
 En effet, si $M(t)$ reste dans II pour tout temps, alors puisque x et y sont monotones et bornées (voir lemme 2.4.1), alors ils convergent vers x_∞, y_∞ . De plus, par le même raisonnement $\dot{x}$ et $\dot{y}$ convergent vers 0. En conséquence, (x_∞, y_∞) est un point stationnaire. Et, puisque x croît, $x_\infty > \frac{d}{b(\lambda-dh)}$ et y croît, $y_\infty > 0$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$. Ainsi, $M(t)$ sort de la zone II et rentre dans la zone III.

Etape 2. Les points $M(t_0)$ et $M(t_4)$ sont confondus.

Par définition, on a déjà $y(t_0) = y(t_4) = \frac{a}{b}$. De plus, $y(t_0)$ et $y(t_4)$ appartiennent à la même trajectoire alors

$$H(x(t_0), y(t_0)) = H(x(t_4), y(t_4)).$$

On en déduit que $f(x(t_0)) = f(x(t_4))$ avec $f(x) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + b h x) - d \ln x$. Où $x(t_0) > x^*$, $x(t_4) > x^*$ et f est injective sur $]x^*, \infty[$. Donc $x(t_0) = x(t_4)$. Donc la solution est périodique, de période $t_4 - t_0$. $\square$

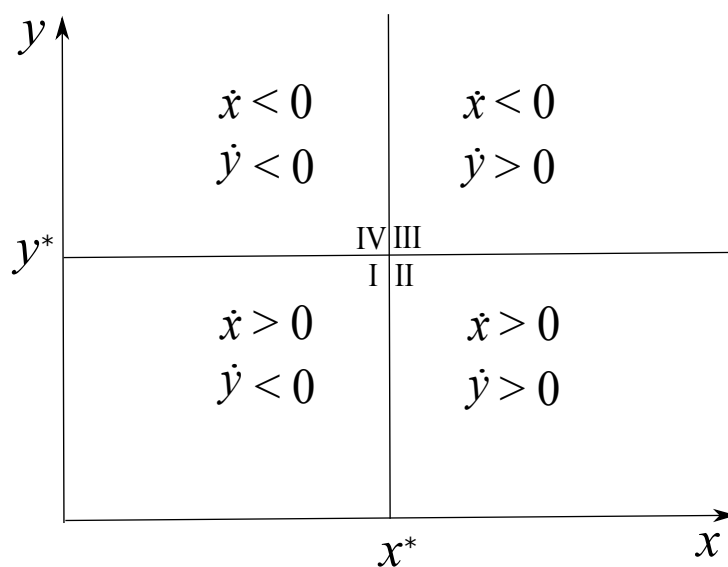


FIGURE 2.1: Champ des vitesse pour le système (2.1) .

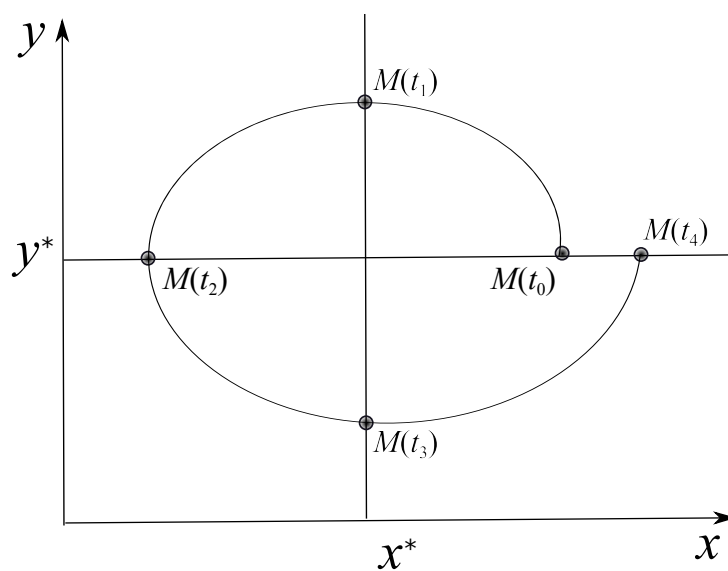


FIGURE 2.2: Trajectoire de la solution au travers de ces quatre zones.

2.7 Simulations numériques

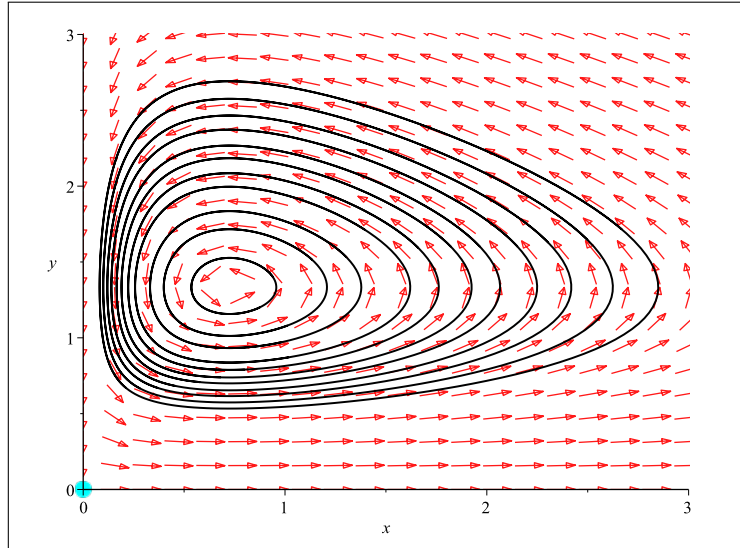


FIGURE 2.3: Portrait de phase du le système (2.1), avec $a = 0.8$, $b = 0.6$, $\lambda = 0.5$, $d = 0.2$, $h = 0.02$.

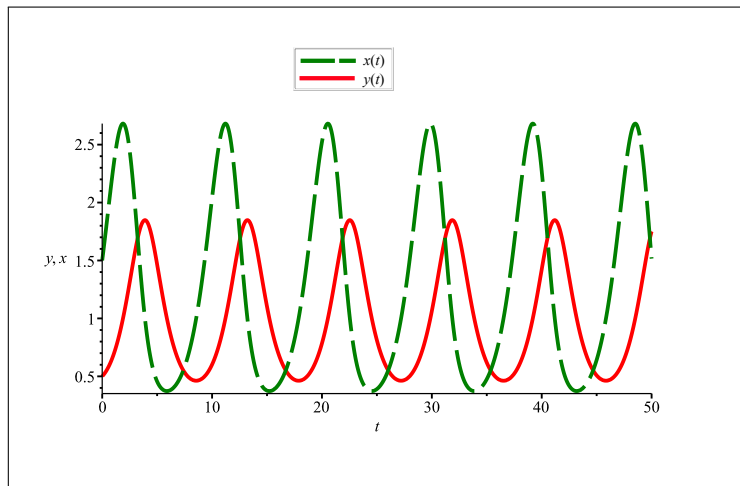


FIGURE 2.4: Solutions périodiques pour la proie $x(t)$ et le prédateur $y(t)$ pour le système (2.1) avec des conditions initiales $x(0) = 1.5$, $y(0) = 0.5$, $\lambda = 2$, $a = b = d = h = 1$.

Modèles Proie-prédateur avec impulsion dépendant de l'état

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle proie-prédateur avec impulsion dépendant de l'état du modèle. Les équations différentielles impulsives apparaissent généralement dans la description des phénomènes qui soumettent des sauts dans les variables d'état pendant un court période de temps, ces grands changements sont modélisés par des équations discrètes appelées effets d'impulsion (voir [4, 56, 58]).

Le modèle est décrit par les équations différentielles impulsives suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) & x(t) \neq h_1 \wedge h_2, \\ \dot{y} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx}) & x(t) \neq h_1 \wedge h_2, \\ \Delta x = 0 & x(t) = h_1, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = \tau & x(t) = h_1, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -px & x(t) = h_2, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = -qy & x(t) = h_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Existence et stabilité des solutions pour $\tau = 0$

Dans le cas $\tau = 0$, le système (3.1) est réduit au modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) & x(t) \neq h_2, \\ \dot{y} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx}) & x(t) \neq h_2, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -px & x(t) = h_2, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = -qy & x(t) = h_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit Φ le flot associé au système (3.2), nous avons

$$X(t) = \Phi(t, X_0), \quad 0 < t \leq T_1, \quad (3.3)$$

où $X_0 = X(0)$. Nous supposons que le flot Φ applique au temps T_1 . Alors, $X(T) = \Phi(T, X_0)$.

Notons par $X(T^+)$ l'état de la population après le traitement chimique, alors $X(T^+)$ est déterminé en termes de $X(T)$. Nous avons $X(T^+) = \theta(X(T)) = \theta(\Phi(T, X_0))$.

Soit Ψ l'opérateur défini par

$$\Psi(T, X) = (\Psi_1(T, X), \Psi_2(T, X)) = \theta(\Phi(T, X)), \quad (3.4)$$

notons par $D_X \Psi$ la dérivée de Ψ par rapport à X .

Alors, X est une solution périodique de période T de (3.2) si et seulement si

$$\Psi(T, X_0) = X_0,$$

donc X_0 est un point fixe de $\Psi(T, \cdot)$. il est exponentiellement stable si et seulement si le rayon spectral $\rho(D_X \Psi(T, \cdot))$ est strictement inférieur à 1 ([56]).

On note $x_0 = x_s(0)$, alors $(x_0, 0)$ est la condition initiale de $(x_s, 0) = \nu$ et $\nu(0) = (x_0, 0)$.

Alors $X(T) = \Phi(T, X_0)$, avec $X_0 = ((1-p)h_2, 0)$. Alors

$$\Phi(T, X_0) = \Phi(T, ((1-p)h_2, 0)),$$

notons $X(T^+)$ l'état de la population après le traitement chimique. Nous avons $X(T^+) = \theta(X(T)) = \theta(\Phi(T, X_0))$, i.e.

$$\theta(\Phi(T, X_0)) = \theta(\Phi(T, ((1-p)h_2, 0))).$$

Soit Ψ l'opérateur défini par

$$\Psi(T, X) = (\Psi_1(T, X), \Psi_2(T, X)) = \theta(\Phi(T, X)), \quad (3.5)$$

avec $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$, $\theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$, $\theta_1 = (1-p)x$ et $\theta_2 = (1-q)y$.

3.1.1 Existence de solution triviale pour $\tau = 0$

Soit $y(t) = 0$ pour $t \in [0, \infty)$, alors du système (3.2) nous avons

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(t) & x \neq h_2, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -px(t) & x = h_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec $x_0 = x(0) = (1-p)h_2$, alors la solution de l'équation $\frac{dx}{dt} = ax(t)$ est $x(t) = (1-p)h_2 \exp(at)$.

Nous avons $x(T) = (1-p)h_2 \exp(aT) = h_2$, alors $T = -a^{-1} \ln(1-p)$. depuis $x(T^+) + x(T) = -px(T) = (1-p)x(T)$ nous avons $x(T^+) = x_0$.

Cela signifie que le système (3.2) admet une solution périodique semi-triviale

$$(x_s(t), y(t)) = ((1-p)h_2 \exp(at), 0), \text{ for } 0 \leq t < T. \quad (3.7)$$

3.1.2 Stabilité orbitale de $(x_s, 0)$

Théorème 3.1.1. Si $0 < \mu = (1 - q)(1 - p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bh_2}{1 + (1 - p)bh_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} < 1$, alors $(x_s, 0)$ est une solution périodique semi-triviale orbitalement asymptotiquement stable de (3.2).

Démonstration. Considérons le système impulsif suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) & \phi(x, y) \neq 0, \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) & \phi(x, y) \neq 0, \\ \Delta x = \xi(x, y) & \phi(x, y) = 0, \\ \Delta y = \eta(x, y) & \phi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Avec $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions continument différentiable définie dans $\mathbb{R}^2$, et $\text{grad}\phi(x, y) \neq 0$.

Soit $(\alpha(t), \beta(t))$ une solution positive T -périodique de (3.8). Par le Corolaire 2 du Théorème 1 donné dans [56], nous avons le lemme suivant $\square$

Lemme 3.1.2 ([56]). Si le multiplicateur de Floquet μ satisfait la condition $|\mu| < 1$, avec

$$\mu = \prod_{j=1}^n k_j \exp \left[\int_0^T \left(\frac{\partial P(\alpha(t), \beta(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\alpha(t), \beta(t))}{\partial y} \right) dt \right],$$

avec

$$k_j = \frac{P_+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q_+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\frac{\partial \phi}{\partial x} P + \frac{\partial \phi}{\partial y} Q},$$

et $P, Q, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$ sont calculées au point $(\alpha(\tau_j), \beta(\tau_j))$, $P_+ = P(\alpha(\tau_j^+), \beta(\tau_j^+))$, $Q_+ = Q(\alpha(\tau_j^+), \beta(\tau_j^+))$, et $\tau_j (j \in \mathbb{N})$ est le temps de la j -ème impulsion, alors $(\alpha(t), \beta(t))$ est asymptotiquement orbitalement stable.

Pour obtenir μ correspondant à (1), on fait les calculs suivants.

Nous avons

$$k_1 = \frac{(-q + 1)(1 - p)ah_2}{ah_2} = (1 - p)(1 - q).$$

Donc

$$I = \int_0^T \left(\frac{\partial f_1((1 - p)h_2 \exp(at), 0)}{\partial x} + \frac{\partial f_2((1 - p)h_2 \exp(at), 0)}{\partial y} \right) dt$$

alors

$$I = \int_0^T a - d + \frac{\lambda b(1-p)h_2 \exp(at)}{1 + hb(1-p)h_2 \exp(at)} dt,$$

Donc on obtient

$$I = at - dt + \frac{\lambda}{ah} \ln(1 + bh(1-p)h_2 \exp(at)) \Big|_0^{-a^{-1} \ln(1-p)},$$

et

$$-\ln(1-p) + \frac{d}{a} \ln(1-p) + \frac{\lambda}{ah} \ln(1 + bh(1-p)h_2 \frac{1}{1-p}) - \frac{\lambda}{ah} \ln(1 + bh(1-p)h_2),$$

nous avons

$$\mu = k_1 * \frac{(1-p)^{\frac{d}{a}} (1 + bhh_2)^{\frac{\lambda}{ah}}}{(1-p)(1 + bhh_2(1-p))^{\frac{\lambda}{ah}}},$$

Alors

$$\mu = (1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + bhh_2(1-p)} \right)^{\frac{\lambda}{ah}}.$$

Alors, $|\mu| < 1$ est équivalent à

$$(1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + bhh_2(1-p)} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} < 1,$$

donc

$$(1-q) < \frac{1}{(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + bhh_2(1-p)} \right)^{\frac{\lambda}{ah}}},$$

ce qui donne

$$q > 1 - \frac{1}{(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + bhh_2(1-p)} \right)^{\frac{\lambda}{ah}}}. \quad (3.9)$$

A partir de (3.9) nous avons $|\mu| < 1$, alors $(x_s(t), 0)$ est orbitalement asymptotiquement stable.

3.1.3 Stabilité exponentielle de $(x_s, 0)$

Pour déterminer la stabilité de la solution triviale $(x_s, 0)$, nous devons calculer $D_X(\theta(\Phi(T, X_0)))$ où $X_0 = ((1-p)h_2, 0)$, nous avons

$$D_X(\theta(\Phi(T, X))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (D_X(\theta(\Phi(T, (1-p)h_2, 0)))) = \begin{pmatrix} a & -bx \\ 0 & -d + \frac{\lambda bx}{1+bhx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}' = a \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - b((1-p)h_2 \exp(at)) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, (1-p)h_2, 0) = 1, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y}' = a \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - b((1-p)h_2 \exp(at)) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(0, (1-p)h_2, 0) = 0, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}' = [-d + \frac{\lambda b((1-p)h_2 \exp(at))}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}] \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0, (1-p)h_2, 0) = 0, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y}' = [-d + \frac{\lambda b((1-p)h_2 \exp(at))}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}] \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(0, (1-p)h_2, 0) = 1. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Pour $0 < t < T$.

Alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \exp(at), & \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, (1-p)h_2, 0) = 1, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \left(\int_0^t -b(1-p)h_2 \exp(-ds) \left(\frac{1+bh(1-p)h_2 \exp(as)}{1+bh(1-p)h_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} ds \right) \exp(at), & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(0, (1-p)h_2, 0) = 0, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0, (1-p)h_2, 0) = 0, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \exp(-dt) \left(\frac{1+bh(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh(1-p)h_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(0, (1-p)h_2, 0) = 1. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} D_X(\theta(\Phi(T, X))) &= \begin{pmatrix} (1-p) \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(T) & (1-p) \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(T) \\ (1-q) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(T) & (1-q) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(T) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (1-p) \exp(aT) & K(T) \\ 0 & (1-q) \exp(-dT) \left(\frac{1+bh(1-p)h_2 \exp(aT)}{1+bh(1-p)h_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & K(T) \\ 0 & (1-q) \exp(-dT) \left(\frac{1+bh(1-p)h_2 \exp(aT)}{1+bh(1-p)h_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous obtenons les résultats suivants

Théorème 3.1.3. *La solution périodique semi-triviale $(x_s, 0)$ n'est pas exponentiellement stable.*

3.1.4 Existence de solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 pour $\tau = 0$

Théorème 3.1.4. Soit $p, q \in (0, 1)$, $y_0 < y^*$ et supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0) = h_2$.

1. Si $(1-p)h_2 \geq x^*$, alors il existe $q_1 = \frac{\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) - y_0}{\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0)}$ tel que (3.2) admet une solution périodique non trivial d'ordre 1 positive avec impulsion $Z_{(0,1)}$.
2. Si $(1-p)h_2 < x^* < h_2$, alors pour $\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) \geq y_0$, alors il existe $q_1 = \frac{\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) - y_0}{\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0)}$ tel que (3.2) admet une solution périodique non triviale d'ordre 1 positive avec impulsion $Z_{(0,1)}$.

Démonstration. Soit $X(t_1^+)$ l'état de la population après le traitement chimique, alors $X(t_1^+)$ est déterminée en termes de $X(t_1)$. Alors $X(t_1^+) = \theta(X(t_1)) = \theta(\Phi(t_1, X_0))$, i.e,

$$\theta(\Phi(t_1, (1-p)h_2, y_0)) = ((1-p)\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), (1-q)\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0)),$$

nous avons

$$\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0) = h_2,$$

$$\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) > y_0,$$

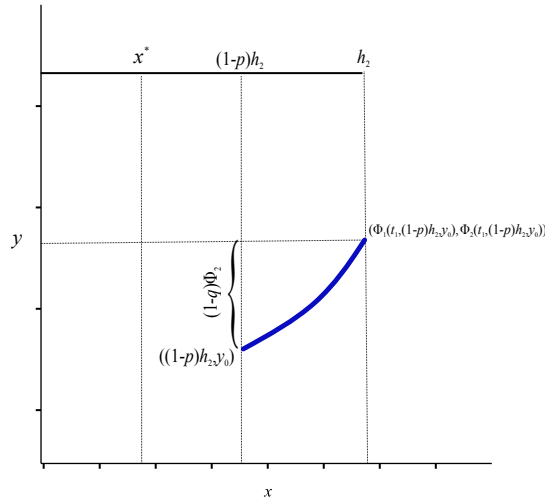
alors

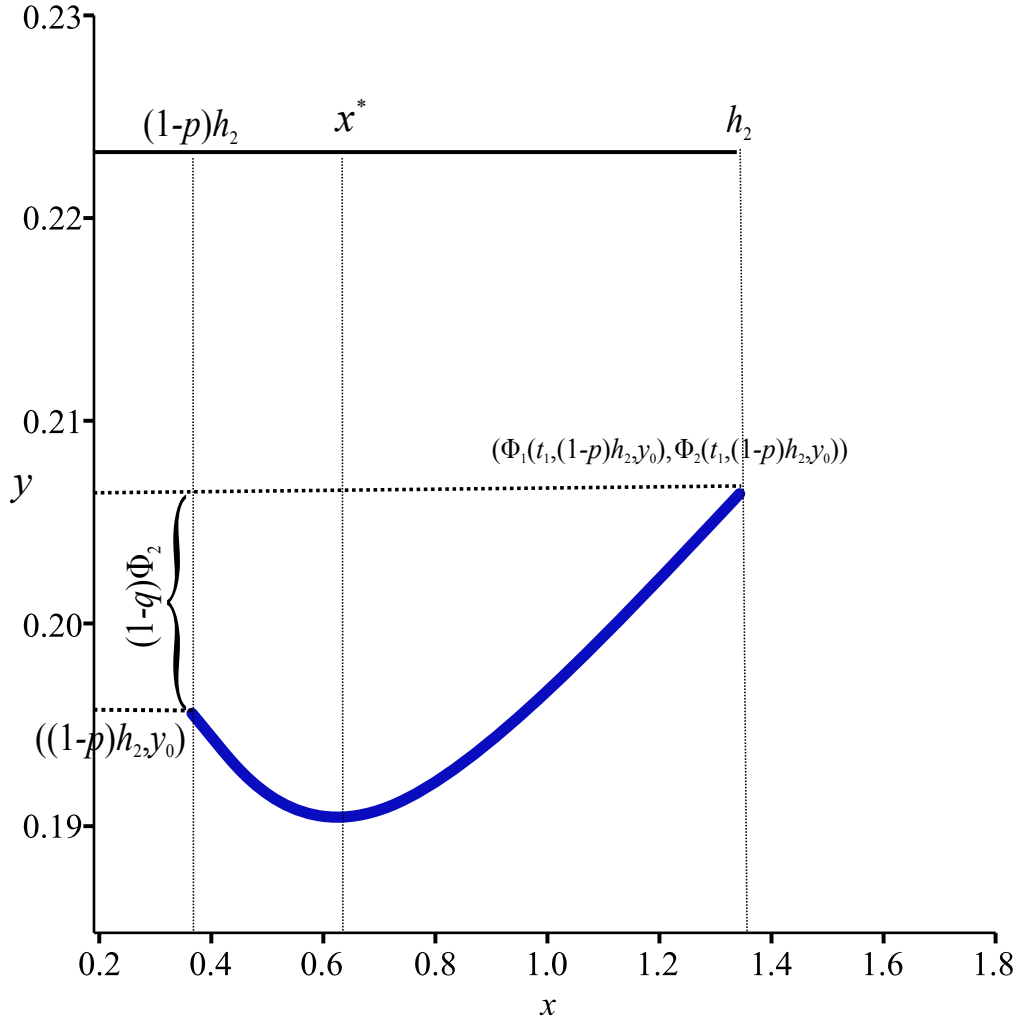
$$(1-p)\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0) = (1-p)h_2,$$

et

$$(1-q)\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) > (1-q)y_0 (< y_0),$$

alors il existe $q = q_1 = \frac{\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) - y_0}{\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0)} \in (0, 1)$, tel que $(1-q_1)\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) = y_0$. $\square$



**Théorème 3.1.5.**

1. Si $(1-p)h_2 < x^* < h_2$, et $\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) < y_0$, alors le système (3.2) N'admet pas de solution périodique positive non triviale d'ordre 1 avec impulsion.
2. Si $h_2 \leq x^*$, alors le système (3.2) n'admet aucune solution périodique positive non triviale d'ordre 1 avec impulsion.

Démonstration. Soit

$$\Sigma_1 = ((x, y); x = (1-p)h_2, y \geq 0),$$

$$\Sigma_2 = ((x, y); x = h_1, y \geq 0),$$

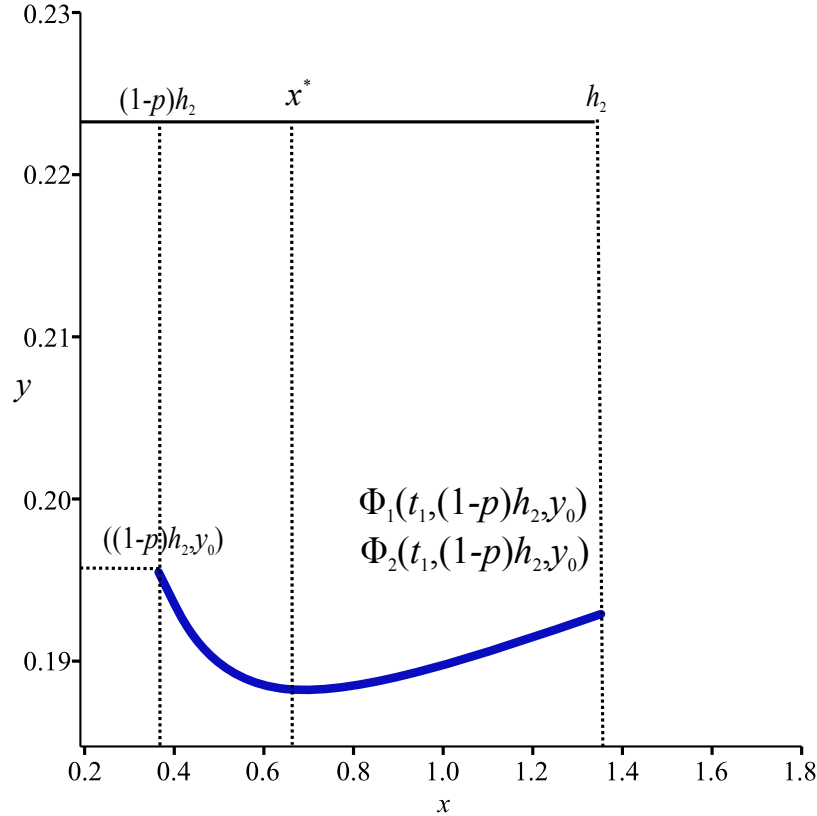
$$\Sigma_3 = ((x, y); x = h_2, y \geq 0).$$

On suppose que $p, q \in (0, 1), \tau = 0$ et $h_2 \leq d/(\lambda b - dbh)$, ou $h_2 > d/(\lambda b - dbh)$ et

$\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) = n_0 \leq y_0$. Soit $R_0(h_2, n_0)$ un point dans Σ_3 , avec $n_0 < \frac{a}{b}$, et par les impulsions $\Delta x = -px, \Delta y = -qy$, automatiquement on se trouve dans Σ_1 au point $f_0((1-p)h_2, (1-q)n_0)$, ensuite la trajectoire continue son évolutions et coupe Σ_3 au point $R_1(h_2, n_1)$ et par les impulsions la trajectoire saute dans Σ_1 au point $f_1((1-p)h_2, (1-q)n_1)$ puis la trajectoire fait la même chose dans le troisième retour et le quatrième jusqu'à le K ème retour la trajectoire saute de point $R_k(h_2, n_k)$ au point $f_k((1-p)h_2, (1-q)n_k)$. donc puisqu'on a $h_2 \leq \frac{d}{\lambda b - d b h}$ alors on déduit que $n_k \leq n_{k-1} \leq \dots \leq n_0 \leq \frac{a}{b}$ et

$$n_k \leq (1-q)n_{k-1} \leq (1-q)^2 n_{k-2} \leq \dots \leq (1-q)^k n_0 \leq (1-q)^k \frac{a}{b},$$

cela donne que $n_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, Donc le système n'admet pas une solution périodique d'ordre 1 pour $\tau = 0$. $\square$



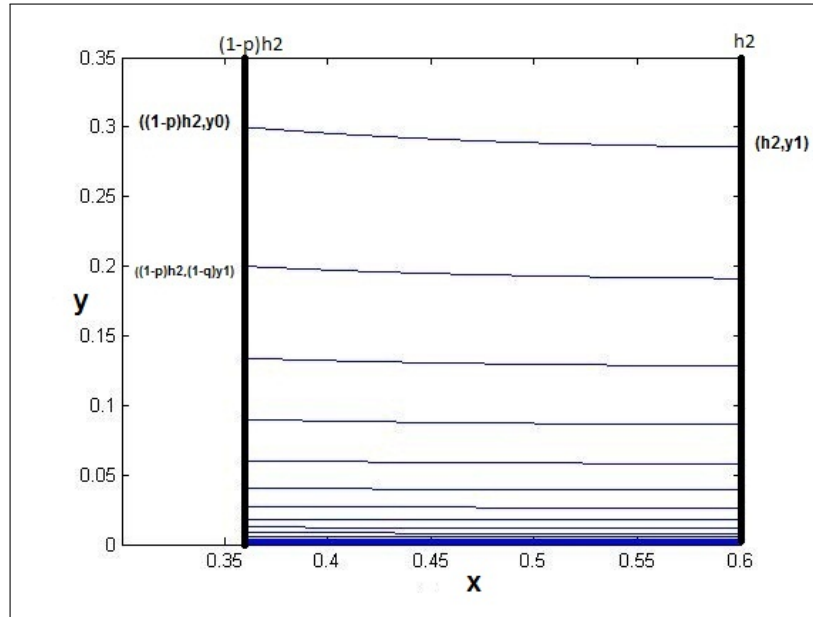
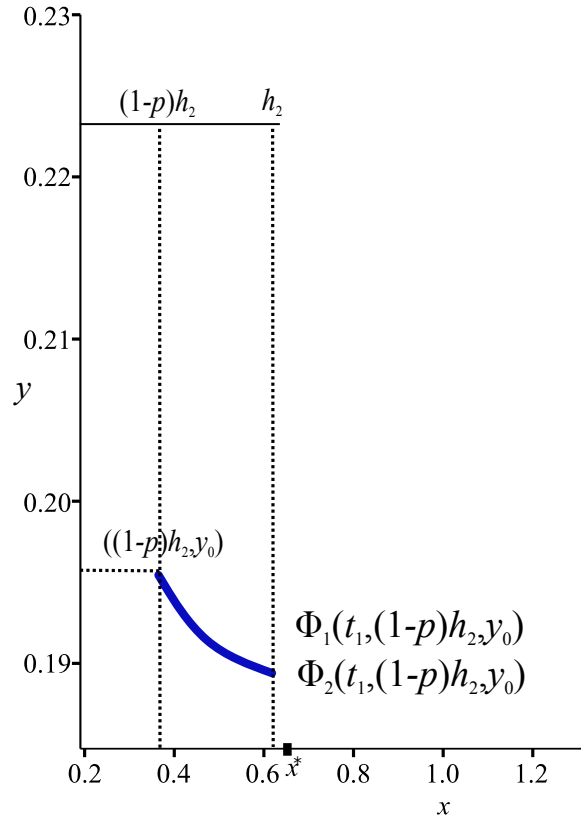


FIGURE 3.1: Portrait de phase du système 3.2 avec les conditions $a = 0.8$, $b = 0.6$, $\lambda = 0.5$, $d = 0.2$, $h = 0.02$, $p = 0.4$, $q = 0.3$, $h_2 = 0.6$

3.1.5 Stabilité de la solution $Z_{(0,1)}$

Soit $Z_{(0,1)} = (x, y)$ la solution de (3.2) avec la condition initiale $Z_{(0,1)}(0) = Z_0 = (x_0, y_0)$, qui vérifie

$$Z(t_1^+) = \theta(t_1, \Phi(t_1, Z_0)),$$

avec $\theta = ((1-p)x, (1-q)y)$.

Soit $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ est définie par

$$\Gamma(t_1, Z) = \theta(t_1, \Phi(t_1, Z)).$$

Par conséquent, Z_0 est un point fixe de $\Gamma(t_1, \cdot)$. De Iooss, Z_0 est exponentiellement stable si et seulement si le rayon spectral $\rho(D_Z \Gamma(t_1, Z_0))$ de la dérivée de $\Gamma(t_1, \cdot)$ par rapport à Z_0 est inférieur à 1

$$\begin{aligned} D_Z \Gamma(t_1, Z_0) &= D_Z(\theta(t_1, \Phi(t_1, Z_0))) \\ &= D_Z \theta(t_1, \Phi(t_1, Z_0)) D_Z \Phi(t_1, Z_0) \\ &= \begin{pmatrix} (1-p) & 0 \\ 0 & (1-q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-p) \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} & (1-p) \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial y} \\ (1-q) \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial x} & (1-q) \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\lambda^2 - \text{tra}(J)\lambda + \det(J) = 0,$$

avec

$$\text{tra}(J) = (1-p) \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} + (1-q) \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y},$$

et

$$\det(J) = (1-p)(1-q) \left(\frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial x} \right).$$

Théorème 3.1.6. *La solution périodique positive non triviale d'ordre 1 $Z_{(0,1)}$ est exponentiellement stable si et seulement si*

1. $-2 \leq \text{tra}(J) \leq 0$ et $\text{tra}^2(J) \geq 4\det(J) > -4\text{tra}(J) - 4$,
2. $0 \leq \text{tra}(J) \leq 2$ et $\text{tra}^2(J) \geq 4\det(J) > 4\text{tra}(J) - 4$,
3. $0 \leq \det(J) \leq 1$ et $\text{tra}^2(J) < 4\det(J)$.

Démonstration. La solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 $Z_{(0,1)}$ est exponentiellement stable si $|\lambda_i| < 1 \quad i = 1, 2$.

Alors si $\Delta = \text{tra}(j)^2 - 4\det(J) \geq 0$ nous avons

$$\lambda_1 = \frac{\text{tra}(J) + \sqrt{\text{tra}(J)^2 - 4\det(J)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{tra}(J) - \sqrt{\text{tra}(J)^2 - 4\det(J)}}{2},$$

alors, $|\lambda_i| < 1$ nous donne

$$-1 < \frac{\text{tra}(J) + \sqrt{\text{tra}(J)^2 - 4\det(J)}}{2} < 1,$$

$$-1 < \frac{\text{tra}(J) - \sqrt{\text{tra}(J)^2 - 4\det(J)}}{2} < 1,$$

alors on obtient $-2 < \text{tra}(J) < 2$

Cas 1 : $-2 < \text{tra}(J) < 0$ et $\text{tra}(J) + 2 > \sqrt{\text{tra}(J)^2 - 4\det(J)} > 0$

alors

$$(\text{tra}(J) + 2)^2 > \text{tra}(J)^2 - 4\det(J)$$

et

$$4\det(J) > -4\text{tra}(J) - 4,$$

Cas 2 : $0 < \text{tra}(J) < 2$ et $\text{tra}(J) - 2 < -\sqrt{\text{tra}(J)^2 - 4\det(J)} < 0$

alors

$$(\text{tra}(J) - 2)^2 > \text{tra}(J)^2 - 4\det(J)$$

et

$$4\det(J) > 4\text{tra}(J) - 4$$

.

Si $\Delta < 0$ nous avons

$$\lambda_1 = \frac{\text{tra}(J) + i\sqrt{-\text{tra}(J)^2 + 4\det(J)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{tra}(J) - i\sqrt{-\text{tra}(J)^2 + 4\det(J)}}{2},$$

et

$$0 < |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{\text{tra}(J)^2 + 4\det(J) - \text{tra}(J)^2}{4}} < 1,$$

alors

$$0 < \det(J) < 1.$$

□

3.1.6 Simulations numériques

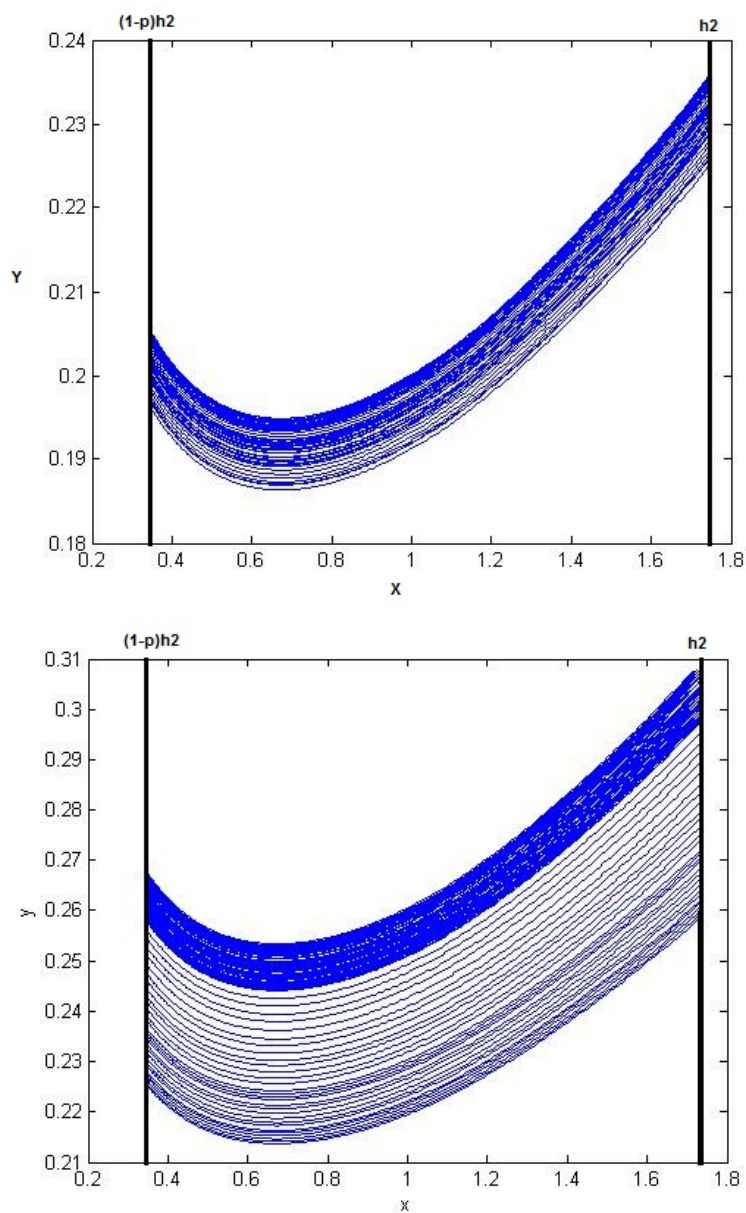


FIGURE 3.2: portrait de phase du 3.2 avec les conditions $a = 0.8$, $b = 0.6$, $\lambda = 0.5$, $d = 0.2$, $h = 0.02$, $p = 0.8$, $q = 0.13$, $h_2 = 1.75$, $x_0 = 0.35$, $y_0 = 0.225$

3.2 Existence et stabilité des solutions périodiques non-triviales positives d'ordre 1 pour $p = q = 0, \tau \neq 0$

3.2.1 Existence de solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 pour $p, q = 0, \tau \neq 0$

Théorème 3.2.1. Soit $p = q = 0, 0 < y_0 < y^*$. Alors il existe $\tau^* > 0$ tel que pour $\tau \in (0, \tau^*)$ Le système (3.1) a une solution périodique positive non triviale d'ordre 1 avec effets d'impulsion $Z_{(1,0)}$ avec trajectoire passant par le point $(h_1, y_0(\tau)) = (h_1, \frac{\tau}{e^{\frac{b}{a}\tau} - 1}), \forall \tau > 0$.

Démonstration. Nous avons l'équation suivante (courbe intégrale)

$$-d \ln x + \frac{\lambda}{h} \ln(1 + b h x) = a \ln y - b y + \text{cste},$$

si $x = h_1$ on a une impulsion sur le y tel que $y(t^+) = y(t) + \tau$ alors

$$-d \ln x + \frac{\lambda}{h} \ln(1 + b h x) = a \ln(y + \tau) - b(y + \tau) + \text{cste},$$

ce qui donne

$$a \ln y - b y = a \ln(y + \tau) - b(y + \tau),$$

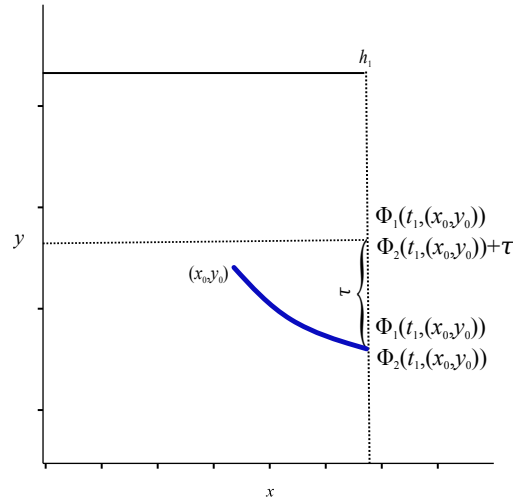
donc

$$\ln\left(\frac{y}{y + \tau}\right) = \frac{-b\tau}{a},$$

alors

$$y = \frac{\tau}{\exp\left(\frac{b\tau}{a}\right) - 1}.$$

□



3.2.2 Stabilité de la solution $Z_{(1,0)}$

Si $Z_{(1,0)} = (x, y)$ est une solution de (3.1) avec la condition initiale $Z_{(1,0)}(0) = Z_0$, et elle vérifie

$$Z(t_1) = \eta(t_1, \Phi(t_1, Z_0)),$$

et $\eta = (x, y + \tau)$.

Soit $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ est définie par

$$\Gamma(t_1, Z) = \eta(t_1, \Phi(t_1, Z)).$$

Par conséquent, Z_0 est un point fixe de $\Gamma(t_1, \cdot)$. De Iooss, Z_0 est exponentiellement stable si et seulement si le rayon spectral $\rho(D_Z \Gamma(t_1, Z_0))$ est inférieur à 1

$$\begin{aligned} D_Z \Gamma(t_1, Z_0) &= D_Z(\eta(t_1, \Phi(t_1, Z_0))) \\ &= D_Z \eta(t_1, \Phi(t_1, Z_0)) D_Z \Phi(t_1, Z_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\lambda^2 - \text{tra}(J)\lambda + \det(J) = 0,$$

avec

$$\text{tra}(J) = \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y},$$

$$\det(J) = \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1(t_1, Z_0)}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2(t_1, Z_0)}{\partial x}.$$

Théorème 3.2.2. *Solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 $Z_{(1,0)}$ est exponentiellement stable si et seulement si.*

1. $-2 \leq \text{tra}(J) \leq 0$ et $\text{tra}^2(J) \geq 4\det(J) > -4\text{tra}(J) - 4$,
2. $0 \leq \text{tra}(J) \leq 2$ et $\text{tra}^2(J) \geq 4\det(J) > 4\text{tra}(J) - 4$,
3. $0 \leq \det(J) \leq 1$ et $\text{tra}^2(J) < 4\det(J)$.

3.3 Existence de solution périodique non-triviale positive d'ordre 1 pour $\tau, q, p \neq 0$

Nous considérons le système impulsif suivant

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) \quad x \neq h_1 \wedge h_2, \quad (3.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bx}) \quad x \neq h_1 \wedge h_2, \quad (3.13)$$

$$\Delta x = 0 \quad x = h_1, \quad (3.14)$$

$$\Delta y = \tau \quad x = h_1, \quad (3.15)$$

$$\Delta x = -px \quad x = h_2, \quad (3.16)$$

$$\Delta y = -qy \quad x = h_2. \quad (3.17)$$

Théorème 3.3.1.

1. Si $x^* < h_2$. Et s'il existe $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$ tel que $\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0) = h_1$, $\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau < y^*$ et $\Phi_1(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau) = h_2$, alors il existe $q = q_1 = \frac{\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau) - y_0}{\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau)}$ tel que (3.1) admet une solution périodique positive non triviale d'ordre 1 avec impulsion $Z_{(1,1)}$.
2. Si $h_2 \leq x^*$, il existe $t_1 > 0$ tel que $\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0) = h_1$. Si $\Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau < y^*$ alors il existe t_2 tel que $\Phi_1(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau) = h_2$. De plus, si $\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau) \geq y_0$ alors il existe $q = q_1 = \frac{\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau) - y_0}{\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau)}$ tel que (3.1) admet une solution périodique positive non triviale d'ordre 1 avec impulsion $Z_{(1,1)}$.

Démonstration. Soit $X(t_1^+)$ l'état de la population après le traitement chimique, alors $X(t_1^+)$ est déterminée en termes de $X(t_1)$ selon les équations (3.14) et (3.15). Nous avons $X(t_1^+) = \eta(X(t_1)) = \eta(\Phi(t_1, X_0))$, i.e,

$$\eta(\Phi(t_1, (1-p)h_2, y_0)) = (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau).$$

Notons par $X(t_2^+)$ l'état de la population après le traitement chimique, alors $X(t_2^+)$ est déterminée en termes de $X(t_2)$ selon les équations (3.16) et (3.17). Nous avons $X(t_2^+) = \theta(X(t_2)) = \theta(\Phi(t_2, X_0))$, i.e

$$\theta(\Phi(t_2, \theta(\Phi(t_1, (1-p)h_2, y_0)))) = \theta(\Phi(t_2, (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau))),$$

et

$$\theta(\Phi(t_2, (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau))) = ((1-p)h_2, (1-q)\Phi_2(t_2, (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau))))$$

nous avons

$$\Phi_2(t_2, (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau)) > y_0,$$

alors

$$(1-q)\Phi_2(t_2, (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau)) > (1-q)y_0 (< y_0),$$

alors il existe $q = q_1 = \frac{\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau) - y_0}{\Phi_2(t_2, h_1, \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau)} \in [0, 1]$, tel que $(1-q_1)\Phi_2(t_2, (\Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau)) = y_0$. $\square$

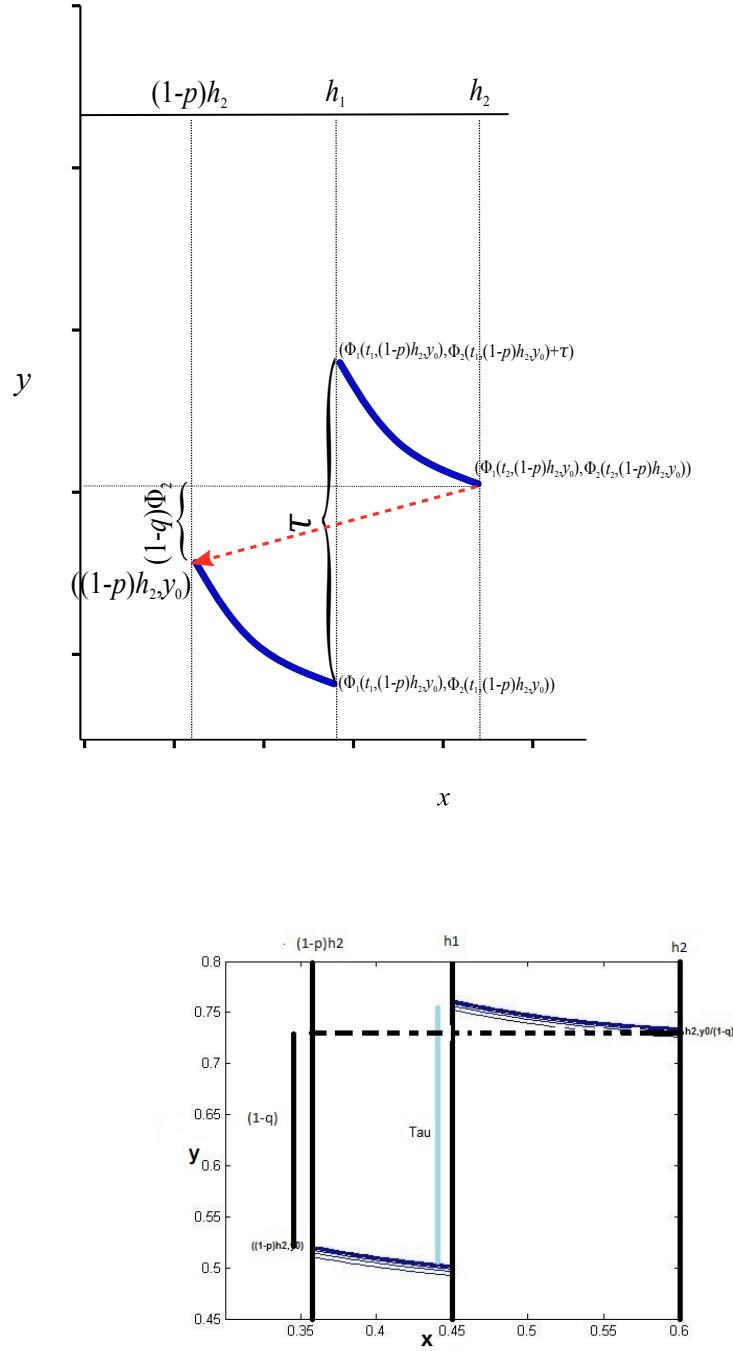


FIGURE 3.3: Portrait de phase du système (3.1) pour $\tau \neq 0$ avec les conditions $\tau = 0.26$, $a = 0.8$, $b = 0.6$, $\lambda = 0.5$, $d = 0.2$, $h = 0.02$, $p = 0.4$, $q = 0.3$, $h_2 = 0.6$

3.4 Bifurcation de la solution périodique non-triviale périodique pour $p, q \neq 0, \tau \neq 0$

Théorème 3.4.1. Pour tout $p, q \in (0, 1)$ et $q \neq q^*$ et pour $\tau \leq \tau^*$, le système (3.1) admet une solution périodique non triviale d'ordre 1 avec une condition initiale

$$(x_0, y_0) = ((1 - p)h_2, y_0^*(\tau)),$$

et

$$y_0^*(\tau) = \frac{(1 - q)(1 - p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}}}{(1 - (1 - q)((1 - p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}})^2)} \tau + o(\tau).$$

Démonstration.

Soit le problème du point fixe suivant

$$N(\tau, y_0) = 0. \quad (3.18)$$

Où

$$N(\tau, y_0) = (N_1(\tau, y_0), N_2(\tau, y_0)),$$

tel que

$$N_1(\tau, y_0) = (1 - p)h_2 - (1 - p)\Phi_1(t_2, \Phi_1(t_1, (1 - p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1 - p)h_2, y_0) + \tau),$$

et

$$N_2(\tau, y_0) = y_0 - (1 - q)\Phi_2(t_2, \Phi_1(t_1, (1 - p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1 - p)h_2, y_0) + \tau),$$

la dérivée de N est donnée par la matrice suivante

$$D_X N(\tau, y_0) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$a' = a'_0, b' = b'_0, c' = c'_0, d' = d'_0$ pour $(\tau, y_0) = (0, y_0)$ tel que

$$a' = 1 - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)(\tau, y_0)$$

$$b' = - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)(\tau, y_0)$$

$$c' = - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)(\tau, y_0)$$

$$d' = 1 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)(\tau, y_0)$$

pour $(\tau, y_0) = (0, y_0)$ on a

$$\begin{aligned} a'_0 &= 1 - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)(0, y_0) = 0 \\ b'_0 &= - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)(0, y_0) = - \int_0^{-a^{-1} \ln(1-p)} -b(1-p)h_2 \exp(-dt) \left(\frac{1 + bh(1-p)h_2 \exp(at)}{1 + bh(1-p)h_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} dt \\ c'_0 &= - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)(0, y_0) = 0 \\ d'_0 &= 1 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)(0, y_0) = 1 - (1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1-p)bhh_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}}, \end{aligned}$$

alors

$$D_X N(0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & b'_0 \\ 0 & d'_0 \end{pmatrix} = E.$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $D_X N(0, 0)$ égale a zéro donc la condition de la bifurcation est satisfaite.

Avec

$$d'_0 = 1 - (1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1-p)bhh_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} > 0.$$

L'équation (3.18) est équivalente a

$$N_1(\tau, y_0) = 0$$

$$N_2(\tau, y_0) = 0$$

$$N_1(\tau, y_0) = (1-p)h_2 - (1-p)\Phi_1(t_2, \Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau),$$

$$N_2(\tau, y_0) = y_0(\tau) - (1-q)\Phi_2(t_2, \Phi_1(t_1, (1-p)h_2, y_0), \Phi_2(t_1, (1-p)h_2, y_0) + \tau),$$

par construction on a $N_1(\tau, y_0) = 0$,

$N(\tau, q) = 0$ si et seulement si $N_2(\tau, q) = 0$

La résolution de N_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2(\tau, y_0)}{\partial y_0} &= 1 - (1-q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \\ &= 1 - (1-q) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_2(\tau, y_0)}{\partial y_0} = 1 - (1-q) \left((1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1-p)bhh_2} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} \right)^2$$

$$1 - (1 - q)((1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}})^2 \neq 0$$

$$q \neq 1 - ((1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}})^{-2} = q^*.$$

Si $q \neq q^*$ alors

$$\frac{\partial N_2(\tau, y_0)}{\partial y_0} \neq 0,$$

donc il existe $\delta > 0$ assez petite et unique fonction continue $y_0^*(\tau)$ tel que $y_0^*(0) = 0$, $N_2(\tau, y_0^*(\tau)) = 0$ pour tout (τ) tel que $|\tau| < \delta$.
Le développement limité de $y_0^*(\tau)$ est

$$y_0^*(\tau) = y_0^*(0) + \frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} \tau + o(\tau).$$

première dérivée de y_0^*

$$\frac{\partial N_2(0, 0)}{\partial \tau} = \frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} - (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} (\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} + 1) = 0,$$

donc

$$\frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} - (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} = (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} (1 - (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}) = (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y},$$

alors

$$\frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} = (1 - (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y})^{-1} (1 - q) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial y_0^*}{\partial \tau} = \frac{(1 - q)(1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}}}{(1 - (1 - q)((1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}})^2)},$$

on a

$$(1 - (1 - q)((1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}})^2) \neq 0,$$

$$y_0^*(\tau) = \frac{(1 - q)(1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}}}{(1 - (1 - q)((1 - p)^{\frac{d}{a}}(\frac{1 + bhh_2}{1 + (1 - p)bhh_2})^{\frac{\lambda}{ah}})^2)} \tau + o(\tau),$$

donc le système (3.1) admet une unique solution périodique positive d'ordre 1. $\square$

3.5 Annexe

Les dérivées de $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$

nous avons

$$\frac{d}{dt} (D_Z \Phi(t, Z_0)) = D_Z F(\Phi(t, Z_0)) D_Z \Phi(t, Z_0),$$

avec la condition

$$D_Z \Phi(t, Z_0) = Id_{\mathbb{R}^2},$$

où $F(x, y) = (x(a - by), y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx}))$. Alors

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b\Phi_2(t, Z_0) & -b\Phi_1(t, Z_0) \\ \frac{\lambda b\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))^2} & -d + \frac{\lambda b\Phi_1(t, Z_0)}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} = (a - b\Phi_2(t, Z_0)) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} - b\Phi_1(t, Z_0) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x} = \frac{\lambda b\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))^2} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} + (-d + \frac{\lambda b\Phi_1(t, Z_0)}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)}) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} = (a - b\Phi_2(t, Z_0)) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} - b\Phi_1(t, Z_0) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y} = \frac{\lambda b\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))^2} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} + (-d + \frac{\lambda b\Phi_1(t, Z_0)}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)}) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y}, \end{cases}$$

pour tout point $Z_0 = (x_0, y_0)$ sur une trajectoire de système continu (3.2), on a

$$C(\Phi_1(t, Z_0), \Phi_2(t, Z_0)) = C(Z_0) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + bhx_0) - d \ln x_0 - a \ln y_0 + by_0. \quad (3.19)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(Z_0)}{\partial x_0} &= \frac{\partial C(\Phi_1(t, Z_0), \Phi_2(t, Z_0))}{\partial \Phi_1(t, Z_0)} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial C(\Phi_1(t, Z_0), \Phi_2(t, Z_0))}{\partial \Phi_2(t, Z_0)} \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x_0}, \\ \frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0} &= \left(\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, x_0, y_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, x_0, y_0)} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x_0} + \left(b - \frac{a}{\Phi_2(t, x_0, y_0)} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x_0}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(Z_0)}{\partial y_0} &= \frac{\partial C(\Phi_1(t, Z_0), \Phi_2(t, Z_0))}{\partial \Phi_1(t, Z_0)} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y_0} + \frac{\partial C(\Phi_1(t, Z_0), \Phi_2(t, Z_0))}{\partial \Phi_2(t, Z_0)} \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y_0}, \\ b - \frac{a}{y_0} &= \left(\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y_0} + \left(b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y_0}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x_0} &= \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right) - \left(\frac{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x_0} &= \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right) - \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x_0}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y_0} &= \left(\frac{b - \frac{a}{y_0}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right) - \left(\frac{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y_0}, \\ \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y_0} &= \left(\frac{b - \frac{a}{y_0}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right) - \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y_0}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} = a_1(t, Z_0) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} + b_1(t, Z_0), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x} = a_2(t, Z_0) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x} + b_2(t, Z_0), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} = a_1(t, Z_0) \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} + b_3(t, Z_0), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y} = a_2(t, Z_0) \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y} + b_4(t, Z_0). \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} a_1(t, Z_0) &= a - b\Phi_2(t, Z_0) + b\Phi_1(t, Z_0) \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right), \\ a_2(t, Z_0) &= -\frac{\lambda b\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))^2} \left(\frac{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right) - d + \frac{\lambda b\Phi_1(t, Z_0)}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)}, \\ b_1(t, Z_0) &= -b\Phi_1(t, Z_0) \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right), \\ b_2(t, Z_0) &= \frac{\lambda b\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))^2} \left(\frac{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right), \\ b_3(t, Z_0) &= -b\Phi_1(t, Z_0) \left(\frac{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}}{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}} \right), \\ b_4(t, Z_0) &= \frac{\lambda b\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))^2} \left(\frac{b - \frac{a}{\Phi_2(t, Z_0)}}{\frac{b\lambda}{1+bh\Phi_1(t, Z_0)} - \frac{d}{\Phi_1(t, Z_0)}} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial x} = e^{\int_0^t a_1(s, Z_0) ds} \left(1 + \int_0^t b_1(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_1(s, Z_0) ds} du \right), \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial x} = e^{\int_0^t a_2(s, Z_0) ds} \int_0^t b_2(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_2(s, Z_0) ds} du, \\ \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial y} = e^{\int_0^t a_1(s, Z_0) ds} \int_0^t b_3(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_1(s, Z_0) ds} du, \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial y} = e^{\int_0^t a_2(s, Z_0) ds} \left(1 + \int_0^t b_4(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_2(s, Z_0) ds} du \right). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{\int_0^t a_1(s, Z_0) ds} &= \frac{\Phi_1(t, Z_0) b\Phi_2(0, Z_0) - a}{\Phi_1(0, Z_0) b\Phi_2(t, Z_0) - a}, \\ e^{\int_0^t a_2(s, Z_0) ds} &= \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(t, Z_0) - d)\Phi_2(t, Z_0)}{(b(\lambda - dh)\Phi_1(0, Z_0) - d)\Phi_2(0, Z_0)} \frac{(1+bh\Phi_1(0, Z_0))}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))}, \\ \int_0^t b_1(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_1(s, Z_0) ds} du &= -\left(\frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0} \right) \left(\frac{\Phi_1(0, Z_0)}{b\Phi_2(0, Z_0) - a} \right) (at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{\Phi_1(0, Z_0)}), \\ \int_0^t b_2(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_2(s, Z_0) ds} du &= \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(0, Z_0) - d)\Phi_2(0, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(0, Z_0))} \left(\frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0} \right) \int_0^t \frac{\lambda b\Phi_1(u, Z_0)}{(b(\lambda - dh)\Phi_1(u, Z_0) - d)^2} du, \\ \int_0^t b_3(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_1(s, Z_0) ds} du &= -\frac{\Phi_1(0, Z_0)}{b\Phi_2(0, Z_0) - a} \left(b - \frac{a}{y_0} \right) (at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{\Phi_1(0, Z_0)}), \\ \int_0^t b_4(u, Z_0) e^{-\int_0^u a_2(s, Z_0) ds} du &= \left(b - \frac{a}{y_0} \right) \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(0, Z_0) - d)\Phi_2(0, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(0, Z_0))} \int_0^t \frac{\lambda b\Phi_1(u, Z_0)}{(b(\lambda - dh)\Phi_1(u, Z_0) - d)^2} du, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial x} = \left\{ \frac{\Phi_1(t, Z_0) b\Phi_2(0, Z_0) - a}{\Phi_1(0, Z_0) b\Phi_2(t, Z_0) - a} \right\} \left(1 - \left(\frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0} \right) \left(\frac{\Phi_1(0, Z_0)}{b\Phi_2(0, Z_0) - a} \right) (at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{\Phi_1(0, Z_0)}) \right), \\ \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial x} = \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(t, Z_0) - d)\Phi_2(t, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))} \left(\frac{b\lambda}{1+bhx_0} - \frac{d}{x_0} \right) I(t, Z_0), \\ \frac{\partial \Phi_1(t, Z_0)}{\partial y} = -\frac{\Phi_1(t, Z_0)}{b\Phi_2(t, Z_0) - a} \left(b - \frac{a}{y_0} \right) (at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{\Phi_1(0, Z_0)}), \\ \frac{\partial \Phi_2(t, Z_0)}{\partial y} = \left\{ \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(t, Z_0) - d)\Phi_2(t, Z_0)}{(b(\lambda - dh)\Phi_1(0, Z_0) - d)\Phi_2(0, Z_0)} \frac{(1+bh\Phi_1(0, Z_0))}{(1+bh\Phi_1(t, Z_0))} \right\} \left(1 + \left(b - \frac{a}{y_0} \right) \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(0, Z_0) - d)\Phi_2(0, Z_0)}{(1+bh\Phi_1(0, Z_0))} I(t, Z_0) \right). \end{cases}$$

Où $I(t, Z_0) = \int_0^t \frac{\lambda b \Phi_1(u, Z_0)}{(b(\lambda - dh)\Phi_1(u, Z_0) - d)^2} du$. Alors

$$\begin{aligned} Tr(J) = (1-p) & \left\{ \frac{\Phi_1(t_1, Z_0)}{x_0} \frac{by_0 - a}{b\Phi_2(t_1, Z_0) - a} \right\} \left(1 - \left(\frac{b\lambda}{1 + bhx_0} - \frac{d}{x_0} \right) \left(\frac{x_0}{by_0 - a} \right) \left(at_1 - \ln \frac{\Phi_1(t_1, Z_0)}{x_0} \right) \right) \\ & + (1-q) \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(t_1, Z_0) - d)(1 + bhx_0)}{(b(\lambda - dh)x_0 - d)(1 + bh\Phi_1(t_1, Z_0))} \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} \left(1 + \frac{(by_0 - a)(b(\lambda - dh)x_0 - d)}{(1 + bhx_0)} I(t_1, Z_0) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} det(J) = (1-p)(1-q) & \frac{\Phi_1(t_1, Z_0)}{x_0} \frac{(b(\lambda - dh)\Phi_1(t_1, Z_0) - d)}{(1 + bh\Phi_1(t_1, Z_0))} \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} \frac{by_0 - a}{b\Phi_2(t_1, Z_0) - a} \times \\ & \left\{ \left(1 - \left(\frac{b(\lambda - dh)x_0 - d}{(1 + bhx_0)x_0} \right) \left(\frac{x_0}{by_0 - a} \right) \left(at_1 - \ln \frac{\Phi_1(t_1, Z_0)}{x_0} \right) \right) \times \right. \\ & \frac{(1 + bhx_0)}{(b(\lambda - dh)x_0 - d)} \left(1 + \frac{(by_0 - a)(b(\lambda - dh)x_0 - d)}{(1 + bhx_0)} I(t_1, Z_0) \right) \\ & \left. + \left(\frac{b(\lambda - dh)x_0 - d}{(1 + bhx_0)} \right) I(t, Z_0) \left(at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{\Phi_1(0, Z_0)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$Tr(J) = A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) + (1-q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right),$$

et

$$det(J) = (1-q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1) B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right),$$

avec

$$A(t) = (1-p) \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{x_0} \frac{y_0 - y^*}{\Phi_2(t, Z_0) - y^*},$$

$$B(t) = \frac{b(\lambda - dh)\Phi_1(t, Z_0) - d}{1 + bh\Phi_1(t, Z_0)},$$

$$C(t) = \frac{at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{x_0}}{b(y_0 - y^*)},$$

$$D(t) = b(y_0 - y^*)I(t, Z_0),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta &= tr^2 J - 4det J \\
&= A^2(t_1) (1 - C(t_1)B(0))^2 + \left((1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} \right)^2 B^2(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right)^2 \\
&\quad + 2A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) (1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \\
&\quad - 4(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right) \\
&= A^2(t_1) (1 - C(t_1)B(0))^2 + \left((1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} \right)^2 B^2(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right)^2 \\
&\quad + 2(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \\
&\quad - 4(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right) \\
&\quad - 4(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1)C(t_1)B(0) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right) \\
&= A^2(t_1) (1 - C(t_1)B(0))^2 + \left((1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} \right)^2 B^2(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right)^2 \\
&\quad - 2(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \\
&\quad - 4(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1)C(t_1)B(0)D(t_1) \\
&= \left(A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) - (1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \right)^2 \\
&\quad - 4(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1)C(t_1)B(0)D(t_1),
\end{aligned}$$

en conclusion

$$Tr(J) = A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) + (1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right)$$

$$det(J) = (1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) - (1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \right)^2 \\
&\quad - 4(1 - q) \frac{\Phi_2(t_1, Z_0)}{y_0} A(t_1)B(t_1)C(t_1)B(0)D(t_1)
\end{aligned}$$

$$A(t) = (1 - p) \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{x_0} \frac{y_0 - y^*}{\Phi_2(t, Z_0) - y^*}$$

$$B(t) = \frac{b(\lambda - dh)\Phi_1(t, Z_0) - d}{1 + bh\Phi_1(t, Z_0)}$$

$$C(t) = \frac{at - \ln \frac{\Phi_1(t, Z_0)}{x_0}}{b(y_0 - y^*)}$$

$$D(t) = b(y_0 - y^*)I(t, Z_0).$$

Cas $\tau = 0$, et $p, q \neq 0$

Soient $x^* < (1-p)h_2 < h_2$ et $y_0 < \frac{y_0}{1-q} < y^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}
I(t, Z_0) &= \int_0^{t_1} \frac{\lambda b \Phi_1(u, Z_0)}{(b(\lambda - dh) \Phi_1(u, Z_0) - d)^2} du = \frac{\lambda b t_1}{b^2(\lambda - dh)^2} \left(\alpha \frac{(1-p)h_2}{((1-p)h_2 - x^*)^2} + (1-\alpha) \frac{h_2}{(h_2 - x^*)^2} \right), \alpha \in (0, 1), \\
A(t_1) &= \frac{(y_0 - y^*)(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} > 0, \\
B(t_1) &= \frac{b(\lambda - dh)}{1 + bhh_2} (h_2 - x^*) > 0, \\
B(0) &= \frac{b(\lambda - dh)}{1 + bh(1-p)h_2} ((1-p)h_2 - x^*) > 0, \\
C(t_1) &= \frac{at_1 + \ln(1-p)}{b(y_0 - y^*)} < 0, \\
D(t_1) &= b(y_0 - y^*)I(t_1, Z_0) < 0, \\
tr(J) &= A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) + B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \\
&= \frac{(y_0 - y^*)(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \left(1 - \frac{at_1 + \ln(1-p)}{b(y_0 - y^*)} \frac{b(\lambda - dh)}{1 + bh(1-p)h_2} ((1-p)h_2 - x^*) \right) \\
&\quad + \frac{(h_2 - x^*)(1 + bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1 + bhh_2)} + \frac{b(\lambda - dh)}{1 + bhh_2} (h_2 - x^*) b(y_0 - y^*) I(t_1, Z_0), \\
det(J) &= A(t_1)B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right) \\
&= \frac{(y_0 - y^*)(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \frac{(h_2 - x^*)(1 + bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1 + bhh_2)} - \frac{(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \frac{(\lambda - dh)}{1 + bhh_2} (h_2 - x^*) (at_1 + \ln(1-p)) \\
&\quad + \frac{(y_0 - y^*)(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \frac{b(\lambda - dh)}{1 + bhh_2} (h_2 - x^*) b(y_0 - y^*) I(t_1, Z_0), \\
\Delta &= \left(A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) + B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \right)^2 \\
&\quad - 4A(t_1)B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} - C(t_1) + D(t_1) \right) \\
\Delta &= \left(A(t_1) (1 - C(t_1)B(0)) - B(t_1) \left(\frac{1}{B(0)} + D(t_1) \right) \right)^2 - 4A(t_1)B(t_1)C(t_1)B(0)D(t_1).
\end{aligned}$$

Soit

$$Y = by_0 - a < 0,$$

$$X_1 = \frac{\lambda t_1 \left(\frac{\alpha(1-p)h_2(h_2 - x^*)}{((1-p)h_2 - x^*)^2} + \frac{(1-\alpha)h_2}{(h_2 - x^*)} \right)}{(1 + bhh_2)(\lambda - dh)} > 0,$$

$$X_2 = \frac{(h_2 - x^*)(1 + bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1 + bhh_2)} > 0,$$

$$X_3 = -\frac{b(\lambda - dh)(at_1 + \ln(1-p))((1-p)h_2 - x^*)}{1 + bh(1-p)h_2} < 0.$$

Démonstration.

D'abord nous donnons des conditions suffisantes pour que $det(J) < 0$ (ce qui implique que

$$\Delta = \text{Tra}^2(J) - 4\det(J) > 0).$$

$$\begin{aligned} \det(J) &= \frac{(y_0 - y^*)(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} - \frac{(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \frac{(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)(at_1 + \ln(1-p)) \\ &\quad + \frac{(y_0 - y^*)(1-q)}{y_0 - (1-q)y^*} \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)b(y_0 - y^*)I(t_1, Z_0) \\ \det(J) &= \frac{(y_0 - \frac{a}{b})(1-q)}{y_0 - (1-q)\frac{a}{b}} \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} - \frac{(1-q)}{y_0 - (1-q)\frac{a}{b}} \frac{(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)(at_1 + \ln(1-p)) \\ &\quad + \frac{(y_0 - \frac{a}{b})(1-q)}{y_0 - (1-q)\frac{a}{b}} \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - \frac{a}{b})b(y_0 - \frac{a}{b})I(t_1, Z_0) \\ (Y + qa)\det(J) &= (1-q) \frac{\lambda \left(\frac{\alpha(1-p)h_2(h_2 - x^*)}{((1-p)h_2 - x^*)^2} + \frac{(1-\alpha)h_2}{(h_2 - x^*)} \right)}{(1+bhh_2)(\lambda - dh)} Y^2 + (1-q) \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} Y \\ &\quad - (1-q) \frac{b(\lambda - dh)(at_1 + \ln(1-p))(h_2 - x^*)}{1+bhh_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(J) < 0 &\Leftrightarrow (Y + qa)\det(J) > 0 \\ &\Leftrightarrow (1-q)X_1Y^2 + (1-q)X_2Y + (1-q)X_2X_3 > 0. \end{aligned}$$

Nous avons $\Delta_1 = (1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3 = (1-q)^2X_2(X_2 - 4X_1X_3) > 0$, alors

$$Y_1^+ = \frac{-(1-q)X_2 + \sqrt{(1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3}}{2(1-q)X_1} > 0,$$

$$Y_1^- = \frac{-(1-q)X_2 - \sqrt{(1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3}}{2(1-q)X_1} < 0.$$

Nous obtenons $\det(J) < 0$ pour $y_0 < \frac{a+Y_1^-}{b}$.

Ensuite, nous donnons des conditions suffisantes pour que $-2 < \text{tr}(J) < 0$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(J) &= \frac{(y_0 - \frac{a}{b})(1-q)}{y_0 - (1-q)\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{at_1 + \ln(1-p)}{b(y_0 - \frac{a}{b})} \frac{b(\lambda - dh)}{1+bh(1-p)h_2} ((1-p)h_2 - x^*) \right) \\ &\quad + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} + \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)b(y_0 - \frac{a}{b})I(t_1, Z_0) \\ \text{tr}(J) &= \frac{(by_0 - a)(1-q)}{by_0 - (1-q)a} \left(1 - \frac{at_1 + \ln(1-p)}{by_0 - a} \frac{b(\lambda - dh)}{1+bh(1-p)h_2} ((1-p)h_2 - x^*) \right) \\ &\quad + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} + \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)(by_0 - a)I(t_1, Z_0) \\ (by_0 - (1-q)a)\text{tr}(J) &= Y(1-q) \left(1 - \frac{at_1 + \ln(1-p)}{Y} \frac{b(\lambda - dh)}{1+bh(1-p)h_2} ((1-p)h_2 - x^*) \right) \\ &\quad + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} (Y + qa) \\ &\quad + \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)YI(t_1, Z_0)(Y + qa) \\ (by_0 - (1-q)a)\text{tr}(J) &= (1-q)Y - \frac{b(\lambda - dh)(1-q)(at_1 + \ln(1-p))((1-p)h_2 - x^*)}{1+bh(1-p)h_2} \\ &\quad + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} Y + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} qa \\ &\quad + \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)I(t_1, Z_0)Y^2 + \frac{b(\lambda - dh)}{1+bhh_2} (h_2 - x^*)I(t_1, Z_0)qaY \\ (Y + qa)\text{tr}(J) &= \frac{\lambda t_1}{(1+bhh_2)(\lambda - dh)} \left(\frac{\alpha(1-p)h_2(h_2 - x^*)}{((1-p)h_2 - x^*)^2} + \frac{(1-\alpha)h_2}{(h_2 - x^*)} \right) Y^2 \\ &\quad + \left(1 - q + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} + \frac{\lambda t_1 qa \left(\frac{\alpha(1-p)h_2(h_2 - x^*)}{((1-p)h_2 - x^*)^2} + \frac{(1-\alpha)h_2}{(h_2 - x^*)} \right)}{(1+bhh_2)(\lambda - dh)} \right) Y \\ &\quad - \frac{b(\lambda - dh)(1-q)(at_1 + \ln(1-p))((1-p)h_2 - x^*)}{1+bh(1-p)h_2} + \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} qa \\ (Y + qa)\text{tr}(J) &= X_1Y^2 + (1-q + X_2 + qaX_1)Y + (1-q)X_3 + X_2qa. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= (1 - q + X_2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + X_2qa) \\
 &= (1 - q)^2 + (X_2 + qaX_1)^2 + 2(1 - q)(X_2 + qaX_1) - 4X_1((1 - q)X_3 + X_2qa) \\
 &= (1 - q)^2 + (X_2 - qaX_1)^2 + 2(1 - q)(X_2 + qaX_1) - 4X_1(1 - q)X_3 \\
 &= (1 - q + X_2 - qaX_1)^2 + 4(1 - q)X_1(qa - X_3) > 0.
 \end{aligned}$$

Pour $(1 - q)X_3 + X_2qa < 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
 Y_2^+ &= \frac{-(1 - q + X_2 + qaX_1) + \sqrt{(1 - q + X_2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + X_2qa)}}{2X_1} > 0, \\
 Y_2^- &= \frac{-(1 - q + X_2 + qaX_1) - \sqrt{(1 - q + X_2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + X_2qa)}}{2X_1} < 0.
 \end{aligned}$$

Alors $(Y + qa)tr(J) > 0$ (i.e. $tr(J) < 0$) pour $(1 - q)X_3 + X_2qa < 0$ et $y_0 < \frac{a + Y_2^-}{b}$.

$$\begin{aligned}
 -2 < tr(J) &\Leftrightarrow (Y + qa)tr(J) < -2(Y + qa) \\
 &\Leftrightarrow X_1Y^2 + (1 - q + X_2 + qaX_1)Y + (1 - q)X_3 + X_2qa < -2(Y + qa) \\
 &\Leftrightarrow X_1Y^2 + (1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)Y + (1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa < 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \Delta_3 &= (1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa) \\
 &= (1 - q)^2 + (X_2 + 2 + qaX_1)^2 + 2(1 - q)(X_2 + 2 + qaX_1) - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa) \\
 &= (1 - q)^2 + (X_2 + 2 - qaX_1)^2 + 2(1 - q)(X_2 + 2 + qaX_1) - 4X_1(1 - q)X_3 \\
 &= (1 - q + X_2 + 2 - qaX_1)^2 + 4(1 - q)qaX_1 - 4X_1(1 - q)X_3 \\
 &= (1 - q + X_2 + 2 - qaX_1)^2 + 4(1 - q)X_1(qa - X_3) > 0.
 \end{aligned}$$

Pour $(1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa < 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
 Y_3^+ &= \frac{-(3 - q + X_2 + qaX_1) + \sqrt{(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa)}}{2X_1} > 0, \\
 Y_3^- &= \frac{-(3 - q + X_2 + qaX_1) - \sqrt{(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa)}}{2X_1} < 0.
 \end{aligned}$$

Alors $-2 < tr(J)$ pour $(1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa < 0$ et $\frac{a + Y_3^-}{b} < y_0$.

Enfin nous donnons des conditions suffisantes pour que $det(J) + tr(J) + 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
 det(J) + tr(J) + 1 > 0 &\Leftrightarrow (Y + qa)(det(J) + tr(J) + 1) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (2 - q)X_1Y^2 + ((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)Y + (X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa] < 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \Delta_4 &= ((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)^2 - 4(2 - q)X_1(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa] \\
 &= ((2 - q)(X_2 + 1) - qaX_1)^2 - 4(2 - q)(1 - q)X_1X_3(X_2 + 1) > 0.
 \end{aligned}$$

Pour $(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa] < 0$ nous obtenons

$$Y_4^+ = \frac{-((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1) + \sqrt{((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)^2 - 4(2 - q)X_1(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa]}}{2(2 - q)X_1} > 0$$

$$Y_4^- = \frac{-((2-q)(X_2+1)+qaX_1) - \sqrt{((2-q)(X_2+1)+qaX_1)^2 - 4(2-q)X_1(X_2+1)[(1-q)X_3+qa]}}{2(2-q)X_1} < 0$$

Alors $\det(J) + \text{tr}(J) + 1 > 0$ pour $(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa] < 0$ et $\frac{a+Y_4^-}{b} < y_0 < \frac{a}{b}$.
 En concluant, pour $(1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa < 0$ et $\max(Y_3^-, -a, Y_4^-) < \min(-qa, Y_1^-, Y_2^-)$,
 nous avons une stabilité exponentielle de $Z(0, 1)$ pour $\frac{a}{b} + \max\left(\frac{Y_3^-}{b}, \frac{-a}{b}, \frac{Y_4^-}{b}\right) < y_0 < \frac{a}{b} + \min\left(\frac{-qa}{b}, \frac{Y_1^-}{b}, \frac{Y_2^-}{b}\right)$.

Soit $X_3 = -\xi a - \gamma$ où $\xi = \frac{b(\lambda-dh)t_1((1-p)h_2-x^*)}{1+bh(1-p)h_2} < 0$ et $\gamma = \frac{b(\lambda-dh)\ln(1-p)((1-p)h_2-x^*)}{1+bh(1-p)h_2}$. Alors,

$$\begin{aligned} (1-q)X_3 + (X_2 + 2)qa < 0 &\Leftrightarrow -(1-q)\gamma + [-(1-q)\xi + (X_2 + 2)q]a < 0 \\ &\Leftrightarrow [-(1-q)\xi + (X_2 + 2)q]a < (1-q)\gamma, \end{aligned}$$

Qui est satisfait pour

$$0 < q < \frac{\xi}{\xi + X_2 + 2}. \quad (3.20)$$

Ensuite, nous donnons des conditions suffisantes pour que $Y_2^- < Y_1^-$.

$$\begin{aligned} Y_2^- < Y_1^- &\Leftrightarrow \frac{-(1-q+X_2+qaX_1) - \sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)}}{2X_1} \\ &< \frac{-(1-q)X_2 - \sqrt{(1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3}}{2(1-q)X_1} \\ &\Leftrightarrow -(1-q)(1-q+X_2+qaX_1) \\ &\quad - (1-q)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\ &< -(1-q)X_2 - \sqrt{(1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3} \\ &\Leftrightarrow (1-q)(1-q+X_2+qaX_1) - (1-q)X_2 \\ &\quad + (1-q)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\ &> \sqrt{(1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3} \\ &\Leftrightarrow (1-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)^2 + (1-q)^2X_2^2 - 2(1-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)X_2 \\ &\quad + 2(1-q)^2(1-q+qaX_1)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\ &\quad + (1-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa) \\ &> (1-q)^2X_2^2 - 4(1-q)^2X_1X_2X_3 \\ &\Leftrightarrow (1-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 2(1-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)X_2 \\ &\quad + 2(1-q)^2(1-q+qaX_1)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\ &\quad + (1-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4(1-q)^2X_1((1-q)X_3+X_2qa) \\ &> -4(1-q)^2X_1X_2X_3 \\ &\Leftrightarrow 2(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 2(1-q+X_2+qaX_1)X_2 - 4X_1X_2qa \\ &\quad + 2(1-q+qaX_1)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\ &> -4X_1X_3(X_2-1+q) \\ &\Leftrightarrow 2(1-q+X_2+qaX_1)(1-q+qaX_1) - 4X_1X_2qa \\ &\quad + 2(1-q+qaX_1)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\ &> -4X_1X_3(X_2-1+q). \end{aligned}$$

Il est suffisant que si $h_1(a) = q^2 X_1^2 a^2 - X_1 [X_2 q + 2 \xi (X_2 - 1 + q)] a - 2 X_1 \gamma (X_2 - 1 + q) > 0$, nous avons $\Delta_{h_1} = X_1^2 \{ [X_2 q + 2 \xi (X_2 - 1 + q)]^2 + 8 X_1 \gamma (X_2 - 1 + q) q^2 \}$ Alors $Y_1^- > Y_2^-$ pour

$$a > \frac{[X_2 q + 2 \xi (X_2 - 1 + q)] + \sqrt{[X_2 q + 2 \xi (X_2 - 1 + q)]^2 + 8 X_1 \gamma (X_2 - 1 + q) q^2}}{2 q^2 X_1} \quad (3.21)$$

Nous donnons une condition suffisante pour $Y_1^- < -qa$.

$$\begin{aligned} Y_1^- < -qa &\Leftrightarrow \frac{-(1-q)X_2 - \sqrt{(1-q)^2 X_2^2 - 4(1-q)^2 X_1 X_2 X_3}}{2(1-q)X_1} < -qa \\ &\Leftrightarrow -(1-q)X_2 - \sqrt{(1-q)^2 X_2^2 - 4(1-q)^2 X_1 X_2 X_3} < -2(1-q)X_1 qa \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{(1-q)^2 X_2^2 - 4(1-q)^2 X_1 X_2 X_3} < (1-q)X_2 - 2(1-q)X_1 qa. \end{aligned}$$

Pour $(1-q)X_2 - 2(1-q)X_1 qa < 0$ i.e.

$$a > \frac{(1-q)X_2}{2q(1-q)X_1}, \quad (3.22)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_1^- < -qa &\Leftrightarrow \sqrt{(1-q)^2 X_2^2 - 4(1-q)^2 X_1 X_2 X_3} > -(1-q)X_2 + 2(1-q)X_1 qa \\ &\Leftrightarrow (1-q)^2 X_2^2 - 4(1-q)^2 X_1 X_2 X_3 > (1-q)^2 X_2^2 + 4q^2(1-q)^2 X_1^2 a^2 - 4(1-q)^2 X_2 X_1 qa \\ &\Leftrightarrow -X_2 X_3 < X_1 q^2 a^2 - X_2 qa \\ &\Leftrightarrow h_2(a) = X_1 q^2 a^2 - X_2 (q + \xi) a - X_2 \gamma > 0. \end{aligned}$$

Nous avons $\Delta_{h_2} = X_2^2 (q + \xi)^2 + 4q^2 X_1 X_2 \gamma > 0$, alors $Y_1^- < -qa$ pour

$$a > \frac{X_2 (q + \xi) + \sqrt{X_2^2 (q + \xi)^2 + 4q^2 X_1 X_2 \gamma}}{2 X_1}. \quad (3.23)$$

Alors, si les inégalités (3.21), (3.22) et (3.23) sont satisfaites

$$\min(-qa, Y_1^-, Y_2^-) = Y_2^-.$$

Nous donnons des conditions suffisantes pour que $Y_3^- > -a$.

$$\begin{aligned} Y_3^- > -a &\Leftrightarrow \frac{-(3-q+X_2+qaX_1) - \sqrt{(3-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3 + (X_2+2)qa)}}{2X_1} > -a \\ &\Leftrightarrow -2X_1 a < -(3-q+X_2+qaX_1) \\ &\quad - \sqrt{(1-q+X_2+2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3 + (X_2+2)qa)} \\ &\Leftrightarrow 3-q+X_2 - (2-q)aX_1 < -\sqrt{(3-q+X_2+qaX_1)^2 - 4X_1((1-q)X_3 + (X_2+2)qa)}. \end{aligned}$$

Pour $3-q+X_2 - (2-q)aX_1 < 0$ i.e.

$$a > \frac{3-q+X_2}{(2-q)X_1}, \quad (3.24)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 Y_3^- > -a &\Leftrightarrow (3 - q + X_2 + qaX_1 - 2aX_1)^2 > (3 - q + X_2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa) \\
 &\Leftrightarrow 4a^2X_1^2 - 4(3 - q + X_2 + qaX_1)aX_1 > -4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa) \\
 &\Leftrightarrow (1 - q)X_1a^2 - (1 - q)(3 + X_2)a > -(1 - q)X_3 \\
 &\Leftrightarrow h_3(a) = X_1a^2 - (3 + X_2 + \xi)a - \gamma > 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons $\Delta_{h_3} = (3 + X_2 + \xi)^2 + 4\gamma X_1 > 0$, alors $Y_3^- > -a$ pour

$$a > \frac{3 + X_2 + \xi + \sqrt{(3 + X_2 + \xi)^2 + 4\gamma X_1}}{2X_1} \quad (3.25)$$

Nous donnons des conditions suffisantes pour que $Y_3^- < Y_4^-$. posons

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sqrt{(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa)} \\
 R_2 &= \sqrt{((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)^2 - 4(2 - q)X_1(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa]} \\
 &\Leftrightarrow \frac{-(3 - q + X_2 + qaX_1) - \sqrt{(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa)}}{2X_1} \\
 &< \frac{-((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1) - \sqrt{((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)^2 - 4(2 - q)X_1(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa]}}{2(2 - q)X_1} \\
 &\Leftrightarrow -(2 - q)(3 - q + X_2 + qaX_1) - (2 - q)R_1 \\
 &< -((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1) - R_2 \\
 &\Leftrightarrow -(2 - q)^2 - (1 - q)qaX_1 \\
 &\quad - (2 - q)\sqrt{(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa)} \\
 &< -\sqrt{((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)^2 - 4(2 - q)X_1(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa]} \\
 &\Leftrightarrow [(2 - q)^2 + (1 - q)qaX_1]^2 \\
 &\quad + (2 - q)^2(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4(2 - q)^2X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa) \\
 &\quad + 2[(2 - q)^2 + (1 - q)qaX_1](2 - q)\sqrt{(1 - q + X_2 + 2 + qaX_1)^2 - 4X_1((1 - q)X_3 + (X_2 + 2)qa)} \\
 &> ((2 - q)(X_2 + 1) + qaX_1)^2 - 4(2 - q)X_1(X_2 + 1)[(1 - q)X_3 + qa].
 \end{aligned}$$

Il suffit que

$$h_4(a) = q^2X_1^2a^2 - (2 - q)X_1[X_2q - 2(1 - q - X_2)\xi]a + 2(2 - q)X_1(1 - q - X_2)\gamma > 0.$$

Nous avons $\Delta_{h_4} = [(2 - q)^2[X_2q - 2(1 - q - X_2)\xi]^2 - 8(2 - q)X_1(1 - q - X_2)\gamma q^2]X_1^2 > 0$, alors $Y_3^- < Y_4^-$ pour

$$a > \frac{[X_2q - 2\xi(1 - X_2 - q)] + \sqrt{[X_2q - 2\xi(1 - X_2 - q)]^2 - 8q^2X_1(2 - q)\gamma(1 - X_2 - q)}}{2q^2X_1}. \quad (3.26)$$

Par conséquent, si les inégalités (3.24), (3.25) et (3.26) sont satisfaites alors

$$\max(-a, Y_3^-, Y_4^-) = Y_4^-.$$

Enfin nous donnons une condition suffisante pour que $Y_2^- > Y_4^-$.

$$\begin{aligned}
 Y_2^- > Y_4^- &\Leftrightarrow \frac{-(1-q+X_2+qaX_1)-\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2-4X_1((1-q)X_3+X_2qa)}}{2X_1} \\
 &> \frac{-((2-q)(X_2+1)+qaX_1)-\sqrt{((2-q)(X_2+1)+qaX_1)^2-4(2-q)X_1(X_2+1)[(1-q)X_3+qa]}}{2(2-q)X_1} \\
 &\Leftrightarrow (2-q)q - (1-q)qaX_1 - (2-q)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2-4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\
 &> -\sqrt{((2-q)(X_2+1)+qaX_1)^2-4(2-q)X_1(X_2+1)[(1-q)X_3+qa]}.
 \end{aligned}$$

Pour $(2-q)q - (1-q)qaX_1 < 0$ i.e.

$$a > \frac{(2-q)q}{(1-q)qX_1}, \quad (3.27)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 Y_2^- > Y_4^- &\Leftrightarrow (2-q)q - (1-q)qaX_1 - (2-q)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2-4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\
 &> -\sqrt{((2-q)(X_2+1)+qaX_1)^2-4(2-q)X_1(X_2+1)[(1-q)X_3+qa]} \\
 &\Leftrightarrow ((2-q)(X_2+1)+qaX_1)^2 + (2-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)^2 \\
 &\quad - 2((2-q)(X_2+1)+qaX_1)(1-q+X_2+qaX_1) \\
 &\quad + (2-q)^2(1-q+X_2+qaX_1)^2 - 4(2-q)^2X_1((1-q)X_3+X_2qa) \\
 &\quad - 2[(2-q)q - (1-q)qaX_1](2-q)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2-4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} \\
 &\quad < ((2-q)(X_2+1)+qaX_1)^2 - 4(2-q)X_1(X_2+1)[(1-q)X_3+qa] \\
 &\Leftrightarrow ((2-q)^2(1-q+X_2+qaX_1) - (2-q)(X_2+1) - qaX_1)(1-q+X_2+qaX_1) \\
 &\quad - 2(2-q)X_1[(1-q)X_2-1]qa \\
 &\quad - 2(2-q)(1-q)X_1X_3(1-q-X_2) \\
 &\quad - [(2-q)q - (1-q)qaX_1](2-q)\sqrt{(1-q+X_2+qaX_1)^2-4X_1((1-q)X_3+X_2qa)} < 0.
 \end{aligned}$$

Pour $q = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
 Y_2^- > Y_4^- &\Leftrightarrow 2(X_2+1)^2 - 4X_1X_3(1-X_2) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (X_2+1)^2 - 2X_1(X_2-1)(\xi a + \gamma) < 0 \\
 &\Leftrightarrow -2X_1(X_2-1)\xi a + (X_2+1)^2 - 2X_1(X_2-1)\gamma < 0.
 \end{aligned}$$

Puisque $X_2 > 1$, alors $Y_2^- > Y_4^-$ pour

$$a > \frac{(X_2+1)^2 - 2X_1(X_2-1)\gamma}{2X_1(X_2-1)\xi}. \quad (3.28)$$

Donc, il existe $q^* > 0$ assez petit tel que pour $0 < q < q^*$, (3.27) et (3.28) nous avons $Y_2^- > Y_4^-$.

□

Cas $p = q = 0$, et $\tau \neq 0$

Soit $x^* < (1 - p)h_2 < \Phi_1(0, Z_0) = \Phi_1(t_1, Z_0) = h_1$ et $y_0 < y^*$ nous avons

$$\begin{aligned}
 I(t_1) &= \int_0^{t_1} \frac{\lambda b \Phi_1(u, Z_0)}{(b(\lambda - dh)\Phi_1(u, Z_0) - d)^2} = \frac{\alpha \lambda b h_1 t_1}{(b(\lambda - dh)h_1 - d)^2} > 0, \\
 A(t_1) &= \frac{y_0 - y^*}{y_0 - \tau - y^*} < 0, \\
 B(t_1) &= \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + b h h_1} > 0, \\
 B(0) &= \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + b h h_1} > 0, \\
 C(t_1) &= \frac{a t_1}{b(y_0 - y^*)} > 0, \\
 D(t_1) &= b(y_0 - y^*)I(t_1) > 0, \\
 Tr(J) &= A(t_1)(1 - C(t_1)B(t_1)) + \frac{y_0 - \tau}{y_0}(1 + B(t_1)D(t_1)), \\
 &= \frac{y_0 - y^*}{y_0 - \tau - y^*} \left(1 - \frac{a t_1}{b(y_0 - y^*)} \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + b h h_1}\right) + \frac{y_0 - \tau}{y_0} \left(1 + \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + b h h_1} b(y_0 - y^*)I(t_1)\right), \\
 det(J) &= \frac{y_0 - \tau}{y_0} A(t_1)(1 + B(t_1)(D(t_1) - C(t_1))), \\
 \Delta &= \left(A(t_1)(1 - C(t_1)B(t_1)) - \frac{y_0 - \tau}{y_0}(1 + B(t_1)D(t_1))\right)^2 - 4 \frac{y_0 - \tau}{y_0} A(t_1)C(t_1)D(t_1)B^2(t_1) > 0.
 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 X &= b(\lambda - dh)h_1 - d < 0, \\
 A_0(\tau) &= -y_0 \frac{a t_1}{b(1 + b h h_1)} < 0, \\
 B_0(\tau) &= C_1(\tau) + y_0(y_0 - y^*), \\
 C_0(\tau) &= (y_0 - y^*) \frac{\alpha \lambda b^2 h_1 t_1}{1 + b h h_1} C_1(\tau), \\
 C_1(\tau) &= \tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + y_0(y_0 - y^*).
 \end{aligned}$$

Premièrement, nous pouvons montrer

$$\begin{aligned}
 y_0(\tau) &= \frac{\tau e^{\frac{\tau}{y^*}}}{e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1}, \\
 y'_0(\tau) &= \frac{(\frac{\tau}{y^*} + 1)e^{\frac{\tau}{y^*}}(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1) - \frac{\tau}{y^*}e^{\frac{\tau}{y^*}}e^{\frac{\tau}{y^*}}}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)^2}, \\
 y'_0(\tau) &= \frac{e^{\frac{\tau}{y^*}}(e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*} - 1)}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)^2}, \\
 y'_0(\tau) &= (\frac{1}{y^*} + \frac{1}{\tau})y_0 - \frac{1}{y^* \tau} y_0^2, \\
 y''_0(\tau) &= -\frac{1}{\tau^2} y_0 + (\frac{1}{y^*} + \frac{1}{\tau})y'_0 + \frac{1}{y^* \tau^2} y_0^2 - \frac{2}{y^* \tau} y_0 y'_0, \\
 y''_0(\tau) &= -\frac{1}{\tau^2} y_0 + (\frac{1}{y^*} + \frac{1}{\tau})^2 y_0 - (\frac{1}{y^*} + \frac{1}{\tau}) \frac{1}{y^* \tau} y_0^2 + \frac{1}{y^* \tau^2} y_0^2 - \frac{2}{y^* \tau} y_0 (\frac{1}{y^*} + \frac{1}{\tau}) y_0 + \frac{2}{y^* \tau} \frac{1}{y^* \tau} y_0^2 y_0, \\
 y''_0(\tau) &= \frac{1}{y^*} (\frac{1}{y^*} + \frac{2}{\tau}) y_0 - \frac{1}{y^* \tau} (\frac{3}{y^*} + \frac{2}{\tau}) y_0^2 + \frac{2}{y^* \tau} \frac{1}{y^* \tau} y_0^3, \\
 y''_0(\tau) &= \frac{y_0}{y^*} \frac{2}{y^* \tau^2} (y_0 - \frac{1}{2} \tau - y^*) (y_0 - \tau).
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous donnons la condition nécessaire pour que $-2 < \text{tr}(J) < 0$.

$$\begin{aligned} y_0(y_0 - \tau - y^*)\text{Tr}(J) &= y_0(y_0 - y^*) \left(1 - \frac{at_1}{b(y_0 - y^*)} \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1}\right) \\ &\quad + (y_0 - \tau - y^*)(y_0 - \tau) \left(1 + \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1} b(y_0 - y^*)I(t_1)\right) \\ &= y_0(y_0 - y^*) \left(2 - \frac{at_1}{b(y_0 - y^*)} \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1} + \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1} b(y_0 - y^*)I(t_1)\right) - (2y_0 - y^*) \\ &\quad \tau \left(1 + \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1} b(y_0 - y^*)I(t_1)\right) + \tau^2 \left(1 + \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1} b(y_0 - y^*)I(t_1)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0(b(\lambda - dh)h_1 - d)(y_0 - \tau - y^*)\text{Tr}(J) &= (y_0 - y^*)[\tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + y_0(y_0 - y^*)] \frac{\alpha\lambda b^2 h_1 t_1}{1 + bhh_1} \\ &\quad - y_0 \frac{at_1}{b(1 + bhh_1)} X^2 + [\tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + 2y_0(y_0 - y^*)]X \\ y_0(b(\lambda - dh)h_1 - d)(y_0 - \tau - y^*)\text{Tr}(J) &= A_0(\tau)X^2 + B_0(\tau)X + C_0(\tau) \end{aligned}$$

1. Soit $f_1(\tau) = e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*} - 1$.

$$\begin{aligned} f_1'(\tau) &= \frac{1}{y^*} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{1}{y^*} \\ &= \frac{1}{y^*} (e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1). \end{aligned}$$

Alors f_1 augmente et $f_1(0) = 0$, ce qui montre que $f_1 \geq 0$. C'est pour tout $\tau \geq 0$ nous avons $y'_0 \geq 0$. De plus, puisque $\lim_{\tau \rightarrow 0} y_0 = y^*$ alors $y_0 \geq y^*$.

2. Soit $f_2(\tau) = y_0 - \frac{1}{2}\tau - y^*$.

$$\begin{aligned} f_2'(\tau) &= y'_0 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{\frac{\tau}{y^*}} (e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*} - 1) - \frac{1}{2} (e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)^2}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{\frac{\tau}{y^*}} (\frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*}) - \frac{1}{2}}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)^2} \end{aligned}$$

Soit $\tilde{f}_2(\tau) = e^{\frac{\tau}{y^*}} (\frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*}) - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2'(\tau) &= \frac{1}{y^*} e^{\frac{\tau}{y^*}} (\frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*}) + e^{\frac{\tau}{y^*}} (\frac{1}{2y^*} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{1}{y^*}) \\ &= e^{\frac{\tau}{y^*}} [\frac{1}{y^*} (\frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{\tau}{y^*}) + \frac{1}{2y^*} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{1}{y^*}] \\ &= e^{\frac{\tau}{y^*}} [-\frac{1}{y^*} \frac{\tau}{y^*} + \frac{1}{y^*} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{1}{y^*}] \end{aligned}$$

Soit $\bar{f}_2(\tau) = -\frac{1}{y^*} \frac{\tau}{y^*} + \frac{1}{y^*} e^{\frac{\tau}{y^*}} - \frac{1}{y^*}$.

$$\bar{f}_2'(\tau) = \left(\frac{1}{y^*}\right)^2 (e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)$$

Alors $\bar{f}_2$ augmente et $\bar{f}_2(0) = 0$, ce qui montre que $\bar{f}_2 \geq 0$ et $\tilde{f}_2 \geq 0$. C'est pour tout $\tau \geq 0$ nous avons $y''_0 \geq 0$. De plus, depuis $\lim_{\tau \rightarrow 0} y'_0 = \frac{1}{2}$ nous obtenons $y'_0 \geq \frac{1}{2}$.

3. Nous montrons que $C_1(\tau) < 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 C_1(\tau) &= \tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + y_0(y_0 - y^*) \\
 &= \tau^2 - y_0\tau - (y_0 - y^*)\tau + y_0(y_0 - y^*) \\
 &= (\tau - y_0)\tau - (y_0 - y^*)(\tau - y_0) \\
 &= (\tau - y_0)(\tau - y_0 + y^*) \\
 &= (\tau - y_0)\left(\tau + y^* - \frac{\tau e^{\frac{\tau}{y^*}}}{e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1}\right) \\
 &= (\tau - y_0) \frac{(\tau + y^*)(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1) - \tau e^{\frac{\tau}{y^*}}}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)} \\
 &= (\tau - y_0) \frac{-\tau - y^* + y^* e^{\frac{\tau}{y^*}}}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)} \\
 &= (\tau - y_0) y^* \frac{f_1(\tau)}{(e^{\frac{\tau}{y^*}} - 1)}.
 \end{aligned}$$

Puisque $\tau < y_0$, on obtient que $C_1(\tau) < 0$. Par conséquent, pour tout $\tau \geq 0$ nous avons $C(\tau) < 0$.

4. Nous montrons que $B(\tau) > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 B(\tau) &= C_1(\tau) + y_0(y_0 - y^*) \\
 &= (\tau - y_0)(\tau - y_0 + y^*) + y_0(y_0 - y^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B'(\tau) &= (1 - y'_0)(\tau - y_0 + y^*) + (\tau - y_0)(1 - y'_0) + y'_0(2y_0 - y^*) \\
 &= (1 - y'_0)(2\tau - 2y_0 + y^*) + y'_0(2y_0 - y^*) \\
 &= y'_0(4y_0 - 2\tau - 2y^*) + (2\tau - 2y_0 + y^*) \\
 &= (2y'_0 - 1)(2y_0 - \tau - y^*) + \tau.
 \end{aligned}$$

Puisque $2f_2(\tau) = 2y_0 - \tau - 2y^* > 0$ et $y'_0 > \frac{1}{2}$ nous avons $B'(\tau) > 0$. De plus, $B(0) = 0$ alors $B(\tau) \geq 0$ pour tout $\tau \geq 0$.

Nous avons le lemme suivant.

Pour tout $\tau \geq 0$ nous avons $tr(J) < 0$.

$$\begin{aligned}
 y_0(b(\lambda - dh)h_1 - d)(y_0 - \tau - y^*)(Tr(J) + 2) &= A(\tau)X^2 + B(\tau)X + C(\tau) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*)X \\
 &= A(\tau)X^2 + (B(\tau) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*))X + C(\tau).
 \end{aligned}$$

Comme $A(\tau) < 0$ et $C(\tau) < 0$, nous montrons dans ce qui suit les conditions qui donnent $\Delta > 0$ et $B(\tau) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*) < 0$.

1. Nous montrons la condition pour $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned}
 \Delta > 0 &\Leftrightarrow (B(\tau) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*))^2 - 4A(\tau)C(\tau) > 0 \\
 &\Leftrightarrow (C_1(\tau) + y_0(y_0 - y^*) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*))^2 + 4\lambda \frac{\alpha y^* h_1 t_1^2 b^2}{(1 + bhh_1)^2} y_0(y_0 - y^*) C_1(\tau) > 0.
 \end{aligned}$$

C'est

$$dh < \lambda < \frac{(C_1(\tau) + y_0(y_0 - y^*) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*))^2 (1 + bhh_1)^2}{4\alpha y^* h_1 t_1^2 b^2 y_0(y^* - y_0) C_1(\tau)}. \quad (3.29)$$

2. Soit $K(\tau) = B(\tau) + 2y_0(y_0 - \tau - y^*)$.

$$\begin{aligned} K'(\tau) &= B'(\tau) + 2y'_0(y_0 - \tau - y^*) + 2y_0(y'_0 - 1) \\ &= (2y'_0 - 1)(2y_0 - \tau - y^*) + \tau + 2y'_0(y_0 - \tau - y^*) + 2y_0(y'_0 - 1) \\ &= (2y'_0 - 1)(2y_0 - \tau - y^*) + \tau + 2y'_0(2y_0 - \tau - y^*) - 2y_0 \\ &= (4y'_0 - 1)(2y_0 - \tau - y^*) + \tau - 2y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K''(\tau) &= 4y''_0(2y_0 - \tau - y^*) + (4y'_0 - 1)(2y'_0 - 1) + 1 - 2y'_0 \\ &= 4y''_0(2y_0 - \tau - y^*) + (4y'_0 - 2)(2y'_0 - 1) \\ &= 4y''_0(2y_0 - \tau - y^*) + 2(2y'_0 - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Comme $K'(0) = -y^*$ alors il existe $\tau^* > 0$ tel que $K'(\tau^*) = 0$ et $K'(\tau) < 0$ pour Tous $0 \leq \tau < \tau^*$.

De plus, $K(0) = 0$ alors il existe $\tau^{**} > \tau^*$ tel que $K(\tau) < 0$ pour tout $0 \leq \tau < \tau^*$.

De (1) et (2) on obtient

$$\tau - \sqrt{\Delta}2A(\tau) < b(\lambda - dh) - d < -k(\tau)2A(\tau).$$

Donc

$$\frac{b\lambda}{(bh+1)} - \frac{-k(\tau) - \sqrt{\Delta}}{2A(\tau)(bh+1)} < d < \frac{b\lambda}{(bh+1)} - \frac{-k(\tau) + \sqrt{\Delta}}{2A(\tau)(bh+1)}. \quad (3.30)$$

Si (3.29) et (3.30) Sont satisfaits alors nous avons $\text{tra}(J) > -2$.

$$\begin{aligned} y_0(y_0 - \tau - y^*)\det(J) &= y_0(y_0 - \tau - y^*)\frac{y_0 - \tau}{y_0}A(t_1)(1 + B(t_1)(D(t_1) - C(t_1))) \\ &= y_0(y_0 - \tau - y^*)\frac{y_0 - \tau}{y_0}\frac{y_0 - y^*}{y_0 - \tau - y^*}\left(1 + \frac{b(\lambda - dh)h_1 - d}{1 + bhh_1}(b(y_0 - y^*)I(t_1, Z_0) - \frac{at_1}{b(y_0 - y^*)})\right) \\ &= (y_0 - \tau)(y_0 - y^*)\left(1 + \frac{X}{1 + bhh_1}b(y_0 - y^*)\frac{\alpha\lambda bh_1 t_1}{X^2} - \frac{X}{1 + bhh_1}\frac{at_1}{b(y_0 - y^*)}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y_0(y_0 - \tau - y^*)X\det(J) &= (y_0 - \tau)(y_0 - y^*)\left(X + \frac{\alpha\lambda bh_1 t_1}{1 + bhh_1}b(y_0 - y^*) - \frac{X^2}{1 + bhh_1}\frac{at_1}{b(y_0 - y^*)}\right) \\ &= -\frac{at_1(y_0 - \tau)}{b(1 + bhh_1)}X^2 + (y_0 - \tau)(y_0 - y^*)X + \frac{\alpha\lambda bh_1 t_1}{1 + bhh_1}b(y_0 - \tau)(y_0 - y^*)^2 \\ y_0(y_0 - \tau - y^*)X\text{tr}(J) &= -y_0\frac{at_1}{b(1 + bhh_1)}X^2 + [\tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + 2y_0(y_0 - y^*)]X \\ &\quad + (y_0 - y^*)[\tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + y_0(y_0 - y^*)]\frac{\alpha\lambda b^2 h_1 t_1}{1 + bhh_1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
y_0(y_0 - \tau - y^*)X(\det(J) + \text{tr}(J) + 1) &= -\frac{at_1(y_0 - \tau)}{b(1+bhh_1)}X^2 + (y_0 - \tau)(y_0 - y^*)X + \frac{\alpha\lambda bh_1 t_1}{1+bhh_1}b(y_0 - \tau) \\
&\quad (y_0 - y^*)^2 - y_0 \frac{at_1}{b(1+bhh_1)}X^2 + [\tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + 2y_0(y_0 - y^*)] \\
&\quad X + (y_0 - y^*)[\tau^2 - (2y_0 - y^*)\tau + y_0(y_0 - y^*)] \frac{\alpha\lambda b^2 h_1 t_1}{1+bhh_1} \\
&\quad + y_0(y_0 - \tau - y^*)X \\
&= -\frac{at_1}{b(1+bhh_1)}(2y_0 - \tau)X^2 + (4(y_0 - \tau)(y_0 - y^*) + \tau^2 - 2y^*\tau)X \\
&\quad + (y_0 - y^*)(\tau^2 - y_0\tau + 2(y_0 - \tau)(y_0 - y^*)) \frac{\alpha\lambda b^2 h_1 t_1}{1+bhh_1} \\
&= -\frac{at_1}{b(1+bhh_1)}(2y_0 - \tau)X^2 + (4(y_0 - \tau)(y_0 - y^*) + \tau^2 - 2y^*\tau)X \\
&\quad + (y_0 - y^*)(y_0 - \tau)(-\tau + 2(y_0 - y^*)) \frac{\alpha\lambda b^2 h_1 t_1}{1+bhh_1} \\
&= A_2(\tau)X^2 + B_2(\tau)X + C_2(\tau).
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
A_2(\tau) &= -\frac{at_1}{b(1+bhh_1)}(2y_0 - \tau) < 0 \\
B_2(\tau) &= 4(y_0 - \tau)(y_0 - y^*) + \tau^2 - 2y^*\tau \\
C_2(\tau) &= (y_0 - y^*)(y_0 - \tau)(2(y_0 - y^*) - \tau) \frac{\alpha\lambda b^2 h_1 t_1}{1+bhh_1}.
\end{aligned}$$

Puisque $2f_2(\tau) = -\tau + 2(y_0 - y^*) - \tau > 0$, alors on a $C_2(\tau) > 0$. C'est $X_1^- < X < 0$ où

$$X_1^- = \frac{4(y_0 - \tau)(y_0 - y^*) + \tau(\tau - 2y^*) - \sqrt{(4(y_0 - \tau)(y_0 - y^*) + \tau^2 - 2y^*\tau)^2 + \frac{4(2y_0 - \tau)(y_0 - y^*)(y_0 - \tau)(2(y_0 - y^*) - \tau)y^*\alpha\lambda b^2 h_1 t_1^2}{(1+bhh_1)^2}}}{2\frac{at_1}{b(1+bhh_1)}(2y_0 - \tau)}.$$

Nous obtenons

$$\frac{b\lambda}{bh + 1} < d < -\frac{X_1 - b\lambda}{bh + 1}. \quad (3.31)$$

Si (3.31) est satisfaite, alors $\det(J) + \text{tr}(J) + 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
(Y + qa)\det(J) &= (1 - q)X_1Y^2 + (1 - q)X_2Y + (1 - q)X_3, \\
(Y + qa)\text{tr}(J) &= X_1Y^2 + (1 - q + X_2 + qaX_1)Y + (1 - q)X_3 + X_2qa,
\end{aligned}$$

$$Y = by_0 - a < 0,$$

$$X_1 = \frac{\lambda t_1 \left(\frac{\alpha(1-p)h_2(h_2 - x^*)}{((1-p)h_2 - x^*)^2} + \frac{(1-\alpha)h_2}{(h_2 - x^*)} \right)}{(1+bhh_2)(\lambda - dh)} > 0,$$

$$X_2 = \frac{(h_2 - x^*)(1+bh(1-p)h_2)}{((1-p)h_2 - x^*)(1+bhh_2)} > 0,$$

$$X_3 = -\frac{b(\lambda - dh)(at_1 + \ln(1-p))((1-p)h_2 - x^*)}{1+bh(1-p)h_2} < 0.$$

Modèles de chimiothérapie

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique pour la population cellulaire en traitement de chimiothérapie par deux médicaments, l'un à effet instantané et l'autre à effet continu. Nous étudions la stabilité de l'éradication tumorale et les conséquences de la perte de sa stabilité. Dans le dernier cas, nous aurions pu une bifurcation de solutions non triviales positives qui correspondent à la persistance de la tumeur. Plus précisément, nous considérons une population cellulaire constituée de trois sous-populations, cellules normales, cellules tumorales sensibles et des cellules tumorales résistantes, avec mutation et résistance au médicament avec effet instantané. Le modèle est décrit par les équations différentielles impulsives suivantes

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} - \lambda_1 (x_2 + x_3) \right) - \theta_1 x_1, \quad (4.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_2} - \lambda_2 (x_1 + x_3) \right) - m x_2 - \theta_2 x_2, \quad (4.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = r_3 x_3 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_3} - \lambda_3 (x_1 + x_2) \right) + m x_2 - \theta_3 x_3, \quad (4.3)$$

$$x_1(t_i^+) = T_1 x_1(t_i), \quad (4.4)$$

$$x_2(t_i^+) = (T_2 - R) x_2(t_i), \quad (4.5)$$

$$x_3(t_i^+) = T_3 x_3(t_i) + R x_2(t_i), \quad (4.6)$$

avec $t_{i+1} - t_i = \tau > 0, \forall i \in \mathbf{N}, \theta_1 < r_1, \theta_2 < r_2 + m$ et $\theta_3 < r_3$.

Les variables et les paramètres sont

τ : période entre deux drogues successives avec effet instantané,

x_j : biomasse des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes) pour $j = 1$ (resp. 2,3),

r_j : taux de croissance des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes) pour $j = 1$ (resp. 2,3),

k_j : capacité de charge des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes), $j = 1$ (resp. 2,3),

λ_j : paramètres compétitifs des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes), pour $j = 1$ (resp. 2,3),

T_j : fractions de survie des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes), leurs valeurs sont complètement déterminés par la quantité de médicament injecté avec un effet instantané.

θ_j : taux d'élimination des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes), par le médicament avec effet continu.

R : Fraction des cellules en mutation due à la dose du médicament avec effet instantané, qui est inférieur à T_2 .

m : paramètre de résistance acquis généralement il est très petit.

Notons que si $\theta_i = 0$, on obtient les modèles étudiés dans [7] et [37].

4.1 Analyse du modèle

Dans ce qui suit, nous procédons à l'analyse de notre modèle. Nous utiliserons une approche de points fixes.

Soit $\Phi(t, X_0)$ est la solution du système (4.1)-(4.6) pour la condition initiale X_0 .

Nous définissons les applications $F_1, F_2, F_3 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} - \lambda_1(x_2 + x_3) \right) - \theta_1 x_1,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_2} - \lambda_2(x_1 + x_3) \right) - m x_2 - \theta_2 x_2,$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = r_3 x_3 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_3} - \lambda_3(x_1 + x_2) \right) + m x_2 - \theta_3 x_3,$$

et $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$\Theta_1(x_1, x_2, x_3) = T_1 x_1,$$

$$\Theta_2(x_1, x_2, x_3) = (T_2 - R)x_2,$$

$$\Theta_3(x_1, x_2, x_3) = T_3 x_3 + R x_2.$$

Soit $\Theta := (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ et $\Psi : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'opérateur défini par

$$\Psi(\tau, X_0) = \Theta(\Phi(\tau, X_0)), \quad (4.7)$$

et notons par $D_X \Psi$ la dérivée de Ψ par rapport à X . Alors $\xi = \Phi(., X_0)$ est une solution τ -périodique de (4.1)-(4.6) si et seulement si

$$\Psi(\tau, X_0) = X_0, \quad (4.8)$$

i.e. X_0 est un point fixe de $\Psi(\tau, .)$, et il est exponentiellement stable si et seulement si le rayon spectral $\rho(D_X \Psi(\tau, .))$ est strictement inférieur à 1 ([29]). Un point fixe X_0 de $\Psi(\tau, .)$ est l'état initial de (4.1)-(4.6) qui donne une solution τ -périodique ξ Vérifiant $\xi(0) = X_0$. Nous réduisons le problème pour trouver une solution périodique de (4.1)-(4.6) à un problème de point fixe, ξ est une solution τ -périodique pour (4.1)-(4.6) si et seulement si X_0 est un point fixe pour (4.8). Par conséquent, établir l'existence de solutions périodiques non triviales de (4.1)-(4.6), il faut prouver l'existence de points fixes non triviaux de $\Psi(\tau, .)$.

Remarque 4.1.1. Le problème (4.1),(4.6), obtenu en prenant $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$, admet une solution τ_0 -périodique $x(t, x_0) = x_s(t)$.

Calcul de $x_s(t)$

Nous avons

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} \right) - \theta_1 x_1,$$

donc

$$\frac{dx_1}{r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \theta_1 x_1} = dt,$$

Posons $c_1 = r_1 - \theta_1$ et $c_2 = r_1/k_1$, donc l'équation devient

$$\frac{dx_1}{x_1 (c_1 - c_2 x_1)} = dt,$$

on utilise la méthode de séparation on obtient

$$\frac{1/c_1 dx_1}{x_1} + \frac{c_2/c_1 dx_1}{(c_1 - c_2 x_1)} = dt,$$

après intégration on obtient

$$\ln\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)}\right)^{\frac{1}{c_1}} + \ln\left(\frac{c_1 - c_2 x_1(0)}{x_1(0)}\right)^{\frac{1}{c_1}} = t,$$

$$\left[\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)}\right)\left(\frac{c_1 - c_2 x_1(0)}{x_1(0)}\right)\right]^{\frac{1}{c_1}} = e^t,$$

donc

$$\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)}\right)\left(\frac{c_1 - c_2 x_1(0)}{x_1(0)}\right) = e^{c_1 t},$$

$$\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)} = \frac{x_1(0)}{c_1 - c_2 x_1(0)} e^{c_1 t},$$

et

$$x_1(t) \left[1 + \frac{c_2 x_1(0)}{c_1 - c_2 x_1(0)} e^{c_1 t}\right] = \frac{c_1 x_1(0)}{c_1 - c_2 x_1(0)} e^{c_1 t},$$

et après le calcul, nous obtenons

$$x_1(t) = \frac{c_1 x_1(0) e^{c_1 t}}{c_1 + c_2 x_1(0) (e^{c_1 t} - 1)}. \quad (4.9)$$

Pour calculer la condition initiale $x_1(0)$ on utilise l'équation (4.4) tel que $x_1(\tau_0^+) = x_1(0)$ et $x_1(\tau_0^+) = T_1 x_1(\tau_0)$ alors

$$T_1 x_1(\tau_0) = \frac{T_1 c_1 x_1(0) e^{c_1 \tau_0}}{c_1 + c_2 x_1(0) (e^{c_1 \tau_0} - 1)} = x_1(0),$$

et

$$x_1(0) = \frac{c_1 (T_1 - e^{-c_1 \tau_0})}{c_2 (1 - e^{-c_1 \tau_0})},$$

finalement en remplace $x_1(0)$ dans (4.9) et nous obtenons

$$x_s(t) = k_1 \frac{r_1 - \theta_1}{r_1} \frac{(T_1 - \exp(-(r_1 - \theta_1)\tau_0)) \exp((r_1 - \theta_1)t)}{\exp((r_1 - \theta_1)t)(T_1 - \exp(-(r_1 - \theta_1)\tau_0)) + (1 - T_1)}, \quad 0 < t \leq \tau_0, \quad (4.10)$$

avec $x_0 = k_1 \frac{r_1 - \theta_1}{r_1} \frac{(T_1 - \exp(-(r_1 - \theta_1)\tau_0))}{1 - \exp(-(r_1 - \theta_1)\tau_0)}$.

Notons par $\zeta = (x_s, 0, 0)$ la solution triviale de (4.1)-(4.6).

4.2 Stabilité de la solution triviale ζ

Dans le cas sans tumeur nous avons $x_2 = x_3 = 0$, alors (4.1)-(4.6) est réduit à (4.1),(4.4), qui a une solution périodique positive non triviale unique x_s donnée par (4.10). Elle est définie et stable Pour $T_1 > \exp(-(r_1 - \theta_1)\tau_0)$.

$$\tau_0 > \frac{1}{r_1 - \theta_1} \ln \left(\frac{1}{T_1} \right). \quad (4.11)$$

Pour déterminer la stabilité de la solution triviale $\zeta = (x_s, 0, 0)$ dans l'espace tridimensionnel, nous devons calculer $D_X \Psi(\tau_0, X_0)$ où $X_0 = (x_0, 0, 0)$. Nous avons

$$\begin{aligned} D_X \Psi(\tau_0, X_0) &= D_X \Theta(\Phi(\tau_0, X_0)) \frac{\partial \Phi}{\partial X}(\tau_0, X_0) \\ &= \begin{pmatrix} T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, X_0)}{\partial x_1} & T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} & T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, X_0)}{\partial x_3} \\ 0 & (T_2 - R) \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & R \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} + T_3 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} & T_3 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, X_0)}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution ζ est exponentiellement stable si et seulement si Le rayon spectral est inférieur à un, soit

$$\left| T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_j}(\tau_0, X_0) \right| < 1, \text{ pour } j = 1, 2, 3.$$

En utilisant l'équation variationnelle associée au système (4.1)-(4.6)

$$\frac{d}{dt}(D_X \Phi(t, X_0)) = D_X F(\Phi(t, X_0))(D_X \Phi(t, X_0)), \quad (4.12)$$

avec la condition initiale $D_X \Phi(0, X_0) = Id_{\mathbb{R}^3}$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, X_0)}{\partial x_1} &= T_1^{-2} e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}, \\ \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} &= T_1^{-\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} e^{(r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1})\tau_0}, \\ \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, X_0)}{\partial x_3} &= T_1^{-\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} e^{(r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1})\tau_0}, \\ \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} &= \frac{m e^{(r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1})\tau_0} (1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}{T_1 \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1} (1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} \int_0^{\tau_0} e^{(r_2 - \theta_2 - (r_3 - \theta_3) - m)u} I^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) \frac{K_1}{r_1}}(u) du, \\ \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, X_0)}{\partial x_3} &= -\frac{(r_1 - \theta_1) \lambda_1 K_1 (T_1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}) e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}}{T_1^2 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0})^{2 - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} \int_0^{\tau_0} e^{(r_3 - \theta_3)u} I^{1 - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, X_0)}{\partial x_2} = & - \frac{(r_1 - \theta_1) \lambda_1 K_1 (T_1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0}) e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0}}{T_1^2 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^{2 - \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}} \left\{ \int_0^{\tau_0} e^{(r_2 - \theta_2 - m)u} I^{1 - \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}(u) du \right. \\ & \left. + m \int_0^{\tau_0} e^{(r_3 - \theta_3)u} I^{1 - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}(u) \left(\int_0^u e^{(r_2 - \theta_2 - (r_3 - \theta_3) - m)p} I^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) \frac{K_1}{r_1}}(p) dp \right) du \right\}, \end{aligned}$$

pour $0 < t \leq \tau_0$ et $I(t) = (T_1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0}) e^{(r_1 - \theta_1)t} + (1 - T_1)$ (Pour plus de détails, voir [37]).

Etant donné que $\lambda_2 K_1 < 1$ et $\lambda_3 K_1 < 1$ (voir [49]), nous avons

$$T_2 < T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} + R, \quad (4.13)$$

et

$$T_3 < T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}. \quad (4.14)$$

ζ est exponentiellement stable comme un équilibre pour Le système complet (4.1)-(4.6) si et seulement si

$$\frac{\ln(\frac{1}{T_1})}{r_1 - \theta_1} < \tau_0 < \min \left(\frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} (T_2 - R)^{-1} \right)}{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}, \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} T_3^{-1} \right)}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} \right). \quad (4.15)$$

Remarque 4.2.1. La solution périodique triviale $(x_s, 0, 0)$ représente l'équilibre sain. Donc, notre objectif est d'obtenir sa stabilité, cela correspond à l'éradication de la tumeur.

Nous avons les résultats suivants.

Théorème 4.2.2. Si (4.13)-(4.15) sont satisfaites, alors ζ est exponentiellement stable.

Si les conditions (4.13), (4.14) sont satisfaites et

$$T_2 > T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1} - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1} \frac{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} T_3^{\frac{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} + R, \quad (4.16)$$

$$\text{nous avons } \min \left(\frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} (T_2 - R)^{-1} \right)}{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}, \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} T_3^{-1} \right)}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} \right) = \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} (T_2 - R)^{-1} \right)}{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}. \text{ C'est-à-dire que la solution d'éradication tumorale } \zeta \text{ est stable pour}$$

$$\frac{\ln(\frac{1}{T_1})}{r_1 - \theta_1} < \tau_0 < \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} (T_2 - R)^{-1} \right)}{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}. \quad (4.17)$$

Si les conditions (4.13), (4.14) sont satisfaites et

$$T_2 < T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1} - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1} \frac{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} T_3^{\frac{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} + R, \quad (4.18)$$

nous avons $\min \left(\frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} (T_2 - R)^{-1} \right)}{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}, \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} T_3^{-1} \right)}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} \right) = \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} T_3^{-1} \right)}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}$. Autrement dit, nous avons la stabilité de ζ pour

$$\frac{\ln \left(\frac{1}{T_1} \right)}{r_1 - \theta_1} < \tau_0 < \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} T_3^{-1} \right)}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}. \quad (4.19)$$

Remarque 4.2.3. D'après le théorème 4.2.2, nous déduisons que nous avons la stabilité de l'équilibre trivial si les amplitudes de traitement et la période entre deux administrations successives du traitement satisfont (4.13) - (4.15), dans ce cas nous avons l'éradication de la tumeur.

4.3 Analyse de bifurcation

Pour trouver une solution périodique non triviale de période τ avec les données initiales $X_0 = (x_0, 0, 0)$, nous devons résoudre le problème de point fixe

$$X = \Psi(\tau, X). \quad (4.20)$$

Soit $\bar{\tau}$ et $\bar{X}$ tels que $\tau = \tau_0 + \bar{\tau}$ et $X = X_0 + \bar{X}$. L'équation (4.20) est équivalente à

$$M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0, \quad (4.21)$$

où

$$M(\bar{\tau}, \bar{X}) = (M_1(\bar{\tau}, \bar{X}), M_2(\bar{\tau}, \bar{X}), M_3(\bar{\tau}, \bar{X})) = X_0 + \bar{X} - \Psi(\tau_0 + \bar{\tau}, X_0 + \bar{X}).$$

Si $(\bar{\tau}, \bar{X})$ est un zéro de M , alors $(X_0 + \bar{X})$ est un point fixe de $\Psi(\tau_0 + \bar{\tau}, \cdot)$. Puisque ζ est une solution triviale τ_0 -périodique de (4.1)-(4.6), alors elle est associée au trivial point fixe X_0 de $\Psi(\tau_0, \cdot)$. Soit

$$D_X M(0, (0, 0, 0)) = \begin{pmatrix} a'_0 & b'_0 & c'_0 \\ 0 & e'_0 & 0 \\ 0 & h'_0 & i'_0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Alors

Il en résulte que (voir [37] pour plus de détails)

$$\begin{aligned} a'_0 &= T_1^{-1} (T_1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}), \\ b'_0 &= \frac{(r_1 - \theta_1)\lambda_1 K_1 (T_1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}) e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}}{T_1 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0})^2 - \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} \left\{ \int_0^{\tau_0} e^{(r_2 - \theta_2 - m)u} I^{1 - \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}(u) du, \right. \\ &\quad \left. + m \int_0^{\tau_0} e^{(r_3 - \theta_3)u} I^{1 - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}(u) \left(\int_0^u e^{(r_2 - \theta_2 - (r_3 - \theta_3) - m)p} I^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) \frac{K_1}{r_1}}(p) dp \right) du \right\}, \\ c'_0 &= \frac{(r_1 - \theta_1)\lambda_1 K_1 (T_1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}) e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}}{T_1 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0})^2 - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} \int_0^{\tau_0} e^{(r_3 - \theta_3)u} I^{1 - \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e'_0 &= 1 - (T_2 - R) T_1^{\frac{-r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} e^{(r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}) \tau_0}, \\
h'_0 &= -R T_1^{\frac{-r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} e^{(r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}) \tau_0}, \\
&\quad - T_3 \frac{m e^{(r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}) \tau_0} (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}}{T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} \int_0^{\tau_0} e^{(r_2 - \theta_2 - (r_3 - \theta_3) - m) u} I^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) \frac{K_1}{r_1}}(u) du,
\end{aligned}$$

et

$$i'_0 = 1 - T_3 T_1^{\frac{-r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} e^{(r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}) \tau_0}.$$

Nous utilisons la bifurcation de Lyapunov Schmidt pour trouver une solution périodique non triviale du modèle (4.1)-(4.6). Une condition nécessaire pour la bifurcation de solutions périodiques non triviales près de ζ est.

$$\det(D_X M(0, (0, 0, 0))) = 0.$$

De la stabilité de la solution x_s dans l'espace unidimensionnel nous avons $a'_0 > 0$, il s'ensuit que $e'_0 i'_0 = 0$ est nécessaire pour la bifurcation.

$$\tau_0 = \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}} (T_2 - R)^{-1} \right)}{r_2 - \theta_2 - m - (r_1 - \theta_1) \frac{r_2 \lambda_2 K_1}{r_1}}, \quad (4.23)$$

Cette égalité correspond à $e'_0 = 0$ et l'égalité

$$\tau_0 = \frac{\ln \left(T_1^{\frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}} T_3^{-1} \right)}{r_3 - \theta_3 - (r_1 - \theta_1) \frac{r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}, \quad (4.24)$$

Correspond à $i'_0 = 0$. Nous avons trois cas :

- **Cas 1 :** $e'_0 = 0$ et $i'_0 \neq 0$. Supposons que (4.11) - (4.14), (4.16) et (4.23) soient satisfaites. Avec les notations ci-dessus, Nous déduisons $M(0, (0, 0, 0)) = 0$, $\dim(\ker[D_X M(0, (0, 0, 0))]) = 1$ avec $\ker[D_X M(0, (0, 0, 0))] = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} c'_0 h'_0 \\ a'_0 i'_0 \end{pmatrix} - \frac{b'_0}{a'_0}, 1, -\frac{h'_0}{i'_0}\right\}$. Alors l'équation (4.21) est équivalente à

$$\begin{cases} M_1(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0, \\ M_2(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0, \\ M_3(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

où $Y_0 = \left(\frac{c'_0 h'_0}{a'_0 i'_0} - \frac{b'_0}{a'_0}, 1, -\frac{h'_0}{i'_0}\right)$, $Z = (z_1, 0, z_3)$, $\bar{X} = \alpha Y_0 + Z$ et $(\alpha, z_1, z_3) \in \mathbf{R}^3$.

De la première et la dernière équation de (4.25), on a

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_3} \\ \frac{\partial M_3(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_3(0, (0, 0, 0))}{\partial z_3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a'_0 & c'_0 \\ 0 & i'_0 \end{pmatrix} = a'_0 \cdot i'_0 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on peut résoudre $M_1(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0$ et $M_3(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0$ au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ par rapport à Z en fonction de $\bar{\tau}$ et α

et trouver une fonction continue unique Z^* , telle que $Z^*(\bar{\tau}, \alpha) = (z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), 0, z_3^*(\bar{\tau}, \alpha))$, $Z^*(0, 0) = (0, 0, 0)$,

$$M_1 \left(\bar{\tau}, \left(\left(\frac{c'_0 h'_0}{a'_0 i'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha, -\frac{h'_0}{i'_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha) \right) \right) = 0,$$

et

$$M_3 \left(\bar{\tau}, \left(\left(\frac{\dot{c}_0 \dot{h}_0}{\dot{a}_0 \dot{i}_0} - \frac{\dot{b}_0}{\dot{a}_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha, -\frac{\dot{h}_0}{\dot{i}_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha) \right) \right) = 0,$$

pour chaque $(\bar{\tau}, \alpha)$ assez petit.

De plus, nous avons $\frac{\partial Z^*}{\partial \alpha}(0, 0) = (0, 0, 0)$ et $\frac{\partial Z^*}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = \left(\frac{(r_1 - \theta_1)^2 k_1 (1 - T_1) e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0}}{r_1 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^2}, 0, 0 \right)$.

Alors $M(\bar{\tau}, \bar{\alpha}) = 0$ si et seulement si

$$f_2(\bar{\tau}, \alpha) = M_2 \left(\bar{\tau}, \left(\left(\frac{\dot{c}_0 \dot{h}_0}{\dot{a}_0 \dot{i}_0} - \frac{\dot{b}_0}{\dot{a}_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha, -\frac{\dot{h}_0}{\dot{i}_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha) \right) \right) = 0. \quad (4.26)$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation (4.26).

Nous avons $f_2(0, 0) = 0$.

Du développement de Taylor de f_2 autour de $(\bar{\tau}, \alpha) = (0, 0)$, nous trouvons que $\frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial \alpha} = 0$.

Soit $A_2 = \frac{\partial^2 f_2(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2}$, $B_2 = \frac{\partial^2 f_2(0, 0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha}$ et $C_2 = \frac{\partial^2 f_2(0, 0)}{\partial \alpha^2}$, nous avons $A_2 = 0$. De plus, pour $\lambda_2 = 0$ nous avons $B_2 = -(T_2 - R)(r_2 - \theta_2 - m) e^{(r_2 - \theta_2 - m) \tau_0} < 0$ et

$$\begin{aligned} C_2 &= (T_2 - R) \frac{r_2 e^{(r_2 - \theta_2 - m) \tau_0}}{k_2 (r_2 - \theta_2 - m)} (e^{(r_2 - \theta_2 - m) \tau_0} - 1) \\ &+ (T_2 - R) \frac{2r_2 m e^{(r_2 - \theta_2 - m) \tau_0}}{k_2} \int_0^{\tau_0} e^{(r_3 - \theta_3) u} I^{\frac{-r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}(u) \left(\int_0^u \frac{e^{(r_2 - \theta_2 - (r_3 - \theta_3) - m)s}}{I^{\frac{-r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}(s)} ds \right) du \\ &+ 2(T_2 - R) \left(\frac{-h'_0}{i'_0} \right) \left\{ \frac{r_2 e^{(r_2 - \theta_2 - m) \tau_0}}{k_2 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^{\frac{-r_3 \lambda_3 K_1}{r_1}}} \int_0^{\tau_0} e^{(r_3 - \theta_3) u} I^{\frac{-(r_3 - \theta_3) \lambda_3 K_1}{r_1}}(u) du \right\}, \end{aligned}$$

(Pour plus de détails, voir [37]). A partir du conditions citées ci-dessus, nous avons $i'_0 > 0$ et $h'_0 < 0$, alors $C_2 > 0$, donc $B_2 C_2 < 0$. Par conséquent

$$f_2(\bar{\tau}, \alpha) = B_2 \bar{\tau} \alpha + C_2 \frac{\alpha^2}{2} + o(|\alpha|^2 + |\bar{\tau}|^2).$$

En prenant $\bar{\tau} = \sigma \alpha$, nous avons $f_2(\sigma \alpha, \alpha) = \frac{\alpha^2}{2} g_2(\sigma, \alpha)$ où $g_2(\sigma, \alpha) = 2B_2 \sigma + C_2 + o_\alpha(1 + \sigma^2)$. de plus $\frac{\partial g_2}{\partial \sigma}(\sigma, 0) = 2B_2 < 0$ et $g_2(\sigma, 0) = 2B_2 \sigma + C_2$. Donc, pour $\sigma_0 = -\frac{C_2}{2B_2}$ nous avons $g_2(\sigma_0, 0) = 0$ et $\frac{\partial g_2}{\partial \sigma}(\sigma_0, 0) \neq 0$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on trouve une fonction $\sigma(\alpha)$ telle que pour α assez petite $g_2(\sigma(\alpha), \alpha) = 0$ et $\sigma(0) = \sigma_0 = -\frac{C_2}{2B_2}$.

Alors, pour α près de 0 et $\bar{\tau}(\alpha) = \sigma(\alpha) \alpha$ nous avons $f_2(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) = 0$.

Théorème 4.3.1. Si les conditions (4.11) - (4.14), (4.16) et (4.23) sont satisfaites, alors nous avons une bifurcation de la solution non trivial $\tau(\alpha)$ périodique de (4.1)-(4.6) avec la condition initiale

$\left(x_0 + \left(\frac{c'_0 h'_0}{a'_0 i'_0} - \frac{b'_0}{a'_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha), \alpha, -\frac{h'_0}{i'_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) \right) \tau(\alpha) = \tau_0 + \bar{\tau}(\alpha)$ pour $\alpha(>0)$ et λ_2 assez petit, où $\bar{\tau}(\alpha) = -\frac{C_2}{2B_2} \alpha + o(\alpha)$ et $z_1^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) = -\frac{C_2}{2B_2} \frac{(r_1 - \theta_1)^2 k_1 (1 - T_1) e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0}}{r_1 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^2} \alpha + o(\alpha)$.

- **Cas 2** : $e'_0 \neq 0$ et $i'_0 = 0$. Supposons que (4.11)-(4.14), (4.18) et (4.24) sont satisfaites. Nous avons $M(0, (0, 0, 0)) = 0$, $\dim(\ker[D_X M(0, (0, 0, 0))]) = 1$ avec $\ker[D_X M(0, (0, 0, 0))] = \text{vect}\left\{\left(\frac{-c'_0}{a'_0}, 0, 1\right)\right\}$. Soit $Y_0 = \left(\frac{-c'_0}{a'_0}, 0, 1\right)$, $Z = (z_1, z_2, 0)$, $\bar{X} = \alpha Y_0 + Z$ et $(\alpha, z_1, z_2) \in \mathbf{R}^3$.

A partir de la première et ma deuxième équation de (4.25), nous avons

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_2} \\ \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0))}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a'_0 & b'_0 \\ 0 & e'_0 \end{pmatrix} = a'_0 \cdot e'_0 \neq 0.$$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites on peut résoudre $M_1(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0$ et $M_2(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0$ au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ par rapport à Z en fonction de $\bar{\tau}$ et α et trouver une fonction continue unique Z^* , telle que $Z^*(\bar{\tau}, \alpha) = (z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), 0)$, $Z^*(0, 0) = (0, 0, 0)$,

$$M_1 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{c'_0}{a'_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha \right) \right) = 0,$$

et

$$M_2 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{c'_0}{a'_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha \right) \right) = 0,$$

Pour chaque $(\bar{\tau}, \alpha)$ assez petit.

De plus, nous avons $\frac{\partial Z^*}{\partial \alpha}(0, 0) = (0, 0, 0)$ et $\frac{\partial Z^*}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = \left(\frac{(r_1 - \theta_1)^2 k_1 (1 - T_1) e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0}}{r_1 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1) \tau_0})^2}, 0, 0 \right)$.

Alors $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0$ si et seulement si

$$f_3(\bar{\tau}, \alpha) = M_3 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{c'_0}{a'_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha \right) \right) = 0. \quad (4.27)$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation (4.27).

Nous avons $f_3(0, 0) = 0$.

Le développement de Taylor de f_3 autour de $(\bar{\tau}, \alpha) = (0, 0)$, nous trouvons que $\frac{\partial f_3(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial f_3(0, 0)}{\partial \alpha} = 0$.

Soit $A_3 = \frac{\partial^2 f_3(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2}$, $B_3 = \frac{\partial^2 f_3(0, 0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha}$ et $C_3 = \frac{\partial^2 f_3(0, 0)}{\partial \alpha^2}$. Nous avons montré que $A_3 = 0$. En outre, pour $\lambda_3 = 0$ nous avons $B_3 = -(r_3 - \theta_3) T_3 e^{(r_3 - \theta_3) \tau_0} < 0$ et $C_3 = 2r_3 \tau_0 K_3^{-1} T_3 e^{(R_3 - \theta_3) \tau_0} > 0$. Par conséquent

$$f_3(\bar{\tau}, \alpha) = B_3 \bar{\tau} \alpha + C_3 \frac{\alpha^2}{2} + o(|\alpha|^2 + |\bar{\tau}|^2).$$

En utilisant les mêmes arguments que dans le cas 1, nous avons les résultats suivants.

Théorème 4.3.2. Si les conditions (4.11) - (4.14), (4.18) et (4.24) sont satisfaites, alors nous avons

une bifurcation de la solution non trivial de (4.1)-(4.6) avec la condition initiale

$$\left(x_0 + \left(\frac{-\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha), 0, \alpha \right),$$

et de période $\tau(\alpha) = \tau_0 + \bar{\tau}(\alpha)$ pour $\alpha(> 0)$ et λ_3 assez petit, où

$$z_1^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) = -\frac{C_3}{2B_3} \frac{(r_1 - \theta_1)^2 k_1 (1 - T_1) e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0}}{r_1 (1 - e^{-(r_1 - \theta_1)\tau_0})^2} \alpha + o(\alpha),$$

et $\bar{\tau}(\alpha) = -\frac{C_3}{2B_3} \alpha + o(\alpha)$.

- **Cas 3** : $e'_0 = 0 = i'_0$.

1. Si $h'_0 \neq 0$, alors $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, qui est un cas indéterminé, pour étudier ce cas nous devons déterminer les dérivées supérieures de f_2 .
2. Si $h'_0 = 0$, alors $\dim \ker(E) = 2$, Dans ce cas, l'approche ci-dessus ne peut pas être appliquée.

Remarque 4.3.3. D'après les théorèmes 4.1.2 et 4.1.3, on déduit qu'on a une perte de stabilité pour certaines valeurs des amplitudes de traitement et la période entre deux administration successives du traitement ie. nous avons l'apparition de la tumeur.

Modèles de traitement chimiothérapeutique par des médicaments à effet instantané

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle de traitement chimiothérapeutique pour une population de cellules constituées de cellules normales et cellules tumorales, les cellules tumorales sont constituées de cellules sensibles et résistantes. Ainsi, nous obtenons un modèle de chimiothérapie impulsif, le modèle considéré ici est inspiré de [7], [37] - [49].

Dans notre cas, deux médicaments sont utilisés, d'abord une dose de drogue **A** est administrée au temps t_1 , après cela à l'instant $t_2 (> t_1)$ une dose de drogue **B** est administrée, ce processus est répété périodiquement avec période $\tau_0 = t_2$. Nous obtenons le système suivant

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad (5.1)$$

$$x_i((n\tau_0 + t_1)^+) = A_i(x_1(n\tau_0 + t_1), x_2(n\tau_0 + t_1), x_3(n\tau_0 + t_1)), \quad (5.2)$$

$$x_i(((n+1)\tau_0)^+) = B_i(x_1((n+1)\tau_0), x_2((n+1)\tau_0), x_3((n+1)\tau_0)), \quad (5.3)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $i = \overline{1, 3}$.

Où $x_i \in \mathbb{R}^+$, τ_0 : période de traitement,

x_i : biomasse des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes), pour $i = 1$ (resp. 2, 3),

A_i : fraction des cellules normale (resp. Sensibles et résistantes), qui survivent après que le médicament **A** est administré à temps $n\tau_0 + t_1$, pour $i = 1$ (respectivement 2, 3),

B_i : fraction des cellules normale (resp. Sensibles et résistantes), qui survivent après que le médicament **B** est administré au temps $(n+1)\tau_0$, pour $i = 1$ (resp. 2, 3),

F_i : croissance de la biomasse des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes), pour $i = 1$ (Resp. 2, 3). Selon les documents [7] et [37] nous avons

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} - \lambda_1(x_2 + x_3) \right),$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_2} - \lambda_2(x_1 + x_3) \right) - m x_2,$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = r_3 x_3 \left(1 - \frac{x_2 + x_3}{k_3} - \lambda_3(x_1 + x_2) \right) + m x_2,$$

$$A_1(x_1(n\tau_0 + t_1), x_2(n\tau_0 + t_1), x_3(n\tau_0 + t_1)) = T_1 x_1(n\tau_0 + t_1),$$

$$\begin{aligned}
A_2(x_1(n\tau_0 + t_1), x_2(n\tau_0 + t_1), x_3(n\tau_0 + t_1)) &= (T_2 - R_A)x_2(n\tau_0 + t_1), \\
A_3(x_1(n\tau_0 + t_1), x_2(n\tau_0 + t_1), x_3(n\tau_0 + t_1)) &= T_3x_3(n\tau_0 + t_1) + R_Ax_2(n\tau_0 + t_1), \\
B_1(x_1((n+1)\tau_0), x_2((n+1)\tau_0), x_3((n+1)\tau_0)) &= \Theta_1x_1((n+1)\tau_0), \\
B_2(x_1((n+1)\tau_0), x_2((n+1)\tau_0), x_3((n+1)\tau_0)) &= (\Theta_2 - R_B)x_2((n+1)\tau_0), \\
B_3(x_1((n+1)\tau_0), x_2((n+1)\tau_0), x_3((n+1)\tau_0)) &= \Theta_3x_3((n+1)\tau_0) + R_Bx_2((n+1)\tau_0).
\end{aligned}$$

Les paramètres sont :

r_i : taux de croissance des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes) pour $i = 1$ (respectivement 2,3),

k_i : capacité de charge des cellules normales (resp. Sensible et résistante) pour $i = 1$ (respectivement 2,3),

λ_i : paramètre concurrentiel des cellules normales (resp. Sensibles et résistantes) pour $i = 1$ (2,3),

T_i, Θ_i : fraction de survie des cellules normales (resp. Sensible et résistante) Pour $i = 1$ (respectivement 2,3),

$R_A (< T_2)$ (resp. $R_B (< \theta_2)$) : fraction de cellules en mutation due à l'utilisation du médicament **A** (resp. **B**),

m : paramètre de résistance acquis généralement il est très petit.

Dans le cas sans tumeur, nous avons $\dot{x}_1 = F_1(x_1, 0, 0)$ Avec impulsions périodiques

$x_1((n\tau_0 + t_1)^+) = T_1x_1(n\tau_0 + t_1)$ et $x_1(((n+1)\tau_0)^+) = \Theta_1x_1((n+1)\tau_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire que le problème (5.1) - (5.3) a une solution τ_0 -periodique $\zeta(t) = (x_s(t), 0, 0)$,

Calcul de $x_1(0)$

Nous avons

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right),$$

donc

$$\frac{dx_1}{r_1x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right)} = dt,$$

Posons $c_1 = r_1$ et $c_2 = r_1/k_1$, donc l'équation devient

$$\frac{dx_1}{x_1(c_1 - c_2x_1)} = dt,$$

on utilise la méthode de séparation on obtient

$$\frac{1/c_1 dx_1}{x_1} + \frac{c_2/c_1 dx_1}{(c_1 - c_2x_1)} = dt,$$

intégrons entre 0 et t on obtient

$$\ln\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2x_1(t)}\right)^{\frac{1}{c_1}} + \ln\left(\frac{c_1 - c_2x_1(0)}{x_1(0)}\right)^{\frac{1}{c_1}} = t,$$

et

$$\ln\left[\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2x_1(t)}\right)\left(\frac{c_1 - c_2x_1(0)}{x_1(0)}\right)\right]^{\frac{1}{c_1}} = t,$$

alors

$$\left[\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)}\right)\left(\frac{c_1 - c_2 x_1(0)}{x_1(0)}\right)\right]^{\frac{1}{c_1}} = e^t,$$

et

$$\left(\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)}\right)\left(\frac{c_1 - c_2 x_1(0)}{x_1(0)}\right) = e^{c_1 t},$$

$$\frac{x_1(t)}{c_1 - c_2 x_1(t)} = \frac{x_1(0)}{c_1 - c_2 x_1(0)} e^{c_1 t},$$

$$x_1(t) \left[1 + \frac{c_2 x_1(0)}{c_1 - c_2 x_1(0)} e^{c_1 t}\right] = \frac{c_1 x_1(0)}{c_1 - c_2 x_1(0)} e^{c_1 t},$$

alors

$$x_1(t) = \frac{c_1 x_1(0) e^{c_1 t}}{c_1 + c_2 x_1(0) (e^{c_1 t} - 1)},$$

on utilise les équations (5.2) et (5.3), on obtient

$$x_1(\tau_0) = \frac{c_1 x_1(t_1^+) e^{c_1(\tau_0 - t_1)}}{c_1 + c_2 x_1(t_1^+) (e^{c_1(\tau_0 - t_1)} - 1)},$$

avec $x_1(t_1^+) = T_1 x_1(t_1)$ donc

$$x_1(\tau_0) = \frac{c_1 x_1(t_1) T_1 e^{c_1(\tau_0 - t_1)}}{c_1 + c_2 x_1(t_1) T_1 (e^{c_1(\tau_0 - t_1)} - 1)},$$

et $x_1(\tau_0^+) = \Theta_1 x_1(\tau_0) = x_1(0)$ donc

$$\Theta_1 x_1(\tau_0) = \frac{c_1 x_1(t_1) T_1 \Theta_1 e^{c_1(\tau_0 - t_1)}}{c_1 + c_2 x_1(t_1) T_1 (e^{c_1(\tau_0 - t_1)} - 1)} = x_1(0)$$

donc

$$x_1(0) = \frac{c_1^2 T_1 \Theta_1 e^{c_1 \tau_0} - c_1^2}{c_1 c_2 [e^{c_1 t_1} - 1 - T_1 e^{c_1 t_1} + T_1 e^{c_1 \tau_0}]}$$

remplaçons c_1 et c_2 on obtient

$$x_1(0) = \frac{k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1)}{e^{r_1 t_1} - 1 + T_1 (-e^{c_1 t_1} + T_1 e^{r_1 \tau_0})}$$

en fin on obtient

$$x_s(t) = \begin{cases} \frac{k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1) e^{r_1 t}}{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1) (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1)}, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1) e^{r_1 t}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}, & \text{si } t_1 < t \leq \tau_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\text{et } x_0 = \frac{k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1)}{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1}.$$

Remarque 5.0.4. La solution $\zeta(t) = (x_s(t), 0, 0)$ du problème (5.1) - (5.3) est appelée la solution triviale.

5.1 Stabilité de la solution triviale

Comme dans [7, 37, 36], Soit Φ est le flot associé au système (5.1)-(5.3), alors une solution X de (5.1)-(5.3) avec condition initiale X_0 satisfaite

$$X(t) = \Phi(t, X_0), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Après l'utilisation du médicament **A** à l'instant t_1 nous avons

$$X(t) = \Phi(t, A(\Phi(t_1, X_0))), \quad t_1 < t \leq \tau_0,$$

où $A = (A_1, A_2, A_3)$.

Après l'utilisation du médicament **B** à l'instant $t_2 = \tau_0$, nous devons avoir $X_0 = B(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))$ pour obtenir une solution τ_0 périodique de (5.1) - (5.3).

Soit $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ est définie par

$$\Psi(\tau_0, X_0) := B(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))), \quad (5.5)$$

où $B = (B_1, B_2, B_3)$.

Par conséquent, une solution τ_0 -périodique de problème (5.1) - (5.3) est un point fixe de $\Psi(\tau_0, \cdot)$. De Iooss [29], X_0 est stable si le rayon spectral $\rho(D_X \Psi(\tau_0, X_0)) < 1$.

Nous avons

$$\begin{aligned} D_X \Psi(\tau_0, X_0) &= D_X B(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial B_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial B_3}{\partial x_2} & \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial A_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial A_3}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 & Q_1 & Q_2 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & Q_3 & D_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour tout $0 \leq t \leq t_1$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_1} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right), \\ \frac{\partial \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_2} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_3} = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right),$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_1} = e^{r_1 t} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1)}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1} \right)^{-2r_1} > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_2} = e^{(r_2 - m)t} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1)}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1} > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_3} = e^{r_3 t} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1)}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1} > 0,$$

Pour tout $0 \leq t \leq t_1$. De la même manière que dans [37], pour tout $t_1 < t \leq \tau_0$ nous avons

$$\frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_1} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_2} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_3} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right),$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = e^{r_1(t-t_1)} \left(\frac{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}} \right)^{-2r_1} > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} = e^{(r_2 - m)(t-t_1)} \left(\frac{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1} > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} = e^{r_3(t-t_1)} \left(\frac{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1} > 0,$$

pour tout $t_1 < t \leq \tau_0$ avec où $D_i = \frac{\partial B_i(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_i} \frac{\partial A_i(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_i}$,
 $i = \overline{1, 3}$,

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\
Q_2 &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right) \text{ et} \\
Q_3 &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right).
\end{aligned}$$

La solution ζ est exponentiellement stable si et seulement si Le rayon spectral est inférieur à un, c'est-à-dire

$$|D_i| = \left| \frac{\partial B_i(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_i} \frac{\partial A_i(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_i} \right| < 1, \text{ pour } i = \overline{1, 3}.$$

Considérons les équations variationnelles associées au système (5.1)

$$\frac{d}{dt}(D_X \Phi(t, X_0)) = D_X F(\Phi(t, X_0)) D_X \Phi(t, X_0), \text{ pour } 0 \leq t \leq t_1, \quad (5.6)$$

avec la condition initiale $D_X \Phi(0, X_0) = Id_{\mathbb{R}^3}$, et

$$\frac{d}{dt}(D_X \Phi(t, A(\Phi(t_1, X_0)))) = D_X F(\Phi(t, A(\Phi(t_1, X_0)))) D_X \Phi(t, A(\Phi(t_1, X_0))), \text{ pour } t_1 \leq t \leq \tau_0, \quad (5.7)$$

avec la condition initiale est $D_X \Phi(0, A(\Phi(t_1, X_0))) = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Nous obtenons $\frac{\partial \Phi_i(t, X_0)}{\partial x_i} = e^{\int_0^t \frac{\partial F_i(\zeta(r))}{\partial x_i} dr}$ pour $0 \leq t \leq t_1$ et $\frac{\partial \Phi_i(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_i} = e^{\int_{t_1}^t \frac{\partial F_i(\zeta(r))}{\partial x_i} dr}$ pour $t_1 < t \leq \tau_0$ et $i = 1, 2, 3$.

Nous avons les résultats suivants

Théorème 5.1.1. *Si les conditions $\left| \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\zeta(r)) dr \right) < 1$ pour $i = 1, 2, 3$ Sont satisfaites, alors la solution périodique triviale $\zeta = (x_s, 0, 0)$ est exponentiellement stable.*

Démonstration. La solution donnée par (5.4) est définie et stable dans l'espace unidimensionnel si $T_1 \Theta_1 > e^{-r_1 \tau_0}$ et $D_1 = \Theta_1 T_1 e^{r_1 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-2r_1} < 1$. c'est

$$1 - 2r_1 \leq 0, \Theta_1 > T_1^{-1} e^{-r_1 \tau_0} \text{ et } T_1 > e^{-r_1 \tau_0}, \quad (5.8)$$

où

$$1 - 2r_1 > 0, T_1^{-1} e^{-r_1 \tau_0} < \Theta_1 < T_1^{-\frac{1}{1-2r_1}} e^{-r_1 \tau_0} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} + T_1 \right)^{\frac{2r_1}{1-2r_1}} \text{ et } T_1 > e^{-r_1 \tau_0}. \quad (5.9)$$

Pour déterminer la stabilité de la solution triviale $\zeta = (x_s, 0, 0)$ dans l'espace tridimensionnel, nous devons calculer D_2 et D_3 . Nous avons

$$D_2 = (T_2 - R_A)(\Theta_2 - R_B)e^{(r_2-m)\tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1})T_1]\Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1},$$

et

$$D_3 = T_3 \Theta_3 e^{r_3 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1})T_1]\Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1}.$$

Si l'on vérifie (5.8) ou (5.9), alors ζ est stable comme équilibre pour Le système complet (5.1) - (5.3) pour $D_2 < 1$ et $D_3 < 1$.

$D_2 < 1$ est équivalent à

$$\Theta_2 < (T_2 - R_A)^{-1} e^{-(r_2-m)\tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1})T_1]\Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{r_2 \lambda_2 k_1} + R_B, \quad (5.10)$$

et $D_3 < 1$ est équivalent à

$$\Theta_3 < T_3^{-1} e^{-r_3 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1})T_1]\Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{r_3 \lambda_3 k_1}. \quad (5.11)$$

En utilisant le théorème 5.1.1, on en déduit le résultat suivant. $\square$

Corollaire 5.1.2. Si (5.8), (5.10), (5.11) ou (5.9)-(5.11) sont satisfaits, alors la solution périodique $\zeta = (x_s, 0, 0)$ de (5.1) - (5.3) est exponentiellement stable.

5.2 Cas Critique

Dans ce qui suit, nous analysons la bifurcation de la solutions périodiques non triviales du système (5.1) - (5.3) Près de $X_0 = (x_0, 0, 0)$. Soit $\bar{\tau}$ et $\bar{X}$ tels que $\tau = \tau_0 + \bar{\tau}$ et $X = X_0 + \bar{X}$. L'équation (5.5) est équivalente à

$$M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0, \quad (5.12)$$

où $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = (M_1(\bar{\tau}, \bar{X}), M_2(\bar{\tau}, \bar{X}), M_3(\bar{\tau}, \bar{X})) = X_0 + \bar{X} - \Psi(\tau_0 + \bar{\tau}, X_0 + \bar{X})$.

Si $(\bar{\tau}, \bar{X})$ est un zéro de M , alors $(X_0 + \bar{X})$ est un point fixe de $\Psi(\tau_0 + \bar{\tau}, \cdot)$. Depuis ζ est une solution triviale τ_0 -périodique (5.1)-(5.3), Alors elle est associée au point fixe trivial X_0 de $\Psi(\tau_0, \cdot)$. Nous supposons que la solution x_s est exponentiellement stable dans l'espace unidimensionnel, c'est-à-dire

$$1 - \left| \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \right| \neq 0. \quad (5.13)$$

De (5.13) et le théorème des fonctions implicites, nous avons une branche de solutions triviale τ_0 -périodiques de (5.1) - (5.3). Soit

$$D_X M(\bar{\tau}, \bar{X}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

De (5.14), nous avons

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_1} \right) \\ b &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_2} \right) \\ c &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_3} \right) \\ d &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_1} \right) \\ e &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_2} \right) \\ f &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_3} \right) \\ g &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_1} \right) \\ h &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_2} \right) \\ i &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

Pour $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (0, 0)$, nous avons $a = a_0 = 1 - D_1$, $b = b_0$, $c = c_0$, $d = d_0$, $e = e_0 = 1 - D_2$, $f = f_0$, $g = g_0$, $h = h_0$ et $i = i_0 = 1 - D_3$ pour $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (0, (0, 0, 0))$. Nous avons $d_0 = 0$, $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ et $a_0 > 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - \left(\frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \right), \\ b_0 &= - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\ c_0 &= - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1 - \left(\frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\
h_0 &= - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\
i_0 &= 1 - \left(\frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right), \\
d_0 &= f_0 = g_0 = 0.
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 - \Theta_1 T_1 e^{r_1 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-2r_1} > 0, \\
b_0 &= -\Theta_1 T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_2} - \Theta_1 (T_2 - R_A) \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \\
&\quad - \Theta_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \left(R_A \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} + T_3 \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) > 0, \\
c_0 &= -\Theta_1 T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_3} - \Theta_1 (T_2 - R_A) \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\
&\quad - \Theta_1 T_3 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} > 0, \\
e_0 &= 1 - (T_2 - R_A) (\Theta_2 - R_B) e^{(r_2 - m) \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1}, \\
h_0 &= -(T_2 - R_A) \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \left(R_B \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} + \Theta_3 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \right) \\
&\quad - \Theta_3 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \left(R_A \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} + T_3 \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) < 0, \\
i_0 &= 1 - T_3 \Theta_3 e^{r_3 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1}.
\end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour la bifurcation de cellules non triviales zéro de la fonction M est que le déterminant de la matrice jacobienne $D_X M(0, (0, 0, 0))$ est égal à zéro, soit $e_0 \cdot i_0 = 0$.

Il y a trois cas critiques :

(C1) $e_0 = 0 \neq i_0$, **(C2)** $e_0 \neq 0 = i_0$, et **(C3)** $e_0 = i_0 = 0$.

Maintenant, nous analysons la bifurcation dans les différents cas.

(C1) $e_0 = 0 \neq i_0$. Nous avons $M(0, (0, 0, 0)) = 0$. Soit $D_X M(0, (0, 0, 0)) = E$, alors $\dim \ker(E) = \text{co dim } R(E) = 1$. on note P_1 et P_2 Les projecteurs sur $\ker(E)$ et $R(E)$ respectivement, tels que $P_1 + P_2 = Id_{\mathbb{R}^3}$. Nous avons $P_1 \mathbb{R}^3 = \text{vect}\{Y_0\} = \ker(E)$, avec $Y_0 = \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0}, 1, -\frac{h_0}{i_0} \right)$ et $P_2 \mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} = R(E)$. Alors $(I - P_1) \mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ et $(I - P_2) \mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(0, 1, 0)\}$.

L'équation (5.12) est équivalente à

$$\begin{cases} M_1(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0, \\ M_2(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0, \\ M_3(\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z) = 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

$Z = (z_1, 0, z_3)$, $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z)$ et $(\alpha, z_1, z_3) \in \mathbb{R}^3$.

A partir de la première et la dernière équation de (5.15), nous avons

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1(0,(0,0,0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_1(0,(0,0,0))}{\partial z_3} \\ \frac{\partial M_3(0,(0,0,0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_3(0,(0,0,0))}{\partial z_3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ 0 & i_0 \end{pmatrix} = a_0 \cdot i_0 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\delta > 0$ Suffisamment petite et une fonction continue unique Z^* , telle que $Z^*(\bar{\tau}, \alpha) = (z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), 0, z_3^*(\bar{\tau}, \alpha))$, $Z^*(0, 0) = (0, 0, 0)$,

$$M_1 \left(\bar{\tau}, \left(\left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha, -\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha) \right) \right) = 0, \quad (5.16)$$

et

$$M_3 \left(\bar{\tau}, \left(\left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha, -\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha) \right) \right) = 0, \quad (5.17)$$

pour chaque $(\bar{\tau}, \alpha)$ tel que $|\alpha| < \delta$ et $|\bar{\tau}| < \delta$.

Soit $\eta(\bar{\tau}) = \tau_0 + \bar{\tau}$, $\eta_1(\bar{\tau}, \alpha) = x_0 + \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha)$, $\eta_2(\bar{\tau}, \alpha) = \alpha$ et $\eta_3(\bar{\tau}, \alpha) = -\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha)$.

de (5.16) et (5.17) nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial M_3}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = 0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_1 - B_1(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} (\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} a_0 \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + c_0 \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}}, \\ i_0 \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \quad (5.19)$$

De la même manière que ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\eta_1 - B_1(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} a_0 \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \alpha} + c_0 \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \alpha} = 0, \\ i_0 \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \alpha} = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.21)$$

De plus, nous avons $\frac{\partial Z^*}{\partial \alpha}(0,0) = (0,0,0)$.

Alors $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0$ si et seulement si

$$f_2(\bar{\tau}, \alpha) = M_2 \left(\bar{\tau}, \left(\left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha, -\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha) \right) \right) = 0. \quad (5.22)$$

L'équation (5.22) est appelée détermination de l'équation et le nombre de ses solutions est égal au nombre de solutions périodiques de (5.1) - (5.3) (voir [14]). Nous allons maintenant résoudre l'équation (5.22). Nous avons $f_2(0,0) = 0$. Du développement de Taylor de f_2 autour de $(\bar{\tau}, \alpha) = (0,0)$, nous avons trouvé que $\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 f_2(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} = 0$

$$f_2(\bar{\tau}, \alpha) = \mathcal{B}_2 \bar{\tau} \alpha + \mathcal{C}_2 \frac{\alpha^2}{2} + o(|\alpha|^2 + |\bar{\tau}|^2).$$

Avec, $\mathcal{B}_2 = \frac{\partial^2 f_2(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha}$ et $\mathcal{C}_2 = \frac{\partial^2 f_2(0,0)}{\partial \alpha^2}$. (Voir Annexe 5.3).

En prenant $\bar{\tau} = \sigma \alpha$, nous avons $f_2(\sigma \alpha, \alpha) = \frac{\alpha^2}{2} g_2(\sigma, \alpha)$ où $g_2(\sigma, \alpha) = 2\mathcal{B}_2 \sigma + \mathcal{C}_2 + o_\alpha(1 + \sigma^2)$. Plus loin $\frac{\partial g_2}{\partial \sigma}(\sigma, 0) = 2\mathcal{B}_2$ et $g_2(\sigma, 0) = 2\mathcal{B}_2 \sigma + \mathcal{C}_2$. Donc, pour $\mathcal{B}_2 \neq 0$ et $\sigma_0 = -\frac{\mathcal{C}_2}{2\mathcal{B}_2}$ nous avons $g_2(\sigma_0, 0) = 0$ et $\frac{\partial g_2}{\partial \sigma}(\sigma_0, 0) \neq 0$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on trouve une fonction $\sigma(\alpha)$ telle que pour α assez petite $g_2(\sigma(\alpha), \alpha) = 0$ et $\sigma(0) = \sigma_0 = -\frac{\mathcal{C}_2}{2\mathcal{B}_2}$. Ensuite, pour α proche de 0 et $\bar{\tau}(\alpha) = \sigma(\alpha)\alpha$ nous avons $f(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) = 0$.

Remarque 5.2.1. Toutes les composantes du terme $X_0 + \bar{X} = X_0 + \alpha Y_0 + Z^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha)$ doivent être non négatives, alors nous devons avoir $\alpha \geq 0$, $-\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) \geq 0$ et $\tau_0 + \bar{\tau}(\alpha) > 0$. Ces conditions sont satisfaites pour $\frac{h_0}{i_0} \leq 0$ et $\alpha(\geq 0)$ assez petit, puisque $z_3^*(0,0) = \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial t} = \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0$.

En conclusion, nous avons le théorème suivant.

Théorème 5.2.2. Soient $\left| \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\zeta(r)) dr \right) < 1$ pour $i = 1, 3$

et $\left| \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\zeta(r)) dr \right) = 1$, nous avons les résultats suivants :

1. Si $\frac{h_0}{i_0} \leq 0$ et $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 \neq 0$ alors On a une bifurcation de solutions périodiques non triviales (5.1) avec période $\tau(\alpha) = \tau_0 + \bar{\tau}(\alpha)$ à partir de $X_0 + \alpha Y_0 + Z^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha)$ pour tout $\alpha(> 0)$ assez petit, d'ailleurs $\bar{\tau}(\alpha) \simeq -\frac{\mathcal{C}_2}{2\mathcal{B}_2} \alpha$. Par conséquent, Nous avons une bifurcation supercritique pour $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 < 0$ et un cas subcritique pour $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 > 0$.
2. Si $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 = 0$ Nous avons des cas indéterminés.

(C2) $e_0 \neq 0 = i_0$.

Nous avons $M(0, (0,0,0)) = 0$. Soit $D_X M(0, (0,0,0)) = E$, alors $\dim \ker(E) = \text{co dim } R(E) = 1$.

Pour ce cas nous prenons $Y_0 = \left(-\frac{c_0}{a_0}, 0, 1 \right)$ et $P_2 \mathbb{R}^3 = \text{vect} \left\{ (1, 0, 0), \left(0, 1, \frac{h_0}{e_0} \right) \right\} = R(E)$.

Alors $(I - P_1)\mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ et $(I - P_2)\mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(0, 0, 1)\}$.

Soit $Z = (z_1, z_2, 0)$, $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (\bar{\tau}, \alpha Y_0 + Z)$ et $(\alpha, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

A partir de la première et la deuxième équations de (5.15), nous avons

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_2} \\ \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} & \frac{\partial M_2(0, (0, 0, 0))}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix} = a_0 \cdot e_0 \neq 0.$$

D'après le théorème de fonction implicite, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et une fonction continue unique Z^* , telle que $Z^*(\bar{\tau}, \alpha) = (z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), 0)$, $Z^*(0, 0) = (0, 0, 0)$,

$$M_1 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha \right) \right) = 0, \quad (5.23)$$

et

$$M_2 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha \right) \right) = 0, \quad (5.24)$$

pour chaque $(\bar{\tau}, \alpha)$ tel que $|\alpha| < \delta$ et $|\bar{\tau}| < \delta$.

Soit $\eta(\bar{\tau}) = \tau_0 + \bar{\tau}$, $\eta_1(\bar{\tau}, \alpha) = x_0 - \frac{c_0}{a_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha)$, $\eta_2(\bar{\tau}, \alpha) = z_2^*(\bar{\tau}, \alpha)$ et $\eta_3(\bar{\tau}, \alpha) = \alpha$.

De (5.23) et (5.24) nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = 0, \end{cases}$$

De la même manière que ci-dessus, nous obtenons

$$\frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}}, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \quad (5.26)$$

Et

$$\frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \alpha} = 0, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial z_2^*(0, 0)}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.28)$$

Donc $\frac{\partial Z^*}{\partial \alpha}(0, 0) = (0, 0, 0)$.

Alors $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0$ si seulement si

$$f_3(\bar{\tau}, \alpha) = M_3 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), z_2^*(\bar{\tau}, \alpha), \alpha \right) \right) = 0. \quad (5.29)$$

Nous obtenons

$$f_3(\bar{\tau}, \alpha) = \mathcal{B}_3 \bar{\tau} \alpha + \mathcal{C}_3 \frac{\alpha^2}{2} + o((|\alpha| + |\bar{\tau}|)^2),$$

où $A_3 = \frac{\partial^2 f_3(0, 0)}{\partial \bar{\tau}^2} = 0$, $\mathcal{B}_3 = \frac{\partial^2 f_3(0, 0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha}$ et $\mathcal{C}_3 = \frac{\partial^2 f_3(0, 0)}{\partial \alpha^2}$ (voir annexe 5.3).

En utilisant les mêmes arguments que dans le cas (C1), on obtient les résultats suivants.

Théorème 5.2.3. Soient $\left| \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\zeta(r)) dr \right) < 1$ pour $i = 1, 2$ et

$\left| \frac{\partial B_3}{\partial x_3}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\zeta(r)) dr \right) = 1$, nous avons les résultats suivants :

1. Si $z_2^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) \geq 0$ et $\mathcal{B}_3 \mathcal{C}_3 \neq 0$ nous avons une bifurcation de la solutions périodiques non triviales (5.1) de période $\tau(\alpha) = \tau_0 + \bar{\tau}(\alpha)$ à partir de $X_0 + \alpha Y_0 + Z^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha)$ pour tout $\alpha (> 0)$ assez petit, d'ailleurs $\bar{\tau}(\alpha) \simeq -\frac{\mathcal{C}_3}{2\mathcal{B}_3} \alpha$. Par conséquent, nous avons une bifurcation supercritique pour $\mathcal{B}_3 \mathcal{C}_3 < 0$ et un cas supercritique pour $\mathcal{B}_3 \mathcal{C}_3 > 0$.
2. If $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 = 0$ nous avons des cas indéterminés.

Remarque 5.2.4. Notez que dans le cas particulier $Z = (z_1, 0, 0)$ nous avons

$$M_2 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1, 0, \alpha \right) \right) = 0,$$

pour tout $(\bar{\tau}, z_1, \alpha) \in \mathbb{R}^3$. Alors, l'équation (5.12) est réduit à

$$\begin{cases} M_1 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1, 0, \alpha \right) \right) = 0, \\ M_3 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1, 0, \alpha \right) \right) = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Nous avons $\frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial z_1} = \frac{\partial M_1(0, (0, 0, 0))}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} = \dot{a}_0 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et une fonction continue unique Z^* , telle que $Z^*(\bar{\tau}, \alpha) = (z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), 0, 0)$, $Z^*(0, 0) = (0, 0, 0)$ et $M_1 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), 0, \alpha \right) \right) = 0$, pour chaque $(\bar{\tau}, \alpha)$ tels que $0 < \alpha < \delta$ et $|\bar{\tau}| < \delta$.

Alors $M(\bar{\tau}, \bar{X}) = 0$ si est seulement si $f_3(\bar{\tau}, \alpha) = M_3 \left(\bar{\tau}, \left(-\frac{\dot{c}_0}{\dot{a}_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha), 0, \alpha \right) \right) = 0$.

Nous avons les résultats suivants.

Théorème 5.2.5. Soient $\left| \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\zeta(r)) dr \right) < 1$ pour $i = 1, 2$ et $\left| \frac{\partial B_3}{\partial x_3}(\zeta(\tau_0)) \right| \left| \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\zeta(t_1)) \right| \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\zeta(r)) dr \right) = 1$, ensuite nous avons Les mêmes résultats que dans le théorème 5.2.2.

Remarque 5.2.6. Le cas dégénéré (C3) correspondant à $e_0 = i_0 = 0$ n'est pas étudié dans ce travail.

1. Si $h_0 \neq 0$, alors $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{C}_2 = 0$, qui est un cas indéterminé, pour étudier ce cas nous devons déterminer les dérivées supérieures de f_2 .
2. Si $h_0 = 0$, alors $\dim \ker(E) = 2$, dans ce cas, l'approche ci-dessus ne peut pas être appliquée.

Soit

1.

$$\Theta_2 = (T_2 - R_A)^{-1} e^{-(r_2-m)\tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{r_2 \lambda_2 k_1} + R_B \quad (5.31)$$

Cette égalité correspond à $e_0 = 0$ et l'égalité

$$\Theta_3 = T_3^{-1} e^{-r_3 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{r_3 \lambda_3 k_1}. \quad (5.32)$$

Correspond à $i_0 = 0$.

Si (5.8), (5.11) et (5.31) ou (5.9), (5.11) et (5.31) sont satisfaites, nous en déduisons que $e_0 = 0$ et $i_0 > 0$, donc les conditions du théorème 5.2.2 sont satisfaites. De plus, pour $\lambda_2 = 0$ nous avons $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2 \partial x_3} < 0$ et $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2^2} < 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & -\frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \\ & \times \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2^2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} \right) \right\} > 0 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}_2 = -\frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} < 0.$$

Donc $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 < 0$. Du théorème 5.2.2 nous avons

Corollaire 5.2.7. Si (5.8), (5.11) et (5.31) ou (5.9), (5.11) et (5.31) sont satisfaites, alors il existe $\lambda_0 > 0$, tel que pour tout $|\lambda_2| < \lambda_0$, le problème (5.1) - (5.3) a des solutions périodiques non triviales. Plus précisément, il existe $\alpha^* > 0$, tel que pour tout $0 < \alpha < \alpha^*$, nous avons une solution non triviale $(\tau_0 + \bar{\tau}(\alpha))$ - périodique

$$\Phi \left(\cdot, \left(x_0 + \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha), \alpha, -\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha) \right) \right).$$

Si (5.8), (5.10) et (5.32) ou (5.9), (5.10) et (5.32) sont satisfaites, nous en déduisons $e_0 > 0$ et $i_0 = 0$, donc les conditions du théorème (5.2.3) sont satisfaites. De plus, pour $\lambda_3 = 0$, nous avons $\frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$ et $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3^2} < 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 = & -\frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} \right\} > 0 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}_3 = -\frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} < 0,$$

alors $\mathcal{B}_3 \mathcal{C}_3 < 0$. De théorème (5.2.3) nous avons

Corollaire 5.2.8. Si (5.8), (5.10) et (5.32) ou (5.9), (5.10) et (5.32) sont satisfaites, alors il existe $\lambda_0 > 0$, tel que pour tout $|\lambda_3| < \lambda_0$, le problème (5.1) - (5.3) admet des solutions périodiques non triviales. Plus précisément, il existe $\alpha^* > 0$, de sorte que pour tout $0 < \alpha < \alpha^*$, nous avons une

solution non triviale $(\tau_0 + \bar{\tau}(\alpha))$ - périodique

$$\Phi \left(., \left(x_0 + \left(-\frac{c_0}{a_0} \right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}(\alpha), \alpha), 0, \alpha \right) \right) .$$

5.3 Annexe

Les dérivées premières de Φ

Pour tout $0 \leq t \leq t_1$ nous avons

$$\frac{\partial \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_1} = 0, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_2} = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right), \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_3} = 0, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_1} = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_2} = \int_0^t \exp \left(\int_u^t \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right) \left(\frac{\partial F_3(\zeta(u))}{\partial x_2} \right) \exp \left(\int_0^u \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right) du, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_3} = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right), \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_1} = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_2} = & \int_0^t \exp \left(\int_s^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right) \left\{ \left(\frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_2} \right) \exp \left(\int_0^s \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_3} \right) \int_0^s \exp \left(\int_u^s \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right) \left(\frac{\partial F_3(\zeta(u))}{\partial x_2} \right) \exp \left(\int_0^u \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right) du \right\} ds, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_3} = \int_0^t \exp \left(\int_u^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right) \left(\frac{\partial F_1(\zeta(u))}{\partial x_3} \right) \exp \left(\int_0^u \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right) du. \quad (5.39)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_2} &= e^{(r_2-m)t} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1)}{(e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_2} &= m e^{r_3 t} \frac{(e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1))^{-r_3 \lambda_3 k_1}}{((e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1)^{-r_2 \lambda_2 k_1}} \\ &\quad \times \int_0^t e^{(r_2-r_3-m)u} (I(u))^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) k_1} du > 0, \\ \frac{\partial \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_3} &= e^{r_3 t} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1)}{(e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_1} &= e^{r_1 t} \left(\frac{e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1)}{(e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1} \right)^{-2r_1} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_2} &= -r_1 \lambda_1 k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1) e^{r_1 t} \frac{(e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1))^{-2r_1}}{((e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1)^{-r_2 \lambda_2 k_1}} \\ &\quad \times \int_0^t e^{(r_2-m)s} (I(s))^{2r_1 - r_2 \lambda_2 k_1 - 1} ds \\ &\quad - m r_1 \lambda_1 k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1) e^{r_1 t} \frac{(e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1))^{-2r_1}}{((e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1)^{-r_2 \lambda_2 k_1}} \\ &\quad \times \int_0^t e^{r_3 s} (I(s))^{2r_1 - r_3 \lambda_3 k_1 - 1} \left(\int_0^s e^{(r_2-r_3-m)u} (I(u))^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) k_1} du \right) ds < 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, X_0)}{\partial x_3} &= -r_1 \lambda_1 k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1) e^{r_1 t} \frac{(e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 t_0} - 1))^{-2r_1}}{((e^{r_1 t_0} - e^{r_1 t_1}) T_1)^{-r_3 \lambda_3 k_1}} \\ &\quad \times \int_0^t e^{r_3 u} (I(u))^{2r_1 - r_3 \lambda_3 k_1 - 1} du < 0 \end{aligned}$$

Pour tout $0 \leq t \leq t_1$. De la même manière que dans [37], pour tout $t_1 < t \leq \tau_0$ nous avons

$$\frac{\partial \Phi_2(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_1} = 0, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_2} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right), \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_3} = 0, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_1} = 0, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_2} = \int_{\tau}^t \exp \left(\int_u^t \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right) \left(\frac{\partial F_3(\zeta(u))}{\partial x_2} \right) \exp \left(\int_{\tau}^u \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right) du, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_3} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right), \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_1} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_2} &= \int_{\tau}^t \exp \left(\int_s^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right) \left\{ \left(\frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_2} \right) \exp \left(\int_0^s \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_3} \right) \int_{\tau}^s \exp \left(\int_u^s \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right) \left(\frac{\partial F_3(\zeta(u))}{\partial x_2} \right) \exp \left(\int_{\tau}^u \frac{\partial F_2(\zeta(r))}{\partial x_2} dr \right) du \right\} ds, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(\tau, X_0)))}{\partial x_3} &= \int_{\tau}^t \exp \left(\int_u^t \frac{\partial F_1(\zeta(r))}{\partial x_1} dr \right) \left(\frac{\partial F_1(\zeta(u))}{\partial x_3} \right) \exp \left(\int_{\tau}^u \frac{\partial F_3(\zeta(r))}{\partial x_3} dr \right) du. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} &= e^{(r_2-m)(t-t_1)} \left(\frac{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} &= m e^{-(r_2-m)t_1} e^{r_3 t} \frac{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-r_3 \lambda_3 k_1}}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-r_2 \lambda_2 k_1}} \\ &\quad \times \int_{t_1}^t e^{(r_2-r_3-m)u} (I(u))^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) k_1} du > 0, \\ \frac{\partial \Phi_3(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} &= e^{r_3(t-t_1)} \left(\frac{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} &= e^{r_1(t-t_1)} \left(\frac{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}} \right)^{-2r_1} > 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} &= -r_1 \lambda_1 k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1) e^{-(r_2-m)t_1} e^{r_1 t} \frac{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-2r_1}}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-r_2 \lambda_2 k_1}} \\ &\quad \times \int_{t_1}^t e^{(r_2-m)s} (I(u))^{2r_1 - r_2 \lambda_2 k_1 - 1} ds \\ &\quad - m r_1 \lambda_1 k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1) e^{-(r_2-m)t_1} e^{r_1 t} \frac{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-2r_1}}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-r_2 \lambda_2 k_1}} \\ &\quad \times \int_{t_1}^t e^{r_3 s} (I(u))^{2r_1 - r_3 \lambda_3 k_1 - 1} \left(\int_{t_1}^s e^{(r_2-r_3-m)u} (I(u))^{(r_3 \lambda_3 - r_2 \lambda_2) k_1} du \right) ds < 0, \\ \frac{\partial \Phi_1(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} &= -r_1 \lambda_1 k_1 (T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1) e^{-r_3 t_1} e^{r_1 t} \frac{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-2r_1}}{(e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1} + (e^{r_1 t_1} - 1) \Theta_1 e^{r_1 \tau_0})^{-r_3 \lambda_3 k_1}} \\ &\quad \times \int_{t_1}^t e^{r_3 u} (I(u))^{2r_1 - r_3 \lambda_3 k_1 - 1} du < 0 \end{aligned}$$

pour tout $t_1 < t \leq \tau_0$ avec

$$I(t) = \begin{cases} e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1})T_1 + (e^{r_1 t} - 1)(T_1 \Theta_1 e^{r_1 \tau_0} - 1), & \text{if } 0 \leq t \leq t_1, \\ e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t} + [e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 t} - e^{r_1 t_1})T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}, & \text{if } t_1 < t \leq \tau_0. \end{cases}$$

De (5.14), nous avons

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_1} \right) \\ b &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_2} \right) \\ c &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_3} \right) \\ d &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_1} \right) \\ e &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_2} \right) \\ f &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_3} \right) \\ g &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_1} \right) \\ h &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_2} \right) \\ i &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0 + \bar{\tau}, A(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X})))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0 + \bar{X}))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0 + \bar{X})}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

Pour $(\bar{\tau}, \bar{X}) = (0, 0)$, nous avons

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - \left(\frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \right), \\ b_0 &= - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\ c_0 &= - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right), \\ e_0 &= 1 - \left(\frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\ h_0 &= - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right), \\ i_0 &= 1 - \left(\frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right), \\ d_0 &= f_0 = g_0 = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 - \Theta_1 T_1 e^{r_1 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-2r_1} > 0, \\
b_0 &= -\Theta_1 T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_2} - \Theta_1 (T_2 - R_A) \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \\
&\quad - \Theta_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \left(R_A \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} + T_3 \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) > 0, \\
c_0 &= -\Theta_1 T_1 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_3} - \Theta_1 (T_2 - R_A) \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\
&\quad - \Theta_1 T_3 \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} > 0, \\
e_0 &= 1 - (T_2 - R_A) (\Theta_2 - R_B) e^{(r_2 - m) \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-r_2 \lambda_2 k_1}, \\
h_0 &= -(T_2 - R_A) \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \left(R_B \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} + \Theta_3 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \right) \\
&\quad - \Theta_3 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \left(R_A \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} + T_3 \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) < 0, \\
i_0 &= 1 - T_3 \Theta_3 e^{r_3 \tau_0} \left(\frac{[e^{r_1 t_1} - 1 + (e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}) T_1] \Theta_1 e^{r_1 \tau_0}}{e^{r_1 \tau_0} - e^{r_1 t_1}} \right)^{-r_3 \lambda_3 k_1}.
\end{aligned}$$

Les dérivées second de Φ

Pour tout $0 \leq t \leq t_1$ nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\zeta(s))}{\partial x_2} ds \right) \int_0^t \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \exp \left(\int_0^r \frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_1} ds \right) dr < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_2^2} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\zeta(s))}{\partial x_2} ds \right) \int_0^t \left\{ 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(r, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(r, X_0)}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(r, X_0)}{\partial x_2} \right\} dr, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, X_0)}{\partial x_3 \partial x_2} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\zeta(s))}{\partial x_2} ds \right) \int_0^t \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(r, X_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(r, X_0)}{\partial x_3} \right) dr, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_3 \partial x_1} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_3(\zeta(s))}{\partial x_3} ds \right) \int_0^t \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \exp \left(\int_0^r \frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_1} ds \right) dr < 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, X_0)}{\partial x_3^2} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_3(\zeta(s))}{\partial x_3} ds \right) \int_0^t \left(2 \frac{\partial^2 F_3(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(r, X_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(r))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(r, X_0)}{\partial x_3} \right) dr.
\end{aligned}$$

Pour tout $t_1 < t \leq \tau_0$ nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2 \partial x_1} &= \exp \left(\int_{t_1}^t \frac{\partial F_2(\zeta(s))}{\partial x_2} ds \right) \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \exp \left(\int_{t_1}^r \frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_1} ds \right) dr, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2^2} &= \exp \left(\int_{t_1}^t \frac{\partial F_2(\zeta(s))}{\partial x_2} ds \right) \int_{t_1}^t \left\{ 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi_2(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \right\} dr, \\
\frac{\partial^2 \Phi_2(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3 \partial x_2} &= \exp \left(\int_{t_1}^t \frac{\partial F_2(\zeta(s))}{\partial x_2} ds \right) \int_{t_1}^t \left\{ \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_2(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_3(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \right\} dr, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3 \partial x_1} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F_3(\zeta(s))}{\partial x_3} ds \right) \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial^2 F_3(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \exp \left(\int_{t_1}^r \frac{\partial F_1(\zeta(s))}{\partial x_1} ds \right) dr, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3^2} &= \exp \left(\int_{t_1}^t \frac{\partial F_3(\zeta(s))}{\partial x_3} ds \right) \int_{t_1}^t \left\{ 2 \frac{\partial^2 F_3(\zeta(r))}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3(\zeta(r))}{\partial x_3^2} \frac{\partial \Phi_3(r, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \right\} dr.
\end{aligned}$$

Les premières dérivées de Z^*

(C1) $e_0 = 0$ et $i_0 \neq 0$.

Soit $\eta(\bar{\tau}) = \tau_0 + \bar{\tau}$, $\eta_1(\bar{\tau}, \alpha) = x_0 + \left(\frac{c_0 t_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0}\right) \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha)$, $\eta_2(\bar{\tau}, \alpha) = \alpha$ et $\eta_3(\bar{\tau}, \alpha) = -\frac{h_0}{i_0} \alpha + z_3^*(\bar{\tau}, \alpha)$.

De (5.16) et (5.17) nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial M_3}{\partial \bar{\tau}}(0, 0) = 0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}(\eta_1 - B_1(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}(\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} \\ - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) = 0, \\ \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} \\ - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} a_0 \frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} + c_0 \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}}, \\ i_0 \frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \end{cases}$$

C'est

$$\frac{\partial z_1^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}}, \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial z_3^*(0, 0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \quad (5.48)$$

De la même manière que ci dessus, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\eta_1 - B_1(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) - \sum_{j=1}^3 \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ & \times \left. \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \right\} = 0, \\ & \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) - \sum_{j=1}^3 \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ & \times \left. \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} a_0 \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} + c_0 \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0, \\ i_0 \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

C'est

$$\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0, \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.50)$$

(C2) $e_0 \neq 0$ et $i_0 = 0$.

Soit $\eta(\bar{\tau}) = \tau_0 + \bar{\tau}$, $\eta_1(\bar{\tau}, \alpha) = x_0 - \frac{c_0}{a_0} \alpha + z_1^*(\bar{\tau}, \alpha)$, $\eta_2(\bar{\tau}, \alpha) = z_2^*(\bar{\tau}, \alpha)$ et $\eta_3(\bar{\tau}, \alpha) = \alpha$.

De (5.23) et (5.24) nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\tau}}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\tau}}(0,0) = 0, \end{cases}$$

De la même manière que ci dessus, nous obtenons

$$\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial B_1(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}}, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0. \quad (5.52)$$

Et

$$\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0, \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.54)$$

Les dérivées premières de f_i .

(C1) $e_0 = 0$ et $i_0 \neq 0$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\tau}}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}(\eta_2 - B_2(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\
 &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \\
 &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + d_0 \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + f_0 \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}}.
 \end{aligned}$$

Depuis $\frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} = \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = 0$ et $d_0 = f_0 = 0$,

Nous obtenons $\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(\eta_2 - B_2(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\
 &= 1 - \sum_{j=1}^3 \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \Bigg\} \\
 &= \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) d_0 + e_0 + \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) f_0.
 \end{aligned}$$

Depuis $d_0 = e_0 = f_0 = 0$, nous obtenons $\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial \alpha} = 0$.

Donc $Df_2(0,0) = (0,0)$.

(C2) $e_0 \neq 0$ et $i_0 = 0$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_3}{\partial \bar{\tau}}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}(\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\
 &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \\
 &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + g_0 \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + h_0 \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}}.
 \end{aligned}$$

Nous avons $\frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = 0$ et $g_0 = 0$. De

(5.52), $\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0$, alors $\frac{\partial f_3(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0$. De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial \alpha}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^3 \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right) \Big\} \\ &= \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) g_0 + \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} h_0 + i_0. \end{aligned}$$

Nous avons $g_0 = i_0 = 0$. De (5.54), $\frac{\partial z_2^*}{\partial \alpha}(0,0) = 0$, alors $\frac{\partial f_3(0,0)}{\partial \alpha} = 0$.
Donc $Df_3(0,0) = (0,0)$.

Les dérivées seconds de f_i .

Soit $\mathcal{A}_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{\tau}^2}(0,0)$, $\mathcal{B}_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha}(0,0)$ et $\mathcal{C}_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha^2}(0,0)$.

(C1) $e_0 = 0$ et $i_0 \neq 0$.

Calcul de $\mathcal{A}_2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau}^2}(\eta_2 - B_2(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i \partial x_l} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}^2} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j \partial x_l} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_l(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial^2 z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} \right) \Big\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} = \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} = \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} = \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1} = 0.$$

$$\text{De (5.33), (5.40) et (5.48), nous avons } \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} =$$

$$0 \text{ et } \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0 \text{ resp. Alors } \mathcal{A}_2 = 0.$$

Calcul de $\mathcal{C}_2$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\eta_2 - B_2(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i \partial x_l} \left\{ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_l(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial^2 A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k \partial x_l} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \right) \left[\frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 z_3^*(0,0)}{\partial \alpha^2} \right) \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

Nous avons

[illegible]

Calcul de B_2 .

Nous avons

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} (\eta_2 - B_2(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3))))(0, 0)) \\
&= - \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i \partial x_l} \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \times \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \Big\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_j} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j \partial x_l} \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_l(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right\} \\
&\quad \times \left[\frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \right] \Big\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \frac{\partial^2 z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{c_0 h_0}{a_0 i_0} - \frac{b_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} \left(-\frac{h_0}{i_0} + \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right\}.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3^2} = 0, \\
\frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} &= \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} = 0, \\
\frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} &= \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} = \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3^2} = 0, \\
\frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} &= \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = \\
0, & \\
\frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1} = 0.
\end{aligned}$$

De (5.33), (5.35), (5.40), (5.42), (5.48), (5.49) et (5.50), nous avons $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} = \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} =$
 $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} = \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$,

$\frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3^2} = 0$, $\frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0$, $\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0$ et $\frac{\partial z_3^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0$ resp. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = & - \frac{\partial^2 B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \\ & \times \left\{ \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right\} \\ & - \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \\ & - \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \\ & - \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \left\{ \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \right\}. \end{aligned}$$

(C2) $e_0 \neq 0$ et $i_0 = 0$.

Calcul de $\mathcal{A}_3$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 = & \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau}^2} (\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3))))(0, 0)) \\ = & - \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i \partial x_l} \\ & \times \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \right\} \\ & - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \\ & \times \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}^2} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \right\} \\ & + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j \partial x_l} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \\ & \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_l(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right) \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \\ & \times \left(\frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right)^2 + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} &= \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} = \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \tau} &= \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = \\ 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \tau^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1} = 0. \end{aligned}$$

De (5.33), (5.35), (5.36), (5.40), (5.43) et (5.52), nous avons $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \tau \partial x_1} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \tau \partial x_1} = 0$ et $\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \tau} = 0$ resp.

De la dérivée partielle second de l'équation (5.29), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \tau^2} \left(1 - \frac{\partial B_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \tau^2} e_0 = 0, \text{ alors } \\ \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \tau^2} &= 0. \text{ Avec } \mathcal{A}_3 = 0. \end{aligned}$$

Calcul de $\mathcal{C}_3$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)))))(0,0) \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i \partial x_l} \left\{ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_l(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right) \Bigg\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial^2 A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k \partial x_l} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right) \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \right) \left[\frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \alpha^2} \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2^2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} \right] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} &= \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3^2} = 0, \\ \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3} = 0.\end{aligned}$$

De (5.33), (5.35), (5.36), (5.40), (5.42), (5.43), (5.53) et (5.54), nous avons $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = 0$, $\frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0$ et $\frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0$ resp.

De la dérivé partielle second partiel de l'équation (5.29), nous avons

$$\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \alpha^2} \left(1 - \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \alpha^2} e_0 = 0, \text{ alors } \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \alpha^2} = 0. \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_3 = & -2 \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & \times \left\{ \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} \right) + \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right. \\ & + \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left. \right\} \\ & - \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3^2} \left\{ \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right\}^2 \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \left\{ 2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right. \\ & \times \left(\frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} \right) + \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right)^2 \\ & + 2 \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} \right) + \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \\ & + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right)^2 \\ & + \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \left[2 \frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \left(-\frac{c_0}{a_0} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3^2} \right] \left. \right\}.\end{aligned}$$

Calcul de $\mathcal{B}_3$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3 &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} (\eta_3 - B_3(\Phi(\eta, A(\Phi(t_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3))))(0, 0)) \\
&= - \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i \partial x_l} \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \times \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \Big\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_l(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_j} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j \partial x_l} \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_l(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right) \right\} \\
&\quad \times \left[\frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_1} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_l(t_1, X_0)}{\partial x_3} \right] \Big\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_j(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \left(-\frac{c_0}{a_0} + \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2^2} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 \Phi_k(t_1, X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right\}.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1} = 0, \\
\frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} &= \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} = \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1^2} = 0, \\
\frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} &= \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} = 0, \\
\frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1} = 0.
\end{aligned}$$

De (5.33), (5.36), (5.40), (5.42), (5.43), (5.52), (5.53) et (5.54), nous avons $\frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} =$

$$\begin{aligned}
&0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1^2} &= 0, \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} = \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_1} = \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1^2} = 0, \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} = 0, \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0 \text{ et } \frac{\partial z_2^*(0,0)}{\partial \alpha} = 0 \text{ resp.}$$

De la dérivé partielle second de l'équation (5.29), nous avons

$\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} \left(1 - \frac{\partial B_2(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(t_1, X_0)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} e_0 = 0$, alors $\frac{\partial^2 z_2^*(0,0)}{\partial \bar{\tau} \partial \alpha} = 0$. donc

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_3 = & - \frac{\partial^2 B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & \times \left\{ \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \Phi_1(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \right\} \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial \bar{\tau} \partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial A_1(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_2} \frac{\partial^2 A_2(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial \Phi_1(t_1, X_0)}{\partial x_1} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_3} \\ & - \frac{\partial B_3(\Phi(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0))))}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_3(\tau_0, A(\Phi(t_1, X_0)))}{\partial x_3} \frac{\partial A_3(\Phi(t_1, X_0))}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi_3(t_1, X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial z_1^*(0,0)}{\partial \bar{\tau}}. \end{aligned}$$

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons considéré trois modèles mathématiques avec impulsions, le premier est un modèle de proie-prédateur avec impulsions dépendant de l'état, où nous avons étudié l'existence des solutions périodiques triviales et non triviales et leurs stabilités. Puis nous avons étudié un modèle de traitement chimiothérapeutique par deux médicaments pour une population de cellules avec des cellules normales, des cellules tumorales sensibles et des cellules tumorales résistantes, un avec effet instantané et l'autre avec effet continu, nous avons trouvé les conditions nécessaires à l'éradication de la tumeur, c'est le cas où la solution triviale est stable. Sous des conditions différentes, nous perdons la stabilité des solutions triviales et nous obtenons la bifurcation des solutions périodiques non triviales. Elle correspond à la persistance de la tumeur. Nous avons traité deux cas, tandis que le cas indéterminé nécessite une autre approche. Il sera intéressant de considérer la résistance par rapport au médicament avec effet continu. Nous avons aussi considéré un modèle de chimiothérapie impulsif pour une population avec des cellules normales, sensibles et résistantes. La chimiothérapie consiste en l'utilisation de deux médicaments **A** et **B** avec des effets instantanés afin de réduire la tumeur. Nous avons obtenu les conditions de stabilité des solutions triviales correspondant au cas sain. Après cela, nous avons obtenu des conditions sur les paramètres du modèle qui donnent la bifurcation des solutions périodiques non triviales correspondant à l'apparition de la tumeur. Nous notons que la stabilité et la bifurcation dépendent fortement des amplitudes des effets des drogues T_i et θ_i ($i = 1, 2, 3$).

Il sera intéressant de voir le cas de plusieurs médicaments tels que certains d'entre eux soient avec effets instantanés et les restes avec effets continus.

Une autre approche différente de celle de la méthode de Lyapunov-Schmidt permettrait d'atteindre les mêmes objectifs concernant les cas indéterminés.

Le cas des modèles avec retard, avec diffusion ou avec des dérivées fractionnaires fait l'objet de notre attention pour nos prochains travaux.

Bibliographie

1. A. AMBROSETTI et G. PRODI : *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
2. D. BAINOV et V. COVACHEV : *Impulsive Differential Equations with a Small Parameter*. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. 1994.
3. D. BAINOV et S.I. KOSTADINOV : *Abstract impulsive differential equations*. Descartes Press, 1996.
4. D. BAINOV et P. SIMEONOV : *Impulsive Differential Equations : Periodic Solutions and Applications*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1993.
5. D. BAINOV et P.S. SIMEONOV : *Impulsive Differential Equations : Asymptotic Properties of the Solutions*. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. 1995.
6. F. BERTRANDIAS et J.P. BERTRANDIAS : *Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie*. Collection Grenoble sciences. Presses Universitaires de Grenoble, 1990.
7. A. BOUDERMINE, M. HELAL et A. LAKMECHE : Bifurcation of nontrivial periodic solutions for pulsed chemotherapy model. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 2(2), (2014), pp. 22-44.
8. B. BUFFONI et J. TOLAND : *Introduction à la théorie globale des bifurcations*. Cahiers mathématiques de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2002.
9. T.A. BURTON : *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1985.
10. H. CARTAN : Cours de calcul différentiel. *Hermann méthodes*, 1977.
11. F. CHARIF, M. HELAL et A. LAKMECHE : Impulsive predator-prey model. In *ITM Web of Conferences*, volume 4. EDP Sciences, 2015.
12. F. CHARIF, M. HELAL et A. LAKMECHE : Chemotherapy models. *REVUE AFRICAINE DE LA RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES*, 23, (2016), pp. 115-124.
13. C. CHICONE : *Ordinary Differential Equations with Applications*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2006.
14. S.N. CHOW et J.K. HALE : *Methods of Bifurcation Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer New York, 1982.
15. R. DAJOZ : *Dynamique des populations*. Masson Paris, 1974.
16. J. DIEUDONNÉ et M.D. HUET : *Éléments d'analyse : Fondements de l'analyse moderne*. Numéro vol. 1 de Cahiers scientifiques. Gauthier-Villars, 1968.

-
17. O. DONAL, Y.J. CHO et Y.Q. CHEN : *Topological Degree Theory and Applications*. Mathematical Analysis and Applications. CRC Press, 2006.
 18. M. FAN, K. WANG et D. JIANG : Existence and global attractivity of positive periodic solutions of periodic n-species Lotka-Volterra competition systems with several deviating arguments. *Mathematical Biosciences*, 160(1), (1999), pp. 47-61.
 19. M. FEČKAN : *Topological Degree Approach to Bifurcation Problems*. Topological Fixed Point Theory and Its Applications. Springer Netherlands, 2008.
 20. J.P. FRANÇOISE : *Oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles*. Mathématiques et Applications. Springer, 2005.
 21. D. FREDON : *Mathématiques pour les sciences de la vie et de la santé*. 2008.
 22. K. GOPALSAMY : *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands, 2013.
 23. A. GROTHENDIECK : *Topological vector spaces* :. Notes on mathematics and its applications. Gordon and Breach, 1973.
 24. J.K. HALE : *Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2009.
 25. J. HOFBAUER et K. SIGMUND : The theory of evolution and dynamical systems. mathematical aspects of selection. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, NEW YORK, NY(USA). 1988.
 26. J. HOFBAUER et K. SIGMUND : *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998.
 27. J.H. HUBBARD et B.H. WEST : *Differential Equations : A Dynamical Systems Approach : A Dynamical Systems Approach. Part II : Higher Dimensional Systems*. Applications of Mathematics. Springer, 1995.
 28. A. IGGIDR, B. KALITINE et R. OUTBIBT : Semidefinite lyapunov functions stability and stabilization. *Mathematics of Control , Signals and Systems*, 9, (1996), pp. 95-106.
 29. G. IOOSS : *Bifurcation of Maps and Applications*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1979.
 30. J. ISTAS : *Mathematical modeling for the life sciences*. Springer Science & Business Media, 2006.
 31. Y. KAYA et A. N. ERASLAN : Mathematical Sciences And Applications E-Notes. 2(1), (2014), pp. 14-27.
 32. W.G. KELLEY et A.C. PETERSON : *The Theory of Differential Equations : Classical and Qualitative*. Universitext. Springer New York, 2010.
 33. H. KIELHÖFER : *Bifurcation Theory : An Introduction with Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2011.
 34. A. C. KING, J. BILLINGHAM et S. R. OTTO : *Differential Equations : Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*. 2003.
 35. A. LAKMECHE et O. ARINO : Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, 7, (2000), pp. 265-287.

-
36. A. LAKMECHE et O. ARINO : Nonlinear mathematical model of pulsed-therapy of heterogeneous tumors. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 2, (2001), pp. 455-465.
 37. AH. LAKMECHE, M. HELAL et A. LAKMECHE : Pulsed chemotherapy model. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2(1), (2014), pp. 127-148.
 38. V. LAKSHMIKANTHAM et P.S. BAINOV, D.D. Simeonov : *Theory of Impulsive Differential Equation*. World Scientific, Singapore, 1989.
 39. K. C. LAND : *The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis*. 2008.
 40. J. LEBRETON et E. JOLIVET : *Modèles dynamiques déterministes en biologie*. Masson, 1982.
 41. X. LIAO, L.Q. WANG et P. YU : *Stability of Dynamical Systems*. Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. Elsevier Science, 2007.
 42. X. LIU et L. CHEN : Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16(2), (2003), pp. 311-320.
 43. T. MA et S. WANG : *Bifurcation Theory and Applications*. Bifurcation Theory and Applications. World Scientific, 2005.
 44. J.P. MARCO, P. THIEULLEN et J.A. WEIL : *Mathématiques L2 : cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*. Pearson Education, 2007.
 45. J.D. MEISS : *Mathematical Modeling and Computation : Differential Dynamical Systems, Revised Edition*. Mathematical Modeling and Computation. 2017.
 46. V. MÜLLER : *Spectral theory of linear operators : and spectral systems in Banach algebras*, volume 139. Springer Science & Business Media, 2007.
 47. K. NEGI et S. GAKKHAR : Dynamics in a Beddington-DeAngelis prey-predator system with impulsive harvesting. *Ecological Modelling*, 206(3-4), (2007), pp. 421-430.
 48. L. NIE, Z. TENG et L. HU : Existence and stability of periodic solution of a Predator-Prey model with state-dependent impulsive effects. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (14), (2008), pp. 1685-1693.
 49. J. C. PANETTA : A mathematical model of periodically pulsed chemotherapy : Tumor recurrence and metastasis in a competitive environment. *Bulletin of Mathematical Biology*, 58(3), (1996), pp. 425-447.
 50. J. C. PANETTA : A mathematical model of drug resistance : Heterogeneous tumors. *Mathematical Biosciences*, 147(1), (1998), pp. 41-61.
 51. L. PERKO : *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
 52. D.G. SCHAEFFER et J.W. CAIN : *Ordinary Differential Equations : Basics and Beyond*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2016.
 53. R. SCHOEN : *Dynamic Population Models*. The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis. Springer Netherlands, 2007.

-
54. E. SENETA : *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Springer Series in Statistics. Springer New York, 2006.
 55. A SHAIR et A.C. LAZER : Necessary and sufficient average growth in a lotka-volterra system. *Nonlinear Anal.*, 34(2), octobre 1998.
 56. P. S. SIMEONOV et D. D. BAÄNOV : Orbital stability of the periodic solutions of autonomous systems with impulse effect. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 25(3), (1989), pp. 321-346.
 57. Y. SONNTAG : *Topologie et analyse fonctionnelle : Cours de licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés*. Topology and functional analysis. Ellipses, 1998.
 58. G.T. STAMOV : *Almost Periodic Solutions of Impulsive Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2012.
 59. I. STAMOVA : *Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations*. De Gruyter expositions in mathematics. Walter de Gruyter, 2009.
 60. I. STAMOVA et G. STAMOV : *Applied Impulsive Mathematical Models*. CMS Books in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.
 61. L. STONE, B. SHULGIN et Z. AGUR : Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. *Mathematical and Computer Modelling*, 31(4-5), (2000), pp. 207-215.
 62. Y. TAKEUCHI : *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*. World Scientific, 1996.
 63. G. Z. ZENG, L. S. CHEN et L. H. SUN : Complexity of an SIR epidemic dynamics model with impulsive vaccination control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 26(2), (2005), pp. 495-505.
 64. X. ZHANG, Z. SHUAI et K. WANG : Optimal impulsive harvesting policy for single population. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 4(4), (2003), pp. 639-651.

ملخص. نهتم في هذا العمل بالنماذج الرياضية التي تصف تطور ورم تحت العلاج الكيميائي الدوري باستعمال أدوية ذات مفعول فوري، و نموذج فريسة-مفترس. تناولت الدراسة الحلول الدورية الموجبة لجملة معادلات تفاضلية انفعالية، ثم ندرس استقرار حلول دورية ظاهرة وظهور حلول دورية غير ظاهرة باستخدام طريقة تشعب لياپونوف-شميدت.
كلمات مفتاحية. معادلات تفاضلية انفعالية، وجود حلول دورية موجبة، استقرار، تشعب.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on s'intéresse aux modèles mathématiques décrivant l'évolution de la tumeur, sous un traitement chimiothérapique périodique avec des médicaments à effets instantanés, et un modèle Proie-prédateur avec des effets impulsifs dépendant de l'état. Les modèles considérés sont des systèmes d'équations différentielles continues avec des équations discrètes. L'étude concerne l'existence des solutions périodiques positives pour un système d'équations différentielles impulsives, puis la stabilité des solutions périodiques triviales et l'apparition des solutions périodiques non-triviales en utilisant la réduction de Lyapunov-Schmidt.

MOTS CLÉS. Equations différentielles impulsives, Existence des solutions périodiques positives, Stabilité, Bifurcation.

ABSTRACT. In this work, we are interested by mathematical models describing the evolution of the tumor under a periodic chemotherapeutic treatment with impulse effects, and a Prey-Predator model with state dependent impulse effects. The models considered are systems of continuous differential equations and discrete equations. The study concerns the existence of positive periodic solutions for a system of impulsive differential equations, the stability of the trivial periodic solutions and the appearance of the non-trivial periodic solutions using the Lyapunov-Schmidt reduction.

Key words. Impulsive differential equations, Existence of positive periodic solutions, Stability, Bifurcation.