

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et Matériaux
Présentée par

HACHEMI Houari

Intitulé de la thèse

**Proposition de nouvelle forme de théorie de
déformation de cisaillement pour l'analyse de
réponse des structures**

Composition du jury :

Mr. TOUNSI Abdelouhed	PR	UDL-SBA	Président
Mr. KACI Abdelhakim	MC A	U. SAIDA	Directeur de thèse
Mr. BOURADA Mohamed	MC A	UDL-SBA	CO-Directeur
Mr. FEKRAR Abdelkader	MC A	UDL-SBA	Examineur
Mr. BOUSAHLA Abelmoumen Anis	MC A	CU-RELIZANE	Examineur
Mr. YOUZERA Hadj	MC A	UDE MASCARA	Examineur

Année universitaire 2018-2019

DÉDICACE

*A la mémoire de mon père
J'espère qu'ils reposent en paix à jamais.*

*A ma mère
Faible témoignage de ma reconnaissance infinie*

*A ma petite famille :
À tous ceux qui m'ont apporté leurs aide.*

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Les prochaines lignes ont pour objet l'expression de ma gratitude et de ma sympathie vis a vis de celles-ci:

En premier lieu, je tiens a exprimer tous mes remerciements a Mr. **KACI Abdelhakim**, Maitre de conférences et Directeur de thèse durant ces travaux de recherche. Sa sympathie, sa constante bonne humeur, son expertise et son soutien ont été très appréciables durant ces années d'encadrement.

Aussi, je tiens a mettre noir sur blanc toute ma gratitude a l'égard de Mr. **BOURADA Mohamed**, Maitre de conférences et co-directeur de cette thèse, je le remercie très sincèrement pour sa confiance, son soutien et son amitié.

J'adresse également mes sincères remerciements à monsieur le professeur **TOUNSI Abdelouahed** pour ses multiples conseils , son soutien morale et d'avoir accepter de présider la soutenance.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs les Docteurs: **FEKRAR Abdelkader**, **BOUSAHLA Abelmoumen Anis** et **YOUZERA Hadj** qui ont bien voulu rapporter sur ce travail et me faire l'honneur de participer au jury de thèse. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer ce manuscrit.

De nombreuses personnes m'ont également soutenu en dehors du cadre professionnel pour achever ces travaux. Je voudrais adresser un grand merci à toute ma famille pour son soutien constant tout au long de mes études et de mon doctorat, et à tous mes amis.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés et tous les enseignants de la faculté de technologie de l'Université Dr. Moulay Tahar de Saida.

Résumé

RÉSUMÉ

Dans ce travail, une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement pour l'analyse en flexion de plaques graduellement fonctionnelles est développée. La théorie actuelle implique seulement trois inconnues et trois équations gouvernantes comme dans la théorie classique des plaques, mais elle est capable de capturer précisément les effets de déformation de cisaillement, au lieu de cinq ou quatre inconnues comme dans les théories de déformation de cisaillement bien connues du premier ordre et d'ordre élevé. Le facteur de correction de cisaillement n'est donc pas requis et satisfait les conditions limites de la nullité des contraintes de cisaillement à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur, selon une loi de puissance simple de la fraction volumique des constituants. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels et résolues en utilisant la solution de Navier. La fondation élastique est modélisée comme base élastique à deux paramètres. Les résultats sont vérifiés avec les résultats connus dans la littérature. Les influences exercées par la déformation transversale en cisaillement, le rapport longueur/largeur de la plaque, le rapport d'élanement longueur/épaisseur, l'influence des paramètres de la fondation élastique et les distributions des fractions volumiques sont étudiées. Des études de vérification montrent que la théorie proposée est non seulement précise et simple dans la résolution du comportement en flexion des plaques fonctionnellement graduées mais aussi comparable aux autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur qui contiennent plus d'inconnues.

Mots-clés: une théorie simple à 3 inconnues, flexion, plaques fonctionnellement graduées, fondation élastique

ABSTRACT

In this work, a new simple shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates is developed. The present theory involves only three unknown and three governing equation as in the classical plate theory, but it is capable of accurately capturing shear deformation effects, instead of five or four as in the well-known first shear deformation theory and higher-order shear deformation theory. A shear correction factor is, therefore, not required, and satisfies the stress-free boundary conditions on the upper and lower surfaces of the plate. The material properties of the functionally graded plates are assumed to vary continuously through the thickness, according to a simple power law distribution of the volume fraction of the constituents. Equations of motion are obtained by utilizing the principle of virtual displacements and solved via Navier's procedure. The elastic foundation is modeled as two parameter elastic foundation. The results are verified with the known results in the literature. The influences played by transversal shear deformation, plate aspect ratio, side-to-thickness ratio, elastic foundation, and volume fraction distributions are studied. Verification studies show that the proposed theory is not only accurate and simple in solving the bending behaviour of functionally graded plates, but also comparable with the other higher-order shear deformation theories which contain more number of unknowns.

Keywords: a simple 3-unknown theory; bending; functionally graded plates, elastic foundation

ملخص

في هذا العمل ، تم تطوير نظرية تشوه القص بسيطة جديدة لتحليل الانحناء للصفائح المتدرجة وظيفيا. تشمل النظرية الحالية على ثلاثة معادلات مجهولة و ثلاثة معادلات حاکمة كما في النظرية الكلاسيكية (التقليدية) للصفائح الرفيعة ، ولكنها قادرة على التقاط آثار تشوه القص بدقة ، بدلاً من خمسة أو أربعة مجاهيل كما في نظرية تشوه القص من الرتبة الأولى المعروفة و نظرية تشوه القص من الرتبة الأعلى. ولذلك ، فإن عامل تصحيح القص ليس مطلوباً ، ويلبي الشروط الحدودية الخالية من الإجهاد على الأسطح العلوية والسفلية للوحة. من المفترض أن تتغير خواص المواد للصفائح المتدرجة وظيفيا بشكل مستمر من خلال السماكة ، وفقا لتوزيع بسيط لقانون الطاقة لجزء حجم للمكونات. يتم الحصول على معادلات الحركة من خلال استخدام مبدأ الحركة الظاهري وحلها عبر إجراء Navier. تم تصميم الأساس المرن على شكل قاعدة مرنة بمعاملان. يتم التحقق من النتائج مع النتائج المعروفة في المجال. يتم دراسة التأثيرات التي تلعبها تشوه القص المستعرضة ، ونسبة العرض إلى جانب اللوحة ، ونسبة الجانب إلى السمك ، والأساس المرن ، وتوزيع معامل الحجم. تظهر دراسات التحقق أن النظرية ليست دقيقة وسهلة الفهم فحسب ، بل يمكن مقارنتها بنظريات تشوه القص الأعلى الأخرى التي تحتوي على عدد أكبر من المجهول.

الكلمات المفتاحية : نظرية بسيطة ذات 3 مجاهيل؛ الانحناء. لوحات متدرجة وظيفيا ، أساس مرن

Liste des figures

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1	Schéma de la microstructure à gradation continue avec des constituants en métal-céramique	7
Figure I.2	représentation schématique de la fonction matérielle dans différentes structures	8
Figure I.3	Illustration des caractéristiques thermiques entre les composites CLC et FGM	9
Figure I.4	Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus	10
Figure I.5	Classification des matériaux à gradient de propriétés	11
Figure I.6	Schéma de principe du concept de gradation des matériaux	12
Figure I.7	Les trois types de matériaux à gradient de propriétés et leurs applications .	12
Figure I.8	Différents types des matériaux à gradients de propriétés	13
Figure I.9	Schéma de principe de la projection thermique par flamme	15
Figure I.10	Illustration schématique montrant le processus de la méthode centrifuge ...	16
Figure I.11	Dispositif de coulage en bande	17
Figure I.12	Représentation schématique de la technique de dépôt par électrophorèse.....	18
Figure I.13	Vue d'ensemble générale de la configuration EPD.....	18
Figure I.14	: Volume de la suspension circulante comme une fonction au temps durant le processus FGM.....	19
Figure I.15	Illustration du processus de coulée en barbotine.....	20
Figure I.16	Processus de base de dépôt au laser	20
Figure I.17	Schéma de principe de la sédimentation.....	21
Figure I.18	Les principaux domaines d'application des FGM.....	22
Figure I.19	Géométrie d'une plaque en FGM.....	23
Figure I.20	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	24
Figure I.21	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	25

Figure I.22	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	26
Figure I.23	Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs.....	27

CHAPITRE II

Figure II.1	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff	30
Figure II.2	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin	31
Figure II.3	Illustration de la plaque d'ordre élevé	32
Figure II.4	Traces des fonctions de cisaillement transverse étudiées	34

CHAPITRE III

Figure III.1	Système de coordonnées et géométrie pour plaques FG rectangulaires sur une fondation élastique Pasternak	40
---------------------	--	----

CHAPITRE IV

Figure IV.1	Effet du paramètre du module Winkler K_w sur la déflexion centrale non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différents rapports longueur/ épaisseur $a/h = 10$ avec $K_s = 10$	52
Figure IV.2	Effet du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s sur la déflexion centrale non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différents rapports longueur/ épaisseur $a/h = 10$ avec $K_w = 100$	52
Figure IV.3	Variation de la contrainte axiale non dimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$	53

Figure IV.4	Variation de la contrainte axiale non dimensionnelle ($\overline{\sigma_x}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s avec $K_w = 100$ et $a/h = 10$	54
Figure IV.5	Variation de la contrainte tangentielle longitudinale non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xy}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$...	55
Figure IV.6	Variation de la contrainte tangentielle longitudinale non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xy}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s avec $K_w = 100$ et $a/h = 10$	55
Figure IV.7	Variation de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xz}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$	56
Figure IV.8	Variation de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xz}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s avec $K_w = 100$ et $a/h = 10$	57

Liste des tableaux

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE IV

Tableau IV.1	Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque FGM	51
Tableau IV.2	Comparaison de la déflexion non dimensionnelle \hat{w} de plaques carrées minces isotropes simplement appuyée sous une charge uniformément répartie ($a/h = 100$).....	52
Tableau IV.3	Effet de la fraction volumique exponentielle et des paramètres de la fondation élastiques sur les dimensions et les contraintes d'une plaque rectangulaire FGM sous charge sinusoïdale. ($a = 10h, b = 2a, q_0 = 100$)	53

Liste des notations

LISTE DES NOTATIONS

CVD	Chemical vapour deposition (le dépôt chimique en phase vapeur)
PVD	Physical vapour deposition (le dépôt physique en phase vapeur)
SPS	Spark plasma sintering (le frittage par plasma à étincelles)
PS	Plasma spray
EBD	Electron beam deposition (le dépôt par faisceau d'électrons)
IBD	Ion beam deposition (le dépôt par faisceau d'ions)
VPS	Vacuum plasma spray (pulvérisation plasma sous vide)
HVOF	High velocity oxy fuel (l'oxygène à haute vitesse)
EPD	Electrophoretic deposition (le dépôt électrophorétique)
MMC	Metal matrix composites (composites à matrice métallique)
PMC	Polyester matrix composites
PM	Powder metallurgy (la métallurgie des poudres)
CLPT	Classical Plate Theory
FSDT	First Shear Deformation Theory
HSDT	High Shear Deformation Theory
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes x et y
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x, y et z ,
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z) = f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
β	Paramètre du modèle de déplacement
σ_x, σ_y	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformation dans la direction x, y
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations de distorsion
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$	Composantes de la Déformation des déplacement en membrane
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	Composantes de la Déformation des déplacement du à la flexion
$\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}$	Composantes de la Déformation des déplacement du au cisaillement
w_b, w_s	Les déplacement transversal de flexion et de cisaillement
f_e	La densité de la force de réaction de la fondation
q	Chargement répartie
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux

M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage membrane/ flexion
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
a_{ij}	coefficients de la matrice de rigidité
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
∇	Laplacien

Table des matières

TABLE DES MATIERES

RESUME

ABSTRACT

ملخص

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES NOTATIONS

	Introduction Générale.....	1
Chapitre I :	Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)	
	I.1. Introduction.....	6
	I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	7
	I.3. Histoire des MGF.....	9
	I.4. Types de FGM.....	11
	I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	14
	I.5.1. Processus en phase solide.....	14
	5.1.1. Métallurgie des poudres.....	14
	I.5.2. Processus de dépôt.....	14
	5.2.1. Technique de dépôt en phase vapeur.....	14
	5.2.2. Dépôt par projection thermique.....	15
	I.5.3. Processus en phase liquide.....	16
	5.3.1. Coulée centrifuge.....	16
	5.3.2. Coulage en bande.....	17
	5.3.3. Dépôt par électrophorèse.....	17

5.3.4. Coulage Séquentiel en barbotine.....	19
5.3.5. Dépôt laser.....	20
5.3.6. Sédimentation.....	21
I.6. Domaine d'application.....	21
I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	22
I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	23
I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	24
I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	25
I.7.3. Le modèle d'homogénéisation de Mori Tanaka.....	27
I.8. Conclusion.....	27
 Chapitre II : Théories des plaques	
II.1. Introduction.....	28
II.2. Modèles analytiques des plaques.....	29
II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	29
II.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	30
II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	31
II.3. Les fonctions raffinées de cisaillement transverse.....	33
II.4. Modèles de théories raffinées.....	36
II.4.1. Modèles à cinq variables.....	36
II.4.2. Modèles à quatre variables (RPT).....	37
II.5. Nécessité de théories simple de déformation par cisaillement.....	37
II.5. Conclusion.....	38
 Chapitre III: Etude analytique de la flexion des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement	

III.1. Introduction.....	39
III.2. Formulation théorique.....	40
III.2.1. Cinématique du modèle proposé de plaque.....	40
III.2.2. Relations constitutives.....	41
III.2.3. Equations gouvernantes.....	43
III.2.4. Les équations d'équilibre en termes de déplacements.....	44
III.3. Solutions analytiques.....	46
III.4. Conclusion.....	49
Chapitre IV: Résultats et discussions de l'étude analytique de la flexion des plaques FGM	
IV.1. Introduction.....	50
IV.2. Résultats de l'analyse statique.....	50
IV.3. Validation analytique du modèle proposé.....	51
IV.4. Conclusion.....	60
Conclusion Générale.....	61

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction

La capacité à comprendre et à manipuler les matériaux a été fondamentale pour notre développement technique au fil du temps. Les scientifiques et les ingénieurs reconnaissent l'importance de l'utilisation des matériaux innovants pour des raisons techniques, économiques et environnementales. En 1984, le concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM: Functionally Graded Material) a été introduit par des spécialistes des matériaux dans la région de Sendai au Japon (Koizumi 1997). Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre qui élimine ainsi la concentration de contrainte existante dans les composites stratifiés, ces problèmes sont évités ou réduits par une variation progressive de la fraction volumique des constituants plutôt que de la modifier brusquement à travers l'interface (Hirano et Yamada 1988). La fonction de loi de puissance (Bao et Wang 1995, Jin et Paulino 2001) et la fonction exponentielle (Delale et Erdogan 1983, Erdogan et Chen 1998) sont couramment utilisées pour décrire les variations des propriétés matérielles des FGMs.

Les FGMs conviennent donc à diverses applications, telles que l'aérospatiale, l'aéronautique, l'automobile, la marine et d'autres applications structurelles en génie civil comme par exemple les panneaux de toiture solaire et de mur jusqu'à l'isolation thermique des bâtiments et les couches minces optiques (verre).

Par conséquent, diverses théories ont été développées par des chercheurs pour prédire le bon comportement en flexion des plaques composites. Kirchhoff (Kirchhoff 1850) a développé une théorie classique des plaques (CPT) pour l'analyse des plaques minces, qui ne convient pas aux plaques épaisses en raison de la négligence de l'effet de déformation par cisaillement. Le CPT ignore les effets de déformation de cisaillement et fournit des résultats acceptables pour les structures minces fonctionnelles graduées (FG) (Abrate 2008, Arefi 2015, Pradhan 2015a, Darilmaz 2015). Cependant, il sous-estime la déflexion et surestime la

charge de flambage et la fréquence des plaques modérément épaisses ou épaisses (Ghugal et Shimpi 2002).

Reissner (Reissner 1945) et Mindlin (Mindlin 1951) ont développés une théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) en considérant l'effet de la déformation transversale de cisaillement pour l'analyse des plaques. Mais, cette théorie ne satisfait pas la condition de contrainte de cisaillement nulle en haut et en bas de la plaque et nécessite un facteur de correction de cisaillement difficile à trouver car il dépend des géométries, des propriétés matérielles et des conditions aux limites de chaque problème (Ferreira et al., 2009). Un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser la différence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant présumé (Castellazzi et al., 2013).

Les limitations des CPT et FSDT ont forcé le développement de théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) qui tiennent compte des effets de déformation de cisaillement par des variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou des déplacements transversaux dans l'épaisseur et n'exigent aucun facteur de correction de cisaillement et satisfont aux conditions de contrainte de cisaillement nulles des surfaces supérieure et inférieure des plaques (Bourada et al.2012, Bessaim et al.2013, Ahouel et al.2016, Ait Amar Meziane et al.2014, Ait Atmane et al.2015, Mahiet al.2015, Ait Yahia et al.2015,; Attia et al.2015, Belabed et al.2014, Larbi Chaht et al.2015, Belkorissat et al.2015, Bounouara et al.2016, Bousahla et al.2016, Bennoun et al.2016, Beldjelili et al.2016, Draiche et al.2016, Bellifa et al.2017, Benchohra et al.2017, El-Haina et al.2017, Menasria et al.2017, Meksi et al.2017, Bouafia et al.2017, Besseghier et al.2017, Klouche et al.2017, Zidi et al.2017, Khetir et al.2017).

Diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont été rapportées dans la littérature, qui considère l'effet de déformation transversale et satisfait les conditions de contrainte de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques sans facteur de correction de cisaillement.

La Théorie de déformation de cisaillement de second ordre de Whitney et Sun (1973), théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre de Reddy (1984), Reddy et Phan (1985) , Hanna et Leissa (1994).

La plupart des nouvelles théories de déformation de cisaillement émergentes d'ordre supérieur reposent sur cinq inconnues conduisant à cinq équations directrices. Zenkour (

2006) présente une formulation générale pour les plaques de matériaux à gradient de propriétés en utilisant une théorie de déformation par cisaillement généralisée, basé sur la fameuse théorie des plaques d'ordre supérieur (HPT) de Reddy (2000). Zenkour (2009) étudier les plaques FGM sur une fondation élastique avec une nouvelle théorie sinusoïdale raffinée à cinq variables. Mahi et al. (2015) ont étudiés la flexion et la vibration des plaque isotrope, FGM, sandwiches et laminé avec une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique a cinq variables. Bennoun et al. (2016) ont développé une nouvelle théorie raffinée à cinq variables pour l'analyse des plaques FGMs sandwiches.

Une approche très récemment développée est la théorie d'ordre élevé des plaques raffinées à quatre variables (RPT) qui ne contient que quatre paramètres inconnus, satisfait les conditions de contrainte nulle sur les surfaces libres et n'a pas besoin du facteur de correction de cisaillement dans la formulation. Cette théorie a été introduite pour la première fois par Senthilnathan et al. (1987) développent une théorie des plaques à quatre variables pour l'étude du flambement des plaque. Senthilnathan et al. (1988) ont étudié la vibration des plaques laminées par la même théorie .Shimpi (2002) développe une théorie raffinée à quatre variables. Tounsi et al. (2013) ont étudié la réponse en flexion des plaques sandwiches FGM en utilisant une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables dans des conditions de chargement thermique et thermomécanique. Daouadji et al. (2013) ont étudié le comportement statique des plaques FGM avec un nouveau modele de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Thai et al. (2013) ont développé une HSDT simple pour analyser les plaques FGM en flexion et vibration libre.

De nombreux problèmes d'importance pratique considérable peuvent être liés à la solution de plaques reposant sur une fondation élastique. Les chaussées en béton armé des autoroutes et des pistes d'aéroport, les dalles de fondation des bâtiments, etc., sont des applications directes bien connues . Pour décrire l'interaction entre la plaque et le milieu élastique, différents types de modèles de milieu élastique ont été proposés. Le modèle le plus simple est le modèle de Winkler à un paramètre (Winkler 1867) qui modélise le milieu élastique sous la forme d'une série de ressorts élastiques linéaires verticaux étroitement espacés et mutuellement indépendants. Une représentation plus réaliste et généralisée du milieu élastique peut être réalisée au moyen d'un modèle de milieu élastique à deux paramètres. Un de ces modèles physiques est le modèle élastique de type Pasternak (Pasternak 1954). Le premier paramètre du modèle de Pasternak représente la pression normale alors

que le second paramètre tient compte de la contrainte de cisaillement transverse due à l'interaction de la déformation de cisaillement du milieu élastique environnant.

Ait Atmane et al. (2010) ont analysé la vibration libre de plaques de FG supportées simplement reposant sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak par une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Benyoucef et al. (2010) ont examiné la réponse statique de plaques de FG simplement appuyées reposant sur une fondation élastique en utilisant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique. Boudierba et al. (2013) ont utilisé une théorie de la plaque raffinée pour étudier la réponse thermomécanique en flexion des plaques à gradient fonctionnelle reposant sur les fondations élastiques de Winkler-Pasternak. Said et al. (2014) étudier la réponse en flexion de plaques graduellement fonctionnelles reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak en utilisant le concept de surface neutre physique. Taibi et al. (2015) ont présenté une théorie simple de la déformation par cisaillement pour le comportement thermomécanique de plaques sandwich fonctionnelles sur des fondations élastiques. Akavci (2016) a présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyser de la de flexion, vibration et flambement des plaques sandwich FGM basé sur une fondation élastique.

2. Objectifs de la thèse

Considérant que, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ne nécessitent pas un facteur de correction de cisaillement, mais leurs équations de mouvement sont plus compliquées que celles du FSDT. Après une évaluation globale des études antérieures dans la littérature pour l'analyse des plaques, L'objectif de cette thèse doctorale vise à développer une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement d'ordre élevé permettant d'analyser la réponse des structures avec une haute précision.

Le premier avantage de cette théorie déformation de cisaillement d'ordre élevé est la variation parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur qui satisfait aux conditions au limite des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement.

Le deuxième avantage de la nouvelle théorie proposée contient seulement trois inconnues et trois équations d'équilibre moins que les autres théories de la déformation de cisaillement d'ordre élevé. En effet, contrairement aux théories mentionnées précédemment, le nombre de variables dans la théorie actuelle est le même que dans la théorie classique (CPT).

A la fin, Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Dans cette étude, des solutions analytiques de flexion sont obtenues pour une plaque isotrope en FG reposante sur une fondation élastique et la précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

3. Plan de la thèse

La thèse débute par une introduction générale qui s'articule ensuite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion générale et des perspectives:

Dans **le premier chapitre**, nous présentons une rapide revue sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs historiques, leurs évolutions et les domaines d'utilisation, ensuite une synthèse bibliographique donne un aperçu général des méthodes de la détermination de leurs caractéristiques mécaniques, basant sur les aspects fondamentaux du comportement des matériaux hétérogènes

Le second chapitre concerne l'état de l'art sur les différentes théories étendues à l'analyse des plaques en FGM et leurs modèles, une lecture critique de leurs principes de base et leurs hypothèses sont aussi discutés. On trouve également une présentation détaillée des théories d'ordre supérieur et leurs raffinements. Bien évidemment, le nombre de variables dépend de la théorie adaptée, ce qui diminue considérablement le taux de calculs.

Le troisième chapitre est réservé à la présentation de la théorie simple raffinée des plaques pour l'étude de la réponse en flexion des plaques FG reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak .

Le chapitre quatre est réservé à la validation et l'évaluation des résultats de notre simple théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé développé dans cette thèse, et la comparaison avec les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I

Généralités sur

les matériaux à gradient de

propriétés

CHAPITRE I: GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES (FGM)

I.1.Introduction

Depuis l'âge du bronze» vers 4000 avant JC ou l'humanité a découvert le bronze; qui est un alliage entre le cuivre et l'étain et jusqu'à nos jours les matériaux et les métaux purs sont de moins à moins utiliser dans les applications d'ingénierie en raison de la demande d'exigences de propriété contradictoires avec la seule raison d'améliorer les propriétés du matériau. L'alliage traditionnel est limité dans le cas de deux matériaux différents avec des températures de fusion très éloignées; il devient prohibitif de combiner ces matériaux par ce processus.

Le développement des matériaux composites a permis de leurs associer des propriétés spécifiques au sein d'une même pièce, alors ils sont une classe de matériaux avancés, composés d'un ou de plusieurs matériaux combinés dans des états solides ayant des propriétés physiques et chimiques distinctes. Les matériaux composites s'endommagent dans des conditions de travail extrêmes (haute température) par un processus appelé décollement (séparation des fibres de la matrice).

Pour résoudre ce problème, les chercheurs ont élaborés un nouveau matériau appelé matériau à gradient de propriétés fonctionnelles (en anglais : **F**unctionally **G**raded **M**aterials "FGM"), ces matériaux s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, le module d'élasticité de cisaillement et la densité de matériau, varient en douceur et en continu dans les directions préférées, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux, les FGMs les plus courants allient la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques.

I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau concept pour la réalisation de propriétés et / ou de fonctions innovantes qui ne peuvent être obtenues avec des matériaux homogènes conventionnels. Dans sa structure la plus simple, il se compose d'un matériau d'un côté et de l'autre d'un second matériau, et une couche intermédiaire dont la structure, la composition et la morphologie varient doucement d'un matériau à l'autre de l'ordre du micron (Niino et al. 1987) voir (fig. I.1).

Le concept de "matériau à gradient de propriétés" se réfère clairement à la réalisation de propriétés innovantes suivies d'une inhomogénéité qui ne peut être réalisée par des matériaux conventionnels homogènes, en mettant l'accent sur les deux caractéristiques essentielles suivantes. La première caractéristique essentielle consiste à adapter artificiellement la composition chimique et la microstructure à partir de la prédiction quantitative du profil de distribution des propriétés pour obtenir la fonction souhaitée. La deuxième caractéristique essentielle inclut la disponibilité de processus de fabrication qui a une bonne reproductibilité, en tant que technologie avancée pour le gradient de propriétés. Les procédés doivent pouvoir produire un profil précis de la composition chimique et doivent pouvoir être directement fabriqués à partir des résultats des calculs effectués par les concepteurs de matériaux.

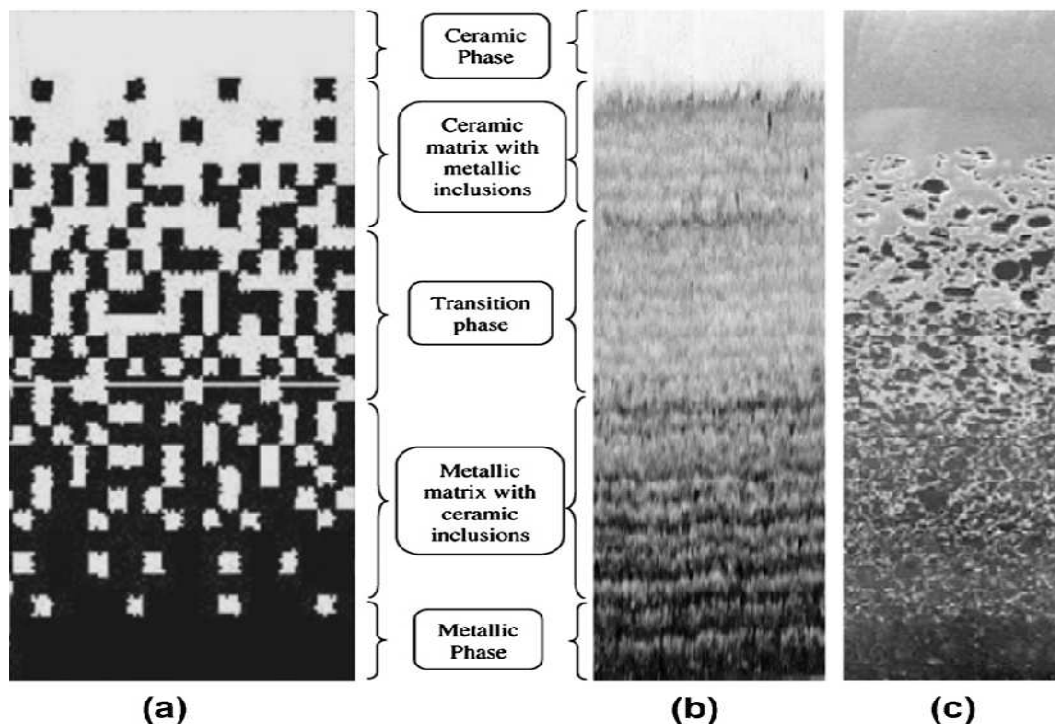


Figure I.1:Schéma de la microstructure à gradation continue avec des constituants en métal-céramique

(a) Microstructure à gradation progressive (b) Vue agrandie et (c) FGM en céramique-métal

(Jha et al., 2013)

Le matériau à gradation de propriétés fonctionnelle (FGM) c'est un matériau révolutionnaire qui appartient à une classe de matériaux avancés avec des propriétés variables sur une dimension changeante (Atai et al., 2012).

La variation des propriétés en douceur d'un matériau à l'autre dans les FGMs élimine les interfaces pointues existant dans les matériaux composites où les défaillances sont déclenchées (Wang 1983). Il remplace cette interface pointue par une interface dégradée qui produit une transition en douceur d'un matériau à l'autre (Niino et al., 1987). L'une des caractéristiques uniques des FGM est la possibilité de personnaliser un matériau pour une application spécifique (Shanmugavel et al., 2012).

Les propriétés de tels matériaux peuvent être décrites par la fonction $f(x)$. Dans les matériaux homogènes, cette fonction est constante comme dans (Fig I.2.a). Dans le cas d'une jonction de deux fonctions matérielles différentes, $f(x)$ a une forme de déformation (Fig I.2.b). Dans les FGM, cette fonction matérielle doit être continue ou quasi-continue (EL-Wazery et EL-Desouky 2015).

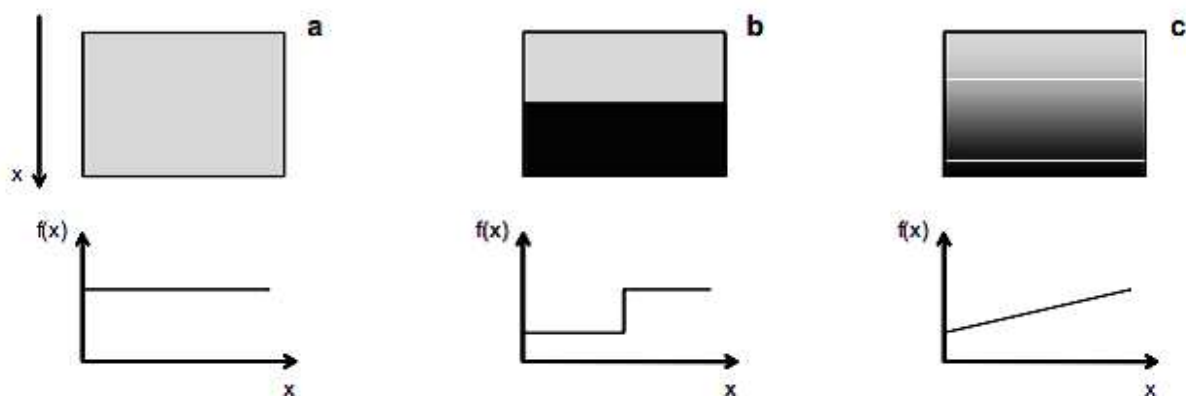


Figure I.2: représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures;

(a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM (EL-Wazery et EL-Desouky 2015)

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle, le concept consistait à supprimer l'interface pointue (le saut dans les contraintes thermiques) qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. De l'illustration (Fig I.3), nous voyons que la FGM présente une distribution des contraintes thermiques plus douce que celle des composites stratifiés classiques (CLC) (Cho et Oden 2000).

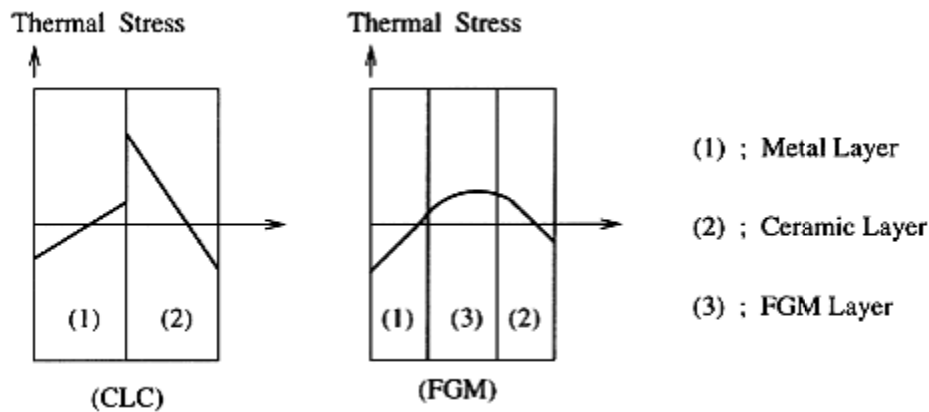


Figure I.3: Illustration des caractéristiques thermiques entre les composites CLC et FGM
(Cho et Oden 2000)

Les principaux avantages de l'utilisation des FGM sont (Zhu et Abbaschian 2000):

1. la réduction des contraintes thermiques;
2. réduction des contraintes thermiques aux endroits critiques;
3. diminution des transitions de contrainte brusques à l'interface;
4. réduction du facteur d'intensité de contrainte (force motrice pour la propagation de fissure)
5. augmentation de la force de liaison interfaciale.

I.3. Histoire des FGM

Avec le développement des nouvelles industries et de nouveaux processus modernes, de nombreuses structures servent dans des environnements thermiques, ce qui aboutit à une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle (FGM). Les FGMs ont été initialement conçues comme des matériaux de barrière thermique pour les applications structurelles aérospatiales et les réacteurs de fusion. Ils sont maintenant développés pour une utilisation générale en tant que composants structurels dans des environnements à très haute température.

Déjà en 1972, Bever et Duwez et Shen et Bever reconnaissaient l'utilité des composites à gradient de propriétés. Cependant, leur travail n'a eu qu'un impact limité, probablement dû au manque de méthodes de production adaptées aux FGMs à cette époque (Kieback et al., 2003).

Il a fallu 15 ans de plus avant que des recherches systématiques sur les procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriétés soient menées dans le cadre d'un programme national de recherche sur les FGM au Japon.

Le concept de matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle (FGM) a été développé au Japon par Niino en 1984 (Koizumi 1993). Ils ont été utilisés comme matériaux «super résistants» dans les systèmes de propulsion et les revêtements de fuselage des engins spatiaux afin de réduire les contraintes thermiques générés et d'améliorer la résistivité thermique (Shabana et Noda 2001).

Cependant, le travail n'a été entrepris que plus tard. En 1987, un vaste projet national a été lancé au Japon, intitulé Recherche sur les technologies de base, développement de matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle, et relaxation des contraintes thermiques, visant à développer des matériaux résistants à la chaleur (haute température) pour le système de propulsion des navette spatial. Des efforts de recherche intensifs ont été consacrés au projet. En conséquence, le concept de FGM a été virtuellement montré et le terme FGM (matériau à gradient de propriétés) a été introduit pour la première fois plus précises en 1986 (Bohidar et al., 2014). Le premier article sur la fabrication des FGMs a été publié en 1987. La publication des documents concernant les FGMs s'est considérablement développée après les deux colloques internationaux sur les FGMs (tenus à Sendai en 1990 et à San Francisco en 1992). Il y a également eu de petits projets de recherche sur les composites avec des fonctions similaires réalisées individuellement par des chercheurs du monde entier (Kawasaki et Watanabe 1997).

L'Atelier sur les matériaux à gradient de propriétés a été organisé en Allemagne en 1993, en mars 1994 un autre atelier sur les FGMs a eu lieu aux États-Unis. À l'heure actuelle, des colloques internationaux sur les MGFs se tiennent régulièrement dans le monde entier.

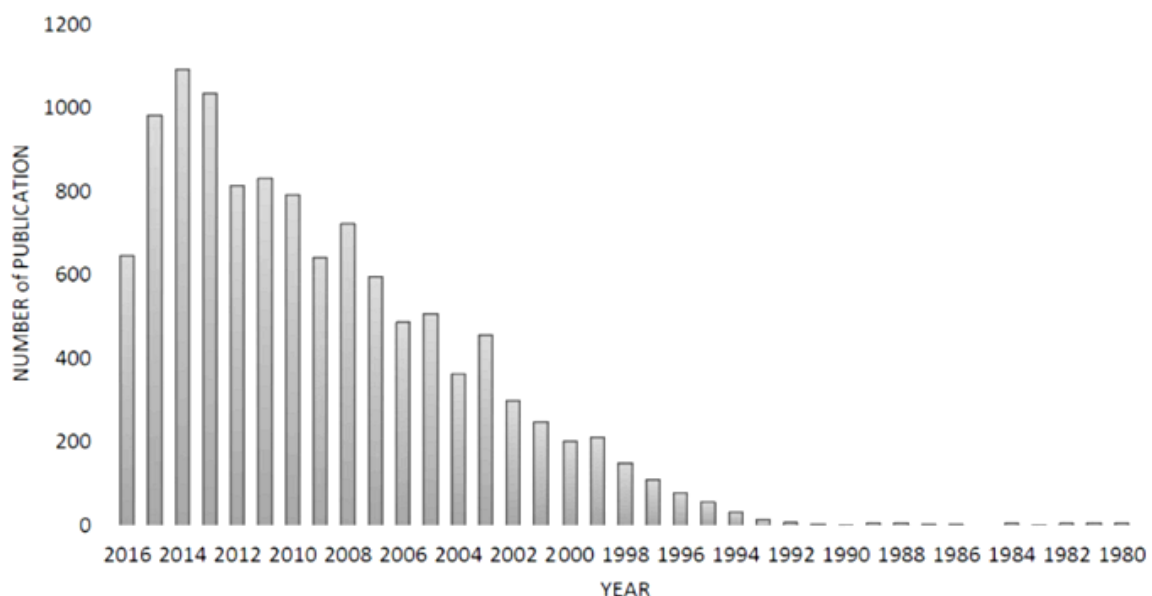


Figure I.4: Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus (Naebe et Shirvanimoghaddam 2016)

L'intérêt pour les FGM a récemment augmenté en raison de la capacité à produire des matériaux avec des propriétés sur mesure qui sont des candidats appropriés pour de nombreuses applications de haute technologie telles que l'aérospatiale, le génie biologique et les industries nucléaires. À ce titre, le nombre de publications dans ce domaine de recherche a augmenté de façon exponentielle au cours des 20 dernières années (Naebe et Shirvanimoghaddam 2016). La figure I.4 illustre le nombre annuel de publications sur les FGM.

I.4. Types de FGM:

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés, le concept consistait à supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. A cet effet deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux fonctionnelle à gradient de propriétés. L'un est basé sur la structure du matériau et l'autre sur la taille des matériaux à gradient de propriétés de manière fonctionnelle. Comme le montre la figure I.4, les FGM peuvent être divisés en deux groupes principaux basés sur la structure des matériaux: FGM structurée en continue et structurée de manière discontinue. Dans les FGM continues, il existe un gradient continu d'un matériau à l'autre. Cependant, en cas de FGM discontinue, le gradient de matière est fourni en couches. En fonction de la taille des matériaux, les FGM sont classées en deux types principaux: les FGM minces et les FGM massive. Les FGM minces ont des sections relativement minces, comme les revêtements de surface, tandis que les FGM massive constituent un volume complet de matériaux.

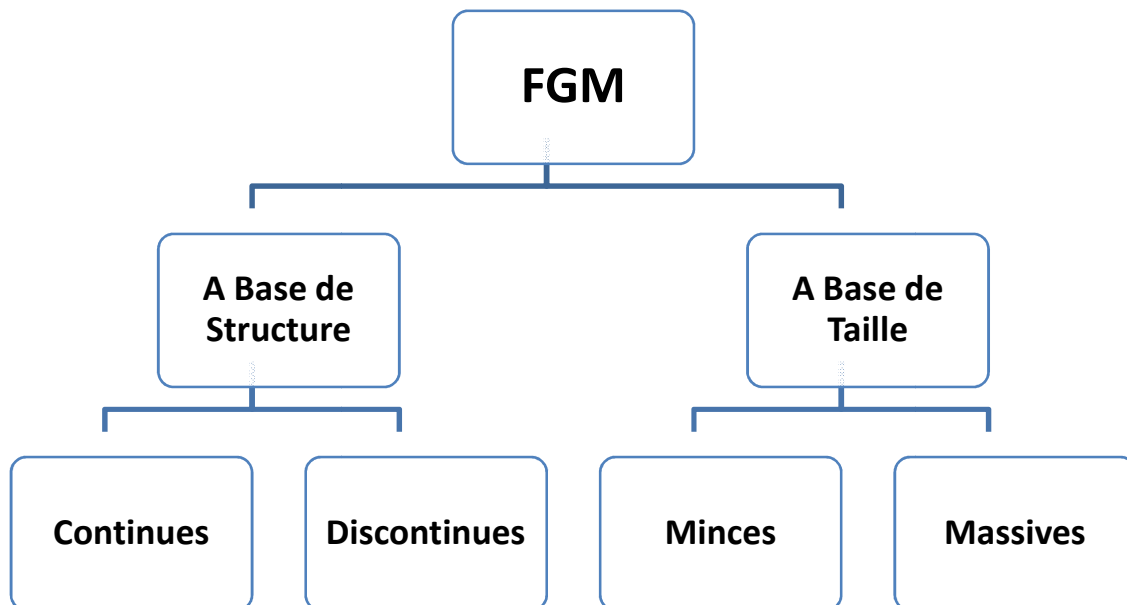


Figure I.5: Classification des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle

Il existe deux types de structures graduées qui peuvent être préparées dans le cas des FGM, à savoir la structure continue représentée sur la figure I.6 (a) et la structure par étapes (couches) représentée sur la figure I.6 (b) (Udupa et al., 2014).

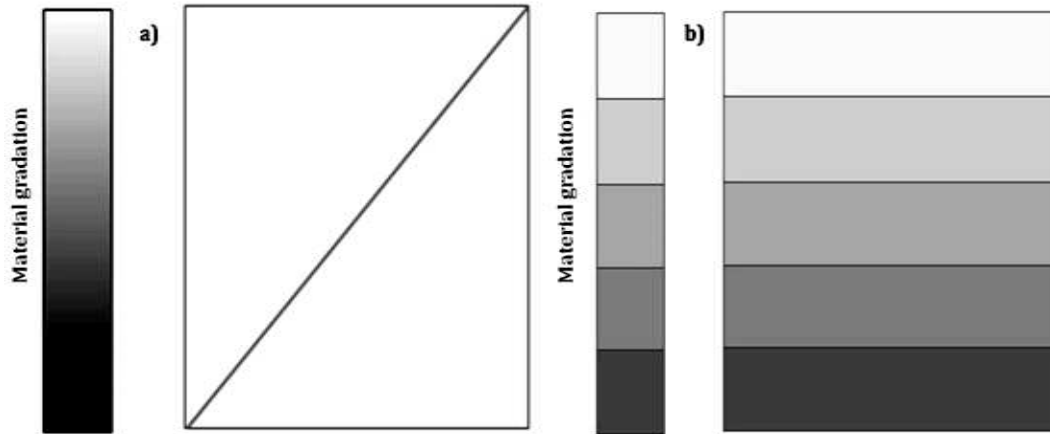


Figure I.6: Schéma de principe du concept de gradation des matériaux (Udupa et al., 2014)

Dans le cas d'une structure à gradation continue, le changement de composition et de microstructure se produit continuellement avec la position. En revanche, dans le cas de structure à gradation pas à pas, la caractéristique de la microstructure évolue progressivement, donnant naissance à une structure multicouche avec une interface existant entre des couches discrètes.

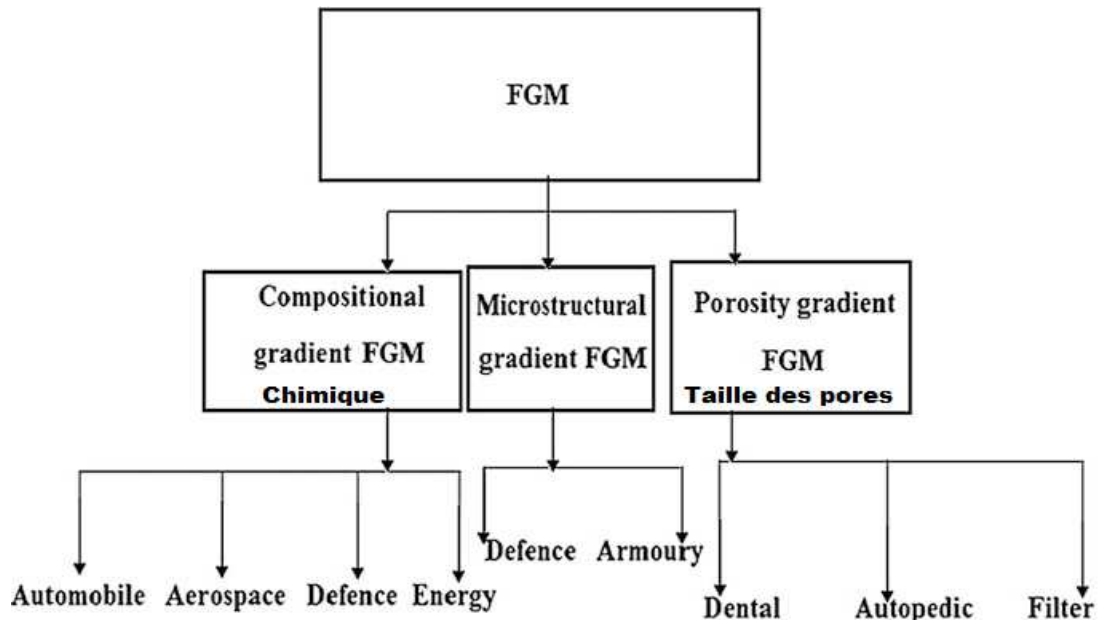


Figure I.7: Les trois types de matériaux à gradient de propriétés et leurs applications (Mahamood et Akinlabi 2017)

L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné la mise au point de différents types de FGM, le type d'application envisagée détermine généralement le type de FGM à utiliser.

Les matériaux ayant une composition, une microstructure ou une porosité changeantes à travers le volume du matériau sont appelés matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle (FGM) (Mahamood et Akinlabi 2017).

Les différents types de FGM comprennent les FGM à structure de gradient de porosité et de taille des pores, les FGM à structure à gradient chimique (composition) et les FGM à structure à gradient microstructural (voir figure I.7).

Selon la nature du gradient, les FGM peuvent être regroupées en types suivants (voir Fig. I.8) (Bharti et al., 2013).

- 1) Type de gradient de fractions (Fig.I.8a)
- 2) Type à gradient de forme (Fig. I.8b)
- 3) Type de gradient d'orientation (Fig. I.8c)
- 4) Type de gradient de taille (du matériau) (Fig. I.8d)

Selon le nombre de directions que les propriétés ont changé, nous pouvons distinguer les FGM à une dimension, à deux dimensions ou à trois dimensions

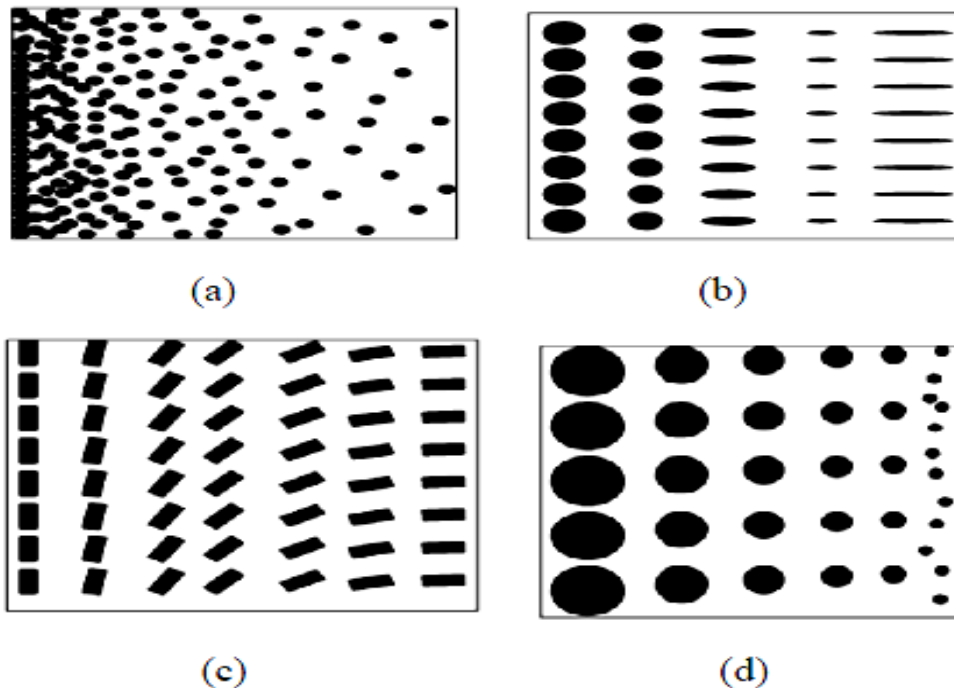


Figure I.8: Différents types des matériaux à gradients de propriétés : a) type gradient de fraction, b) type à gradient de forme, c) type à gradient d'orientation et d) à gradient de taille (Bharti et al., 2013).

I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

En résumé, la plupart des méthodes impliquées dans le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle sont classées en trois parties (Jamaludin et al., 2013; Rajan et Pai 2009; Naebe et Shirvanimoghaddam 2016):

- 1) Processus à l'état solide.
- 2) Processus de dépôt .
- 3) Processus à l'état liquide.

Les matériaux à gradient de propriétés à faible épaisseur se présentent généralement sous la forme de revêtements de surface, il existe un large éventail de procédés de dépôt de surface à choisir en fonction des exigences de service et du procédé. Les FGM massive sont fabriquées en utilisant des méthodes telles que la métallurgie des poudres, le moulage par centrifugation et d'autres techniques de fabrication .

Plusieurs techniques sont disponibles pour produire des matériaux à gradient de propriétés (FGM). Peu d'entre eux sont décrits ci-dessous en détail.

I.5.1. Processus en phase solide

I.5.1.1. Métallurgie des poudres (Powder Metallurgy PM)

La technique de la métallurgie des poudres (PM) est utilisée pour produire des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle FGM du type massive avec une structure discontinue (par couches) (Watari et Yokoyama 2001). Le processus est réalisé en utilisant des étapes telles que le pesage et le mélange de la poudre selon la distribution spatiale préconçue selon les exigences fonctionnelles, l'empilement et le pilonnage des poudres prémélangées et enfin le frittage.

On appelle frittage le processus de liaison qui s'établit entre particules voisines lorsqu'une poudre ou un mélange de poudres compact est chauffé à haute température. Différentes techniques de frittage existent. Il est possible de distinguer deux grandes familles de techniques. La première est caractérisée par l'absence de pression mécanique, ce sont les techniques de frittage naturels. La seconde technique est quant à elle caractérisée par l'application d'une pression mécanique, uniaxiale ou isostatique, pendant le cycle de frittage (chauffage, palier et refroidissement). Ce sont les techniques de frittage sous charge.

I.5.2. Processus de dépôt

I.5.2.1. Technique de dépôt en phase vapeur (Vapour Deposition Technique)

Les techniques de dépôt en phase vapeur décrivent une variété de méthodes de dépôt sous vide qui peuvent être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base. Toutes ces techniques peuvent être utilisées uniquement pour produire des FGM minces.

Différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Celles-ci consomment beaucoup d'énergie et produisent des gaz toxiques comme sous-produits (Groves et Wadley 1997). Les autres techniques de dépôt pouvant déposer des revêtements à gradient fonctionnel mince sont le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par faisceau d'ions (IBD) et la synthèse à haute température (SHS). Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont pas rentables pour produire des FGM de type massive (épaisses). Les épaisseurs des FGMs fabriqués par ces techniques de projection ou de déposition sont inférieures à 0,5 mm.

le CVD était considéré comme l'un des procédés les plus attrayants pour la fabrication de semi-conducteurs et était de plus en plus utilisé pour le revêtement de circuits électroniques. Plus tard, la technique CVD a été progressivement adoptée pour la fabrication des céramiques avancées, et des cellules solaires (Choy 2003).

I.5.2.2. Déposition par projection thermique

La projection thermique est une technique par laquelle une structure est recouverte de matériaux fondus par pulvérisation, les matériaux fondus seront les matériaux à gradient de propriétés qui forme les couches de revêtement.

Le dépôt par projection thermique se décline en quatre techniques différentes : la projection par flamme, la projection par arc électrique, la projection par plasma (VPS) et la projection thermique à froid. Pour l'ensemble de ces techniques, la fabrication du FGM tient au contrôle de la distribution de la poudre dans la buse de projection thermique.

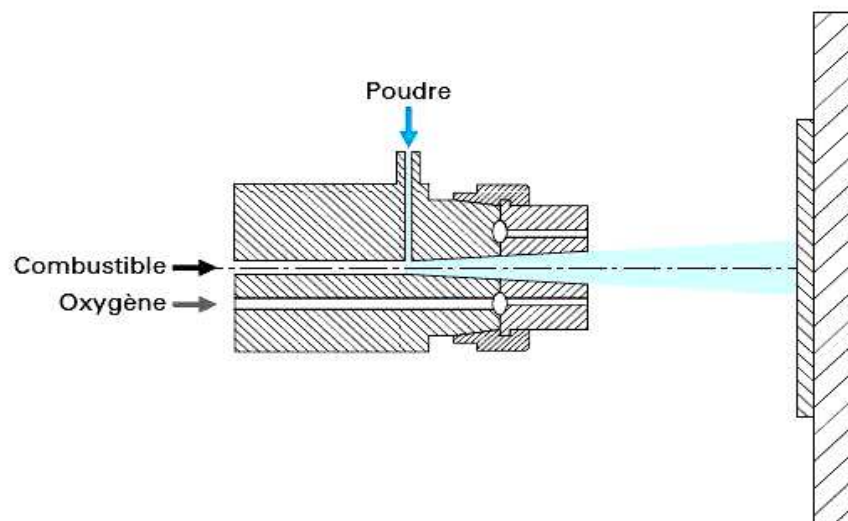


Figure I-9 : Schéma de principe de la projection thermique par flamme (Proner 1999)

En fonction de la méthode utilisée pour la projection thermique, on utilise diverses températures de gaz de 12 000 à 16 000 ° C pour une pulvérisation au plasma contre 3 000 ° C pour une pulvérisation de poudre et HVOF (l'oxygène à haute vitesse) et 4 000 ° C pour une pulvérisation de fil électrique (Dorfman 2002).

Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que le revêtement fournit est épais (20 µm à mm) sur une grande surface à une vitesse de dépôt élevée meilleure que les autres procédés de revêtement tels que l'électro déposition et le dépôt en phase vapeur.

I.5.3. Processus en phase liquide

I.5.3.1. Coulée centrifuge (Centrifugal casting)

La méthode centrifuge est capable de produire des FGM de type massive structurées en continu. Il utilise la force de gravité à travers le filage de la moisissure pour produire des matériaux à gradient de propriétés (Watanabe et al., 2009). La différence de densité de matière et la rotation du moule produisent des FGM. Cette méthode présente deux inconvénients: cette méthode ne peut produire que des FGM de forme cylindrique et le type de gradient pouvant être produit est limité à cause de la difficulté à assurer la parfaite maîtrise ou le contrôle du mouvement des grains de poudre au sein du milieu visqueux qui constitue le bain métallique fondu.

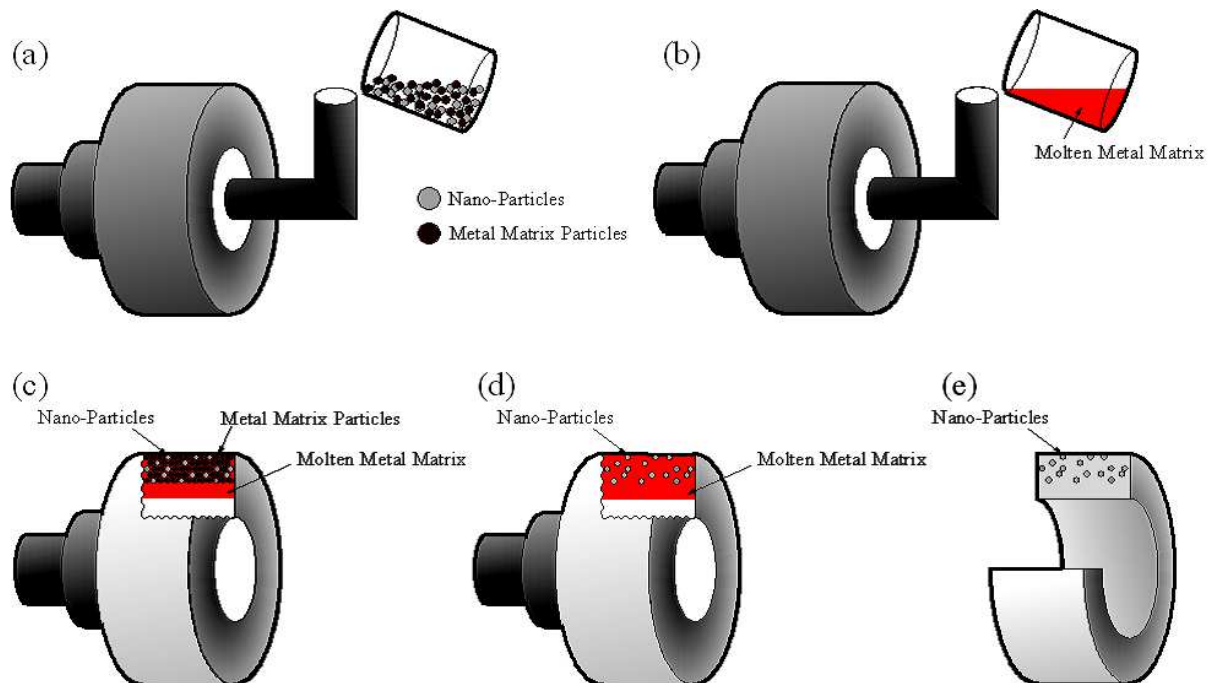


Figure I.10. Illustration schématique montrant le processus de la méthode centrifuge (Watanabe et al., 2009).

I.5.3.2. Coulage en bande (Tape casting)

Le coulage en bande c'est une méthode populaire appliquée à la production à grande échelle de substrats céramiques multicouches. Le processus de coulage en bande est illustré à la FigI.11. Une barbotine de suspension contenant une poudre est distribuée sur un film support dans un type de coulée mince. L'épaisseur de la bande coulé est généralement comprise entre $25\ \mu\text{m}$ et $1\ \text{mm}$. Des bandes minimales jusqu'à $1\ \mu\text{m}$ pourraient être produites (Zhu et al., 2011).

Les différentes étapes de la coulée en bande sont les suivantes: 1) barbotine de développement qui contient de l'eau, des particules de poudre et du liant, 2) séchage du corps vert ou du ruban adhésif, 3) consolidation du matériau dense du ruban. Afin de réaliser le FGM, des bandes de différents composites ont été préparées. Des unités carrées ont été découpées des bandes vertes qui ont ensuite été placées les unes sur les autres.

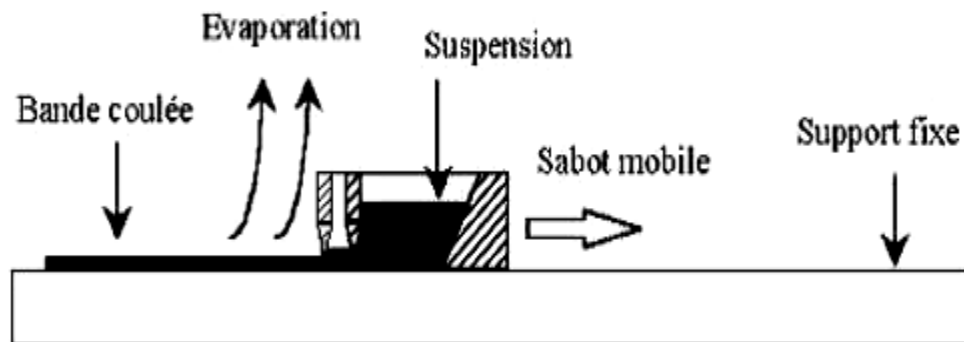


Figure I.11 : Dispositif de coulage en bande (Chartier et Boch 2001).

L'épaisseur des bandes appliquées est de l'ordre de $200\ \mu\text{m}$. La densification du ruban est obtenue par frittage. Des gradients étagés de matériaux céramiques-céramiques et céramiques-céramiques sont produits par coulée de rubans de différentes compositions et stratification ultérieure.

I.5.3.3. Dépôt par électrophorèse

Le dépôt électrophorétique consiste en différents procédés industriels tels que l'électrodéposition, le revêtement électrophorétique, l'électrodéposition anodique, l'électrodéposition cathodique et la peinture électrophorétique. Les scientifiques russes ont reconnu le dépôt électrophorétique (EPD) en observant un mouvement induit par un champ électrique de particules d'argile dans l'eau. Le premier travail expérimental réalisé aux États-

Unis portait sur le dépôt de particules thorine (ThO_2 :Dioxyde de thorium, solide blanc réfractaire) sur une cathode de platine en tant qu'émetteur d'électrons. La vulgarisation de la méthode EPD au cours des années 1980, en raison de son application à la fabrication de différents outils de base en céramique, a été une étape importante dans l'historique des processus EPD (Besra et Liu 2007).

Le principe de la technique de dépôt par électrophorèse se base sur la migration de particules chargées en suspension. Le déplacement des particules est généré par l'application d'un champ électrique entre deux électrodes. Un dépôt se forme alors sur une électrode comme l'illustre le schéma de la figure I.12.

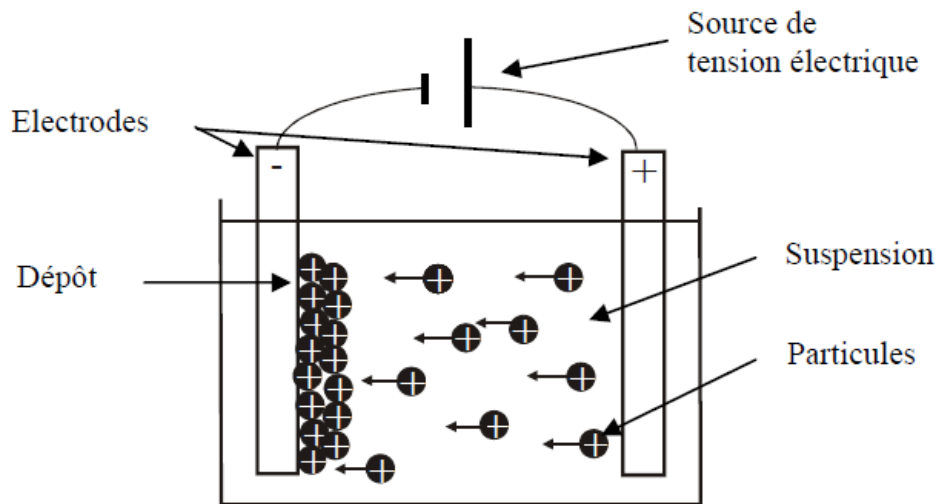


Figure I.12: Représentation schématique de la technique de dépôt par électrophorèse.

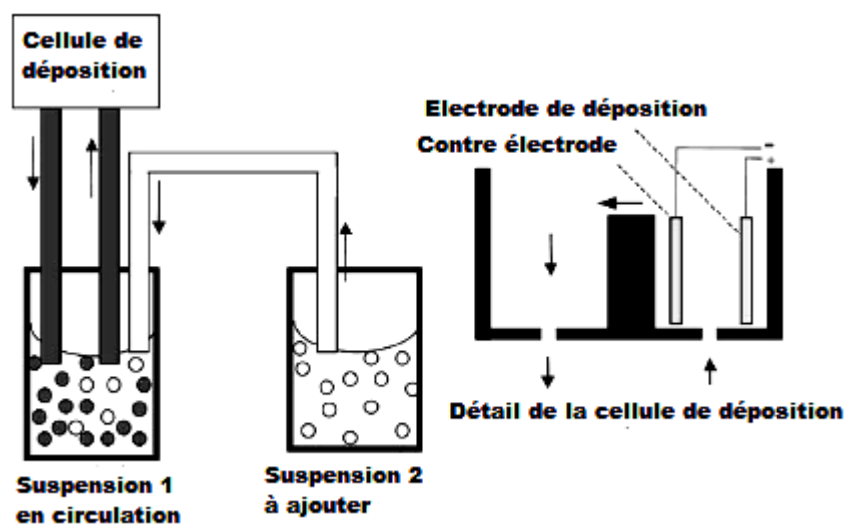


Figure I.13 : Vue d'ensemble générale de la configuration EPD (Put et al. 2003)

Le procédé EPD pour produire des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle est illustré schématiquement sur la figure I.13.

On considère un processus dans lequel les particules de poudre sont d'abord déposées à partir d'une suspension 1 de démarrage homogène. pendant le temps t_s (figure I.14). Dans une seconde étape, une seconde poudre est ajoutée à vitesse constante à la suspension circulante à partir d'une seconde suspension 2 homogène. L'addition de la deuxième poudre et donc la création d'un profil de gradient est arrêtée à l'instant t_f . Dans une troisième étape, le dépôt électrophorétique se poursuit jusqu'au temps t_e .

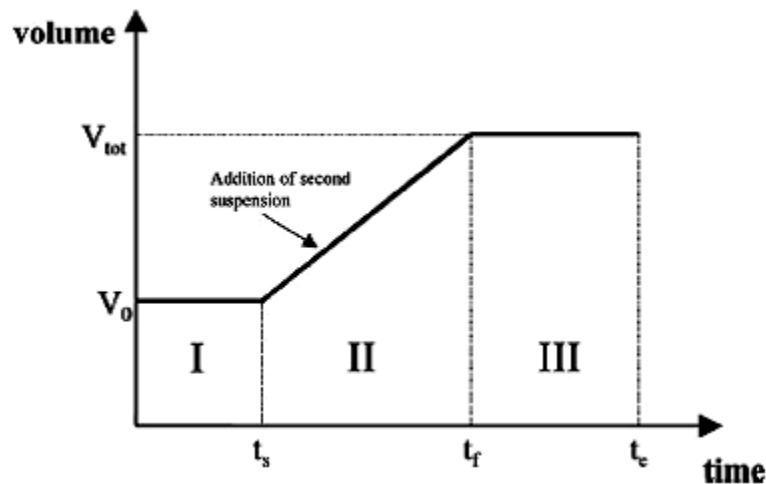


Figure I.14 : Volume de la suspension circulante comme une fonction au temps durant le processus FGM (Put et al. 2003)

I.5.3.4. Coulage Séquentiel en barbotine (Slip casting)

La coulage en barbotine c'est une méthode de mise en forme à base de poudre traditionnellement appliquée dans l'industrie de la céramique. En général, la coulée en barbotine est un processus de filtration où la suspension de poudre est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes, le liquide est retiré de la suspension (barbotine) et les particules de poudre sont forcées vers les parois. Un gradient sera formé en changeant la composition ou la taille des grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Cette technique nécessite également une étape de consolidation ultérieure, au cours de laquelle la poudre est densifiée (frittée) pour arriver à une structure en gradient FGM comme résultats (Katayama 2011).

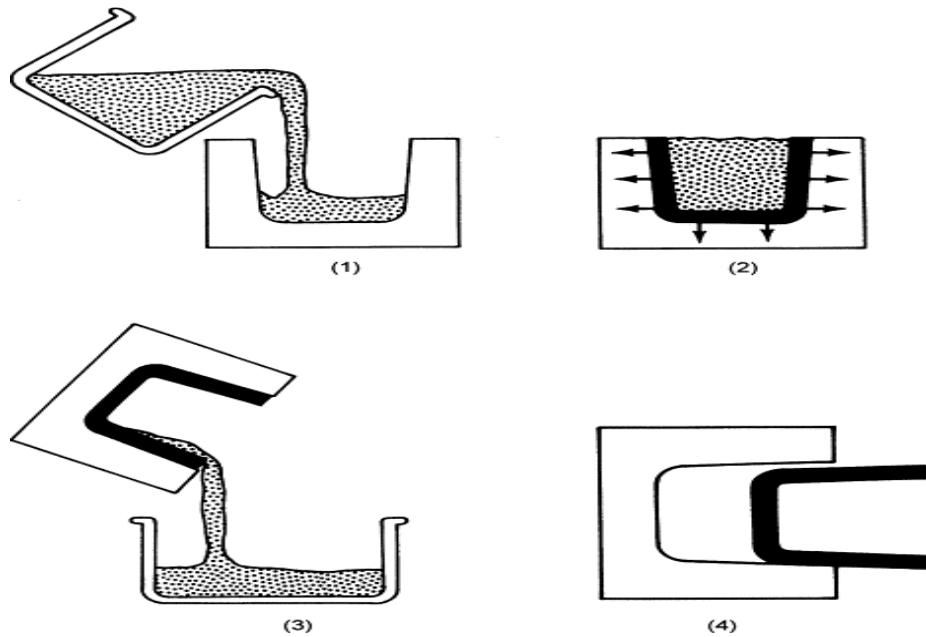


Figure I.15: Illustration du processus de coulée en barbotine. (Souza et Mansur 2004).

I.5.3.5. Dépôt laser

La génération d'un laser à haute intensité pour le dépôt de poudre de métal ou de céramique sur le substrat est la principale méthode de dépôt par laser.

Le dépôt au laser est une technique très appropriée lorsqu'il existe une différence significative de la température de fusion de la matrice et des matériaux de renforcement.

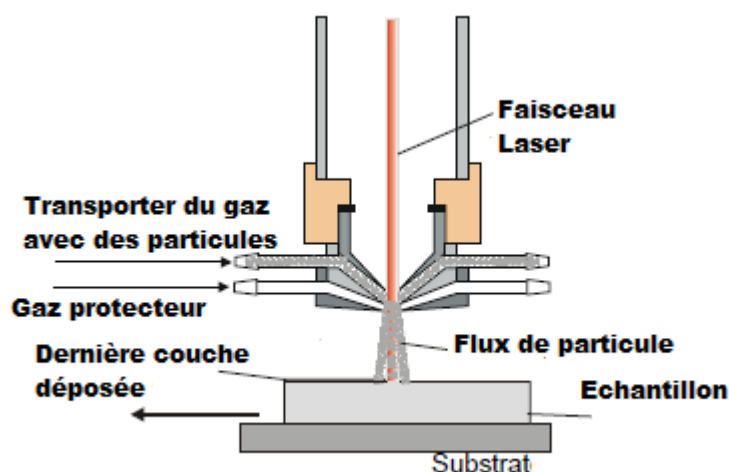


Figure I.16: Processus de base de dépôt au laser (Shishkovsky et al. 2012)

I.5.3.6. Sédimentation

La sédimentation et la flottation sont utilisées dans de nombreuses technologies de fabrication, en particulier pour la production de composites renforcés par des particules sur la base de la différence de densité entre les particules et la matrice. Une utilisation appropriée de la force de gravité présente partout sur la terre peut mener à la fabrication de structures graduées. En se concentrant sur le gradient de refroidissement thermique, la morphologie, la taille et la diffusion de masse des différentes phases, on obtient diverses structures de MMC et de PMC classées sur le plan fonctionnel (Sobczak et Drenchev 2013).

En dépit de ses limites, cette méthode présente un potentiel pour la fabrication de produits FGM de type carreaux avec des dimensions plus importantes en raison de sa simplicité et de sa reproductibilité.

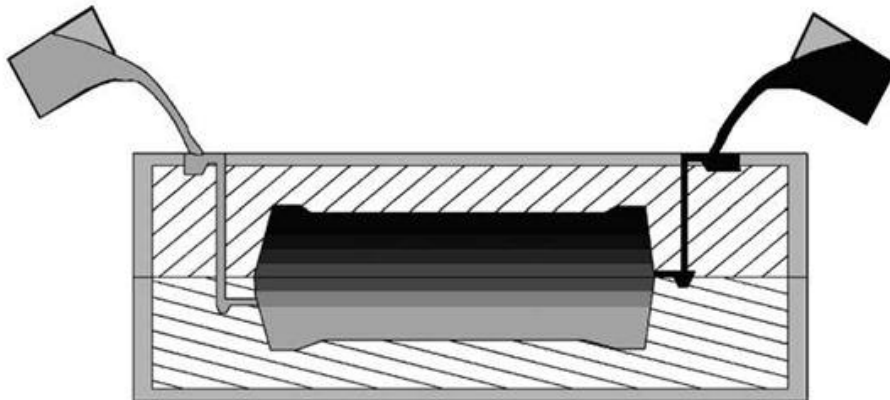


Figure I.17 : Schéma de principe de la sédimentation (Kieback et al., 2003)

I.6. Domaine d'application

Ces dernières années, l'utilisation de matériaux à gradient de propriétés (FGM) suscite un intérêt croissant en raison de leurs nombreux avantages par rapport aux matériaux composites.

Les MGF ont un grand potentiel dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères, leurs utilisation augmente dans les secteurs de l'aérospatiale, de la défense, de l'industrie nucléaire, de la biomédecine et de l'électronique. Les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

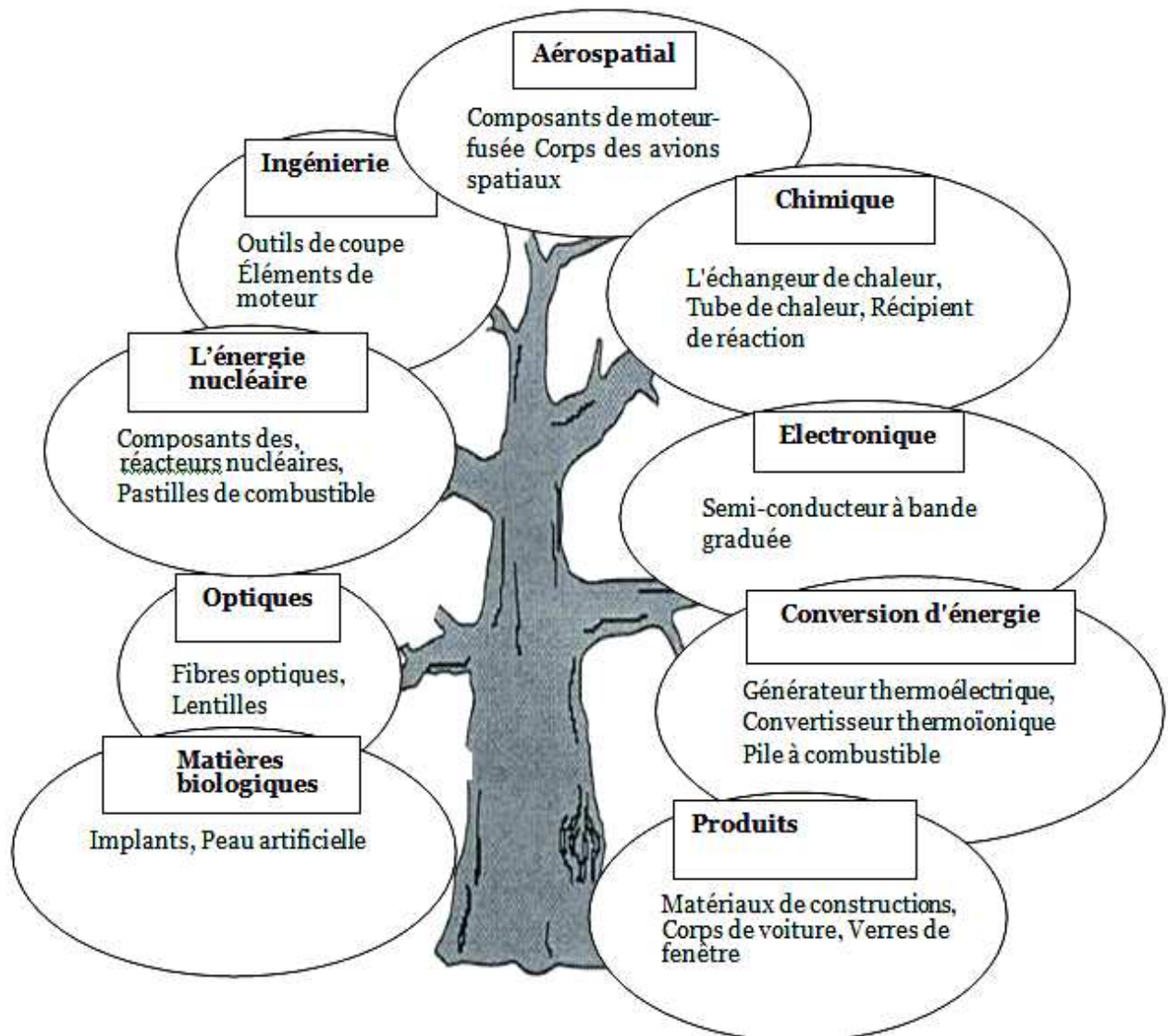


Figure I.18: Les principaux domaines d'application des FGM

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

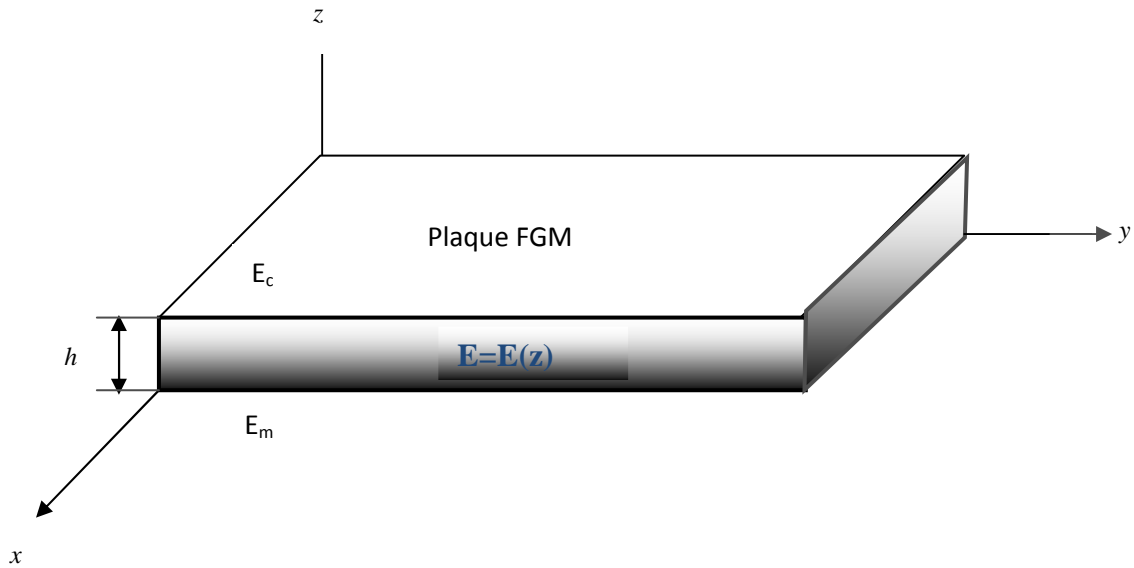


Figure I.19 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $\nu(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.17, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

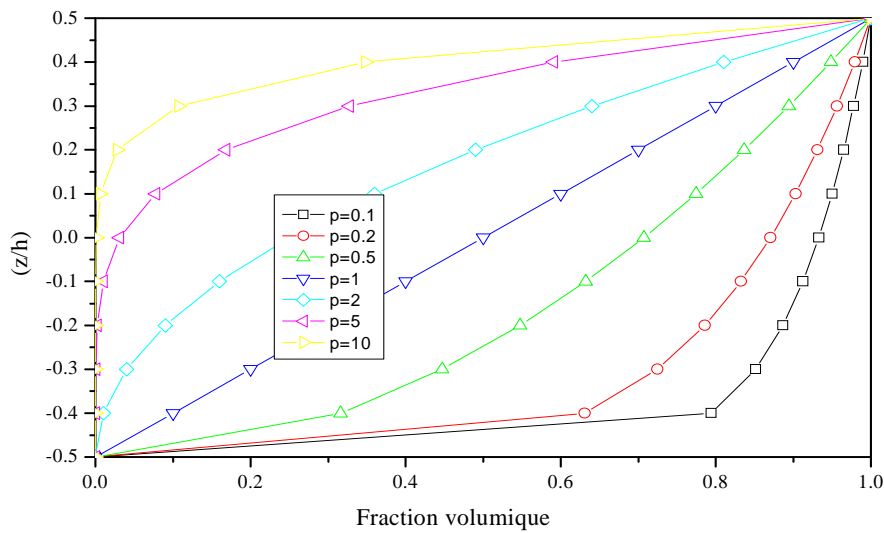


Figure I.20 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao et Wang 1995). Par conséquent, Chung et chi (Chi et Chung 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1-V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1-V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.18 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

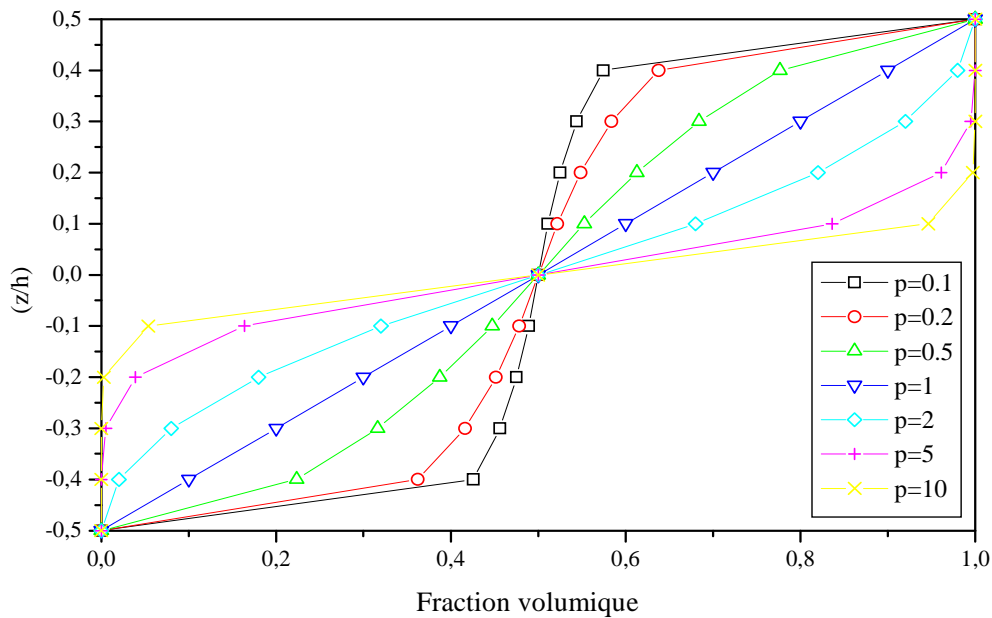


Figure I.21: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.19.

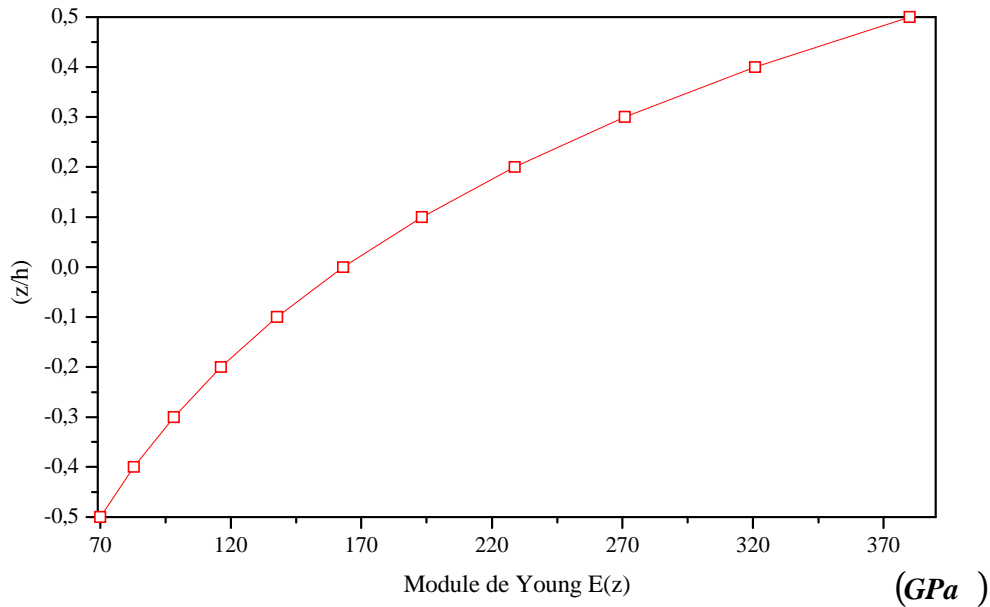


Figure I.22 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.7.4. Le modèle d'homogénéisation de Mori Tanaka

Pour le schéma de Mori Tanaka, la fraction volumique de la plaque de FGM est donnée comme suit: (Mori et Tanaka 1973, Benveniste 1987):

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \frac{V_c}{1 + V_m \left(\frac{P_c}{P_m} - 1 \right) \frac{1 + \nu}{3 - 3\nu}}, V_m = 1 - V_c \quad (I.6a)$$

Où P désigne la propriété matérielle effective comme le module de Young E, P_m et P_c désigne la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque respectivement, k est l'exposant de la fraction volumique.

$$V_c = (0.5 + z/h)^k \quad (I.6b)$$

V_c est la fraction volumique de la céramique. Étant donné que les effets de la variation du coefficient de Poisson m sur la réponse des plaques FG sont très faibles (Yang et al.2005, Kitipornchai et al.2006), on suppose qu'elle est constante pour des raisons pratiques.

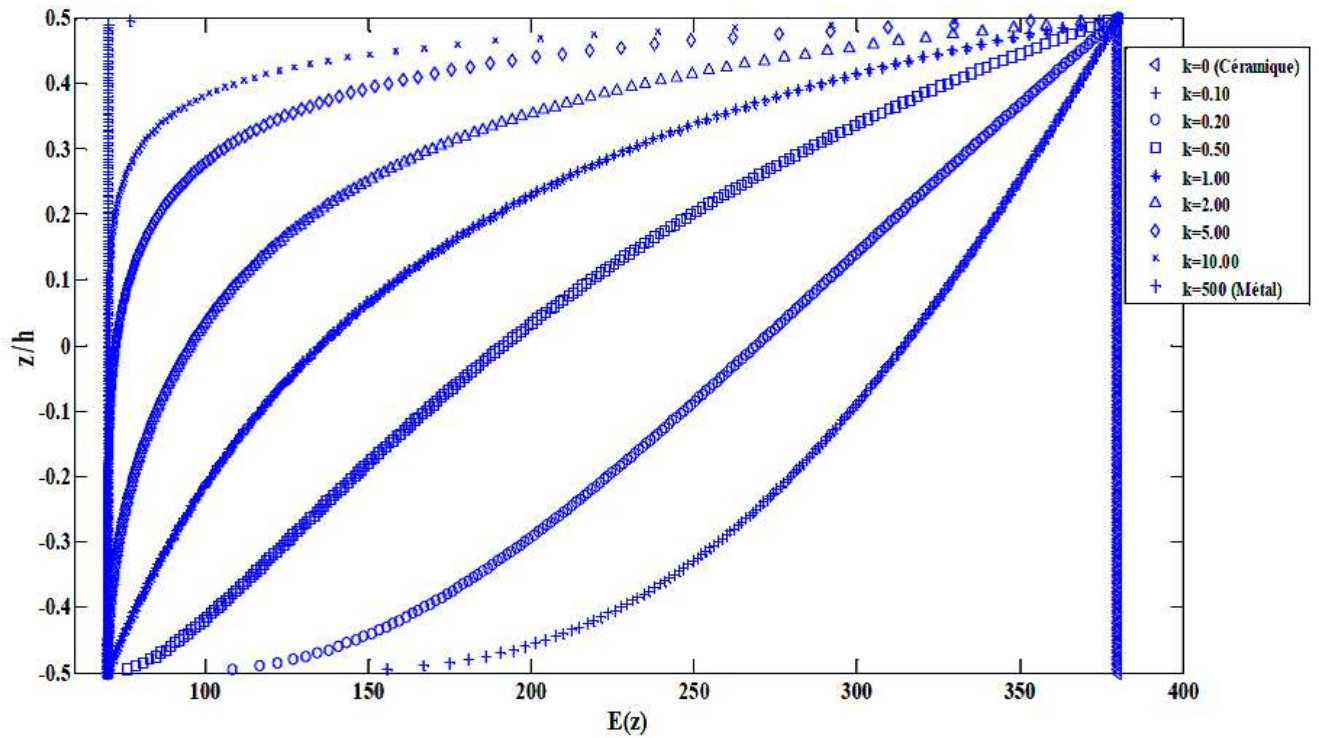


Figure I.23 : Distribution de module de Young à travers l'épaisseur de MT-FGMs

I.8. Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle sont devenus la pierre angulaire de la recherche sur les matériaux modernes, elles constituent un excellent matériau de pointe qui révolutionnera le monde de la fabrication et de l'ingénierie.

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II

Théories des plaques

CHAPITRE II : THEORIES DES PLAQUES

II.1. Introduction

Les plaques composites FGM sont de plus en plus utilisées dans l'industrie aéronautique et aérospatiale ainsi que dans d'autres technologies modernes et différents domaines d'engineering. Une bonne compréhension de leur comportement structural et dynamique est nécessaire pour les utiliser efficacement. L'augmentation rapide de entraîne la formulation et l'utilisation analytique de plusieurs théories de plaques et de coques. La plupart d'entre eux sont des théories raffinées basées sur le déplacement, qui permettent de prendre en compte les effets des déformations transversale de cisaillement ou des déformations transversale normale.

La majorité des résultats publiés sont théoriques et reposent sur des théories bidimensionnelles des plaques , la première théorie satisfaisante de la flexion des plaques est associée à Navier (Navier 1823), qui a considéré l'épaisseur de la plaque dans l'équation générale de la plaque en fonction de la rigidité D . Il a également introduit une méthode «exacte» qui a transformé l'équation différentielle en expressions algébriques en utilisant des séries trigonométriques de Fourier.

En 1850, Kirchhoff publie une thèse importante sur la théorie des plaques minces (Kirchhoff 1850). Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie de la flexion de plaques et sont connues sous le nom '«hypothèses de Kirchhoff», le cisaillement transverse n'est pas pris en compte. La théorie classique est la plus simple du point de vue de la résolution analytique, du fait que la fonction $f(z)$ devient égale à 0, néanmoins elle néglige tous les effets liés aux contraintes de cisaillement transverse, notamment le gauchissement des sections.

La prise en compte du cisaillement transverse dans l'étude des matériaux composites peut s'avérer prépondérante pour obtenir des résultats cohérents et exploitables, par la voie analytique comme par la voie numérique. Plusieurs approches existent pour le prendre en compte dans les structures composites. Ce phénomène a été étudié depuis très longtemps par les scientifiques.

De nombreux chercheurs ont tenté d'affiner la théorie de Kirchhoff et de tels tentatives continuent jusqu'à ce jour. Reissner (Reissner 1945) a fait l'avancée la plus importante dans cette direction. La théorie de Reissner prend en compte l'influence de la déformation de cisaillement transverse sur la déflexion de la plaque.

Le développement des différentes branches d'ingénierie moderne a donné un nouveau souffle à des recherches analytiques plus rigoureuses sur les problèmes des plaques, avec des théories d'ordre supérieur qui sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre, lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Modèles analytiques des plaques

II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure I.9), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger (Timoshenko 1959, Reddy 1997, Reddy 1999).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

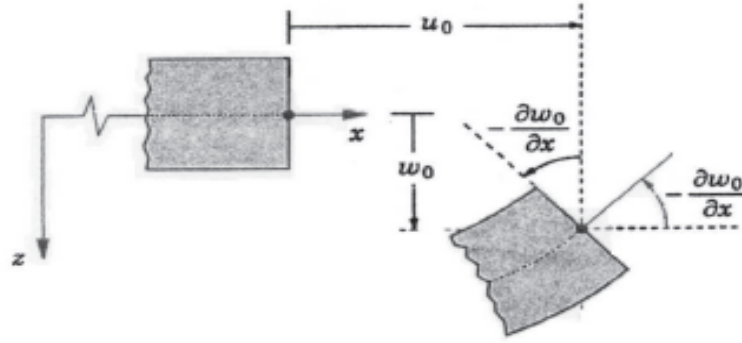


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997).

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$: est Rotation due à la flexion (sans cisaillement). Le plan principal de la plaque est le plan x, y et l'épaisseur h est orientée selon l'axe z = [-h / 2 , h / 2]. Comme ce modèle ne tient pas compte de l'effet de cisaillement transversal, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses

II.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre c'est une amélioration par rapport à la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Elle repose sur l'hypothèse que la normale à la mi-surface avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale à la surface médiane après déformation.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans (Reissner 1945, Mindlin 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger (Timoshenko 1959, Reddy 1997, Reddy 1999) .

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \tag{II.2.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \tag{II.2.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \tag{II.2.c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section

par le remplacement $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

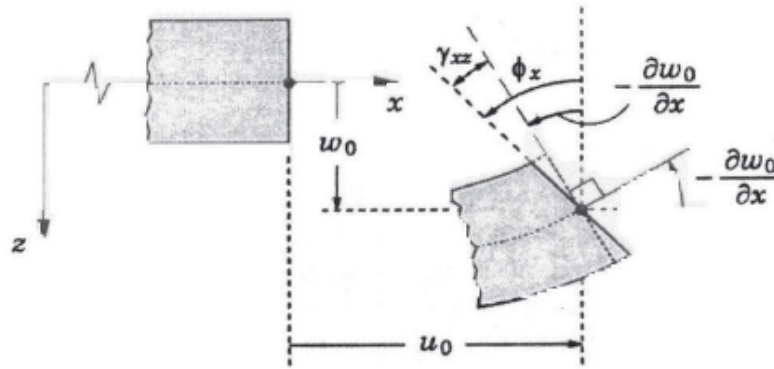


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al. 1949 ; Naghdi 1957 ; Reissner 1975 ; Reddy 1984; Kant et Swaminathan 2002). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

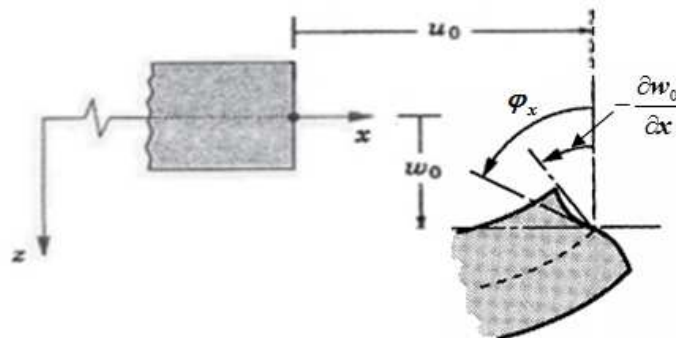


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy 1997).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des

axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $f(z)$ est une fonction de

cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Les fonctions de cisaillement transversal $f(z)$ sont déterminées pour remplir les conditions aux limites tangentielles sans contrainte au niveau des surfaces supérieure et inférieure des plaques. En étudiant les effets de la déformation par cisaillement, de nombreuses fonctions complexes ont été introduites dans la littérature:

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième ordre de Reddy (TSDT) (Reddy 1997, Reddy 1999) sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (Touratier 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (Karama et al., 2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. (Ait Atmane et al., 2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3 Les fonctions raffinées de cisaillement transverse

Pour objet d'une prise en compte du cisaillement transverse la plus précise possible, de nombreux modèles de fonction de gauchissement ont été développés et sont encore développés aujourd'hui. Il est intéressant de noter que la majorité de ces différentes fonctions de cisaillement transverse, permettant de considérer un gauchissement des sections, sont basées sur un modèle de développement polynomial, de puissances impaires, de la fonction $f(z)$ de la forme suivante :

$$f(z) = a_1 z - a_3 \cdot \left(\frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^3}{h^2}\right) + a_5 \cdot \left(\frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^5}{h^4}\right) + \dots \\ + (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \cdot a_n \cdot \left(\frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{z^n}{h^{(n-1)}}\right) \quad (\text{II.8})$$

La construction des fonctions $f(z)$ s'établit alors par le choix des coefficients a_n induits par l'ordre choisi pour le développement. On retrouve donc dans cette formulation générale de la

fonction de cisaillement transverse la théorie classique, ou les coefficients a_n sont tous égaux à 0, ainsi que la théorie naturelle ou le coefficient a_1 est égal a 1 et $a_n = 0$ quand $n > 1$.

La figure II.4 montre l'évolution de ces différents modèles pour une épaisseur de pièce de 20mm. Cette figure permet d'apprécier la tendance des développements a accentuer le phénomène de gauchissement de la section sollicitée. En effet, il apparait clairement que la théorie de Mantari (plus récente) propose une amplitude du gauchissement nettement supérieure a celle proposée par les théories d'ordre supérieur précédentes.

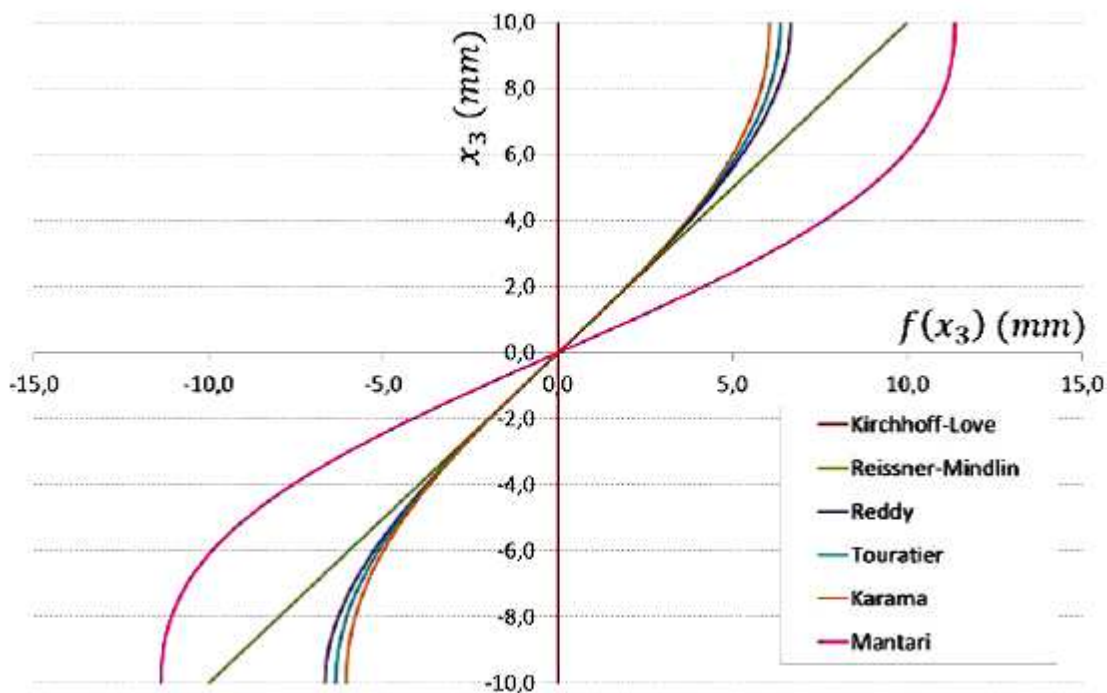


Figure II.4: Traces des fonctions de cisaillement transverse étudiées (BRAULT 2013)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé de nombreuses fonctions de cisaillement transversal pour donner la réponse mécanique des plaques composites aussi proche que possible de la solution exacte d'élasticité 3D . Néanmoins, à partir de la première fonction polynomiale simple (Ambartsumian 1960), ces fonctions deviennent de plus en plus complexes :

- L'approche d'Ambartsumyan SA. (1960) avec (Ambartsumian 1960):

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II. 9})$$

- L'approche de Reissner E. (1975) avec (Reissner 1975):

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 10})$$

- L'approche de Levinson (Levinson 1980), Murthy M. (1981) et Reddy JN. (1984) Avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 11})$$

- L'approche de Soldator (1992) avec (Soldatos 1992):

$$f(z) = h \sinh(z/h) - z \cosh(1/2) \quad (\text{II. 12})$$

- L'approche de M. Aydogdu (2009) avec (Aydogdu 2009):

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln \alpha}}, \text{ avec } \alpha > 0 \quad (\text{II. 13})$$

- L'approche de Hassaine Daouadji et al (2012) avec (Daouadji et al., 2012):

:

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right)$$

- L'approche de Mahi et al (2015) avec (Mahi et al., 2015):

$$f(z) = h/2 \tanh(2z/h) - 4z^3/3h^2 \cosh^2(1) \quad (\text{II. 14})$$

- L'approche de M. Sobhy (2016) avec (Sobhy 2016):

$$f(z) = z/(1 + 4z^2/h^2) \quad (\text{II. 15})$$

II.4. Modèles de théories raffinées

Senthilnathan et al. (1987 et 1988) ont développé une théorie de déformation par cisaillement simplifiée, Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji *et al.* (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

II.4.1. Modèles à cinq variables

Cette théorie est basée sur un champ de déplacement à cinq variables (Ambartsumian 1958, Soldatos 1993 , Zenkour 2006, Zenkour 2009, Aydogdu 2009, Sobhy 2013, Lee et al. 2015) comme suit:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t), \quad (\text{II. 16a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t), \quad (\text{II. 16a})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \quad (\text{II. 16c})$$

Où u, v, w sont les déplacements dans les directions x, y, z ; (u_0, v_0 et w_0) sont les déplacement au plan moyen, φ_x et φ_y sont les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes y et x , respectivement, $f(z)$ est la fonction de cisaillement transversal.

Voyiadjis et Shi (1991), Mahi et al. (2015) ont présenté un modèle de cinq inconnue sous la forme suivante:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + g(z) \left(\varphi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad (\text{II. 17a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + g(z) \left(\varphi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), \quad (\text{II. 17a})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \quad (\text{II. 17c})$$

En faisant d'autres hypothèses (Lee et al. 2015), donné par:

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y), \varphi_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x} \text{ et } \varphi_y = -\frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{II. 18})$$

On aura le champ de déplacement (II.21).

Reddy (1984) propose un modèle de cinq inconnue sous la forme suivante:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\beta_x + f(z) \left(\beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad (\text{II. 19a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\beta_y + f(z) \left(\beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), \quad (\text{II. 19a})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \quad (\text{II. 19c})$$

En faisant d'autres hypothèses (Senthilnathan et al. 1987, Shimpi 2002), donné par:

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y), \beta_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x} \text{ et } \beta_y = -\frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{II. 20})$$

On aura le champ de déplacement (II.21).

II.4.2. Modèles à quatre variables (RPT)

(T. Hassaine Daouadji et al. 2013, Bateni et al 2013, Zidi et al. 2014):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (\text{II. 21a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad (\text{II. 21a})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y) + w_s(x, y), \quad (\text{II. 21c})$$

Où u , v , w désignent respectivement le déplacement dans les directions de coordonnées (x ; y ; z); et u et v désignent un déplacement au plan moyen dans les directions des coordonnées x et y . w_b et w_s désignent respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.

II.5. Nécessité de théories simple de déformation par cisaillement

Les effets de déformation par cisaillement sont plus prononcés dans les plaques épaisses lorsqu'elles sont soumises à des charges transversales que dans les plaques minces lorsqu'elles sont soumises à des charges transversales que dans les plaques minces soumises à une charge similaire. Les effets de déformation par cisaillement sont plus importants dans les plaques épaisses. Ces effets sont négligés dans la théorie des plaques classiques (CPT). Afin de décrire le comportement correct à la flexion des plaques épaisses, y compris les effets de déformation par cisaillement et les déformations transversales associées, des théories simple

de déformation par cisaillement sont nécessaires. Cela peut être accompli en sélectionnant des modèles cinématiques et constitutifs appropriés.

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation d'une nouvelle théorie simple pour l'étude de la flexion des plaques FGM avec la présence de fondations élastique. Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante (Houari et al. 2016, Mouffoki et al. 2017):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (\text{II. 22a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \quad (\text{II. 22b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II. 22c})$$

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés la variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil, et définit les différents modèles analytique de calcul des plaques minces et épaisses en FGM, avec les différentes fonctions de cisaillement transversal adopter dans les théories d'ordre élevé (HSDT).

Chapitre III

**Etude analytique de la flexion
des plaques FGM en utilisant
une nouvelle théorie simple de
déformation par cisaillement**

CHAPITRE III: ETUDE ANALYTIQUE DE LA FLEXION DES PLAQUES FGM EN UTILISANT UNE NOUVELLE THEORIE SIMPLE DE DEFORMATION PAR CISAILLEMENT

III.1. Introduction

Le comportement en flexion des plaques engendre des contraintes de cisaillement, Les effets de déformation de cisaillement sont plus prononcés dans les plaques épaisses et moyennement épaisses lorsqu'elles sont soumises à des charges transversales que dans les plaques minces soumises à une charge similaire. Afin de décrire le comportement en flexion des plaques FGM correctement, y compris les effets de déformation de cisaillement et le gauchissement transversal associé, des théories de déformation de cisaillement sont nécessaires.

Dans ce chapitre, Nous présentons en détail une nouvelle théorie simple d'ordre supérieur de la déformation par cisaillement pour la réponse en flexion des plaques FGM reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte d'une variation parabolique des déformations transversales de cisaillement dans l'épaisseur et satisfait aux conditions de limite de contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. La théorie proposée contient moins d'inconnues et d'équations de mouvement que la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre. Le nombre de variables dans la théorie actuelle est le même que dans la théorie classique des plaques (CPT) qui est de trois inconnues. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Dans cette étude, des solutions analytiques de flexion sont obtenues pour une plaque isotrope et FGM simplement appuyée.

III.2. Formulation théorique

Considérons une plaque rectangulaire pleine de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h en matériau graduellement fonctionnelle avec le système de coordonnées tel qu'illustré à la figure III.1. On suppose qu'elle repose sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec la rigidité de Winkler k_w et la rigidité de cisaillement k_s . Les propriétés du matériau de la plaque FGM, telles que le module de Young E , sont supposées être fonction de la fraction volumique des matériaux constitutifs. La plaque FG est soumise à une charge transversale $q(x, y)$. Contrairement aux théories mentionnées précédemment, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la présente théorie est seulement trois comme dans le cas de la théorie classique des plaques (CPT).

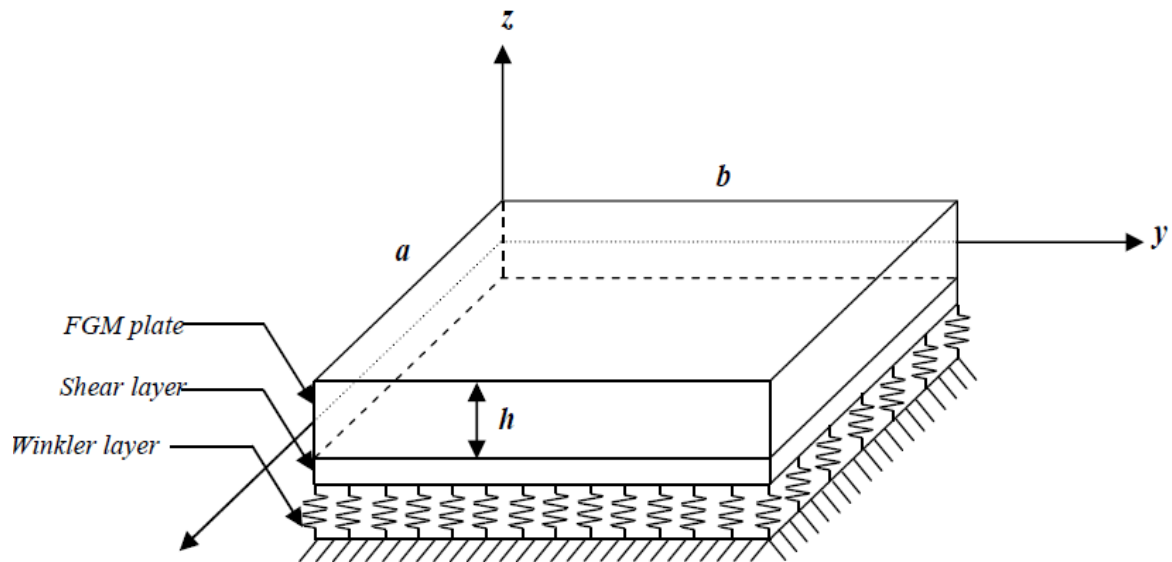


Figure III. 1: Système de coordonnées et géométrie de plaque rectangulaires en FGM sur une fondation élastique Pasternak

III.2.1. Cinématique du modèle proposé de plaque

Le champ de déplacement satisfaisant aux conditions des contraintes transversales de cisaillement (et donc des déformations) qui s'annule aux points $(x, y, \pm h/2)$ sur les surfaces haute (supérieure) et bas (inférieure) de la plaque, est donné comme suit (Houari et al. 2016; Mouffoki et al. 2017):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (\text{III. 1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \quad (\text{III. 1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III. 1c})$$

où u_0 , v_0 et w_0 sont trois fonctions de déplacement inconnues du plan médian de la plaque et β est un paramètre du modèle de déplacement actuel. $f(z)$ est une fonction de forme représentant la distribution des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque et est donnée par (Nguyen et al., 2014; Nguyen et al., 2015):

$$f(z) = h \arctan\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{16z^3}{15h^2} \quad (\text{III. 2})$$

Le champ de déformations est défini, alors par

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \beta f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 3a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \beta g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 3b})$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ -\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ -\frac{\partial^2 (\nabla^2 w_0)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 4a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 4b})$$

et

$$g(z) = f'(z), \nabla^2 w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (\text{III. 5})$$

III.2.2. Relations constitutives

La plaque est graduée de l'aluminium (en bas) à l'alumine (en haut). Les propriétés mécaniques des FGM sont déterminées à partir de la fraction volumique des constituants du matériau. Le module de Young, est supposé varier dans la direction de l'épaisseur en fonction de la règle de Voigt sur toute la gamme de la fraction volumique. Les propriétés matérielles effectives des FGM avec deux constituants peuvent être exprimées comme (Tounsi et al. 2013; Bousahla et al. 2014 ; Fekrar et al. 2014 ; Zidi et al. 2014; Hebali et al. 2014; Bourada et al. 2015 ; Hamidi et al. 2015; Meradjah et al. 2015; Boukhari et al. 2016; Fahsi et al. 2017; Sekkal et al. 2017):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2} \right)^k \quad (\text{III.6})$$

où E_m et E_c sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique, respectivement, et k est l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La valeur de k égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique. L'hypothèse de loi de puissance ci-dessus reflète une règle simple de mélanges utilisés pour obtenir les propriétés effectives de la plaque céramique-métal.

Les relations constitutives d'une plaque FG peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

où $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes contrainte et déformation, respectivement. Les coefficients de rigidité peuvent être exprimés en:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad (\text{III.8a})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.8b})$$

III.2.3. Equations gouvernantes

Les équations directrices peuvent être obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe peut être énoncé sous la forme suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} (q - f_e) dw d\Omega = 0 \quad (\text{III.9})$$

Substituer des Eqs. (III.3), (III.1) et (III.7) dans l'équation. (III.9) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (III.9) peut être réécrit comme:

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y + M_{xy} \delta k_{xy} + \beta(S_x \delta \eta_x + S_y \delta \eta_y + S_{xy} \delta \eta_{xy} + Q_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0)] d\Omega - \int_{\Omega} (q - f_e) \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{III.10})$$

où Ω est l'aire de la surface supérieure et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation.

Pour le modèle de fondation Pasternak

$$f_e = k_w w - k_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{III.11})$$

où k_w est le module de réaction de la fondation (coefficient élastique de la fondation) et k_{sx} et k_{sy} sont les modules de cisaillement de la fondation (rigidité de fondation de la couche de

cisaillement). Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons $k_{sx} = k_{sy} = k_s$. Si la rigidité de la fondation de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient une fondation Winkler.

Dans lequel les efforts et les moments résultants, N , M , S et Q sont définies par:

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) (\sigma_i) dz, \quad (i = x, y, xy) \quad (\text{III. 12a})$$

and

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_i) g(z) dz, \quad (i = xz, yz) \quad (\text{III. 12b})$$

Les équations gouvernantes peuvent être dérivé à partir de l'équation. (III.10) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en mettant les coefficients δu_0 , δv_0 et δw_0 égale à zéro séparément. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.13a})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.13b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^4 S_x}{\partial x^4} \\ & + \beta \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \beta \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial y^3 \partial x} + \beta \frac{\partial^4 S_y}{\partial y^4} - \beta \frac{\partial^3 Q_{xz}}{\partial x^3} \\ & - \beta \frac{\partial^3 Q_{yz}}{\partial y^3} - f_e + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.13c})$$

III.2.4. Les équations d'équilibre en termes de déplacements

En substituant l'équation (III.3) dans l'équation (III.7) et les résultats subséquents dans l'équation (III.12), les résultantes des contraintes N , M , S et Q sont définies comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & \beta B_{11}^s & \beta B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & \beta B_{12}^s & \beta B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & \beta D_{11}^s & \beta D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & \beta D_{12}^s & \beta D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & \beta D_{66}^s \\ \beta B_{11}^s & \beta B_{12}^s & 0 & \beta D_{11}^s & \beta D_{12}^s & 0 & \beta^2 H_{11}^s & \beta^2 H_{12}^s & 0 \\ \beta B_{12}^s & \beta B_{22}^s & 0 & \beta D_{12}^s & \beta D_{22}^s & 0 & \beta^2 H_{12}^s & \beta^2 H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \beta B_{66}^s & 0 & 0 & \beta D_{66}^s & 0 & 0 & \beta^2 H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.14a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.14b)$$

D' où

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (III.15a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (III.15b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (III.15c)$$

En substituant l'équation (14) dans l'équation. (13), les équations directrices peuvent être écrites en termes de déplacements généralisés (u_0, v_0 et w_0) comme:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\ & - \beta \left(B_{66}^s \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^3 \partial y^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 w_0}{\partial x \partial y^4} + B_{11}^s \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} \right) = 0, \end{aligned} \quad (III.16a)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - \beta \left(B_{66}^s \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^2 \partial y^3} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^4 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^5 w_0}{\partial y^5} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{III.16b}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \beta \left[B_{11}^s \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 u_0}{\partial x \partial y^4} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 v_0}{\partial x^4 \partial y} \right. \\
 & + B_{22}^s \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^5} + B_{66}^s \frac{\partial^5 v_0}{\partial x^3 \partial y^2} + B_{66}^s \frac{\partial^5 v_0}{\partial x^2 \partial y^3} - 2D_{11}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^2 \partial y^4} \\
 & \left. - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^4 \partial y^2} - 2D_{22}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial y^6} \right] - \beta^2 \left[H_{11}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^8} + 2(H_{12}^s + H_{66}^s) \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^4 \partial y^4} \right. \\
 & \left. + H_{66}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^6 \partial y^2} + H_{66}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^2 \partial y^6} + H_{22}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial y^8} - A_{44}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} - A_{55}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial y^6} \right] - f_e + q = 0
 \end{aligned} \tag{III.16c}$$

III.3. Solutions analytiques

Les équations directrices ci-dessus sont résolues analytiquement pour les problèmes de flexion d'une plaque FG rectangulaire simplement supportée. Basé sur la procédure de la solution de Navier, les déplacements sont supposés comme suit (Reddy 1984, Zenkour 2006):

$$\begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \tag{III.17}$$

où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$, (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}) sont les coefficients de déplacement maximum inconnus. La charge transversale est également étendue dans la série sinus double de Fourier (Reddy 1984, Zenkour 2006):

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \tag{III.18}$$

Les coefficients q_{mn} pour le cas de la charge uniformément répartie (UDL) sont définis comme suit:

$$q_{mn} = \frac{16q_0 ab}{\lambda \mu}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (III.19)$$

où représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Pour le cas d'une charge distribuée de façon sinusoïdale (SDL), nous avons

$$m = n = 1 \text{ and } q_{11} = q_0 \quad (III.20)$$

En substituant les équations (III.17) et (III.18) dans l'équation (III.16), les solutions analytiques peuvent être obtenues

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (III.21)$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2 - \beta(B_{11}^s\lambda^4 + B_{12}^s\mu^4 + B_{66}^s\lambda^2\mu^2 + B_{66}^s\mu^4)] \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \mu [B_{22}\mu^2 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 - \beta(B_{22}^s\mu^4 + B_{12}^s\lambda^4 + B_{66}^s\lambda^2\mu^2 + B_{66}^s\lambda^4)] \\ a_{33} &= -D_{11}\lambda^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 - \beta[D_{22}\mu^4 - 2(D_{11}^s\lambda^6 + D_{22}^s\mu^6) \\ &\quad - 2(\lambda^4\mu^2 + \lambda^2\mu^4)(D_{12}^s + 2D_{66}^s)] - \beta^2[H_{11}^s\lambda^8 + H_{22}^s\mu^8 + 2\lambda^4\mu^4(H_{12}^s + H_{66}^s) \\ &\quad + (\lambda^6\mu^2 + \lambda^2\mu^6)H_{66}^s + A_{44}^s\lambda^6 + A_{55}^s\mu^6] - k_w - k_{sx}\lambda^2 - k_{sy}\mu^2 \end{aligned} \quad (III.22)$$

On peut facilement obtenir la valeur du coefficient β de la même manière que celle décrite par Mouffoki et al. (2017).

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{K_1(K_5 K_9 A_1 D_{11}^s - 2K_6 K_7 B_1 B_1^s) - K_2^2 K_9 A_1 D_{11}^s + 2K_2(K_4 K_6 B_1 B_1^s + K_5 K_7 B_1 B_1^s) - 2K_3 K_4 K_5 B_1 B_1^s}{K_1 K_5 K_{10} A_{11} H_{11}^s + K_1 K_5 K_{11} A_{11} J - h^2 K_1 K_7 (B_{11}^s)^2 - K_2^2 K_{10} A_{11} H_{11}^s - K_2^2 K_{11} A_{11} J + 2h^2 K_2 K_4 K_7 (B_{11}^s)^2 - h^2 K_4 K_5 (B_{11}^s)^2} \quad (III.23)$$

Pour une plaque isotrope

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{(K_1 K_5 K_9 - K_2^2 K_9) D_{11}^s}{(K_1 K_5 K_{10} A_{11} - K_2^2 K_{10}) H_{11}^s + (K_1 K_5 K_{11} A_{11} - K_2^2 K_{11}) J} \quad (III.24)$$

d'ou les coefficients K_i sont donnée comme suit:

$$\begin{aligned} K_1 &= -2\lambda^2 - (1-\nu)\mu^2 \\ K_2 &= -(1+\nu)\lambda\mu \\ K_3 &= 2\lambda(\mu^2 + \lambda^2) \\ K_4 &= 2\lambda^5 + \lambda^3\mu^2(1-\nu) + \lambda\mu^4(1+\nu) \\ K_5 &= -2\mu^2 - (1-\nu)\lambda^2 \\ K_6 &= 2\mu(\mu^2 + \lambda^2) \\ K_7 &= 2\mu^5 + \lambda^2\mu^3(1-\nu) + \lambda^4\mu(1+\nu) \\ K_8 &= -(\sqrt{2}\mu^2 + \sqrt{2}\lambda^2)^2 \\ K_9 &= -(4\mu^4 + 4\lambda^4 + 4\lambda^2\mu^4 + 4\lambda^4\mu^2) \\ K_{10} &= -(2\lambda^8 + 2\mu^8 + 2(1+\nu)\lambda^4\mu^4 + (1-\nu)\lambda^6\mu^2 + (1-\nu)\lambda^2\mu^6) \\ K_{11} &= -2(\mu^6 + \lambda^6) \end{aligned} \quad (III.25)$$

Les contraintes normales et de cisaillement dans le plan (σ_{xx} , σ_{yy} and τ_{xy}) peuvent être obtenus avec précision par les relations de comportement (III.7) des plaques composites.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy} &= C_{66}\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= C_{55}\gamma_{xz} \end{aligned} \quad (III.26)$$

Les expressions des contraintes en fonction des déplacements sont obtenues, en reportant les relations (III.3) et (III.4) dans l'expression (III.26), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \beta f(z) \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \beta f(z) \left(\nu \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \beta f(z) \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \right) \right] \\
 \tau_{xz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[-\beta g(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right]
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Substituant l'équation (III.17) dans l'équation (III.27), on peut obtenir les expressions des contraintes en termes de module de Young et les paramètres arbitraires U, V, W comme suit :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[-(\lambda U + \nu \mu V) + z(\lambda^2 + \nu \mu^2)W - \beta f(z)(\lambda^4 + \nu \mu^4)W \right] \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[-(\nu \lambda U + \mu V) + z(\nu \lambda^2 + \mu^2)W - \beta f(z)(\nu \lambda^4 + \mu^4)W \right] \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\
 \tau_{xy} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[(\mu U + \lambda V) + 2z\lambda\mu - \beta f(z)(\lambda^3\mu + \lambda\mu^3)W \right] \cos(\lambda x) \cos(\mu y) \\
 \tau_{xz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[+\beta g(z)\lambda^3 W \right] \cos(\lambda x) \sin(\mu y)
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement en flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant une nouvelle théorie simple d'ordre élevé à trois inconnus. La théorie présentée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette nouvelle théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre IV

Résultats et discussions de

l'étude analytique de la flexion

des plaques FGM

CHAPITRE IV: RESULTATS ET DISCUSSIONS DE L'ETUDE ANALYTIQUE DE LA FLEXION DES PLAQUES FGM

IV.1. Introduction

L'intérêt principal de ce chapitre est de présenter l'évaluation et la validation de la théorie développée pour l'analyse du comportement en flexion des plaque FGM reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak, cette théorie est une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à trois inconnus seulement , basée sur une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.

La comparaison des résultats obtenus avec d'autres théories communes montre l'excellente efficacité de cette théorie dans la modélisation des plaques épaisses reposant sur des fondations élastiques. En outre, une étude paramétrique de la variation de la contrainte axiale , contrainte tangentielle longitudinale et la contrainte de cisaillement par rapport à la variation des modules de la fondation, K_w est le module de réaction de la sous-couche (rigidité du ressort) et K_s est le module de cisaillement de la sous-couche (rigidité de la couche de cisaillement).

IV.2. Résultats de l'analyse statique

L'analyse du comportement statique de la flexion de la plaque isotrope en FGM reposant sur une fondation élastique est conduite pour des combinaisons du Métal et de la Céramique. Les matériaux choisis sont : pour le Métal, Titanium (**Ti-6Al-4V**) et pour la Céramique : un Oxyde Zirconium (**ZrO2**). Pour la simplicité, on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout point de la plaque. Les propriétés matérielles des matériaux utilisés sont données dans le tableau IV.1:

Tableau IV. 1 : Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque FGM

Propriétés	Métal : Titanium (Ti-6Al-4V)	Céramique: Zirconium (ZrO2)
E (GPa)	66.2	117
ν	1/3	1/3

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes normales et tangentielles :

$$\bar{w} = \frac{10^3 D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right), \bar{w} = \frac{10^2 D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{10^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{10 q_0} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = -\frac{1}{10 q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right),$$

$$K_w = k_w a^4 / D, K_s = k_s a^2 / D, \bar{z} = z / h$$

où $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ est une rigidité de flexion de référence de la plaque.

IV.3. Validation analytique du modèle proposé

Afin de valider les présentes formulations, les résultats numériques pour la flexion d'une plaque mince isotrope ($k = 0, a/h = 100, \nu = 0.3$) sont comparés à ceux obtenus par Lam et al. (2000) utilisant les fonctions de Green, les solutions tridimensionnelles données par Huang et al. (2008) et la théorie de la plaque de déformation de cisaillement hyperbolique à cinq variables donnée par Benyoucef et al. (2010). La plaque est supposée soumise à une charge uniforme sur la surface supérieure et les résultats de la déflexion centrale de la plaque sont donnés dans le tableau IV.2. Pour toutes les valeurs des paramètres de la fondation K_w et K_s . On peut voir que les résultats sont en bon accord.

Tableau IV. 2 : Comparaison de la déflexion non dimensionnelle \hat{w} de plaques carrées minces isotropes simplement appuyée sous une charge uniformément répartie ($a/h = 100$)

K_w	K_s	\hat{w}			
		Presente	Benyoucef et al. 2010	3D Huang et al. 2008	Lam et al. 2000
1	1	3.8000	3.8550	3.8546	3.853
	3 ⁴	0.7610	0.7630	0.7630	0.763
	5 ⁴	0.1153	0.1153	0.1153	0.115
3 ⁴	1	3.1720	3.2108	3.2105	3.210
	3 ⁴	0.7300	0.7317	0.7317	0.732
	5 ⁴	0.1145	0.1145	0.1145	0.115
5 ⁴	1	1.4688	1.4765	1.4765	1.476
	3 ⁴	0.5693	0.5704	0.5704	0.570
	5 ⁴	0.1094	0.1095	0.1095	0.109

Le tableau IV.3 montre la comparaison des déformations non dimensionnelles et des contraintes d'une plaque rectangulaire $T_i-6Al-4V/ZrO_2$ simplement supportée sur une fondation élastique soumise à une charge répartie sinusoïdale mécanique ($a = 10h, b = 2a, q_0 = 100$). On peut voir que les résultats de la théorie actuelle sont en excellent accord avec ceux de la théorie des plaques de déformation de cisaillement sinusoïdale (RSDPT) à quatre variables donnée par Boudarba et al. (2013) pour toutes les valeurs du rapport d'exposant k de la fraction volumique et des paramètres de base élastique K_w, K_s .

On peut observer que la flexion et les contraintes non dimensionnelles diminuent avec l'existence des fondations élastiques $K_w; K_s$. L'introduction du paramètre de base K_w de Winkler donne des résultats meilleurs que ceux avec l'introduction des paramètres K_s de Pasternak. La déflexion augmentera à mesure que l'exposant k de la fraction volumique augmente. Les contraintes sont également influencées par la variation de l'exposant de la fraction volumique k , ce qui signifie que la plaque peut être conçue de manière optimale en fonction des conditions de travail données en adaptant les propriétés du matériau gradué.

Tableau IV.3 : Effet de l'exposant de la fraction volumique et des paramètres de la fondation élastiques sur les dimensions et les contraintes d'une plaque rectangulaire FGM sous charge sinusoïdale. ($a = 10h, b = 2a, q_0 = 100$)

k	K_w	K_s	Theories	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	0	0	Presente	0.65311	0.42224	0.87508	0.40152
			RSDPT ^a	0.68131	0.42424	0.86240	0.39400
	100	0	Present	0.39508	0.25542	0.52936	0.24289
			RSDPT ^a	0.40523	0.25233	0.51296	0.23435
	0	100	Presente	0.083211	0.053797	0.11149	0.051157
			RSDPT ^a	0.083654	0.052093	0.10589	0.048377
100	100	Presente	0.076819	0.049665	0.102928	0.047227	
		RSDPT ^a	0.077197	0.048071	0.097724	0.044643	
0.5	100	100	Presente	0.078404	0.047337	0.086092	0.040310
			RSDPT ^a	0.078729	0.045788	0.081728	0.038066
1	100	100	Presente	0.079017	0.046427	0.076996	0.037089
			RSDPT ^a	0.079321	0.044892	0.073054	0.035023
2	100	100	Presente	0.079467	0.046129	0.070882	0.034086
			RSDPT ^a	0.079758	0.044595	0.067185	0.032215
5	100	100	Presente	0.079872	0.047319	0.067740	0.031644
			RSDPT ^a	0.080150	0.045736	0.064125	0.029922
∞	100	100	Presente	0.080953	0.029613	0.061372	0.028160
			RSDPT ^a	0.081190	0.050559	0.058148	0.026565

^a Prise de Boudarba *et al.* (2013)

Les figures. IV 1-8 montrent l'effet de la raideur de la fondation sur la déflexion sans dimension, la contrainte axiale, la contrainte tangentielle longitudinale, et la contrainte de cisaillement dans une plaque FG carrée avec la fraction volumique ($k = 2$) sous une charge répartie sinusoïdalement. Ils représentent la variation de la déflexion du centre \bar{w} avec le rapports longueur/épaisseur (b/h) et montrent à travers les distributions d'épaisseur de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$, la contrainte normale longitudinale $\bar{\sigma}_x$ dans le plan, et la contrainte tangentielle longitudinale $\bar{\tau}_{xy}$.

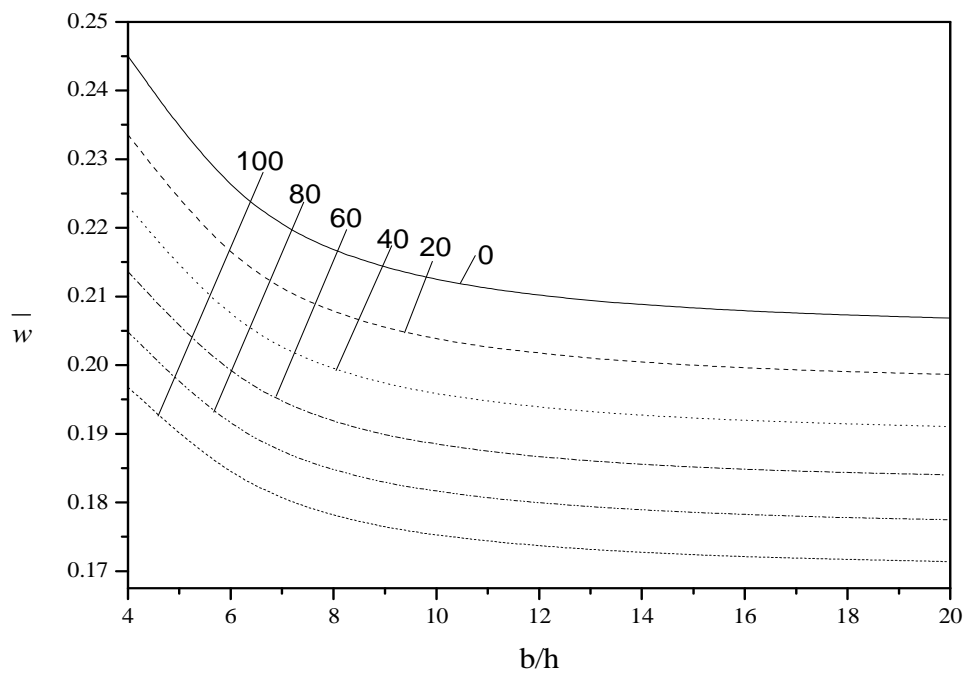


Figure IV. 1: Effet du paramètre du module Winkler K_w sur la déflexion centrale non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différents rapports longueur/épaisseur, $a/h = 10$ avec $K_s = 10$.

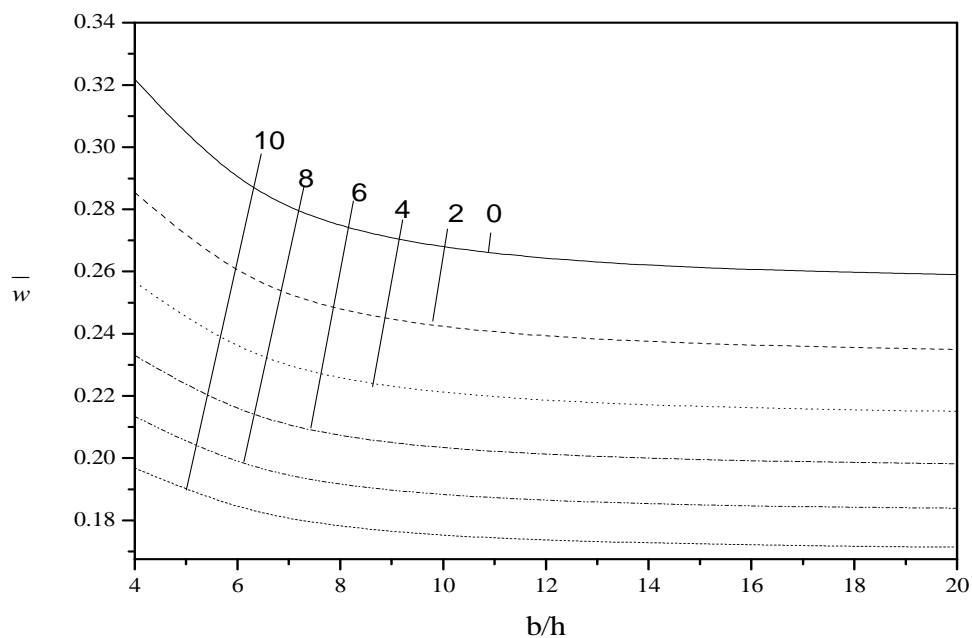


Figure IV.2 : Effet du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s sur la déflexion centrale non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différents rapports longueur/épaisseur, $a/h = 10$ avec $K_w = 100$.

Les figures IV 1 et 2 montrent l'effet de la raideur de la fondation et du rapport longueur/épaisseur b/h sur la déflexion sans dimension de la plaque carrée FGM avec la fraction volumique ($k = 2$). La déflexion diminue avec l'augmentation des rapports b/h . C'est maximum pour la plaque métallique et minimum pour la plaque en céramique. Les déflexions diminuent graduellement au fur et à mesure K_w ou K_s augmentent.

Les diminutions de la déflexion indiquent que l'augmentation de la rigidité de la fondation améliore certainement la rigidité de la déformation de la plaque.

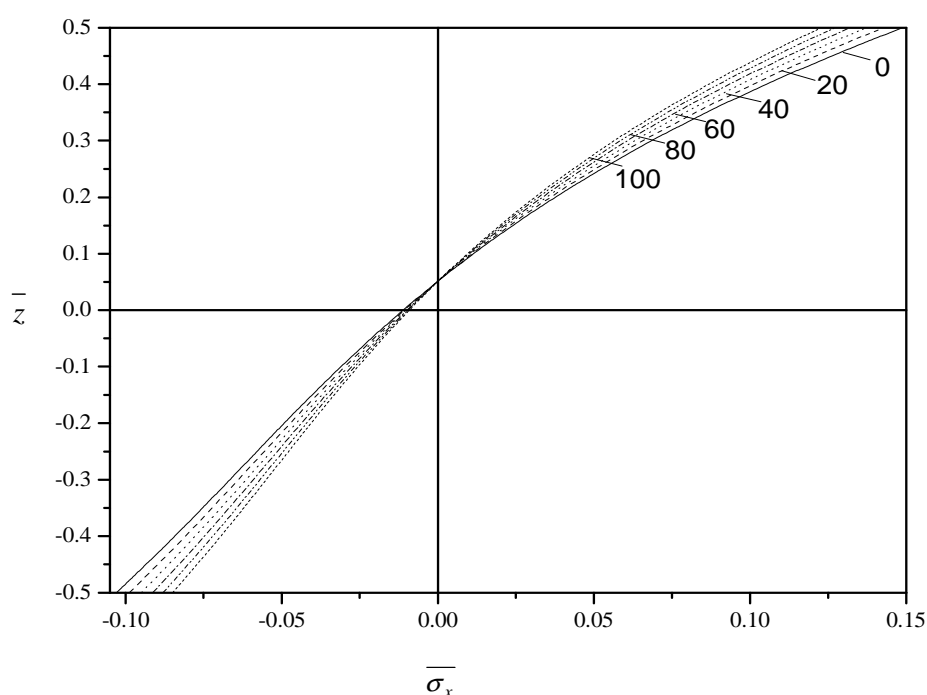


Figure IV.3 : Variation de la contrainte axiale non dimensionnelle ($\overline{\sigma_x}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$.

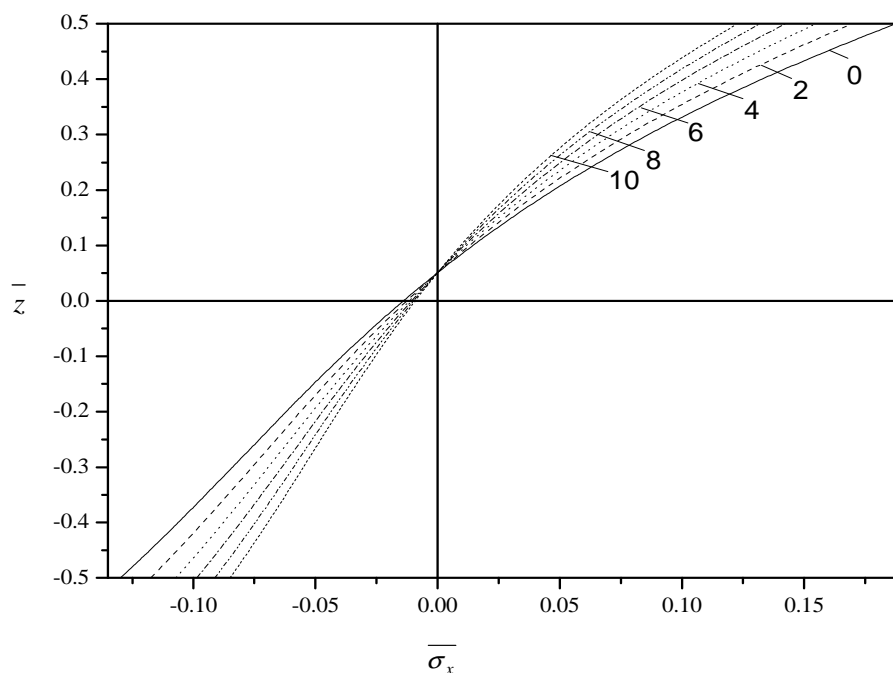


Figure IV.4 : Variation de la contrainte axiale non dimensionnelle ($\overline{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s avec $K_w = 100$ et $a/h = 10$.

Comme représenté sur les figures IV 3 et 4, la contrainte normale longitudinale $\overline{\sigma}_x$ dans le plan est une compression dans la plaque jusqu'à $\overline{z} = 0.051$, après elle devienne une traction. La contrainte de compression maximale se produit dans un point de la surface inférieure de la plaque FG, mais la tension (traction) est maximale en un point de la surface supérieure. De plus, on peut voir que la fondation élastique a un effet significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale $\overline{\sigma}_x$.

En outre, on observe que l'effet du paramètre de module de cisaillement de Pasternak est plus important que le paramètre de module de Winkler et que la contrainte axiale $\overline{\sigma}_x$ augmente graduellement avec une diminution de K_w ou K_s .

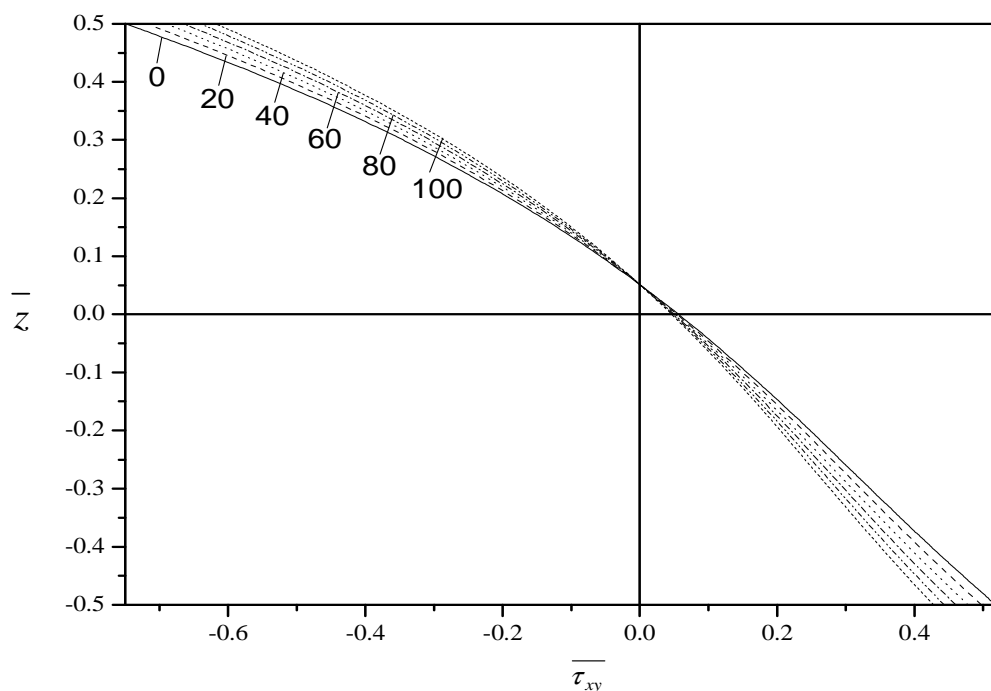


Figure IV.5 : Variation de la contrainte tangentielle longitudinale non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xy}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$.

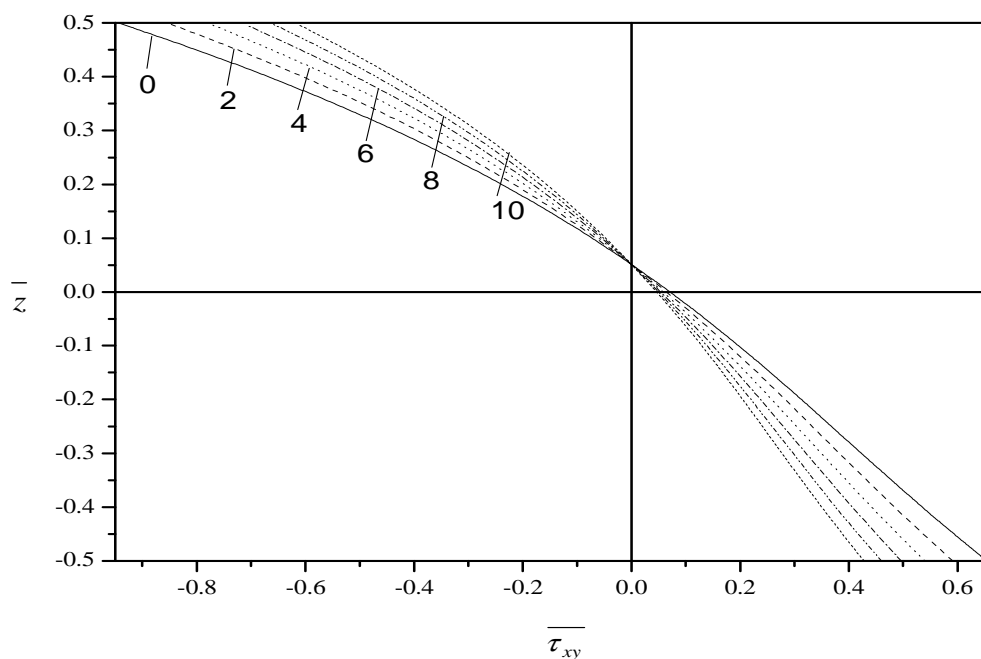


Figure IV.6 : Variation de la contrainte tangentielle longitudinale non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xy}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s avec $K_w = 100$ et $a/h = 10$.

Les figures IV 5 et 6 représentent les distributions traversantes de la contrainte tangentielle longitudinale $\overline{\tau}_{xy}$ dans la plaque carrée FG. Dans ce cas, les valeurs de traction et de compression de la contrainte tangentielle longitudinale $\overline{\tau}_{xy}$ sont respectivement maximales sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque FG.

Il est clair que la valeur minimale de zéro pour la contrainte axiale $\overline{\sigma}_x$ et la contrainte tangentielle longitudinale $\overline{\tau}_{xy}$ se produit à $\bar{z} = 0.051$.

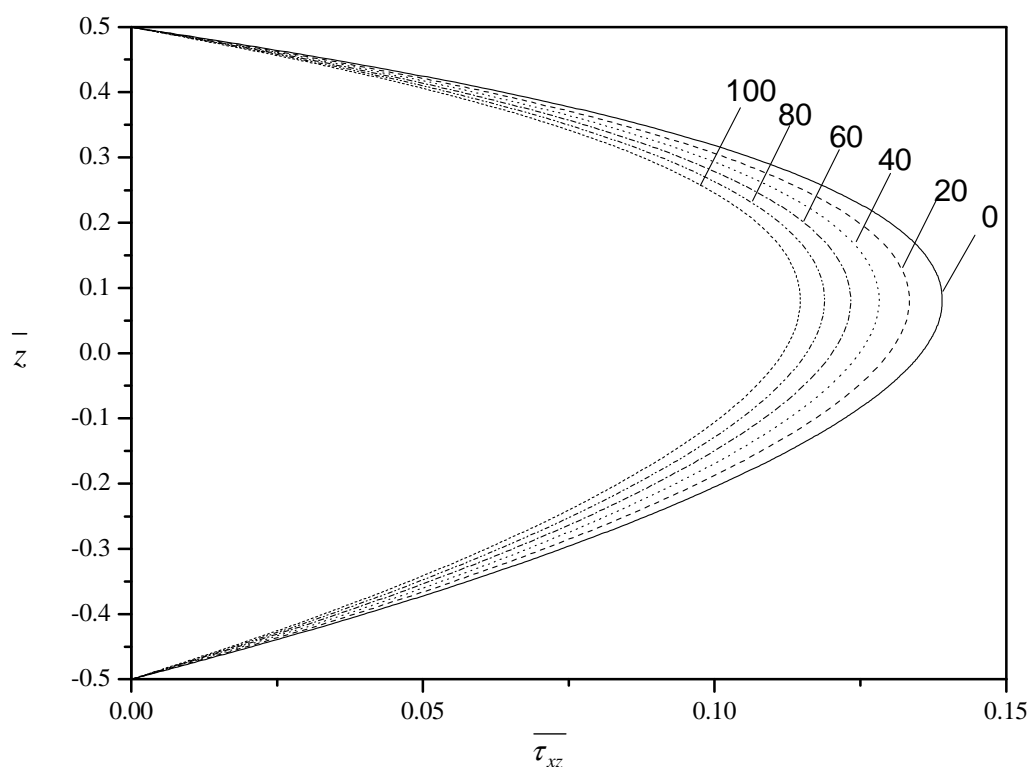


Figure IV.7 :Variation de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ($\overline{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$.

Les figures IV 7 et 8 montrent les distributions des contraintes de cisaillement dans la plaque carrée FG sous une charge répartie sinusoïdale. On voit que les contraintes transversales de cisaillement $\overline{\tau_{xz}}$ ont une distribution paraboliques sur l'épaisseur de la plaque FG et que les contraintes augmentent graduellement à mesure qu'elles diminuent K_w ou K_s diminuent, ce qui indique que des modules augmentés de la fondation élastique peuvent améliorer la rigidité à la flexion de la plaque.

Il est à noter que la valeur maximale de la contrainte de cisaillement transversale $\overline{\tau_{xz}}$ se produit à $\overline{z} = 0.1$, pas au centre de la plaque comme dans le cas homogène.

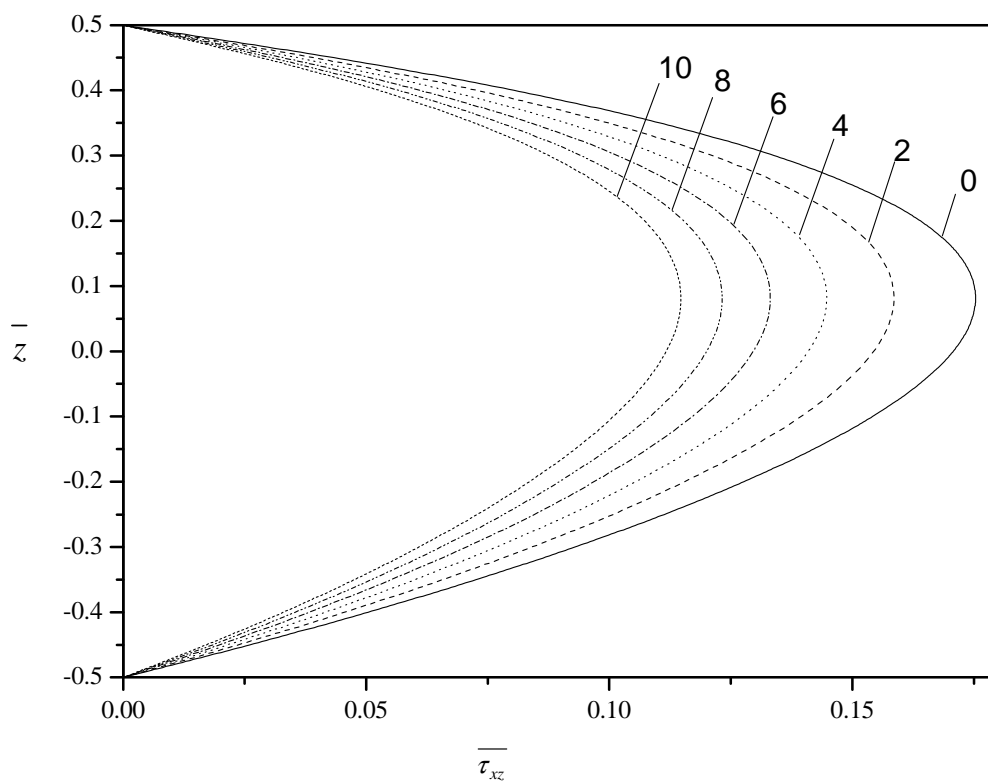


Figure IV.8 : Variation de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ($\overline{\tau_{xz}}$) à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($k = 2$) pour différentes valeurs du paramètre du module de cisaillement Pasternak K_s avec $K_w = 100$ et $a/h = 10$.

IV.4. Conclusion

La réponse en flexion des plaques FG reposant sur une fondation élastique est développée en utilisant une nouvelle théorie des plaques de déformation de cisaillement à trois inconnues. La théorie actuelle n'a que trois équations inconnues et trois gouvernantes comme dans la théorie des plaques classique, mais elle est capable de capturer avec précision les effets de déformation de cisaillement, au lieu de cinq comme dans la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Elle donne une distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement, et vérifie les conditions aux limites de la traction nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. La gradation des propriétés à travers l'épaisseur est supposée être de la distribution de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les résultats montrent que la théorie proposée est non seulement précise et simple pour résoudre le comportement en flexion des plaques FG, mais aussi comparable avec les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur qui contiennent plus d'inconnues et méritent une attention particulière.

Conclusion Générale & Perspectives

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des structures. Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM) dans les domaines de l'ingénierie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie simple et adéquate permettant d'analyser les plaques en FGMs avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Le sujet de notre thèse doctorale est la proposition de nouvelle forme de théorie de déformation de cisaillement pour l'analyse de la réponse des structures, L'objectif fixé pour la thèse est de développer un nouveau modèle basé sur la théorie de déformation de cisaillement de plaque d'ordre supérieur et de déformation normale.

Le premier chapitre de ce thèse a permis d'identifier le concept des matériaux composites à gradient de propriétés fonctionnelles avec un bref historique, déterminer les types de FGM avec un résumé sur les méthodes de fabrication pour terminer par les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

Le chapitre 2 a permis de détailler les différents modèles analytiques pour l'étude du comportement des plaques et leur évolution, jusqu'au besoin de raffiner les théories d'ordre élevé (HSDT) et les pas franchir dans ce sens.

Le chapitre 3 a permis de présenter la nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement pour l'étude analytique en flexion d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak.

Le quatrième chapitre c'est une présentation des résultats du comportement en flexion de plaque FGM, et une validation de ces résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. En ce qui concerne la théorie des plaques présentée ici, les points importants suivants peuvent être notés:

La présente théorie du cisaillement et de la déformation normale proposée dans cette étude, elle ne comporte que trois variables inconnues, présente de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques. Les équations du mouvement sont dérivées du principe des déplacements virtuels. Les contraintes de cisaillement transversales satisfont à des conditions de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

La théorie n'a que trois équations différentielle de cinquième ordre impliquant trois variables. Il est important de noter que même la théorie de Mindlin (FSDT), extrêmement simple et bien connue (théorie de la plaque de déformation par cisaillement du premier ordre), implique trois équations différentielles couplées impliquant trois variables inconnues mais qui nécessite un facteur de correction.

Les fonctions supposées de déplacement de la théorie donnent lieu à une distribution parabolique réaliste des contraintes et contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque. De plus, la théorie ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. L'effet de la déformation normale est plus prononcé pour les plaques très épaisses et doit être pris en compte dans la modélisation physique.

La précision de la théorie proposée dans cette étude est vérifiée par l'analyse de la flexion de la plaque P-FGM. A travers toutes les analyses comparatives, on peut observer que les résultats de déflexion dans cette étude utilisant seulement trois variables inconnues montrent un bon accord avec les résultats d'autres théories de déformation par cisaillement utilisant quatre, cinq et six variables inconnues.

Après avoir examiné une grande partie de la recherche sur les FGM, il est évident que presque toutes les recherches menées ont été purement analytiques ou avec une simulation numérique. L'utilisation des modèles théoriques 2D améliorés, qui semblent maintenant offrir une précision aussi bonne que les modèles 3D, devrait être poursuivie dans l'intérêt des analyses de coûts et des analyses efficaces.

En perspective, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle d'ordre élevé à trois variables pour le calcul de différentes formes de structures FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

Enfin, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans la thématique du développement de nouvelles théories de plaques et poutres pour le calcul des structures en matériau FGM soumises à des différents types de sollicitations.

Références

Bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

Abrate, S. (2008), "Functionally graded plates behave like homogeneous plates", *Composites part B: engineering.*, 39(1), 151-158.

Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A.(2016), "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", *SteelCompos.Struct.*,**20**(5),963-981.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A.(2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J.Sandw.Struct.Mater.*,**16**(3),293-318.

Ait Atmane., H., Tounsi, A., Mechab, I., E.A Adda Bedia,(2010) "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121,.

Ait Atmane, H.,Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R.(2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *SteelCompos.Struct.*,19(2),369-384.

AitYahia,S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.(2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct.Eng.Mech.*,53(6),1143-1165.

Akavci. S.S, (2016) "Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation" . *Composites Part B* 96 ,136-152

Ambartsumian SA.(1958) "On the theory of bending plates". *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*;5:69–77.

Ambartsumian SA.(1960) "On the theory of bending of anisotropic plates and shallow shells". *J Appl Math Mech*;24(2):500–14.

Arefi, M. (2015), "The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers", *Smart Structures and Systems.*, 15(5), 1345-1362.

Atai, A. A. , Nikranjbar, A. and Kasiri, R. (2012) “Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, , vol. 226, pp. 607-614.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.(2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct.*,18(1),187-212.

Aydogdu, M. (2009) , "A new shear deformation theory for laminated composite plates". *Composite Structures* 89, 94–101

B

Bao., G. , Wang, L.(1995) "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871,.

Batani, M. , Kiani, Y., Eslami, M.R., (2013) , "A comprehensive study on stability of FGM plates", *International Journal of Mechanical Sciences* 75,134–144

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, 60, 274-283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Struct. Syst.*, 18(4), 755-786.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos. Struct.*, 18(4), 1063-1081.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear post buckling of nanobeams", *Struct. Eng. Mech.*, 62(6), 695-702.

Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Struct. Eng. Mech.* (Accepted)

Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.

Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A. and Atmane, H.A. (2010), "Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Mech. Compos. Mater.*, 46(4), 425-434.

Benveniste Y. (1987) "A new approach to the application of Morie Tanaka's theory in composite materials". *Mech Mater*; 6(2):147e57.

Besra, L. , Liu, M. (2007) "A review on fundamentals and applications of electrophoretic deposition (EPD)", *Prog. Mater. Sci.* 52 (1), 1–61.

Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2017), “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new non local trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst.*,**19**(6),601-614.

Bharti, I., N. Gupta, K. M. Gupta,(2013) "Novel Applications of Functionally Graded Nano, Optoelectronic and Thermoelectric Materials", *Int. J. of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 1, 221-224.

Shailendra Kumar Bohidar, Ritesh Sharma, Prabhat Ranjan Mishra, (2014) , "Functionally Graded Materials: A Critical Review". *International Journal of Research (IJR)* Vol-1, Issue-7, August ISSN 2348-6848

Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A. and Tounsi, A.(2017), “A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams”, *Smart Struct. Syst.*,**19**(2),115-126.

Bouderba B, Houari M S A, Tounsi A.(2013)"Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations". *Steel and Composite Structures*;14:85–104.

Boukhari, A., Ait Atmane,H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.(2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 57(5),837-859.

Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A.(2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*,**20**(2),227-249.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A.(2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*,**14**,5-33.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A.and Tounsi, A.(2015),“A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct.*, 18 (2) , 409 - 423.

Bousahla, A. A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and AddaBedia, E.A.(2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int.J.Comput.Meth.*, 11(6), 1350082.

Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2016), "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", *Struct. Eng. Mech.*, 60(2), 313-335.

BRAULT Romain, (2013) "Étude du comportement mécanique des matériaux composites par corrélation volumique : Application à l'analyse des effets du cisaillement transverse". *Thèse Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.*

C

Castellazzi, G., Krysl, P., Bartoli, I. (2013), "A displacement-based finite element formulation for the analysis of laminated composite plates", *Composite Structures.*, 95, 518-527.

Chartier, T. and Boch, P.(2001) "Mecanique et Ingenierie des materiaux, Materiaux et processus ceramiques", *Hermes Science Publications.*,

Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, (2003) "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243,

Cho, J.R. , Tinsley Oden, J. (2000), "Functionally graded material: a parametric study on thermal-stress characteristics using the Crank±Nicolson±Galerkin scheme". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188, 17±38

Choy, K.L. (2003) "Chemical vapour deposition of coatings", *Prog. Mater. Sci.* 48, (257–170).

D

Daouadji T., Tounsi A, Hadji L, Abdelaziz HH, Adda bedia EA (2012) "A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates". *Mater Phys Mech J.* 14. ISSN 1605-8119 P 110-128 N0 2–02

Daouadji, T., Tounsi, A., & Bedia, E. (2013). A New Higher Order Shear Deformation Model for Static Behavior of Functionally Graded Plates. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 5(3), 351-364

Darilmaz, K. (2015), "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel and Composite Structures.*, 18(2), 395-408.

Delale F, Erdogan F.(1983), "The crack problem for a non homogeneous plane". *ASME JAppl Mech*;50:609–14.

Dorfman, M. (2002), "Thermal spray processes", *Adv. Mater. Process.* 160 (10), 66–68.

Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2016), “A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates”, *Geomech. Eng.*,11(5),671-690.

E

El-Haina, Fouzia; Bakora, Ahmed; Bousahla, Abdelmoumen Anis; Tounsi, Abdelouahed; Mahmoud, S.R.(2017); "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates".*Structural Engineering and Mechanics* 63 (5),585-595

EL-Wazery, M. S. , EL-Desouky , A. R. , (2015), "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials". *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376

Erdogan F, Chen YF.(1998) "Interfacial cracking of FGM/metal bonds". *In: Kokini K,editor. Ceramic Coating.*,.

F

Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.(2017), “ A four variable refined n th-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”,*Geomech.Eng.*,13(3),385-410.

Fekrar,A., Houari, M.S.A.,Tounsi, A.and Mahmoud, S.R.(2014),“A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*,49,795-810.

Ferreira, A. J. M., Castro, L. M., Bertoluzza, S. (2009), "A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory", *Composite Structures.*, 89(3), 424-432.

G

Ghugal, Y. M., Shimpi, R. P. (2002), "A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates", *Journal of Reinforced Plastics and Composites.*, 21(9), 775-813.

Groves, J. F. and Wadley H. N. G. (1997) "Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition". *Composites Parts B 28B*, 57-69.

H

Hamidi, A.,Houari, M.S.A., Mahmoud,S.R. and Tounsi, A.(2015),“A sinusoidal plate theory with5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”,*SteelCompos.Struct.*,18(1),235-253.

Hanna N.F., Leissa A.W.(1994): "A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates", *J. Sound Vib.*, 170(4): 545-555.

Hebali,H., Tounsi,A.,Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A.(2014),“New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J.Eng. Mech.*, ASCE,140,374-383.

Hirano T, Yamada T.(1988), "Multi-paradigm expert system architecture based upon the inverse design concept". *In: International Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications, Hitachi, Japan.*,

Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S. R. (2016), "A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel and Composite Structures.*, 22(2), 257-276.

Huang, Z.Y., Lu, C.F. and Chen, W.Q.,(2008), "Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Compos. Struct.*, 85(2),95-104.

J

Jamaludin, S. N. S., Mustapha, F., Nuruzzman, D. M., & Shah Nor Basri. (2013). A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites. *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828–840.

Jha, D.K. , Tarun Kant , R.K. Singh. (2013), "A critical review of recent research on functionally graded plates". *Composite Structures* 96 , 833–849

Jin ZH, Paulino GH.(2001), "Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material". *Int J Fracture*;107:73–98.

K

Kant. T., Swaminathan, K.(2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory". *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344,.

Karama. M., Afaq. K.S., Mistou, S.(2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546,.

Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H. and Nakashima, K. (2011) "Fabrication of Al₂O₃-W Functionally Graded Materials by Slip casting Method", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 18,

Kawasaki, A. , Watanabe, R. , (1997) " Concept and P/M Fabrication of Functionally Gradient Materials". *Ceramics International* 23 ,73-83

Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2017), "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng.Mech.*,64(4), 391-402.

Kieback B., Neubrand A., Riedel H. (2003), "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering A362* ,81–105

Kirchhoff, G.R., (1850) "Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastischem scheibe", *J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.

Kitipornchai S., Yang J., Liew K.M. (2006). "Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195 ,1075-1095.

Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2017), "An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates", *Struct. Eng. Mech.*,63(4),439-446.

Koizumi, M. (1993) "The concept of FGM", *Ceramic Transactions* 34,3–11.

Koizumi M.(1997) "FGM activities in Japan". *Compos Part B Eng*;28(1-2):1–4.

L

Lee. W-H , Sung-Cheon Han , Weon-Tae Park. (2015) , A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Composite Structures* 122 330–342.

Lam, K.Y., Wang, C.M. and He,X.Q.(2000),"Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions", *Eng.Struct.*,**22**(4),364-378.

Won-Hong Lee , Sung-Cheon Han , Weon-Tae Park . (2015), "A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation". *Composite Structures* 122 330–342

Levinson M. (1980), "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". *Mech Res Commun*;7(6):343–50.

M

Mahamood, R.M. and Titilayo Akinlabi E.(2017), "Functionally Graded Materials, Types of Functionally Graded Materials and Their Areas of Application (chapter2)", *Springer International Publishing AG, Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*, DOI 10.1007/978-3-319-53756-6_2

Mahi A, Bedia E A,Tounsi A.(2015) "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates". *Appl Math Model*; 39 (9) :2489 – 508.

Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.(2017), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*,1099636217698443.

Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R.(2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, **25**(2), 157-175.

Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos.Struct.*,18(3),793-809.

Mindlin, R.D.(1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38,.

Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A.,Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2017), "Vibration analysis of non local advanced nanobeams inhygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Struct.Syst.*, 20(3), 369-383.

Mori T, Tanaka K.(1973) "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions". *Acta Metall*; 21(5):571e4.

N

Naebe, M., Shirvanimoghaddam, K. (2016) ,"Functionally graded materials: A review of fabrication and properties" , *Applied Materials Today* 5 223–245

Naghdi P. M. (1957), "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.

Navier, C.L.M.H. (1823.), Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris,

Nguyen, V. H., Nguyen, T. K., Thai, H. T., Vo, T. P. (2014), “A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates”, *Composites Part B: Engineering.*, 66, 233-246.

Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., Thai, H. T. (2015), “Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory”, *Composites Part B: Engineering.*, 76, 273-285.

Niino M., Hirai T. and Watanabe R. (1987), “The functionally gradient materials,” *J Jap Soc Compos Mat*, vol.13, pp. 257-264.

P

Pasternak P. L. (1954), “On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants,” *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow.*,

Pradhan, K. K., Chakraverty, S. (2015), "Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports", *Structural Engineering and Mechanics.*, 53(2), 337-354.

Proner A., (1999). "Revêtement par projection thermique". *Techniques de l'ingénieur, M 1645*, 3-20.

Put S., Vleugels J., Van Der Biest O., (2003), "Gradient profile prediction in functionally graded materials processed by electrophoretic deposition", *Acta Materialia* 51 6303–6317

R

Rajan, T. P. D., & Pai, B. C. (2009). Development in manufacturing process of functionally graded materials. *International journal of advanced engineering applications*.

Reddy J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752,.

Reddy J.N., Phan N.D.(1985): "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory", *J. Sound Vib.*, , 98(2): 157-170.

Reddy J.N.(1997), "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". *CRC Press, Boca Raton*,.

Reddy J.N.(1999), "Theory and Analysis of Elastic plates". *Taylor & Francis, Philadelphia*,.

Reddy J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47 663–684.

Reissner E.(1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77,.

Reissner E.(1975), "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation", *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502,.

S

Said, A., Ameer, M., Bousahla, A. A., Tounsi, A. (2014), "A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *International Journal of Computational Methods*, 11(06), 1350098.

Senthilnathan NR, Chow ST, Lee KH, Lim SP.(1987), "Buckling of shear-deformable plates". *AIAA J*;25(9):1268–71.

Senthilnathan N. R., Lim S. P., Lee K. H. & Chow S. T. (1988) , " Vibration of Laminated Orthotropic Plates using a Simplified Higher-order Deformation Theory". *Composite Structures* **10** 211-229

Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R.(2017), "A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate",*Steel Compos. Struct.*,25(4), 389-401.

Shabana Y.M. and Noda N. (2001), "Thermo-elasto-plastic stresses in functionally graded materials subjected to thermal loading taking residual stresses of the fabrication process into consideration", *Composites Part B* 32, 111–121.

[Shanmugavel 2012]: P. Shanmugavel, G. B. Bhaskar, M. Chandrasekaran, P. S. Mani and S. P. Srinivasan, "An overview of fracture analysis in functionally graded materials," *European Journal of Scientific Research*, vol.68 No.3 (2012), pp. 412-439.

Shimpi R. P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 1, January,137–146.

Shimpi R.P., Patel H.G. (2006) , "Free vibrations of plate using two variable refined plate theory". *Journal of Sound and Vibration* 296 ,979–999

Shishkovsky I., Missemer F., Smurov I., (2012)," Direct metal deposition of functional graded structures in Ti-Al system", *Physics Procedia* 39 382 – 391

Sobczak J.J., Drenchev L. (2013), "Metallic functionally graded materials: a specific class of advanced composites", *J. Mater. Sci. Technol.* 29 (4), 297–316.

Sobhy M. (2013) , "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions". *Composite Structures* 99 76–87

Sobhy M. (2016) , . "An accurate shear deformation theory for vibration and buckling of FGM sandwich plates in hygrothermal environment". *International Journal of Mechanical Sciences* 110 62–77

Soldatos KP. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates". *Acta Mech* ; 94:195–220.

Soldatos KP, Timarci T.(1993), "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories". *Compos Struct*;25:165–71.

Souza F., Mansur H.S. (2004), "Production and characterization of ceramic pieces obtained by slip casting using powder wastes" , *Journal of Materials Processing Technology* 145 14–20

T

Tahar Hassaine Daouadji , Abdelouahed Tounsi , El Abbes Adda Bedia. (2013), Analytical solution for bending analysis of functionally graded plates. *Scientia Iranica B* 20 (3), 516–523

Thai. H.T., Kim. S.-E. (2013), "A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates". *Composite Structures* 96 ,165–173

Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 17(2), 99 - 129.

Timoshenko. S.P., S.Woinowsky-Krieger,(1959), "Theory of Plates and Shells". *McGraw-Hill, New York*,.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A.(2013),“A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp.Sci.Technol.*, 24(1),209-220.

Touratier M. (1991), "An efficient standard plate theory", *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916,.

U

Udupa G. , Shrikantha Rao S., Gangadharan K. V. (2014), "Functionally graded composite materials: An overview", *Procedia Materials Science* 5 1291 – 1299

W

Wang S. S. (1983) "Fracture mechanics for delamination problems in composite materials," *Journal of Composite Materials*, , vol. 17(3), pp. 210-223.

Watanabe. Y , Inaguma. Y , Sato. H and Eri Miura-Fujiwara, (2009), "A Novel Fabrication Method for Functionally Graded Materials under Centrifugal Force: The Centrifugal Mixed-Powder Method", *Materials*, 2, 2510-2525;

Watari F., Yokoyama A., Matsuno H., Miyao R., Uo M., Kawasaki T., Omori M., and Hirai T. (2001), "Fabrication of functionally graded implant and its biocompatibility," *functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts*. Boston, Kluwer Academic, , pp. 187–190.

Whitney J.M., Sun C.T.(1973): "A higher order theory for extensional motion of laminated composites", *Journal of Sound and Vibration*, , 30: 85-97.

Winkler E. (1867) "in: Theory of Elasticity and Strength", *Dominicus, Prague*,.

Y

Yang J, Liew KM, Kitipornchai S.(2005) "Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading". *Int J Mech Sci*;47(10):1519–41.

Z

Zenkour A.M. (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates" . *Applied Mathematical Modelling* 30 67–84

Zenkour A.M. (2009), "The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations". *International Journal of Mechanical Sciences* 51 869–880

Zhu H.X., Abbaschian R. (2000), "Microstructures and properties of in-situ NiAl–Al₂O₃ functionally gradient composites", *Compos. Part B* 31 383–390.

Zhu K., Wang H., Qiu J., Luo J., and Ji H.,(2011). "Fabrication of 0.655Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O₃-0.345PbTiO₃ functionally graded piezoelectric actuator by tape casting", *J Electro ceram*, , vol.27, pp.197–202.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég,O.(2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory",*Aerosp.Sci.Tech.*,34,24-34.

Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R.(2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech., Int.J.*,64(2), 145-153.

Voyiadjis, G.Z., Baluch, H.M., (1981). "A refined theory for flexural motions of isotropic plates". *J. Sound Vibr.* 76, 57–64.