

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures et matériaux**

Présenté par

SAID Abderrahmane

Sujet de thèse

Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil

Soutenu le ... /.... /2015, devant le Jury composé de :

M ^r . TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Président
M ^r . AMEUR Mohammed	MCA	ENP-ORAN	Directeur de thèse
M ^r . ADDA BEDIA El Abbas	Professeur	UDL-SBA	Co-Directeur de thèse
M ^r . AIT AMAR MEZIANE Mohamed	MCA	U-TIARET	Examineur
M ^r . AIT ATMANE Hassen	MCA	U-CHLEF	Examineur
M ^r . HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	U. MASCARA	Examineur

Année universitaire: 2015-2016

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à remercier "ALLAH" le Tout Puissant de m'avoir donné la volonté, la force, la patience, le courage, la santé... pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer un remerciement tout spécial à mes parents, pour m'avoir soutenu et encouragé tout au long de mes études.

*Je tiens à manifester toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur **AMEUR Mohammed**, Maitre de Conférence à l'ENP d'Oran, de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide considérable, sa rigueur scientifique, la confiance qu'il m'a accordée, sa grande disponibilité et la pertinence de ses nombreux conseils, et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour finaliser la thèse.*

*Mes plus vifs remerciements vont aussi à mon co-directeur de thèse Monsieur, **ADDA BEDIA El Abbas**, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes, qu'il m'a apporté d'une aide précieuse à de nombreuses reprises. Je le remercie infiniment pour sa disponibilité, sa gentillesse et l'attention qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.*

*Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

*J'exprime ma profonde gratitude aux membres du jury, Messieurs : **AIT AMAR MEZIANE Mohamed**, **AIT ATMANE Hassen**, **HOUARI Mohamed Sid Ahmed**, qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury et d'examiner mon travail.*

Merci à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents, mes sœurs et frères, qui m'ont supporté moralement durant la période de l'élaboration de cette thèse.

Et pour finir, je tiens à remercier le Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université de Sidi Bel Abbes ainsi que ces membres pour leurs aides, leur respect et gentillesse.

RESUME

Dans la présente étude, une solution analytique pour l'analyse statique des plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, est présenté à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Le nombre de variables primaires impliquées dans cette théorie est inférieur à celui des théories de premier ordre ou d'ordre supérieur. La théorie donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverses à travers l'épaisseur et satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. La réponse en termes de contraintes et de déplacements des plaques FGM sont analysés sous chargement sinusoïdal. Dans cette étude, on suppose que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs études paramétriques sont menées pour montrer les effets des différents paramètres sur la réponse de la plaque FGM à savoir : l'influence du rapport d'élancement, de l'index de la fraction volumique des matériaux constituants (céramique et métal) et de l'effet des raideurs de la fondation élastique. Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés pour les plaques avec un mélange céramique-métal et ont été comparés aussi avec celui des plaques isotropes homogènes.

Mots clés : Matériaux fonctionnellement gradués, théorie de déformation de cisaillement, théorie d'ordre élevé, position exacte de la surface neutre, fondations élastiques.

ABSTRACT

In this study, an analytical solution for static analysis of functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations is presented with a new hyperbolic shear deformation theory. The number of primary variables involved in this theory is less than that of the first order or higher order theories. The present theory gives a parabolic distribution of transverse shear stresses through the thickness and satisfied the zero shear stress condition on the free edges without the use of shear correction factors. The response in terms of stresses and displacements of the FGM plates are analyzed under sinusoidal loading. In this study, it is assumed that the material properties (Young's modulus) of the FGM plate vary continuously through the thickness according to a simple power law distribution based of the volume fraction of the constituents. Several parametric studies are conducted to show the effects of various parameters on the response of the FGM plate including: the influence of slenderness ratio, the index of the volume fraction of the constituent materials (ceramics and metal) and the effect of the elastic foundation stiffness. Dimensionless stresses and displacements are calculated for the plates with a ceramic-metal mixture and were also compared with that of the homogeneous isotropic plates.

Keywords: functionally graded materials, shear deformation theory, higher order theory, exact position of the neutral surface, elastic foundations.

TABLE DES MATIERES

Liste des tableaux.....	viii
Liste des figures	ix
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés	
I.1 Introduction.....	5
I.2 Historique des matériaux type FGM.....	6
I.3 Applications des matériaux FGM dans l'industrie	10
I.4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels	11
I.5 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs.....	13
I.5.1 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	13
I.5.2 Coulage en bande (Tape casting).....	14
I.5.3 Compactage des couches (poudre d'empilement).....	15
I.5.4 Coulée par centrifugation.....	15
I.5.5 Projection plasma.....	15
I.5.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	16
I.5.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	17
I.5.8 Frittage Laser Différentiel.....	19
I.5.9 Dépôt par électrophorèse.....	20
I-5.10 Implantation Ionique (Sputtering).....	21
I.5.11 Dépôt par Centrifugation.....	21
I.6 Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	22
I.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	23
I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	24
I.6.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	26
I.7 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	27
I.8 Conclusion.....	29

Chapitre II : Application du FGM en génie civil

II.1 Introduction.....	30
II.2 Application de la technologie du FGM en génie civil.....	30
II.2.1 Le Béton à gradient de propriétés.....	31
II.2.2 Autres matériaux à gradient de propriétés.....	32
II.2.3 Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil.....	33
II.3 Conclusion.....	34

Chapitre III : Revue des travaux antérieurs sur les structures FGM

III.1 Introduction.....	36
III.2 Etudes des contraintes résiduelles.....	36
III.3 Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques.....	38
III.4 Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique.....	39
III.5 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM	41
III.6 Etudes sur les problèmes de l'analyse de flexion des plaques FGM reposant sur fondation élastique	44
III.7 Conclusion	47

Chapitre IV : Théories des plaques

IV.1 Introduction.....	48
IV.2 Les Différent Modèle des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	48
IV.2.1 Approche monocouche équivalente.....	48
IV.2.1.1 Les modèles classiques Love-Kirchhoff.....	49
IV.2.1.2 Les modèles Reissner-Mindlin.....	50
IV.2.1.3 Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur.....	51
IV.2.2 Approche par couche.....	55
IV.2.2.1. Les modèles zig-zag.....	56
IV.3 Conclusion.....	57

Chapitre V: Formulation théorique des plaques FGM reposant sur fondation élastique

V.1 Introduction.....	58
V.2 Formulation du problème.....	59
V.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur.....	62
V.4 Nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique.....	63

V.4.1 Hypothèses de la présente théorie des plaques (NHSDT).....	64
V.4.2 Cinématique et équations constitutives.....	65
V.4.3 Les équations constitutives.....	66
V.5 Solutions exactes pour les plaques FGM.....	69
V.6 Conclusion.....	71
Chapitre VI : Résultats et discussions	
VI.1 Introduction.....	72
VI.2 Etudes comparatives	73
VI.3 Conclusion	81
Conclusion générale	82
Références bibliographiques	84

LISTE DES TABLEAUX

Tableau VI.1: Propriétés matériels de la plaque FGM.....	72
Tableau VI.2: Effet du rapport d'élancement (largeur a /épaisseur h) et les paramètres de fondation élastique sur la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque FGM isotrope carrée.....	74
Tableau VI.3: Effets de la fraction volumique et les paramètres de fondation élastique sur les déplacements et les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée selon la présente méthode ($a/h=10$).....	75

LISTE DES FIGURES

Figure I.1: FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction (verticale).....	7
Figure I.2: Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP).Aspect externe (gauche) et section transversale (droite).....	11
Figure I.3: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	12
Figure I.4: La distribution composante des matériaux.....	12
Figure I.5: Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué.....	16
Figure I.6: Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	18
Figure I.7: Disposition du procédé frittage laser différentiel.....	20
Figure I.8: Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux.....	21
Figure I.9: Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	22
Figure I.10 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	23
Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	24
Figure I.12: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	25
Figure I.13 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	26
Figure I.14 : Les principaux domaines d'application des FGM.....	27
Figure II.1: Structure d'une paroi à gradient de propriétés.....	31
Figure II.2: Essai de flexion à quatre points.....	32
Figure II.3: Texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée+essai de l'étanchéité à l'eau.....	32
Figure II.4: Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité.....	33
Figure II.5: transition matérielle continue (bois à l'aluminium).....	33
Figure IV.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.....	49

Figure IV.2: Cinématique de Reissner-Mindlin.....	50
Figure IV.3: Variation de la fonction de gauchissement.....	51
Figure IV.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	52
Figure IV.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	54
Figure IV.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	54
Figure IV.7: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.....	55
Figure IV.8: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.....	55
Figure IV.9: Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre...	56
Figure IV.10: Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.....	57
Figure V.1: Plaque FGM repose sur fondation élastique.....	59
Figure V.2 Variation de la position de la surface neutre par rapport à l'indice de la loi de puissance.....	62
Figure VI.1: Variation de la contrainte longitudinale ($\bar{s}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_0	76
Figure VI.2: Variation de la contrainte axiale ($\bar{S}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_1	76
Figure VI.3: Variation de la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{t}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_0	77
Figure VI.4: Variation de la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{t}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_1	78
Figure VI.5: Variation de la contrainte tangentielle longitudinale ($\bar{t}_{xy}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_0	79
Figure VI.6: Variation de la contrainte tangentielle longitudinale ($\bar{t}_{xy}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_1	79
Figure VI.7: L'effet de l'anisotropie sur la flèche maximale adimensionnelle ($\bar{w}$) d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0	80
Figure VI.8: L'effet de l'anisotropie sur la flèche maximale adimensionnelle ($\bar{w}$) d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1	80

INTRODUCTION GENERALE

Ces dernières années, le monde industriel a connu une évolution remarquable grâce à l'avancement de la science. Des recherches scientifiques intensives ont été effectuées pour concevoir des procédés novateurs et des matériaux performants répondant aux besoins incessants de l'industrie.

Les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais: Functionally Graded Materials) ont prouvé fortement leur présence au monde industriel et ont acquis une grande popularité en raison de leurs capacités thermiques et mécaniques considérables. Ces matériaux sont une nouvelle génération des matériaux composites, introduits en premier temps par un groupe scientifique japonais en 1984 (Yamanouchi et al, 1990 ; Koizumi, 1993).

Les matériaux FGM ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces rencontrés dans les matériaux composites classiques.

Typiquement, les FGMs sont fabriqués par la céramique et le métal combinant la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Les FGMs sont utilisés comme des éléments de structure travaillant dans des environnements à haute température en vue de leurs compositions riches en céramique, ils peuvent être soumis à des gradients thermiques extrêmement élevés, tel que le cas des structures d'aéronautiques, véhicules spatiaux, enceintes nucléaires et d'autres applications dans le domaine de l'ingénierie. Cependant les FGMs touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, etc.

Les plaques rectangulaires épaisses fabriquées en FGM sont souvent employées comme des éléments des structures d'ingénieries. De plus, pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs types de modèles de fondations ont été proposés. Le plus simple est le modèle de Winkler (modèle à 1 seul paramètre) qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans les effets de couplage entre eux. Ainsi, dans ce modèle les propriétés

du sol sont décrites seulement par un seul paramètre (K_w), qui représente des ressorts verticaux (Avramidis and Morfidis, 2006). Cependant, le modèle de Winkler est incapable de prendre en considération la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qui stipule qu'il n'y a pas une interaction entre les ressorts voisins mène à l'ignorance de l'influence du sol dans certaines parties de la poutre ou de la plaque. Pour surmonter cet handicap, plusieurs modèles de fondation élastique à deux paramètres ont été proposés tels que les fondations élastiques de Pasternak (Pasternak, 1954).

Le modèle de Pasternak est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure-fondation. Zenkour (2009) a utilisé une théorie sinusoïdale raffinée des plaques pour l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques FG soumises à un chargement uniforme transversal et supportées par des fondations élastiques à deux paramètres.

Benyoussef et al. (2010) ont investigué la réponse statique des plaques épaisses FG reposant sur des fondations de type Pasternak par l'utilisation de la théorie hyperbolique de déformation de cisaillement.

Ait Atmane et al. (2010) ont étudié le comportement dynamique des plaques FG supportées par des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. Cheng et Kitipornchai (1999) ont proposé une analogie de membrane pour déterminer les valeurs propres pour le flambement par compression, flambement hydrauthermique et la vibration des plaques FG reposants sur des fondations de type Winkler-Pasternak en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). La même analogie de membrane a été ensuite appliquée à l'analyse des plaques et coques FG en utilisant la théorie des plaques du troisième ordre (Cheng and Batra, 2000; Reddy and Cheng, 2002).

L'effet de la fondation élastique de type Pasternak sur le comportement en post-flambement des plaques FG modérément épaisses est étudié par Yang et al. (2005 a). Dans leur étude, les quatre cotés de la plaque sont supposés être encastres et la formulation est basée sur la FSDT.

La réponse en post flambement thermomécanique des plaques FG basée sur la solution analytique est présentée par Woo et al. (2005). Ils ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement des plaques du troisième ordre (Le champ de déplacement de Reddy) et le tenseur de Von Karman des grandes flèches pour obtenir les équations différentielles

partielles couplées et ont employé une série de solutions mixtes pour les résoudre. Leur étude inclut quatre types de conditions aux limites pour la plaque.

Zenkour et Sobhy (2010) ont investigué le comportement du flambement thermique de plusieurs types de plaques sandwich FG. Zenkour et Sobhy (2011) ont étudié le flambement thermique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques à un ou deux paramètres en utilisant la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique.

Ameur et al. (2011) ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour étudier la réponse statique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques de type Pasternak. Zenkour et Sobhy (2012) ont examiné la réponse statique des plaques sandwich FG viscoélastiques et simplement appuyées soumises à des charges uniformes transversales.

Zenkour et sobhy (2013) ont étudié la réponse dynamique des plaques FG thermoélastiques reposant sur des fondations. Tounsi et ses collaborateurs (Abdelaziz et al, 2011 ; El Meiche et al, 2011 ; Hadji et al, 2011 ; Benachour et al, 2011 ; Bourada et al, 2012 ; Kaci et al, 2012 ; Bachir Bouiadjra et al, 2012 ; Fekrar et al, 2012 ; Boudierba et al, 2013 ; Tounsi et al, 2013 ; Kettaf et al, 2013 ; Bachir Bouiadjra et al, 2013 ; Houari et al, 2013 ; Bessaim et al, 2013 ; Belabed et al, 2014 ; Fekrar et al, 2014 ; Boussahla et al, 2014 ; Hebali et al, 2014 ; Zidi et al, 2014 ; Klouche Djedid et al, 2014 ; Draiche et al, 2014 ; Sadoune et al, 2014 ; Nedri et al, 2014 ; Khalfi et al, 2014) ont étudié les réponses mécaniques FG et composites en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée.

L'objectif principal de ce travail est de développer une solution analytique pour l'analyse statique des plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. À cet effet, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique est proposée. Le nombre de variables primaires impliquées dans cette théorie est inférieur à celui des théories de premier ordre ou d'ordre supérieur. La théorie donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverses à travers l'épaisseur et satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres, sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. La réponse en termes de contraintes et de déplacements des plaques FGMs ont été analysés sous un chargement sinusoïdal. Dans cette étude, on suppose que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs études paramétriques seront effectuées pour montrer les effets des différents paramètres sur la

réponse de la plaque FGM à savoir : l'influence du rapport d'élancement, de l'index de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal), rapport de l'élancement (largeur/épaisseur) de la plaque et de l'effet des raideurs de la fondation élastique. Les contraintes et les déplacements adimensionnels seront calculés pour les plaques ayant un mélange céramique-métal et seront comparés aussi avec celui des plaques isotropes homogènes.

Le plan de la présente thèse est organisé en six chapitres répartis comme suit: Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel (également appelés matériaux à gradient de propriétés ou matériaux fonctionnellement gradués) ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse, le premier chapitre est consacré aux matériaux à gradient de propriété, leurs utilisations, leurs développements, les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles, les différentes théories applicables aux structures fonctionnellement graduées ainsi que leurs domaines d'application.

Une revue montrant quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriétés en génie civil, est l'objet du second chapitre.

Le troisième chapitre est dédié aux travaux réalisés sur les structures FGM, aux théories qui leurs sont appliquées et les procédures de résolutions utilisées pour résoudre certains problèmes posés. Le quatrième chapitre expose un rappel sur les théories des plaques. Le chapitre cinq est réservé à la présentation d'une nouvelle théorie analytique permettant l'analyse statique des plaques FGM reposant sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak.

Le sixième chapitre est consacré aux résultats obtenus par la nouvelle théorie proposée. Une étude paramétrique sera effectuée en incluant les effets de l'indice matériel, les rapports de dimensions géométriques, les rapports d'élancement et de l'effet des raideurs de la fondation élastique. Les contraintes et les déplacements adimensionnels seront déterminés pour des plaques ayant un mélange céramique-métal et seront comparés aussi avec celui des plaques isotropes homogènes.

Ce travail de thèse s'achève par des conclusions relatives à ce travail de recherche ainsi que des perspectives envisagées pour d'éventuels travaux futurs.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

I.1 Introduction

Lors de l'examen des porteurs de charge de nature biologiques tels que les tiges de plantes et les troncs d'arbres, d'os d'animaux, des coquilles de mollusques, et d'autres tissus biologiques durs, on peut voir que sa géométrie change pour tenir compte de leur environnement physique. Cela implique qu'ils sont très adaptés à toutes les conditions aux limites et du chargement définies par leur environnement. Seule la structure la plus économique est en mesure de survivre à la concurrence intense de l'énergie et les conditions physiques externes avec la quantité minimale de matériaux à leur disposition dans leur espace de vie limitée. Par exemple, la structure interne (architecture) d'un os a une forme optimisée par rapport à la direction de contrainte principale et l'ampleur de la contrainte de cisaillement [Koch, I.C 1917]. Ceci a été expliqué pour être due à une conception mécanique optimisée qui est caractérisée par une distribution uniforme des contraintes, sans pics de contrainte localisées [Mattheck, C. et Burkhardt, S., 1990]. Ceci suggère que les os et d'autres tissus biologiques sont gérés par un système auto-optimisation avec des mécanismes de détection capables de détecter des stimuli mécaniques externes afin de contrôler le modelage et le remodelage du système squelettique [Mattheck, C. 1990]. Il peut être déduit, par conséquent, que la forme et la structure ingénieuse de tissus durs biologiques sont le résultat d'un processus continu d'optimisation intelligente. Cette découverte en biologie constitue une source d'inspiration aux scientifiques pour développer une nouvelle génération des matériaux performants, capables de répondre aux exigences du domaine industriel de nos jours (grande dureté, résistance à la corrosion, résistance à la chaleur, conductivité thermique optimale, etc.). Ces performances dépendent en grande partie des propriétés du matériau, mais aussi de l'optimisation de l'architecture des phases en présence (Mishnaevsky, L. et Schmauder, S., 2001). Une variété de méthodes a été proposée dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui suscitent un intérêt particulier, il y a la réalisation des matériaux à gradient de propriété FGM (Functionally Graded Materials).

En effet, les FGMs sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés (Nabil Ferguen et al, 2011). Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels. Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés est illustré pour les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil (O. BOUAZIZ, 2011).

Cette stratégie de développement semble très prometteuse en particulier pour optimiser la tenue en température et la ténacité. La plupart des « FGM » sont constitués d'un mélange de céramique et de métal. Cette composition est variée d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal avec une variation graduelle des fractions volumiques de ces deux matériaux entre les deux surfaces (J. N. Reddy, 2000).

La diversité des matériaux et de leurs propriétés correspond à la diversité des applications techniques : éléments porteurs d'une construction civile ou mécanique, éléments d'un circuit électromagnétique, protecteurs résistants aux agressions thermique ou chimiques, capteurs. La multitude d'objectifs provoque toujours de nouveau matériau.

La plupart des matériaux composites les plus légères avec les rapports de haute résistance/poids et rigidité/poids ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et d'autres applications de technologie. Cependant, le matériau composite traditionnel est incapable pour l'utiliser sous les environnements à hautes températures. Généralement les métaux ont été utilisés dans le domaine de technologie pendant plusieurs d'années à cause de leur excellente force et dureté. Dans les conditions à hautes températures, ces caractéristiques du métal sont assimilées réduites aux matériaux composites traditionnels. Les matériaux à base de céramique ont d'excellentes caractéristiques dans la résistance thermique. Cependant, les applications de céramique sont habituellement limitées en raison de leur basse dureté.

I.2 Historique des matériaux type FGM

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les

années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de matériaux à gradient de propriétés (functionally graded matériels : FGM) a attiré une grande attention. Un FGM typique, est un composite non homogène effectué à partir de différentes phases des constituants matériels (habituellement en céramique et métal). Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.1 [Yin et al. 2004], où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans un matériau de type FGM les différentes phases microstructurales ont différentes fonctions, en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs avec un changement doux et continu d'une surface à l'autre, de ce fait éliminant des problèmes d'interface et diminuant des concentrations de contrainte thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique des FGM peuvent résister aux environnements à hautes températures en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, alors que les constituants en métal fournissent une performance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique.

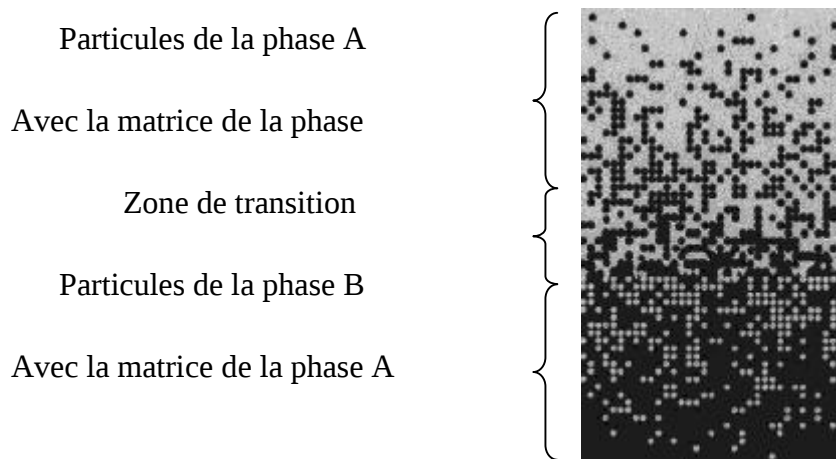


Figure I.1 FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction (verticale) [Yin et al. 2004]

Les problèmes de transitoire ou de fatigue thermique sont étudiés dans divers secteurs industriels autres que l'aéronautique, comme l'électronucléaire (circuits de refroidissement, combustible), l'électrotechnique (contacts électriques), l'automobile (culasses, collecteurs d'échappement, filtres à particules) ou la production de matériaux (verre, aluminium).

L'étude des conséquences de ces sollicitations d'origine thermique constitue l'un des axes majeurs de plusieurs chercheurs et s'appuie sur la méthodologie développée pour l'aéronautique et les superalliages. Des approches multi-échelles sont aussi utilisées pour la prévision de durée de vie des revêtements à haute température. L'objectif est d'augmenter la tenue aux hautes températures pour les turbines à gaz en appréhendant les mécanismes fondamentaux de la rupture des revêtements pour aubes de turbine.

Le terme FGM (functionally graded materials) a été élaboré au milieu des années 80 par un groupe de scientifiques dans la région de Sendai au Japon, comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique [Yamanouchi et al. 1990], [Koizumi 1993]. Des efforts énormes ont été fournis pour développer des matériaux à haute performance et à résistance élevée à la chaleur en utilisant la technologie de gradient à propriété qui a été poursuivie.

En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Principalement pour être à même de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps, protéger l'intérieur contre un surchauffement. Il s'est avéré impossible de dissiper cette chaleur par un refroidissement. En plus, il s'agissait d'un vaisseau commercial qui, après atterrissage, devait redémarrer à nouveau en quelques heures. Une inspection majeure et une réparation soignée. Au retour de la navette spatiale dans l'atmosphère, la structure superficielle de l'appareil est soumise à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que la surface inférieure. Pour cette raison les matériaux de revêtement, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1000°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (par exemple d'un carrelage céramique) serait normalement exclues. Certes, un revêtement céramique Al_2O_3 aurait pu protéger le fuselage (acier austénitique) contre les températures qui se développent à la surface, mais on

a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre le fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des valeurs du coefficient de dilatation thermique, des modules de Young et de la conductivité thermique des deux matériaux. La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation de matériau à gradient de fonction (FGM). On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, telle une céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur, comme le carbone.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une **transition continue** entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction, à la fois dans les laboratoires de la NASA puis de manière plus formalisée au Japon après la mise en place d'un comité de réflexion en 1985 entre des chercheurs du NAL (National Aerospace Laboratory, STA), de l'université du Tohoku et du GIRI du Tohoku (Gouvernemental Industrial Research Institute, MITI). Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition (douce), donc graduelle, idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des propriétés entre ces matériaux.

La transition entre les deux matériaux peut généralement être approchée par le biais d'une série de puissance. L'industrie aéronautique et l'aérospatiale et l'industrie des circuits informatiques sont très intéressées par la possibilité de matériaux qui peuvent résister à de très forts gradients thermiques [Yamanouchi et al. 1990]. Ceci est normalement obtenu en utilisant une couche de céramique en rapport avec une couche métallique.

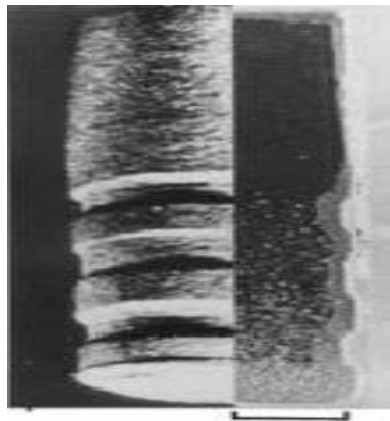
Pour illustrer l'idée de l'application des FGM à ce concept, prenons un exemple simple dans le domaine des matériaux métalliques. Il existe des matériaux dits thermoélectriques qui lorsqu'ils sont soumis à un apport thermique produisent un courant électrique. Il existe, pour chacun de ces matériaux, une température particulière où la réponse est excellente, et si l'on s'éloigne de cette température, la réponse chute immédiatement. En considérant un matériau constitué dans le sens de l'épaisseur de couches successives sensibles à

des températures décroissantes au fur et à mesure que l'on pénètre en profondeur, lorsque ce matériau est chauffé sur sa face externe, même si la température transmise baisse dans les couches internes, on obtient une réponse optimum à chaque niveau et en conséquence une conversion thermoélectrique globale améliorée.

I.3 Applications des matériaux FGM dans l'industrie

La conception des MGF est récente, et leurs applications sont encore rares. Les MGF permettent par exemple d'associer dans une même structure des matériaux ayant des propriétés thermiques différentes sans provoquer de contraintes. Le japonais Sumitomo Electric a ainsi développé un matériau pour bouclier thermique dont l'une des faces est en composite carbone-carbone, résistant à très haute température, et l'autre en carbure de silicium, bon conducteur de la chaleur. Les MFG pourraient être utilisés également pour la génération thermoélectronique de l'électricité et dans les piles solaires.

Au début, les matériaux à gradient de fonction ont été élaborés autant que matériaux résistants à des contraintes thermiques abusives pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion [Hirai 1999] et [Uemura 2003]. Maintenant Ils sont développés pour une multitude d'objectifs structurels dans les environnements sous conditions de haute température. Les applications des matériaux FGM sont diverses et nombreuses, ils offrent de grandes performances dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères. Souvent les couches en céramiques peuvent utilisés comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques [Nguyen 2007], des sondes [Müller 2003], des déclencheurs [Qiu 2003], des armures metal/ceramic [Liu 2003], des détecteurs photoélectriques [Paszkievicz 2008] et des implants dentaires (figure I.2) [Watari 2004]. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été publiées dans les dernières décennies. Elles prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et le traitement de la rupture sous l'effet des contraintes thermiques [Shen 2009]. Une étude complète de la flexion et l'analyse de vibration des plaques et des structures de coquille faites de FGM a été présentée par [Shen 2004]. Récemment, Birman et Byrd [Birman 2007] ont présentés un examen des principaux développements dans FGM qui inclut des problèmes de transfert de chaleur, contraintes, stabilité et analyses dynamiques.



2mm

Figure I.2 Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP).Aspect externe (gauche)
et section transversale (droite) [Watari 2004]

I.4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.3) [Koizumi 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

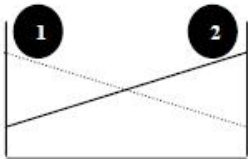
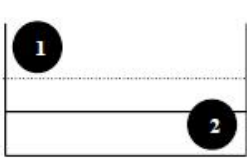
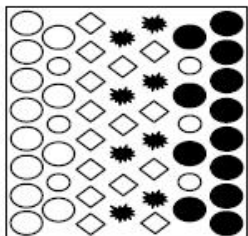
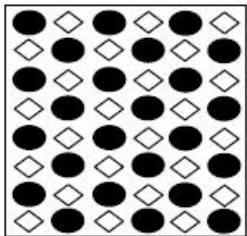
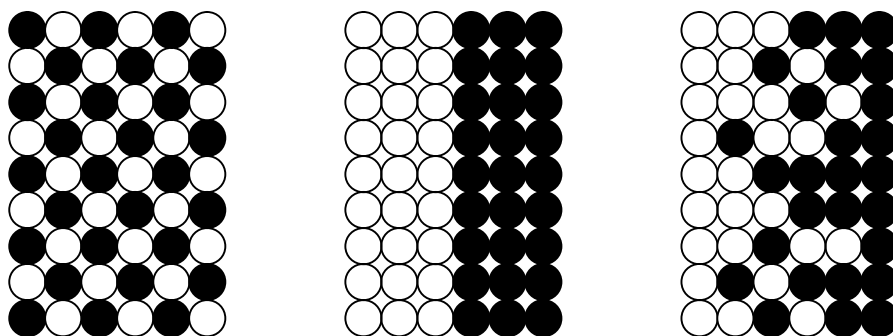
Propriétés	1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique		
Structure	Éléments constitutifs: céramique ○ métal ● microporosité ○ fibre ◇		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.3 Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]

[Yoshihisa 2004] a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.4) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

Figure I.4 La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].

I.5 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par, [Shen 2009] et [Kieback 2003]. Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGMs à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGMs au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur les FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée [Mortensen 1995], [Hirai 1996].

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel sont les plus importants. IL ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGMs. Ces techniques sont brièvement expliquées ci-après :

I.5.1 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Morinaga a également réussi à fabriquer un $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{W}$ FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain [Morinaga 1993], [Mel 2005]. Quand il utilise une densité mince en barbotine (5% ou 10%), la couche d' Al_2O_3 et la couche de W ont été séparées, confirmant des couches inclinées continues et claires. Dans le passé, le dépôt en phase vapeur, l'implantation ionique, et la diffusion ont été employées pour fabriquer des matériaux de gradient, mais cette technique a attiré l'attention et pourrait permettre pour fabriquer une série

de FGM en utilisant des densités minces en barbotine et de fines particules comme matière première avec différentes densités spécifiques.

L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabriquer des pièces à plus grandes dimensions; ceci a été trouvé dans une étude réalisée par [Grazzini et al 1992]. Leur travail a couvert le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Si}$ avec des formulations de coulée en barbotine basées sur les boues d'émouillage dispersées et coagulées qui ont été analysées, et d'excellents résultats ont été obtenus en utilisant les boues d'émouillage coagulées, sans présence de fissuration après séchage. L'effet de la pression s'est avéré pour augmenter la densité avec une augmentation conséquente de la densité de feu. En outre, des microstructures homogènes ont été réalisées dans le système composé, malgré la grande différence de tailles des particules utilisées.

I.5.2 Coulage en bande (Tape casting)

Le processus de coulage en bonde connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bonde est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [ZENG 2000].

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes : tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour SiC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en SiC pour B_4C (problème d'usure) ; ensuite, un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit ; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant 4 heures environ pour obtenir une répartition uniforme ; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation.

Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film Myler siliconé afin de faciliter le décollement de la bande sur un banc de coulage à l'aide d'un sabot constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μm). Des disques (20mm de diamètre) et des carrés (50mm de côté) sont découpés

dans les bandes puis empilés. Ainsi on obtient des matériaux soit monolithiques (empilement de couches identiques) soit alternés (empilement symétrique de couches denses et poreuses) après thermo-compression sous 60 MPa Reynaud al [Reynaud 2001].

I.5.3 Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [Atarashiya 1993], [Leushake 1999]. Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm²) en raison des limites des forces de compaction, fabrication discontinue avec la productivité faible. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [Kieback 2003].

I.5.4 Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant [Zhang 1998] ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg₂Si, [Zhang 1998]) et une densité plus élevée (Al₃Ti, [Watanabe 1997]) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou externe du tube.

I.5.5 Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 µm, environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [Watremetz 2006]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative [Omori et al 1998]. Ichikawa [Ichikawa 2000] a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur-concentration-gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la (figure I.5).

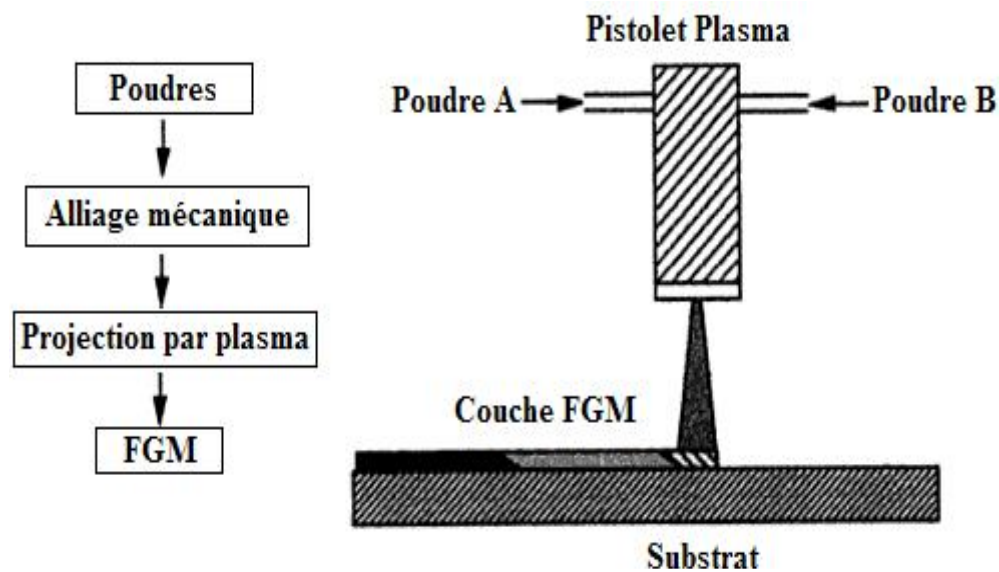


Figure I.5 Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane) [Ichikawa 2000]

I.5.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs

thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [Miyamoto 1999].

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto 1999]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [Mévrel 2009].

I.5.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la (figure I.6), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto 1999].

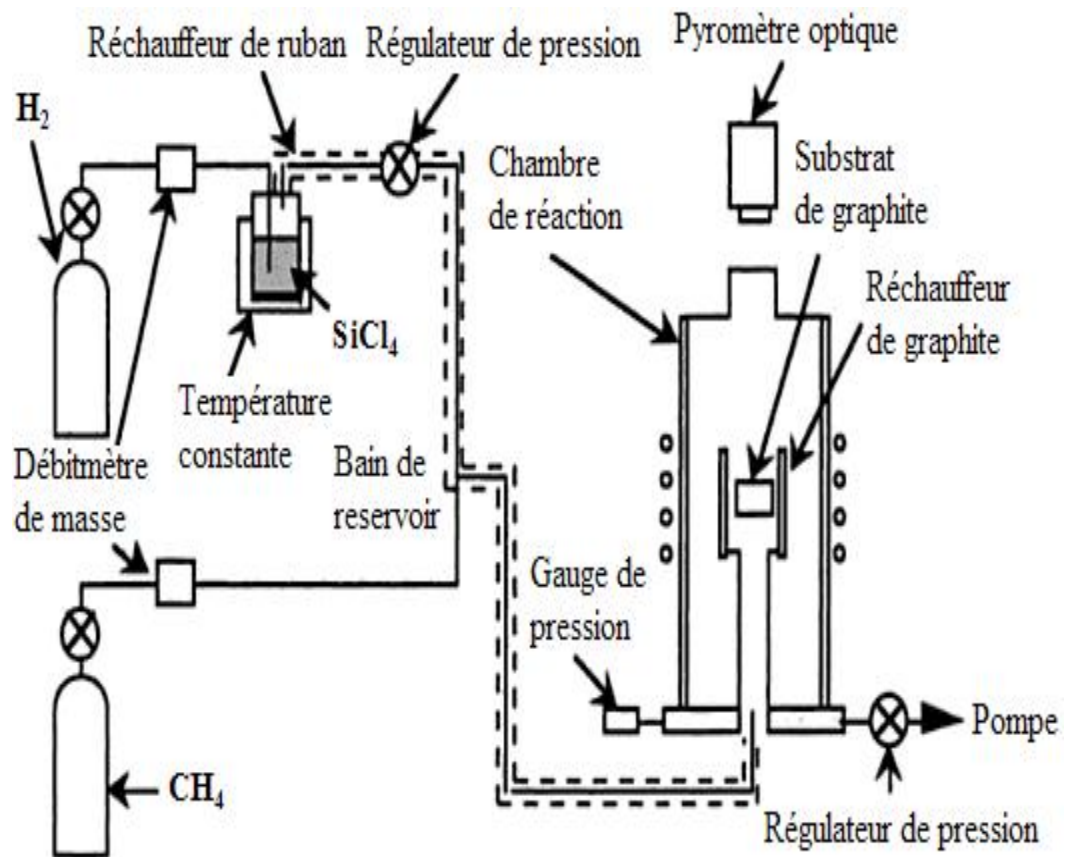


Figure I.6 Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [Miyamoto 1999].

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il ya une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - SiCl_4 - H_2) sont employés aux températures de dépôt entre 1400 °C et 1500 °C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce.

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi 1990]. Ce procédé peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5.8 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

YUKI et al. [YUKI, 1991] ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure (I.7) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

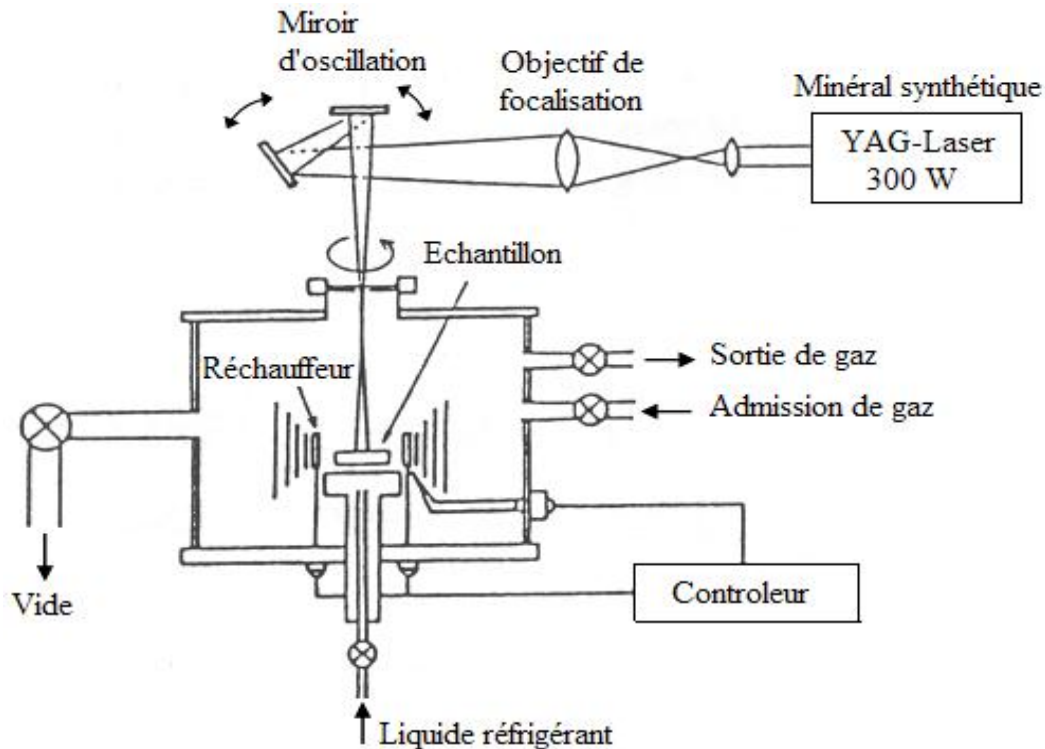


Figure I.7 Disposition du procédé frittage laser différentiel [YUKI 1991].

I.5.9 Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite

composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (figure I.8)

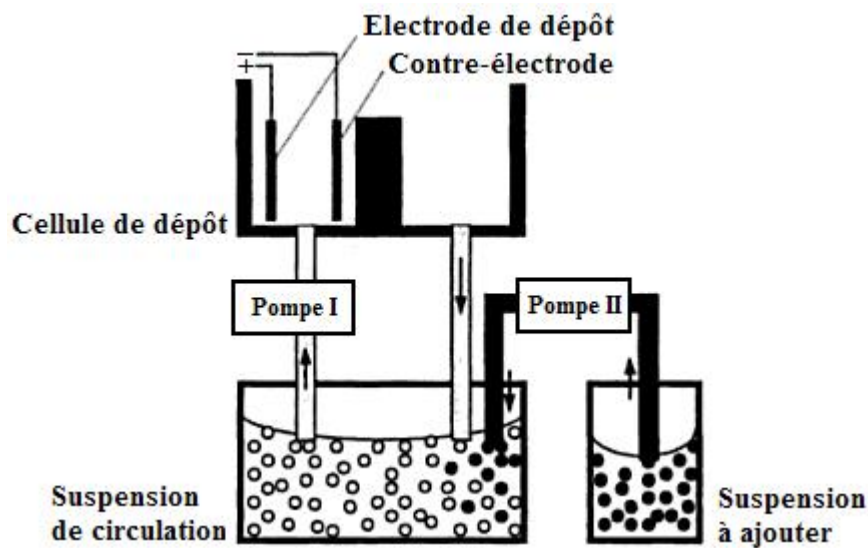


Figure I.8 Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux [Aldo 2002]

I-5.10 Implantation Ionique (Sputtering) .

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdizadeh 1997].

I.5.11 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.9) [Abdizadeh 1997].

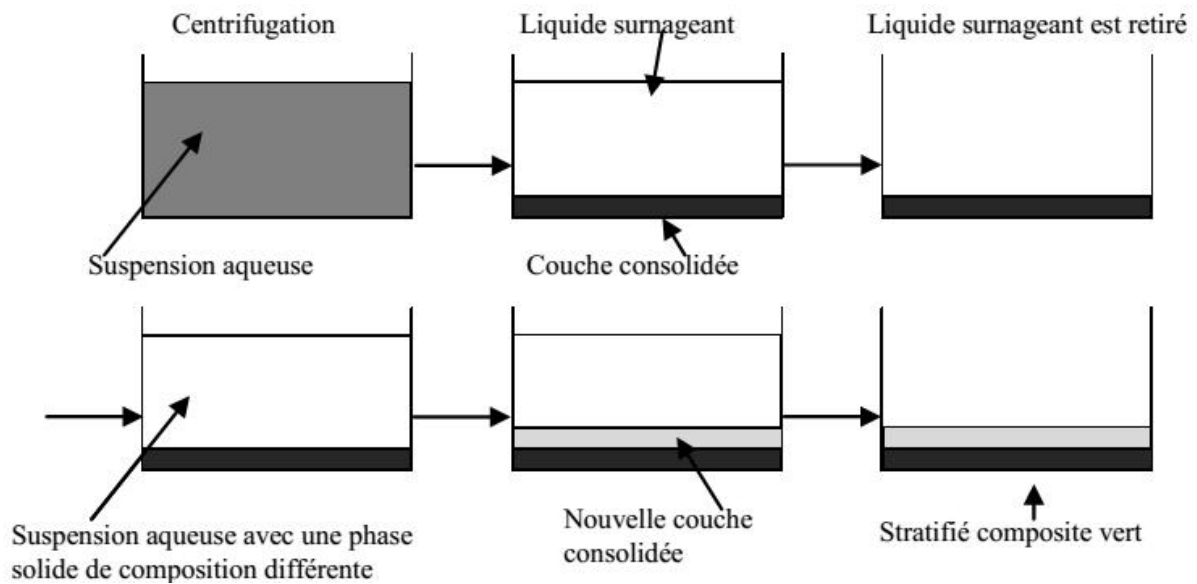


Figure I.9: Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh, 1997].

I.6 Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

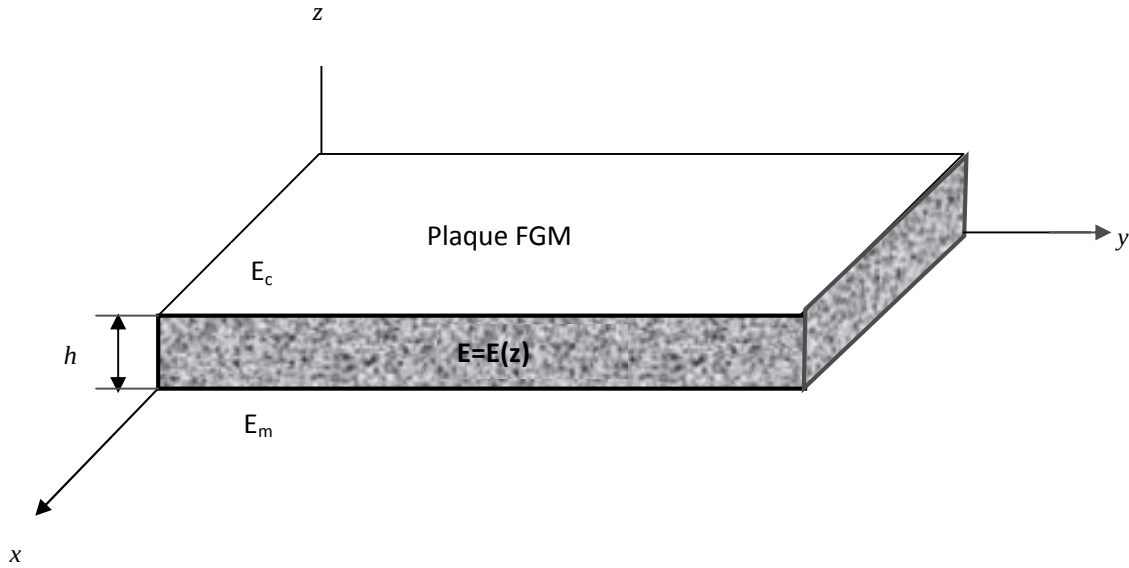


Figure I.10 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur (figure I.10).

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.11, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

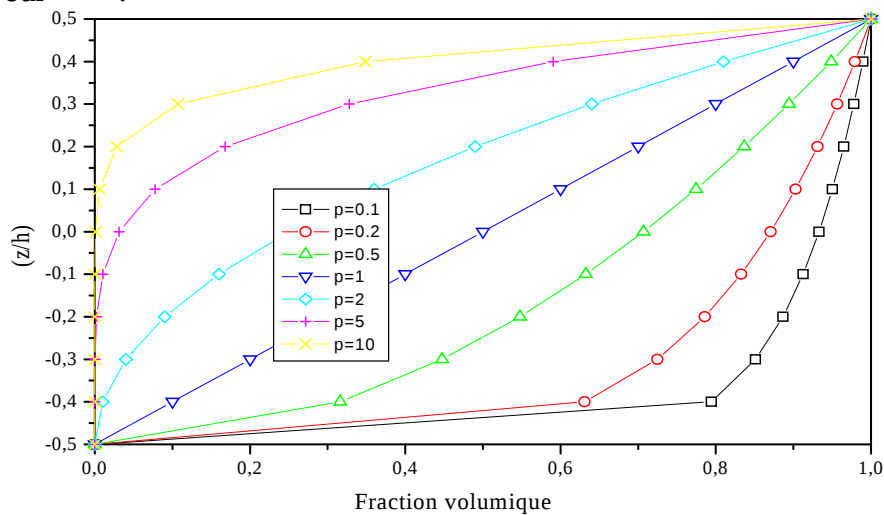


Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.3.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4.a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4.b)$$

La figure I.12 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

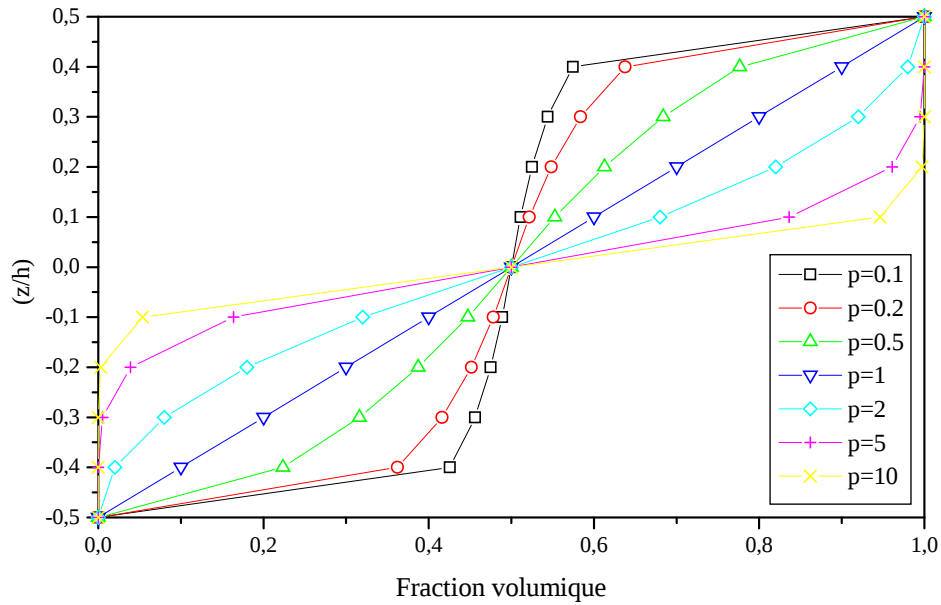


Figure I.12: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.6.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.5.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.13.

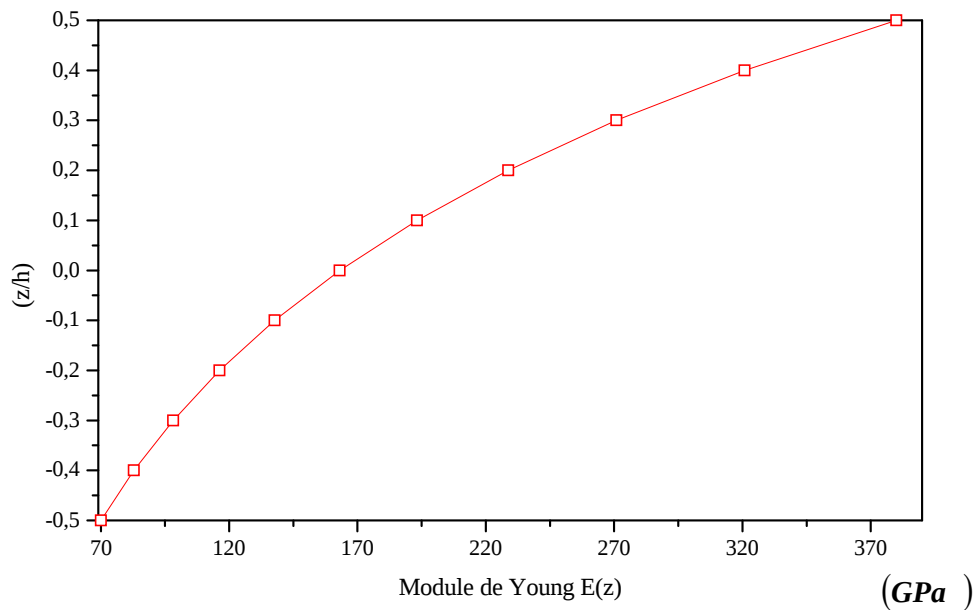


Figure I.13 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.7 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.14. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

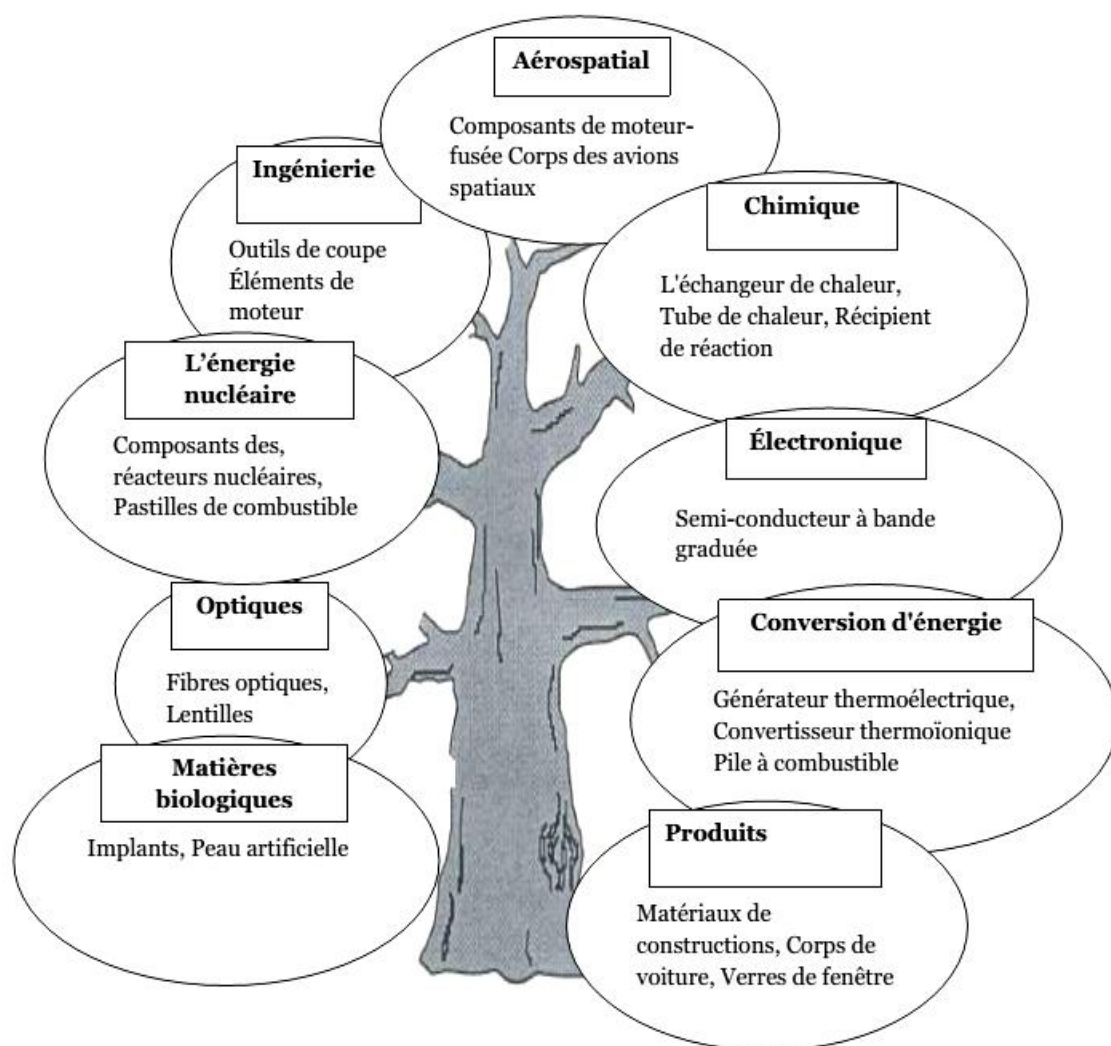


Figure I.14 : Les principaux domaines d'application des FGM.

Certaines des applications de matériaux à gradient fonctionnel sont mises en évidence ci-dessous:

a. L'aérospatiale

Les Matériaux fonctionnellement gradués peuvent résister à de très haute gradient thermique, qui sont plus approprié pour la structure des avions, composante de moteur de fusée etc [L. Marin 2003]. Si la technique de traitement est améliorée, les FGM sont prometteurs et peut être utilisé dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

b. Industrie navale, aéronautique (Prévention contre les attaques terroristes)

Les explosions provenant par les attaques terroristes se produisent beaucoup plus fréquemment dans le monde dans lequel nous vivons aujourd'hui, comme l'attaque du navire « USS Cole » [Perl R., O'Rourke R. 2001] (structure navale), attaque sur l'ambassade américaine au Kenya [Perl R. 1998] (structure civile) et les bombardements en bordure de route IED sur Humvees (structures militaires). Ces attaques ont conduit à un besoin important de remplacer les matériaux de construction traditionnels avec plus des matériaux résistants aux charges explosives. Avec les préoccupations croissantes concernant la sécurité envers les vies humaines et les patrimoines, l'importance d'une telle recherche ne peut pas être négligée.

Les structures sandwich ont des applications très importantes dans l'industrie navale et aéronautique. En raison de leur constitution, elles présentent de nombreux avantages en termes de résistance, rigidité et possèdent des capacités d'absorption d'énergie élevées. Les structures sandwich sont constituées de deux couches superficielles minces et rigides, généralement ont la même épaisseur, séparées par un noyau léger plus épais. Les couches superficielles portent presque toute la flexion et les charges dans ses plans, tandis que le noyau contribue à stabiliser les couches superficielles et définit la rigidité en flexion et résiste aux efforts de compression et du cisaillement hors plan. Lorsque les structures sandwich sont soumises à des charges impulsives à haute intensité, les matériaux constituant le noyau jouent un rôle crucial dans le comportement dynamique et la réponse structurelle globale. Leurs propriétés aident à disperser l'impulsion mécanique transmis dans la structure, et donc protéger quoi que ce soit situé derrière elle [Xue Z., Hutchinson JW. 2003; Fleck NA., Deshpande VS. 2004 ; Dharmasena KP et al. 2008].

c. Médecine

Les Tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisées en tant que matériau à gradient de propriétés naturel [W. Pompea et al., 2003], pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire qui serviront aux fins de la bio-tissu original. Le FGM set la substance idéale pour cette application. Le matériau FGM a trouvé une large gamme d'applications en chirurgie dentaire [S. Matsuo et al., 2001] et des applications orthopédiques pour les dents et le remplacement osseux [F.Watari et al., 2004].

c.Défense

L'une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient de propriété est la capacité à inhiber la propagation de fissure. Cette propriété rend utile dans le secteur de la défense, comme des matériaux résistants aux pénétrations utilisés pour plaques de blindage et des gilets pare-balles [L. Lu et al., 2011].

d.Énergie

FGM sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur des aubes de turbine dans le moteur de turbine à gaz [E. Müller et al., 2003 ; M. Niino et al., 2005].

I.8 Conclusion

Après avoir défini les matériaux FGM comme étant des matériaux composites innovants dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, nous avons évoqué les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers. Nous avons aussi cité quelques procédés de leur fabrication ainsi que les domaines de leur application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II

APPLICATION DU FGM EN GENIE CIVIL

II.1 Introduction :

À l'heure actuelle, des études de recherches tentent de transférer l'idée de la gradation fonctionnelle des matériaux, qui a été déjà utilisé avec succès dans d'autres disciplines de l'ingénierie comme celle de l'aéronautique et de l'aviation [Kieback, B. et al., 2003], vers le domaine de la construction. Les éléments de construction à fonction graduelle montrent un changement continu des propriétés dans leur section transversale. La propriété qui varie peut être la porosité ou la concentration de la teneur en fibres ou le rapport des matériaux (en termes d'un alliage ou mélange de substances).

Le développement des éléments de constructions plus légers et recyclables en fonction de leur nature, pourrait avoir un impact positif sur le plan environnemental et économique du pays. La gradation des propriétés des matériaux constitue une étape importante dans le développement des structures innovantes dans le domaine du génie civil. L'exemple du béton met clairement en relief les possibilités et les potentiels offerts par la gradation.

II.2 Application de la technologie du FGM en génie civil

Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes de matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudié et évalué pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

L'objectif de ces projets est d'évaluer les nouvelles possibilités de conception offertes par les matériaux graduées, en les voyant aussi sous l'angle architectural, et d'élaborer des propositions pour leur utilisation dans divers domaines. Ci-dessous, nous passons en revue, quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriétés en génie civil.

II.2.1 Le Béton à gradient de propriétés :

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept des bétons à gradients de propriétés [sobek et al], Les travaux de développement ont lieu à *l'institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren* (ILEK, Institut de la conception et la construction de structures légères) de l'Université allemande de Stuttgart, dans le cadre des projets de recherche « Matériaux à gradient dans le bâtiment et le génie civil » et « planchers préfabriqués à gradient de propriétés » [Heinz, P. et al. ; 2011]. La fabrication, l'automatisation, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement examinées à l'Université de Stuttgart.

L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM est actuellement en étude et en développement dans plusieurs projets de recherche. Le but principal est de satisfaire un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance, à l'intérieur de l'élément conformément aux spécifications et profiles des efforts déterminées pour l'élément (figure II.1).



Figure II.1: Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEK

Il est à noter que l'idée du béton à gradient de propriétés, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclabilité et la sauvegarde des ressources économiques.

Les essais et les calculs de planchers à gradient de propriétés se sont révélés d'une réduction de poids de plus de 60% et d'une réduction des émissions de carbone dépassant 35% par rapport aux planchers minces classiques, sans aucune perte de résistance [Eyerer, P. et al., 2000] (figure II.2).



Figure II.2: Essai de flexion à quatre points, source: ILEK

II.2.2 Autres matériaux à gradient de propriétés:

Les textiles avec des propriétés variables de couches superposées permettent de doter au matériau une perméabilité et une rigidité graduelle (figure II.3), ce qui peut augmenter l'efficacité de systèmes d'isolations vis-à-vis les effets de chaleur et d'humidité. En plus, la variation graduelle des propriétés de rigidité permet de surmonter le changement brusque entre les composantes rigides et flexibles des éléments, ce qui pourrait complètement servir de base à des nouvelles solutions architecturales à l'avenir.



Figure II.3: En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée;
En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK

À l'aide d'un processus progressif, il a été possible de produire des éléments de mousse à cellules ouvertes avec des motifs de porosité variable. Ces mousses peuvent ensuite être traitées pour fabriquer des composants avec une variation de distribution de rigidité afin répondre aux exigences de certains cas (Figure II.4).

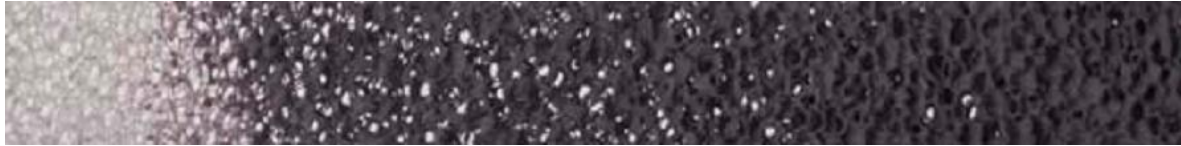


Figure II.4: Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK

Un autre aspect de cette technologie impliquant des matériaux à gradient de propriétés sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue (figure II.5). Cela représente une nouvelle approche dans la technique d'assemblage avant tout, même si cela signifie que la variation de dilatation thermique ne peut plus être définie de manière précise au niveau local en vue de la transition continue en cause, ou la transmission de charge évité à certains endroits. Sous les auspices du projet, les investigations préliminaires sont effectuées dans le cadre de la construction des classes pertinentes de matériaux, des domaines potentiels d'application et des méthodes appropriées de production.



Figure II.5: transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK

II.2.3 Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil :

a) Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements):

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la

chaussée afin d'avoir un matériaux rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

b) Les chaussées souples :

Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

c) Les grands vitrages dans les zones chaudes :

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

d) Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel):

Les parois intérieures des tunnels doit être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM semble être une solution efficace.

e) Les joints dans la charpente métallique:

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre des éléments de poids et de nuances différentes comme l'acier/l'aluminium. Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est qu'il subit une forte accumulation concentration de contraintes, et s'avère plus vulnérable en cas d'action cyclique. L'utilisation des joints en FGM représente une solution optimale.

II.3 Conclusion :

L'idée de la graduation fonctionnelle de matériaux a un impact positif sur le coté économique et environnementale. Les propriétés améliorées des matériaux en termes de physique du bâtiment et de capacité structurelle peuvent apporter une contribution supplémentaire à l'économie de l'énergie et des matériaux. La variation graduelle des propriétés matérielles permet d'éviter les points faibles de certains éléments structuraux.

Les travaux de recherche ont amené à libérer le potentiel des éléments à gradient de propriétés pour l'ingénierie de la construction en termes de leur multifonctionnalité, poids et économie d'énergie. Construire avec des matériaux à gradient de propriétés peut ainsi apporter une contribution majeure vers le développement des méthodes de construction durable.

CHAPITRE III

REVUE DES TRAVAUX ANTERIEURS

SUR LES STRUCTURES FGM

III.1 Introduction

Comme il a été déjà démontré au chapitre précédent, la microstructure et la composition des matériaux à gradient fonctionnel varient graduellement et continûment à travers l'épaisseur de manière à optimiser les performances mécaniques, thermique et dynamique de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les actions extérieures. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre intéressants et attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999, Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. La présente recherche bibliographique se focalise sur les travaux relatifs aux plaques en FGM réalisés durant ces deux dernières décennies. On montre par le biais de cette recherche une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermique et/ou thermomécanique du flambement. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

III.2 Etudes des contraintes résiduelles

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la

propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée. Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujetti à un environnement à haute-température.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drak *et al.* (1993) et Williamson *et al.* (1993). Ils ont alors considéré un spécimen en FGM ($\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Ni}$) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos *et al.* (1995) ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson *et al.* (1993). Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Ni}$. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot *et al.* (1996) complètent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran (1995) a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin (2002) qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

III.3 Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques

Un système FGM conçu pour une application donnée doit prouver sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques.

Praveen et Reddy (1998) ont présenté une analyse du comportement thermoélastique des plaques FGM rectangulaires incluant les effets non linéaires, les déformations en cisaillement transverse et l'inertie de rotation. Reddy *et al.* (1999) ont étendu cette théorie des plaques FGM rectangulaires à une formulation du premier ordre de plaques annulaires et circulaires en flexion. Des solutions pour la déflection, les forces et moments résultants ont été présentées. La théorie originalement formulée par Praveen et Reddy (1998) a été par la suite étendue par Reddy (2000), à des relations plus générales des plaques FGM permettant de prendre en considération des déformations du troisième ordre. Reddy (2000) a également développé des modèles d'éléments finis en théorie de déformation du troisième ordre incluant les effets thermiques et non linéaires.

Woo et Meguid (2001) ont publié une formulation des grandes déformations des plaques et coques minces en FGM sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la théorie classique des plaques.

Vel et Batra (2002) étudièrent les petites déformations élastiques des plaques FGM avec des bords en appuis simples. Les champs de déplacements et de températures ont été générés en imposant individuellement ou simultanément des charges mécaniques et thermiques sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Ces champs sont pris sous forme de séries de Taylor et satisfont les équations constitutives d'un matériau thermoélastique isotrope linéaire ainsi que les conditions aux limites. La clé de cette hypothèse est qu'une plaque gradée suivant l'épaisseur a des propriétés de matériau qui varient très lentement et que la plaque est supposée constituée de couches très minces, isotropes, homogènes et parfaitement collées. Les solutions obtenues par les séries en puissance ont alors été comparées à celles générées par les théories classiques, du premier ordre et du troisième ordre des plaques.

Reddy et Cheng (2001) ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques.

Récemment, Tounsi *et al.* (2013) ont développé une théorie raffinée à quatre (04) inconnus pour l'analyse thermoélastique de la flexion des plaques sandwiches en FGM.

III.4 Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique

Le flambement des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambement des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique.

L'une des premières études sur le flambement des structures FGM a été réalisée par Shen (2002). Il s'est intéressé au post-flambage des coques cylindriques dans un environnement thermique. La même année, Javaheri et Eslami (2002a) proposent des solutions exactes au flambement thermique des plaques FGM rectangulaires gradées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique. Ils se sont basés sur la théorie classique des plaques. Les charges critiques de flambement sont influencées par les changements de température à travers l'épaisseur. Deux observations importantes ressortent de leur étude :

- La variation de la température critique de flambement d'une plaque FGM est inférieure à celle d'une plaque homogène.
- En augmentant l'indice k de la loi de distribution en puissance, la température critique de flambement est réduite.

Na et Kim (2005) analysèrent le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambement thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été traité. Il ressort de cette étude que les caractéristiques du flambement thermique des plaques FGM sont très influencées par le champ de température, la distribution de la fraction volumique et les paramètres géométriques du système structural.

En 2004, Wu (2004) a analysé le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. Il appliqua la théorie de déformation du premier

ordre. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement. Des conclusions identiques à celles de Na et Kim ont été tirées.

L'analyse du post-flambage des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen (2007). Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques.

Bodaghi et Saidi (2010) ont analysé le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre. Pour les conditions imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. Les auteurs ont ensuite aisément résolu le problème en se servant de la méthode de Levy (1899).

D'autres études intensives sur le flambement des plaques FGM ont été entreprises par Javaheri et Eslami (2002b, 2002c), Shariat *et al.* (2005, 2006 et 2007).

Bouderba *et al.* (2013) ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwichs reposants sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique. En utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.

Yaghoobi H et Yaghoobi P (2013) ont présentés une étude analytique pour l'analyse du flambement des plaques FG sandwichs symétriques sur fondation élastique et soumises à un chargement mécanique.

Tounsi et son groupe de travail (Houari *et al.* 2011, Merdaci *et al.* 2011, Bourada *et al.* 2012, Tounsi *et al.* 2013) ont mis au point de nouvelles théories de plaque raffinées pour la réponse de flexion et flambement des plaques FG sandwichs avec seulement quatre fonctions inconnues.

Saidi *et al.* (2013) ont développé une solution analytique pour la flexion thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Ils ont utilisés un nouveau champ de déplacement en incluant l'effet « *stretching* ».

III.5 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM

De nombreuses études ont été consacrées aux comportements statiques et thermomécaniques des structures en FGMs. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Il est à noter que l'analyse de vibration et l'analyse thermique des plaques FGM n'ont pas été traitées dans le cadre de cette thèse. On les présente juste dans le but de monter l'effort déployé et de l'importance que la communauté scientifique donne à ces nouveaux matériaux ce qui justifie le nombre important de recherches traitant les structures faites à partir de ces matériaux sous diverse sollicitations.

Praveen et Reddy (1998) ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. Reddy (2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme. Yang et Shen (2001) ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élancement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM.

Reddy et Chen (2003) ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle.

En 2004, Huang et Shen (2004) ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra (2004) pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (h/a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. Qian, Batra *et al.* (2004) ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur.

En 2006, les travaux de Ferreira *et al.* (2006) ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger.

Uymaz et Aydogdu (2007) ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li *et al.* (2008). La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas

de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM. L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'indice des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse.

Matsunaga (2008), a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM.

Ait Atmane *et al.* (2010) ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

Hasani Baferani *et al.* (2011) ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'indice de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration. Hadji *et al.* (2011) ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwiches.

Benachour *et al.* (2011) ont utilisé la même théorie développée par Hadji *et al.* (2011) pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité.

III.6 Etudes sur les problèmes de l'analyse de flexion des plaques en FGM reposant sur fondation élastique

Les plaques rectangulaires épaisses fabriquées en FGM sont souvent employées comme des éléments des structures d'ingénieries. De plus, pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs types de modèles de fondations ont été proposés. Le plus simple est le modèle de Winkler (modèle à 1 seul paramètre) qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans les effets de couplage entre eux. Ainsi, dans ce modèle les propriétés du sol sont décrites seulement par un seul paramètre (k_0), qui représente des ressorts verticaux (Avramidis and Morfidis, 2006). Cependant, le modèle de Winkler est incapable de prendre en considération la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qui stipule qu'il n'y a pas une interaction entre les ressorts voisins mène à l'ignorance de l'influence du sol dans certaines parties de la poutre ou de la plaque. Pour surmonter cet handicap, plusieurs modèles de fondation élastique à deux paramètres ont été proposés tels que les fondations élastiques de Pasternak (Pasternak, 1954).

Le modèle de Pasternak est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure-fondation. Zenkour (2009) a utilisé une théorie sinusoïdale raffinée des plaques pour l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques FG soumises à un chargement uniforme transversal et supportées par des fondations élastiques à deux paramètres.

Benyoucef *et al.* (2010) ont investigué la réponse statique des plaques épaisses FG reposant sur des fondations de type Pasternak par l'utilisation de la théorie hyperbolique de déformation de cisaillement.

Ait Atmane *et al.* (2010) ont étudié le comportement dynamique des plaques FG supportées par des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. Cheng et Kitipornchai (1999) ont proposé une analogie de membrane pour déterminer les valeurs propres pour le

flambement par compression, flambement hydrauthermique et la vibration des plaques FG reposants sur des fondations de type Winkler-Pasternak en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). La même analogie de membrane a été ensuite appliquée à l'analyse des plaques et coques FG en utilisant la théorie des plaques du troisième ordre (Cheng and Batra, 2000; Reddy and Cheng, 2002).

L'effet de la fondation élastique de type Pasternak sur le comportement en post-flambement des plaques FG modérément épaisses est étudié par Yang et al. (2005 a). Dans leur étude, les quatre cotés de la plaque sont supposés être encastres et la formulation est basée sur la FSDT.

La réponse en post flambement thermomécanique des plaques FG basée sur la solution analytique est présentée par Woo et al. (2005). Ils ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement des plaques du troisième ordre (Le champ de déplacement de Reddy) et le tenseur de Von Karman des grandes flèches pour obtenir les équations différentielles partielles couplées et ont employé une série de solutions mixtes pour les résoudre. Leur étude inclut quatre types de conditions aux limites pour la plaque.

Zenkour et Sobhy (2010) ont investigué le comportement du flambement thermique de plusieurs types de plaques sandwich FG. Zenkour et Sobhy (2011) ont étudié le flambement thermique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques à un ou deux paramètres en utilisant la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique.

Ameur et al. (2001) ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour étudier la réponse statique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques de type Pasternak. Zenkour et Sobhy (2012) ont examiné la réponse statique des plaques sandwich FG viscoélastiques et simplement appuyées soumises à des charges uniformes transversales.

Zenkour et sobhy (2013) ont étudié la réponse dynamique des plaques FG thermoélastiques reposant sur des fondations. Tounsi et ses collaborateurs (Abdelaziz et al, 2011 ; El Meiche et al, 2011 ; Hadji et al, 2011 ; Benachour et al, 2011 ; Bourada et al, 2012 ; Kaci et al, 2012 ; Bachir Bouiadjra et al, 2012 ; Fekrar et al, 2012 ; Boudierba et al, 2013 ; Tounsi et al, 2013 ; Kettaf et al, 2013 ; Bachir Bouiadjra et al, 2013 ; Houari et al, 2013 ; Bessaim et al, 2013 ; Belabed et al, 2014 ; Fekrar et al, 2014 ; Boussahla et al, 2014 ; Heballi et al, 2014 ; Zidi et al, 2014 ; Klouche Djedid et al, 2014 ; Draiche et al, 2014 ; Sadoune et al,

2014 ; Nedri et al, 2014 ; Khalfi et al, 2014) ont étudié les réponses mécaniques FG et composites en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée.

Benyoucef et al. (2010) ont analysé la réponse de la flexion de plaque épaisse FG reposant sur fondation élastique en utilisant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique.

Yaghoobi et Yaghoobi (2013) ont étudié le comportement de flambement de plaques sandwich symétriques avec feuilles de surface FG reposant sur une fondation élastique en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de plaque du premier ordre et soumises à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques.

Bouderba et al. (2013) ont utilisé une théorie des plaques raffinée pour étudier la réponse de la flexion thermomécanique des plaques à gradient de propriété reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak.

Récemment, Khalfi et al. (2013) ont étudié le flambement thermique des plaques solaires à gradient de propriété (SFGP) reposant sur la fondation de Pasternak à deux paramètres en utilisant une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée.

La présente thèse est une extension des travaux précédents (El Meiche et al., 2011) pour le cas de l'analyse de flexion des plaques rectangulaires FGM reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak (Pasternak, 1954), en utilisant la surface neutre physique et la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Cette nouvelle théorie ne comporte que quatre fonctions inconnues, contre cinq ou plus en cas de théories de déformation de cisaillement d'ordre élevés. La fonction hyperbolique en termes d'épaisseur est utilisée dans le champ de déplacement pour tenir compte de la déformation de cisaillement. Cette théorie n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

Il convient de signaler que les propriétés matérielles effectives sont estimées en utilisant la loi de mélange (voir chapitre I). Puisque, les propriétés du matériau de la plaque FGM varient à travers le sens de l'épaisseur, la surface neutre de telle plaque ne coïncide pas avec sa surface moyenne géométrique (Yaghoobi et Feraidoon, 2010). En outre, Zhang et Zhou (2008),

Ould Larbi et al. (2013), Bouremana et al. (2013), Khalfi et al. (2013) et Bousahla et al. (2013) montrent que la traction-flexion couplées dans l'équation constitutive d'une plaque FGM n'existe pas lorsque le système de coordonnées est situé à la surface neutre de la plaque. Par conséquent, l'équation gouvernante. Pour la plaque de FGM peut être simplifiée. Sur la base de la présente théorie, la position exacte de la surface neutre avec le principe du travail virtuel, on obtient les équations constitutives des plaques fonctionnellement gradués.

III.7 Conclusion

Suite à cette recherche bibliographique, on constate que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche intéressant qui a attiré fortement l'attention de beaucoup de chercheurs. Des travaux intenses ont été effectués et de nombreuses recherches ont été publiées mais il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine.

CHAPITRE IV

THEORIES DES PLAQUES

IV.1 Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor 1989, Kapania 1989, Kant 2000, Carrera 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

IV.2 Les Différent Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

IV.2.1 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

IV.2.1.1 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff 1950] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après déformation (Figure. IV.1).

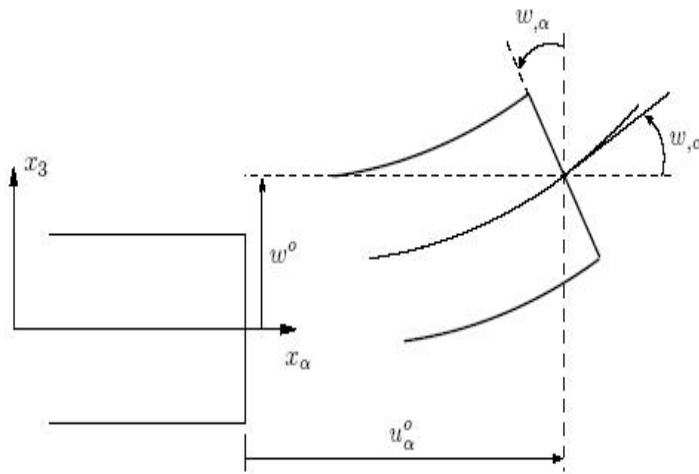


Figure IV. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_a(x_1, x_2, x_3 = z) = u_a^0(x_1, x_2) - z w_{,a}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, a = 1, 2 \quad (IV.1)$$

Avec,

u_a^0 : Le déplacement de membrane dans la direction a ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,a}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

IV.2.1.2 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.IV.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (IV.2)$$

Avec,

f_a : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_a ,

$g_a^0 = (w_{,a} + f_a)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

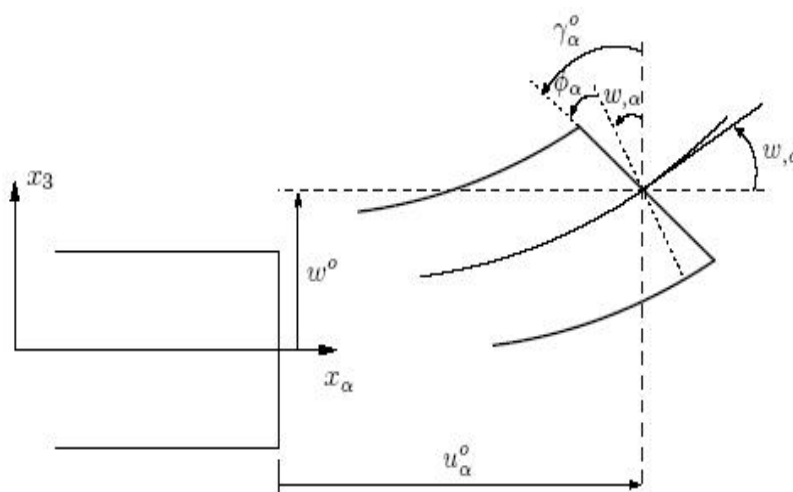


Figure IV.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales g_a^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [Whitney 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. IV.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

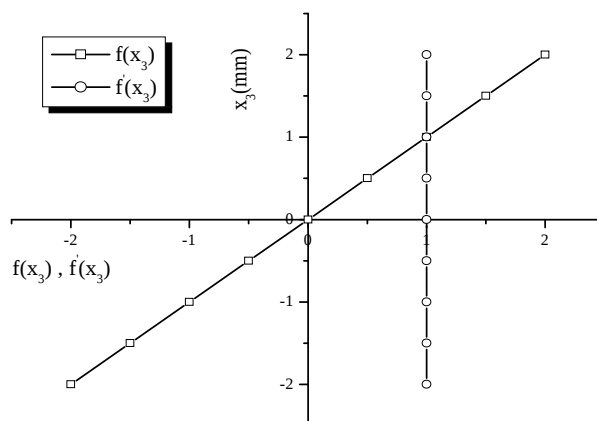


Figure IV.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

IV.2.1.3 Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. IV.4) [Liberscu 1967, Touratier 1991, Nguyen 2004]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{IV.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{o(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{o(i)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles

à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(3)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (IV.4)$$

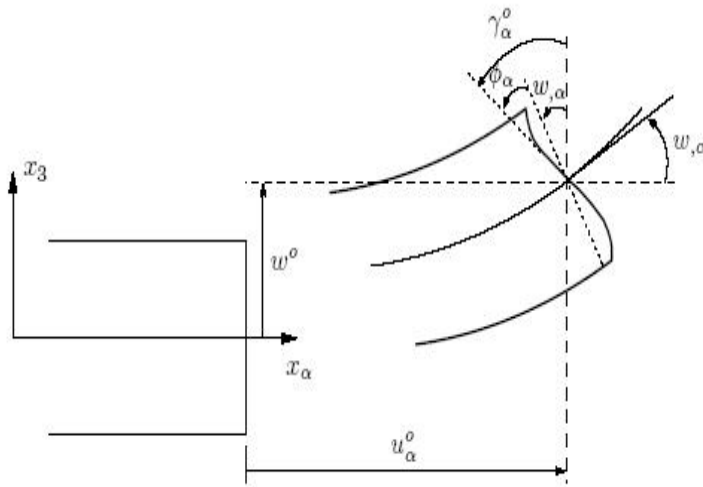


Figure IV.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d'[Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (IV.5)$$

- L'approche de [Reissner 1945], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.6)$$

- L'approche de [Reddy 1987] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.7)$$

Dans le modèle de [Reddy 1987], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (IV.8)$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{p} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{pz}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{p^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{p^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{p^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (IV.9)$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984].

Récemment, Afaq et al. [Afaq 2003] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (IV.10)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de [Aydogdu 2005] avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{IV.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

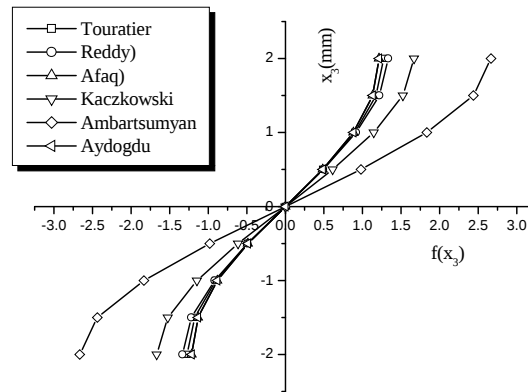


Figure IV.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

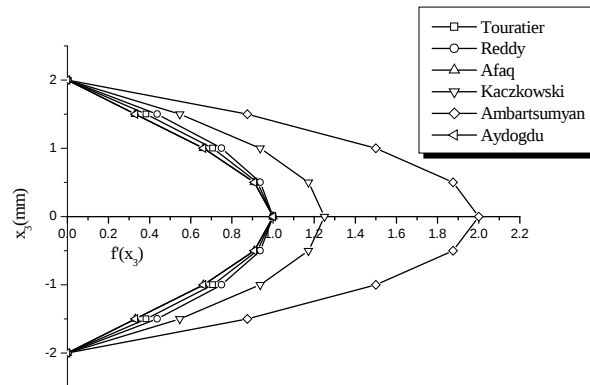


Figure IV.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures. IV.5 et IV.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

IV.2.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les Equations (IV.3) et (IV.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot 1997, Carrera 2000, Afaq 2003, Reddy 1984, Di Sciuva, 1987]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. IV.7 et IV.8).

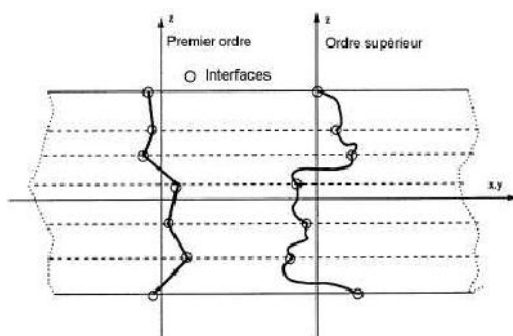


Figure IV.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen 2004]

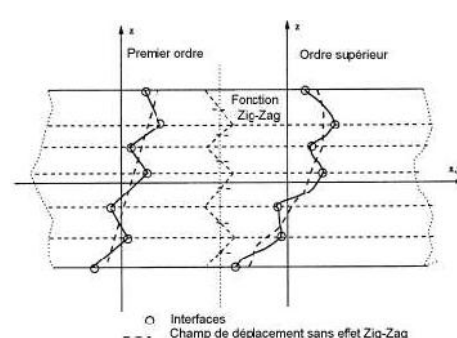


Figure IV.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Nguyen 2004]

IV.2.2.1 Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. IV.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

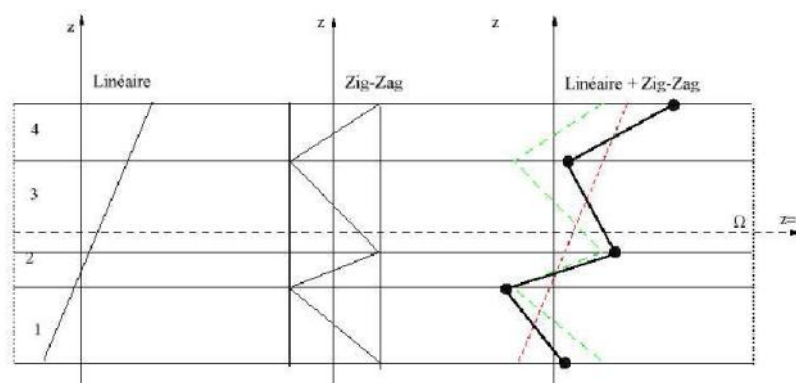


Figure IV.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [Nguyen 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le En se basant sur le concept de, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Nguyen 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.IV.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

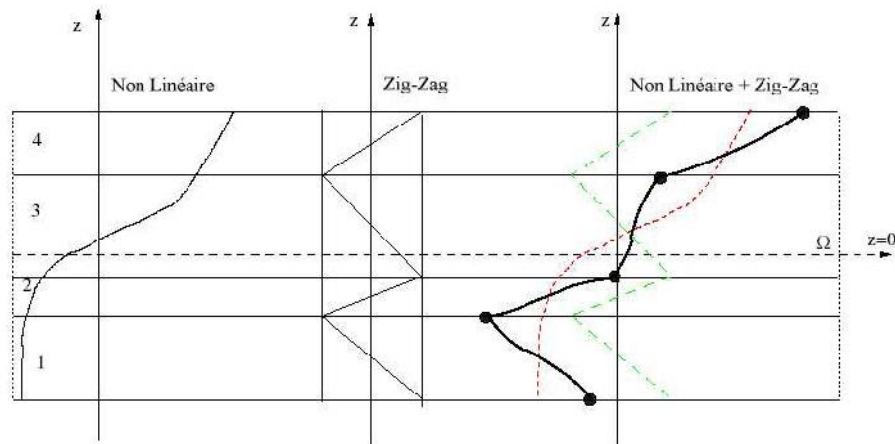


Figure IV.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [Nguyen 2004]

Dans les travaux de [Karama 1998, Ossadzow 2001], la fonction sinus de [Touratier 1991] est combiné avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. [Afaq 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage.

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'ya pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème inévitable.

Il apparait aussi que les théories d'ordre élevé sont intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

CHAPITRE V

FORMULATION THEORIQUE DES PLAQUES FGM REPOSANT SUR FONDATION ELASTIQUE

V.1 Introduction

L'invention du matériau FGM a marqué la naissance d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. Le concept de cette nouvelle classe des matériaux composites a incité les chercheurs de les adopter aux éléments de structures exposés aux actions environnementales sévères. A cette fin, l'étude et l'analyse structurelle des éléments de structure comme les plaques FGMs sont indispensables.

Il a été exposé au chapitre précédent que la théorie des plaques ont été bien développée pour être capable de déterminer correctement la réponse des plaques FGMs. L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce chapitre est consacré à la modélisation du comportement mécanique de la flexion des plaques en matériaux à gradient de propriété « FGM » reposant sur une fondation élastique. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie présentée est variationnelle (La formulation est basée sur le principe des puissances virtuelles), elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

On considère que le module de Young varie sans interruption à travers l'épaisseur selon une simple loi de distribution de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants.

Il est également à noter que les distributions de la contrainte axiale, de la contrainte de cisaillement, de la contrainte tangentielle et les valeurs de la flèche centrale seront déterminées pour des plaques FGMs rectangulaire soumise à un chargement sinusoïdal répartie tout en comparant avec celui des plaques isotropes homogènes. Le calcul numérique à envisager au chapitre suivant est basé sur une étude paramétrique à savoir: l'influence de l'index de la fraction volumique des matériaux constituants (céramique et métal), du rapport de l'élancement (largeur/épaisseur) de la plaque et de l'effet des raideurs de la fondation élastique.

V.2 Formulation du problème

Considérons une plaque solide rectangulaire de longueur a , d'une largeur b et d'une épaisseur h constitué par un matériau fonctionnellement gradué avec le système de coordonnées comme le montre dans la figure V.1. Il est supposé être reposé sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec la rigidité de Winkler k_0 et la rigidité au cisaillement k_1 .

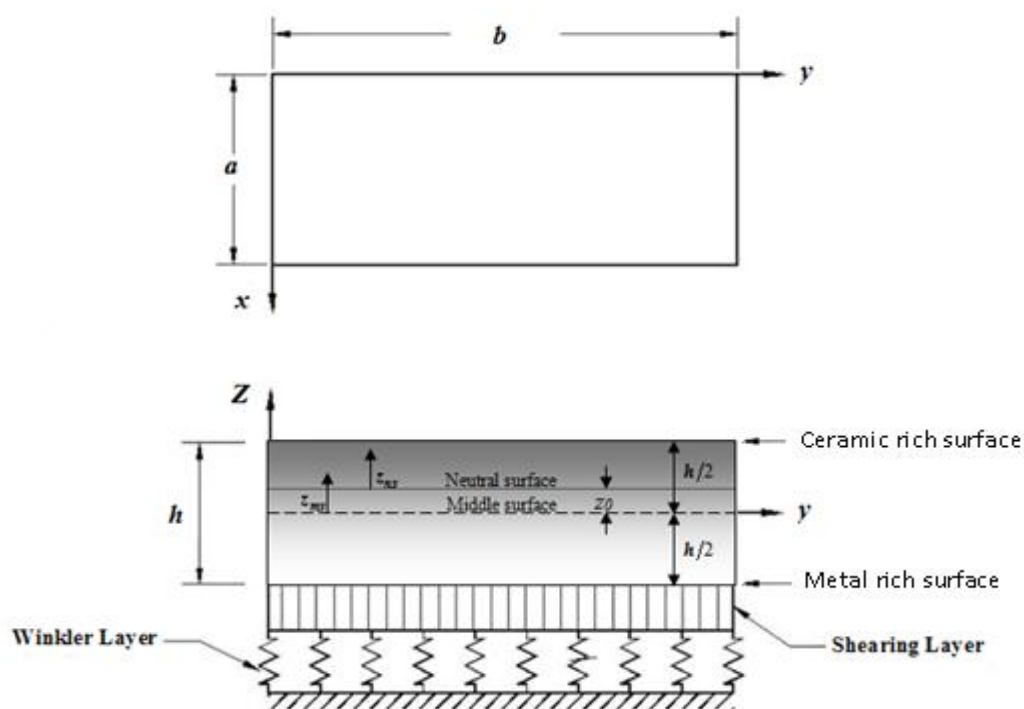


Figure V.1: plaque FGM repose sur fondation élastique

Les propriétés du matériau de la plaque FGM, tels que le module de Young E est supposée être en fonction de la fraction volumique des matériaux constitutifs. Soit la plaque FGM être soumise à une charge transversale $q(x, y)$. Puisque dans des plaques fonctionnellement gradué la condition du plan médian de symétrie n'existe pas, les équations de flexion et de traction sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie de manière appropriée dans la direction d'épaisseur de la plaque de FGM de façon à être la surface neutre, l'analyse des plaques FGM peut facilement être traitée selon la théorie des plaques isotropes homogènes, parce que les équations de traction et de flexion de la plaque ne sont pas couplées. Afin de déterminer la position de la surface neutre des plaques FGM, deux plans de référence différents sont considérés pour la mesure de z , à savoir z_{ms} et z_{ns} mesurées à partir de la surface intermédiaire et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme représenté sur la Figure V.1. La fraction volumique de céramique V_C peut être écrit en termes de coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme :

$$V_C = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p = \left(\frac{z_{ns} + z_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (1)$$

Où p est l'indice de la loi de puissance qui prend la plus grande valeur ou égal à zéro et z_0 est la distance de la surface neutre à partir de la surface médiane. Les propriétés matérielles non homogènes d'une plaque fonctionnellement gradué peuvent être obtenues au moyen de la règle du mélange Voigt (Suresh et Mortensen, 1998). Ainsi, en utilisant l'équation (1), les propriétés matérielles non-homogènes de la plaque FGM, en fonction de coordonnées « z » l'épaisseur, deviennent

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + z_0}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, \quad P_{CM} = P_C - P_M, \quad (2)$$

Où P_M et P_C sont les propriétés correspondantes du métal et du céramique, respectivement.

Dans le présent travail, On suppose que le module d'élasticité E varie graduellement à travers l'épaisseur, tandis que le coefficient de Poisson est considéré comme étant constante à travers l'épaisseur. La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminé suivant l'équation (4) (Ould Larbi et al, 2013;. Bouremana et al, 2013;. Khalfi et al, 2013;. Bousahla et al., 2013)

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - z_0) dz_{ms} = 0, \quad (3)$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue sous la forme :

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (4)$$

Il est clair que le paramètre z_0 est nul pour les plaques isotropes homogènes, comme prévu. La figure V.2 présente la variation du paramètre sans dimension z_0 / h par rapport à l'indice de loi de puissance p de Ti-6Al-4V/ ZrO_2 des plaques fonctionnellement graduées. Il peut être observé lorsque l'indice de loi de puissance des FGM devient nul (entièrement en céramique) ou devient infini (entièrement métallique); la surface neutre coïncide sur la surface médiane, comme prévu.

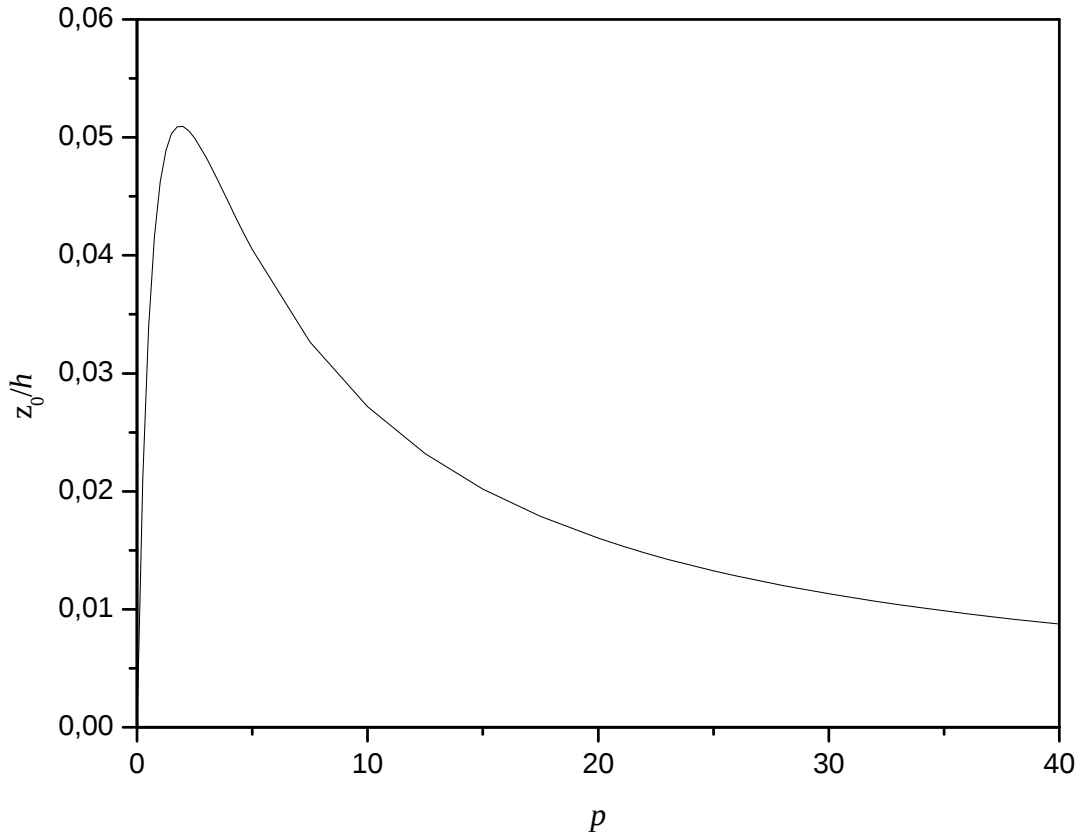


Figure V.2 Variation de la position de la surface neutre par rapport à l'indice de la loi de puissance.

V.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur

L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque FGM. Les déplacements d'un point matériel situé à (x, y, z_{ns}) de la plaque peuvent être écrites comme :

$$u = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z_{ns}) q_x \quad (5a)$$

$$v = v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z_{ns}) q_y \quad (5b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (5c)$$

Où u, v, w sont les déplacements suivant les directions x, y, z et u_0, v_0, w_0 sont les déplacements de la surface neutre. q_x et q_y sont les rotations des plans yz et xz dues à la flexion, respectivement. $\Psi(z_{ns})$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur. Le domaine de déplacement de la théorie de plaques minces classiques (CPT) est obtenu facilement en mettant $\Psi(z_{ns}) = 0$. Le déplacement de la théorie de plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT) est obtenu en posant $\Psi(z_{ns}) = z_{ns}$. En outre, le déplacement de la théorie de plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDPT) de Reddy (1984) est obtenu par l'équation suivante :

$$\Psi(z_{ns}) = (z_{ns} + z_0) \left(1 - \frac{4[z_{ns} + z_0]^2}{3h^2} \right) \quad (6a)$$

La théorie de plaques de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDPT) de Touratier (1991) s'écrit sous forme :

$$\Psi(z_{ns}) = \frac{h}{p} \sin\left(\frac{p[z_{ns} + z_0]}{h}\right) \quad (6b)$$

En outre, la théorie de plaque de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) de Karama et al. (2003) est de la forme :

$$\Psi(z) = (z_{ns} + z_0) \exp[-2(z_{ns} + z_0)/h] \quad (6c)$$

V.4 Nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues impliqués dans la nouvelle théorie actuelle de déformation de cisaillement hyperbolique (NHSDT) est seulement quatre, contre cinq ou six dans le cas d'autres théories de déformation de

cisaillement (Reddy, 1984; Touratier, 1991; Karama et al, 2003). La théorie de plaques présentée est variationnellement cohérent, ne nécessite pas des facteurs de correction de cisaillement et donne lieu à une variation de contrainte de cisaillement transverse de telle sorte que cette variation soit parabolique à travers l'épaisseur et satisfaisant les conditions de surface libre de contrainte de cisaillement.

V.4.1 Hypothèses de la présente théorie des plaques (NHSDT)

Les hypothèses de (NHSDT) sont les suivantes:

- i. L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque de FGM.
- ii. Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- iii. Le déplacement transversal w comprend deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composants sont en fonctions des coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (7)$$

- iv. La contrainte normale transversale S_z est négligeable en comparaison avec des contraintes normales dans le plan S_x et S_y .
- v. Les déplacements dans la direction x et dans la direction y sont en fonction d'une extension due à l'effort axial, à la flexion et au cisaillement (équation 8).

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (8)$$

Les composants de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie de la plaque classique. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donné comme suit :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (9)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en conjonction avec w_s des variations paraboliques de déformations du cisaillement g_{xz} , g_{yz} , et par conséquent à des contraintes de cisaillement t_{xz} , t_{yz} , à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que des contraintes de cisaillement t_{xz} , t_{yz} , sont nulles au niveau des faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donné sous la forme suivante (Ameur et al, 2011) :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (10)$$

V.4.2 Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations (7) - (10) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (11a)$$

Où

$$f(z_{ns}) = \frac{(h/p) \sinh\left(\frac{p}{h}[z_{ns} + z_0]\right) - (z_{ns} + z_0)}{[\cosh(p/2) - 1]} \quad (11b)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (11) sont

$$\begin{aligned} e_x &= e_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ e_y &= e_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ g_{xy} &= g_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ g_{yz} &= g(z) g_{yz}^s \\ g_{xz} &= g(z) g_{xz}^s \\ e_z &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Où

$$\begin{aligned} e_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ e_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$g_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}$$

$$g_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad g_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}) \text{ and } f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}}$$

Pour les plaques FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \text{ and } \begin{Bmatrix} t_{yz} \\ t_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{yz} \\ g_{zx} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Où $(s_x, s_y, t_{xy}, t_{yz}, t_{yx})$ et $(e_x, e_y, g_{xy}, g_{yz}, g_{yx})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (2), les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-n^2}, \quad (15a)$$

$$Q_{12} = \frac{n E(z_{ns})}{1-n^2}, \quad (15b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+n)}, \quad (15c)$$

Étant donné que la surface inférieure de la plaque est supposée comme à fondation élastique de type Winkler-Pasternak (voir la figure V.1), la relation réaction-flèche de la surface inférieure du modèle est exprimé par :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w. \quad (16)$$

Où f_e est la densité de la force réactionnelle de fondation. Si la fondation de type Winkler est modélisée comme linéaire, le coefficient k_1 dans l'équation (16) est nul.

V.4.3 Les équations constitutives

Les équations constitutives de l'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe du travail virtuel dans le cas présent s'écrit comme suit :

$$\int_{-\frac{h}{2}-z_0}^{\frac{h}{2}-z_0} \int_{\Omega} [s_x d e_x + s_y d e_y + t_{xy} d g_{xy} + t_{yz} d g_{yz} + t_{xz} d g_{xz}] d\Omega dz_{ns} + \int_{\Omega} [f_e d w] d\Omega - \int_{\Omega} [q d w] d\Omega = 0 \quad (17)$$

Où Ω est la surface supérieure.

En substituant les équations (11), (9) et (12) dans l'équation (17) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (17) peut être réécrite sous la forme :

$$\int_{\Omega} [N_x d e_x^0 + N_y d e_y^0 + N_{xy} d e_{xy}^0 + M_x^b d k_x^b + M_y^b d k_y^b + M_{xy}^b d k_{xy}^b + M_x^s d k_x^s + M_y^s d k_y^s + M_{xy}^s d k_{xy}^s + S_{yz} d g_{yz}^s + S_{xz} d g_{xz}^s] d\Omega + \int_{\Omega} f_e (d w_b + d w_s) d\Omega - \int_{\Omega} q (d w_b + d w_s) d\Omega = 0 \quad (18)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}-z_0}^{\frac{h}{2}-z_0} (s_x, s_y, t_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (19a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}-z_0}^{\frac{h}{2}-z_0} (t_{xz}, t_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (19b)$$

Les équations constitutives de l'équilibre peuvent être dérivées par l'équation (18) en intégrant les gradients de déplacement par partie et mettant les coefficients $d u_0$, $d v_0$, $d w_b$ et $d w_s$, égales à zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibres associés à la présente théorie de déformation de cisaillement,

$$\begin{aligned} d u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ d v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ d w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e + q = 0 \\ d w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - f_e + q = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

En substituant l'équation (14) dans l'équation (20), les contraintes résultantes d'une plaque FGM peuvent être liés aux déformations totales :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s g, \quad (21)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (22a)$$

$$e = \{e_x^0, e_y^0, g_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (22b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (22c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (22d)$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad g = \{g_{yz}, g_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (22e)$$

où A_{ij}, D_{ij} , etc., sont les rigidités de la plaque, définies par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \left(1, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), f^2(z_{ns}) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ n \\ \frac{1-n}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns} \quad (23a)$$

,

et

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11} = \frac{E(z_{ns})}{1-n^2} \quad (23b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} [f'(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (23c)$$

En substituant de l'équation (21) dans l'équation (20), on obtient l'équation suivante :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (24a)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = 0 \quad (24b)$$

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - f_e + q = 0 \quad (24c)$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - f_e + q = 0 \quad (24e)$$

V.5 Solutions exactes pour les plaques FGM

Les plaques rectangulaires sont généralement classés selon le type du support utilisé. Nous sommes concernés ici par les solutions analytiques de l'équation (24) pour la plaque FG simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées au niveau des bords latéraux.

$$v_0(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \quad (25a)$$

$$v_0(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \quad (25b)$$

$$N_x(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \quad (25c)$$

$$u_0(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad (25d)$$

$$u_0(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \quad (25e)$$

$$N_y(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \quad (25f)$$

Pour résoudre ce problème, Navier présenté la force externe sous la forme d'une double série trigonométrique:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(l x) \sin(m y), \quad (26)$$

où $l = m\pi / a$, $m = n\pi / b$, m et n sont les numéros des modes. Dans le cas d'une charge distribuée sinusoïdalement, nous avons

$$m = n = 1 \text{ and } q_{11} = q_0 \quad (27)$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie (UDL), nous avons

$$q_{mn} = \frac{16q_0 ab}{l m}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (28)$$

Suivant la procédure de solution Navier, nous supposons la forme de solution suivante pour

(u_0, v_0, w_b, w_s) qui satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(l x) \sin(m y) \\ V_{mn} \sin(l x) \cos(m y) \\ W_{bmn} \sin(l x) \sin(m y) \\ W_{smn} \sin(l x) \sin(m y) \end{Bmatrix} \quad (29)$$

où U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer. En substituant les

équations (29) et (26) dans les équations (24), nous obtenons:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (30)$$

où $\{\Delta\}$ et $\{F\}$ désignent les colonnes

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}, \text{ and } \{F\}^T = \{0, 0, -q_{mn}, -q_{mn}\}. \quad (31)$$

et

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

dans laquelle:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -(A_{11} l^2 + A_{66} m^2) \\
a_{12} &= -l m (A_{12} + A_{66}) \\
a_{13} &= 0 \\
a_{14} &= l [B_{11}^s l^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) m^2] \\
a_{22} &= -(A_{66} l^2 + A_{22} m^2) \\
a_{23} &= 0 \\
a_{24} &= m [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) l^2 + B_{22}^s m^2] \\
a_{33} &= -(D_{11} l^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) l^2 m^2 + D_{22} m^4 + k_1 (l^2 + m^2) + k_0) \\
a_{34} &= (D_{11}^s l^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) l^2 m^2 + D_{22}^s m^4 - k_1 (l^2 + m^2) - k_0) \\
a_{44} &= - \left(H_{11}^s l^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) l^2 m^2 + H_{22}^s m^4 + A_{55}^s l^2 + A_{44}^s m^2 \right) \\
&\quad + k_1 (l^2 + m^2) + k_0
\end{aligned} \tag{33}$$

V.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une solution analytique générale du comportement mécanique de la flexion des plaques en matériaux à gradient de propriété « FGM » reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak a été proposé. La réponse de la plaque FGM a été déterminée par le biais d'une nouvelle théorie dite *Théorie de distribution de cisaillement hyperbolique à quatre variables*. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. En outre, l'influence de certains paramètres de la plaque comme le rapport d'élancement, l'index de la fraction volumique des matériaux constitutifs, les rapports de l'élancement (largeur/épaisseur) de la plaque et de l'effet des raideurs de la fondation, seront minutieusement étudiés au chapitre suivant.

CHAPITRE VI

RESULTATS ET DISCUSSIONS

VI.1 Introduction :

Le but de cette étude est de présenter les résultats numériques issus de l'analyse de flexion des plaques FGM reposant sur un sol élastique de type Winkler-Pasternak. Cette analyse repose sur une nouvelle théorie dite *Théorie de distribution de cisaillement hyperbolique à quatre variables*, qui a été démontré dans le chapitre V.

Contrairement aux autres théories, le nombre des fonctions inconnues pour la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou six pour les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. La théorie présentée n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Les matériaux choisis sont le titane (Ti-6Al-4V) et le zirconium (ZrO₂). Pour la simplicité, on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout point de la plaque. Les caractéristiques matérielles des matériaux utilisés sont rapportées au tableau VI.1

Il est également à noter que dans toute cette étude et pour tous les types des plaques étudiées, les influences du rapport d'élancement, de l'index de la fraction volumique des matériaux constituants (céramique et métal), les différents rapports de l'élancement (largeur/épaisseur) de la plaque et de l'effet des raideurs de la fondation élastique, seront analysées et interprétées.

Tableau VI.1: Propriétés matériels de la plaque FGM

Propriétés	Métal (Ti-6Al-4V)	Céramic (ZrO ₂)
E _m (GPa)	66.2	117.0
n	0.3	0.3

Les différentes quantités adimensionnelles utilisées sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), & \bar{s}_x &= \frac{h}{aq_0} s_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), & \bar{t}_{xy} &= \frac{h}{aq_0} t_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right), \\ \bar{t}_{xz} &= \frac{h}{aq_0} t_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right), & \bar{z} &= z/h, & K_0 &= k_0 a^4 / D, & K_1 &= k_1 a^2 / D.\end{aligned}$$

Où $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ représente la rigidité à la flexion de la plaque.

VI.2 Etude paramétrique :

Cette partie est consacrée à l'étude de l'influence de quelques paramètres géométriques et matériels sur le comportement mécanique des plaques FGM. L'ensemble de résultats obtenus seront présentés sous forme de tableaux et des courbes suite à l'exécution du programme de calcul de la méthode prescrite au chapitre précédent.

Le Tableau VI.2 montre les effets du rapport d'élancement (largeur a /épaisseur h) et les paramètres de fondations élastiques sur la flèche et aussi sur les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée isotrope. Il est évident que la flèche centrale $\bar{w}$ diminue à mesure que le rapport de l'élancement a/h augmente. Cependant, les contraintes de cisaillement ($\bar{t}_{xy}$ et $\bar{t}_{xz}$) et la contrainte axiale $\bar{s}_x$ augmentent à mesure que le rapport de l'élancement a/h augmente. En outre, la flèche et les contraintes diminuent avec la prise en compte de l'influence des raideurs de fondations élastiques.

Le tableau VI.3 montre l'influence de la fraction volumique et les paramètres de fondations sur les contraintes et sur la flèche centrale des plaques de nature homogènes et des plaques FGM. On remarque que lorsque la plaque devient de plus en plus métallique, la valeur de la flèche centrale $\bar{w}$ et de la contrainte axiale $\bar{s}_x$ augmente tandis qu'elle suit un régime aléatoire pour les contraintes de cisaillement ($\bar{t}_{xy}$ et $\bar{t}_{xz}$). Il est important d'observer que les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que pour une plaque entièrement en métal sans fondations élastiques ($K_0 = K_1 = 0$), vu que la plaque pour ces deux cas est totalement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité. Par contre, les valeurs des flèches centrales, des contraintes axiales et transversales changent et diminuent avec l'inclusion des paramètres de fondation élastique.

Tableau VI.2: Effet du rapport d'élancement (largeur a /épaisseur h) et les paramètres de fondation élastique sur la flèche et la contrainte adimensionnelle d'une plaque FGM isotrope carrée.

a/h	K_0	K_1	Theory	$\bar{w}$	$\bar{S}_x$	$\bar{t}_{xy}$	$\bar{t}_{xz}$
5	0	0	ESDPT	0.3428578	1.029440	0.3489580	0.2530360
			SSDPT	0.3431862	1.027258	0.3491768	0.2455716
			TSDPT	0.3433163	1.024924	0.3494528	0.2380930
			FSDPT	0.3434858	0.9878816	0.3546240	0.1909859
			CPT	0.2802613	0.9878810	0.3546240	-
			Present	0.3432859	1.022924	0.3497062	0.2317712
	100	0	ESDPT	0.2609323	0.7834558	0.2655752	0.1925734
			SSDPT	0.2611224	0.7816168	0.2656804	0.1868497
			TSDPT	0.2611978	0.7797704	0.2658662	0.1811430
			FSDPT	0.2612958	0.7514992	0.2697690	0.1452865
			CPT	0.2230226	0.7861228	0.2821980	-
			Present	0.2611802	0.7782654	0.2660650	0.1763370
	0	10	ESDPT	0.2116725	0.6355520	0.2154386	0.1562186
			SSDPT	0.2117974	0.6339726	0.2154946	0.1515546
			TSDPT	0.2118472	0.6324410	0.2156338	0.1469179
			FSDPT	0.2119115	0.6094676	0.2187832	0.1178277
			CPT	0.1860216	0.1860216	0.2353794	-
			Present	0.2118355	0.6312278	0.2157976	0.1430218
	100	10	ESDPT	0.1773040	0.5323596	0.1804586	0.1308540
			SSDPT	0.1773918	0.5309862	0.1804882	0.1269351
			TSDPT	0.1774266	0.5296828	0.1805978	0.1230469
			FSDPT	0.1774717	0.5104172	0.1832267	0.09867834
			CPT	0.1589454	0.5602596	0.2011190	-
			Present	0.1774184	0.5286714	0.1807366	0.1197849
10	100	10	ESDPT	0.1638744	1.105538	0.3911444	0.1405295
			SSDPT	0.1638971	1.104803	0.3911620	0.1362969
			TSDPT	0.1639048	1.104108	0.3912240	0.1320799
			FSDPT	0.1639081	1.093817	0.3926523	0.1057332
			CPT	0.1589454	1.120520	0.4022383	-
			Present	0.1639009	1.103572	0.3913026	0.1285318
20	100	10	ESDPT	0.1602009	2.233407	0.7988250	0.1431761
			SSDPT	0.1602066	2.233032	0.7988330	0.1388572
			TSDPT	0.1602084	2.232679	0.7988660	0.1345492
			FSDPT	0.1602086	2.227444	0.7995955	0.1076573
			CPT	0.1589454	2.241038	0.8044755	-
			Present	0.1602073	2.232408	0.7989065	0.1309217
50	100	10	ESDPT	0.1591473	5.599530	2.008916	0.1439351
			SSDPT	0.1591482	5.599378	2.008920	0.1395914
			TSDPT	0.1591485	5.599238	2.008934	0.1352573
			FSDPT	0.1591485	5.597132	2.009228	0.1082087
			CPT	0.1589454	5.602596	2.011190	-
			Present	0.1591483	5.599128	2.008952	0.1316070
100	100	10	ESDPT	0.1589959	11.20366	4.021240	0.1440442
			SSDPT	0.1589961	11.20359	4.021243	0.1396970
			TSDPT	0.1589962	11.20352	4.021251	0.1353590
			FSDPT	0.1589962	11.20246	4.021396	0.1082880
			CPT	0.1589454	11.20520	4.022383	-
			Present	0.1589962	11.20347	4.021263	0.1317055

Tableau VI.3: Effets de la fraction volumique et les paramètres de fondation élastique sur les déplacements et les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée selon la présente méthode ($a/h = 10$).

P	K_0	K_1	$\bar{w}$	$\bar{S}_x$	$\bar{t}_{xy}$	$\bar{t}_{xz}$
céramic	0	0	0.2960438	1.993313	0.7067853	0.2321589
	100	0	0.2329032	1.568177	0.5560413	0.1826438
	0	10	0.1928455	1.298463	0.4604064	0.1512302
	100	10	0.1639009	1.103572	0.3913026	0.1285318
1	0	0	0.3875509	2.373032	0.6736005	0.2321589
	100	0	0.2860366	1.751443	0.4971585	0.1713476
	0	10	0.2278981	1.395454	0.3961087	0.1365202
	100	10	0.1885484	1.154510	0.3277152	0.1129482
2	0	0	0.4133349	2.498383	0.6564013	0.2256716
	100	0	0.2998414	1.812377	0.4761667	0.1637066
	0	10	0.2365763	1.429975	0.3756979	0.1291654
	100	10	0.1944498	1.175342	0.3087982	0.1061652
5	0	0	0.4395265	2.708000	0.6620495	0.2210525
	100	0	0.3133886	1.930844	0.4720510	0.1576135
	0	10	0.2449303	1.509058	0.3689333	0.1231835
	100	10	0.2000582	1.232594	0.3013436	0.1006159
10	0	0	0.4610934	2.922580	0.6698244	0.2260154
	100	0	0.3242007	2.054902	0.4709621	0.1589144
	0	10	0.2514852	1.594006	0.3653293	0.1232712
	100	10	0.2044100	1.295625	0.2969437	0.1001962
métal	0	0	0.5232194	1.993315	0.7067856	0.2321589
	100	0	0.3537325	1.347618	0.4778358	0.1569555
	0	10	0.2688993	1.024429	0.3632397	0.1193140
	100	10	0.2157677	0.8220120	0.2914674	0.09573873

Les Figure VI.1-VI.2 représentent les distributions de la contrainte axiale $\bar{S}_x$ à travers l'épaisseur dans les plaques FGM ($p = 2$) carrés sous les charges sinusoïdales. On constate que la contrainte axiale $\bar{S}_x$ devient une contrainte de compression tout au long de la plaque jusqu'à $\bar{z} = 0.053$ puis elle devient une contrainte de traction. Les contraintes maximales de compression se produisent à un point sur la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, à un point sur la surface supérieure de la plaque FGM. En outre, on peut constater aussi d'après ces figures que la fondation élastique a un effet

significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale $\bar{S}_x$. On observe aussi que la contrainte normale $\bar{S}_x$ augmente progressivement avec la diminution de K_0 ou K_1 .

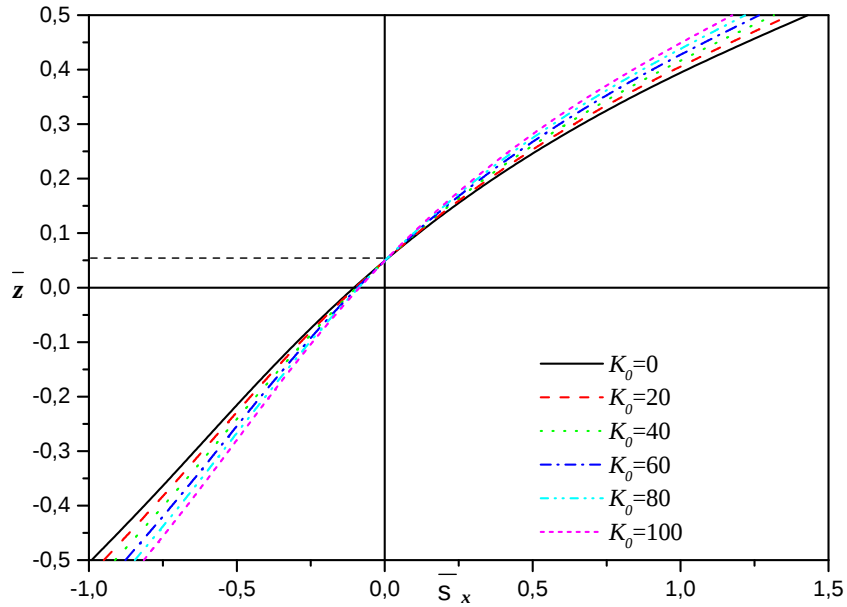


Figure VI.1: Variation de la contrainte longitudinale ($\bar{S}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_0 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_1=10$).

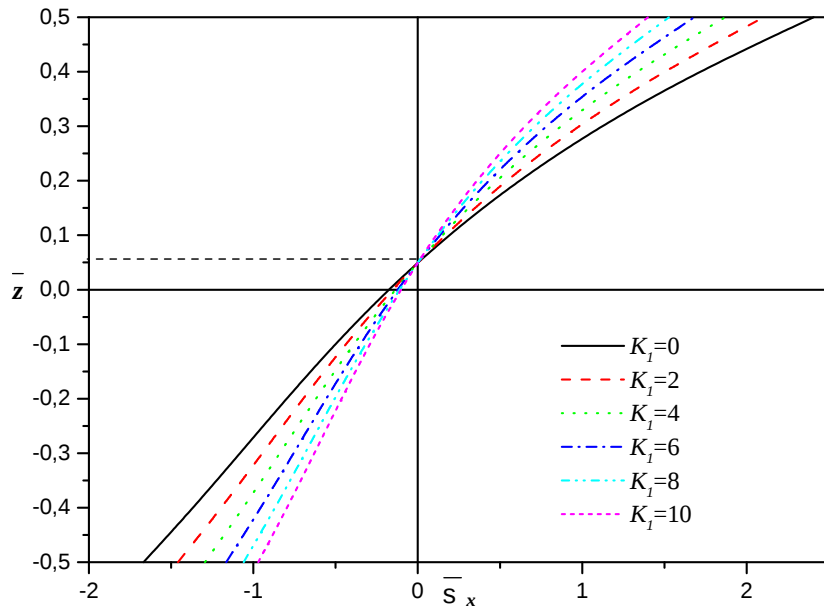


Figure VI.2: Variation de la contrainte axiale ($\bar{S}_x$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_1 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_0=10$).

Les Figure VI.3- VI.4 montrent les distributions de contraintes de cisaillement $\bar{t}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM carré sous charge sinusoïdale répartie. La fraction volumique de la plaque FGM est prise égale $p = 2$. La distinction entre les courbes des Figures VI.3 et VI.4 est évident. On remarque que la contrainte de cisaillement transversale ($\bar{t}_{xz}$) augmente progressivement avec la diminution de K_0 ou K_1 . Il est à noter aussi que la rigidité flexionnelle peut être améliorée en augmentant le module d'élasticité de fondation. Les distributions de la contrainte de cisaillement $\bar{t}_{xz}$ à travers l'épaisseur n'a pas de forme paraboliques comme dans le cas des plaques en matériau homogène. On constate que la valeur maximum se produit au niveau $\bar{z} \cong 0.1$ et non pas au centre de la plaque comme dans le cas des plaques homogènes.

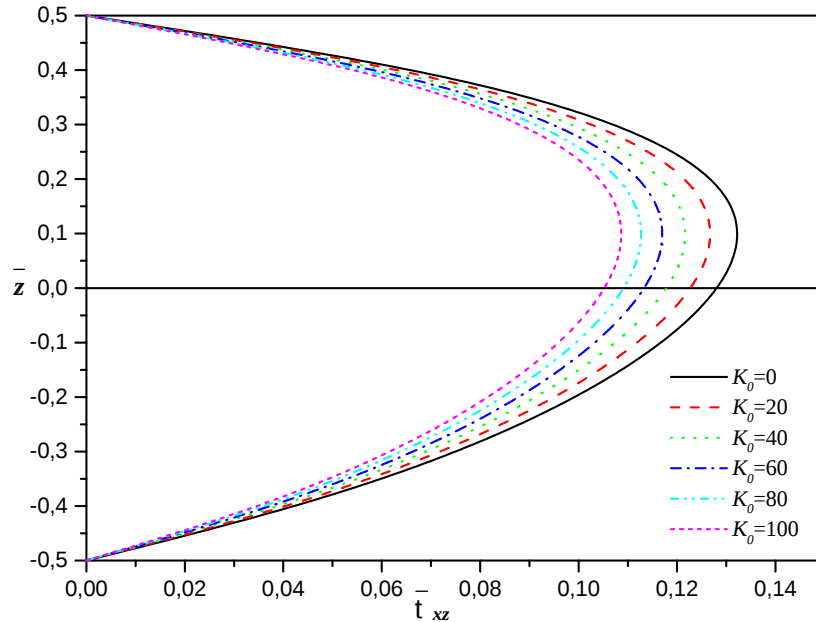


Figure VI.3: Variation de la contrainte de cisaillement transversale ($\bar{t}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_0 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_1=10$).

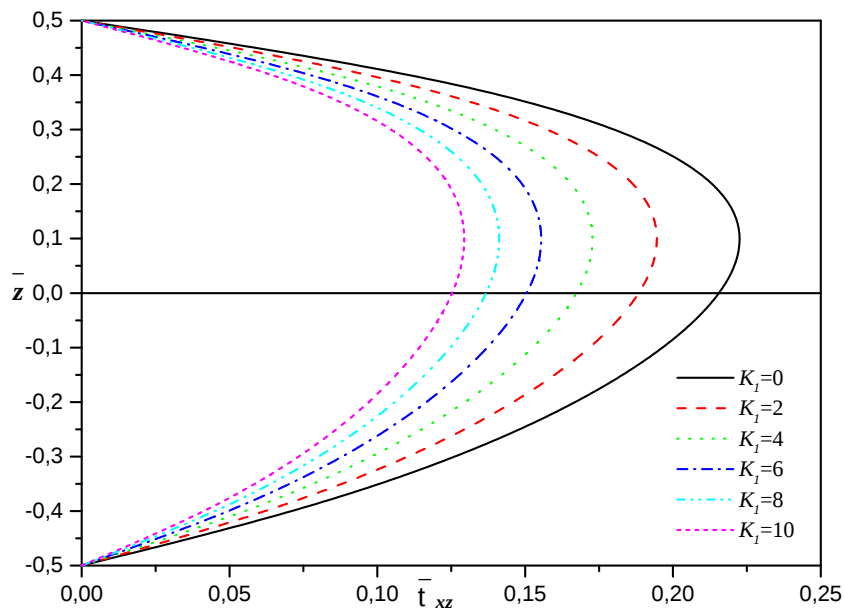


Figure VI.4: Variation de la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{t}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_1 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_0=10$)

Les Figures VI.5-VI.6 montrent la contrainte tangentielle longitudinale dans les plaques FGM ($p=2$) Carrés sous charges sinusoïdales. Contrairement à la contrainte axiale, les valeurs de contraintes de traction et de compression due aux contrainte tangentielle longitudinale $\bar{t}_{xy}$, (figure VI.5 et VI.6), ont des valeurs maximales au droit des surfaces inférieures et supérieures de la plaque FGM, respectivement. Il est clair que la valeur minimum de zéro semble pour tous les efforts axiaux $\bar{s}_x$ et $\bar{t}_{xy}$ en $\bar{z} = 0.053$.

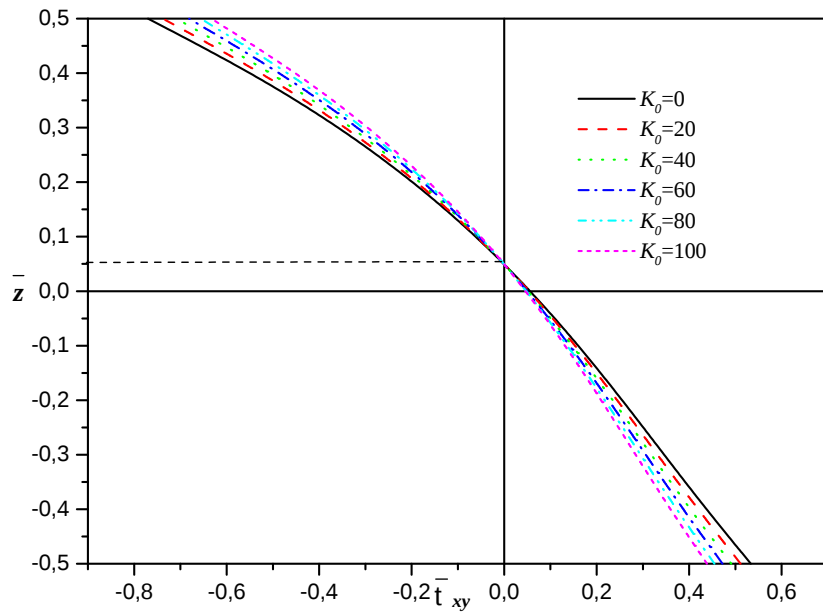


Figure VI.5: Variation de la contrainte tangentielle longitudinale ($\bar{t}_{xy}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_0 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_1=10$).

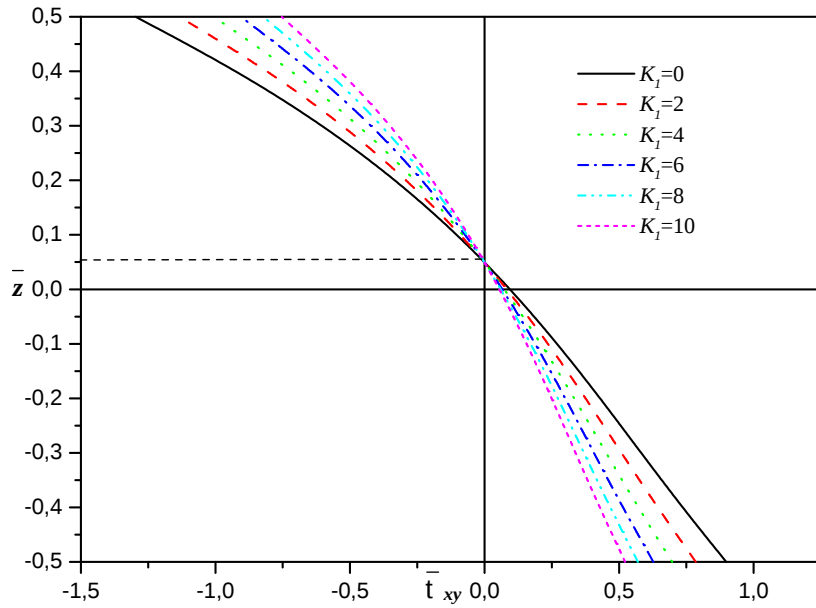


Figure VI.6: Variation de la contrainte tangentielle longitudinale ($\bar{t}_{xy}$) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée FGM pour différentes valeurs de K_1 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_0=10$).

Enfin, les flèches maximales exactes de la plaque FGM carrée simplement appuyée sont comparées dans les figures VI. 7 et en VI.8 pour différents rapports de modules d'élasticité

E_m/E_c . Cela signifie que les flèches sont calculées pour des plaques ayant différents mélanges céramique-métal. Il est clair que les valeurs des flèches diminuent légèrement avec l'augmentation du rapport du module d'élasticité métal-céramique E_m/E_c . En outre, les flèches diminuent progressivement à mesure que l'une des raideurs K_0 ou K_1 augmente.

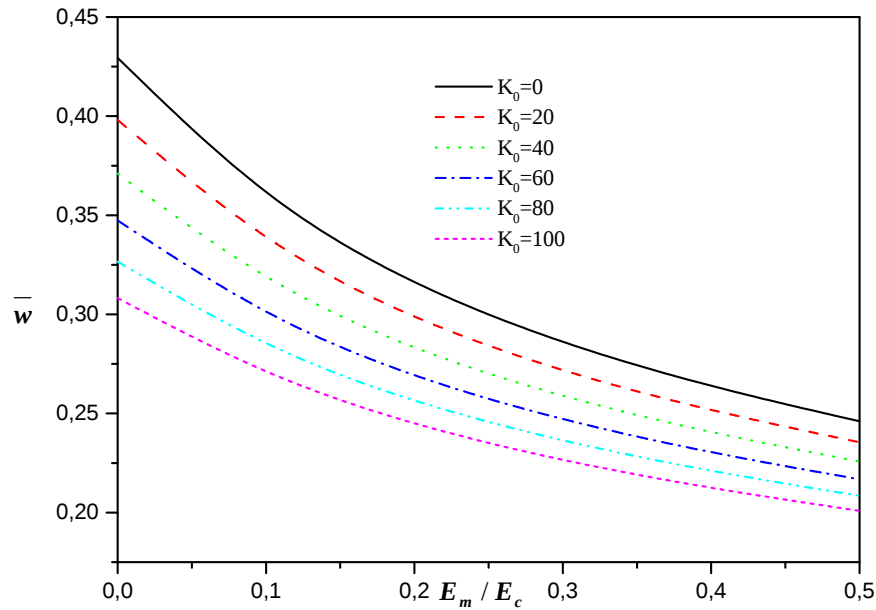


Figure VI.7: L'effet de l'anisotropie sur la flèche maximale adimensionnelle ($\bar{w}$) d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_0 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_1=10$).

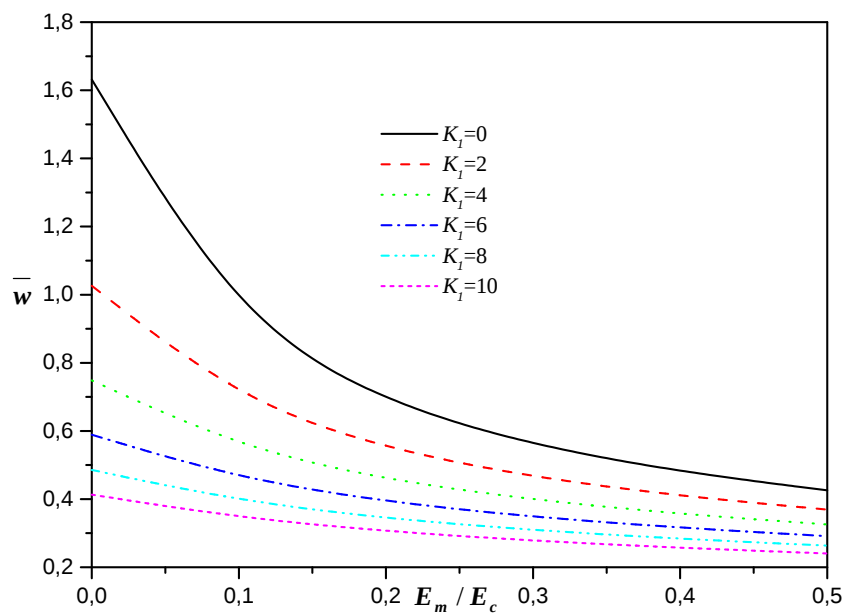


Figure VI.8: L'effet de l'anisotropie sur la flèche maximale adimensionnelle ($\bar{w}$) d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs de K_1 . ($a/h=10$, $p=2$ et $K_0=10$).

VI.3 Conclusion

Dans la présente étude, une solution analytique pour l'analyse statique des plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur fondations élastiques de type Winkler ou Pasternak, a été présenté à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Le nombre de variables primaires impliquées dans cette théorie est inférieur à celui des théories de premier ordre ou d'ordre supérieur. La théorie donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverses à travers l'épaisseur et satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. La réponse en termes de contraintes et de déplacements des plaques FGM ont été analysés sous chargement sinusoïdal. Dans cette étude, on a supposé que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés pour les plaques avec un mélange céramique-métal et ont été comparés avec celui des plaques isotropes homogènes. Le calcul numérique envisagé a été basé sur une étude paramétrique à savoir: l'influence de l'index de la fraction volumique des matériaux constituants (céramique et métal), du rapport de l'élancement (largeur/épaisseur) de la plaque et de l'effet des raideurs de la fondation élastique.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans la présente étude, une solution analytique pour l'analyse statique des plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, a été présenté à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Le nombre de variables primaires impliquées dans cette théorie est inférieur à celui des théories de premier ordre ou d'ordre supérieur. La théorie donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverses à travers l'épaisseur et satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. La réponse en termes de contraintes et de déplacements des plaques FGM ont été analysés sous chargement sinusoïdal. Dans cette étude, on a supposé que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs études paramétriques ont été menées pour montrer les effets des différents paramètres sur la réponse de la plaque FGM à savoir : l'influence du rapport d'élancement, de l'index de la fraction volumique des matériaux constituants (céramique et métal) et de l'effet des raideurs de la fondation élastique. Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés pour les plaques avec un mélange céramique-métal et ont été comparés aussi avec celui des plaques isotropes homogènes. On constate que les plaques en FGM avec de propriétés de mélange intermédiaires ont eu des valeurs intermédiaires de la flèche, cela est expliquée par le fait que la plaque métallique est la plus souple par contre la plaque céramique est la plus rigide. Ce comportement se révèle indépendamment aux conditions aux limites. Ainsi les gradients

de propriétés des matériaux jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques FGM. On constate qu'à partir des résultats que les flèches et les contraintes diminuent progressivement à mesure que l'un des raideurs K_0 ou K_1 augmente. Les résultats numériques obtenus dans cette thèse constituent une référence pour les analyses des plaques épaisses sur des fondations élastiques à l'avenir.

La présente approche peut être étendue pour étudier la déformation thermique des plaques stratifiées orthotropes (Moradi Mansouri 2012) et l'analyse non linéaire des plaques FGM.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abdelaziz, H.H., Ait Atmane, H., Mechab, I., Boumia, L., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., "Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory", *Chinese Journal of Aeronautics*, **24(4)**, 434 – 448, (2011).

Abrate, S., "Functionally graded plates behave like homogeneous plates", *Composites, Pt.B:Eng.* **39(1)**, 151 -158, (2008).

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. , "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293–318, (2014).

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int J Mech Mater Des*, **6(2)**, 113–121, (2010).

Ameur, M., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. , "A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations", *KSCE Journal of Civil Engineering*, **15(8)**, 1405-1414, (2011).

Atai A.A., Nikranjbar A., Kasiri R., "Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607-614, (2012).

Avramidis, I.E., Morfidis, K., "Bending of beams on three-parameter elastic foundation", *Int. J. Solids Struct.*, **43**, 357–375, (2006).

Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. , "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory", *Journal of Thermal Stresses*, **35**, 677–694, (2012).

Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. , "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **48**, 547 – 567, (2013).

Bao, G., Wang, L., "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J; Solids Structures*; **32 (19)**: 2853–2871, (1995).

- Barka, M.**, "Investigation de la stabilité thermique des plaques FGM sigmoïdes", mémoire de magister, Université de Sidi Bel Abbès, Octobre, (2012).
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O.**, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283, (2014).
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A.**, "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Composites Part B*, **42**, 1386–1394, (2011).
- Benyoussef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H., Adda Bedia, E.A.**, "Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Mech Compos Mater*, **46(4)**, 425–434, (2010).
- Berthelot, J.M.**, *Matériaux composites « Comportement mécanique et analyse des structures »*, Masson, (1993).
- Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A.**, "A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **15**, 671–703, (2013).
- Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M.**, "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191 -192, (1986).
- Bodaghi, M., Saidi, A.R.**, "Thermoelastic buckling behavior of thick functionally rectangular plates", *Arch.Appl.Mech.* 81,1555-1572, (2011).
- Bouaziz, O., Bréchet, Y., Embury, J.D.**, *Advanced Engineering Materials*, Vol.10, No. 1 –2, 24-36, (2008).
- Bouaziz, O.**, "Potentiel des matériaux à gradient de propriétés pour applications nucléaires", 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, E.A., Megueni, A.**, "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates:An analytical approach",*Comput.Mater.Sci.*49,865-870, (2010).
- Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A.** "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104, (2013).

- Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A.** , "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **14**, 5 - 33, (2012).
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A.**, "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, (In press), (2014).
- Brush.D.O, Almorh.B.O**, "Buckling of Bars,Plates and Shells,Ed."(McGraw-Hill,New York), (1975).
- Chaouadi, R., Coen, G., Lucon, E., Massaut, V.**, *Journal of Nuclear Materials*, 403, 15–18, (2010).
- Chehab.B, Zurob.H, Embury.J.D, Bouaziz.O, Bréchet.Y** , *Adv. Eng. Mat.*, Vol.11, No. 12, 992-999, (2009).
- Cheng, Z.Q., Batra, B.C.**, "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate", *J Sound Vib*, **229(4)**, 879–895, (2000).
- Cheng, Z.Q., Kitipornchai, S.**, "Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates", *ASCE J Eng Mech*, **125(11)**, 1293–1267, (1999).
- Chi . Shyang-ho. , Chung Yen-Ling**, Cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227– 1243, (2003).
- Chiang, Y.M., Haggerty, J.S., Messer, R.P., Demetry, C.**, "Reaction-based proccesing methods for ceramic-matrix composite" *Ceramic Bulletin*, vol. 18, pp. 544, (1989).
- Descamps, M., Richart, O., Hardouin, P.** 2007 Synthesis of macroporous _ tri-calcium phosphate with controlled porous architectural. *Ceramics International*, 34, pp. 1131 -37.
- Dharmasena KP, Wadley HNG, Xue Z and Hutchinson JW** "Mechanical response of metallic honeycomb sandwich panel structures to high-intensity dynamic loading". *Int J Imp Eng*, 35 (9): 1063 – 1074, (2008).
- Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y.** , "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass", *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81, (2014).
- Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H.**, "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II:

Interface Optimization for Residual Stress Reduction", Journal of Applied Physics, 74, 1321-1326, (1993).

Embury, J.D., Bouaziz, O., Annu. Rev. Mater. Res., No.40, 213–241, (2010).

EL Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. , “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, International Journal of Mechanical Sciences, **53(4)**, 237 – 247, (2011).

Eyerer P., Reinhardt H., "Ökologische Bilanzierung von Baustoffen und Gebäuden", Basel: Birkhäuser, 2000.

Farooqi, J.K., Sheikh, M.A.Finite, "Element modelling of thermal transport in ceramic matrix composites". Computational Materials Science, 26, pp. 361 - 373, (2006).

Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A.,“Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory”, Steel and Composite Structures, **13(1)**, 91 – 107, (2012).

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, Meccanica, **49**, 795 – 810, (2014).

Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S., "Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al 2 O 3 Multi-Layered Material", Materials Science and Engineering, 205, 59-71, (1996).

Fleck NA, Deshpande V., "The resistance of clamped sandwich beams to shock loading". J Appl Mech, 71: 386 – 401, (2004).

Gay, D., "Matériaux composites", Hermès, (1991).

Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson., M., "Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients", Acta Metallurgica et Materialia, **43**, 1335-1354, (1995).

Grandjean, S., Absi, J., Smith, D. , "Numerical calculations of the thermal conductivity of porous ceramics based on micrographs.", J. of the European Ceramic Society, 26, pp. 2669- 2676, (2006).

Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. , "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", Applied Mathematics and Mechanics, **32**, 7925-7942, (2011).

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A., "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics*, **140**, 374 – 383, (2014).

Heinz P., Herrmann M., Sobek W., "Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen", Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau (1/2011), Stuttgart, ILEK, 2011

Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M., Adda Bedia, E.A., "Sound Wave Propagation in Single- Walled Carbon Nanotubes using Nonlocal Elasticity", *Physica E.*, **40**, 2791, (2008).

Hildebrand., F.B., Reissner, E., Thomas, G.G., "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". NACA T. N. N°:1833, 1949.

Hill, R. et Lin, W., "Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, **124**, 185-191, (2002).

Hossein A., « Elaboration et caractérisation de composites duplex: composites laminaires tri-couches à base d'alumine », thèse de doctorat, Université de Lyon, Septembre , (1997).

Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, **76**, 467 – 479, (2013).

Hussein H., « Coulage en bande: Elaboration d'une barbotine à base de cuivre/bronze renforcée par des particules améliorant le frottement à sec », *Design & Materials*, Novembre, (2007).

Ibrahim, H., Tawfik, M., Al-Ajmi, M., "Thermal buckling and nonlinear flutter behavior of functionally graded material panels", *J.Aircraft.* **44**, 1610-1618, (2007).

Il'Ina, V.P., *Metal Science and Heat Treatment*, Vol.41, No. 1 –2, 20-21, (1999).

Javaheri, R., Eslami, M.R. , "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory," *J. Therm. Stress.*, **25(1)**, 603-625, (2002a).

Javaheri, R., Eslami, M.R. , "Thermal buckling of functionally graded plates", *AIAA.40*, 162-169. (2002b).

Julien S., « Elaboration par coulage en bande et caractérisation de composites fibreux à matrice à base de ciment alumineux », thèse de doctorat, université de limoges, (2005).

Kaci, A., Tounsi, A., Bakhti, K., Adda Bedia, E.A., “Nonlinear cylindrical bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates”, *Steel and Composite Structures*, **12**, 491 – 504, (2002).

Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *International Journal of Solids and Structures*, **40(6)**, 1525–1546, (2003).

Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A., “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, **15(4)**, 399-423, (2013).

Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A., “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *International Journal of Computational Methods*, In press, (2014).

Kitipornchai, S., Yang, J., Liew, K.M., “Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195(9-12)**, 1075-1095, (2006).

Kieback, B.; Neubrand, A.; Riedel, H., "Processing techniques for functionally graded materials", *Materials Science & Engineering A*, **362**, (2003), 81-105.

Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Ameer, M., “A n-order four variable refined theory for bending and free vibration of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 21-46., (2014).

Koch, I.C. "The laws of bone architecture", *Am. J Anat.*, **21**, 177-198. (1917)

Koizumi, M., “The concept of FGM”, *Ceram Trans, Funct Gradient Mater*, **34**, 3–10, (1993).

Kolednik, O., *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, 781 -808, (2000).

Lanhe, W., "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Compos.Struct.* **64**, 211 -218, (2004).

Lostec, L., "Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L", Thèse de l'université de Limoges, (1997).

Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V. and Villain, G., "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer", **NDT & E International**, Volume 44, Issue 2, March 2011, Pages 169-177.

Marin, L., "Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, (2005).

Matsuo, S., Watari, F. and Ohata, N. , "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root", *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274, (2001).

Matsunaga, H., "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D Higher order deformation theory", *Compos.Struct.*90,76-86, (2009).

Mattheck, C., "Engineering components grow like trees", *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 21, 143-168. (1990).

Mattheck, C. and Burkhardt, S., "A new method of structural shape optimization based on biological growth", *Internat. J. Fat.*, 12 (3), 185-190. (1990).

Michot, A., Smith, D. S., Degot, S., Gault, C., "Thermal conductivity and specific heat of kaolinite : Evolution with thermal treatment". *Journal of the European Ceramic Society*, 28, pp.2639-2644, (2008).

Mishnaevsky, L., Schmauder, S., "Continuum mesomechanical finite element modeling in materials development: A state-of-the-art review *Applied Mechanics Reviews*", 54, pp. 49-69, (2001).

Mistler, R.E., "High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique", *Am. Ceram. Soc. Bull.*; 52 (11): 850-854, (1973).

Moradi, S., Mansouri, M., "Thermal buckling analysis of shear deformable laminated orthotropic plates by differential quadrature", *Steel Compos. Struct.*, 12 (2012).

Morimoto, T., Tanigawa, Y., Kawamura, R., "Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to Partial Heating", *Int.J.Mech.Sci.*48(9),926-937, (2006).

Moya, J.S., Sanchez-Herencia, A.J., Requena, J. & moreno, R., “Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting”, *Materials Letters* , Vol. 14, p.333-35, (1992).

Müller, E., Drašar, C., Schilz, J. and Kaysser, W.A., “Functionally graded materials for sensor and energy applications,” *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30, (2003).

Nabil, F., Emmanuel, B., Mohamed, G., Claudia, C., Christian, C., Olivier, R., « Matériaux composites alumine/aluminium à gradient de fonction: modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective », 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).

Naghdi, P.M., "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.

Najafizadeh, M.M., Heydaru, H.R., "Thermal buckling of Functionally Graded Circular plates based on Higher Order Shear deformation plate theory", *Eur.J.Mech.A.Solids* 23,1085- 1100, (2004).

Narottam P., Jitendra P., Jacques L., Sung, R., "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons;page 110, 4 août ,(2011).

Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. , “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic fondations by using a refined hyperbolic shear deformation theory” *Mechanics of Composite Materials*, **49(6)**, 641 – 650, (2014).

Nemat-Allal, M., Ata, M., Bayoumi, M. and Khair-Eddine, W., “Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of Aluminium/Steel functionally graded material,” *Materials Sciences and Applications*, vol. 2, pp. 1708-1718, (2011).

Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R., “The functionally gradient materials,” *J Jap Soc Compos Mat*, vol.13, (2005), pp. 257-264.

Niino, M., Kisara, K. and Mori, M., “Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SPSS),” *Mater Sci Forum*, vol. 492, pp. 163–168, (2005).

Noda, N., Hetnarski, R.B., Tanigawa, Y. , “Thermal Stresses”, second edition, Taylor & Francis, New York, (2003).

Pasternak, P.L., "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Cosudarstrennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, USSR, 1–56 [in Russian], (1954).

Perl, R. and O'Rourke, R., "Terrorist attack on USS Cole: Background and issues for Congress". Emerging Technologies: Recommendations for counter-terrorism. Institute for Security Technology Studies, Dartmouth College, (2001).

Perl, R., "Terrorism: US responses to bombings in Kenya and Tanzania: A new policy direction" Congressional Report. Congressional Research Service, The Library of Congress, (1998).

Pompea, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempele, U., Scharnweber, D., Schulte Functionally graded materials for biomedical applications, Materials Science and Engineering, vol. A362, pp. 40–60, (2003).

Raether, F., Iuga, M., "Effect of particle shape and arrangement on thermoelastic properties of porous ceramics". J. of the European Ceramic Society, 26, pp. 2653-2667, (2012).

Rafic, Y., Matériaux composites, Master Mécanique 3M, Beyrouth ,(2008).

Ravichandran, K.S., "Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System", Materials Science and Engineering, A-201, 269-276, (1995).

Reddy, J.N., "A simple higher-order theory for laminated composite plates", ASME-Journal of Applied Mechanics, **51(4)**, 745–752, (1984).

Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., "Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal plan form", Int J Mech Sci, **44(5)**, 967–985, (2002).

Reddy, J.N., "Energy principles and variational methods in Applied Mechanics", Jhon Wiley, New York, (1984).

Reddy, J.N., "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". CRC Press, Boca Raton, (1997).

Reddy, J.N., "Theory and analysis of elastic plates", (Taylor and Francis, Philadelphia), (1999).

Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", International Journal for Numerical Methods In Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng. 47, 663,684 (2000).

Reissner, E., “On a variational theorem in elasticity”. J.Math.Phys., 29 :90–95, (1950).

Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, Steel and Composite Structures, In press, (2014).

Saidi, A.R., Jomehzadeh, E., "On analytical Approach for the Bending/Stretching of lineary elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported", Proc.Inst.Mech.Eng.Pt.C: J.Mech.Eng.Sci. 223,2009-2016, (2009).

Samsam, B.A., Eslami, M.R., "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads",Compos.Struct. 78,433-439, (2007).

Sellai, B.O., "Etude et analyse des structures en FGM,comparaison entre E-FGM,PFGM et S-FGM" , thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbès, (2010-2011).

Serebrin, S.M., Rakhshadt, A.G., Seremov, V.M., Metal Science and Heat Treatment, Vol.18, No. 8, 713-716, (1976).

Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S. and Srinivasan, S.P., “An overview of fracture analysis in functionally graded materials,” European Journal of Scientific Research, vol.68 No.3 ,pp. 412-439, (2012).

Shiota I., and Miyamoto Y., "Functionally Grade Materials Proceedings of the 4th international symposium on Functionally Graded Materials", October 21-24, (1996).

Sobek W., Herrmann M., Haase W., "Gradientenbetone. Beton- und Stahlbetonbau", (zur Veröffentlichung angenommen).

Sobek, W., "Entwerfen im Leichtbau" [Design in Light Construction], Themenheft Forschung [Research Journal]/University of Stuttgart, 3 (2007), 70-82.

Sobhy, M. ,“Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, Compos Struct, **99**, 76–87, (2013).

Sobhy, M., “Generalized two-variable plate theory for multi-layered graphene sheets with arbitrary boundary conditions”, Acta Mech, (In press), (2014).

Sohn, K.J., Kim, J.H., "Structural stability of functionally graded panels subjected to Aero thermal loads", Compos.Struct. 82,317-325, (2008).

Suresh, S., Mortensen, A., "Fundamentals of functionally graded materials,Ed", (IOM Comm.Ltd., London, (1998).

Talidi A., « Etude de l'élimination du Chrome et du bleu de méthylène en milieux aqueux par adsorption sur la pyrophyllite traitée et non traitée.», thèse de doctorat, Université de Rabat, Juin, (2006).

Thibault R., « Elaboration par cofrittage d'une cellule de pile à combustible SOFC à base de zircone scandiée: approches mécanique, microstructurale et électrochimique », thèse de doctorat, université de Grenoble, novembre , (2012).

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A., A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", Aerospace Science and Technology, **24**, 209 – 220., (2013).

Touratier, M., "An efficient standard plate theory", Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901 -916, 1991

Timoshenko S., "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", Philosophical Magazine, Vol. 41 (series 46) p. 744–746, (1921).

Timoshenko, S., and Woinowsky-Kreiger, S., "Theory of Plates and Shells". McGraw–Hill, (1964).

Vargas-Escobar, W., McCarthy, J.J., "Conductivity of granular media with stagnant interstitial fluids via thermal particle dynamics simulation". Int. J. of Heat and Mass Transfer, 45, pp. 4847-4857, (2002).

Watari, F., Yokoyama, A., Matsuno, H., Miyao, R., Uo, M., Kawasaki, T., Omori, M. and Hirai, T., "Fabrication of functionally graded implant and its biocompatibility," functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. Boston, Kluwer Academic, pp. 187–190, (2001).

Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., and Uo, M., et al, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application", Compos Sci Technol, vol.64 , pp. 893–908, (2004).

Whitney, J.M., Pagano. N.J., "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", Journal of Applied Mechanics, **37**, 1031–1036, (1970).

- Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T.**, "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, 74, 1310-1320, (1993).
- Woo, J., Meguid, S.A., Stranart, J.C., Liew, K.M.**, "Thermomechanical postbuckling analysis of moderately thick functionally graded plates and shallow shells", *Int. J. Mech. Sci.*, **47**(8), 1147–1171, (2005).
- Xue Z., Hutchinson JW** "Preliminary assessment of sandwich plates subject to blast loads". *Int J Mech Sci*, 45: 687 – 705, (2003).
- Yaghoobi, H., Torabi, M.** , "Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions", *J. Therm Stresses*, **36**, 869– 894, (2013a).
- Yaghoobi, H., Yaghoobi, P.** , "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach", *Meccanica*, **48**, 2019–2035, (2013).
- Yaghoobi, H., Torabi, M.** , "Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation", *Appl Math Model*, **37**, 8324–8340, (2013b).
- Yaghoobi, H., Fereidoon, A.**, "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory", *Composites: Part B*, **62**, 54–64, (2014).
- Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., Shiota, I.**, "In Proceedings of first international symposium on functionally gradient materials", Sendai, Japan, (1990).
- Yang, J., Liew, K.M., Kitipornchai, S.** , "Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates", *Compos. Sci. Technol.*, **65**(7–8), 1165–1175, (2005a).
- Yang, J., Liew, K.M., Kitipornchai, S.**, "Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading", *International Journal of Mechanical Sciences*, **47**(10), 1519-1541, (2005b).
- You, L.H., Ou, H., Zheng, Z.Y.**, "Composite Structures", Vol.78, 285–291, (2007).
- Yun, T.S., Evans, T.M.**, "Three-dimensional random network model for thermal conductivity in particulate materials". *Computers and Geotechnics*, 37, pp. 991-998, (2010).

Zenkour, A., “The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations”, *Int. J. Mech. Sci.*, **51**, 869–880, (2009).

Zenkour, A., Sobhy, M., “Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates”, *Compos Struct*, **93**, 93 – 102, (2010).

Zenkour, A., Sobhy, M., “Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory”, *Journal of Thermal Stresses*, **34**, 1119– 1138, (2011).

Zenkour, A., Sobhy, M., “Elastic foundation analysis of uniformly loaded functionally graded viscoelastic sandwich plates”, *Journal of Mechanics*, **28(3)**, 439-452, (2012).

Zenkour, A., Sobhy, M., “Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Aerospace Science and Technology*, **29(1)**, 7-17, (2013).

Zhang, D.G., Zhou, Y.H., "A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface", *Comput. Mater. Sci.* **44**, 716-720, (2008).

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O., “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34, (2014).