REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT L.M.D 3éme Cycle
Spécialité : **Génie Civil**
Option : **Structures et matériaux**

Présentée par :
BELKORISSAT Ismahene

Intitulé :

Etude de la réponse dynamique des plaques FGM avec la prise en compte de l'effet d'échelle

Soutenue devant le Jury composé de :

Mr. **A. TOUNSI**	Pr	UDL-SBA	**Président**
Mr. **E.A. ADDA BEDIA**	Pr	UDL-SBA	**Directeur de Thèse**
Mr. **S. BENYOUCEF**	MCA	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. **B.FAHSI**	MCA	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. **M.ZIDOUR**	MCA	U- TIARET	**Examinateur**
Mr. **R. YEGHNEM**	MCA	U- SAIDA	**Examinateur**

Année universitaire: 2014-2015

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT L.M.D 3éme Cycle
Spécialité : **Génie Civil**
Option : **Structures et matériaux**

Présentée par :
BELKORISSAT Ismahene

Intitulé :

Etude de la réponse dynamique des plaques FGM avec la prise en compte de l'effet d'échelle

Soutenue devant le Jury composé de :

Mr. **A. TOUNSI**	Pr	UDL-SBA	**Président**
Mr. **E.A. ADDA BEDIA**	Pr	UDL-SBA	**Directeur de Thèse**
Mr. **S. BENYOUCEF**	MCA	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. **B.FAHSI**	MCA	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. **M.ZIDOUR**	MCA	U- TIARET	**Examinateur**
Mr. **R. YEGHNEM**	MCA	U- SAIDA	**Examinateur**

Année universitaire: 2014-2015

Dédicaces

Afin d'être reconnaissante envers ceux qui m'ont encouragé à effectuer ce travail de recherche, je dédie cette thèse :

À ma très chère mère et à mon très cher père qui n'ont cessé de me combler par leur amour et leur tendresse.

À ma très chère sœur Amina pour son soutien moral, et pour tous les sentiments d'affection et d'amour qui représentent pour moi le pilier de tous mes efforts.

A mes frères Mohamed, Abdel Karim, Redouane, Aziz et à mon beau frère Mohamed pour leurs encouragements tout au long de ces années.

À mes neveux Wael, Riheme, Sabrina.

À toute ma famille au Maroc.

À mes amies Fouzia, Assia, Meriem, Wafa.

Et à tous ceux que ma réussite leur tient à cœur.

Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, monsieur le professeur ***ADDA BEDIA EL Abbes****, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral. J'adresse également mes sincères remerciements à monsieur le professeur* ***TOUNSI Abdelouahed*** *pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité.*

Mes vifs remerciements s'adressent aux membres de jury : ***BENYOUCEF Samir, FAHSI Bouazza, ZIDOUR Mohamed,*** *et* ***YEGHNEM Reda*** *qui ont accepté de juger ce travail.*

Je n'oublierai surtout pas de présenter mes remerciements les plus sincères à Mlle ***BENYOUCEF Houria*** *(ingénieure du laboratoire LM&H), pour son soutien moral et pour ses multiples encouragements.*

Résumé

Dans ce travail, un nouveau modèle hyperbolique non local raffiné des plaques est présenté pour étudier la vibration des plaques fonctionnellement graduées. Ce modèle non local introduit le paramètre d'échelle qui traite l'effet des petites échelles. Le champ de déplacement de la présente théorie est choisi en se basant sur la variation hyperbolique des déplacements en plan à travers l'épaisseur de la nano plaque. En décomposant le déplacement transverse en flexion et en cisaillement, le nombre des inconnues et des équations du mouvement est réduit favorisant la facilité de l'analyse des structures. Les propriétés matérielles sont supposées variantes uniquement dans la direction de l'épaisseur et les propriétés effectives des FG nano plaques sont calculées en exploitant l'expression de l'homogénéisation de Mori-Tanaka. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des relations différentielles constitutives non locales d'Eringen en collaboration avec la théorie des plaques raffinées à quatre variables et par l'intermédiaire du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques des nano plaques en FGM simplement appuyées sont présentées pour vérifier cette théorie en comparant ses résultats avec d'autres disponibles dans la littérature. Les effets du paramètre non local, l'épaisseur de la plaque, le rapport des dimensions de la plaque et divers compositions matérielles sur la réponse dynamique des nano plaques en FGM sont discutés.

Mots clés: *Théorie non locale d'élasticité, nano plaque, vibration libre, théorie raffinée des plaques, matériaux fonctionnellement gradués.*

Abstract

In this paper, a new nonlocal hyperbolic refined plate model is presented for free vibration properties of functionally graded (FG) plates. This nonlocal nano-plate model incorporates the length scale parameter which can capture the small scale effect. The displacement field of the present theory is chosen based on a hyperbolic variation in the in-plane displacements through the thickness of the nano-plate. By dividing the transverse displacement into the bending and shear parts, the number of unknowns and equations of motion of the present theory is reduced, significantly facilitating structural analysis. The material properties are assumed to vary only in the thickness direction and the effective properties for the FG nano-plate are computed using Mori–Tanaka homogenization scheme. The governing equations of motion are derived based on the nonlocal differential constitutive relations of Eringen in conjunction with the refined four variable plate theory via Hamilton's principle. Analytical solution for the simply supported FG nano-plates is obtained to verify the theory by comparing its results with other available solutions in the open literature. The effects of nonlocal parameter, the plate thickness, the plate aspect ratio, and various material compositions on the dynamic response of the FG nano-plate are discussed.

Keywords: *Nonlocal elasticity theory; Nano-plates; Free vibration; Refined plate theory; Functionally graded materials.*

Table des matières

Liste des figures

Chapitre I

Chapitre II

Chapitre III

Chapitre IV

Chapitre V

Liste des tableaux

Chapitre II

Chapitre V

Nomenclatures

$\{\ \}$	Vecteur colonne
$[\ ]$	Matrice
$\{\sigma_{ij}\}$	Tenseur de contrainte
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de déformation
$[Q_{ij}]$	Matrice de rigidité réduite
$u_0(x, y, t)$	Déplacement de membrane dans la direction x
$w_0(x, y, t)$	Flèche
$U(x, y, z, t)$	Déplacement suivant x
$V(x, y, z, t)$	Déplacement suivant y
$W(x, y, z, t)$	Déplacement suivant z
$W_b(x, y, t)$	Déplacement suivant z dû à la flexion
$W_s(x, y, t)$	Déplacement suivant z dû au cisaillement
∂	Dérivée partielle
µ	Paramètre non local
σ_{ij}	Contrainte normale
τ_{ij}	Contrainte de cisaillement
N, M	Effort normal, moment fléchissant
i et j	Nombres naturels
a	Dimension de la plaque suivant x
b	Dimension de la plaque suivant y
h	Epaisseur de la poutre
E_c, E_m, E_{cm}	Les modules de Young matériaux constituants la plaque

	P-FGM
n, k	Indice matériel de la plaque P-FGM
ρ	Densité du matériau
ν	coefficient de Poisson
$V(z)$	La fraction volumique des matériaux FGM
∇	Laplacien

Liste des abréviations

nm	Nano mètre
µm	Micro mètre
ADN	Deoxyribo Nucleic Acid
CNT	Carbone Nano Tube
BTP	Bâtiment et Travaux Publics
CLPT	Classical Plate Theory
FSDT	First Shear Deformation Theory
HSDT	High Shear Deformation Theory
V E R	Volume Elémentaire Représentatif
MEMS	Micro Eectromechanic System
NEMS	Nano Electromechanic System
DWCNTs	Double Walled Carbone Nano Tube
AFMs	Atomic Force Microscopic

Introduction générale

La nanotechnologie est apte de produire des matériaux fonctionnellement gradués et des structures d'ingénierie à l'échelle nanométrique, ce qui génère une nouvelle catégorie des matériaux avec des propriétés plus élevées. Parmi ces structures, il existe les nano plaques qui grâce à leurs propriétés mécaniques, chimiques et électriques élevées, ils ont attiré l'attention de la communauté scientifique dans le domaine de la physique de l'état solide, la science des matériaux et la nano électronique.

La compréhension du comportement mécanique des nano plaques est essentielle dans le développement d'autant de structures due à leurs grandes possibilités d'application dans l'ingénierie.

Les résultats de la simulation expérimentale sur ces structures ont prouvé une influence signifiante de leurs tailles sur leurs propriétés mécaniques lorsque leurs dimensions deviennent très petites, pour cette raison, l'influence de la taille a un effet considérable sur la réponse statique et dynamique des micro et nano structures et ne peut pas être ignorée.

Il est bien connu que la mécanique continue classique n'est pas considérée pour étudier les comportements des nano et micro structures. Pour vaincre ce problème, de nombreuses théories non locales qui considèrent l'effet d'échelle ont été proposées telles que la théorie de gradient de déformation (Aifantis 1999), la théorie micro-polaire (Eringen 1967) et la théorie non locale d'élasticité (Eringen 1972), ces théories prennent en compte l'influence de la taille en introduisant la longueur d'échelle intrinsèque dans les relations constitutives. Parmi les théories citées précédemment, la théorie non locale d'élasticité développée par Eringen (Eringen 1983) *était employée pour explorer la dispersion latérale des ondes élastiques, la propagation des ondes dans les composites, la dislocation mécanique et la fracture mécanique et la traction des fluides. Ensuite, Peddieson (Peddieson et al 2003) le premier qui a appliqué la théorie continue non locale dans la nano technologie ou les déformations statiques de la poutre sont obtenues en utilisant un modèle non local simplifié des poutres en se basant sur la théorie d'élasticité non locale d'Eringen (Eringen 1983). Xu (Xu 2006) a présenté l'approche de l'équation intégrée et la théorie d'élasticité non locale en introduisant la vibration libre des poutres à l'échelle nano métrique et micrométrique. Reddy (Reddy 2007) a reformulé la théorie locale des poutres en utilisant les relations différentielles constitutives non locales d'Eringen pour étudier la flexion, la vibration, et le flambement des nano poutres. Les solutions analytiques son obtenues pour projeter l'effet du comportement non local des nano poutres. Benzair (Benzair et al 2008) a exploré l'effet thermique sur la fréquence d'une feuille en nanotube de carbone utilisant le modèle non locale des poutres de Timoshenko. Heireche (Heireche et al 2008a) ont appliqué le modèle non local des poutres de Timoshenko pour étudier les propriétés d'onde d'une feuille en nanotube de carbone. Tounsi (Tounsi et al 2013a) a étudié le flambement thermique d'une double feuille en nanotube de carbone (DWCNTs) en appliquant aussi le modèle non local des poutres de Timoshenko et en introduisant les effets de la déformation en cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle. Tounsi (Tounsi et al 2013b) a proposé une théorie non locale à ordre élevé des poutres pour analyser le flambement thermique des nano poutres. Son modèle est capable de capturer instantanément l'effet des petites échelles et les effets de la déformation au cisaillement des nano poutres, et avait une grande similarité avec la théorie non locale des poutres d'Euler Bernoulli dans plusieurs aspects telle que les équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des contraintes résultantes. Une théorie non locale de déformation en cisaillement était proposée par Berrabah (Berrabah et al 2013) pour étudier la flexion, le flambement et la vibration libre des nano poutres à la base du modèle d'Eringen.*

Récemment, Tounsi (Tounsi et al 2013c) a développé une nouvelle théorie non locale introduisant l'effet de l'étirement de l'épaisseur et la déformation au cisaillement sinusoïdale pour étudier la statique et la vibration des nano poutres. Benguediab (Benguediab et al 2014) a étudié les effets de la chiralité et d'échelle sur le flambement mécanique d'une double couche en nanotube de carbone type zigzag.

Avec le développement rapide de la technologie, l'utilisation des poutres et des plaques fonctionnellement graduées a commencé dans les systèmes micro et nano électromécaniques (MEMS/NEMS), tels que les composantes de mémoire en film d'alliage fin avec une épaisseur globale à l'échelle nano ou micro métrique (Fu et al 2003, Witvrouw et Mehta 2005, Lu et al 2009), le mouvement électrique MEMS (Hasanyan et al., 2008; Mohammadi-Alasti et al., 2011; Zhang and Fu, 2012), et la force microscopique atomique (AFMs) (Rahaeifard et al., 2009). Depuis le dimensionnement de ces éléments structuraux à l'échelle micro ou nano métrique dans au moins une direction, des caractéristiques essentielles ont été capturées dans ces structures qui sont les propriétés mécaniques telles que le module de Young et la rigidité flexionnelle. En parallèle, peu de travaux ont traité le comportement des nanostructures fonctionnellement graduées à la base de la théorie non locale d'élasticité. Janghorban et Zare (Janghorban et Zare 2011) ont étudié la vibration libre axiale non locale des nano poutres fonctionnellement graduées utilisant la méthode quadrature différentielle. Daneshmehr (Daneshmehr et al 2014) a présenté la théorie non locale des plaques à ordre élevé pour analyser la stabilité des nanoplaques fonctionnellement graduées soumises à un chargement bi-axial. Récemment, Larbi Chaht (Larbi Chaht et al 2014) a étudié la réponse à la flexion et au flambement des nano poutres fonctionnellement graduées introduisant l'effet d'étirement d'épaisseur.

Dans cette étude, la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées à l'échelle nanométrique est étudiée en utilisant une nouvelle théorie non locale hyperbolique raffinée. La

partition du déplacement transverse en flexion et en cisaillement mène à réduire le nombre des inconnues ce qui rend la nouvelle théorie simple à utiliser. L'effet d'échelle est pris en considération en utilisant les relations constitutives d'Eringen. Les effets du paramètre non local, le rapport des dimensions, et les compositions matérielles sur la réponse en vibration libre des nano plaques fonctionnellement graduées sont discutés. Quelques exemples illustratifs sont ainsi présentés pour vérifier la présente formulation et ses solutions.

Chapitre I

Nanotechnologies : Révolution vers L'invisible

Introduction

La maîtrise des méthodes de synthèse et le progrès dans les techniques de caractérisation telles que le microscope à force atomique et la microscopie électronique à transmission ont permis l'émergence des nanomatériaux. Dans ces matériaux la proportion des atomes de surface devient non négligeable devant celle des atomes de cœur, ce qui leur confère de nouvelles propriétés électriques, mécaniques ou encore optiques. Du fait de leur importante surface, les nanomatériaux sont également très prometteurs dans le domaine de la catalyse. La quête de nouvelles propriétés ne s'arrête pas aux nanoparticules mais nous allons aujourd'hui vers des objets intelligents fabriqués en fonction des caractéristiques désirées. Ainsi, en combinant des matériaux différents dans un nanocomposite, les propriétés des constituants peuvent être habilement mêlées .

.

I-1 Définition des nanomatériaux :

Ce sont des matériaux constitués de nano-objets qui présentent des propriétés spécifiques à l'échelle nanométrique. Les nano-objets peuvent se présenter sous la forme de particules, fibres ou tubes, de couches minces ou de constituants structurels.

L'unité de référence du monde des nanotechnologies est donc le nanomètre (nm). Le préfixe nano vient du grec nannos qui signifie nain. Un nanomètre est une unité de mesure qui équivaut à un milliardième de mètre (1 nm = 10^{-9} m = 0,000 000 001 m). Un nanomètre correspond environ à la taille de 4 atomes de silicium mis côte à côte, à 1/100 de la largeur d'une molécule d'ADN, à 1/50 000 de l'épaisseur d'un cheveu humain ou encore à 1/500 000 de l'épaisseur du trait d'un stylo à bille.

I-2 Définition du périmètre nanométrique:

La définition nanométrique considère le domaine de dimension compris entre 1 et 100 nm, et les nano - objets sont des matériaux présentant une, deux ou trois dimensions externes dans le domaine nanométrique. Parmi ces nano-objets, les nanoparticules : comprennent leurs trois dimensions dans le domaine nanométrique, les nanoplaques : ont une dimension nanométrique alors que les nanofibres sont des nano – objets présentant deux dimensions nanométriques, la troisième dimension étant plus longue de façon significative.

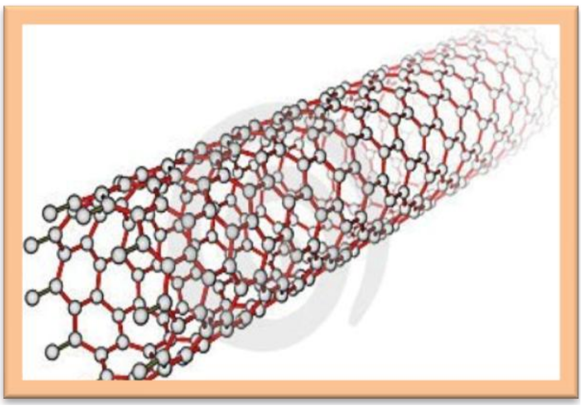


Fig. I. 1 : Nanotube de carbone

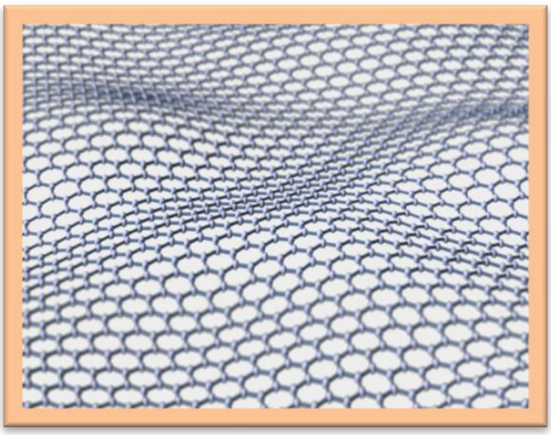


Fig. I. 2 : Feuille de graphene

I-3 Travailler l'échelle du nanomètre :

I-3-1 Contexte et problématique :

La réduction de la taille des objets, permettant d'explorer et d'exploiter de nouvelles propriétés de la matière, nécessite la conception et l'utilisation de nouveaux outils. C'est un des enjeux essentiels de ce domaine scientifique en pleine effervescence que de maitriser les moyens de voir, d'analyser, de mesurer et d'agir à toutes les échelles concernées, jusqu'à la plus réduite : l'atome et son environnement immédiat.

L'homme est naturellement aveugle dans cette plongée vers l'infiniment petit : il a besoin de loupes sans cesse plus puissantes. C'est aussi la révolution apportée par l'intrusion des techniques utilisant l'extrémité de pointes ultrafines comme sondes locales de mesure et de manipulations qui a transformé nos ambitions. Ces pointes constituent des ''cannes d'aveugle'' permettant aux chercheurs d'aujourd'hui de se mouvoir et de travailler à l'échelle du nanomètre. Ces nouveaux outils offrent aux chercheurs la possibilité d'agir au cœur même de la matière.

L'exploitation de cette nouvelle dimension leur permet d'imaginer et de préparer la mise en œuvre de nombreuses innovations comme les nanolaboratoires où seront menées en parallèle de nombreuses observations sous contraintes. On en voit d'ores et déjà les applications dans les domaines des nano-objets, des nanosystémes ou des matériaux.

La construction d'outils d'observation et de manipulation adaptés est un préalable à l'exploration et à l'exploitation des nouvelles propriétés de la matière à l'échelle nanométrique.

I-3-2 Les outils pour observer et manipuler:

Grâce à une panoplie d'outils qui ne cesse de se diversifier, il est désormais possible d'obtenir des images et d'analyser des propriétés locales de matériaux et de nano objets à l'échelle du nanomètre.

a-Microscopie électronique à très haute résolution :

Les développements récents de la microscopie électronique en font un outil incontournable d'exploitation du nanomonde qui rend possible l'analyse et la mesure des propriétés de nano objets individuels. La barre du dixième de nanomètre a été franchie en résolution spatiale, ce qui permet d'observer et de comprendre l'organisation tridimensionnelle des atomes ainsi que ses éventuels défauts. La spectroscopie des pertes d'énergie électronique donne la possibilité d'une analyse chimique localisée à tel point que les chercheurs sont capables d'identifier un atome isolé. L'importance des études consacrées aux nanotubes de carbones simples ou composites et aux nanophases solides dans l'environnement montre l'enjeu lié au développement de tels instruments.

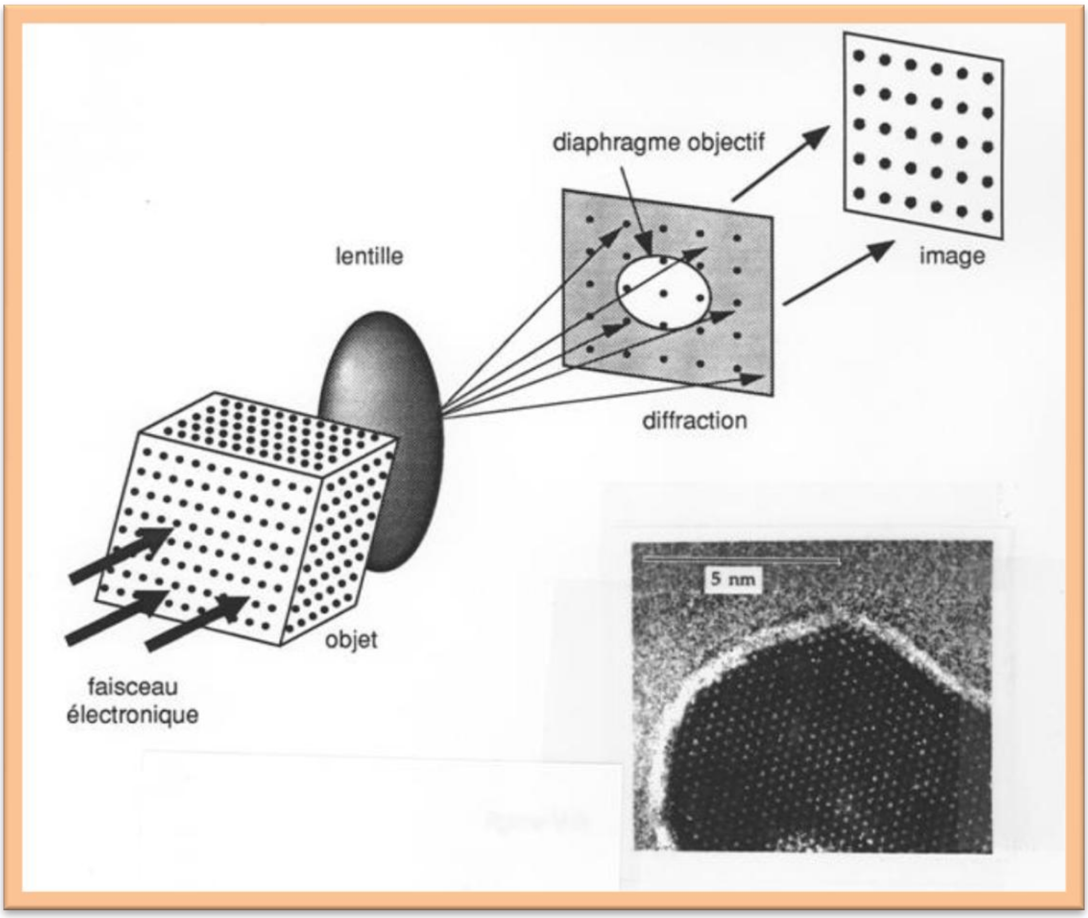


Fig. I. 3 : Le principe de la formation d'image des structures cristallines en microscopie électronique à transmission à très haute résolution (CNRS 2005)

Fig. I.4 : Image par microscopie électronique à très haute résolution de nanotube d'oxyde de titane (CNRS 2005)

b-Microscopie à effet tunnel :

L'invention du microscope à effet tunnel (STM) a signé l'entrée de la science dans le nanomonde et l'essor des nanotechnologies. Pour la première fois, on a pu observer les atomes d'une surface, les manipuler, les organiser à l'aide d'une simple pointe métallique. Avec un STM, on peut élaborer atome par atome, des nano objets maitrisés à l'échelle du nanomètre : molécules d'intérêt biologique, fils atomique, nanotransistors, nano amas magnétiques …. Grâce à la spectroscopie tunnel à balayage (STS), évolution récente du STM, on peut aller plus loin que la fabrication des nanocomposants et sonder leurs propriété électroniques nouvelles et inattendues, qui relèvent bien souvent des concepts quantiques. Cette méthode, qui consiste à mesurer la conductance tunnel en tout point de la nanostructure, peut être étendue à des pointes métalliques de nature différente qui analyseront par exemple, les propriétés magnétiques locales. Ce nouveau champ d'activité et actuellement en plein essor.

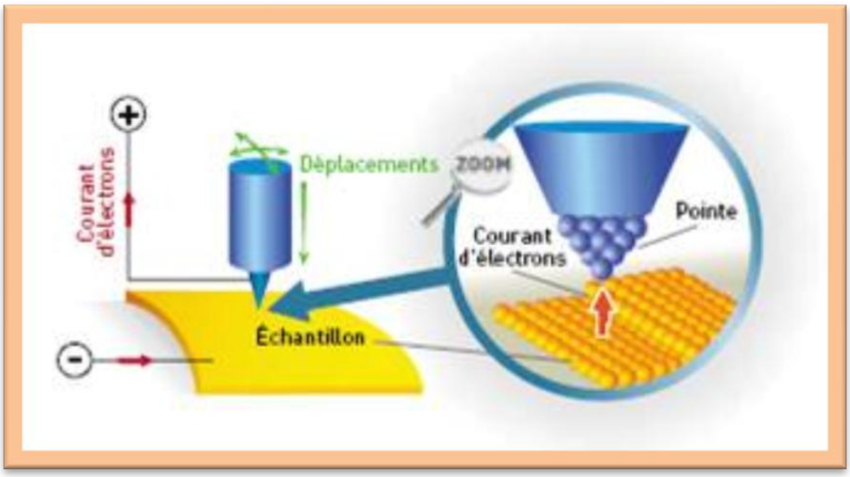


Fig. I.5 : représentation de l'effet tunnel dans la microscopie par effet tunnel (CNRS 2005)

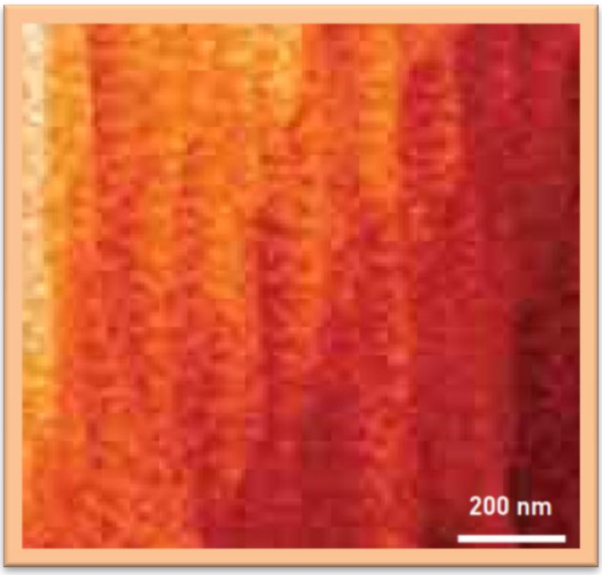


Fig. I.6 : Microscopie d'or observé par microscopie à effet tunnel (STM) (CNRS 2005)

c-Microscopie à force électrostatique :

Le microscope force électrostatique est un outil dérivé du microscope à force atomique. Grâce à un oscillateur mécanique (une pointe oscillante qui balaye la surface à observer), ce microscope mesure les propriétés électro statiques locales d'un matériau avec une résolution spatiale de l'ordre de la dizaine de nanomètres. Il permet donc d'établir à l'échelle nanométrique des cartographies de charges électriques (avec une résolution de l'ordre de la charge d'un seul électron), ou de potentiel électrique. Avec la pointe du microscope, on peut aussi injecter des charges pour sonder et manipuler les états électroniques de nanostructures individuelles. Les chercheurs ont ainsi accès aux propriétés électroniques de couches minces diélectriques et de nano-objets (nanocristaux, nanotubes de carbone), ainsi qu'à l'analyse électrostatique de nanodispositifs.

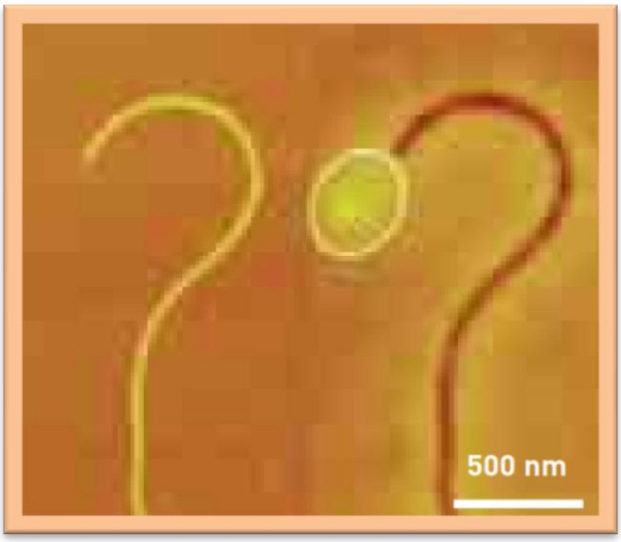


Fig. I.7 : A gauche : image de microscopie à force atomique d'un nanotube de carbone.
A droite : image de microscopie à force électrostatique après une expérience d'injection de charges.
(CNRS 2005)

I-4 Les familles de produits par nano-objets :

Les nano-objets sont utilisés soit en tant que tels (comme catalyseur, pour transporter des médicaments, pour le polissage de wafers et disques durs en microélectronique…), soit en vue d'élaborer des matériaux. Ces matériaux peuvent être regroupés selon 3 familles de produits :

Les matériaux nano-chargés ou nano-renforcés,

Les matériaux nanostructurés en surface,

Les matériaux nanostructurés en volume.

I-4-1 les matériaux nano-chargés ou nano-renforcés:

Les nano-objets sont incorporés ou produits dans une matrice pour apporter une nouvelle fonctionnalité ou modifier des propriétés mécaniques, optiques, magnétiques ou thermiques (peintures, béton, encre d'imprimerie, etc.). Les composites chargés en nanotubes de carbone en sont un bon exemple. Ces nano-objets sont déjà utilisés dans de nombreuses applications industrielles. Par exemple : les fumées de silice dans le béton, pour améliorer sa fluidité et ses propriétés mécaniques, l'alumine ultra fine destinée au polissage des wafers et disques durs en microélectronique, le noir de carbone utilisé dans les encres d'imprimante et les pneumatiques, les pigments colorés organiques et minéraux pour les peintures et vernis, les nanoparticules de dioxyde de titane comme protection au rayonnement ultraviolet dans les crèmes solaires.

I-4-2 Les matériaux nanostructurés en surface :

La réalisation d'un revêtement à partir de nano-couches élémentaires ou de multi nano-couches permet de doter la surface de propriétés préalablement déterminées (résistance à l'érosion, résistance à l'oxydation, revêtements hydrophobes, résistance à l'abrasion, etc.) ou de lui conférer de nouvelles fonctionnalités en termes : d'aspect, de dureté, d'adhérence (tribologie), de résistance à la corrosion, de propriétés optiques et/ou électroniques.

Les procédés de fabrication s'appuient sur des principes de dépôt physique ou chimique. Ce dernier procédé d'élaboration se prête particulièrement bien à la fabrication de ce type de revêtements. Actuellement, le développement de cette catégorie de nanomatériaux est en phase d'industrialisation. De tels revêtements existent déjà, par exemple pour : colorer des emballages en verre, apporter une fonction autonettoyante, renforcer la surface des polymères.

I-4-3 Les matériaux nanostructurés en volume:

Ce sont des matériaux qui, par leur structure intrinsèque nanométrique bénéficient de propriétés physiques particulières (céramique plus ductile par exemple, propriétés optiques, diélectriques améliorées) et parfois d'une grande surface d'échange (céramiques mésoporeuses par ex.). Le raffinement de la microstructure, jusqu'à obtenir une nanostructure, peut être obtenu par forte déformation du matériau. Les deux principaux verrous technologiques qui peuvent limiter aujourd'hui leur développement et leur usage sont la stabilité de la nanostructure à haute température et les procédés de fabrication.

I-5 Procédés de fabrication des nanomatériaux :

Depuis un demi-siècle environ, sont apparues des techniques nouvelles de refroidissement rapide, de chimie dite douce, techniques sol-gel par exemple, qui permettent d'accéder à des tailles de grain beaucoup plus faibles.

D'autres méthodes de production sous arc électrique, laser, plasma ou micro-ondes ont permis d'accéder à des matériaux particulaires de très petite taille. Il a été ainsi possible d'obtenir des tailles de grain de dimensions de l'ordre des tailles caractéristiques des défauts qui gouvernent certaines propriétés comme :

- les dislocations (propriétés mécaniques),
- les parois de Bloch (propriétés ferromagnétiques),
- les phénomènes qui n'interviennent qu'à l'échelle du nanomètre ou en dessous (effet tunnel, effets de « confinement » lorsque la taille des particules est inférieure à la longueur d'onde des particules – électrons, photons – qui interviennent dans le phénomène étudié). Ces dimensions, selon les cas, varient entre quelques nanomètres et 100 nanomètres.

En parallèle de la démarche de miniaturisation, dite "top-down", se développe une autre démarche, dite "bottom-up" qui consiste à construire de façon contrôlée à partir d'atomes et de molécules de nouveaux édifices et structures. Les procédés d'élaboration de ces matériaux constituent un champ d'investigation nouveau qui reste à développer.

Les procédés actuels permettant l'élaboration de nano-objets sont classés en 3 grandes catégories

- élaboration par voie physique,
- élaboration par voie chimique,
- élaboration par méthode mécanique.

Compte tenu de la complexité des applications et de l'évolution rapide des techniques, il parait difficile de donner une liste exhaustive des procédés utilisés ou en développement. Quelques exemples parmi les procédés les plus couramment utilisés pour la fabrication de nano-objets sont présentés ci-après.

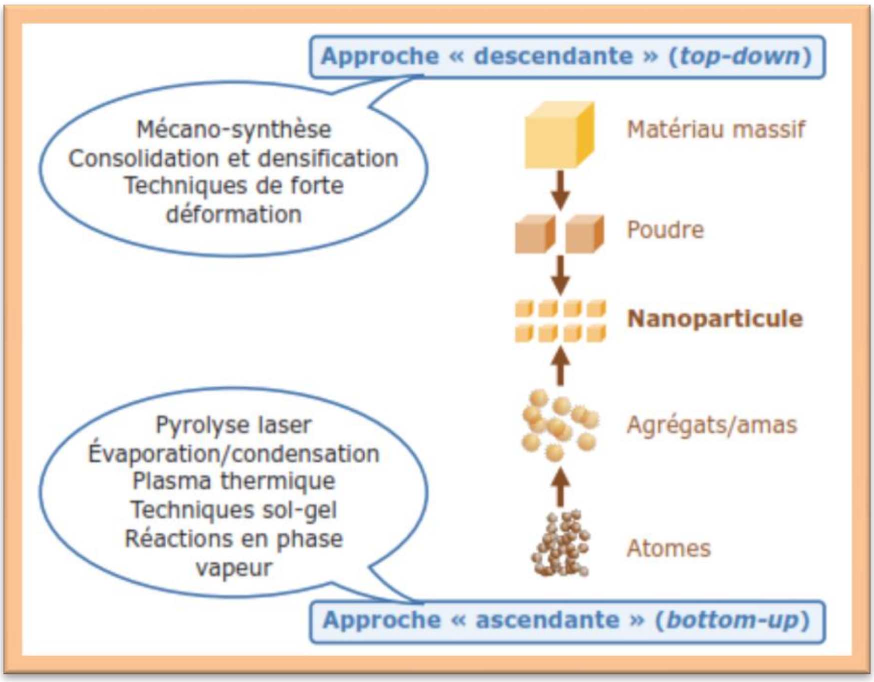


Fig. I.8 : Les deux approches d'élaboration des nanomatériaux manufacturés (INRS 2012)

I-5-1 Elaboration par voie physique

L'élaboration des nanoparticules (amas) peut être réalisée à partir d'une phase vapeur. Cette phase est extraite d'un matériau source par chauffage (fusion en creuset ou sans creuset), par bombardement (faisceau d'électrons, pyrolise laser). Dans la plupart des cas, la vapeur du solide que l'on souhaite former est refroidie par collisions avec un gaz neutre et devient donc fortement sursaturante (condensation en gaz inerte). Le matériau est collecté le plus rapidement possible sur une paroi froide, de façon à éviter la croissance ou la coalescence des amas.

Souvent, l'appareil d'élaboration dispose d'un sac réunissant la chambre de collecte des poudres et le dispositif de compaction afin d'éviter toute pollution atmosphérique. Les poudres nanométriques sont en effet très réactives ; elles peuvent même dans certains cas être pyrophoriques I.

Une autre voie d'obtention de nanopoudres consiste à utiliser l'action de micro-ondes sur des poudres de taille millimétrique. Cette technique a comme avantages d'être non polluante et adaptée à une production en continu de poudres de toute nature.

Les nanotubes de carbone peuvent être obtenus par ablation laser, décharge plasma ou décomposition catalytique. Enfin, des couches minces d'épaisseur nanométrique peuvent être réalisées par la voie PVD (Physical Vapor Deposition) ou par croissance épitaxique.

I-5-2 Elaboration par voie chimique

Sont listées ci-dessous quelques techniques de fabrication par voie chimique couramment utilisées.

a- Les réactions en phase vapeur :

Les matériaux précurseurs vaporisés sont introduits dans un réacteur CVD (Chemical Vapor Deposition) dans lequel les molécules de précurseurs sont adsorbées à la surface d'un substrat maintenu à une température adaptée. Les molécules adsorbées sont soit décomposées thermiquement, soit elles réagissent avec d'autres gaz ou vapeurs pour former un film solide sur le substrat. Cette technique est utilisée pour l'élaboration de certains nanomatériaux tels que les quantums de semi-conducteur, les matériaux nanostructurés céramiques, les nanotubes de carbone, le diamant.

b- Les réactions en milieu liquide :

La synthèse en milieu liquide est plus souvent effectuée à partir d'une solution aqueuse ou organique contenant les réactants. La précipitation des nanoparticules est obtenue par une modification des conditions de l'équilibre physico-chimique. Sont distinguées :

- la co-précipitation chimique, technique facile à mettre en œuvre et la plus utilisée pour des productions industrielles à fort volume de matériaux de base bon marché,
- l'hydrolyse permettant de produire des particules fines, sphériques avec une pureté chimique améliorée, une meilleure homogénéité chimique et un contrôle de la taille des particules.

c- Les techniques sol-gel

Les techniques sol-gel permettent de produire des nanomatériaux à partir de solutions d'alkoxydes ou de solutions colloïdales. Elles sont basées sur des réactions de polymérisation inorganiques. L'intérêt du procédé sol-gel réside dans la possibilité de contrôler l'homogénéité et la nanostructure au cours des premières étapes de fabrication. Cette technique permet la production de pièces massives mais aussi de dépôts superficiels sur des plaques ou des fibres. Elle est également utilisée pour la production de composites fibreux.

Les matériaux issus du procédé sol-gel couvrent presque tous les domaines des matériaux fonctionnels : optique, magnétique, électronique, super conducteur à haute température, catalyseur, énergie, capteurs, etc.

Avantages : cette technique permet de contrôler efficacement la taille des particules et l'homogénéité de la distribution des particules. Ce procédé est réalisé à des températures plus basses que pour les autres procédés.

Inconvénients :

- coût élevé des matériaux de base,
- faible rendement et produits de faible densité,

- résidus de carbone et autres composés, certains composés organiques étant dangereux pour la santé.

Le procédé de sol-gel est divisé en 3 branches :

- procédé de sol-gel à base de silice,
- procédé d'alkoxyde de métal,
- procédé de type Pechini.

Applications : céramiques inorganiques et matériaux en verre, matériaux amorphes et nanostructurés, oxydes multi composés.

I-5-3 Elaboration par méthode mécanique :

a- La mécano synthèse :

La technique dite de mécano synthèse consiste généralement à broyer des poudres micrométriques (1 à 30 µm) de plusieurs alliages pour les incorporer. La caractéristique essentielle de cette technique est de permettre l'obtention de nano- précipités ou nano-objets dispersés de façon homogène au sein de la matrice. Elle est par ailleurs adaptée à la production de matériaux en quantité qui s'expriment en kilogrammes, voire en tonnes, contrairement aux autres techniques.

b- La consolidation et densification :

Lors d'un travail mécanique intense (métaux et intermétalliques uniquement), le processus qui permet de convertir un matériau pulvérulent en une pièce massive comporte deux étapes : une opération de compactage mécanique et une opération de frittage, libre ou sous charge.

- compactage à froid : Opération qui peut s'effectuer soit par pressage à sec, soit, dans les cas difficiles, par addition d'un lubrifiant ou par pressage humide. Le compactage humide est bien adapté aux céramiques et surtout aux oxydes. Avantage du compactage humide : gain considérable sur la température ou le temps de frittage.

- frittage : opération qui permet, par diffusion atomique à chaud, d'établir des ponts de matière entre les grains et ensuite de réduire la porosité.
- par Compression Isostatique à Chaud (CIC) : on réalise ainsi les deux opérations ci-dessus en une seule étape.
- croissance des grains pendant la densification : l'enjeu le plus important pour les procédés de frittage des nanomatériaux est d'éviter la croissance des grains pendant la densification.

c- La forte déformation :

La forte déformation d'un matériau cristallin (métal, céramique) provoque un raffinement de sa structure jusqu'à obtenir une taille de grains de quelques dizaines de nm. Différentes techniques peuvent être utilisées (par torsion, extrusion…). Ce raffinement permet généralement d'améliorer les propriétés de ténacité et de ductilité du matériau.

I-6 La nanotechnologie dans le secteur du génie civil :

De nombreuses disciplines du génie civil, y compris les processus de conception et de construction peuvent bénéficier de la nanotechnologie. Par exemple, les nouveaux matériaux de construction aux propriétés uniques, les matériaux composites légers et plus résistants, isolant d'incendie, absorbeur de son, revêtement à faible entretien, hydrofuges, des polymères nano-argile remplis, les surfaces autodésinfectant, protecteur de la lumière de l'ONU, purificateurs d'air, des capteurs de nano taille, plaquettes conductrices ultra minces, cellules solaires, etc. pour n'en nommer que quelques-uns. En outre, les défis actuels que les scientifiques et les technologues rencontrent dans l'exploitation du potentiel de la nanotechnologie sont également mis en évidence.

La recherche de performance se poursuit dans le bâtiment. L'objectif reste constant, celui de fabriquer des ensembles d'une durabilité toujours plus importante. Les études récentes s'intéressent notamment à la nanotechnologie appliquée à la construction.

Le terme est de plus en plus présent dans différents domaines, dont celui du bâtiment. Ainsi, la nanotechnologie, ou l'art de l'infiniment petit, fait chaque jour un peu plus parler d'elle. L'une de ses principales applications concerne, entre autres, le béton. Cette manipulation de la structure a pour but de renforcer la résistance et la durabilité de ce matériau qui, s'il a su faire ses preuves dans le secteur de la construction, a aussi montré ses défauts, notamment avec l'apparition de fissures. Suivant les premières utilisations, cette introduction dans la fabrication de nanoparticules permettrait de réduire de façon conséquente les dégradations sur les bâtiments.

I-6-1 Les enjeux:

- Renforcer les céramiques par des nanoparticules, les rendre plus tenaces,
- L'industrie du bâtiment cherche à améliorer le confort de l'habitat. Des programmes sont en cours pour créer l'intelligence dans le bâtiment, grâce à l'intégration de capteurs miniaturisés.
- Les professionnels de l'habitat cherchent également à étudier la thermique dans sa globalité. Les bâtiments sont conçus avec de plus en plus de vitrages, qui nécessitent l'apport de nouvelles technologies pour augmenter le confort d'été et d'hiver.
- Dans le génie civil et pour les grands ouvrages, les coefficients de sûreté sont très élevés. Il devient nécessaire de renforcer les matériaux de construction.

I-6-2 Axes de recherche associés :

- Recherche sur l'ajout de nanopoudres aux céramiques. Par exemple : des nanoparticules de nitrure de silicium pour renforcer l'alumine
- Dans le bâtiment individuel, de nombreuses études sont en cours pour rechercher de nouvelles fonctionnalités par traitements de surface intégrant des

nanoparticules : l'industrie du bâtiment cherche ainsi à réaliser des revêtements anti salissure, anti dérapant, plus résistants.

- Recherche sur les nanomatériaux déjà utilisés ou développés pour étudier les potentialités d'utilisation dans le bâtiment.
- Le bâtiment est très attentif aux innovations dans l'industrie :

- du verre pour l'isolation thermique mais aussi pour de nouvelles fonctionnalités telles que : les vitrages auto réfléchissants, autonettoyants, anti-pluie,

- de la biologie (étude sur l'intégration de nanoparticules pour empêcher le développement de microorganismes dans les mortiers),

- des plastiques : les polymères anti-feu intéressent l'industrie du bâtiment, comme les polymères chargés avec des nanoparticules d'argile qui augmente la résistance des matériaux,

- du textile : la recherche sur les textiles antis bactériens peut intéresser le bâtiment pour la réalisation de revêtements de sols spécifiques,

- de l'environnement avec les aérogels étudiés pour le stockage de l'hydrogène ou pour piéger les polluants. Des plaques d'aérogel ultra minces placées dans les doubles vitrages augmenteraient l'isolation thermique tout en gardant la transparence.

I-6-3 Les différents types de nanomatériaux dans les bâtiments:

Tandis que la microsilice est devenue un élément courant dans la composition des bétons, c'est désormais la silice nano qui fait son apparition. Ces nanoparticules interviennent en venant obstruer les pores habituellement présents, à l'origine des fissures.

La prochaine étape fait état de l'intégration des nanotubes de carbone pour aboutir à la création des éléments composites. Ces nouveaux éléments se retrouvent d'ores et déjà dans différents matériaux, notamment les vitrages et bétons autonettoyants, ou encore les peintures.

En outre, comme les particules deviennent de taille nanométrique, la proportion d'atomes à la surface augmente par rapport à ceux de l'intérieur, ce qui conduit à des nouvelles propriétés. Le béton est plus fort, plus durable et plus facile à la mise en œuvre, l'acier plus dur et le verre devient autonettoyant. La résistance et la durabilité accrue sont également une partie de l'envie de réduire l'empreinte écologique de l'environnement construit par l'utilisation efficace des ressources. Ceci est réalisé à la fois avant le processus de construction avec une réduction de la pollution lors de la production de matériaux (ciment, par exemple) et aussi en service, grâce à une utilisation efficace de l'énergie à cause des progrès en matière d'isolation. Deux particules de taille nanométrique qui se démarquent dans leur application aux matériaux de construction sont le dioxyde de titane (TiO2) et des nanotubes de carbone (CNT). Le premier est utilisé pour sa capacité à décomposer la saleté et la pollution sur tous les matériaux, du béton ou verre, qui seront ensuite lavé par l'eau de pluie. Le second est utilisé pour renforcer et surveiller le béton. En raison de nombreuses caractéristiques uniques des produits issus de la nanotechnologie, des produits récemment mis au point à base de la nanotechnologie peuvent réduire considérablement les problèmes actuels de génie civil. Fondamentalement, la construction serait traitée avec des matériaux et des procédés de haute technologie qui sont utilisés dans cette dernière. Par conséquent, il y a d'énormes possibilités pour appliquer la nanotechnologie dans les matériaux de construction, ce qui peut présenter, probablement, des plus importants impacts sociétaux.

Fig. I.9 : Façade d'un immeuble en verre composé de nanoparticules de dioxyde de titane (INRS 2012)

I-6-4 La limite de la nanotechnologie:

L'utilisation de ces nouveaux éléments dans le BTP pourrait aussi connaître certaines limites, la première d'entre elles est d'abord financière, avec un coût de ces nanomatériaux élevé.

Le deuxième frein à leur développement est, lui, davantage environnemental. En effet, si leurs atouts en matière de construction ont désormais été prouvés, cela n'est en revanche pas le cas concernant leur impact au niveau de la déconstruction avec un recyclage qui risque d'être plus difficile du fait du mélange des matériaux à l'infiniment petit.

De la même façon, il se pose aussi la question de leurs conséquences sur la santé du fait de leur facilité d'ingestion ou d'assimilation par l'organisme, par simple contact.

I-7 Les risques liés aux nanomatériaux :

Les propriétés physico-chimiques nouvelles intrinsèques à ces nanomatériaux, qui représentent un véritable enjeu technologique, laissent supposer, d'ores et déjà, une forte augmentation des expositions professionnelles à ces substances alors que les dangers associés sont encore méconnus. En effet, ces propriétés différentes de celles des particules de même composition chimique mais de plus grande taille pourraient entraîner des effets toxicologiques sur l'homme.

Les premières études toxicologiques réalisées par différents laboratoires internationaux montrent, que les nanomatériaux, selon leur nature (taille, composition chimique, pureté, réactivité de surface, solubilité, forme et capacité d'agrégation), sont susceptibles d'induire des effets spécifiques nocifs par contact, inhalation et/ou ingestion. En milieu de travail, la voie d'exposition principale est l'inhalation. Le corpus de ces études reste insuffisant à ce jour pour conclure sur l'innocuité ou les dangers aigus ou chroniques spécifiques à ces substances, il convient donc d'être très vigilant.

Conclusion

Les nanotechnologies sont un domaine très prometteur, de nombreuses applications sont possibles dans de vastes domaines. En effet, qu'il s'agisse du nanotube de carbone ou encore d'une nanoparticule à cœur magnétique les nano-objets ouvrent une nouvelle branche de la recherche. Grace à elles, on peut démultiplier les possibilités actuelles : il est possible de faire mieux avec moins, et d'avoir une dispersion rapide sur un élément ciblé. Mais les nanotechnologies ne doivent pas être utilisées à outrance. Il faut savoir réguler leur emploi pour éviter une éventuelle catastrophe sanitaire. Enfin, le développement durable à besoin des nanotechnologies pour progressivement amener une nouvelle visée de la science, celle d'informer et d'aider au développement mondial. En clair, les nanotechnologies sont une véritable avancée technique qui a tout pour conduire la société vers une nouvelle révolution dans des divers domaines comme nous l'avons vu. Seules les incertitudes peuvent être un frein à cette lancée scientifique, et il est de notre ressort de décider comment s'agencera la « course aux nanos ».

Chapitre II

Les FGM: Matériaux à gradient de Propriété

Introduction

Le développement des matériaux composites a permis de leur associer des propriétés spécifiques au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution était donc d'utiliser des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M "). Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

II-1 Définition des matériaux FGM:

Un matériau fonctionnellement gradué (FGM) est un matériau dans lequel la composition et la structure changent graduellement en entraînant une modification correspondante dans les propriétés du matériau. Ce concept de FGM peut être appliqué à divers matériaux pour des utilisations structurelles et fonctionnelles.

Il ya plusieurs années, ce concept a été évalué en premier lieu dans le développement de revêtement des barrières thermiques pour augmenter la résistance thermique des lames dans les moteurs de turbine à gaz pour divers applications telles que les systèmes de protection thermique, les FGM sont développés pour minimiser les contraintes thermiques qui conduisent à la rupture de la céramique.

La structure des FGM est constituée d'une phase céramique d'un côté et d'une phase métallique dans l'autre côté, avec des régions intermédiaires constituées d'un mélange des deux constituants, variant selon une fraction volumique.

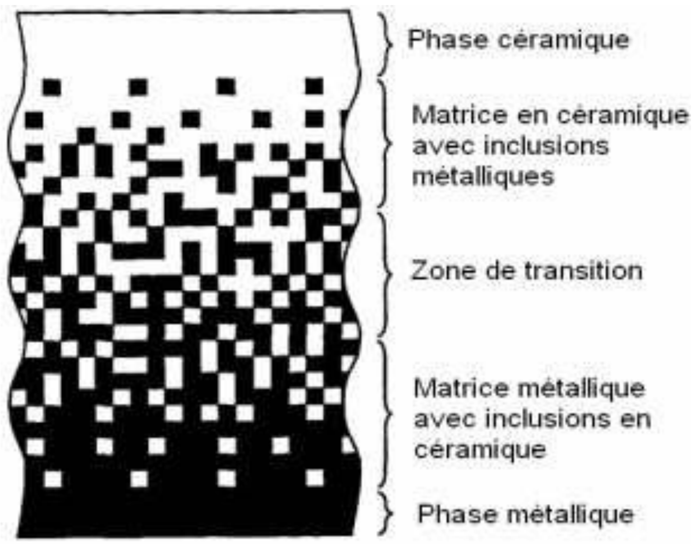


Fig. II.1 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal (Yin et al 2004)

II-2 Pourquoi cette orientation vers les FGM ?

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al. 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

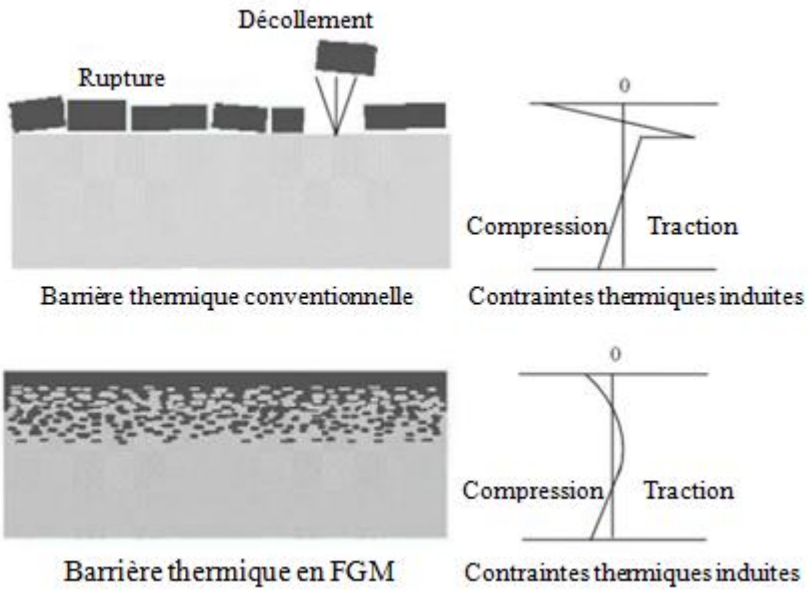


Fig. II.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM

II-2 Historique sur le développement des matériaux FGM :

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau II.1 :

Année	Progrès de recherche sur les FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendaï, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1èr Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Kôln, (Allemagne).
1990	1er Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).

1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	étude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2éme colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3ème colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4ème colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

Tab. II.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon

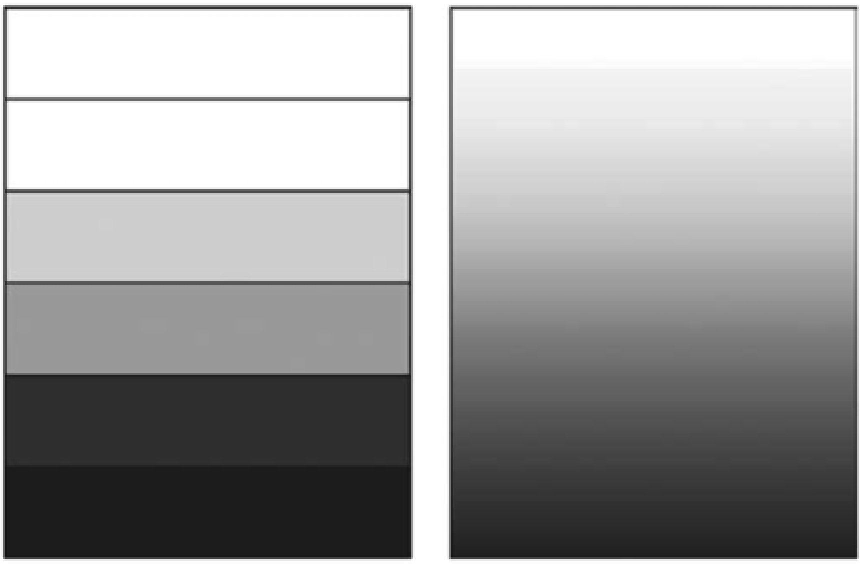
II-3 Propriétés effectives des FGM :

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. La fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est à dire couche quasi-homogène de céramique-métal (fig. II-2-a)

2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (fig. II-2-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).



(a) (b)

Fig. II.3 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite.

Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont:

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tab. I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

II-3-1 Propriétés matérielles des plaques P-FGM :

La fraction volumique des plaques P-FGM est assurée par la loi de puissance:

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \quad \textbf{(II- 1)}$$

k représente l'indice matériel, h l'épaisseur de la plaque et z la coordonnée suivant l'épaisseur.

Ainsi, le module de Young de ces plaques est exprimé par :

$$E(z) = V(z)E_1 + \left[1 - V(z)\right]E_2 \quad \textbf{(II- 2)}$$

E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young des matériaux constituant la plaque P-FGM pour $z = \frac{h}{2}$ et $z = -\frac{h}{2}$

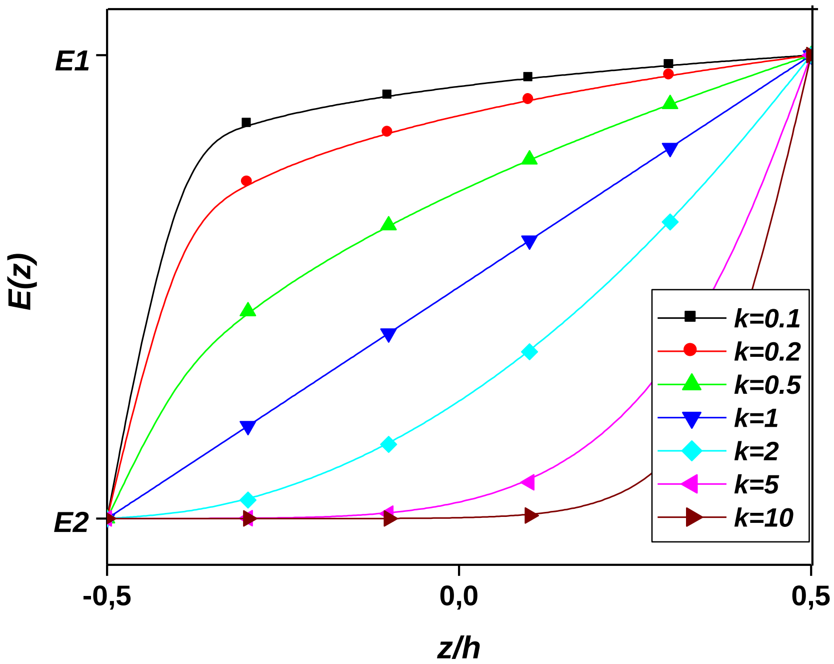


Fig. II.4 Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM

On remarque d'après la fig. II.4 que le module de Young décroit dans la direction de l'extrémité inférieure de la plaque ($k \succ 1$), et s'accroit en allant vers l'extrémité supérieure ($k \prec 1$) et pour $k = 1$, la variation du module de Young devient linéaire.

On constate aussi que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque, et vis vers sa : la plaque devient de moins résistance si son module de Young est faible, et ceci est du à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal.

Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E, la densité ρ et le coefficient de poisson υ sont alors exprimées par :

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j V_j \qquad \textbf{(II- 3)}$$

S_j et V_j sont respectivement les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j, et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1}^{n} V_j = 1 \qquad \textbf{(II- 4)}$$

II-3-2 Propriétés matérielles des plaques S-FGM :

Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$\mathrm{V}_1(\mathrm{z}) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{h}/2 - \mathrm{z}}{h/2}\right)^k \quad \text{pour } 0 \le z \le \frac{h}{2} \qquad \textbf{(II- 5-a)}$$

$$\mathrm{V}_2(\mathrm{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{h}/2 + \mathrm{z}}{h/2}\right)^k \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \le z \le 0 \qquad \textbf{(II- 5-b)}$$

En utilisant la loi de mélange, le module de YOUNG de la plaque S-FGM est calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \le z \le \frac{h}{2} \qquad \textbf{(II- 6-a)}$$

$$E(z) = V_2(z)E_2 + [1 - V_2(z)]E_1 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \le z \le 0 \qquad \textbf{(II- 6-b)}$$

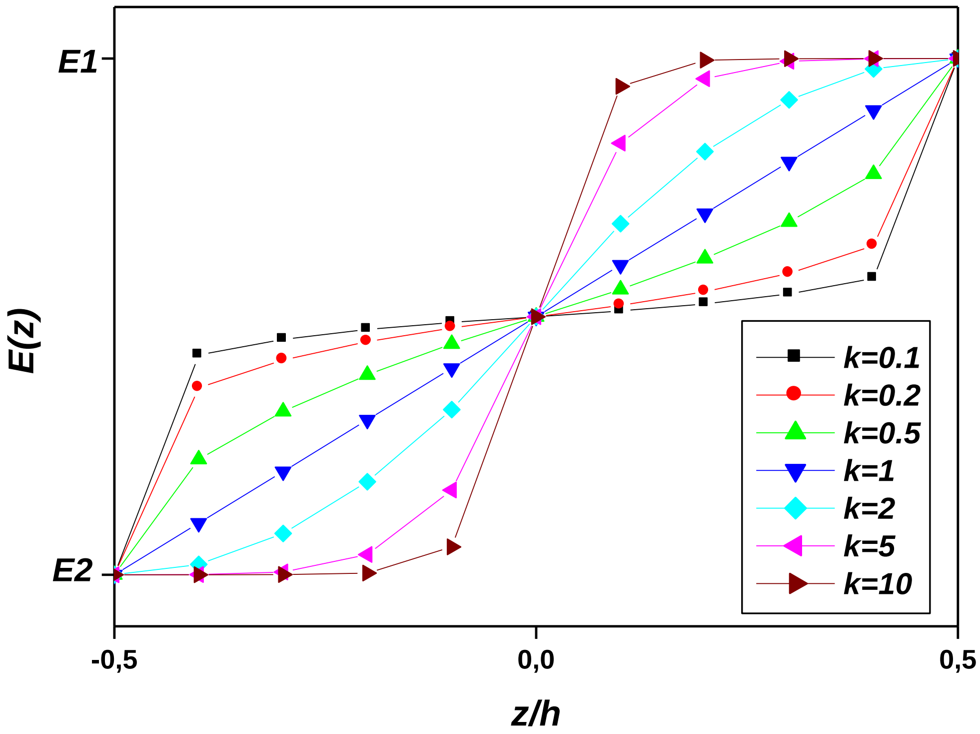


Fig. II.5 Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM

La fig. II.5 montre que la variation du module de Young définie par les équations (II- 6-a) et (II-6-b) représente les distributions sigmoïdes.

II-3-3 Propriétés matérielles des plaques E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par :

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \tag{II- 7-a}$$

$$A = E_2 \tag{II- 7-b}$$

$$B = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{II- 7-c}$$

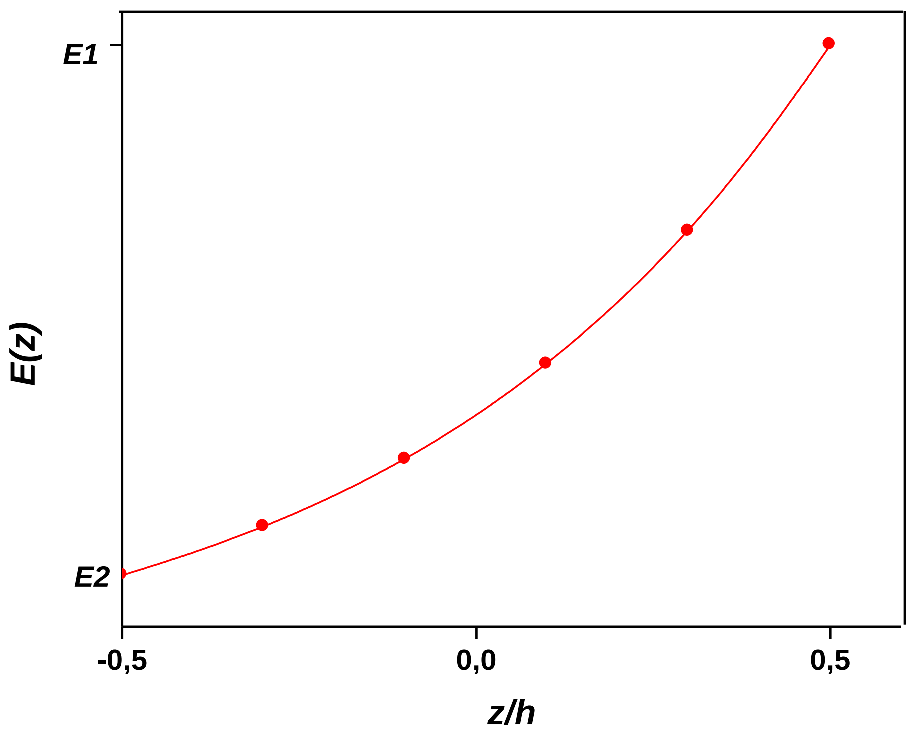


Fig. II.6 Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM

D'après la fig. II.6, on remarque que l'augmentation du module de Young est proportionnelle à l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal (Al) tout en allant vers l'extrémité supérieure de la plaque.

II.4 Domaines d'applications des FGM :

Il existe de nombreux domaines d'application pour les pièces FGM (Mahamood2012). Les deux principaux sont les domaines aérospatial et biomédical. Dans le domaine aérospatial, où le concept de FGM fit son apparition, les pièces multimatériaux sont en majorité développées dans le but de résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques. Le centre de recherche de la NASA propose, par exemple, de développer des pièces FGM pour des navettes spatiales. Des analyses thermiques montrent que pendant les phases de vol, la température du fuselage peut atteindre les 1000 °C tandis que celle du réservoir est proche des 400 °C. La conception de ces supports de fixation doit leur permettre de supporter ces contraintes thermiques en limitant les efforts de cisaillement et de flexion qui impactent leur durée de vie. On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique (Müller2003), de l'énergie nucléaire (Yadroitsev2007), de la défense (Lu2011) ou de la production d'outillage (Jiang2005). Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et on imagine qu'au fur et à mesure des avancées scientifiques, l'appropriation de ce type de structure par les concepteurs permettra encore de l'élargir. Effectivement, les possibilités de combinaison sont en théorie quasiment illimitées et chaque combinaison forme une structure avec des propriétés spécifiques. On peut donc penser que les structures multimatériaux vont transformer en profondeur le monde de la conception en augmentant considérablement les possibilités dans l'étape stratégique du choix des matériaux.

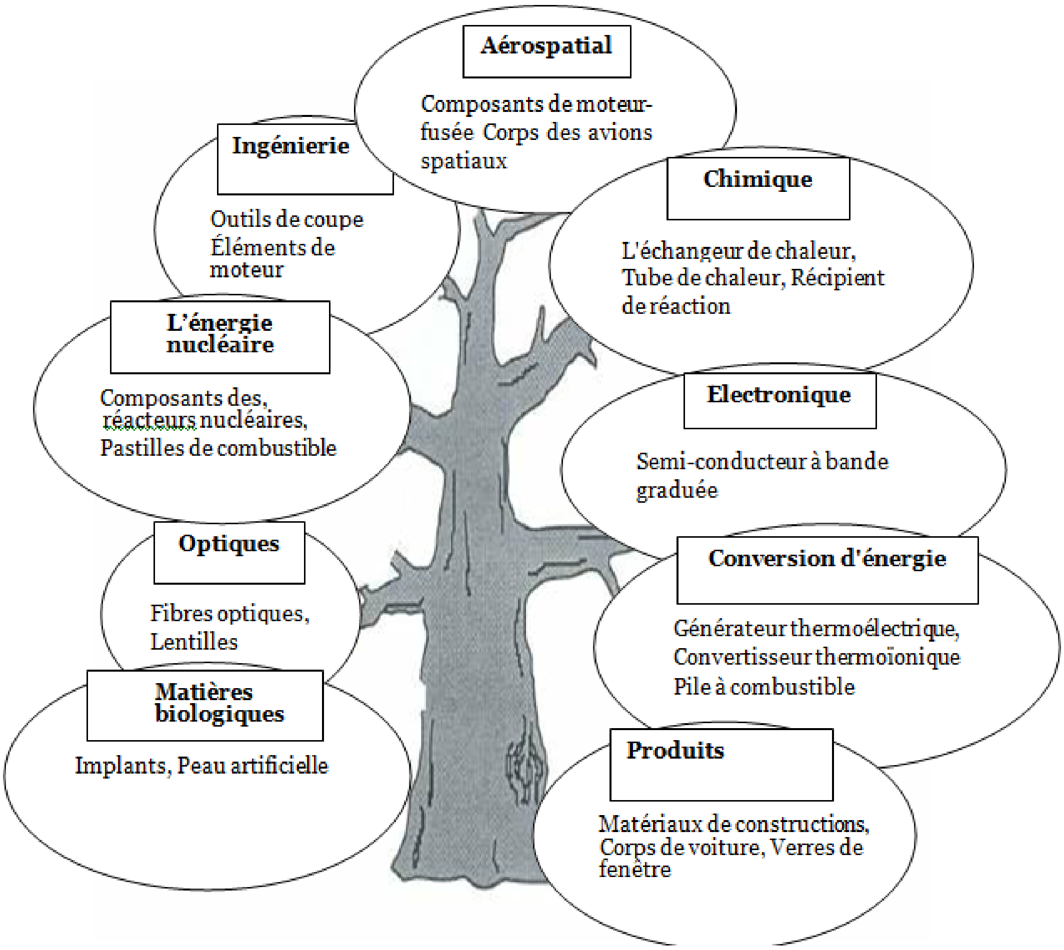


Fig. II.7 Les principaux domaines d'application des FGM.

II-5 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM :

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théorique par (SHEN 2009) et (KIEBACK 2003). Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGMs à ce moment là. Cela a pris 15 ans supplémentaire jusqu'a ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGMs au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur les FGMs a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthode de production a été développée (MORTENSEN1995), (HIARI 1996).

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étape de la structure graduée à partir des matériaux précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (slip casting), coulage en bande (tape casting), dépôt par électrophorèse, compaction sèche des poudres, projection plasma, frittage en infiltration, implantation ionique.

II-5-1 Coulage en bande (tape casting) :

Le coulage en bande à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000µm). Après un raffermissement de la pate. Les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [MIST] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (BOCH 1986), (BOCH 1987).

II-5-2 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

-Formation du tesson ou « prise » ;

-Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie classique de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

Du pouvoir de succion de la plate (coulage classique) (MOYA 1992) ;

Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

II-5-3 Dépôt par électrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules changées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique (SARK 1996).

II-5-4 Compaction sèche des poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (BISH 1993).

II-5-5 Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (STEF 1990).

II-5-6 Frittage en infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (TEKA 1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

II-5-7 Implantation ionique :

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines (<1µm) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement d'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs.

Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (ABDI 1997).

Conclusion

Les matériaux FGM ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie de pointe sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes. Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures. Ces matériaux avancés avec des gradients de composition de la structure et des propriétés spécifiques dans la direction préférée ou de l'orientation, sont meilleurs que les matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Ces matériaux acquièrent de nombreuses applications dans divers domaines d'ingénierie en vue d'utiliser leurs propriétés potentielles de manière optimale

Chapitre III

Les plaques : Théories, vibration Et méthodes d'homogénéisation

Introduction

*Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, l'aérospatial, le génie civil, le domaine de l'énergie, etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérative de l'étude de leur comportement vi*bratoire et devient donc d'une *grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de* vue académique *qu'industrielle, D'où il est nécessaire de passer* par des *méthodes d'homogénéisation classiques pour déterminer le comportement équivalent d'un matériau hétérogène.*

III-1 Théories des plaques:

Les plaques rectangulaires font partie des éléments structuraux les plus couramment utilisés. Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle de l'analyse.

III-1-1 Modèle classique de Love - Kirchhoff (CPT):

Historiquement, le premier modèle des plaques minces a été développé par Lagrange, Poisson, et Kirchhoff. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff (KIRCHHOFF 1950), selon lesquelles une droite normale au plan médian reste perpendiculaire après déformation (fig. III.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse (CUGNONI 2004)

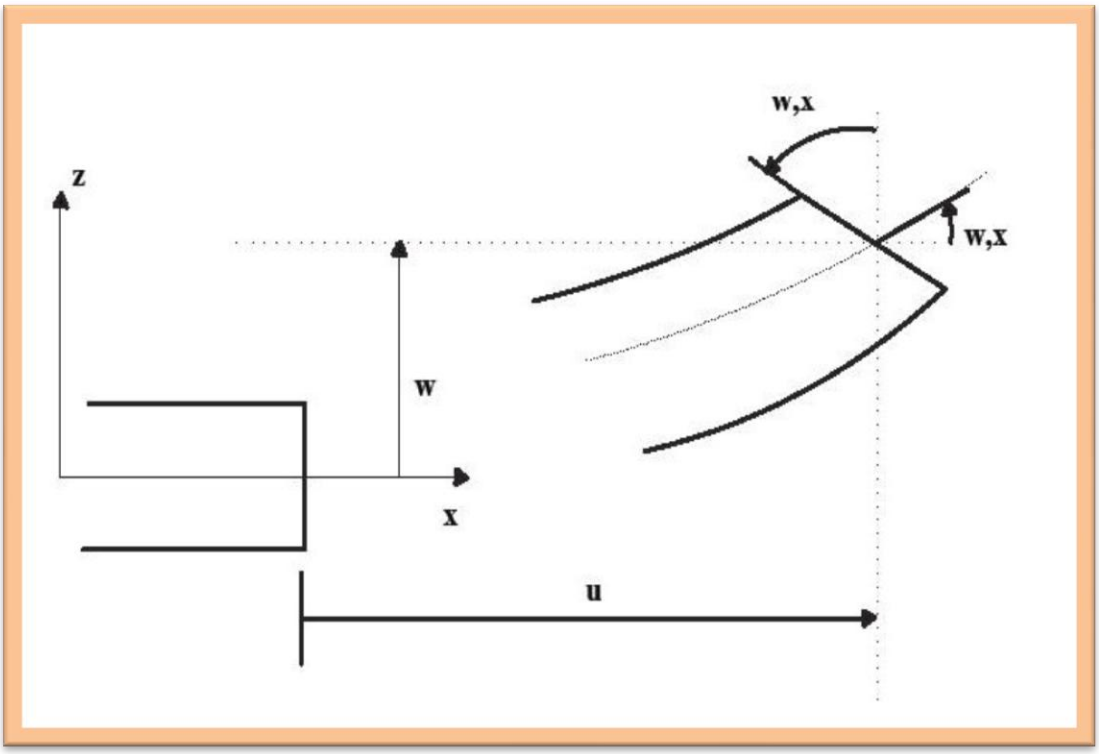


Fig.III.1 : cinématique de Love-Kirchhoff (Afaq 2003a)

Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) - zw,_x(x,y) \\ V(x,y,z) &= v_0(x,y) - zw,_y(x,y) \\ W(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad \textbf{(III-1)}$$

$U(x,y,z), V(x,y,z), W(x,y,z)$ sont respectivement les déplacements suivant les directions x, y, z. $u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y)$ sont respectivement les déplacements du plan moyen suivant les directions x, y, z. $w,_x(x,y), w,_y(x,y)$ sont respectivement les rotations dues à la flexion autour des axes x, y (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan (x, y) et l'épaisseur h est orientée selon l'axe z.

III-1-2 Modèle de déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin- Reissner (FSDT):

Le principe de la théorie FSDT est de relaxer l'hypothèse de normalité des sections après déformation de la théorie classique (CLPT), on introduit alors les hypothèses des poutres de (TIMOCHENKO 1972) ou des plaques de (MINDLIN 1951), l'approximation des déplacements dans l'épaisseur prenant ainsi en compte la rotation de la section déformée par un développement au premier ordre du champ de déplacement dans l'épaisseur (Fig. III.2). Cette hypothèse se traduit par une déformation en cisaillement transverse constante dans l'épaisseur. Cependant, du fait que les contraintes ainsi calculées ne s'annulent pas sur les surfaces externes, cette théorie nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

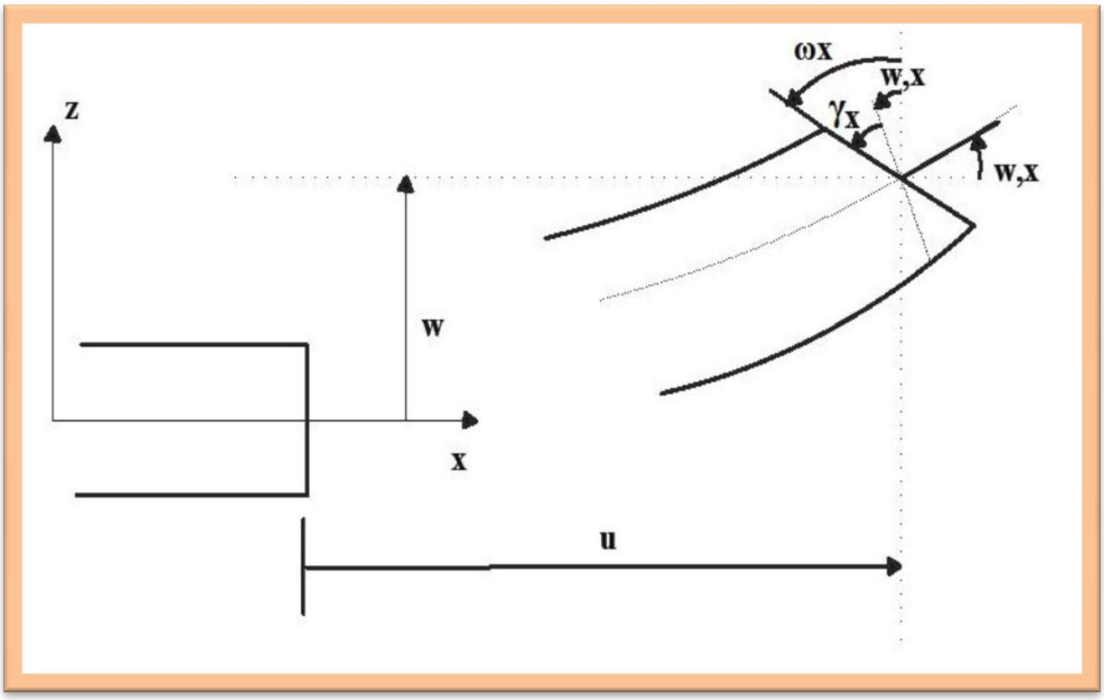


Fig.III.2 : cinématique de Reissner-Mindlin (Afaq 2003a)

Le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y) \\ V(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \\ W(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \qquad \textbf{(III-2)}$$

$\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)$ sont respectivement les rotations autour des axes x, y.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III-1-3 Modèle de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT):

Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor (NGUYEN 2004), le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme avec $i \in \{1,2,3\}$

$$U_i(x,y,z) = u_i^0(x,y) + z\phi_i(x,y) + z^2\theta_i(x,y) + z^3\psi_i(x,y) \qquad \textbf{(III-3)}$$

Les variables $\emptyset_i$ représentent les rotations des sections déformées autour des axes $x_1, et\ x_2$, respectivement (terme du premier ordre), tandis que Θ_i symbolisent les termes du second ordre (courbure) et ψ_i les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

A partir de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en troisième ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie, ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour j=2, 3, 4…

$$u_i(x,y,z) = u_i^0(x,y) + z\phi_i^{0(1)}(x,y) + z^2\phi_i^{0(2)}(x,y) + .. + z^4\phi_i^{0(4)}(x,y) \qquad \textbf{(III-4)}$$

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires ce qui alourdie passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la contrainte de cisaillement s'annule sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque ou de la poutre dans la direction transverse (CUGNONI2004).

Le champ de déplacement est généralement donné par:

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \psi(z)\varphi_x(x,y), \\ V(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \psi(z)\varphi_y(x,y), \\ W(x,y,z) &= w_0(x,y). \end{aligned} \qquad \textbf{(III-5)}$$

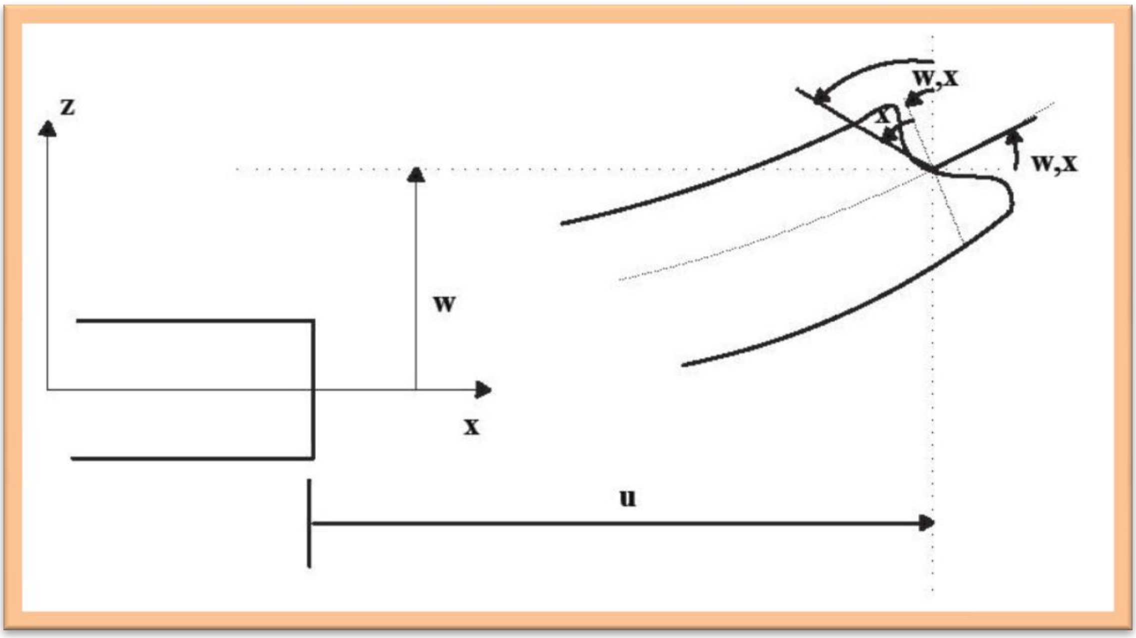


Fig. III.3 Cinématique de la théorie d'ordre élevé (Afaq 2003a)

$u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y)$ et $\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)$,. sont respectivement les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x, y $\left(\varphi_x(x,y) = \frac{\partial w_0}{\partial_x} + \phi_x \text{ , } \varphi_y(x,y) = \frac{\partial w_0}{\partial_y} + \phi_y\right)$,

$\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en mettant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue en mettant $\psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy 1997) sont obtenus par :

$$\psi(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \qquad \textbf{(III-6)}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (Touratier 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{III-7}$$

La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La fonction exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponentiel Shear Deformation plate Theory ESDPT) développée par Karama (Karama et al 2003) est sous la forme :

$$\psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad \text{et} \quad \varphi(z) = 0 \tag{III-8}$$

La fonction hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic Shear Deformation plate Theory HSDPT) développée par Soldatos (Soldatos et al 1993) est sous la forme:

$$\psi(z) = h\sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z\sinh\left(\frac{1}{2}\right) \tag{III-9}$$

Mantari (Mantari et al 2012) propose un nouveau modèle sinusoïdale (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse est donnée par:

$$\psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)e^{m\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{III-10}$$

III-2 La vibration des plaques:

L'application des éléments structurels ‘’ plaques ‘’ a connu un développement dans le domaine de la construction, l'aérospatiale, la mécanique, et les structures marines, etc. en raison de leur poids relativement léger et leur facilité de construction. La faible épaisseur de la plaque rend sensible à divers types de sollicitations vis-à-vis le flambement et la vibration. Dans la domaine de l'ingénierie, les problèmes de plaque impliquent souvent des perturbations dynamiques considérables, produites par des forces externes ou des déplacements en fonction du temps. Les charges dynamiques peuvent être créées par des véhicules en mouvement, des rafales de vent, les machines à balourd, etc. L'analyse dynamique est un point très important pour l'enquête structurelle et la conception, son objectif est de déterminer l'effet des vibrations sur les performances de la structure. La détermination des caractéristiques de la vibration libre d'un système structurel semble souvent être la tâche fondamentale dans l'analyse dynamique.

Beaucoup de chercheurs ont étudié la vibration libre des plaques, mais la publication des ouvrages sur l'analyse dynamique des éléments plaques est encore rare dans la littérature. C'est en se basant sur la théorie des plaques qu'ont commencé des enquêtes classiques sur la vibration libre des plaques minces (Lin et Wah 1964). La solution de Lin était basée sur la méthode d'analyse et celle de Wah était basée sur une technique numérique (différences finies). Chopra (Chopra 1974) a traité la vibration libre des plaques étagées, avec une variation de l'épaisseur d'un étage à un autre. Gorman (Gorman 1984) a étudié les problèmes de la vibration libre d'une plaque rectangulaire mince ayant trois bords simplement appuyés et un bord soumis à des conditions aux limites partielles. Avec des conditions aux limites simplement appuyées et libre, les fréquences naturelles d'une plaque sont deux fois la largeur (Lin 1960). Harik (Harik et al 1992) a analysé le problème de la vibration des plaques rectangulaires intensifiées. Ils ont modifié la méthode d'analyse de la bande pour permettre le changement de pas de l'épaisseur dans une direction. Yuan et Dickison (Yuan et Dickison 1998) ont étudié la vibration de plaques rectangulaires gradins simplement appuyées. Ils ont obtenu les fréquences exactes de la vibration des plaques rectangulaires minces simplement appuyées à l'aide de la méthode proposée par Chopra (Chopra 1974) avec des conditions de continuité correctes pour le moment de flexion et la force de cisaillement. Récemment, Yu (Yu 2002) a développé une méthode précise et efficace pour déterminer les fréquences naturelles et les modes de vibration flexionnelle de la plaque rectangulaire ayant une fissure à des emplacements arbitraires. Il a conclu que si la longueur de la fissure varie entre 0 et 50% de la longueur caractéristique, les effets des fissures sur les vibrations flexionnelles libres sont très petits et si la longueur de la fissure dépasse 50% de la longueur caractéristique, les effets sont significatifs. Plus récemment, Xing et Wei (Xing et Wei 2004) ont présenté les premières solutions exactes connues pour le flambement et les vibrations des plaques rectangulaires de Mindlin avec deux bords opposés pris en charge et les deux bords restants étant soit libres, soit simplement appuyés ou bien encastrées. Ils ont utilisé la solution générale de Levy et une technique de décomposition pour développer une approche analytique afin de traiter les plaques rectangulaires de Mindlin. Ils ont examiné l'influence des rapports de longueur, les rapports d'épaisseur sur le comportement de la déformation et la vibration des plaques carrées et rectangulaires de Mindlin. Les charges de flambement exactes et les fréquences de vibration ont été obtenues dans leurs études.

La Vibration des plaques est distincte à celles des poutres de telle sorte que chaque mode de vibration se compose de deux mouvements perpendiculaires. Dans une plaque rectangulaire chaque mode est un produit de deux fonctions : une définie le long de la coordonnée x et l'autre le long de la coordonnée y. Pour une plaque circulaire chaque mode est constitué d'un produit d'une fonction radiale et circonférentielle. En d'autres termes, un mode de vibration induit généralement des mouvements dans les deux sens.

III-3 Méthodes d'homogénéisation:

Le comportement mécanique d'un matériau hétérogène exige l'analyse de sa microstructure et la résolution d'un problème microscopique. La méthode d'homogénéisation permet d'estimer les propriétés macroscopiques d'un matériau hétérogène à partir des propriétés des différentes phases qui le constituent et de certains paramètres caractérisant leur répartition spatiale. L'objectif est de remplacer le matériau hétérogène réel par un matériau homogène équivalent de même structure à l'échelle macroscopique.

Dans la micromécanique classique (Mura 1982; Nemat-Nasser et Hori 1999), il existe une grande variété de modèles pour prédire les propriétés effectives des matériaux hétérogènes, telles que les lois de mélange et leurs limites (Mura 1991; Nemat-Nasser et Hori 1999), le modèle de Hashin-Shtrikman (Hashin et Strikman 1963), la théorie de l'Eshelby (Eshelby 1957), le modèle auto-cohérent (Hill 1965), la théorie du champ significatif (Weng 1984), et le modèle Mori-Tanaka (Mori et Tanaka 1973). Récemment, un modèle élastique y compris l'interaction de particules par paires et l'effet gradient de la fraction volumique de phase est également apparu (Yin et al 2004). La détermination des propriétés effectives a également été démontrée en utilisant la méthode de Voronoi basée sur les éléments finis (de VCFEM) (Grujicic et Zhang 1998). Les caractéristiques de la microstructure, comme la fraction volumique de phase, la forme et la disposition spatiale d'une phase inclut, et d'autres caractéristiques pertinentes, doivent être définis localement. Ce déterminisme fondamental de la micromécanique classique est une préoccupation pratique, car il existe une variabilité d'échantillonnage dans les caractéristiques microstructurales des FGM (Ferrante et Graham-Brady 2005).

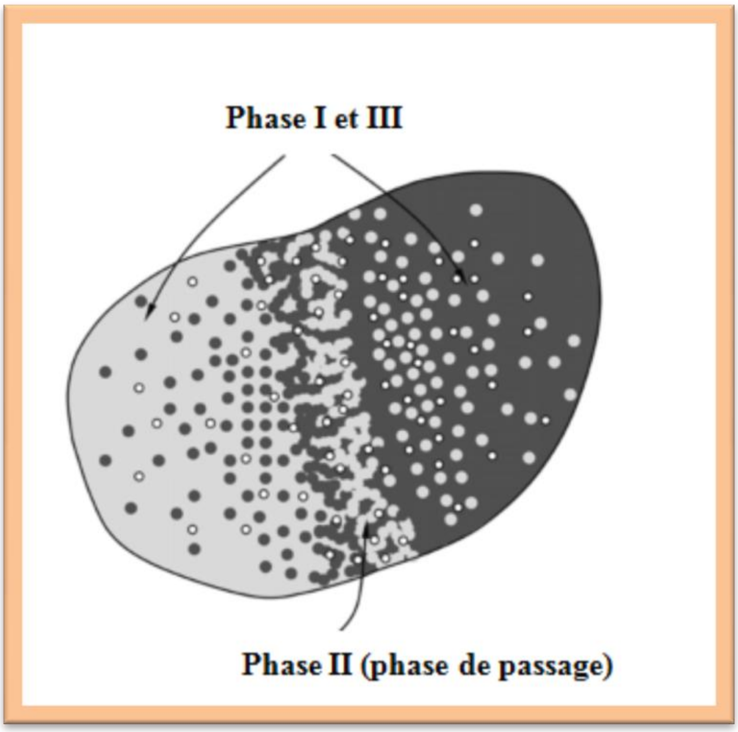


Fig.III.4: Schéma représentatif des trois phases de FGM

III-3-1 Modèle de Mori-Tanaka :

En 1973, Mori (Mori et al 1973) ont proposé une méthode de calcul de la contrainte moyenne et de l'énergie élastique stockée dans la matrice d'un matériau contenant une fraction volumique d'inclusions. Benveniste (Benveniste 1987) a ensuite publié une interprétation claire de ce modèle. Dans ce modèle, le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. Le V.E.R. est soumis à la déformation moyenne de la matrice in-situ dans le composite. Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphériques, le module de compressibilité équivalent K^{MT} et le module de cisaillement équivalent μ^{MT} sont définis par les relations suivantes (Aboudi 1991) :

$$K^{MT} = K_1 + f_2 \frac{K_1(K_2 - K_1)}{[(1-f_2)(K_2 - K_1)\alpha_1 + K_1]} \quad \text{(III-11)}$$

$$\mu^{MT} = \mu_1 + f_2 \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{[(1-f_2)(\mu_2 - \mu_1)\beta_1 + \mu_1]} \quad \text{(III-12)}$$

Où les paramètres α_1 et β_1 valent :

$$\alpha_1 = \frac{3K_1}{3K_1 + 4\mu_1} \qquad \beta_1 = \frac{6}{5}\frac{(K_1 + 2\mu_1)}{(3K_1 + 4\mu_1)}$$

Ce modèle est très couramment employé pour calculer le tenseur de rigidité effectif des matériaux composites parce qu'il est particulièrement adapté à un milieu hétérogène de type Matrice (au sens de la phase continue) dans laquelle sont noyées des hétérogénéités ellipsoïdales. Pour y parvenir il suppose que le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice, le tout étant soumis à l'infini à la déformation moyenne de la matrice in-situ dans le composite. Le composite est constitué d'une matrice continue et de n phases constituant les hétérogénéités. Une phase est un ensemble d'hétérogénéités dont la géométrie et les propriétés mécaniques, les modules d'élasticité sont identiques. Deux hétérogénéités appartiennent à deux phases différentes si elles n'ont pas le même élancement (ou orientation) même si leurs propriétés mécaniques sont identiques.

III-3-2 Modèle auto-cohérent :

Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que le milieu entourant chaque inclusion est un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisé recherché. Pour un composite biphasé, avec des inclusions sphériques, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques recherchées (Aboudi 1991) :

$$K^{AC} = K_1 + f_2 \frac{(K_2 - K_1)(3K^{AC} + 4\mu^{AC})}{(3K_2 + 4\mu^{AC})} \tag{III-13}$$

$$\mu^{AC} = \mu_1 + f_2(\mu_2 - \mu_1)\frac{15(1-\nu^{AC})}{\mu^{AC}(7 - 5\nu^{AC}) + 2(4 - 5\nu^{AC})\mu_2} \tag{III-14}$$

Où K^{AC} et μ^{AC} représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement équivalents.

III-3-3 Modèle de la solution diluée :

Dans cette solution, chaque inclusion est considérée comme noyée dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. La solution diluée est donc valable s'il n'y a aucune interaction entre les inclusions, c'est-à-dire si elles sont suffisamment éloignés les unes des autres. Par conséquent, elle s'applique seulement aux matériaux hétérogènes contenant une faible fraction volumique d'inclusions fr. Dans le cas d'un composite à 2 phases (matrice en phase 1 et inclusion en phase 2), en supposant que les inclusions sont sphériques de comportement élastique linéaire isotrope, les coefficients de compressibilité K et de cisaillement μ équivalents sont donnés par les relations suivantes (Aboudi 1991) :

$$K^{dl} = K_1 + f_2 \frac{(K_2 - K_1)(3K_1 + 4\mu_1)}{(3K_2 + 4\mu_1)} \qquad \text{(III-15)}$$

$$\frac{\mu^{dl}}{\mu_1} = 1 - \frac{15(1-\nu_1)(1-\frac{\mu_2}{\mu_1})f_2}{7 - 5\nu_1 + 2(4 - 5\nu_1)\frac{\mu_2}{\mu_1}} \qquad \text{(III-16)}$$

Conclusion

Dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, il est souvent possible d'employer des techniques disponibles pour les composites traditionnels. Toutefois, dans le cas où le matériau a une gradation importante (changement rapide des propriétés d'une surface à l'autre), le modèle (VER) peut être utilisé, reflétant les variations des propriétés à l'échelle micromécanique. Peu importe l'approche d'homogénéisation adoptée, l'interaction entre les particules ne doit pas être négligée.

Dans la plupart des théories 2D développées pour prédire la réponses des plaques FGM, seul l'effet de la déformation en cisaillement transversal a été pris en compte, et très peu de théories envisagent de prendre en compte l'effet de cisaillement transversal et la déformation normale à la fois (Thickness Stretching Effect).

Chapitre IV

Etude de la réponse dynamique des Nano-Plaques en FGM: formulations théoriques

Introduction

La Vibration des nanostructures est d'une grande importance dans les nanotechnologies. Comprendre le comportement de vibration de nanostructures est l'étape clé pour de nombreux problèmes. Dans cette partie, la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées à l'échelle nanométrique est étudiée en utilisant une nouvelle théorie non locale hyperbolique raffinée. La partition du déplacement transverse en flexion et en cisaillement mène à réduire le nombre des inconnues ce qui rend la nouvelle théorie simple à utiliser. L'effet d'échelle est pris en considération en utilisant les relations constitutives d'Eringen.

IV-1 Représentation de la nano- plaque utilisée :

La fig. IV.1 montre une nano plaque fonctionnellement graduée de longueur a, largeur b, et épaisseur h. le matériau supposé à la surface supérieure de la plaque $(z=+h/2)$ est la céramique qui varie graduellement en métal à la surface inférieure de la plaque $(z=-h/2)$ selon une loi de distribution puissance.

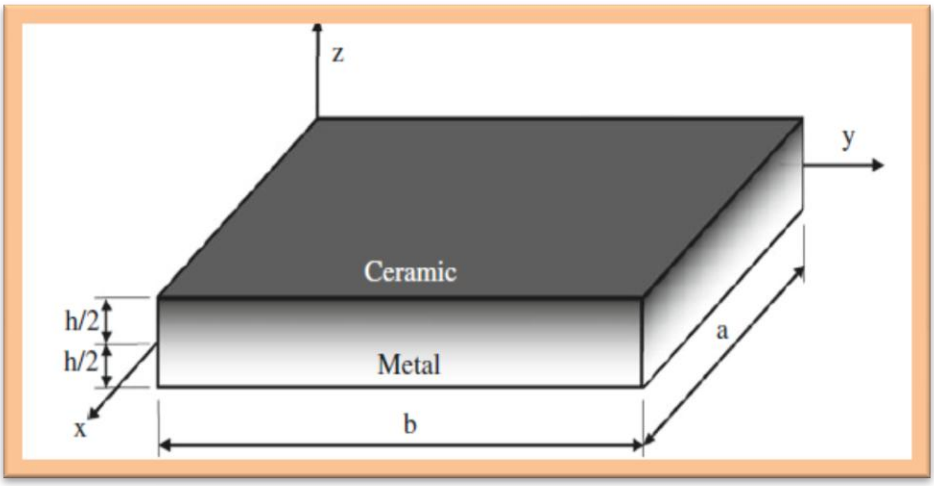


Fig. IV.1: présentation schématique d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée

En appliquant l'homogénéisation de Mori- Tanaka, le module effectif d'ampleur (K) et le module effectif de cisaillement (G) sont donnés par (Belabed et al, 2014; Valizadeh et al, 2013; Cheng and Batra, 2009; Qian et al, 2004):

$$\frac{K-K_m}{K_C-K_m}=\frac{V_C}{1+(1-V_C)\dfrac{3(K_C-K_m)}{3K_m+4G_m}} \tag{IV-1a}$$

$$\frac{G-G_m}{G_C-G_m}=\frac{V_C}{1+(1-V_C)\dfrac{(G_C-G_m)}{G_m+f_1}} \tag{IV-1b}$$

Avec: $$f_1=\frac{G_m(9K_m+8G_m)}{6(K_m+2G_m)} \tag{IV-2}$$

V_i $(i = c, m)$ est la fraction volumique de la phase matérielle. Les indices c et m se réfèrent respectivement à la phase céramique et métal. Les fractions volumiques des phases céramique et métal sont reliées par $V_C + V_m = 1$ et V_C est exprimé par :

$$V_C(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n, \quad n \geq 0 \qquad \textbf{(IV-3)}$$

Tel que n dans l'équation (IV.3) représente l'indice matériel.

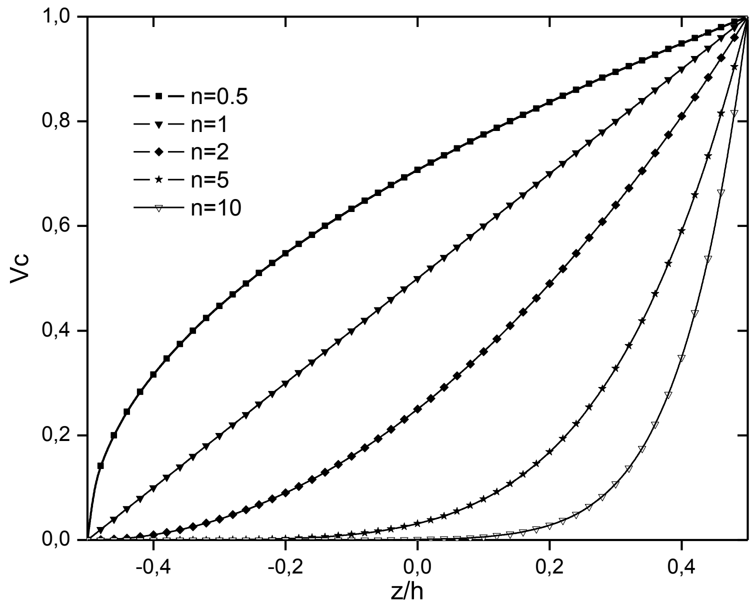


Fig. IV.2: Variation de la fraction volumique de la phase céramique à travers l'épaisseur de la plaque

La fig. IV.2 montre la variation de la fraction volumique de la phase céramique dans la direction de l'épaisseur z des plaques fonctionnellement graduées. Le module de Young effectif E et le coefficient de poisson ν peuvent être calculés à partir des expressions :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \qquad \textbf{(IV-4a)}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \qquad \text{(IV-4b)}$$

La densité effective ρ est donnée par la loi de mélange par (Natarajan et al., 2011; Benachour et al., 2011; Bessaim et al., 2013; Yaghoobi et al., 2013; Tounsi et al., 2013d; Ould Larbi et al, 2013; Bouremana et al, 2013; Hebali et al, 2014):

$$\rho = \rho_C V_C + \rho_m V_m \qquad \text{(IV-5)}$$

IV-2 Revue sur l'élasticité non locale :

Selon Eringen (1972, 1983), le champ des contraintes en un point x dans un milieu élastique continu ne dépond pas uniquement du champ de déformation à ce point, mais aussi de la déformation dans tous les autres points du milieu continu. Eringen a appliqué cette hypothèse dans la théorie atomique dynamique et expérimentale de la dispersion des phonons. En effet, les composantes du tenseur des contraintes σ en un point x sont exprimées par :

$$\sigma = \int_V \alpha(|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|, \tau)\, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}')\, \boldsymbol{dx}' \qquad \text{(IV-6)}$$

$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ sont les composantes du tenseur classique macroscopique à un point $\boldsymbol{x}$, et la fonction **du noyau** $\alpha(|x' - x|, \tau)$ représente le module non local, $|x' - x|$ est la distance (selon la norme Euclidienne) et τ est la constante matérielle, elle dépond de la caractéristique de la longueur interne et externe. Eringen (1972, 1983) a déterminé numériquement la forme **fonctionnelle du noyau.** A travers un choix approprié de la fonction **noyau,** Eringen (1983) a montré que l'équation constitutive non locale donnée sous la forme intégrale (voir équation (IV-6)) peut être représentée sous une forme différentielle équivalente par :

$$(1 - \tau^2 L^2 \nabla^2)\sigma = t\,, \quad \tau^2 = \frac{\mu}{L^2} = \left(\frac{e_0 \bar{a}}{L}\right)^2 \qquad \text{(IV-7)}$$

$\mu = (e_0 \bar{a})$, e_0 est une constante matérielle, $\bar{a}$ et L sont respectivement la caractéristique de la longueur interne et externe.

IV-3 La théorie des plaques à quatre variables :

Récemment, on a appliqué une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables au lieu de la théorie de cinq variable utilisée par Tounsi et (Ait Yahia et al, 2014; Ait Amar Meziane et al, 2014; Draiche et al, 2014; Klouche Djedid et al, 2014; Nedri et al, 2014; Zidi et al, 2014; Sadoune et al, 2014; Tounsi et al., 2013d; Bachir Bouiadjra et al, 2013; Bouderba et al , 2013; Kettaf et al, 2013; Bachir Bouiadjra et al, 2012; Bourada et al, 2012; El Meiche et al, 2011) qui ont étudié le comportement vis-à-vis le flambement, la flexion et la vibration des plaques fonctionnellement graduées et des plaques laminées. Dans le présent travail, une nouvelle théorie non locale hyperbolique à quatre variables des plaques est présentée (Belkorissat et al, 2015).

IV-3-1 Champ de déplacement et de déformation :

Le champ de déplacement de la présenté théorie est choisi selon les hypothèses suivantes : (1) les déplacements en plan et transverse sont partitionnés en flexion et en cisaillement ; (2) l'expression de la flexion est similaire à celle donnée par la théorie classique des plaques (CPT) ; et (3) l'expression du cisaillement donne lieu à la variation hyperbolique de la déformation tangentielle et par conséquent à la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que cette contrainte s'annule sur la surface supérieure et inférieure de la plaque.

En se basant sur les hypothèses citées, le champ de déplacement est donné comme suit :

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)-z\frac{\partial w_b}{\partial x}-f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{(IV-8a)}$$

$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)-z\frac{\partial w_b}{\partial y}-f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{(IV-8b)}$$

$$w(x,y,z,t)=w_b(x,y,t)+w_s(x,y,t) \quad \text{(IV-8c)}$$

Avec: $$f(z)=\frac{h\sinh\left(\frac{10z}{h}\right)}{10\cosh(5)}-\frac{h}{100} \quad \text{(IV-8d)}$$

u_0 et v_0 sont respectivement les déplacements d'un point dans le plan médian de la plaque suivant les directions x et y; w_b et w_s sont respectivement les composantes de la flexion et du cisaillement du déplacement transverse; et h est l'épaisseur de la plaque.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement cité dans le système d'équation (IV-8) est exprimé par :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix}+f(z)\begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=g(z)\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}, \quad \text{(IV-9)}$$

Tel que:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x}\\ \frac{\partial v_0}{\partial x}\\ \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial w_s}{\partial y}\\ \frac{\partial w_s}{\partial x}\end{Bmatrix}, \quad \text{(IV-10a)}$$

et :

$$g(z)=1-f'(z) \quad \text{(IV-10b)}$$

IV-3-2 Les relations constitutives:

L'équation constitutive non locale (IV-7) a été récemment employée pour étudier les éléments micro nano structuraux. Cependant, ces travaux sont principalement limités aux problèmes uni-dimensionnels (CNTs, micro/nano poutres, etc.) (Peddieson et al., 2003; Xu, 2006; Reddy, 2008; Heireche, 2008abc; Tounsi et al., 2008; Tounsi et al., 2013abc; Berrabah et al., 2013). A partir de l'équation (IV-7), les relations constitutives non locales bi-dimensionnelles des nano plaques élastiques fonctionnellement graduées peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(IV-11)}$$

(σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{yx}) et (ε_x, ε_y, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}) sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. En introduisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (IV-4), les coefficients de rigidité, C_{ij}, sont exprimés comme suit :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \qquad \textbf{(IV-12a)}$$

$$C_{12} = \frac{\nu\, E(z)}{1-\nu(z)^2}, \qquad \textbf{(IV-12b)}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]}, \qquad \textbf{(IV-12c)}$$

IV-3-3 Les équations du mouvement:

Le principe de Hamilton est utilisé afin d'extraire les équations du mouvement. La forme analytique de ce principe est donnée par (Reddy, 2007) :

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K)\, dt \qquad \textbf{(IV-13)}$$

δU est la variation de l'énergie de déformation; δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \left[\sigma_x\, \delta\varepsilon_x + \sigma_y\, \delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\, \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\, \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\, \delta\gamma_{zx}\right] dAdz \\ &= \int_A \left[N_x\, \delta\varepsilon_x^0 + N_y\, \delta\varepsilon_y^0 + N_{xy}\, \delta\varepsilon_{xy}^0 + M_x^b\, \delta k_x^b + M_y^b\, \delta k_y^b + M_{xy}^b\, \delta k_{xy}^b + M_x^s\, \delta k_x^s \right. \\ &\quad \left. + M_y^s\, \delta k_y^s + M_{xy}^s\, \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s\, \delta\gamma_{yz}^s + S_{xz}^s\, \delta\gamma_{xz}^s\right] dA\end{aligned} \qquad \textbf{(IV-14)}$$

Les résultantes des contraintes N , M , et S sont définies par :

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f)\,\sigma_i\, dz\,, \quad (i = x, y, xy) \qquad S_i = \int_{-h/2}^{h/2} g\,\sigma_i\, dz\,, \quad (i = xz, yz) \qquad \textbf{(IV-15)}$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est exprimée par:

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[\dot{u}\,\delta\dot{u} + \dot{v}\,\delta\dot{v} + \dot{w}\,\delta\dot{w}\right] \rho(z)\, dA\, dz \\ &= \int_A \Big\{ I_0 \left[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s)\right] \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\delta\dot{v}_0\right) \\ &\quad - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\delta\dot{v}_0\right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y}\right) + K_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y}\right) \\ &\quad + J_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y}\right)\Big\} dA\end{aligned} \qquad \textbf{(IV-16)}$$

L'indice supérieur du point indique la dérivée partielle par rapport au temps ***t***; (I_0, I_1, J_1, I_2 J_2, K_2) sont les inerties massiques définies par:

$$\left(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f, z^2, z\, f, f^2\right) \rho(z) dz \qquad \textbf{(IV-17)}$$

Substituant les expressions de δU et δK des équations (IV-14) et (IV-16) dans l'équation (VI-13) et intégrant par parties, puis, collectant les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0$, δw_b et δw_s, les équations du mouvement de la théorie des plaques proposée sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
\delta v_0 &: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
\delta w_b &: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
\delta w_s &: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
\end{aligned} \qquad \textbf{(IV-18)}$$

Substituant les équations (IV-10) et (IV-11) dans les équations (IV-15) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultantes des contraintes sont liées aux déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s) par les relations :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S - \mu\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) = A^s \gamma, \qquad \textbf{(IV-19)}$$

Avec:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \qquad \textbf{(IV-20a)}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \qquad \textbf{(IV-20b)}$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV-20c}$$

$$B^s=\begin{bmatrix} B^s_{11} & B^s_{12} & 0 \\ B^s_{12} & B^s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B^s_{66} \end{bmatrix},\quad D^s=\begin{bmatrix} D^s_{11} & D^s_{12} & 0 \\ D^s_{12} & D^s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D^s_{66} \end{bmatrix},\quad H^s=\begin{bmatrix} H^s_{11} & H^s_{12} & 0 \\ H^s_{12} & H^s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H^s_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV-20d}$$

$$S=\left\{S^s_{xz},S^s_{yz}\right\}^t,\quad \gamma=\left\{\gamma_{xz},\gamma_{yz}\right\}^t,\quad A^s=\begin{bmatrix} A^s_{44} & 0 \\ 0 & A^s_{55} \end{bmatrix}, \tag{IV-20e}$$

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, etc., sont les rigidités de la plaque, définies par:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B^s_{11} & D^s_{11} & H^s_{11} \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B^s_{12} & D^s_{12} & H^s_{12} \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B^s_{66} & D^s_{66} & H^s_{66} \end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2} C_{11}\left(1,z,z^2,f(z),z\,f(z),f^2(z)\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \dfrac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix}dz, \tag{IV-21a}$$

$$\left(A_{22},B_{22},D_{22},B^s_{22},D^s_{22},H^s_{22}\right)=\left(A_{11},B_{11},D_{11},B^s_{11},D^s_{11},H^s_{11}\right), \tag{IV-21b}$$

$$A^s_{44}=A^s_{55}=\int_{-h/2}^{h/2} C_{44}\left[g(z)\right]^2 dz, \tag{IV-21c}$$

Substituant les équations (IV-19) dans les équations (IV-18), nous obtenons les équations d'équilibre en termes des déplacements :

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-B_{11}\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w_b}{\partial x\partial y^2}-B^s_{11}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\ &-\left(B^s_{12}+2B^s_{66}\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x\partial y^2}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left[I_0\ddot{u}_0-I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x}-J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}\right] \end{aligned} \tag{IV-22a}$$

$$\begin{aligned} &\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}-B^s_{22}\frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \\ &-\left(B^s_{12}+2B^s_{66}\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2\partial y}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left[I_0\ddot{v}_0-I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y}-J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}\right] \end{aligned} \tag{IV-22b}$$

$$B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+B_{22}\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}-D_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}$$
$$-2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}-D_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}-2\left(D_{12}^s+2D_{66}^s\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2} \qquad \textbf{(IV-22c)}$$
$$-D_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left[I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right)+I_1\left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\right)-I_2\nabla^2\ddot{w}_b-J_2\nabla^2\ddot{w}_s\right]$$

$$B_{11}^s\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+\left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+B_{22}^s\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}-D_{11}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}-2\left(D_{12}^s+2D_{66}^s\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}- \qquad \textbf{(IV-22d)}$$
$$D_{22}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}-H_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}-2\left(H_{12}^s+2H_{66}^s\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}-H_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}+A_{44}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+A_{55}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}=$$
$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\left[I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right)+J_1\left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\right)-J_2\nabla^2\ddot{w}_b-K_2\nabla^2\ddot{w}_s\right]$$

IV-4 La solution exacte pour les nano- plaques fonctionnellement graduées et simplement appuyées:

Les plaques rectangulaires sont généralement classifiées selon leur type d'appui utilisé. Ici, on est concerné par les solutions exactes des équations (IV-22) pour une nano plaque simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur quatre cotés:

$$v_0=w_b=w_s=\frac{\partial w_s}{\partial y}=N_x=M_x^b=M_x^s=0 \text{ at } x=0,\ a \qquad \textbf{(IV-23a)}$$

$$u_0=w_b=w_s=\frac{\partial w_s}{\partial x}=N_y=M_y^b=M_y^s=0 \text{ at } y=0,\ b \qquad \textbf{(IV-23b)}$$

La solution de Navier définie ci-dessous satisfait les conditions aux limites des équations (IV-23)

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} U_{mn}e^{i\omega t}\cos(\alpha\, x)\sin(\beta\, y) \\ V_{mn}e^{i\omega t}\sin(\alpha\, x)\cos(\beta\, y) \\ W_{bmn}e^{i\omega t}\sin(\alpha\, x)\sin(\beta\, y) \\ W_{smn}e^{i\omega t}\sin(\alpha\, x)\sin(\beta\, y) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(IV-24)}$$

U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} and W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence associée avec (m, n)éme mode, $\alpha=m\pi/a$ et $\beta=n\pi/b$.

Substituant les équations (IV-24) dans les équations (IV-22), les solutions analytiques sont obtenues sous la forme suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \lambda\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV-25}$$

Avec:

$$a_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$$

$$a_{12} = \alpha\,\beta\left(A_{12} + A_{66}\right)$$

$$a_{13} = -\alpha\,[B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\,\beta^2]$$

$$a_{14} = -\alpha\,[B_{11}^s\alpha^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\,\beta^2]$$

$$a_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2$$

$$a_{23} = -\beta\,[(B_{12} + 2B_{66})\,\alpha^2 + B_{22}\beta^2]$$

$$a_{24} = -\beta\,[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\,\alpha^2 + B_{22}^s\beta^2] \tag{IV-26}$$

$$a_{33} = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4$$

$$a_{34} = D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\,\beta^2 + D_{22}^s\,\beta^4$$

$$a_{44} = H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0$$

$$m_{33} = I_0 + I_2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

$$m_{34} = I_0 + J_2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

$$m_{44} = I_0 + K_2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

$$\lambda = 1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement en vibration libre des nano- plaques en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant une nouvelle théorie hyperbolique d'ordre élevé avec la prise en compte de l'effet d'échelle. La formulation proposée est basée sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans des plaques homogènes tout en respectant la condition de la contrainte de cisaillement nulle sur les bords supérieure et inférieure de la plaque.

Chapitre V

Etude de la réponse dynamique des Nano-Plaques en FGM: résultats et discussions

Introduction

Dans cette dernière partie, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire libre des nano- plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM. Le modèle ainsi choisit est basé sur le modèle hyperbolique de déformation en cisaillement à quatre variables avec la prise en compte de l'effet d'échelle. Les effets du paramètre non local, le rapport des dimensions sur la réponse en vibration libre des nano plaques fonctionnellement graduées sont discutés. Quelques exemples illustratifs sont ainsi présentés pour vérifier la présente formulation et ses solutions.

L'analyse de la vibration libre est effectuée en considérant que la surface supérieure de la plaque est purement céramique (Si_3N_4) et sa surface inférieure est purement métal (SUS304). La densité ρ et le module de Young E sont: ρ_c = 2370 kg/m^3, E_c = 348.43e^9 N/m^2 pour Si_3N_4 et ρ_m = 8166 kg/m^3, E_m = 201.04e^9 N/m^2 pour SUS304. Le coefficient de poisson ν est considéré constant, est pris égal à 0.3.

Dans tous les cas, on présente la fréquence non dimensionnelle définie par :

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}} \qquad \textbf{(V-1)}$$

$\bar{\omega}$ est la fréquence naturelle, ρ_c et G_c sont respectivement la densité et le module de cisaillement de la phase en céramique.

Dans l'ordre de valider le présent modèle, quelques exemples numériques sont présentés pour prouver sa performance dans l'analyse de la vibration libre. Dans ce but, on commence en premier lieu par étudier les plaques simplement appuyées pour des différentes valeurs du paramètre non local, de l'épaisseur de la plaque et du rapport des dimensions de la plaque.

V-1 Effet des dimensions de la nano- plaque sur le mode fondamental :

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1 et sont comparés avec ceux obtenus à partir de la théorie du troisième ordre (TSDT), la théorie du premier ordre (FSDT) et la théorie classique des plaques (CPT) développée par Aghababaei and Reddy (2009). Les résultats numériques de la présente théorie ont une bonne concordance avec les résultats des autres théories citées précédemment. Il est à préciser que le présent modèle à uniquement quatre variables, tandis que le nombre des inconnues dans la FSDT (Thai et al, 2012) et la TSDT (Aghababaei and Reddy, 2009) est cinq.

a/b	a/h	μ	*Present*	*TSDT*[(a)]	*FSDT*[(a)]	*CPT*[(a)]
1	*10*	*0*	0.0930	0.0935	0.0930	0.0963
		1	0.0850	0.0854	0.0850	0.0880
		2	0.0787	0.0791	0.0788	0.0816
		3	0.0737	0.0741	0.0737	0.0763
		4	0.0695	0.0699	0.0696	0.0720
		5	0.0659	0.0663	0.0660	0.0683
	20	*0*	0.0238	0.0239	0.0239	0.0241
		1	0.0218	0.0218	0.0218	0.0220
		2	0.0202	0.0202	0.0202	0.0204
		3	0.0189	0.0189	0.0189	0.0191
		4	0.0178	0.0179	0.0178	0.0180
		5	0.0169	0.0170	0.0169	0.0171
2	*10*	*0*	0.0588	0.0591	0.0589	0.0602
		1	0.0555	0.0557	0.0556	0.0568
		2	0.0527	0.0529	0.0527	0.0539
		3	0.0503	0.0505	0.0503	0.0514
		4	0.0481	0.0483	0.0482	0.0493
		5	0.0463	0.0464	0.0463	0.0473
	20	*0*	0.0149	0.0150	0.0150	0.0150
		1	0.0141	0.0141	0.0141	0.0142
		2	0.0134	0.0134	0.0134	0.0135
		3	0.0127	0.0128	0.0128	0.0129
		4	0.0122	0.0123	0.0123	0.0123
		5	0.0117	0.0118	0.0118	0.0118

(a) Aghababaei and Reddy (2009)

Tab. V. 1: Comparaison des fréquences fondamentales ($\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho/G}$) des nano plaques.

$$\left(a = 10,\ E = 30\times10^{6},\ \rho = 1,\ \nu = 0.3\right)$$

Ainsi, la présente théorie ne tient pas compte des facteurs de correction du cisaillement comme le cas de la FSDT. On peut aussi conclure que la théorie locale d'élasticité surestime la fréquence naturelle par rapport à la théorie non locale d'élasticité.

V-2 Effet des dimensions de la nano- plaque sur les trois premiers modes :

La deuxième comparaison est faite sur des plaques fonctionnellement graduées ($n=5$) avec différentes valeurs du paramètre non local, de l'épaisseur de la plaque et du rapport des dimensions de la plaque. Les fréquences naturelles obtenues en appliquant la présente théorie sont comparées avec celles obtenues par Natarajan et al (2012) dans le tableau 2.

a/b	a/h	μ	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
			Ref[b]	Present	Ref[b]	Present	Ref[b]	Present
1	**10**	0	0.0441	0.0432	0.1051	0.1029	0.1051	0.1915
		1	0.0403	0.0395	0.0860	0.0842	0.0860	0.1358
		2	0.0374	0.0366	0.0745	0.0730	0.0746	0.1110
		4	0.0330	0.0323	0.0609	0.0596	0.0610	0.0861
	20	0	0.0113	0.0111	0.0278	0.0274	0.0279	0.0536
		1	0.0103	0.0101	0.0228	0.0224	0.0228	0.0380
		2	0.0096	0.0094	0.0197	0.0194	0.0198	0.0310
		4	0.0085	0.0083	0.0161	0.0158	0.0162	0.0241
2	**10**	0	0.1055	0.1029	0.1615	0.1574	0.2430	0.2397
		1	0.0863	0.0842	0.1208	0.1177	0.1637	0.1587
		2	0.0748	0.0730	0.1006	0.0980	0.1310	0.1269
		4	0.0612	0.0596	0.0793	0.0772	0.0999	0.0968
	20	0	0.0279	0.0274	0.0440	0.0432	0.0701	0.0688
		1	0.0229	0.0224	0.0329	0.0323	0.0464	0.0455
		2	0.0198	0.0194	0.0274	0.0269	0.0371	0.0364
		4	0.0162	0.0158	0.0216	0.0212	0.0283	0.0277

[b] Natarajan et al. (2012)

Tab. V.2 : Comparaison des fréquences naturelles des nano- plaques fonctionnellement graduées $(a=10,\ n=5)$

Des résultats presque identiques sont aussi remarqués pour toutes les formulations. La seule différence est dans le cas des fréquences du mode (1, 3) qui ne coïncident pas avec celles du mode (1,2) des plaques rectangulaires.

V-3 Influence du rapport a/h et du paramètre non local sur le rapport des fréquences:

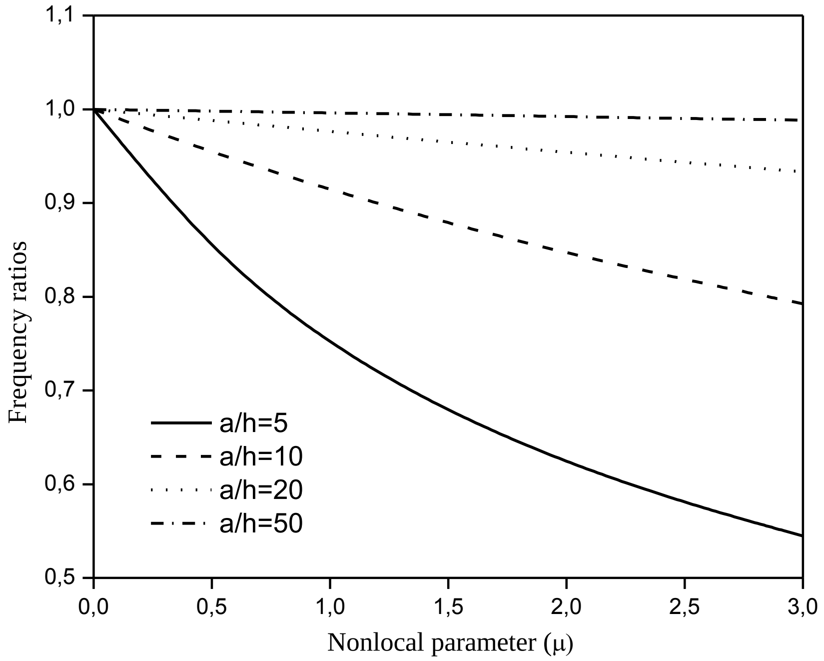


Fig. V. 1: Effet du paramètre non local (μ) et le rapport des dimensions (a/h) sur le rapport des fréquences ($\bar{\omega}_{NL}/\bar{\omega}_{L}$) d'une plaque carrée fonctionnellement graduée ($n=5$).

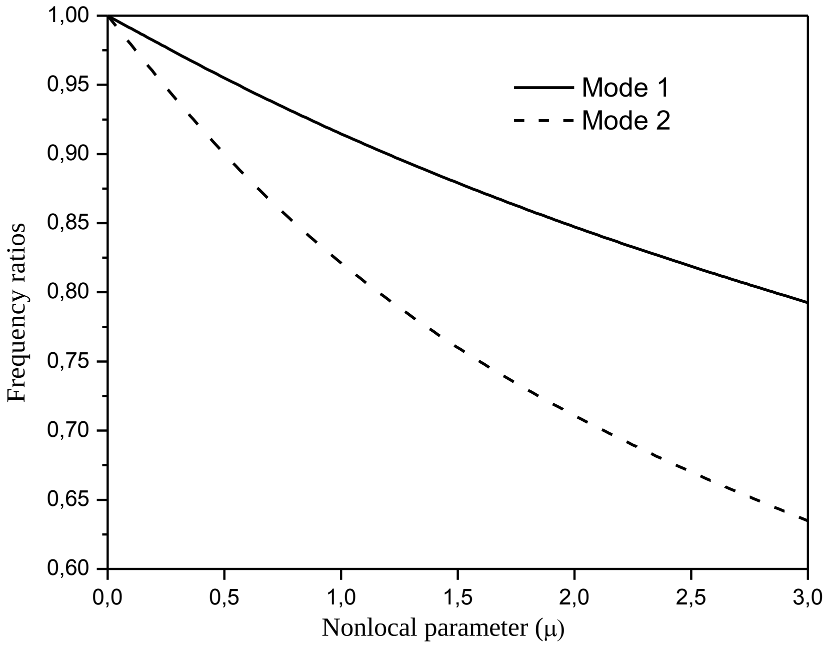


Fig. V. 2: Effet du paramètre non local (μ) sur le rapport des fréquences ($\overline{\omega}_{NL} / \overline{\omega}_{L}$) d'une plaque carrée fonctionnellement graduée pour les deux premiers modes ($a/h = 10$, $n = 5$).

La Fig. V.1 présente la variation du rapport des fréquences ($\overline{\omega}_{NL} / \overline{\omega}_{L}$) en function du paramètre non local (μ) pour différentes valeurs du rapport (a/h).

$\overline{\omega}_{NL}$ et $\overline{\omega}_{L}$ sont respectivement les fréquences non dimensionnelles non locales et locales.

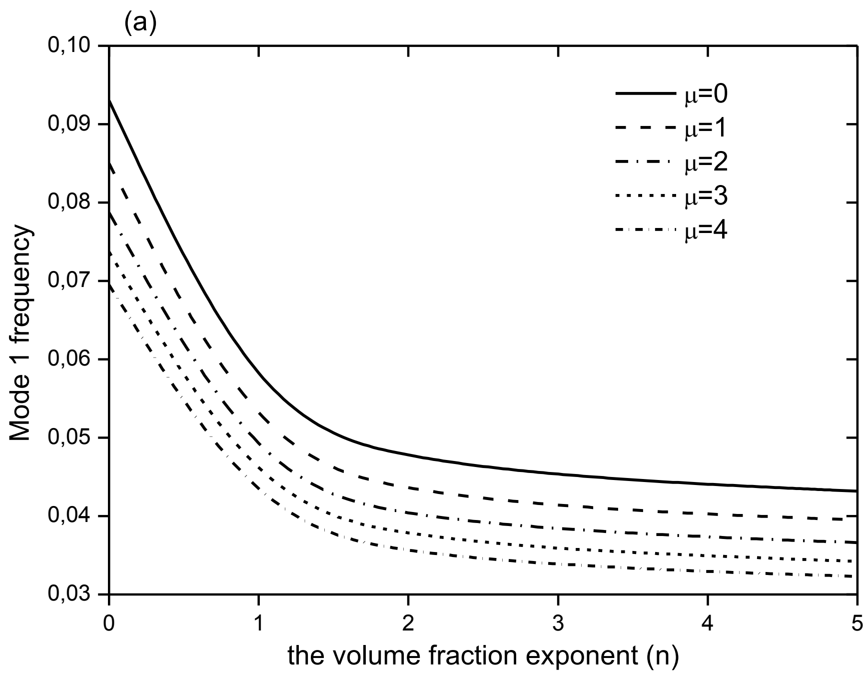
Les résultats indiquent que les réponses variant d'une façon non linéaire avec le paramètre d'échelle. Il est observé qu'un accroissement du paramètre non local mène au décroissement du rapport des fréquences. Cette résultat prouve que l'effet du paramètre non local assoupli la nano plaque.

La majeur remarque obtenue à partir de la figure est que toutes les réponses de la nano plaque fonctionnellement graduée avec un rapport de dimension ($a/h = 5$) sont fortement affectées par le paramètre d'échelle en les comparant avec une nano plaque qui a un rapport d'épaisseur élevé.

A partir de cette observation, on peut conclure que l'étude basée sur le modèle local (classique) des plaques n'est pas convenable, et le modèle non locale des plaques présente des approximations adéquates pour les structures à l'échelle nanométrique.

A partir de la fig. V. 2, on observe que le rapport des fréquences est inférieur à l'unité pour les modes 1 et 2, ce qui indique que l'inclusion de l'effet d'échelle mène à une réduction des fréquences vibratoires. Ces valeurs de fréquence sont amplifiées pour des modes élevés de vibration.

V-4 Influence de l'indice matériel et du paramètre non local sur les deux premiers modes vibratoires:



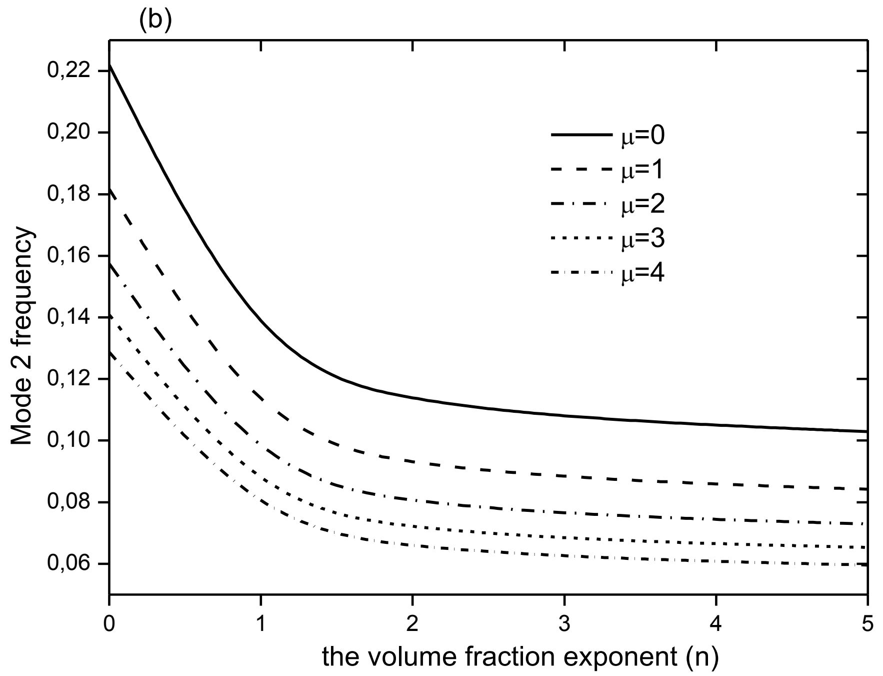


Fig. V.3: Effet de l'indice matériel (n) et du paramètre non local (μ) sur le rapport des fréquences d'une plaque carrée fonctionnellement graduée simplement appuyée ($a/h=10$: (a) premier mode; (b) deuxième mode)

La fig. V.3 montre l'effet de l'indice matériel n sur les deux premiers modes de la fréquence d'une nano plaque fonctionnellement graduée pour différentes valeurs du paramètre d'échelle avec $a/h=10$. On observe que le rapport des fréquences décroit lorsque l'indice matériel n s'accroit, ceci est dû au fait que l'accroissement de cet indice produit un décroissement de la rigidité de la nano plaque fonctionnellement graduée. Les réponses varient brusquement lorsque 0 <n< 2, mais lorsque de n>2 toutes les courbes deviennent presque stables.

Conclusion

Dans cette partie, on a pu comparer le nouveau modèle hyperbolique de déformation en cisaillement d'une nano- plaque simplement appuyée sur ses quatre cotés avec d'autres modèles validés. On peut conclure qu'avec la prise en compte de l'effet d'échelle, cette théorie est non seulement précise, mais fournit aussi une approche élégante et facilement réalisable pour la simulation du comportement vibratoire des structures en matériaux à gradient de propriété, en plus elle améliore le calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie.

Conclusion et perspectives :

A travers ce travail, la vibration libre des nano plaques fonctionnellement graduées est étudiée en employant un nouveau modèle hyperbolique des plaques raffinées à la base des relations constitutives différentielles non locales d'Eringen. En décomposant le déplacement vertical en flexion et en cisaillement, le nombre des inconnues et les équations du présent modèle est réduit à quatre au lieu de cinq. L'influence du paramètre d'échelle, du rapport des dimensions, et de la composition matérielle sur la réponse à la vibration des nano plaques fonctionnellement graduées sont discutées. Les résultats numériques prouvent que l'effet d'échelle joue un rôle considérable sur la vibration des nano plaques fonctionnellement graduées. Le nouveau modèle non local des plaques sou estime les fréquences par rapport au modèle local (classique) des plaques. Par conséquent, l'effet non local doit être considéré dans l'analyse et la modélisation du comportement dynamique des nanostructures. Ainsi, on a prouvé que l'indice matériel à une grande influence sur le comportement des nano plaques fonctionnellement graduées, et les réponses sont contrôlées en utilisant des valeurs propres de l'indice matériel.

Cette formulation pourra bien être utilisée dans l'analyse des nano structures avec l'introduction de l'effet d'étirement (Larbi Chaht et al, 2014; Hamidi et al, 2014; Belabed et al, 2014; Fekrar et al, 2014; Hebali et al, 2014; Bourada et al, 2014; Houari et al, 2013; Saidi et al, 2013; Bessaim et al, 2013;) et sera appliquée dans le future proche.

ABDI ZADEH, H.(1997) , ‘’Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex, « Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'alumine »’’ , *Thèse Docteur D'état, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon Et L'université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.*

Aboudi. J, (1991). ‘’A Unified Micromechanical Approach, Mechanics of Composite Materials.’’ *Elsevier.*

Afaq. K.S (2003a) ‘’Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwiches avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord.’’ *PhD thesis, université Toulouse III-Paul Sabatier, 2003*

Aghababaei, R., Reddy, J.N. (2009), "Non-local third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates" *J. Sound Vib.*, **326**, 227–289.

Aifantis, E.C. (1999), "Strain gradient interpretation of size effects", *Int J Fract*., **95**, 1–4.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions" *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293 – 318.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, Accepted.

Bachir Bouiadjra, M.; Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2012), "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory", *Journal of Thermal Stresses*, **35**, 677–694.

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory" *Structural Engineering and Mechanics*, **48**, 547 – 567.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia ,E.A., Mahmoud, S.R. (2015), ‘’ On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model ‘’ , *Steel and Composite Structures, Vol. 18, No. 4 (2015) 1063-1081.*

Benachour, A., Daouadji Tahar, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites: Part B*, **42**, 1386-1394.

Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M., Semmah, A. (2014), “Chirality and scale rffects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes”, *Composites Part B*, **57**, 21 – 24.

Benveniste .Y, (1987). ‘’A new approach to the application of mori-tanaka’s theory in composite materials.’’ *Mechanics of Materials, 6 : 147–157.*

Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N., Boumia, L. (2008), “The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory”, *Journal of Physics D: Applied Physics*, **41**, 225404.

Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams”, *Structural Engineering and Mechanics*, **48(3)**, 351 – 365.

Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013), “A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **15(6)**, 671 – 703.

BOCH.P CHARTIER. HUTTEPAIN .M (1986) ‘’ tape casting of al2O3/zrO2’’ *laminated composites, 1986.*

BOCH .P(1987) ‘’tape casting of layered composites, in processing of advanced ceramics’’ *.edited by moya and aza sociedad espanola de ceramica y vidrio 1987.*

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **14**, 5 - 33.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

Bouremana, M, Houari, M.S.A, Tounsi, A, Kaci, A, Adda Bedia, E.A. (2013), “A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **15(5)**, 467-479.

Cheng, Z.Q., Batra, R. (2000), “Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate”, *Composites Part B: Engineering*, **2**, 97–106.

Daneshmehr, A., Rajabpoor, A., pourdavood, M. (2014), “Stability of size dependent functionally graded nanoplate based on nonlocal elasticity and higher order plate theories and different boundary conditions”, *International Journal of Engineering Science*, **82**, 84-100.

Chopra, I.(1974), “Vibration of Stepped Thickness Plates.” *Inter. J.Mech. Sci., Vol.16, 1974, pp.337-344.*

CNRS (2005), document réalisé par le centre national de la recherche scientifique en septembre 2005

Cugnoni.J (2004) ‘’ Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites.’’ *Thèse de doctorat de l’école polytechnique fédérale de Lausanne, 2004.*

Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81.

El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **53**, 237-247.

Eringen, A.C. (1967), “Theory of micropolar plates”, *Z Angew Math Phys*, **18**, 12–30.

Eringen, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, *Int J Eng Sci*, **10**, 1–16.

Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *J Appl Phys*, **54**, 4703–4710.

Eshelby, J. D.(1957): ‘’The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems’’. *Proceedings of the Royal Society of London*, 241, 1226, (1957), 376–396.

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795 – 810.

Ferrante, F.J., Graham-Brady, L.L., (2005).’’ Stochastic simulation of non-gaussian/non-stationary properties in a functionally graded plate. ‘’ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194, 1675–1692.*

Fu, Y., Du, H., Zhang, S. (2003), “Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films”, *Mater Lett*, **57**, 2995–2999.

Gorman,D.J(1984). “An Exact Analytical Approach to the Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Mixed Boundary Conditions.” *J. Sound and Vibration, Vol.93, No.2, 1984, pp.235-247.*

Grujicic, M., Zhang, Y., (1998). ‘’Determination of effective elastic properties of functionally graded materials using Voronoi cell finite element method.’’ *Materials Science and Engineering A 251, 64–76.*

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2014), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

Harik, I.E., Liu, X., Balakrishnan, N.(1992), “Analytical Solution to Free Vibration of rectangular plates.” *J. Sound and Vibration, Vol.153, No.1, 1992, pp.51-62.*

Hasanyan, D.J., Batra, R.C., Harutyunyan, S. (2008), “Pull-in instabilities in functionally graded micro-thermo-electro-mechanical systems”, *J Therm Stress*, **31**, 1006–1021.

Hashin, Z.; Shtrikman, S.(1963) : ‘’A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials’’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* 11, 2, (1963), 127–140.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Engineering Mechanics*, **140**, 374 – 383.

Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M., Adda Bedia, E.A. (2008a) “Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity”, *Physica E.*, **40**, 2791–2799.

Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A. (2008b), “Scale Effect on wave propagation of double–walled carbon nanotubes with initial axial loading”, *Nanotechnology*, **19**, 185703.

Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Mechab, I. (2008c), “Sound Wave Propagation in Single – Carbon Nanotubes with Initial Axial Stress”, *Journal of Applied Physics*, **104**, 014301.

Hill. R.(1965) ‘’A self-consistent mechanics of composite materials,*’’Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 213-222, 1965.

Hirai T. and Chen L.(1999), ‘’Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan’’ *, Materials Science Forum, (1999), 308-311, 509-514.*

Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. (2013), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **76**, 102–111.

INRS (2012), document réalisé par l’institut national de recherche et de sécurité en septembre 2012

Janghorban, M., Zare, A. (2011), “Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes with variable thickness by differential quadrature method”, *Physica E*, **43**, 1602–1604.

Jiang W., Nair R., Molian P.(2005) ‘’ Functionally graded mold inserts by laser-based flexible fabrication : processing modeling, structural analysis, and performance evaluation.’’ *Journal of Materials Processing Technology, 166(2):286–293, 2005.*

Karama.M , Afaq. K.S., Mistou . (2003) ‘’Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity’’ *, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.*

Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.

KIEBACK. B ,NEUBRAND. A, H. Riedel (2003), “processing techniques of functionally graded materials*”, Materials science and engineering A362 (2003) 81-105.*

Kirchhoff. G. (1950)‘’Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastichen scheib.’’ *Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, page es 51-88,1950.*

Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Ameur, M. (2014), “A *n*-order four variable refined theory for bending and free vibration of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures*, 17(1), 21-46.

Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2014), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect” *Steel and Composite Structures*, (In press).

Lin, Y.K.(1960) , “Free Vibration of Continuous Skin-Stringer Panels.” *J. Appl. Mech., vol. 27, No.(4), 1960, pp.669-681.*

Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q. (2009), “Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory”, *Int J Solids Struct*, **46**, 1176–1185.

Lu L., Chekroun M., Abraham O., Maupin V., Villain G.(2011) ‘’ Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer’’ . *NDT&E International, 44(2):169–177, 2011.*

Mahamood R.M., Member E.T.A., Shukla M., Pityana S. (2012) ‘’ Functionally Graded Material : An Overview ’’. In Proceedings of the World Congress on Engineering, London, U.K., 2012.

Mantari, J. L. Oktem, A. S. and Guedes Soares.C (2012). ‘’ A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates.’’ *Composites Part B: Engineering, 43:1489–1499, 2012.*

Mindlin. R.D. (1951) ‘’ Influence of rotary inertia and schear on flexural motions of isotropic, elastic plates’’. *Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, 1951.*

Mohammadi-Alasti, B., Rezazadeh, G., Borgheei, A.M., Minaei, S., Habibifar, R. (2011), “On the mechanical behavior of a functionally graded micro-beamsubjected to a thermal moment and nonlinear electrostatic pressure”, *Compos Struct*, **93**, 1516–1525.

Mori.T et Tanaka.K (1973). ‘’Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions’’. *Acta Metallugica*, 21 : 571–574. 1973.

Mortensen A., Suresh S.,(1995) *Int. Mater. Rev. 40 (1995) 239-265.*

MOYA ,J.S, SANCHEZ –HERENCIA, A.J REQUENA, J MORENO R,(1992) ‘’ functionally gradient ceramics by sequential slip casting materials letters’’, *1992, vol .14, p 333-35.*

Müller E., Drasar C., Schilz J., Kaysser W.A.(2003) ‘’ Functionally graded materials for sensor and energy applications’’ . Materials Science and Engineering : A, 362(1-2):17–39, 2003.

Mura, T.(1982): ‘’Micromechanics of Defects in Solids’’. *Martinus Nijhoff, The Hague, The Netherlands, 2nd edn. (1982).*

Natarajan, S., Baiz, P., Ganapathi, M., Kerfriden, P., Bordas, S. (2011), “Linear free flexural vibration of cracked functionally graded plates in thermal environment”, *Computers and Structures*, 89, 1535–1546.

Natarajan, S., Chakraborty, S., Thangavel, M., Bordas, S., Rabczuk, T. (2012), “Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates”, *Computational Materials Science*, **65**, 74–80.

Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mechanics of Composite Materials*, 49(6), 641 – 650.

Nemat-Nasser, S.; Hori, M.(1999): ‘’Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials’’. *Elsevier, Amsterdam, 2nd edn. (1999).*

Nguyen. Viet. Tung. (2004) ‘’Modélisation globale et locale des structures multicouches par élements finis de plaques.’’ *Thèse de doctorat de l’école nationale des ponts et chaussées, 2004.*

Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421–433.

Peddieson, J, Buchanan, G.R., McNitt, R.P. (2003), “Application of nonlocal continuum models to nanotechnology”, *Int J Eng Sci*, **41**, 305–312.

Qian, L., Batra, R., Chen, L. (2004), “Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method”, Composites Part B: Engineering 35 (2004) 685–697.

Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, M.H., Ahmadian, M.T. (2009), “Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials”, In: DETC2009-86254, 3rd international conference on micro- and nanosystems (MNS3) 2009, San Diego, CA, USA.

Reddy J.N. (1997), ‘’Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis.’’ *CRC Press, Boca Raton, 1997.*

Reddy, J.N., (2002), “Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics”, John Wiley & Sons Inc.

Reddy, J.N. (2007), “Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams”, *International Journal of Engineering Science*, **45**, 288–307.

Reddy, J.N., Pang, S.D. (2008), “Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes”, *J. Appl. Phys.*, **103**, 023511.

Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures*, **17(3)**, 321-338.

Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **15**, 221-245.

Sarkar , p. Nicholson (1996) ‘’.electrophoretic deposition mechanisms, kinetics, and application to ceramics ‘’ ,*1996 volume 79N°8*

Shen H.S.,(2009) ‘’Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells ‘’, *CRC Press. 2009, 280 pages.*

Soldatos .K. P. and T. Timarci.T (1993) ‘’A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories.’’ *Composite Structures, 25:165–171, 1993.*

STEFFENS.H.D.DVORAK.M.WEWEL(1990) ‘’ plasma sprayed functionally gradient materials-processing and application,’’ *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sendai Japan 1990.*

TAKAHASHI. M.ITOH. Y KASHIWAYA (1990) ‘’fabrication and evaluation of w/cu gradient material by sintering and infiltration technique’’, *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials Japan 1990.*

Thai, C.H., Nguyen-Xuan, H., Nguyen-Thanh, N., Le, T.H., Nguyen-Thoi, T., Rabczuk, T. (2012), “Static, free vibration and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **91(6)**, 571-603.

Timoshenko S. P et Gere. J. M.(1972) ‘’ Mechanics of materials’’. *New York: D. Van Nostrand Company, 1972.-*

Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, E.A., Semmah, A., Zidour. M. (2013a), “Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes”, *Advances in Nano Research*, **1(1)**, 1 – 11.

Tounsi, A., Semmah, A., Bousahla, A.A. (2013b), ”Thermal buckling behavior of nanobeam usin an efficient higher-order nonlocal beam theory”, *Journal of Nanomechanics and Micromechanics (ASCE)*, **3**, 37 – 42.

Tounsi, A., Benguediab, S., Houari, M.S.A., Semmah, A. (2013c), “A new nonlocal beam theory with thickness stretching effect for nanobeams”, *International Journal of Nanoscience*, **12**, 1350025.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013d), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.

Tounsi, A, Heireche, H, Berrabah, HM, Benzair, A, Boumia, L. (2008), “Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field”, *J Appl Phys*, **104**, 104301.

Touratier.M (1991), ‘’An efficient standard plate theory’’ , *Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.*

Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez-Estrada, O.A., Rabczuk, T., Bui, T.Q., Bordas, S.P.A. (2013), “NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter”, *Composite Structures,* **99**, 309-326.

Wah, T.(1964) , “Vibration of Stiffened Plates.” *Aero. Quarterly, Vol.15, part-3, 1964, pp. 285-298.*

Weng, G.J., (1984). ‘’Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions.’’ *International Journal of Engineering Science 22 (7), 845–856.*

Witvrouw, A., Mehta, A. (2005), “The use of functionally graded Ploy-SiGe layers for MEMS applications”, *Mater Sci Forum*, **492–493**, 255–260.

Xiang, Y., and Wei, G.W.,(2004) “Exact Solution for Buckling and Vibration of Stepped Rectangular Mindlin Plates.”, *Inter. J. Solids and Structures, Vol.41, 2004, pp. 279-294.*

Xu, M. (2006), “Free transverse vibrations of nano-to-micronscale beams”, *Proceedings of the Royal Society*, **462**, 2977–2995.

Yadroitsev I., Bertrand P., Laget B., Smurov I. (2007) ‘’Application of laser assisted technologies for fabrication of functionally graded coatings and objects for the international thermonuclear experimental reactor components’’ . *Journal of Nuclear Materials, 362(2-3): 189–196, 2007.*

Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013), “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Appl Math Model*, **37**, 8324–8340.

Yin, H.M., Sun, L.Z., Paulino, G.H., (2004). ‘’Micromechanicsbased elastic model for functionally graded materials with particle interactions.’’ *Acta Materialia 52, 3535–3543.*

Yu, S.D.(2002), “Free Flexural Vibration of Rectangular Plates Having Single Cracks.” *Aero. and Indus. Eng., Dept. Mech., Ryerson Unev., Toronto, Ontario, Canada M5B2K3.2002.*

Yuan, J., and Dickinson, S.M.,(1998) “the Flexural Vibration of Rectangular Plate Systems Approached by Using Artificial Springs in the Rayleigh-Ritz Method.” *J. Sound and Vibration, Vol.159, 1998,pp.39-55.*

Zhang, J., Fu, Y. (2012), “Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory”, *Meccanica*, **47(7)**, 1649 – 1658.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory” *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34.