

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT 3^{ème} CYCLE

Spécialité : **Génie Civil**

Option : Structures

Présenté par :

ADDOU Farouk Yahia

Sujet de thèse

**Analyse statique et dynamique des structures FGM :
formulation théorique et application dans le domaine de génie
civil**

Soutenue le 10/06/2021

Devant le Jury composé de :

M^r. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Président
M^r. MERADJAH Mustapha	Professeur	UDL-SBA	Directeur de these
M^r. BENACHOUR Abdelkader	Professeur	UDL-SBA	Co-Directeur de these
M^r. BENRAHOU Kouider Halim	Professeur	UDL-SBA	Examineur
M^r. ABDELBAKI Chikh	MCA	U.TIARET	Examineur
M^r. BELABED Zakaria	MCA	CU. Naama	Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

Presque 4 ans se sont achevés dans l'accomplissement de ma thèse et il est temps pour moi de mentionner les personnes qui ont contribué à la réussite de cette thèse.

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du laboratoire des Matériaux & Hydrologie (département de génie civil et travaux publics) de la faculté de technologie de l'université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès. Il a été encadré par le Professeur Mustapha MERADJAH. Je voudrais lui exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordée et renouvelée aussi bien dans l'autonomie conférée que dans le suivi de mes travaux, ainsi que ses nombreux encouragements.

Je suis très reconnaissant et avec mes chaleureux remerciements au Professeur Abdelouahed TOUNSI pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Je ne saurais oublier le temps qu'il m'a accordé durant toutes ces années, pour ses qualités et sa rigueur scientifiques, sa patience, sa disponibilité et son humilité.

Un grand merci au Professeur Abdelkader BENACHOUR d'avoir co-encadré ce travail et pour l'intérêt qu'il a toujours accordé pour le bon déroulement de ma thèse.

Je voudrais vivement remercier le Professeur Kouider Halim BENRAHOU pour l'intérêt porté à mes travaux de recherche en ayant accepté de participer à ce jury en qualité d'examineur et ses nombreux encouragements et soutien moral.

Je remercie également Abdelbaki CHIKH et Zakaria BELABED respectivement Maîtres de conférences A de l'Université de Tiaret et du Centre Universitaire de Naama pour avoir accepté de faire partie de ce jury de thèse.

J'exprime ma profonde gratitude au Professeur Mohamed BOURADA de m'avoir accueilli dans son laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH). Il a fait preuve de beaucoup de compréhension, d'encouragements et de soutien à mon égard.

Je n'oublie pas d'adresser mes plus sincères remerciements au Docteur Fouad BOURADA du centre universitaire de Tissemsilt et membre du laboratoire LMH pour toute l'aide qu'il a pu m'apporter au cours de ces années de travail. Sa disponibilité, ses encouragements, ses conseils précieux et sa bonne humeur ont été d'un grand soutien pour l'avancement de mes recherches.

La dynamique collective de l'équipe de LMH a été très stimulante et a fortement contribué à mon désir de poursuivre dans le domaine des FGM.

Ces remerciements ne pourraient se terminer sans une pensée forte au Professeur El Abbas ADDA BEDIA pour l'ensemble de ses encouragements, ses aides morales et sa bonne humeur.

Ma plus grande et profonde gratitude s'adresse à l'ensemble de mes proches, aux personnes les plus importantes dans ma vie : mes parents, mon frère Abdessamad, mes grands-parents pour leur soutien lors de toutes les étapes de ma vie et qui ont permis d'être la personne que je suis aujourd'hui.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT 3^{ème} CYCLE

Spécialité : **Génie Civil**

Option : Structures

Présenté par :

ADDOU Farouk Yahia

Sujet de thèse

Analyse statique et dynamique des structures FGM :
formulation théorique et application dans le domaine de génie
civil

Soutenue le

Devant le Jury composé de :

M^r. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Président
M^r. MERADJAH Mustapha	Professeur	UDL-SBA	Directeur de these
M^r. BENACHOUR Abdelkader	Professeur	UDL-SBA	Co-Directeur de these
M^r. BENRAHOU Kouider Halim	Professeur	UDL-SBA	Examineur
M^r. ABDELBAKI Chikh	MCA	U.TIARET	Examineur
M^r. BELABED Zakaria	MCA	CU. Naama	Examineur

Résumé

Ce travail a pour objectif d'analyser le comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduée reposant sur des fondations de type Winkler / Pasternak / Kerr en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D. La présente théorie est simple et facile à appliquer et le champ de déplacement contient des formes d'intégrales indéterminées et n'implique que quatre inconnues. Différentes distributions de porosité à travers l'épaisseur des plaques FG ont été investies dans cette étude. Les équations du mouvement (gouvernantes) des plaques sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les équations différentielles obtenues sont résolues en utilisant la solution de Navier.

Pour vérifier la validité de la théorie développée, les résultats obtenus sont comparés à celles disponibles dans la littérature. Des études paramétriques détaillées ont été établies à travers plusieurs illustrations pour montrer l'influence des paramètres de fondation, de distributions de porosité, d'indice de puissance et de la géométrie sur la réponse des plaques FG parfaites et imparfaites.

Mots clés :

Matériau fonctionnellement gradué, analyse statique, analyse dynamique, théorie quasi-3D, fondation élastique, porosité.

Abstract

The objective of this work is to analyze the static and dynamic behavior of functionally graded plates resting on Winkler / Pasternak / Kerr foundations-type using a new hyperbolic shear deformation theory quasi-3D. This theory is simple and easy to apply, and the displacement field contains the indeterminate integrals and involves only four unknowns. Different porosity distributions through the thickness of the FG plates were investigated in this study. The equations of motion (governing) of the plates are obtained using the Hamilton principle. The obtained differential equations are solved using the Navier's solution.

To check the validity of the developed theory, the obtained results are compared with those available in the literature. A detailed parametric studies was established through several illustrations to show the influence of foundation parameters, porosity distributions, power index and the geometry on the response of perfect and imperfect FG plates.

Keywords:

Functionally graded material, Static analysis, Dynamic analysis, Quasi-3D theory, Elastic foundation, Porosity.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحليل السلوك الثابت والديناميكي للصفائح المتدرجة وظيفيًا المستندة على أسس من نوع وينكلار/باسترنالك/ كار باستخدام نظرية جديدة لتشوه القص القطعي شبه ثلاثية الأبعاد. هذه النظرية بسيطة وسهلة التطبيق، وحقل الإزاحة يحتوي على تكاملات غير محددة ويتضمن أربعة مجاهيل فقط. تم في هذه الدراسة فحص مختلف التوزيعات للمسامات من خلال سمك الصفائح المتدرجة وظيفيًا. يتم الحصول على معادلات الحركة (التي تحكم) للصفائح باستخدام مبدأ هاملتون. يتم حل المعادلات التفاضلية التي تم الحصول عليها باستخدام حل نايفي.

للتحقق من صحة النظرية المطورة، تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك المتوفرة من قبل. تم إنشاء دراسات بارامترية مفصلة من خلال العديد من الرسوم التوضيحية لإظهار تأثير عوامل الأساس وتوزيعات المسامات ومؤشر القوة والابعاد الهندسية على استجابة الصفائح المتدرجة المثالية وغير المثالية.

الكلمات المفتاحية:

مادة متدرجة وظيفيًا ، تحليل ثابت ، تحليل ديناميكي ، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد ، أساس مرن ، مسامات.

Liste des figures

Figure.I.1 : Développement matériel vers les FGMs.....	7
Figure.I.2 : Variation des propriétés des composites conventionnels et des FGMs.	8
Figure.I.3 : Matériaux fonctionnellement gradués avec différentes formes de gradient. a) FGM discrètes/discontinues avec interface. b) FGM continues sans interface. c), f) Gradient de composition. d), g) Gradient d'orientation. e), h) Gradient de fraction.	10
Figure II.4 : Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité.....	12
Figure.I.5 : Techniques de traitement couramment utilisées pour la production des FGMs (partie I).....	14
Figure.I.6 : Techniques de traitement couramment utilisées pour la production des FGMs (partie II).	19
Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.	24
Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	26
Figure II.3 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CPT) et (FSDT).	27
Figure II.4 : Géométrie d'une plaque en FGM.	31
Figure II.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P- FGM	32
Figure II.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S- FGM	34
Figure II.7 : Variation de module de Young dans une plaque E- FGM.	35
Figure.III.1 : Représentation des plaques FG reposant sur des fondations élastiques.....	36
Figure.III.2 : Illustration de différents modèles de variations de la porosité.....	38
Figure.IV.1 : Variation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites en fonction du rapport géométrique " a/h " et de la constante de ressort " \bar{K}_w " avec ($\bar{G}_p = 10, p = 1$ et $\xi = 0.05$)	60
Figure.IV.2 : Effet des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " et du rapport géométrique " a/h " sur la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites avec ($\bar{K}_w = 100$ et $p = 1$)	60

Figure.IV.3 : Variation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " de la plaque parfaite et imparfaite en fonction de l'indice de puissance " p " et de la constante de ressort " \bar{K}_w " avec $\bar{G}_p = 10$, $a/h = 10$ et $\xi = 0.1$	61
Figure.IV.4 : Effet de l'indice de puissance " p " et des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " sur la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites avec $\bar{K}_w = 100$, $a/h = 10$ et $\xi = 0.1$	62
Figure.IV.5 : Effet de la fondation élastique et de l'indice de porosité " ξ " sur le paramètre de fréquence " $\bar{\omega}$ " avec ($a/h = 10$ et $p = 1$)	62
Figure.IV.6 : la variation de la flèche adimensionnelle " \bar{w} " d'une plaque FG en fonction du rapport de géométrie " a/h " et différent variation de porosité " φ "	67
Figure.IV.7 : L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur les contraintes normales ($\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_z$) et les contraintes de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{yz}$) avec $\varphi = 0$	68
Figure.IV.8 : L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur les contraintes normales ($\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_z$) et les contraintes de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{yz}$) avec $\varphi = 1$	69
Figure.IV.9 : L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur les contraintes normales ($\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_z$) et les contraintes de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{yz}$) avec $\varphi = 3$	70

Liste des tableaux

Tableau II.1 : Description des différentes théories de plaques.....	30
Tableau IV.1 : Fréquence fondamentale non dimensionnelle " $\hat{\omega}$ " de la plaque isotrope carrée ($a=10$, $\nu=0.3$, $h/a=0.1$, $E=30 \times 10^6$).....	51
Tableau.IV.2 : Fréquence fondamentale non dimensionnelle " ω " des plaques FG	52
Tableau.IV.3 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles " $\bar{\omega}$ " des plaques FG carrées reposant sur les fondations de Winkler-Pasternak ($p=2.3$, $E_c/E_m=10$, $h/a=0.1$).....	53
Tableau.IV.4 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " des plaques isotropes et FG carrées reposant sur les fondations de Winkler-Pasternak.....	53
Tableau.IV.5 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " des plaques isotropes et FG carrées reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_t=100$).....	55
Tableau.IV.6 : Variations des paramètres de fréquence " $\bar{\omega}$ " des plaques carrées FG parfaites et imparfaites par rapport à la rigidité des fondations Winkler-Pasternak ($p=1$).	56
Tableau.IV.7 : La variation des paramètres de fréquence " $\bar{\omega}$ " des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité des fondations de Kerr ($p=1$, $\bar{K}_t=100$).....	58
Tableau.IV.7 : (continuité).....	59
Tableau.IV.8 : Effet de l'indice matériel " p " et du rapport géométrique " a/h " sur la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " et la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ " de la plaque FG carrée simplement appuyée.....	63
Tableau.IV.9 : Comparaison des déplacements et des contraintes non dimensionnels d'une plaque FG carrée simplement appuyée	65
Tableau.IV.10 : L'effet du paramètre de porosité " ξ " et de l'indice matériel " p " sur la flèche non dimensionnel " \bar{w} " de la plaque FG carrée simplement appuyée.	66

Table des matières

Résumé

Abstract

ملخص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations et symboles

Introduction générale.....1

Chapitre I : Etat de l'art

I. Introduction :	6
I.1. Matériaux fonctionnellement gradués ou à gradient de propriétés :	6
I.2. Définition d'un matériau FG :	7
I.3. Classifications :	9
I.3.1. FGM avec gradient de microstructure :	10
I.3.2. FGM sans gradient de microstructure :	10
I.4. Propriétés des FGM et leurs utilisations :	11
I.5.1. Dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition PVD) :	15
I.5.2. Dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition CVD) :	15
I.5.3. Compaction sèche des Poudres (Powder metallurgy) :	16
I.5.4. Méthode de coulée centrifuge (Centrifugal method) :	16
I.5.5. Coulage en bande (Tape casting method) :	16
I.5.6. Le coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :	17
I.5.7. Les techniques de fabrication de forme libre solide (Solid freeform fabrication method SFF) :	17
I.5.7. La fabrication additive (Additive Manufacturing AM) :	17
I.5.8. Le procédé de dépôt d'énergie dirigé (DED) (Directed Energy Deposition) :	18
I.5.9. Projection par plasma :	18
I.5.10. Frittage et infiltration :	20
I.6. Les matériaux à gradient de porosité (Porosity and pore size gradient materials) :	20
I.7. Les matériaux à gradient microstructural (Micro structural gradient materials) :	20
I.8. Les matériaux à gradient chimique (Chemical gradient materials) :	20
I.9. Modélisation et simulation :	21
I.10. Conclusion :	23

Chapitre II : Théories et propriétés des plaques FGM

II. Introduction :	24
II.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT Classical Plate Theory) :	24
II.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT First Order Shear Deformation Theory) :	25
II.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT Higher Shear Deformation Theory) :	27
II.4. Théorie raffinée des plaques (RPT Refined Plate Theory):	28
II.5. Théorie de déformation des plaques Quasi-3D :	29
II.6. Les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :	30
II.7. Les propriétés matérielles des plaques FGM :	31
II.7.1. Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM (loi de puissance) :	32
II.7.2. Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM (loi sigmoïde):	33
II.7.3. Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM (loi exponentielle) :	34
II.8. Conclusion :	36

Chapitre III : Etudes de l'influence de la porosité sur le comportement statique et dynamique des plaques FGM

III. Introduction :	36
III.1. Géométrie et concept de la plaque fonctionnellement gradué (P-FGM) :	36
III.2. Plaques poreuses fonctionnellement gradués :	37
III.2.1. Plaque FG avec porosités type I (uniformes) :	37
III.2.2. Plaque FG avec des porosités type II (non uniformes) :	37
III.2.3. Plaque FG avec porosités type III (logarithmiques- non uniformes) :	38
III.2.4. Plaque FG avec porosités type IV (masse volumique) :	39
III.2.5. Plaque FG avec porosités type V :	39
III.3. Cinématique :	39
III.4. Équations de mouvement :	42
III.5. la Solution de Navier :	47
III.6. Conclusion :	49

Chapitre IV : Résultats numériques et discussions

IV. Introduction :	50
IV.1. Présentation et analyse des résultats :	50
IV.1.1. Analyse dynamique :	50
a. Plaque isotrope	50
b. Plaque fonctionnellement graduée (FGM) céramique - métal	51
b.1. Plaque FG parfaite et simplement appuyée	51
b.2. Les plaques FG parfaites reposant sur une fondation élastique (Winkler-Pasternak-Kerr)	52
b.3. Les plaques FG parfaites et imparfaites reposant sur la fondation élastique Winkler-Pasternak-Kerr	56
IV.1.2. Analyse statique :	63
IV.4. Conclusion :	71
Conclusion et perspectives	72

Références bibliographiques

Liste des notations et symboles

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les déplacements sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
w_b	Déplacement transversal dû à la flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
θ	Rotation
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ,
A', B'	Des coefficients adopté selon le type de solution
k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young
E_C	Module de Young de la céramique
E_M	Module de Young de la céramique
ν	Coefficient de Poisson

$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\rho(z)$	La densité en fonction de « z »
$\nu(z)$	Le coefficient de poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$V_C(z)$	Fraction volumique de la céramique
$V_M(z)$	Fraction volumique du métal
k, p	Indice matériel
m_0, m_1	La densité de masse réelle et apparente
ξ	L'indice de porosité
φ	Paramètre de type de distribution de porosité
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les composants des contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Les composants des contraintes tangentielles
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations dans la direction x, y, z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Distorsions dans la direction x, y, z
δ	La variation
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{xy}$	Champ de déformation transversal virtuel
δU	La variation de l'énergie de déformation

δV	La variation du travail extérieur
δK	La variation de l'énergie cinétique
δU_F	La variation de l'énergie de déformation de la fondation
q	Charge transversale
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
k_w	Paramètre de Winkler
k_p	Paramètre de Pasternak
k_l, k_u, k_s	Paramètres de kerr
K_w, K_p, K_l, K_u, K_s	Paramètre de la fondation sous forme adimensionnelle
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	Paramètres arbitraires
ω	Fréquence naturelle
$\hat{\partial}$	Dérivée partielle
$i \text{ et } j$	Des nombres naturels
C_{ij}	Les coefficients de rigidité

A_{ij} Termes de rigidité de la matrice de membrane

B_{ij} Termes de rigidité de la matrice de couplage

D_{ij} Termes de la matrice de flexion

A_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

B_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

D_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

H_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

$I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st}$ Composantes de moment d'inertie

$\{ \}$ Vecteur colonne

$[]$ Matrice

$[K]$ Matrice de rigidité

$[M]$ Matrice de masse

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux fonctionnels gradués (FGM) ont été présentés au milieu des années 1980 pour être utilisés comme matériaux de barrière thermique contre les températures élevées. Ce sont des matériaux avancés composés de différents matériaux constitutifs, tels que des métaux, des céramiques ou des polymères, possédant des propriétés qui varient dans une direction spatiale donnée. Il est ainsi possible de personnaliser les morphologies et les caractéristiques structurées dans cette direction spatiale spécifique, ce qui améliore le comportement mécanique de ces matériaux en termes de rigidité, de ténacité, de dureté, de conductivité thermique et de résistance à la corrosion (Sofiyev et Avcar, 2010; Ebrahimi, Mahmoodi et Barati, 2017; Avcar et Mohammed, 2018; Hellal *et al.*, 2019; Karami, Janghorban et Tounsi, 2019b, 2019a).

Dans la dernière décennie, la tendance à utiliser des plaques FG dans les structures modernes s'est considérablement développée. Les FG sont utilisées dans de nombreux domaines tels que la conversion d'énergie, l'ingénierie de l'énergie nucléaire, l'industrie aérospatiale, les matières premières, le génie civil, la médecine et la bio-ingénierie... En conséquence, les progrès de l'analyse numérique des structures FG ont attiré beaucoup d'attention. L'un des moyens les plus rentables de progresser dans l'investigation numérique est le développement de modèles structurels précis grâce à des théories raffinées de la déformation par cisaillement. Ces dernières années, des études approfondies sur les plaques FG ont été réalisées en utilisant la théorie conventionnelle des plaques (CPT classical plate theory) et la théorie des plaques à déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT First-order shear deformation theory). Malgré sa simplicité, la CPT ignore les déformations de cisaillement et l'inertie de rotation, ce qui donne des résultats moins précis pour les structures épaisses et modérément épaisses. La FSDT prend en compte les influences de cisaillement transversal via un facteur de correction du cisaillement et est donc adaptée à l'étude des structures minces et modérément épaisses (Avcar, 2016; Youcef *et al.*, 2018; Draoui *et al.*, 2019). Cependant, la valeur appropriée du coefficient de correction du cisaillement dépend de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur de la plaque, de la géométrie, de la charge et des conditions aux limites. Les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT Higher-order shear deformation theory) ne nécessitent pas de coefficient de correction de cisaillement et offrent une précision fiable par rapport aux CPT et FSDT. Néanmoins, ces théories conduisent à un grand nombre d'équations d'équilibre, augmentant considérablement la complexité du problème. Par conséquent, les théories simples comportant moins d'inconnues sont très intéressantes. Dans le but de diminuer le nombre de variables utilisées dans les équations de mouvement et de satisfaire les influences de la déformation de cisaillement sur les faces inférieure et supérieure des structures sans utiliser de facteur de correction de cisaillement, Shimpi et Patel (2006) ont proposé une théorie raffinée avec seulement deux variables inconnues pour l'étude des plaques isotropes, connue sous le nom de la théorie des plaques raffinées (RPT Refined plate theory). Ensuite, différentes études de validité ont été réalisées sur la base de la RPT. Il s'agit notamment de l'étude des plaques isotropes (Shimpi et Patel, 2006b; Shahsavari et Janghorban, 2017), orthotropes (Shimpi et Patel, 2006a), FGM (Karami *et al.*, 2018) et composites stratifiées (Thai et Kim, 2012). Cependant, jusqu'à présent, divers modèles de RPT sous l'effet de différentes fonctions de forme en divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement ont été proposés pour l'étude de la

dynamique (Karama *et al.*, 1998; Attia *et al.*, 2015; Bellifa *et al.*, 2016; Bourada *et al.*, 2019; Chaabane *et al.*, 2019; Zaoui, Ouinas et Tounsi, 2019), la flexion (Abdelaziz, Hadj Henni, Mohamed Ait Amar Meziane, Abdelmoumen Anis Bousahla, Abdelouahed Tounsi, S.R. Mahmoud *et al.*, 2017; Kar, Mahapatra et Panda, 2017; Attia *et al.*, 2018; Meksi *et al.*, 2019; Boussoula *et al.*, 2020), la propagation des ondes (Benadouda *et al.*, 2017; Fourn *et al.*, 2018; Selmi et Bisharat, 2018; Karami, Janghorban et Tounsi, 2019a) et le flambage (Karama *et al.*, 1998; Bellifa, Bakora, *et al.*, 2017; Bellifa, Benrahou, *et al.*, 2017; Sekkal *et al.*, 2017a, 2017b; Tounsi *et al.*, 2019) des réponses de la structure des micro et nano-plaques.

Yahia *et al.*, (2015) ont examiné le comportement des ondes des plaques FG en utilisant la RPT avec 4 variables en termes de fonctions de forme de déformation cubique, sinusoïdale, hyperbolique et de cisaillement exponentiel. Une théorie raffinée de la déformation trigonométrique par cisaillement (RTSDT Refined trigonometric shear deformation theory) a été utilisée pour la réponse à la flexion thermoélastique des plaques sandwich en FGM par Tounsi *et al.*, (2013). Récemment, le modèle RPT à 4 inconnues utilisant des fonctions polynomiales, exponentielles et hyperboliques a été appliqué à la recherche sur le comportement de flambage par cisaillement des nanoplaques dans un environnement hygro-thermique basé sur la théorie non locale de Shahsavari, Karami et Mansouri, (2018). Souvent, les théories conventionnelles du continuum (CPT, FSDT et HSDT) négligent l'effet d'étirement de l'épaisseur (c'est-à-dire, $\varepsilon_z = 0$) en raison de l'hypothèse de déplacements transversaux constants dans l'épaisseur. Récemment, l'effet de l'étirement de l'épaisseur (ε_z) dans les plaques FG en utilisant des approximations par éléments finis a été étudié par Carrera *et al.*, (2011) pour obtenir des résultats précis. L'influence de l'étirement de l'épaisseur devient très précieuse pour l'analyse des plaques épaisses et doit donc être prise en compte. En ce qui concerne la prise en compte conjointe des effets de la déformation par cisaillement et de l'étirement de l'épaisseur, les nombreuses théories quasi 3D, basées sur des distributions d'ordre supérieur dans l'épaisseur pour les déformations, ont été proposées (Thai et Kim, 2015).

- Thai et Kim, (2013) ont proposé un modèle simple de cisaillement-déformation sinusoïdale quasi-3D pour étudier le comportement en flexion des plaques FG en utilisant cinq variables inconnues.
- Hebali *et al.*, (2014) ont développé un nouveau modèle quasi-3D pour l'analyse de la flexion et de la dynamique des plaques FG.
- Une théorie quasi-3D efficace a été proposée pour les plaques FG, en divisant la déflexion en composantes de flexion, de cisaillement et d'étirement par Belabed *et al.*, (2014).
- Bousahla *et al.*, (2014) ont présenté une nouvelle théorie quasi-3D basée sur la position de la surface neutre pour l'étude statique des plaques composites avancées.
- Bourada *et al.*, (2015) ont développé un modèle simple de cisaillement et de déformation normale d'ordre supérieur pour les poutres FGM.
- Draiche, Tounsi et Mahmoud, (2016) ont proposé un modèle de cisaillement et de déformation quasi 3D pour les "plaques composites laminées".
- Thai *et al.*, (2014) ont développé une théorie quasi-3D pour les plaques FG en considérant une fonction de forme hyperbolique ainsi que cinq variables.

- Un sandwich avec noyau FGM et feuille de surface FGM ainsi qu'un sandwich avec noyau FGM et feuille de surface homogène ont été examinés par un nouveau modèle de plaque quasi-3D par Bennoun, Houari et Tounsi, (2016).

Au cours du processus de fabrication des FGM, des micro-vides (connues sous le nom de porosité) sont générés lors du frittage en raison de la différence de température de solidification des constituants du matériau (Zhu *et al.*, 2001; Li *et al.*, 2003). Les sources de formation de micro-vides comprennent les bulles d'air qui pénètrent dans la matrice pendant les processus de fusion ou de mélange et la formation de vapeur d'eau à la surface des particules lors du processus de solidification (Aqida, Ghazali et Hashim, 2004). En raison de l'importance de ce sujet, plusieurs travaux ont été menés pour explorer les effets de la porosité. Par exemple :

- Yahia *et al.*, (2015) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques FG avec des porosités en utilisant différents HSDT.
- Un HSDT a été utilisé pour l'étude de la dynamique des faisceaux constitués de matériaux poreux gradués par Atmane *et al.*, (2015).
- Gupta et Talha, (2015) ont examiné l'influence de la porosité sur le comportement en vibration libre des plaques FG en présence d'une influence thermique en utilisant une HSDT non-polynomiale quasi 3D.
- Benferhat *et al.*, (2016a) ont analysé la réponse en flexion des plaques FG en présence de porosités.
- De plus, Benferhat *et al.*, (2016b) ont étudié l'effet de la porosité sur la réponse en flexion et en vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations Winkler-Pasternak.
- Benadouda *et al.*, (2017) ont étudié l'effet des porosités sur la propagation des ondes dans les faisceaux FG en utilisant une théorie de déformation par cisaillement efficace.
- Behravan Rad, Farzan-Rad et Mohammadi Majd, (2017) ont analysé la réponse statique d'une plaque circulaire hétérogène non uniforme avec un matériau poreux reposant sur une fondation hybride à gradient impliquant une force de friction.
- Akbaş, (2017) a présenté une analyse vibratoire et statique de plaques poreuses à gradient fonctionnel.
- Eltahir *et al.*, (2018) ont présenté un modèle de porosité modifié dans l'analyse des nanopoutres poreuses FG.
- Shahsavari *et al.*, (2018) ont étudié l'effet des porosités sur la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique.
- Faleh et al. (2018) ont examiné les propriétés de vibration des nano-coques poreuses de FG.
- Akbaş, (2018) a étudié le comportement de vibration forcée des poutres profondes poreuses en FG.
- Karami *et al.*, (2018) ont étudié le flambage thermique de nanopoutres poreuses intelligentes de FG reposant sur une fondation Kerr.
- Avcar, (2019) a examiné la réponse dynamique de poutres sigmoïdes imparfaites et de poutres à gradation fonctionnelle selon la loi de puissance.

- Arshid, Khorshidvand et Khorsandijou, (2019) ont étudié l'effet de la porosité sur la vibration libre des plaques circulaires SPFG reposant sur une fondation élastique visco-Pasternak.
- Batou *et al.*, (2019) ont étudié les propriétés de dispersion des ondes dans des plaques sigmoïdes imparfaites en utilisant différentes HSDT.

Récemment, l'étude des structures intégrées dans les fondations a pris de l'ampleur et a retenu l'attention de beaucoup de chercheurs. Pour définir l'interaction entre la plaque et la fondation, différentes hypothèses de modèles de fondation ont été proposées (Wang, Tham et Cheung, 2005). L'hypothèse la plus ancienne des modèles de milieu élastique, qui ne comporte qu'un seul coefficient de réaction du substrat, est connue sous le nom de fondation élastique de Winkler (Winkler, 1868). Malgré la facilité de mise en œuvre, ce modèle ne peut pas assurer la continuité de la fondation en raison de la séparation des ressorts (Kolahchi, Safari et Esmailpour, 2016). Cette hypothèse a été améliorée par le modèle de Pasternak (Pasternak, 1954) en ajoutant une couche de cisaillement au-dessus des ressorts. Le modèle de Pasternak comprenant un substrat à deux paramètres (ressort et couche de cisaillement) est largement utilisé pour expliquer les interactions mécaniques des plaques flexibles avec différentes distributions de propriétés des matériaux (Baferani, Saidi et Ehteshami, 2011; Boudarba, Houari et Tounsi, 2013; Sobhy, 2013; Bounouara *et al.*, 2016). Dans la Fondation Kerr (Kneifati, 1985), il n'y a pas de réactions non concentrées en raison d'une couche de ressort supérieure. Cela signifie que, dans le modèle de Kerr, une couche de cisaillement est entourée de couches de ressort supérieures et inférieures.

L'intérêt de ce travail est d'appliquer une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D en considérant les effets d'étirement axial, de flexion, de cisaillement et d'épaisseur. Plusieurs modèles différents de variations de la porosité sont pris en compte pour décrire l'influence de la porosité sur les caractéristiques des matériaux FG.

Pour arriver à notre objectif de notre étude, nous avons considéré différentes configurations de plaques reposant sur les modèles de Winkler, Pasternak et Kerr.

Plan de la thèse

Ce travail fait l'objet de quatre chapitres, d'une introduction générale et d'une conclusion

Le chapitre 1 présentera un état de l'art lié aux FGM du point de vue historique, de leur conception, leurs propriétés, les principales techniques de leur élaboration, certaines de leurs caractéristiques et les domaines de leurs utilisations. Cette revue permet au lecteur de se familiariser avec les matériaux FGM.

Dans le chapitre 2 nous passerons en revue, première partie, les différentes théories et les propriétés matérielles des plaques FGM. On mettra en exergue celles utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques FGM : la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée des plaques et enfin la théorie quasi-3D. La deuxième partie sera consacrée aux différents modèles de répartition des propriétés des FGM.

Le chapitre 3 sera consacré à l'étude de l'effet des fondations de type Winkler/Pasternak/Kerr et de la porosité sur le comportement dynamique et statique des plaques FG en utilisant une théorie hyperbolique quasi-3D simple avec différentes variations de la porosité.

Dans le chapitre 4, nous compléterons cette partie par une étude paramétrique détaillée portant sur l'évaluation des influences de l'indice de puissance, du paramètre de porosité, de la rigidité des paramètres de fondation, du nombre de modes et de la géométrie sur les comportements étudiés.

Enfin, nous conclurons en mettant en relief les résultats portant sur la pertinence de notre modeste travail qui a mis en œuvre l'étude sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM.

CHAPITRE I

ÉTAT DE L'ART

I. Introduction :

Le matériau composite est un assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscibles (de natures différentes) mais possédant une très forte capacité d'adhésion. Le composite ainsi obtenu possède des propriétés améliorées du point de vue qualité que les éléments seuls (séparément) ne pouvaient pas posséder.

Les deux matériaux constituant le composite sont appelés le renfort et la matrice.

- Le renfort est l'ossature sur laquelle vont s'exercer les contraintes mécaniques améliorant ainsi la solidité composite.
- La matrice joue le rôle d'une enveloppe autour du renfort. Elle doit :
 - ✓ Transmettre et répartir les efforts mécaniques au renfort, le plus uniformément possible.
 - ✓ Assurer la cohésion du matériau.
 - ✓ Donner sa forme au matériau composite.
 - ✓ Protéger le renfort contre les agressions du milieu extérieur : corrosion, usure, intempéries etc.

Le bois et les os sont des matériaux composites naturels. Les matériaux composites de synthèse, ont été développés et ont connu un formidable essor depuis le XX^{ème} siècle. Leur légèreté et leur résistance mécanique sont leurs principales qualités. Ce qui a amené à une utilisation croissante des matériaux composites dans plusieurs secteurs industriels. L'exemple le plus courant est le béton armé (ciment + acier) omniprésent en génie civil. Il est composé de ciment de sable et de graviers dans des proportions variées. Le ciment assure la cohésion, le sable sert à combler les vides entre les graviers. Il en résulte que le renfort n'est autre que le mélange sable/gravier et la matrice le ciment.

I.1. Matériaux fonctionnellement gradués ou à gradient de propriétés :

Dans le but de réduire les contraintes thermiques dans les matériaux composites conventionnels développés pour les moteurs de fusée réutilisables (applications aéronautiques et spatiales à très haute température), il a été conçu et proposé un nouveau type de matériaux. Le composite recherché devait résister à une température de surface d'environ 2000K et le gradient de température requis était de 1000K. Ainsi, au moment des essais, les matériaux composites stratifiés traditionnels présentaient une mauvaise adhérence et une interface tranchante entre les matériaux. Il fallait trouver un type de matériaux qui possèderaient d'excellentes propriétés réduisant la concentration de la contrainte thermique. Les chercheurs ont remplacé l'interface pointue par une interface à changement progressif qui a éliminé les sites à forte concentration de contraintes. L'idée des matériaux à gradient de propriétés ou graduellement fonctionnels (Fonctionnally Graded Material FGM) était née. Nous sommes en 1984 au Japon (Koizumi et Niino, 1995; Atai, Nikranjbar et Kasiri, 2012; Shanmugavel *et al.*, 2012).

L'objectif était de fabriquer le corps à partir d'un matériau ayant une résistance thermique et des propriétés mécaniques améliorées en changeant progressivement les compositions pour qu'elles résistent à une différence de température importante de 1000 °C. La figure.I.1 illustre la progression historique du passage du métal pur à des métaux fonctionnellement calibrés.

Ils ont d'abord été développés initialement pour l'application dans les barrières thermiques. Toutefois, en 1972, l'idée générale d'un matériau FGM a été proposée pour les matériaux composites et polymères afin d'imiter la structure et le comportement des matériaux naturels comme les os, les dents et les bambous etc... (Bohidar, Sharma et Mishra, 2014; Sato, Inoue et Shima, 2017; Bakar *et al.*, 2018)

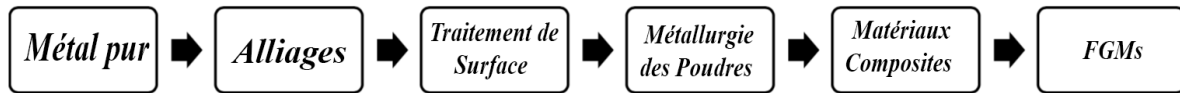


Figure.I.1 : Développement matériel vers les FGMs.

I.2. Définition d'un matériau FG :

Un matériau fonctionnellement gradué (FGM) est un composite dont les propriétés physiques évoluent suivant une direction de l'espace progressive de la composition chimique ou de la microstructure (taille et morphologie de grains, fraction volumique et morphologie de phases), d'architecture et/ou de l'état de contraintes résiduelles. Il possède une structure microscopique non homogène. En d'autres termes, un système à gradient de propriétés est un matériau composite hétérogène est un composite non homogène qui présente des propriétés mécaniques, physiques et /ou chimiques différentes suivant une ou plusieurs direction de ce système. Il peut provenir des procédés de fabrication ou bien hérité de mécanismes de vieillissement (exemples : un alliage métallique oxydé, une pièce traitée en surface, un matériau revêtu) (Texier, 2013). On peut améliorer davantage les caractéristiques et les morphologies structurées dans une direction spatiale spécifique afin d'augmenter le comportement mécanique par rapport à sa conductivité thermique, à sa résistance à la corrosion, à sa rigidité, sa dureté, sa tenacité... (Sofiyev et Avcar, 2010; Bessaim *et al.*, 2013; Naebe et Shirvanimoghaddam, 2016; Zidi *et al.*, 2017; Ebrahimi, Mahmoodi et Barati, 2017; El-Haina *et al.*, 2017; Avcar et Mohammed, 2018; Hellal *et al.*, 2019; Karami *et al.*, 2019; Karami, Janghorban et Tounsi, 2019; Zarga *et al.*, 2019).

Les propriétés qui sont souvent mesurées sont les grandeurs électriques, thermiques (coefficient d'expansion thermique, pouvoir isolant, etc.), magnétiques et mécaniques.

L'élaboration des FGM est réalisée le plus souvent à partir de deux ou plusieurs matériaux, généralement une céramique et un métal ou par changement de la microstructure d'un seul matériau.

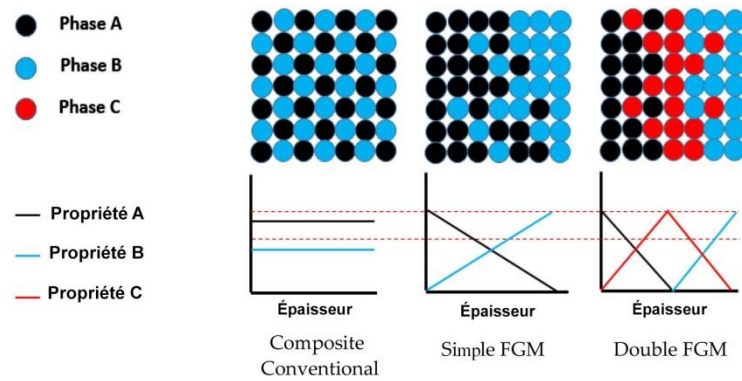


Figure.I.2 : Variation des propriétés des composites conventionnels et des FGMs.

Les premières recherches sur le développement des FGM ont été signalées en 1995 par Koizumi et Niino qui ont lancé les premières recherches sur le développement des FGM. Dans les décennies suivantes, les FGM ont ensuite trouvé des applications dans les industries aérospatiale, médicale, électrique, génie civile, l'automobile, la production d'énergie, l'optoélectronique, la microélectronique, la structure et la bio-ingénierie, la défense et le sport, un environnement d'application extrêmement résistant à l'usure ... dues à leurs propriétés mécaniques, électriques, chimiques et magnétiques (FGM structurés par gradient de porosité et de taille des pores, structurés par gradient chimique et les FGM structurées par gradient micro structurel). Aujourd'hui, les FGM sont utilisées dans les industries de traitement des minéraux où une grande résistance à l'usure est requise et dans les applications de défense (Miteva, 2014; Loh *et al.*, 2018; Nikbakht, Kamarian et Shakeri, 2019).

En d'autres termes, il fallait répondre aux exigences des propriétés que les matériaux d'ingénierie conventionnels ne pouvaient pas offrir (Edwin, Anand et Prasanna, 2017; Gupta, 2017). Toutes ces applications doivent avoir des propriétés exclusives pour avoir une résistance aux contraintes thermo-mécaniques ainsi qu'une stabilité chimique. L'obligation de répartir les propriétés se retrouve dans une multitude de produits courants ayant des fonctions multiples, comme par exemple les engrenages, qui doivent être suffisamment résistants à l'intérieur pour supporter la fracture mais qui doivent également être durs à l'extérieur pour prévenir l'usure par écart (Gupta et Talha, 2015), la rupture de dégradation de la chaussée due à la fatigue, la réparation des fissures dans les routes en asphalte (Bostancioğlu, 2019), les maladies de la chaussée sous l'effet de la charge de l'environnement et des véhicules...

Les FGM possèdent par conséquent beaucoup plus d'avantages que les alliages et les composites classiques. Ils présentent les propriétés pour contrôler la réponse des matériaux à tout ce qui se rapporte aux déformations, à la corrosion, à l'usure ainsi qu'à la charge dynamique (Maimunnisa *et al.*, 2018). L'interface existante entre les différents composants de la structure peut être substituée par une interface à gradient. La biocompatibilité de certaines FGM augmente leur aptitude à remplacer les os. Ils sont utilisés comme une barrière thermique pour revêtement à haute résistance aux rayures et à contrainte résiduelle réduite, (Saleh *et al.*, 2019) aux matériaux incompatibles (Udupa, Rao et Gangadharan, 2014; Petit, Montanaro et Palmero, 2018) etc... Un des grands avantages des FGM est que les propriétés des matériaux changent progressivement et de manière continue, de sorte que les problèmes

rencontrés dans les matériaux composites à cause du changement brusque des propriétés sont supprimés (Banerjee et Ananthapuvirajah, 2018).

I.3. Classifications :

Les FGM ont été classées initialement dans la catégorie des matériaux composites classiques en fonction des combinaisons des composants utilisées (Almasi *et al.*, 2016).

Il existe plusieurs classifications pour les FGM liées à leurs caractéristiques physiques, structurelles et de fabrication, leurs contraintes résiduelles, leur impact environnemental évalué tout au long du cycle de vie, leur consommation d'énergie spécifique, leurs coûts de fabrication, etc.

Le développement de nombreuses applications et de nouvelles technologies pour produire des FGM à différentes échelles ont permis l'apparition de nombreuses classifications. Celles-ci reflètent fondamentalement les besoins dans la conception des FGM et leurs fabrications industrielles.

Il a été retenu pour le moment six critères de classification. Ils dépendent (Parihar, Setti et Sahu, 2018; Saleh *et al.*, 2020):

- De la structure des FGM
- Du type de FGM
- Des dimensions principales
- De la nature du gradient
- Du domaine d'application
- De l'état pendant le traitement

Ils peuvent appartenir à deux groupes fondamentales : ceux en continu et ceux en discontinu comme le montre la figure.I.3 (Makwana, Panchal et Gandhi, 2014). Le premier est caractérisé par l'absence de zone claire ou ligne de coupe de séparation ne pouvant pas être observée à l'intérieur du FGM pour distinguer les propriétés de chaque zone. Le second groupe possède la particularité d'avoir les ingrédients du matériau qui varient en fonction de la gradation discontinue par étapes (FGM en couches ou FGM discrète). Les matières contiguës et discrètes sont réparties en trois types (Zhang *et al.*, 2019):

- Gradient de composition (Fig.I. 3c, f)
- Gradient d'orientation (Fig.I. 3d, g)
- Gradient de fraction (Fig.I. 3e, h)

D'autres classifications tiennent compte :

- (I) De la nature des microstructures (homogènes ou hétérogènes)
- (II) De l'état stationnaire (microstructure n'évoluant pas dans le temps) ou non stationnaire (dépendant du temps).(Texier, 2013)

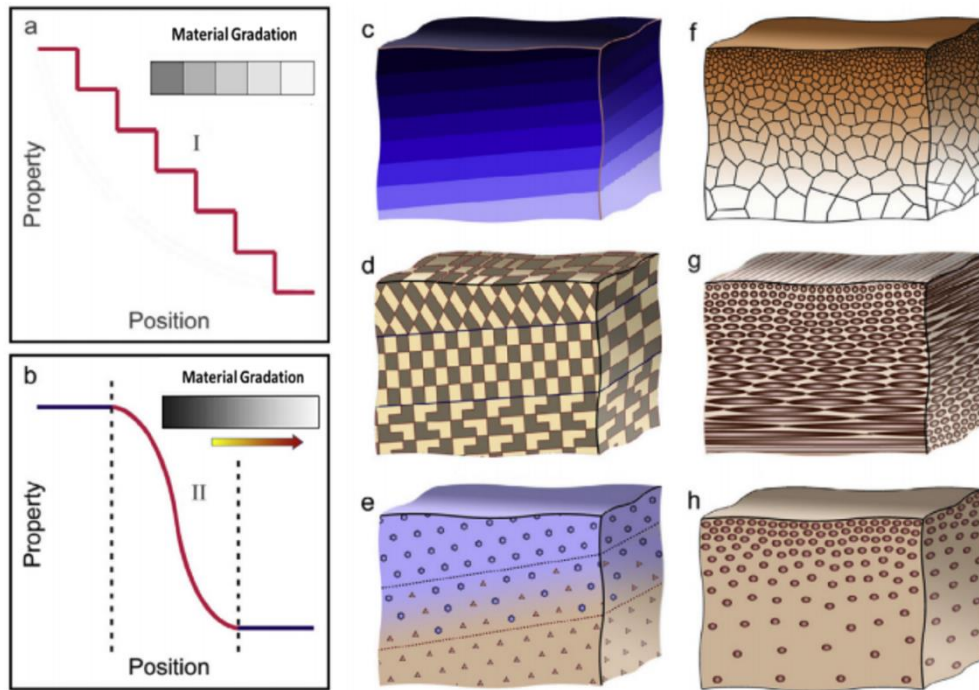


Figure.I.3 : Matériaux fonctionnellement gradués avec différentes formes de gradient [45].
 a) FGM discrètes/discontinues avec interface. b) FGM continues sans interface. c), f) Gradient de composition. d), g) Gradient d'orientation. e), h) Gradient de fraction.

I.3.1. FGM avec gradient de microstructure :

La corrélation entre microstructure et propriétés mécaniques est une base dans l'étude du comportement des matériaux. Dans cette famille, on trouve

- les systèmes revêtus (par dépôts ou par diffusion)
- les systèmes à gradients granulométriques ou de phases.

I.3.2. FGM sans gradient de microstructure :

Les matériaux écrouis par élaboration ou traitement de surface (poutre déformée en flexion dans le domaine plastique, les traitements de surfaces, tels que le sablage, le surfaçage ou la rectification d'une pièce) induisent un état de compression en surface dont le champ de contrainte est complexe. Les alliages à gradients de composition chimique peuvent provoquer une variation de propriétés même si elle n'entraîne pas de transformation de phase,.) (Texier, 2013)

- Système stationnaire

Le système n'est pas garanti dans le temps (exemple du revêtement céramique ou téflon servant de lubrifiant solide sur les poêles de cuisson).

- Système non stationnaire

Les propriétés et le gradient de propriétés vont évoluer dans le temps dégradations surfaciques telles que les oxydations/corrosion, l'usure, l'inter-diffusion d'un revêtement avec le matériau.

I.4. Propriétés des FGM et leurs utilisations :

Les FGM possèdent de nombreuses applications comme nous l'avons mentionné précédemment dont la plus caractéristique est d'empêcher l'inhibition des fissures. Cette propriété est utilisée dans l'industrie de la défense dans les vestes pare-balles, les plaques d'armure, etc. (Mahamood et Akinlabi, 2017b).

Les matériaux fonctionnels gradués (FGM) sont un matériau révolutionnaire hétérogène qui appartient à la classe des matériaux d'ingénierie avancée (Gayen, Tiwari et Chakraborty, 2019).

L'utilisation actuelle des FGM peut être résumée dans les activités suivantes :

- **Industrie automobile** (les ressorts à lames, les bougies d'allumage, les chambres de combustion, les volants d'inertie, revêtements de carrosserie des véhicules, chambres de combustion, pistons de moteurs diesel, freins de voitures de course).
- **Applications dans les composants** sont manufacturées à partir de matériaux de fibres optiques, de photo détecteurs, de semi-conducteurs, etc.
- **L'industrie maritime**, les FGM sont utilisés dans les arbres d'hélices, les cylindres de plongée.
- **L'industrie chimique** (échangeur de chaleur, tube de chaleur, réacteurs de réaction)
- **L'industrie aérospatiale** (tuyère de fusée, panneaux d'échange thermique, panneaux solaires, roues de turbine, composants de moteur-fusée).
- **L'énergie nucléaire** (composants des réacteurs nucléaires pastilles de combustible)
- **Médecine et bio-ingénierie** (implants médicaux, remplacement de dents et d'os, peau artificielle, système de délivrance de médicaments).

Génie civil. Les matériaux traditionnels dans le génie civil ont montré depuis longtemps leurs limites d'utilisation sans risques à long terme. L'oxydation des aciers (armatures métalliques, tôles d'acier) reste une préoccupation majeure pour l'ingénieur de conception, la durabilité du béton projeté est toujours limitée dans le temps. La fréquence d'intervention est toujours élevée etc. D'où une prise de conscience pour l'utilisation des FGM,

- ❖ Au développement des techniques de leur utilisation dans la construction et la réhabilitation en augmentant la durabilité
- ❖ La diminution des fréquences d'utilisation, en améliorant leurs propriétés mécaniques et en augmentant les procédés de renforcements
- ❖ Pour réparer des fissures dans les routes en asphalte
- ❖ Améliorer la durée de vie de la réparation
- ❖ Atténuer efficacement des maladies de la chaussée sous l'effet de la charge de l'environnement et des véhicules
- ❖ Refaçonner le béton armé
- ❖ Pour être utilisés sous forme de tissus par moulage au contact ou de plaques préfabriquées
- ❖ Pour des bétons à gradients de propriétés (Herrmann et Sobek, 2015)
- ❖ Augmenter l'efficacité de systèmes d'isolations vis-à-vis les effets de chaleur et d'humidité.
- ❖ Développer les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements):

- ❖ Consolider les parois intérieures des tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel)
- ❖ Améliorer les joints dans la charpente métallique

La gradation fonctionnelle des éléments en béton permet d'aligner la composition interne des composants structurels avec des exigences de performance structurelles et thermiques spécifiques. Cet alignement est rendu possible en modifiant continuellement les caractéristiques du matériau, y compris sa porosité, sa résistance ou sa rigidité.

Le changement graduel des composants en béton permet l'altération continue des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales. Minimiser la porosité améliore les caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids (Figure II.4)(Herrmann et Sobek, 2017).

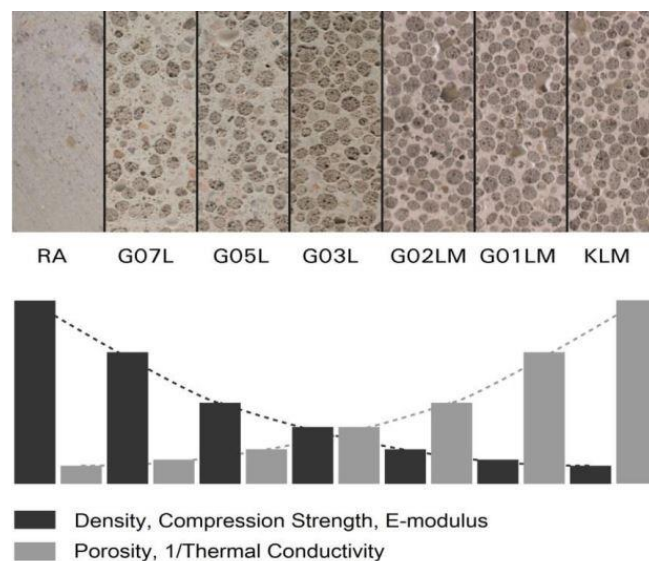


Figure II.4 : *Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité.*

Les dommages et les défaillances de la chaussée résultent de plusieurs problèmes géologiques, géotechniques, de conception, de construction, de charge et d'entretien. Elles sont dues à la traction horizontale excessive au bas de la couche d'asphalte et la compression verticale au sommet du terrain. Ces deux contraintes critiques sont prises en compte dans la conception des chaussées (Ekwulo et Eme, 2009). Des techniques existent pour une durabilité des routes dans les conditions défavorables citées précédemment. Une des techniques se limite à changer la granulométrie du mélange d'asphalte (faire couler l'asphalte en pierre pour avoir une bonne performance du mélange). Pour une meilleure amélioration des propriétés du bitume de base, il suffit d'incorporer des additifs chimiques dans le bitume par mélange mécanique ou par réaction chimique (Oruç et Yılmaz, 2016).

Autre exemple en génie civil concerne les difficultés de contact dans les fondations, la conception des routes et des chemins de fer, les problèmes de transfert de charge en présence de frottement et le comportement aux vibrations libres des poutres et des charpentes qui trouvent leurs solutions dans les utilisations des FGM (Guler et Erdogan, 2004; Banerjee et

Ananthapuvirajah, 2018). Pour résoudre les problèmes de mécanique de contact, il suffit de diviser les couches en plusieurs sous couches et les soumettre ensuite à des charges statiques glissant ou roulant. Le module d'élasticité, le module de cisaillement ou le rapport de Poisson des couches sont supposés varier en profondeur selon une loi de puissance ou une fonction exponentielle (Liu et Wang, 2008; Çömez, 2015). Dans la conception des composants de transfert de charge, la principale difficulté réside dans la préparation des surfaces pour réduire la possibilité de fissuration. Pour y parvenir, il suffit d'augmenter la ténacité et la résistance à l'usure des matériaux près des surfaces et sur elles-mêmes (Guler et Erdogan, 2004). Autre succès de l'utilisation des FGM en génie civil est le revêtement des tabliers de pont en Chine ainsi que la conception pour les très grandes structures de revêtement de pont. Bien que les revêtements de tabliers de ponts ne puissent pas être conçus et calculés selon la méthode de conception des structures de chaussée, de nombreux travaux se sont basés sur l'analyse numérique pour déterminer les caractéristiques de distribution des contraintes et des déformations des couches de chaussée (Wang, Hou et Zhang, 2017; Li, Zhang et Feng, 2019). L'amélioration des matériaux de revêtement de tablier de pont à haute performance a été développée par le traitement inter facial et les exigences du processus de construction entre les niveaux de rigidité des pentes. Concernant le pont en béton, l'asphalte modifié ajoutée aux polymères à la lixiviation du sable est utilisée comme couche fonctionnelle pour la continuité de l'interface et la transition de la rigidité, en tenant compte de la différence de module entre le béton et le béton asphaltique.

I.5. Procédés de fabrication des FGM :

Comme dans toute découverte fortuite, programmée, recherchée, les matériaux fonctionnellement gradués n'ont pas été élaborés du jour au lendemain. Ils sont le résultat de beaucoup d'expériences échouées. Mais le besoin, la curiosité, l'enthousiasme, l'acharnement et l'envie de les synthétiser pour une meilleure configuration a toujours animé les chercheurs pour arriver à leur fin. Et ils sont arrivés et ils continuent à progresser et à développer de nouvelles FGM avec des structures plus légères et plus dures que le matériau de base. Les techniques d'élaboration actuelles connaissent un essor important puisque ces FGM innovants disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. On peut citer la résistance mécanique et chimique, la légèreté, la liberté de forme et de durabilité de vie.

Beaucoup de combinaisons possibles de matériaux et de voies de fabrication bien connues sont largement utilisées pour produire des FGM (figure.I.5). Elles concernent aussi bien les techniques anciennes et simples que les plus complexes y compris des technologies très avancées.

Il existe différents procédés de fabrication des FGM en fonction de leurs domaines d'application. Avec l'amélioration de ces procédés, l'application des FGM et leur importance ont augmenté d'une manière considérable, car le coût global de la fabrication est réduit (Naebe et Shirvanimoghaddam, 2016).

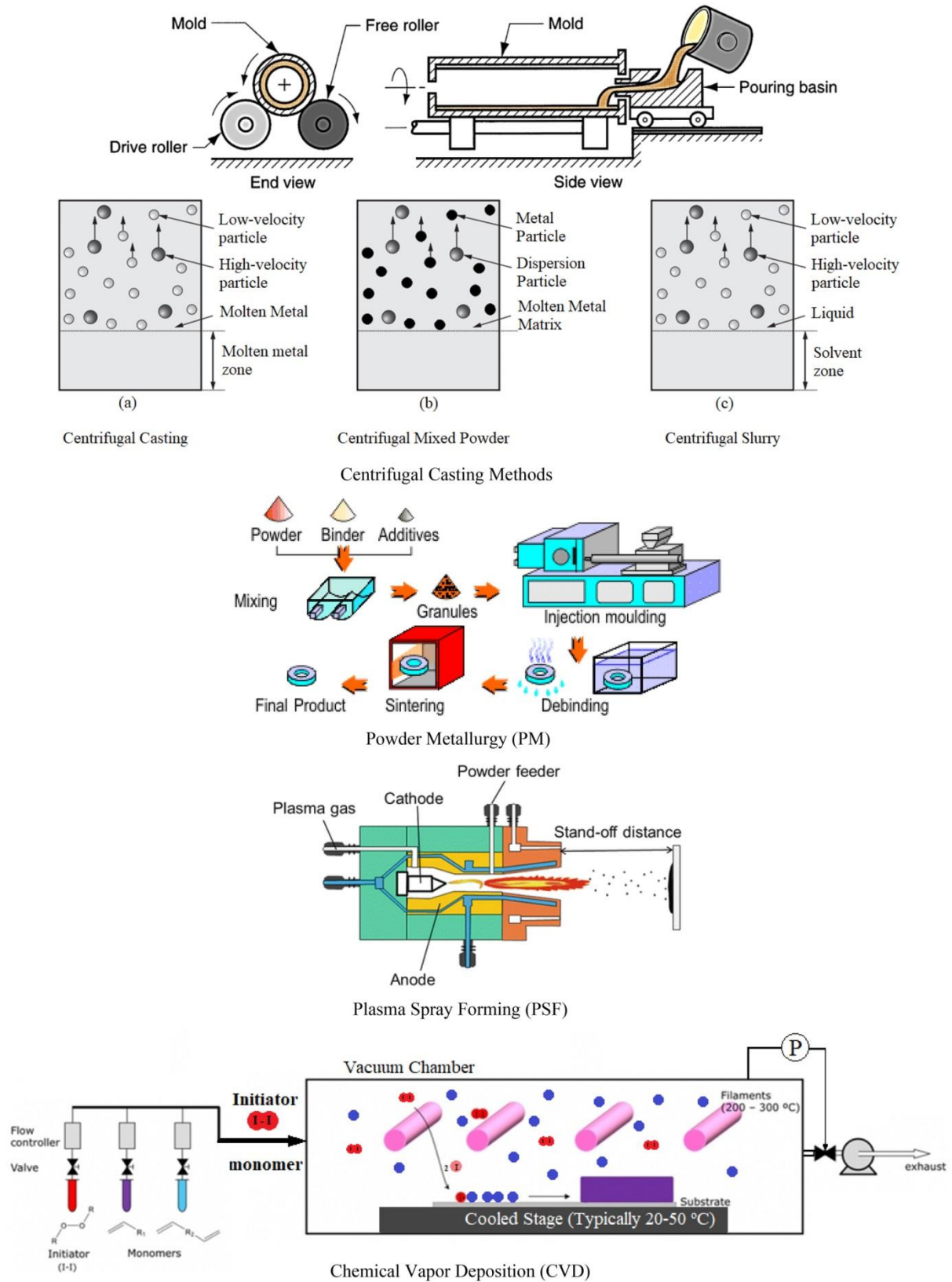


Figure.I.5 : Techniques de traitement couramment utilisées pour la production des FGMs (partie I)

Un système FGM conçu pour une application donnée doit prouver sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques.

Les principales méthodes et techniques sont énumérées ci-dessous :

- ❖ Combinaisons métal-métal, métal-céramique, céramique-céramique ou céramique-polymère (Singh et Siddhartha, 2018) sont les plus courantes, comme le montre la figure 3 (Jamaludin *et al.*, 2013; Almasi *et al.*, 2016; Singh et Siddhartha, 2018).
- ❖ Le dépôt physique et chimique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition et Chemical Vapor Deposition CVD/PVD)
- ❖ Le coulage (ou la coulée) centrifuge (Centrifugal Casting) (Watanabe, Yamanaka et Fukui, 1998; Nairobi Duque, Humberto Melgarejo et Marcelo Suarez, 2005).
- ❖ Le coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) (Belmonte *et al.*, 2009)
- ❖ Le coulage en bande (Tape Casting) (Belmonte *et al.*, 2009)
- ❖ Dépôt par projection thermique (Belmonte *et al.*, 2009)
- ❖ Les méthodes de laminage et d'infiltration
- ❖ Les procédés de fabrication de formes libres solides (Solid Freeform Fabrication SFF)
- ❖ La fabrication additive (Additive manufacturing AM)
- ❖ Le frittage et infiltration
- ❖ Le processus de dépôt d'énergie dirigé (DED) (Directed Energy Deposition)
- ❖ Les FGM structurés par gradient de porosité et de taille de pores
- ❖ Ceux structurés par gradient chimique et ceux structurés par gradient micro structurel.

Nous nous sommes limités à ces principales techniques d'élaboration des FGM mais, nous donnerons toutefois certains détails les concernant.

I.5.1. Dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition PVD) :

La technique est basée sur l'ionisation d'un gaz (argon) entre la cathode (cible) et l'anode (le substrat). Les atomes de gaz ionisé sont orientés par le champ électrique créé entre la cathode et l'anode vers la cible pour arracher un atome de la cible et le déposer sur le substrat. La fabrication du FGM par ce procédé est contrôlée par la vitesse de bombardement des cibles à l'intérieur de l'enceinte.

Dans cette technique, le matériau atomisé est vaporisé et déposé sur le matériau pour la fabrication des FGM minces et des revêtements en couches minces. En ce qui concerne les revêtements FGM, le matériau solide est vaporisé à la surface jusqu'à ce qu'il disparaisse pour être utilisé comme revêtements. L'atomisation du matériau solide déposé sur les surfaces de revêtement dépend du type de techniques PVD. En effet il existe plusieurs techniques utilisées en PVD : la pulvérisation radio fréquence (RF sputtering), la pulvérisation réactive assistée par magnétron (reactive DC current magnetron sputtering) et la déposition assistée par faisceau d'ions. (Grosjean, 2004; Das *et al.*, 2021). Ces techniques permettent d'obtenir des couches déposées de grande qualité.

I.5.2. Dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition CVD) :

Le dépôt par voie chimique (CVD) consiste à mettre un composé volatil du matériau à déposer en contact avec un autre gaz au voisinage de la surface à recouvrir. On place le matériau à revêtir dans une chambre sous pression réduite (sous vide) et le matériau de

revêtement se vaporise en chauffant le matériau ou en réduisant la pression. Cette méthode utilise un ou plusieurs gaz précurseurs qui viennent, après avoir été vaporisés, réagir à la surface du substrat pour former le dépôt du matériau souhaité (Jones, 1998).

Ces deux techniques (CVD/PVD) présentent l'inconvénient d'être des techniques énergivores et il n'est pas économique d'en fabriquer en quantité.

I.5.3. Compaction sèche des poudres (Powder metallurgy) :

(Jin *et al.*, 2009; Shahrjerdi *et al.*, 2011)

Elle est réalisée en trois étapes :

- 1- Pesée et mélange des poudres
- 2- Empilement et compaction des poudres pré-mélangées
- 3- Frittage.

Les poudres sont versées successivement dans un moule en acier en exerçant une faible compression. Les poudres ou les matériaux classés sont utilisés comme blocs de construction avec des tailles et des compositions variables. C'est une méthode peu coûteuse, facile à utiliser et nécessite moins de temps dans la fabrication de pièces complexes.

I.5.4. Méthode de coulée centrifuge (Centrifugal method) :

Dans cette technique, le matériau de renforcement solide ou fondu est versé à l'intérieur du moule d'une matrice qui tourne pour former le matériau fonctionnellement gradué. Une force centrifuge est générée par la rotation de la matrice. Le métal fondu est attiré vers le moule et se sépare en poudres solides en suspension et les deux matériaux de densités différentes fondent et forment ainsi le matériau recherché. Les particules métalliques sont soumises à des forces différentes dont on peut exploiter l'action pour établir une distribution de concentration volumique radiale de la phase divisée (Biesheuvel *et al.*, 2001). Les densités des différents matériaux, la taille des particules et leur distribution, le temps de solidification et la viscosité des matériaux fondus influencent la distribution graduelle des FGM (Das *et al.*, 2021).

La technique de coulée centrifuge se trouve l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter le plus grand nombre des matériaux FGM à cause de son contrôle étendu de la composition et de la microstructure (figure.I.5).

I.5.5. Coulage en bande (Tape casting method) :

Le coulage en bande est un procédé employé depuis de nombreuses années. Il sert pour la réalisation d'objet plan en céramique. Il présente l'avantage d'être relativement simple. Une barbotine est déposée sur un support par le passage d'un sabot dont le réglage de l'épaisseur du dépôt est assuré par un système constitué de deux lames. Il permet d'obtenir des couches d'une épaisseur comprise entre 25 et 200 μm . Dans ce procédé, le mélange de suspension est préparé avec le mélange de poudre requis placé dans un solvant organique avec des liants et des plastifiants et la suspension est étalée sur une courroie mobile. Il permet de modifier les propriétés mécaniques des composants en céramiques. (Zeng, Jiang et Watanabe, 2000). L'élimination du liant organique et l'augmentation de la densité du composant doivent se faire par frittage à des températures comprises entre 500 et 2000°C et à une pression qui peut varier

entre 3 et 30 MPa. Le coulage en bande permet de fabriquer des FGM à haute résolution (Das *et al.*, 2021).

I.5.6. Le coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Il s'agit dans cette méthode de disperser de fines particules (qui sont des suspensions de poudres) de céramique appelées barbotines dans un solvant, généralement aqueux que l'on transvase dans un moule creux et poreux, le plus souvent en plâtre ce qui permet l'extraction d'une partie du solvant par capillarité et la formation de structures de particules céramistes denses mais fragiles sur les parois. Cette technique permet de fabriquer des pièces complexes, à parois fines, ou de grande taille. Actuellement on a tendance à injecter la barbotine sous pression dans des moules poreux en métal ou résine plus résistants que le plâtre. (*Le Syndicat des Industriels des Céramiques Techniques*).

I.5.7. Les techniques de fabrication de forme libre solide (Solid freeform fabrication method SFF) :

Elles consistent à fabriquer sans outils dans lesquelles les composants fonctionnels sont donnés directement à partir d'un modèle mathématique. Ces avantages permettent de produire des composants avec des géométries qui ne peuvent pas être usinées par d'autres méthodes classiques.

L'agglomération de poudre par collage est une technique qui relève du procédé 3DP connu sous l'appellation Three Dimensional Printing. C'est la technologie SFF qui représente le plus de flexibilité. Il a été utilisé pour fabriquer de nombreux composants céramiques, métalliques et polymères de toute géométrie touchant ainsi des applications diverses.

La 3DP peut en même temps contrôler la composition locale et la microstructure à l'échelle 3D à l'intérieur d'un composant. Ainsi, par contrôle du type de matériau de liant et ses paramètres d'impression, les matériaux FGM peuvent être facilement fabriqués. (Moon *et al.*, 2001).

La 3DP constitue la base du processus d'impression 3D. Elle consiste à étaler d'une façon uniforme une fine couche de poudre de plastique de composite sur une plateforme d'impression. La tête d'impression va ensuite déposer sur celle-ci de fines gouttes d'un agent liant (type glu) de différentes couleurs qui va lier les particules de plastique entre elles pour les solidifier. (Même principe que celui des imprimantes à jet d'encre, qui déposent de l'encre sur le papier). La plateforme s'abaisse au fur et à mesure que les couches de poudre sont collées jusqu'à l'obtention du matériau final (autant de couches que nécessaire). La phase finale est soumise à un chauffage pour achever la solidification et la poudre qui entoure l'objet final peut être éliminée lors du processus de nettoyage.

I.5.7. La fabrication additive (Additive Manufacturing AM) :

La fabrication additive repose sur le principe 3DP et de modélisation qui utilisent un logiciel (type CAO) et les scanner 3D. Le principe AM est connu sous d'autres noms : impression 3D, Solid freeform fabrication method SFF, le prototypage rapide de fabrication. Cette technique élimine l'utilisation des gabarits et les dispositifs de fixation concernant la production de pièces complexes en 3D. Plusieurs matériaux sont utilisés en AM comme la céramique, les métaux, les plastiques, les composites FGM (Kunimine *et al.*, 2016).

C'est un procédé de fabrication additive qui met cinq étapes de base :

- 1- La génération du modèle CAO à partir d'un logiciel de conception
- 2- La conversion de ces données CAO en fichier de langage de triangulation standard (Standard Triangulation Language STL)
- 3- Le découpage du fichier en profils 2D
- 4- La construction de la pièce en couches
- 5- L'enlèvement et la finition de la pièce.

Il utilise beaucoup de matériaux pour élaborer des pièces complexes à une grande vitesse de production, mais la qualité de surface des composants est de mauvaise qualité. D'où la nécessité d'effectuer une opération de finition complémentaire à la fin.

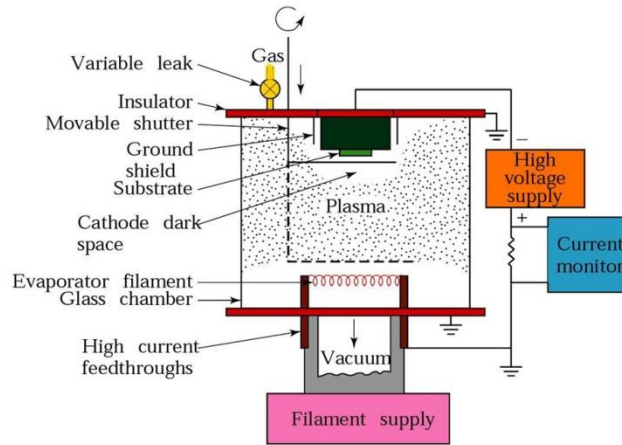
I.5.8. Le procédé de dépôt d'énergie dirigé (DED) (Directed Energy Deposition) :

Ce procédé utilise une plus grande variété de matériaux, y compris les céramiques, les métaux et les polymères. Pour faire fondre le bain sur le substrat, il doit comporter une source d'énergie de type laser, faisceau d'électrons ou arc plasma. Le matériau en poudre ou en fil placé co-axialement à la source d'énergie est introduit dans le bain de fusion. Cette position spécifique de la source d'énergie aide à faire fondre la matière première ou la poudre du fil et permet de suivre le matériau lors de la solidification du bain de fusion (Zhou *et al.*, 2018). Le procédé DED sert actuellement à réparer des mécanismes de grande valeur qui n'étaient pas réparables il y a quelque temps. Ils peuvent construire un nouveau matériau à partir d'un matériau existant.

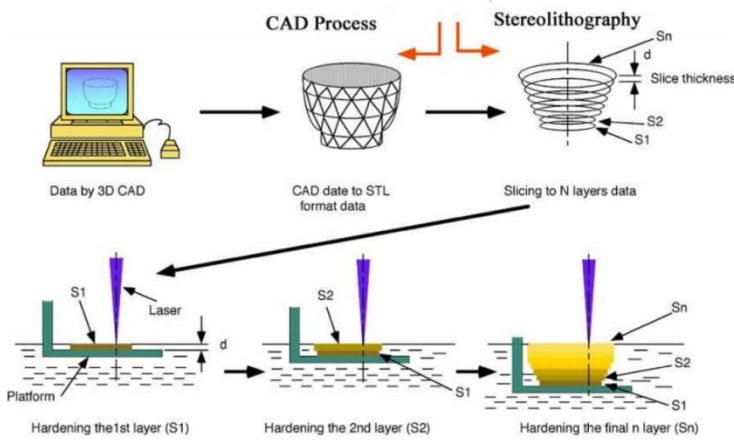
I.5.9. Projection par plasma :

La méthode de projection par plasma des particules est une technique très utilisée pour l'élaboration des FGM. L'avantage de cette technique est de pouvoir déposer tous types de matériaux même les métaux réfractaires et les céramiques.

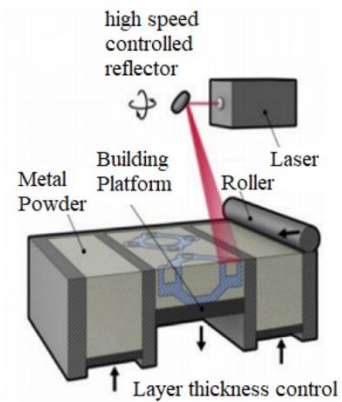
Un gaz soumis à une très forte température est complètement ionisé en ions et électrons et générant des champs électro-magnétiques (l'état plasmagène est électriquement neutre, il est considéré comme le quatrième état de la matière). Cette ionisation peut être produite à partir de hautes températures, mais aussi sous l'effet des bombardements par d'autres particules. Elle se produit aussi sous l'effet de grandes décharges électriques, par exemple dans les éclairs lors des orages. Des particules de matériaux se trouvant dans cet espace plasmagène, peut être fondu (vu les très hautes températures) partiellement ou totalement et s'adhérer à un substrat. Cette technique est actuellement très utilisée dans la fabrication des FGM car elle emploie un équipement simple, donne un rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie complexe. Elle est remarquable avec ses performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux (Steffens, Dvorak et Wewel, 1990).



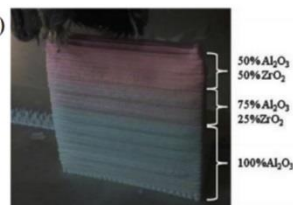
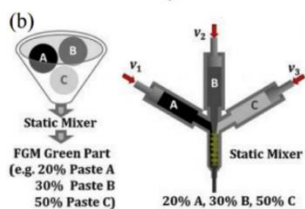
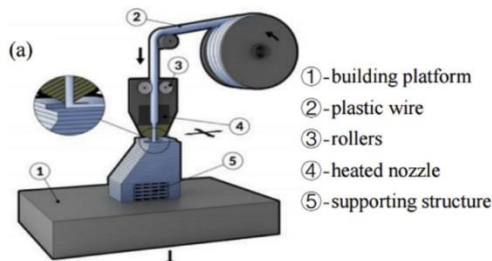
Physical Vapor Deposition (CVD)



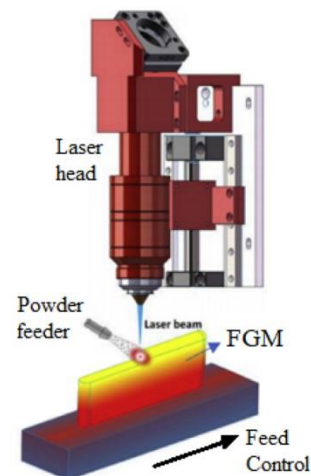
Solid Freeform Fabrication (SFF)



Selective Laser Sintering/Melting (SLS/SLM)



Fused deposition modelling (FDM) with triple-wire-extruder and sample FGM consisting of Al_2O_3 and ZrO_2



Laser engineered net shaping (LENS) based on powder deposition

Additive Manufacturing Techniques used for the production of FGMs

Figure.I.6 : Techniques de traitement couramment utilisées pour la production des FGMs (partie II).

I.5.10. Frittage et infiltration :

Le frittage est connu comme un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Lorsque les températures de fusion de deux matériaux sont très différentes, on applique cette technique pour obtenir un FGM. Elle se réalise en deux étapes. La première est de fabriquer une matrice frittée du matériau ayant la plus haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le procédé s'applique pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi, 1990) et se généralise lorsque nous voulons combiner plusieurs matériaux chimiquement inertes et dont les températures de fusion sont très éloignées les unes des autres.

I.6. Les matériaux à gradient de porosité (Porosity and pore size gradient materials) :

Les FGM sont élaborés à partir du dépôt de poudre avec différents tailles et formes de pores. La porosité est modifiée par rapport à la position spatiale des matériaux. Ils sont utilisés principalement dans le domaine biomédical où la partie de l'os à remplacer comprend des FGM de porosité pour faciliter l'intégration et la guérison des tissus et de l'implant (Mahamood et Akinlabi, 2017a).

I.7. Les matériaux à gradient microstructural (Micro structural gradient materials) :

Dans ce processus, les propriétés imposées sont obtenues par variation progressives des microstructures. La surface du matériau est soumise au phénomène de trempe pour que la gradation microstructurale se produise ou par un procédé de traitement thermique contrôlé. Ils sont appliqués dans l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les roulements et les turbines où des surfaces dures résistantes à l'usure et un noyau dur pour résister aux chocs importants pendant l'opération sont nécessaires (Mahamood et Akinlabi, 2017a).

I.8. Les matériaux à gradient chimique (Chemical gradient materials) :

Il s'agit de faire varier la composition chimique en matériaux mono ou polyphasiques en tenant compte de la solubilité des éléments. Les phases et les compositions varient à l'intérieur du matériau, ce qui donne différentes phases avec des compositions différentes.

À titre d'exemples :

- Les FGM minces (entre 5 nm et 500 nm) sont fabriquées par le dépôt physique en phase vapeur (PVD) (Askari *et al.*, 2012), le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Muller, Mognol et Hascoet, 2013), le dépôt par pulvérisation thermique (Rodriguez *et al.*, 2019), le revêtement laser (Yin *et al.*, 2018).
- Les FGM en vrac ou épaisses (entre 5 et 350 mm) sont élaborées par la métallurgie des poudres (Tripathy, Sarangi et Panda, 2017), le moulage par centrifugation (Saleh et Ahmed, 2019), les techniques de moulage libre solide (Zhang *et al.*, 2018), la sédimentation par gravité (del Val *et al.*, 2017).

I.9. Modélisation et simulation :

En l'absence de manipulations physico-chimiques dans le but de synthétiser des FGM, une voie basée sur la simulation du comportement d'un matériau à gradient de propriétés a pris le relais et s'est substituée à ce manque de travaux expérimentaux. La simulation du comportement en service d'un matériau à gradient de propriétés permet de limiter considérablement le nombre d'expériences en vue d'optimiser sa fonction (efficacité, rendement). Elle permet une optimisation dimensionnelle par rapport aux sollicitations imposées. Un matériau FGM inutilisable et inefficace représente un coût élevé en matière première, en conception et en élaboration. Durant ces deux dernières décennies, l'outil numérique (modélisation/simulation) des phénomènes physiques s'est particulièrement développé pour les FGM et connaît un essor important grâce à la capacité grandissante des machines de calculs. Il permet de réaliser des simulations rapides et efficaces, sans avoir recours à tout moment aux expériences coûteuses en temps et en argent. Néanmoins, le modèle doit être rigoureusement validé avec les essais expérimentaux. Elle vise aussi une analyse qualitative tenant compte des écoulements, déformations, forces nécessaires, défauts, usures... Elle peut être généralisée pour de nombreuses applications (variations des caractéristiques physiques et géométriques, les modes de fixation, les incréments de chargement...).

Il existe plusieurs axes de modélisation mais très peu ont une vision globale d'un gradient de propriétés. Chacune est spécifique à un point :

- L'effet de la composition chimique sur le gradient de microstructure
- L'effet de la microstructure sur les propriétés locales du gradient de propriétés
- La modélisation du système sous sollicitations extérieures (Texier, 2013).

MATERIAUX

PRINCIPALES METHODES ET TECHNIQUES D'ELABORATION

Dépôt physique ou chimique en phase vapeur CVD/PVD

Coulage séquentiel en barbotine

Ceux structurés par gradient de porosité et de taille de pores

Processus de dépôt d'énergie dirigé

Coulage centrifuge

Fabrication additive

Pulvérisation de plasma

Frittage et infiltration

Coulage en bande

Ceux structurés par gradient chimique et ceux structurés par gradient

Combinaisons métal-métal, métal-céramique, céramique-céramique ou céramique-polymère

FGM

CLASSIFICATION

Structure des FGM

Type

Nature du gradient

Dimensions principales

Domaine d'application

État pendant le traitement

Gradient d'orientation

Gradient de composition

Gradient de fraction

Nature des microstructures

Etat stationnaire

Non stationnaire

UTILISATION DES FGM

Energie nucléaire

Industrie automobile

Industrie chimique

Médecine et bio-ingénierie

Génie civil

Industrie aérospatiale

Industrie maritime

Électronique

Microélectronique

Défense et le sport

Matériaux de construction

Optoélectronique

Applications dans les composants

Production d'énergie

QUELQUES CARACTÉRISTIQUES

Faible réactivité chimique

Conductivité thermique élevée

Degré de ténacité élevé

Charge de rupture élevée

Bonne résistance à l'usure

Faible coefficient de dilatation

Bonne résistance à la corrosion

Dureté élevée corrosion

Conservation des propriétés à haute température

Faible coefficient de frottement

Température élevée de fusion ou de décomposition

I.10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », puis nous avons mis en évidence l'évolution des matériaux FGM à travers le temps ainsi que leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés, a permis de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et le génie civil.

Le chapitre suivant portera sur les différentes théories et les propriétés matérielles des plaques FGM.

CHAPITRE II

THÉORIES ET PROPRIÉTÉS DES PLAQUES FGM

II. Introduction :

Ce chapitre est consacré aux différentes théories et propriétés matérielles des plaques FGM.

Nous avons évoqué dans le chapitre 1 l'utilisation de plus en plus grandissante de ces matériaux FGM dans les divers domaines de l'ingénierie. Les avantages liés à leur structure offrent des solutions technologiques innovantes dans plusieurs domaines essentiellement dans les différents types de chargements qui exigent des matériaux possédant des propriétés mécaniques et thermomécaniques assez élevées.

La modélisation de ses structures nécessite des théories d'ordre supérieur qui tiennent compte du cisaillement transverse. La première partie de ce chapitre prendra en compte les différentes théories utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques FGM : la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée des plaques et enfin la théorie quasi-3D. La deuxième partie sera consacrée aux différents modèles de répartition des propriétés des FGM.

II.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT Classical Plate Theory) :

C'est la théorie classique la plus simple concernant la flexion des plaques. Elle est connue sous l'appellation de Love-Kirchhoff (1994).

La théorie classique des plaques minces (CPT) est celle dans laquelle le champ de déplacement se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff (Figure II.1):

- Les sections perpendiculaires au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation en négligeant les effets de déformation de cisaillement transverse.
- L'épaisseur de la plaque est faible, par conséquent les contraintes dans le sens de cette dernière sont supposées nulles. Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont non extensibles).

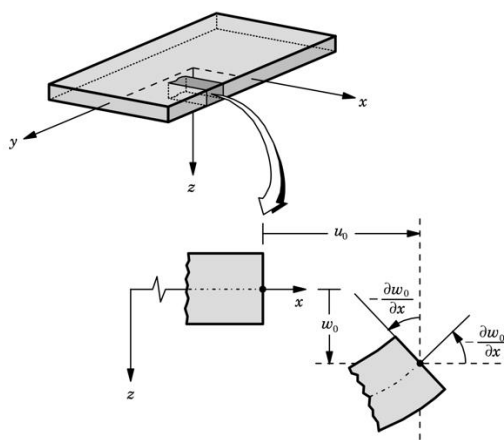


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.

Cette théorie est très bien décrite dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger, (1959) et Reddy (Reddy, Wang et Lee, 1997; Reddy, 1999).

La théorie de Love-Kirchhoff est basée sur le champ de déplacements donné par les équations (II.1) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{II.1}$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement.

w_0 est la flèche de la plaque.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ sont les rotations dues la flexion (sans cisaillement).

Dans la CPT, l'effet de cisaillement transversal est négligé, de sorte que seules les plaques minces peuvent être considérées par cette théorie. Leissa, (1973) a appliqué la CPT pour étudier la vibration libre des plaques rectangulaires isotropes minces. Hu et Zhang, (2011) ont appliqué les hypothèses de la CPT et de Von Karman pour analyser la vibration et la stabilité des plaques FGM ainsi que les influences de certains paramètres ont été étudiées. Une combinaison de la CPT et de la méthode de Rayleigh-Ritz a été utilisée par Chakraverty et Pradhan, (2014) pour analyser les vibrations des plaques en FGM. Dans leur travail, la plaque reposait sur la fondation élastique de Winkler avec différentes conditions aux limites. L'influence de certains paramètres de la fondation, des conditions aux limites et des propriétés géométriques a été analysée.

II.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT First Order Shear Deformation Theory) :

Hypothèse de Reissner-Mindlin (FSDT).

Elle s'énonce de la manière suivante (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) :

«Après application des charges, les fibres normales au plan moyen restent droites mais pas forcément normales au plan moyen déformé, de plus la longueur d'une fibre transverse varie peu au cours de la déformation». La théorie FSDT est appelée théorie de premier ordre étant donné que les fonctions u et v sont développées au premier ordre en z .

La théorie FSDT permet de mener à des résultats globaux corrects et peut être appliquée à des problèmes complexes car le nombre de fonctions inconnues reste limité à 5.

Dans des plaques moyennement épaisses, on doit tenir compte des déformations dues au cisaillement transverse. La théorie de déformation du premier ordre est issue de la théorie classique mais qui tient compte de l'effet de cisaillement transverse.

Étant donné que les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, il est toutefois nécessaire d'ajouter un facteur de correction de cisaillement.

Elle est basée sur l'hypothèse cinématique de Mindlin suivante : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne après déformation à cause de l'effet du cisaillement transverse (Figure II.2).

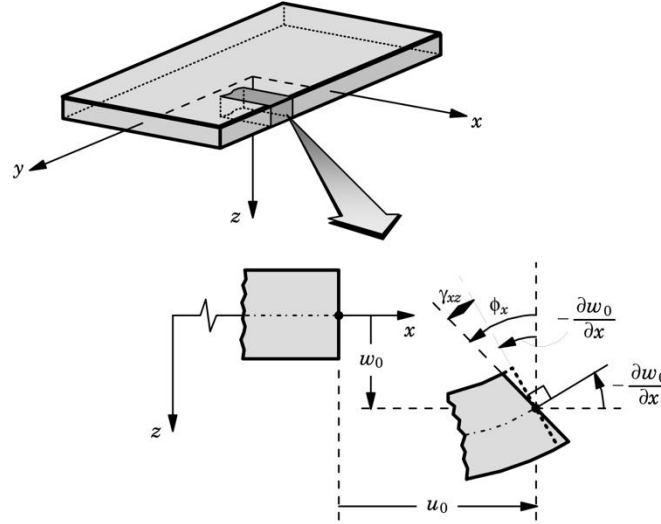


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

Le champ de déplacement de Reissner-Mindlin est donné par les équations (II.2) :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} respectivement, w_0 est la flèche de la plaque.

ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes \mathbf{x} et \mathbf{y} respectivement.

La théorie FSDT est largement appliquée pour étudier le comportement des plaques FGM épaisses et minces.

- Liew, Xiang et Kitipornchai, (1993) ont appliqué la théorie des plaques de Mindlin pour analyser la vibration des plaques rectangulaires épaisses avec différentes conditions aux limites.
- La FSDT a été appliquée dans le comportement de flexion des plaques FGM soumises à une charge mécanique dans l'environnement thermique (Croce et Venini, 2004).
- Fallah, Aghdam et Kargarnovin, (2013) ont utilisé la FSDT et la méthode étendue de Kantorovich pour analyser la vibration libre de plaques FGM modérément épaisses reposant sur une fondation élastique.
- Dans le cadre de leurs travaux approfondis Hosseini-Hashemi, Fadaee et Atashipour, (2011) ont développé et proposé une nouvelle approche analytique précise sur la base

de la théorie des plaques de Reissner-Mindlin pour analyser la vibration libre des plaques rectangulaires FGM.

- Nguyen, Sab et Bonnet, (2008) ont développé un nouveau modèle FSDT pour l'analyse des plaques FGM.

Afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des plaques ont été développées.

Malheureusement il persiste certaines limitations de la FSDT provenant de l'usage des coefficients correctifs et de la mauvaise description des contraintes dans le sens transverse. Pour accéder à ces quantités, il est possible de prendre en compte le gauchissement de la fibre transverse par un développement limité en z à l'ordre 3 des déplacements u et v .

II.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT Higher Shear Deformation Theory) :

L'évolution de la théorie classique des plaques (CPT) et celle du premier ordre (FSDT) a conduit à la théorie HSDT. Elle est basée sur le développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Contrairement aux précédentes théories, la HSDT s'appuie sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur (Figure II.3). Ces modèles n'exigent pas de facteurs de correction en tenant compte de l'effet de cisaillement.

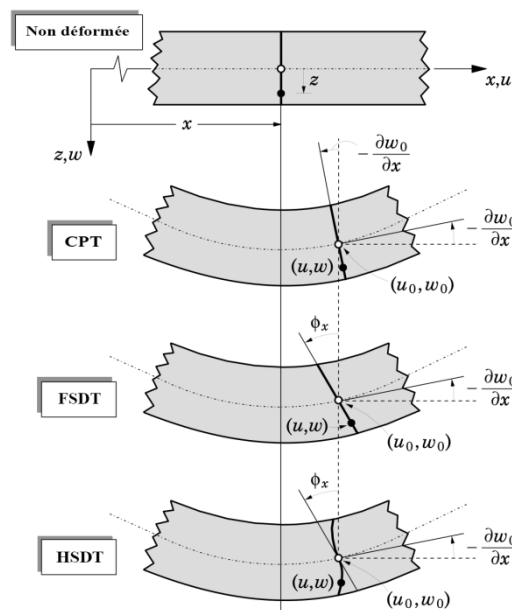


Figure II.3 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CPT) et (FSDT).

Les théories d'ordre élevé s'appliquent à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement, ...). La HSDT développée par Reddy, (2000) a été utilisée par de nombreux chercheurs pour étudier la flexion statique, la vibration libre et le flambement des plaques FGM. On peut citer quelques travaux y afférant à la HSDT

- Javaheri et Eslami, (2002) ont appliqué la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la solution Navier pour étudier le flambement thermique des plaques en FGM simplement appuyées.
- Une analyse non linéaire des plaques FGM soumises à des charges transversales dans l'environnement thermique a été étudiée par Shen, (2002) en utilisant la TSDT.
- Yang, Liew et Kitipornchai, (2004) ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques FGM laminées en utilisant la HSDT.
- Une théorie exponentielle-trigonométrique de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) pour l'analyse de la flexion, des vibrations libres et du flambement des plaques en FGM a été étudiée par Belkhdja *et al.*, (2020).
- Rabhi *et al.*, (2020) ont étudié le flambement et la vibration libre des plaques sandwich à gradient exponentiel reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions limites en appliquant une nouvelle HSDT à 3 inconnues.

Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est généralement donné par les équations (II.3) :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Où (u_0, v_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements de membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$,

$f(z)$ est une fonction de cisaillement (fonction de forme) transverse caractérisant les théories correspondantes contrairement à la théorie de Love-Kirchhoff où $f(z) = 0$, alors que dans la théorie de Reisner-Mindlin $f(z) = z$.

II.4. Théorie raffinée des plaques RPT (Refined Plate Theory):

Dans le but de surmonter le problème des HSDT, Shimpi, (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT) afin de diminuer le nombre total des variables utilisées dans les équations d'équilibre. Dans cette théorie le nombre d'inconnues est de quatre $(u_0, v_0, w_b$ et $w_s)$ contrairement aux théories classiques qui en comptent cinq $(u_0, v_0, \theta_x$ et $\theta_y)$.

En divisant le déplacement transversal en parties de cisaillement et de flexion, la RPT maintient une grande précision tout en simplifiant les formulations (Shimpi et Patel, 2006). D'une part, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement pour combler le problème de l'utilisation de la FSDT.

D'autre part, en utilisant différentes fonctions de forme pour satisfaire les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces inférieure et supérieure et faire correspondre la répartition de la contrainte de cisaillement transversale sur l'épaisseur. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été présentées pour l'analyse de vibration libre (Rahmani *et al.*, 2020), de flexion (Bellifa *et al.*, 2016), (Shahsavari et Janghorban, 2017; Zine *et al.*, 2020), et de flambement des plaques (Bellifa *et al.*, 2017).

De ce fait, Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit (II.4) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement.

II.5. Théorie de déformation des plaques Quasi-3D :

Cependant, puisque toutes les théories mentionnées ci-dessus supposent que les déplacements transversaux sont constants dans le sens de l'épaisseur, l'effet d'étirement (stretching effect) dans le sens transversal est ignoré.

Dans la mesure où on doit tenir compte de l'influence de l'effet d'étirement, on est contraint d'appliquer la théorie quasi-3D qui a été développée pour étudier les plaques de moyenne, forte et très forte épaisseur. Cette théorie prend en considération des variations d'ordre supérieur du déplacement dans le plan et du déplacement transversal à travers l'épaisseur et par conséquent, prend en compte les effets du cisaillement et des déformations normales.

Plusieurs travaux ont porté sur ces théories :

- Thai et Kim, (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables au lieu des théories d'ordre élevé à six variables.
- Hebali *et al.*, (2014); Bouhadra *et al.*, (2018) ont proposé moyennant différentes fonctions de forme des théories à cinq inconnues.
- Zenkour a développé de nombreuses théories quasi-3D différentes qui ne contenaient que quatre inconnues pour étudier le comportement en flexion et en vibration des plaques FGM et des plaques sandwich FGM (Zenkour, 2013, 2014, 2015).
- Neves *et al.*, (2012) ont développé une nouvelle théorie quasi-3D utilisant une fonction hyperbolique pour analyser les plaques FGM.
- Une étude sur le comportement structural des plaques poreuses fonctionnellement graduées sur une fondation élastique en utilisant un nouveau modèle quasi-3D a été développée par Kaddari *et al.*, (2020).
- Une étude sur les effets de la fondation Winkler/Pasternak/Kerr et de la porosité sur le comportement des plaques FG imparfaites en basant sur la théorie quasi-3D est réalisée par Addou *et al.*, (2019).

Le champ de déplacement est présenté par les équations II.5 :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + w_{st}(x, y, z)
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Où :

$w_{st}(x, y, z) = g(z)\varphi(x, y, z)$ est le terme qui exprime l'étirement de l'épaisseur.

II.6. Les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Plusieurs auteurs ont proposé des fonctions de cisaillement $f(z)$ pour les modèles d'ordre élevé. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur peut prendre une forme parabolique, sinusoidale hyperbolique, ou exponentielle.

Le tableau II.1 résume les théories les plus utilisées dans la littérature.

Tableau II.1 : Description des différentes théories de plaques.

Théorie	Intitulé	Fonction de cisaillement	Domaine de validité
CPT, Kirchhoff	Théorie classique des plaques	0	Plaques minces
FSDT, Mindlin	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	z	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambarsumian	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier	Théorie d'ordre supérieur (trigonométrique)	$\frac{h}{z} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	
ESDPT, (Karama, Afaq et Mistou, 2003)	Théorie d'ordre supérieur (exponentielle)	$ze^{-2(z/h)^2}$	
PSDPT, Levinson, Reddy	Théorie d'ordre supérieur (parabolique)	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	
Akavci et Tanrikulu, (2015)	Théorie de déformation quasi-3D (hyperbolique)	$3.7z(1.2z \operatorname{sech}^{0.65}(z/h) - 1)$	
Thai <i>et al.</i> , (2014)	Théorie de déformation quasi-3D (hyperbolique)	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	

<p>Hebali <i>et al.</i>, (2014)</p>	<p>Théorie de raffiné des plaques (hyperbolique)</p>	$\frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{\cosh(\pi/2) - 1}$	
<p>Bennoun, Houari et Tounsi, (2016)</p>	<p>Théorie de raffiné des plaques (hyperbolique)</p>	$z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right)$	

II.7. Les propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux fonctionnels gradués (FGM) peuvent être produits en faisant varier en continu les constituants des matériaux multiphasiques selon un profil prédéfini. Les caractéristiques les plus distinctes d'un FGM sont les microstructures non uniformes avec des macropropriétés à gradation continue. Un FGM typique peut être définie en faisant varier progressivement les propriétés du matériau. On utilise souvent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques.

Considérons une plaque rectangulaire élastique. Comme le montre la figure.II.4, les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, alors que l'axe z est perpendiculaire à la surface médiane de la plaque dans le sens de l'épaisseur.

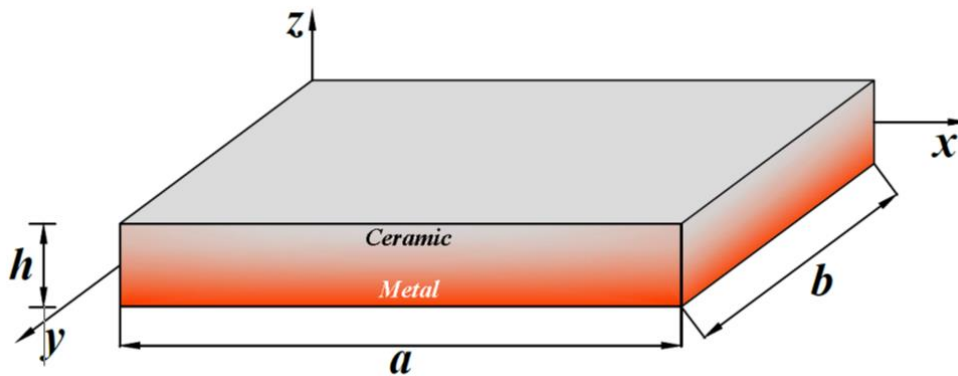


Figure II.4 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les propriétés du matériau, le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents, mais sont prédéfinis en fonction des exigences de performance.

Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson des plaques ne varient continuellement que dans le sens de l'épaisseur (axe z), c'est-à-dire $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Delale et Erdogan, (1983) ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, le coefficient de Poisson des plaques est supposé être constant. Néanmoins, les modules de Young dans le sens de l'épaisseur des plaques de FGM varient avec les fonctions de loi de puissance (P-FGM), les fonctions exponentielles (E-FGM) ou les fonctions sigmoïdes (S-FGM).

II.7.1. Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM (loi de puissance) :

La fraction volumique de la FGM correspond à une fonction de loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \tag{II.6}$$

Où p est le paramètre matériel et h l'épaisseur de la plaque. Après avoir défini la fraction volumique locale $V(z)$, les propriétés matérielles d'une P-FGM peuvent être déterminées par la loi du mélange exprimée par l'équation II.7 (Bao et Wang, 1995) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \tag{II.7}$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et supérieure ($z = h/2$) de la plaque de FGM. La variation du module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans la figure II.5, ce qui montre que le module d'Young change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$ et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

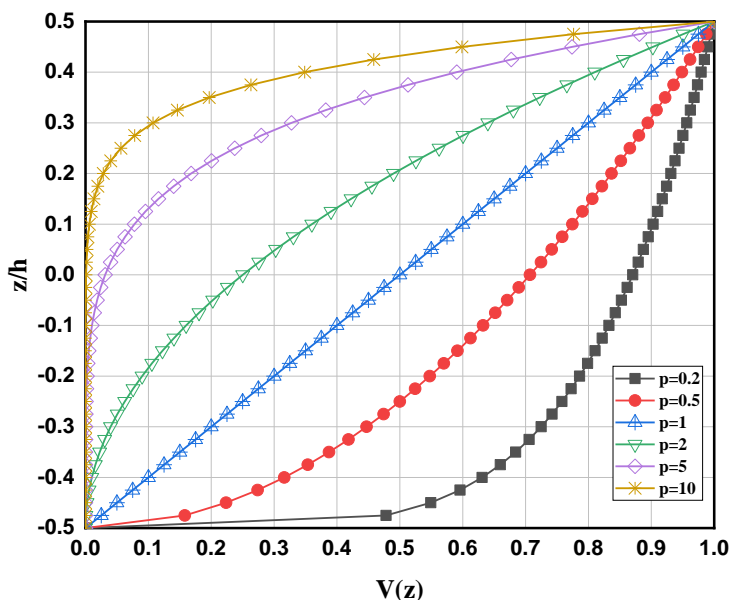


Figure II.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P- FGM .

II.7.2. Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM (loi sigmoïde):

Les variations des propriétés des FGM sont couramment exprimées à l'aide de la fonction de loi de puissance P-FGM. Néanmoins, dans les FGM, les concentrations de contraintes dans les FGM apparaissent à l'une des interfaces dans laquelle le matériau est continu mais change rapidement. Afin de surmonter cette difficulté et résoudre ce problème, Chung et Chi, (2001) ont défini la fraction volumique sigmoïde S-FGM composée de deux fonctions de loi de puissance définies par les relations II.8:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.8a})$$

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.8b})$$

En appliquant la loi du mélange, le module de Young de la FGM-S peut être calculé par :

$$E_1(z) = V_1(z)E_c + [1-V_1(z)]E_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.9a})$$

$$E_1(z) = V_2(z)E_c + [1-V_2(z)]E_m \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.9b})$$

La figure II.6 présente la variation de la fraction volumique des répartitions sigmoïdes définie par les équations (II.9a) et (II.9b). Ainsi, cette plaque FGM est appelée plaque S-FGM.

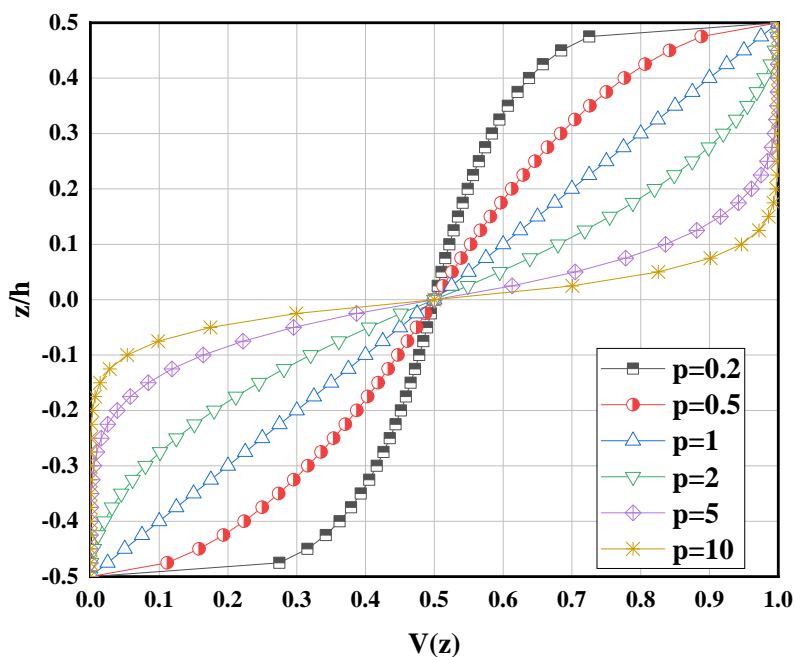


Figure II.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S- FGM .

II.7.3. Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d’une structure E-FGM (loi exponentielle) :

Cette loi s’emploie en utilisant la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM donnée par la formule II.10: (Delale et Erdogan, 1983)

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)}, \quad B = \frac{1}{2} \ln \frac{E_c}{E_m} \tag{II.10}$$

La variation du module de Young à travers l’épaisseur des plaques de E-FGM est représentée sur la figure II.7.

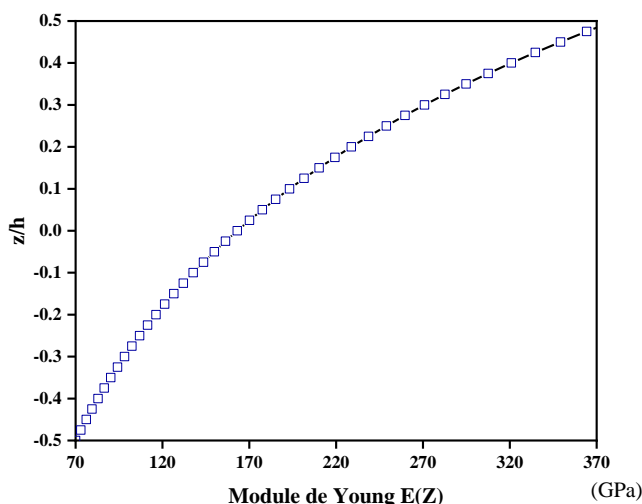


Figure II.7 : Variation de module de Young dans une plaque E- FGM.

Plusieurs théories classiques et d'ordre supérieur des plaques ont été utilisées pour étudier différents comportements des structures en FGM. Des recherches importantes sont disponibles sur les répartitions des propriétés matérielles des plaques FGM selon la loi de puissance, sigmoïde et exponentielle. Nous présentons ci-après une partie de ces travaux :

Dans la grande majorité des travaux, une fonction de puissance est utilisée pour représenter la distribution transversale des matériaux métalliques et céramiques (P-FGM) (Boukhlif *et al.*, 2019; Zaoui, Ouinas et Tounsi, 2019; Zarga *et al.*, 2019; Kaddari *et al.*, 2020). Par conséquent, l'effet d'autres variations transversales des propriétés des matériaux sur l'instabilité des plaques rectangulaires épaisses FGM n'a pas été étudié. Abdelrahman, (2020) a étudié cet effet en utilisant la TSDT pour le cas d'une plaque simplement appuyée. Une fonction sigmoïde et une fonction exponentielle sont toutes les deux utilisées pour représenter la variation des propriétés progressives transversales. L'étude paramétrique réalisée montre que la fabrication des plaques FGM avec une variation sigmoïde dans le sens de l'épaisseur augmente considérablement la charge de flambement. Cette amélioration s'avère plus significative dans le cas des plaques épaisses que dans celui des plaques minces.

Kaci *et al.*, (2014) ont présenté une étude de la flexion cylindrique non linéaire d'une plaque simplement appelée E-FGM. La plaque est soumise à une charge de pression uniforme et sa non-linéarité géométrique est introduite dans les équations de contrainte-déplacement basées sur les hypothèses de Von-Karman. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées, à l'exception du coefficient de Poisson, sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur de la plaque conformément à la loi de distribution exponentielle.

Dans le travail de Boussoula *et al.*, (2020) un nouveau type de plaques sandwich en S-FGM, à savoir des plaques frontales en P-FGM et un noyau dur symétrique en S-FGM a été investi pour l'analyse thermomécanique de la flexion des plaques sandwich FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du nième ordre.

Un modèle d'éléments finis basé sur le champ de déplacement selon la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre a été utilisé pour comparer la réponse des vibrations libres des coques sandwich en FGM dont les couches inférieure et supérieure sont

en métal et en céramique et dont l'âme est en FGM. Les propriétés des matériaux du noyau en FGM varient selon le modèle de loi de puissance (P-FGM) et le modèle sigmoïde (S-FGM) (Karakoti, Pandey et Kar, 2020).

II.8. Conclusion :

Une comparaison des théories des plaques a été donnée allant de la théorie classique aux théories d'ordre élevé quasi-3D pour décrire la déformation des plaques. Ces dernières ont été développées afin de surpasser les limitations des théories existantes. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau isotrope, FGM, sandwich, plaque mince ou épaisse) et aux différents domaines (statique, dynamique et instabilité) et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Un aperçu sur les travaux d'analyse de différents comportements structurels des FGM basé sur les théories de déformation a été aussi présenté ainsi que les modèles possibles qui interviennent dans la description de la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur pour les plaques FG.

CHAPITRE III

*ÉTUDES DE L'INFLUENCE DE LA
POROSITÉ SUR LE
COMPORTEMENT STATIQUE ET
DYNAMIQUE DES PLAQUES
FGM*

III. Introduction :

L'objectif principal de toute théorie, est le calcul des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites relatives à la structure, Elle a pour but ainsi la mise en place d'une loi de comportement.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous examinons les effets de la fondation Winkler/Pasternak/Kerr et de la porosité sur le comportement des plaques FG parfaites et imparfaites. Pour ce faire, la théorie de déformation de cisaillement quasi 3D est utilisée en considérant les effets d'étirement axial, de flexion, de cisaillement et d'épaisseur.

Différents modèles de variations de la porosité sont pris en compte pour décrire l'influence de la porosité sur le comportement statique et dynamique des matériaux FG.

III.1. Géométrie et concept de la plaque fonctionnellement gradué (P-FGM) :

Nous avons considéré dans le présent travail, une plaque métal-céramique à gradation fonctionnelle (P-FGM) de longueur "a", de largeur "b" et d'épaisseur "h" dans le repère (x×y×z), respectivement. Les propriétés matérielles de la plaque FG telles que le module de Young "E(z)", la densité massique "ρ(z)" et le coefficient de Poisson "ν(z)" sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur selon la distribution de la loi de puissance (Tounsi et al., 2013; Bourada et al., 2015; Fahsi et al., 2017). Exprimée par l'équation (III.1) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \tag{III.1}$$

Où P_m et P_c sont les propriétés des matériaux métalliques et céramiques respectivement. p est l'indice de puissance. La plaque métal-céramique FG est censée reposer sur des fondations élastiques de type Winkler, Pasternak et Kerr. Les croquis illustratifs des trois types de fondations élastiques sont présentés dans la figure.III.1.

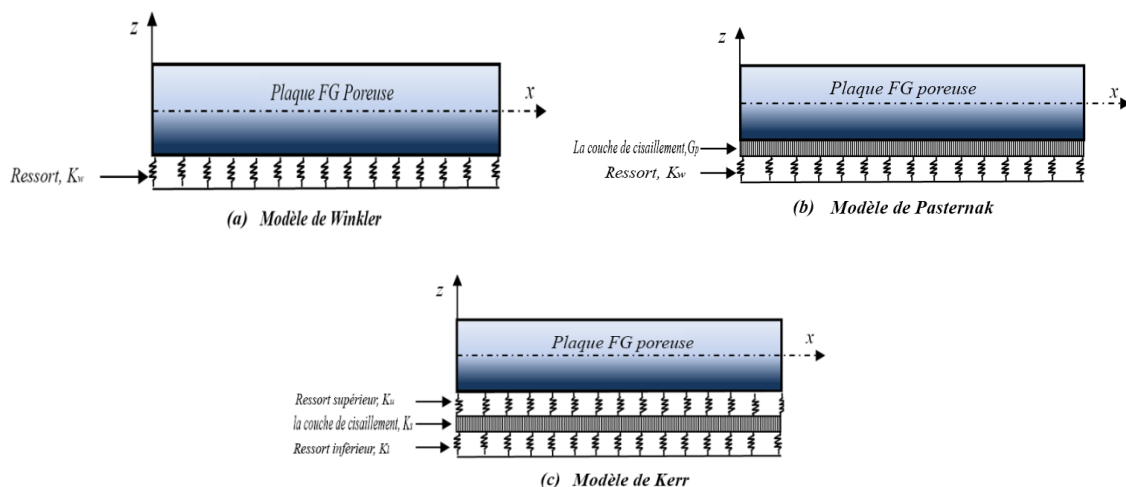


Figure.III.1 : Représentation des plaques FG reposant sur des fondations élastiques

III.2. Plaques poreuses fonctionnellement gradués :

Les micro-vides (porosité) sont une imperfection des matériaux FG se produisant pendant les étapes de fabrication de matériaux. Ils sont générés par la différence de température de solidification entre les deux matériaux qui constituent les FGM (Zhu *et al.*, 2001). De nombreux modèles de formulation de la distribution des micro-vides dans des structures fonctionnellement graduées ont été proposés. On peut citer les porosités uniformes, non uniformes, logarithmiques-non uniformes et masse volumique.

III.2.1. Plaque FG avec porosités type I (uniformes) :

Le premier modèle de distribution de la porosité a été développé par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) où la porosité est constante sur toutes les épaisseurs de la plaque FG (Fig. III.2a). Les propriétés effectives des matériaux de la plaque FG obtenues en introduisant les porosités uniformes sont données par l'équation (III.2).

$$P(z) = P_c \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - \frac{\xi}{2} \right) + P_m \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - \frac{\xi}{2} \right) \quad (\text{III.2})$$

Où ξ est le paramètre qui tient compte de l'effet de la porosité.

En appliquant l'équation (III.2) sur les propriétés effectives de la plaque FG, les formulations du module de Young " $E(z)$ ", de la densité massique " $\rho(z)$ " et du coefficient de Poisson " $\nu(z)$ " peuvent être exprimées par les équations (III.3) (Wattanasakulpong et Ungbhakorn, 2014):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \quad (\text{III.3a})$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_m - \frac{\xi}{2} (\nu_c + \nu_m) \quad (\text{III.3b})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad (\text{III.3c})$$

III.2.2. Plaque FG avec des porosités type II (non uniformes) :

L'infiltration des matériaux dans la zone intermédiaire de la plaque est très difficile et peut augmenter le risque de production de micro-vides. En revanche, l'infiltration du matériau est facile dans les surfaces libres (surfaces supérieure et inférieure) de la plaque avec un risque de production de micro-vides. Se basant sur ses considérations, Wattanasakulpong et Ungbhakorn ont développé un autre modèle de distribution des porosités (la porosité varie en

fonction de l'épaisseur). Les propriétés effectives des matériaux avec une distribution impaire (voir Fig.2b) sont données par les équations (III.4):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.4a})$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_m - \frac{\xi}{2} (\nu_c + \nu_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.4b})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.4c})$$

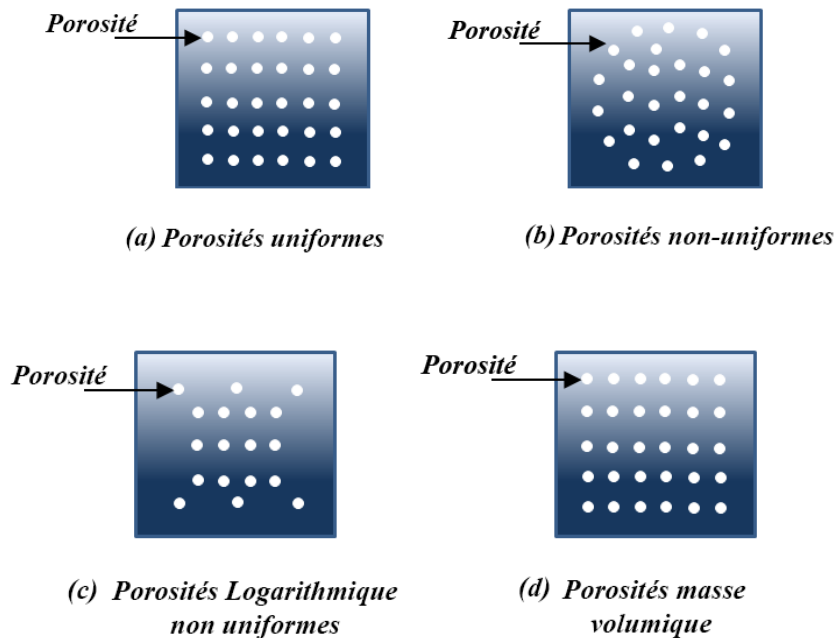


Figure.III.2 : Illustration de différents modèles de variations de la porosité.

III.2.3. Plaque FG avec porosités type III (logarithmiques- non uniformes) :

Le troisième modèle a été proposé par Gupta et Talha (2018) où la distribution de la porosité varie selon une fonction logarithmique à travers l'épaisseur de la plaque comme le montre la figure III.2c. Les propriétés effectives du matériau avec une distribution logarithmique impaire sont résumées dans les équations (III.5):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.5a})$$

$$v(z) = (v_c - v_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + v_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (v_c + v_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.5b})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.5c})$$

III.2.4. Plaque FG avec porosités type IV (masse volumique) :

Le quatrième modèle de la porosité est basé sur la densité de masse réelle et apparente. Les formulations de la masse volumique réelle et de la masse volumique apparente peuvent être traduites par l'équation (III.6):

$$m_0 = \int_h \rho(z) dz \text{ at } \xi = 0 \text{ et } m_1 = \int_h \rho(z) dz \text{ at } \xi > 0 \quad (\text{III.6})$$

Avec

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad (\text{III.7})$$

où " m_0 " et " m " sont la densité de masse réelle et apparente. En supposant que le module d'élasticité dépend de la densité du matériau, l'expression du module d'Young proposée par Eltaher et al. (2018) sera donnée par l'équation (III.8) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{m_0 - m_1}{m_0} (E_c + E_m) \quad (\text{III.8})$$

III.2.5. Plaque FG avec porosités type V :

Le cinquième modèle de la porosité à deux paramètres (ξ et φ) est utilisé pour la première fois dans l'analyse statique en faisant varier le paramètre φ ($\varphi=0,1,2,3$) afin d'obtenir différentes distribution de porosités à travers l'épaisseur. Les propriétés effectives des matériaux sont données par les équations (III.9):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)^\varphi \quad (\text{III.9a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)^\varphi \quad (\text{III.9b})$$

III.3. Cinématique:

En introduisant l'effet d'étirement sur la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (Besseglier *et al.*, 2017; Sidhoum *et al.*, 2017) et en conservant le même nombre d'inconnues qui est réduit par rapport à la théorie conventionnelle de la quasi-3D, le champ de déplacement des six inconnues de la théorie quasi-3D est donné par les équations (III.10) :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t) \quad (\text{III.10a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) \quad (\text{III.10b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \phi_z(x, y, t) \quad (\text{III.10c})$$

La théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D actuelle, à quatre inconnues, est présentée par l'équation (III.11), en considérant que $\phi_x = k_1 \int \theta(x, y, t) dx$, $\phi_y = k_2 \int \theta(x, y, t) dy$ et $\phi_z = \theta(x, y, t)$ (Bouanati *et al.*, 2019; Boukhelif *et al.*, 2019; Khiloun *et al.*, 2020).

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{III.11a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.11b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \theta(x, y, t) \quad (\text{III.11c})$$

Les fonctions de cisaillement utilisé dans ce travail sont les suivantes :

$$\textbf{Modèle 1 : } f(z) = -\left[\frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \text{ et } g(z) = \frac{2}{15} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{III.12})$$

$$\textbf{Modèle 2 : } f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{0.35z}{h}\right) - \frac{0.7z}{h\sqrt{0.35^2 + 4}} \text{ et } g(z) = \frac{1}{12} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{III.13})$$

Où les termes ($u_0; v_0; w_0$ et θ) présentent les quatre déplacements inconnus du plan médian de la plaque et les coefficients " k_1 " et " k_2 " dépendent de la géométrie.

Sur la base de la cinématique des équations (III.11), les expressions de déformations peuvent être obtenues par les équations (III.14) et (III.15).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}, \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.14})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \varepsilon_z^0 = \theta \text{ et } g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{III.15b})$$

Les intégrales indéterminées $\int \theta dx$; $\int \theta dy$; $\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx$; $\frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy$ mentionnées dans les équations précédentes doivent être résolues par la solution de Navier et peuvent être obtenues par l'équation (III.16) :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (III.16)$$

Où les coefficients " A'" et " B'" sont définis en fonction du type de la méthode employée. Dans ce cas, en utilisant la solution Navier, les termes A', B', k₁ et k₂ sont donnés par l'équation (III.17) :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, B' = -\frac{1}{\beta^2}, k_1 = -\alpha^2, k_2 = -\beta^2 \quad (III.17)$$

Avec $\alpha = m\pi/a$ et $\beta = n\pi/b$

Pour les matériaux fonctionnellement gradués, les relations de constitution linéaire (contrainte-déformation) peuvent être données par l'équation (III.18) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (III.18)$$

Où σ et τ sont les contraintes normales et de cisaillement et ε et γ sont les composantes de la déformation. Les expressions des constantes élastiques sont résumées dans les équations (III.19) et (III.20) (Shahsavari *et al.*, 2018; Sidhoum *et al.*, 2018) :

- Si l'effet d'étirement est négligeable " $\varepsilon_z = 0$ ", les constantes élastiques 2D " C_{ij} " peuvent être données par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu(z)^2)}, C_{12} = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu(z)^2)}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}, \quad (III.19)$$

- Si l'effet d'étirement est considéré comme " $\varepsilon_z \neq 0$ ", les constantes élastiques 3D " C_{ij} " peuvent être exprimées par les équations suivantes :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{1-\nu(z)}{\nu(z)} \lambda(z), C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z), C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu(z), \quad (III.20)$$

Avec

$$\lambda(z) = \frac{\nu(z) E(z)}{(1 - 2\nu(z)) (1 + \nu(z))} \quad (III.21)$$

et

$$\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$

Où $\lambda(z)$ et $\mu(z)$ représentent les coefficients de Lamé.

III.4. Équations de mouvement :

Les équations de mouvement de l'analyse des vibrations libres d'une plaque FG simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique peuvent être dérivées en utilisant le principe de l'énergie de Hamilton (HEP). La forme analytique du principe (HEP) peut être exprimée par l'équation (III.22) (Zemri *et al.*, 2015) :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V + \delta U_F - \delta K) dt = 0 \quad (III.22)$$

Où δU , δV , δU_F et δK représentent respectivement les variations de l'énergie de déformation, la variation du travail, l'énergie de déformation induite par les fondations élastiques et la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation (δU) de la plaque FG peut être réécrite conformément à l'équation (III.23) :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_{\Omega} \left[\begin{aligned} &N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b \\ &+ M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 \\ &+ S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1 \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \quad (III.23)$$

Avec A est la surface de la plaque et " N, M, S et Q " sont les résultantes des contraintes, où

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) ; N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g^1(z) \sigma_z dz \quad (III.24a)$$

$$\begin{aligned} (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} f'(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \end{aligned} \quad (\text{III.24b})$$

La variation du travail des charges extérieures est exprimée par :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA \quad (\text{III.25})$$

Les modèles de fondation élastique utilisés dans la présente étude sont illustrés dans la figure III.1. L'énergie de déformation induite par les fondations élastiques (Winkler, Pasternak et Kerr) est donnée par la relation (III.26) :

$$\begin{aligned} \delta U_F &= - \int_V \{ U_{Winkler} + U_{Pasternak} + U_{Kerr} \} dV \\ &= - (R_{Winkler} + R_{Pasternak} + R_{Kerr}) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Le modèle de Winkler

Ce modèle contient un seul paramètre (qui représente les ressorts indépendants) et peut être exprimé par l'équation (III.27) :

$$R_{Winkler} = K_w w_0 \quad (\text{III.27})$$

Où K_w est le coefficient constant de rigidité transversale du milieu élastique (appelé constante de ressort ou raideur).

Le Modèle de Pasternak

Ce modèle contient deux paramètres élastiques, le premier est le même que celui de Winkler (ressorts) et le second est un paramètre de couche de cisaillement (action de cisaillement) qui décrit l'interaction entre les parties du ressort (Shahsavari *et al.*, 2018) et la réaction de Pasternak définie par l'équation (III.28):

$$R_{Pasternak} = K_w w_0 - G_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{III.28})$$

Où G_p est la rigidité au cisaillement et ∇^2 représente les coordonnées cartésiennes rectangulaires. L'opérateur différentiel ∇^2 de Laplace est défini par l'équation (III.29) :

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad (\text{III.29})$$

Pour obtenir le modèle de la fondation Winkler à partir du modèle Pasternak, il suffit de mettre $G_p = 0$ dans l'équation (III.28).

Le modèle de Kerr

Ce modèle est composé de trois couches élastiques, des couches supérieures et inférieures indépendantes modélisées par des ressorts (avec des raideurs K_u et K_l respectivement) et une couche de cisaillement intermédiaire avec la rigidité (Shahsavari *et al.*, 2018). La réaction distribuée de ce dernier modèle (fondation de Kerr) est définie par la relation (III.30) :

$$\left(R_{Kerr} - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 R_{Kerr} \right) = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w_0 - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w_0 \quad (\text{III.30})$$

Ce type de fondation Kerr est pris en compte pour la première fois pour le champ de déplacement actuel des théories des plaques quasi-3D avec uniquement quatre inconnues.

L'expression de la variation de l'énergie cinétique δK de la plaque FG est donnée par l'équation (III.31) (Belabed *et al.*, 2018) :

$$\delta K = \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \quad (\text{III.31a})$$

$$= \int_A \left\{ \begin{array}{l} I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + J_1^{st} (\dot{w}_0 \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{w}_0) \right) \\ + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2^{st} \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) \end{array} \right\} dA \quad (\text{III.31b})$$

où $(I_i, J_i$ et $K_i)$ rassemblés sont les inerties massiques de la plaque FG et les points exposant indiquent les dérivées partielles par rapport au temps (équations 32) .

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.32a})$$

$$(J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st}) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, g, zf, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.32b})$$

En substituant l'énergie de déformation (Eq. III.23), la variation du travail (Eq. III.25), l'énergie de déformation induite par les fondations élastiques (Eq. III.26) et la variation de l'énergie cinétique (Eq. III.31) dans l'expression du principe de l'énergie de Hamilton (Eq. III.22), en intégrant par partie et en séparant les termes de déplacement ($\delta u_0; \delta v_0; \delta w_0$ et $\delta \theta$), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q - (R_{Winkler} + R_{Pasternak} + R_{Kerr}) = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + \\
& J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_0^{st} \ddot{\theta} \\
\delta \theta : \quad & -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \\
& k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - N_z + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + \\
& J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_1^{st} \ddot{w}_0 + K_2^{st} \ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{III.33}$$

En substituant l'équation (III.14) à l'équation (III.18) et les résultats obtenus à l'équation (III.24), les résultantes des efforts N, M, Q et S sont obtenues en termes de contraintes ε, k^b, k^s et γ (Eq III.34) :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \varepsilon^0 \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix} \tag{III.34a}$$

$$N_z = L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s) + R^a \varepsilon_z^0 \tag{III.34b}$$

Dans lesquelles

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{III.35a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \tag{III.35b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{III.35c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (III.35d)$$

$$Q = \{Q_{xz}^s, Q_{yz}^s\}^t, S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, \gamma^1 = \{\gamma_{xz}^1, \gamma_{yz}^1\}^t \quad (III.35e)$$

$$F^s = \begin{bmatrix} F_{55}^s & 0 \\ 0 & F_{44}^s \end{bmatrix}, X^s = \begin{bmatrix} X_{55}^s & 0 \\ 0 & X_{44}^s \end{bmatrix}, A^s = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \quad (III.35f)$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu(z)}{\nu(z)} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (III.35g)$$

Et les composantes de la rigidité $A, B, D, B^s, D^s, H^s, F^s, X^s$ et A^s sont données par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ zf(z) \\ f^2(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu(z)}{\nu(z)} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu(z)}{2\nu(z)} \end{Bmatrix} dz \quad (III.36a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (III.36b)$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} ([f'(z)]^2, f'(z)g(z), g^2(z)) dz \quad (III.36c)$$

$$(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s) = (F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) \quad (III.37d)$$

En substituant les équations (III.34) aux équations (III.33), l'équation de mouvement peut être exprimée en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées sont obtenues par les équations (III.37) :

$$\begin{aligned} & A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 \\ & + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B') + B_{12}^sk_2B')d_{122}\theta + B_{11}^sk_1A'd_{111}\theta + Ld_1\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + J_1k_1A'd_1\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (III.37a)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A') d_{112} \theta + B_{22}^s k_2 B' d_{222} \theta + L d_2 \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 k_2 B' d_2 \ddot{\theta} \quad (\text{III.37b})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} \theta + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') d_{1122} \theta + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} \theta + L^a (d_{11} \theta + d_{22} \theta) - (K_w w_0 - G_p (d_{11} w_0 + d_{22} w_0)) - \left(\left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w_0 - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) \right) + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_1^{st} \ddot{\theta} \quad (\text{III.37c})$$

$$-k_1 A' B_{11}^s d_{111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 - (B_{12}^s k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 - B_{22}^s k_2 B' d_{222} v_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} w_0 + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') d_{1122} w_0 + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} w_0 - H_{11}^s (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - H_{22}^s (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - (2H_{12}^s k_1 A' k_2 B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta + ((k_1 A')^2 F_{55}^s + 2k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s) d_{11} \theta + ((k_2 B')^2 F_{44}^s + 2k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s) d_{22} \theta - 2R(k_1 A' d_{11} \theta + k_2 B' d_{22} \theta) - L(d_1 u_0 + d_2 v_0) + L^a (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) - R^a \theta = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) + J_1^{st} \ddot{w}_0 + K_2^{st} \ddot{\theta} \quad (\text{III.37d})$$

Où les opérateurs différentiels suivants (d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm}) sont indiqués par les équations (III.38) :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.38})$$

III.5. la Solution de Navier :

Dans cette investigation, la solution Navier est utilisée pour résoudre les équations de mouvement (III.38) et assurer les conditions aux limites (simplement appuyées). La méthode de Navier peut être exprimée en doubles fonctions trigonométriques par la formule suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Et la charge mécanique est donnée par la relation suivante:

$$\{q\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{q_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y)\} \quad (\text{III.40})$$

Où ω est la fréquence de vibration libre de la plaque FG, $\sqrt{i} = -1$ l'unité imaginaire avec :

$$\alpha = m\pi / a \quad \text{et} \quad \beta = n\pi / b \quad (\text{III.41})$$

En substituant les équations (III.39) aux équations (III.37), on obtient l'équation (III.42) :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.42})$$

Où

$$S_{11} = (\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66})$$

$$S_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66})$$

$$S_{13} = -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66})$$

$$S_{14} = \alpha((k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \beta^2 + k_1 A' B_{11}^s \alpha^2 - L)$$

$$S_{22} = (\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22})$$

$$S_{23} = -\alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}$$

$$S_{24} = \beta((k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \alpha^2 + k_2 B' B_{22}^s \beta^2 - L)$$

$$S_{33} = (\alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66})) + K_w + G_p (\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) + \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$S_{34} = -(\alpha^4 k_1 A' D_{11}^s + \beta^4 k_2 B' D_{22}^s) - \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) + L^a (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$S_{44} = \alpha^4 (k_1 A')^2 H_{11}^s + \beta^4 (k_2 B')^2 H_{22}^s + (2k_1 k_2 A' B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 ((k_1 A')^2 F_{55}^s + 2k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s) + \beta^2 ((k_2 B')^2 F_{44}^s + 2k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s) - 2R(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) + R^a$$

Et

$$m_{11} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = J_1 k_1 A' \alpha,$$

$$m_{22} = I_0, \quad m_{23} = -\beta I_1, \quad m_{24} = k_2 B' \beta J_1,$$

$$m_{33} = I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) + J_1^s,$$

$$m_{44} = K_2 \left((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 \right) + K_2^s$$

III.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique du comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduée parfaites et imparfaites reposant sur une fondation élastique Winkler/Pasternak/Kerr. Une théorie hyperbolique quasi-3D à quatre variables a été utilisée, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque.

Les équations d'équilibre (mouvement) du problème actuel sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton et résolues par la solution Navier. Différentes distribution de la porosité ont été prises en considération pour décrire l'effet de la porosité dans les caractéristiques des matériaux gradués.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

IV. Introduction :

Dans cette partie, nous avons étudié la vibration libre et la flexion des plaques FG simplement appuyées avec/sans la présence des fondations élastiques (Winkler/Pasternak/Kerr).

Plusieurs exemples numériques sont étudiés afin de vérifier l'exactitude du présent modèle. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées FG sont varié en appliquant différentes distributions de porosité.

L'effet de l'indice matériel, de l'indice de porosité, du rapport de géométrie et paramètres de la fondation élastique sont évalués.

Pour l'analyse de flexion, les déplacements axiaux et transversaux et les contraintes sont évalués et pour l'analyse vibratoire, la fréquence adimensionnelle isotrope parfaite et imparfaite est calculée

IV.1. Présentation et analyse des résultats :

IV.1.1. Analyse dynamique :

Plusieurs résultats numériques des paramètres de fréquence pour une plaque FG sont présentés dans les tableaux IV (1 à 7) et les figures IV (1 à 5).

À titre de comparaison, les paramètres de fondation non dimensionnels et les fréquences naturelles fondamentales suivants sont utilisés (Wattanasakulpong et Ungbhakorn, 2014; Benahmed *et al.*, 2017):

Paramètres de fréquences adimensionnelles :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho / G}, \quad \tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m},$$

Paramètres de fondation :

$$\bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{D_{11}}, \quad \bar{G}_p = \frac{G_p a^2}{D_{11}}, \quad \bar{K}_l = \frac{K_l a^4}{D_{11}}, \quad \bar{K}_u = \frac{K_u a^4}{D_{11}}, \quad \bar{K}_s = \frac{K_s a^2}{D_{11}}$$

Avec

$$D_{11} = (E_m h^3) / (12(1 - \nu_m^2)).$$

a. Plaque isotrope

Le tableau.IV.1, montre la fréquence fondamentale non dimensionnelle " $\hat{\omega}$ " de la plaque carrée isotrope simplement appuyée avec ($h/a = 0.1$ et $E = 30.10^6$). Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par la solution 3D exacte développée par les théories quasi-3D existantes dans la littérature telles que la théorie quasi-3D à dix variables publiée par Jha, Kant et Singh, (2013), la théorie quasi-3D à six variables développée par Akavci et Tanrikulu, (2015) et les théories quasi-3D à cinq variables de (Benahmed *et al.*, 2017; Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, 2017; Shahsavari *et al.*, 2018). Le tableau IV.1 montre que la théorie

actuelle, avec seulement quatre inconnues, est en bon accord avec la solution 3D exacte et les autres théories quasi-3D.

b. Plaque fonctionnellement graduée (FGM) céramique - métal

La deuxième partie des résultats est réservée à la plaque fonctionnellement graduée. Les propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG sont l'alumine Al_2O_3 (céramique) avec le module de Young $E_c = 380\text{GPa}$ et la densité $\rho_c = 3800\text{kg/m}^3$ et le second matériau est l'aluminium Al avec le module de Young $E_m = 70\text{GPa}$ et la densité $\rho_m = 2702\text{Kg/m}^3$ et le rapport de coefficient de Poisson est $\nu = 0.3$ pour les deux matériaux (céramique et métal).

Tableau IV.1 : Fréquences fondamentales non dimensionnelle " $\hat{\omega}$ " de la plaque isotrope carrée ($a = 10$, $\nu = 0.3$, $h/a = 0.1$, $E = 30 \times 10^6$).

Modèles	Var.	Mode (m, n)						
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 3)	(2, 4)	(1, 5)
Zhou <i>et al.</i> , (2002)	-	0.0932	0.2226	0.3421	0.5239	0.6889	0.7511	0.9268
Jha, Kant et Singh, (2013)	10	0.0932	0.2226	0.3421	0.5240	0.6892	0.7515	0.9275
Akavci et Tanrikulu, (2015)	6	0.0932	0.2227	0.3424	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	5	0.0932	0.2229	0.3425	0.5248	0.6904	0.7528	0.9294
Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, (2017)	5	0.0932	0.2227	0.3423	0.5243	0.6896	0.7520	0.9284
Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	5	0.0932	0.2226	0.3421	0.5240	0.6892	0.7514	0.9274
Présente théorie (modèle 1)	4	0.0934	0.2234	0.3436	0.5264	0.6924	0.7548	0.9318

b.1 Plaque FG parfaite et simplement appuyée

Le tableau.IV.2 illustre la variation du paramètre de fréquence non dimensionnel " ω " des plaques FG carrées " $b/a = 1$ " et rectangulaires " $b/a = 2$ " simplement appuyées en fonction du rapport de géométrie " h/a " et de l'indice de puissance " p ". Les résultats trouvés par le calcul utilisant les quatre variables actuelles de la théorie quasi-3D sont comparés à ceux obtenus par les théories quasi-3D de (Mantari *et al.*, 2014; Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, 2017; Shahsavari *et al.*, 2018) et la solution 3D exacte développée par Jin *et al.*, (2014).

On peut remarquer que les résultats donnés dans le tableau IV.2 montrent une bonne corrélation entre les résultats actuels et ceux obtenus par les autres théories quasi 3D et 3D exacte et ce pour des plaques FG carrées modérément épaisses " $h/a = 0.1$ ", épaisses " $h/a = 0.2$ " et très épaisses " $h/a = 0.5$ ".

Une petite différence est constatée entre les résultats actuels et ceux obtenus par la solution 3D exacte et la théorie quasi 3D de Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, (2017) pour une plaque FG rectangulaire très épaisse. Il peut également être remarquable que le paramètre de fréquence non dimensionnel " ω " est en relation directe avec le rapport géométrique " h/a " et en relation inverse avec l'indice de puissance " p ".

Tableau.IV.2 : Fréquences fondamentales non dimensionnelle " ω " des plaques FG

h/a	Théorie	$b/a=1$			$b/a=2$		
		$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$
0.1	Jin <i>et al.</i> , (2014)	0.1135	0.0870	0.0789	0.0719	0.0550	0.0499
	Mantari <i>et al.</i> , (2014)	0.1135	0.0882	0.0806	0.0718	0.0557	0.0510
	Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, (2017)	0.1136	0.0882	0.0806	0.0719	0.0558	0.0510
	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1135	0.0882	0.0806	0.0718	0.0557	0.0510
	Présente théorie (modèle 1)	0.1138	0.0884	0.0807	0.0720	0.0558	0.0510
0.2	Jin <i>et al.</i> , (2014)	0.4169	0.3222	0.2905	0.2713	0.2088	0.1888
	Mantari <i>et al.</i> , (2014)	0.4168	0.3260	0.2961	0.2712	0.2115	0.1926
	Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, (2017)	0.4170	0.3262	0.2961	0.2714	0.2116	0.1926
	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.4168	0.3260	0.2961	0.2720	0.2115	0.1926
	Présente théorie (modèle 1)	0.4185	0.3272	0.2966	0.2724	0.2124	0.1929
0.5	Jin <i>et al.</i> , (2014)	1.8470	1.4687	1.3095	0.9570	0.7937	0.7149
	Mantari <i>et al.</i> , (2014)	1.8505	1.4774	1.3219	1.3040	1.0346	0.9293
	Farzam-Rad, Hassani et Karamodin, (2017)	1.8528	1.4788	1.3226	0.9570	0.7961	0.7193
	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	1.8503	1.4772	1.3218	1.3039	1.0345	0.9293
	Présente théorie (modèle 1)	1.8588	1.4836	1.3254	1.3110	1.0400	0.9318

b.2. Les plaques FG parfaites reposant sur une fondation élastique (Winkler-Pasternak- Kerr)

Le tableau.IV.3 présente les valeurs que nous avons trouvé concernant les fréquences fondamentales non dimensionnelles " $\bar{\omega}$ " des plaques carrées FG reposant sur les fondations Winkler-Pasternak avec $p=2.3$, $E_c/E_m=10$ et $h/a=0.1$. Les fréquences calculées à l'aide du modèle actuel sont comparées à celles données par une théorie quasi-3D avec cinq inconnues proposée par Benahmed *et al.*, (2017) et Shahsavari *et al.*, (2018), la théorie des plaques raffinée développée par Thai et Choi, (2011) et la solution exacte de Lü, Lim et Chen, (2009). D'après les résultats obtenus, on peut en conclure que le modèle actuel donne presque les mêmes résultats que la théorie des cinq variables quasi-3D et la solution 3D exacte. Nous constatons également que l'augmentation des valeurs de la constante de rigidité du ressort " \bar{K}_w " et du paramètre de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " entraîne une augmentation des fréquences fondamentales non dimensionnelles, ce qui nous permet de conclure que la présence de la fondation rend la plaque plus rigide.

Tableau.IV.3 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles " $\bar{\omega}$ " des plaques FG carrées reposant sur les fondations de Winkler-Pasternak ($p = 2.3, E_c / E_m = 10, h / a = 0.1$)

\bar{G}_p	Théorie	ε_z	Var.	\bar{K}_w			
				0	10	100	1000
0	Lü, Lim et Chen, (2009)	$\neq 0$	-	5.1295	5.1520	5.3498	7.0281
	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	$\neq 0$	5	5.1638	5.1871	5.3923	7.1262
	Thai et Choi, (2011)	$= 0$	4	5.2385	5.2605	5.4548	7.1116
	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	$\neq 0$	5	5.1556	5.1791	5.3855	7.1285
	Présente théorie (modèle 1)	$\neq 0$	4	5.1637	5.1870	5.3920	7.1250
10	Lü, Lim et Chen, (2009)	$\neq 0$	-	5.5560	5.5767	5.7600	7.3450
	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	$\neq 0$	5	5.6059	5.6274	5.8171	7.4527
	Thai et Choi, (2011)	$= 0$	4	5.6576	5.6780	5.8584	7.4257
	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	$\neq 0$	5	5.6004	5.6220	5.8127	7.4565
	Présente théorie (modèle 1)	$\neq 0$	4	5.6055	5.6269	5.8165	7.4514
25	Lü, Lim et Chen, (2009)	$\neq 0$	-	6.1404	6.1591	6.3255	7.7962
	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	$\neq 0$	5	6.2103	6.2297	6.4015	7.9172
	Thai et Choi, (2011)	$= 0$	4	6.2336	6.2521	6.4164	7.8734
	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	$\neq 0$	5	6.2080	6.2275	6.4002	7.9230
	Présente théorie (modèle 1)	$\neq 0$	4	6.2095	6.2289	6.4006	7.9157

Le tableau.IV.4 donne les variations des fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " des plaques carrées FG en fonction des rapports géométriques " h / a ", de l'indice de puissance " p " et des paramètres de rigidité de la fondation Winkler-Pasternak (\bar{K}_w, \bar{G}_p).

Les résultats actuels sont comparés à ceux présentés par Benahmed *et al.*, (2017), Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011) et Shahsavari *et al.*, (2018). Il ressort du tableau qu'une bonne concordance (adéquation) est confirmée entre les résultats actuels et ceux des modèles existants dans la littérature.

Tableau.IV.4 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " des plaques isotropes et FG carrées reposant sur les fondations de Winkler-Pasternak.

\bar{K}_w	\bar{G}_p	h / a	Théorie	p				
				0	0.5	1	2	5
0	0	0.05	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.0291	-	0.0226	0.0207	-
			Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.0290	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197
			Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0291	0.0248	0.0226	0.0206	0.0195
			Présente théorie (modèle 1)	0.0291	0.0248	0.0226	0.0207	0.0195
		0.1	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.1136	-	0.0883	0.0807	-
			Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.1134	0.0975	0.0891	0.0819	0.0767
			Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1135	0.0970	0.0882	0.0806	0.0755
			Présente théorie (modèle 1)	0.1137	0.0973	0.0883	0.0806	0.0756
		0.15	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.2461	-	0.1918	0.1748	-
			Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.2454	0.2121	0.1939	0.1778	0.1648
			Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.2459	0.2109	0.1916	0.1746	0.1622
			Présente théorie (modèle 1)	0.2466	0.2116	0.1921	0.1748	0.1624

		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.4174	-	0.3264	0.2965	-
	0.2	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.4168	0.3586	0.3260	0.2961	0.2722
		Présente théorie (modèle 1)	0.4184	0.3602	0.3272	0.2966	0.2726
100	0	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.0298	-	0.0236	0.0218	-
	0.05	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.0210
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208
		Présente théorie (modèle 1)	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208
		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.1164	-	0.0924	0.0854	-
	0.1	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.1162	0.1012	0.0933	0.0867	0.0821
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1163	0.1006	0.0923	0.0853	0.0809
		Présente théorie (modèle 1)	0.1165	0.1008	0.0924	0.0854	0.0809
		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.2524	-	0.2011	0.1855	-
	0.15	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.2519	0.2204	0.2036	0.1889	0.1775
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.2522	0.2190	0.2010	0.1855	0.1745
		Présente théorie (modèle 1)	0.2528	0.2196	0.2014	0.1856	0.1746
		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.4286	-	0.3431	0.3158	-
	0.2	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.4284	0.3734	0.3431	0.3159	0.2950
		Présente théorie (modèle 1)	0.4298	0.3748	0.3438	0.3158	0.2948
100	100	Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.0411	-	0.0386	0.0383	-
	0.05	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
		Présente théorie (modèle 1)	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.1614	-	0.1521	0.1509	-
	0.1	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.1619	0.1563	0.1542	0.1535	0.1543
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1616	0.1551	0.1525	0.1512	0.1521
		Présente théorie (modèle 1)	0.1615	0.1550	0.1523	0.1510	0.1516
		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.3537	-	0.3349	0.3323	-
	0.15	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.3560	0.3460	0.3422	0.3412	0.3427
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.3551	0.3421	0.3367	0.3342	0.3358
		Présente théorie (modèle 1)	0.3544	0.3414	0.3358	0.3328	0.3336
		Benahmed <i>et al.</i> , (2017)	0.6089	-	0.5794	0.5752	-
	0.2	Baferani, Saidi et Ehteshami, (2011)	0.6162	0.6026	0.5978	0.5970	0.5993
		Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.6137	0.5940	0.5856	0.5815	0.5843
		Présente théorie (modèle 1)	0.6118	0.5920	0.5828	0.5776	0.5784

Nous pouvons remarquer que les fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " sont en relation directe avec les rapports géométriques " h/a ". On constate aussi que l'indice de puissance " p " a une légère influence sur les fréquences fondamentales " ω ". Les résultats confirment que la présence de la fondation élastique entraîne une augmentation de la fréquence " ω ".

Tableau.IV.5 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " des plaques isotropes et FG carrées reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$).

\bar{K}_u	\bar{K}_s	h/a	Théorie	Plaque isotrope		Plaque FG			
				Céramique	Métal	$p = 0.5$	$p = 1.0$	$p = 2.0$	$p = 5.0$
100	0	0.05	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0294	0.0157	0.0253	0.0231	0.0212	0.0202
			Présente théorie (modèle 1)	0.0295	0.0158	0.0253	0.0231	0.0213	0.0202
		0.1	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1149	0.0615	0.0988	0.0903	0.0830	0.0783
			Présente théorie (modèle 1)	0.1151	0.0616	0.0991	0.0904	0.0831	0.0783
		0.15	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.2491	0.1337	0.2149	0.1964	0.1801	0.1685
			Présente théorie (modèle 1)	0.2498	0.1340	0.2156	0.1969	0.1803	0.1686
		0.2	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.4226	0.2278	0.3661	0.3347	0.3061	0.2838
			Présente théorie (modèle 1)	0.4242	0.2282	0.3676	0.3356	0.3064	0.2840
100	100	0.05	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0356	0.0285	0.0329	0.0316	0.0308	0.0305
			Présente théorie (modèle 1)	0.0356	0.0284	0.0329	0.0316	0.0308	0.0305
		0.1	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1396	0.1125	0.1294	0.1245	0.1212	0.1201
			Présente théorie (modèle 1)	0.1397	0.1123	0.1294	0.1245	0.1210	0.1198
		0.15	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.3054	0.2487	0.2824	0.2740	0.2666	0.2637
			Présente théorie (modèle 1)	0.3054	0.2476	0.2840	0.2736	0.2658	0.2624
		0.2	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.5246	0.4332	0.4906	0.4739	0.4615	0.4560
			Présente théorie (modèle 1)	0.5242	0.4306	0.4900	0.4726	0.4592	0.4522
200	100	0.05	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0375	0.0317	0.0351	0.0341	0.0335	0.0334
			Présente théorie (modèle 1)	0.0375	0.0317	0.0351	0.0341	0.0334	0.0334
		0.1	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1473	0.1255	0.1385	0.1345	0.1320	0.1316
			Présente théorie (modèle 1)	0.1473	0.1252	0.1385	0.1344	0.1318	0.1313
		0.15	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.3228	0.2779	0.3047	0.2964	0.2909	0.2897
			Présente théorie (modèle 1)	0.3226	0.2766	0.3044	0.2958	0.2898	0.2882
		0.2	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.5559	0.4850	0.5273	0.5139	0.5047	0.5024
			Présente théorie (modèle 1)	0.5550	0.4816	0.5262	0.5120	0.5018	0.4978
200	200	0.05	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.0440	0.0419	0.0427	0.0423	0.0422	0.0426
			Présente théorie (modèle 1)	0.0440	0.0419	0.0427	0.0422	0.0422	0.0426
		0.1	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.1735	0.1660	0.1687	0.1670	0.1668	0.1684
			Présente théorie (modèle 1)	0.1733	0.1655	0.1685	0.1667	0.1664	0.1679
		0.15	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.3819	0.3686	0.3728	0.3694	0.3689	0.3725
			Présente théorie (modèle 1)	0.3810	0.3664	0.3718	0.3682	0.3672	0.3700
		0.2	Shahsavari <i>et al.</i> , (2018)	0.6617	0.5511	0.6484	0.6436	0.6431	0.6494
			Présente théorie (modèle 1)	0.6590	0.5510	0.6454	0.6404	0.6386	0.6424

Le tableau.IV.5 montre l'effet de la fondation Kerr sur les fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " des plaques isotropes (toutes céramiques et toutes métalliques) et des plaques carrées FG pour diverses valeurs de l'indice de puissance " p ", des rapports de géométrie " h/a ", des paramètres de la couche supérieure des ressorts et de cisaillement (\bar{K}_u, \bar{K}_s). Les résultats calculés à l'aide de la théorie quasi-3D actuelle à quatre variables sont presque identiques à ceux donnés par la théorie quasi-3D (avec cinq inconnues) de Shahsavari *et al.*, (2018).

On peut constater dans le tableau.IV.5 que les fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω " croient avec l'augmentation des paramètres du ressort supérieur et de la couche de cisaillement (\bar{K}_u, \bar{K}_s). On peut aussi noter que la présence du ressort supérieur " \bar{K}_u " dans la fondation de Kerr rend la plaque plus rigide, et confirmer que l'indice de puissance " p " a une légère influence sur les résultats. Les plus grandes valeurs de la fréquence non dimensionnelle sont obtenues pour une plaque entièrement céramique et cela est dû à la grande rigidité de la céramique.

b.3. Les plaques FG parfaites et imparfaites reposant sur la fondation élastique Winkler-Pasternak-Kerr

Dans cette section, nous avons analysé la présence de la porosité dans le matériau qui constitue la plaque FG. Nous présentons les quatre modèles de distribution des micro-vides que nous avons examinés et que nous présentons dans cette partie.

Le tableau.IV.6 donne les résultats des effets de l'imperfection (porosité) et de la fondation Winkler-Pasternak sur les paramètres de fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG carrées minces, moyennement épaisses et épaisses avec " $p=1$ ". Il est clair que l'augmentation de la porosité en fraction de volume du modèle non uniforme et logarithmiques-non uniforme a un léger effet sur les valeurs des paramètres de fréquence " $\bar{\omega}$ " mais le modèle de porosités de la masse volumique a une influence significative lorsque le paramètre de porosité " ξ " augmente.

Tableau.IV.6 : Variations des paramètres de fréquence " $\bar{\omega}$ " des plaques carrées FG parfaites et imparfaites par rapport à la rigidité des fondations Winkler-Pasternak ($p=1$).

(\bar{K}_w, \bar{G}_p)	h/a	ξ	Porosité				Plaque parfaite
			Uniforme	Non-uniforme	Logarithmique-non uniforme	Masse volumique	
(0,0)	0.05	0.05	8.8888	9.0368	9.0368	8.6248	9.030
		0.1	8.7352	9.0456	9.0456	8.1224	
		0.15	8.5656	9.0552	9.0544	7.4713	
		0.2	8.3728	9.0656	9.0640	6.5652	
	0.1	0.05	8.6992	8.8408	8.8402	8.4432	8.836
		0.1	8.5520	8.8464	8.8458	7.9568	
		0.15	8.3898	8.8532	8.8526	7.3262	
		0.2	8.2058	8.8606	8.8594	6.4470	
	0.15	0.05	8.4131	8.5429	8.5426	8.1670	8.541
		0.1	8.2761	8.5456	8.5456	7.7040	
		0.15	8.1248	8.5494	8.5492	7.1036	
		0.2	7.9539	8.5542	8.5534	6.2656	
	0.2	0.05	8.0635	8.1795	8.1795	7.8280	8.180
		0.1	7.9385	8.1800	8.1800	7.3930	
		0.15	7.8015	8.1815	8.1810	6.8285	
		0.2	7.6450	8.1835	8.1830	6.0395	
(100,0)	0.05	0.05	9.3248	9.4560	9.4560	9.0736	9.439
		0.1	9.2032	9.4752	9.4744	8.6240	
		0.15	9.0696	9.4960	9.4936	8.0440	
		0.2	8.9192	9.5176	9.5136	7.2491	

(100,100)	0.1	0.05	9.1372	9.2608	9.2602	8.8936	9.246
		0.1	9.0216	9.2770	9.2764	8.4588	
		0.15	8.8948	9.2950	9.2932	7.8990	
		0.2	8.7532	9.3142	9.3106	7.1298	
	0.15	0.05	8.8538	8.9654	8.9654	8.6202	8.954
		0.1	8.7480	8.9797	8.9788	8.2082	
		0.15	8.6328	8.9939	8.9930	7.6783	
		0.2	8.5037	9.0108	9.0072	6.9482	
	0.2	0.05	8.5095	8.6080	8.6080	8.2865	8.598
		0.1	8.4160	8.6195	8.6190	7.9025	
		0.15	8.3140	8.6320	8.6305	7.4075	
		0.2	8.1995	8.6455	8.6430	6.7240	
(100,100)	0.05	0.05	15.6210	15.5700	15.5680	15.4710	15.435
		0.1	15.8270	15.7100	15.7030	15.4960	
		0.15	16.0580	15.8570	15.8410	15.4990	
		0.2	16.3140	16.0100	15.9810	15.4610	
	0.1	0.05	15.4150	15.3570	15.3560	15.2690	15.226
		0.1	15.6250	15.4950	15.4880	15.3030	
		0.15	15.8600	15.6390	15.6230	15.3160	
		0.2	16.1210	15.7900	15.7610	15.2900	
	0.15	0.05	15.1180	15.0520	15.0500	14.9780	14.924
		0.1	15.3340	15.1860	15.1800	15.0240	
		0.15	15.5730	15.3260	15.3100	15.0520	
		0.2	15.8380	15.4730	15.4450	15.0390	
0.2	0.05	14.7730	14.6990	14.6980	14.6420	14.574	
	0.1	14.9930	14.8300	14.8230	14.7020		
	0.15	15.2360	14.9660	14.9510	14.7430		
	0.2	15.5060	15.1080	15.0820	14.7430		

On peut également noter à partir du tableau IV.6 que le paramètre de fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " est en relation inverse avec l'indice de porosité " ξ " des modèles de porosités uniformes et de masse volumique, mais dans le cas de porosités non uniformes et logarithmiques-non uniformes, la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " croît avec l'augmentation de " ξ " même s'il dépasse la fréquence de la plaque parfaite. On conclut à nouveau que les valeurs les plus élevées de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " sont obtenues pour les plaques reposant sur une fondation élastique avec $(\bar{K}_w, \bar{G}_p = 100)$.

Les valeurs des variations des paramètres de fréquence " $\bar{\omega}$ " des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité des fondations Kerr sont présentées dans le tableau.IV.7. L'indice de loi de puissance est considéré comme égal à un " $p=1$ ", et la rigidité inférieure du ressort " $\bar{K}_l = 100$ ".

Tableau.IV.7 : La variation des paramètres de fréquence " $\bar{\omega}$ " des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité des fondations de Kerr ($p=1, \bar{K}_i=100$).

(\bar{K}_u, \bar{K}_s)	h/a	ξ	Porosité				Plaque parfaite
			Uniforme	Non-uniforme	Logarithmique-non uniforme	Masse volumique	
(100,0)	0.05	0.05	9.1096	9.2488	9.2488	8.8520	9.2368
		0.1	8.9720	9.2632	9.2624	8.3768	
		0.15	8.8208	9.2784	9.2768	7.7630	
		0.2	8.6504	9.2944	9.2912	6.9156	
	0.1	0.05	8.9210	9.0532	9.0526	8.6712	9.0434
		0.1	8.7898	9.0644	9.0638	8.2114	
		0.15	8.6464	9.0770	9.0750	7.6182	
		0.2	8.4842	9.0906	9.0874	6.7974	
	0.15	0.05	8.6365	8.7568	8.7568	8.3968	8.7496
		0.1	8.5152	8.7651	8.7648	7.9602	
		0.15	8.3827	8.7748	8.7737	7.3966	
		0.2	8.2333	8.7855	8.7833	6.6157	
	0.2	0.05	8.2895	8.3965	8.3965	8.0605	8.3915
		0.1	8.1810	8.4025	8.4020	7.6520	
		0.15	8.0620	8.4100	8.4090	7.1240	
		0.2	7.9270	8.4175	8.4160	6.3910	
(100,100)	0.05	0.05	12.7090	12.7300	12.7290	12.5250	12.645
		0.1	12.7830	12.8180	12.8140	12.3710	
		0.15	12.8690	12.9120	12.9020	12.1660	
		0.2	12.9660	13.0100	12.9910	11.8780	
	0.1	0.05	12.5160	12.5310	12.5290	12.3380	12.449
		0.1	12.5960	12.6170	12.6130	12.1960	
		0.15	12.6880	12.7080	12.6980	12.0060	
		0.2	12.7920	12.8030	12.7850	11.7340	
	0.15	0.05	12.2340	12.2380	12.2370	12.0640	12.159
		0.1	12.3210	12.3220	12.3180	11.9400	
		0.15	12.4210	12.4100	12.4000	11.7700	
		0.2	12.5330	12.5020	12.4850	11.5220	
	0.2	0.05	11.9020	11.8960	11.8940	11.7410	11.818
		0.1	11.9980	11.9760	11.9720	11.6380	
		0.15	12.1060	12.0620	12.0520	11.4920	
		0.2	12.2260	12.1510	12.1340	11.2700	

Les résultats actuels sont calculés avec différentes distributions des porosités à travers l'épaisseur de la plaque (porosités uniforme, non-uniforme, logarithmiques- non-uniforme et de masse volumique). Les résultats obtenus montrent que l'augmentation de la rigidité des fondations de Kerr (\bar{K}_u, \bar{K}_s) entraîne une augmentation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ ". Pour les modèles pairs et de masse volumique, il est confirmé que le paramètre de fréquence diminue avec l'augmentation de l'indice de porosité " ξ " mais pour les modèles non-uniforme et logarithmiques non-uniformes, cela s'inverse.

Tableau.IV.7 (continuité)

(\bar{K}_u, \bar{K}_s)	h/a	ξ	Porosité			Plaque parfaite	
			Uniforme	Non-uniforme	Logarithmique-non uniforme		Masse volumique
(200,100)	0.05	0.05	13.7480	13.7420	13.7410	13.5780	13.639
		0.1	13.8720	13.8500	13.8440	13.4940	
		0.15	14.0130	13.9620	13.9500	13.3700	
		0.2	14.1700	14.0820	14.0580	13.1810	
	0.1	0.05	13.5510	13.5380	13.5370	13.3870	13.438
		0.1	13.6810	13.6440	13.6380	13.3130	
		0.15	13.8260	13.7550	13.7420	13.2020	
		0.2	13.9890	13.8700	13.8480	13.0280	
	0.15	0.05	13.2650	13.2430	13.2420	13.1080	13.146
		0.1	13.4010	13.3450	13.3410	13.0490	
		0.15	13.5530	13.4530	13.4410	12.9570	
		0.2	13.7240	13.5660	13.5440	12.8030	
0.2	0.05	12.9300	12.8980	12.8970	12.7820	12.804	
	0.1	13.0720	12.9980	12.9920	12.7410		
	0.15	13.2320	13.1020	13.0900	12.6690		
	0.2	13.4090	13.2110	13.1900	12.5360		
(200,200)	0.05	0.05	17.138	17.0540	17.0520	17.0020	16.895
		0.1	17.406	17.2190	17.2100	17.1050	
		0.15	17.703	17.3910	17.3730	17.1980	
		0.2	18.033	17.5720	17.5380	17.2640	
	0.1	0.05	16.922	16.8320	16.8300	16.7890	16.677
		0.1	17.195	16.9950	16.9870	16.9000	
		0.15	17.495	17.1650	17.1460	17.0010	
		0.2	17.828	17.3420	17.3080	17.0770	
	0.15	0.05	16.614	16.5170	16.5140	16.4860	16.365
		0.1	16.889	16.6750	16.6670	16.6070	
		0.15	17.193	16.8400	16.8220	16.7190	
		0.2	17.53	17.0140	16.9800	16.8050	
0.2	0.05	16.259	16.1540	16.1520	16.1380	16.006	
	0.1	16.537	16.3080	16.3010	16.2700		
	0.15	16.843	16.4700	16.4520	16.3920		
	0.2	17.180	16.6380	16.6060	16.4820		

La figure.IV.1 illustre la variation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites reposant sur la fondation élastique en fonction du rapport de géométrie " a/h " et de la constante de rigidité du ressort " \bar{K}_w " avec ($\bar{G}_p = 10$ et $\xi = 0.05$). On peut remarquer sur les graphes tracés (Figure.IV.1) que la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " augmente avec l'augmentation du rapport de géométrie " a/h " et des valeurs de la constante de Winkler " \bar{K}_w ".

Il est clair dans les graphes que l'existence de la porosité (modèle de masse volumique) conduit à une diminution des valeurs de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ ".

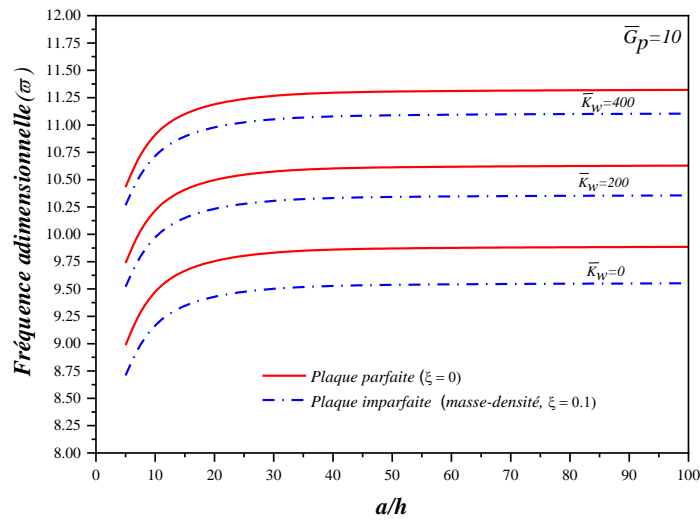


Figure.IV.1 : Variation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites en fonction du rapport géométrique " a/h " et de la constante de ressort " \bar{K}_w " avec $\bar{G}_p = 10, p = 1$ et $\xi = 0.05$

L'effet des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " et du rapport géométrique " a/h " sur la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites est représenté sur la figure.IV.2. La valeur de la constante de ressort est considérée comme " $\bar{K}_w = 100$ ". Les courbes tracées des plaques FG imparfaites ont été obtenues à l'aide d'un modèle de masse volumique avec " $\xi = 0.05$ " (Figure.IV.2).

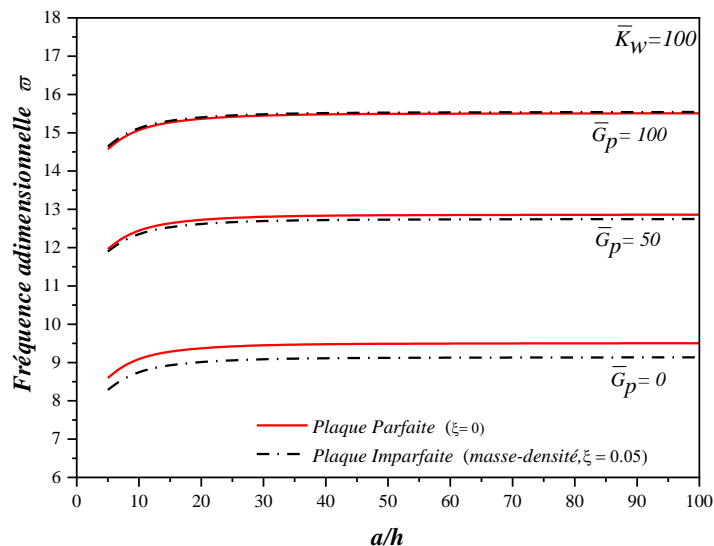


Figure.IV.2 : Effet des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " et du rapport géométrique " a/h " sur la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites avec $\bar{K}_w = 100$ et $p = 1$

Les courbes montrent que l'augmentation des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " entraîne une augmentation des valeurs de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ ". Pour les grandes valeurs de " \bar{G}_p ", nous constatons que les résultats de fréquence de la plaque parfaite et imparfaite convergent.

La variation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " de la plaque parfaite et imparfaite en fonction de l'indice de puissance " p " et de la constante de ressort " \bar{K}_w " est présentée dans la figure.IV.3. Les paramètres de la couche de cisaillement sont pris avec les valeurs de " $\bar{G}_p = 10$ " et l'indice de porosité " $\xi = 0.1$ ". On peut voir sur les courbes obtenues que les valeurs de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " diminuent avec l'augmentation de l'indice de puissance " p ". Les valeurs les plus élevées du paramètre de fréquence sont obtenues pour la plaque FG reposant sur une fondation élastique avec $\bar{K}_w = 400, \bar{G}_p = 10$.

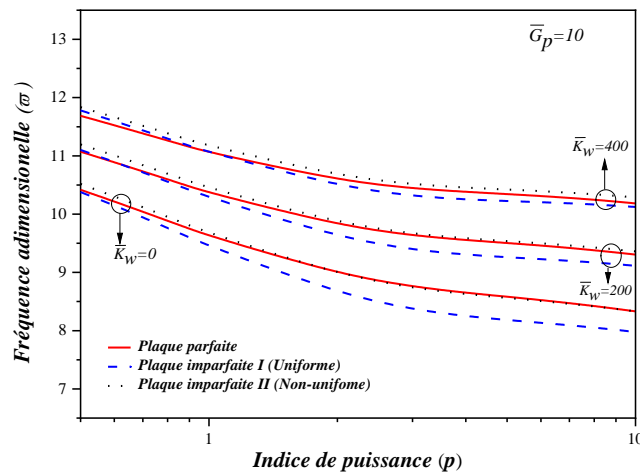


Figure.IV.3 : Variation de la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " de la plaque parfaite et imparfaite en fonction de l'indice de puissance " p " et de la constante de ressort " \bar{K}_w " avec $\bar{G}_p = 10$, $a/h = 10$ et $\xi = 0.1$.

La figure.IV.4 montre l'effet de l'indice de puissance " p " et des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " sur la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites avec $\bar{K}_w = 100$ et $\xi = 0.1$. À partir des courbes tracés (Figure.IV.4) on peut conclure que la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " est en corrélation directe avec les paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " et en relation inverse avec l'indice de puissance " p ".

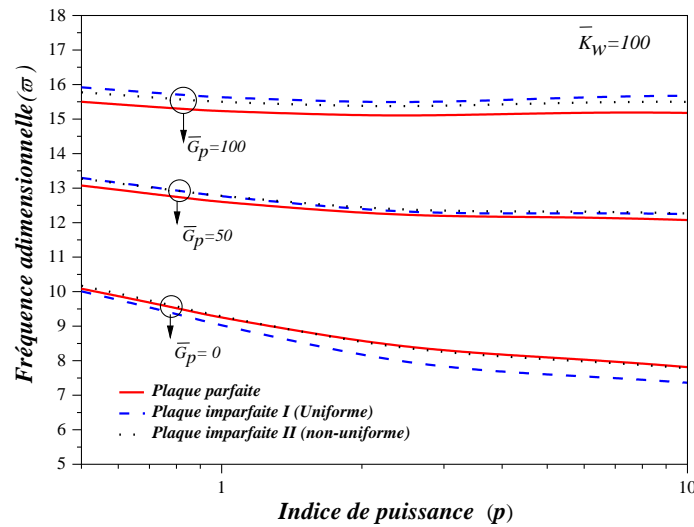


Figure.IV.4 : Effet de l'indice de puissance " p " et des paramètres de la couche de cisaillement " \bar{G}_p " sur la fréquence non dimensionnelle " $\bar{\omega}$ " des plaques FG parfaites et imparfaites avec $\bar{K}_w = 100$, $a/h = 10$ et $\xi = 0.1$.

La figure.IV.5 montre l'effet de la fondation élastique et de l'indice de porosité " ξ " sur le paramètre de fréquence " $\bar{\omega}$ ". Elle montre que la fondation élastique a un effet significatif sur la fréquence " $\bar{\omega}$ ". Il est également clair que la présence du ressort supérieur dans la fondation élastique (fondation Kerr) donne les plus grandes valeurs de fréquence " $\bar{\omega}$ " et cela est dû à l'augmentation de la rigidité de la plaque FG. On peut également en déduire que la fréquence " $\bar{\omega}$ " diminue avec l'augmentation de l'indice de porosité " ξ ".

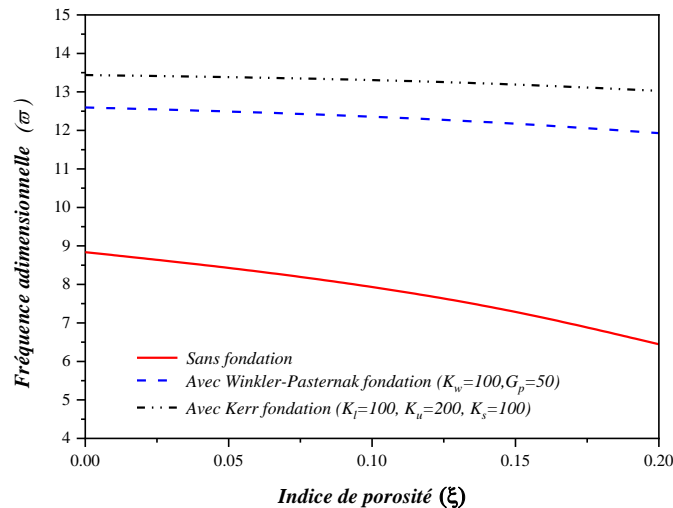


Figure.IV.5 : Effet de la fondation élastique et de l'indice de porosité " ξ " sur le paramètre de fréquence " $\bar{\omega}$ " avec $a/h = 10$ et $p = 1$.

IV.1.2. Analyse statique :

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques du comportement de flexion des plaques FG poreuses simplement appuyée sous une charge mécanique transversale.

Les déplacements (\bar{u}, \bar{v} et \bar{w}) et les contraintes ($\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{yz}$) non dimensionnels appliqués sont les suivants :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \bar{v} = \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} v\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \bar{\sigma}_y = \frac{h}{aq_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \bar{\sigma}_z = \frac{1}{q_0} \sigma_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \\ \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{aq_0} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \bar{z}\right); \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right); \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, \bar{z}\right); \bar{z} = \frac{z}{h} \end{aligned}$$

Le tableau.IV.8 présente les résultats numériques de la contrainte axiale non dimensionnelle " $\bar{\sigma}_x$ " et la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " d'une plaque carrée. Nous avons considéré trois plaques FG en prenant des plaques épaisses ($a/h = 4$), modérément épaisses ($a/h = 10$) et minces ($a/h = 100$) avec différents indices matériels. Les résultats trouvés de la théorie de la déformation de cisaillement quasi-3D ont été comparés avec les théories de déformations de cisaillement de Carrera et al., (2011), Neves et al., (2012) et Zenkour et Alghanmi, (2018).

Tableau.IV.8 : Effet de l'indice matériel " p " et du rapport géométrique " a/h " sur la flèche non dimensionnelle " \bar{w} " et la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ " de la plaque FG carrée simplement appuyée.

p	Source	ε_z	$\bar{w}(0)$			$\bar{\sigma}_x(1/3)$		
			$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$	$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$
1	Carrera <i>et al.</i> , (2011)	$\neq 0$	0.7171	0.5845	0.5624	0.6221	1.5064	14.9690
	Neves <i>et al.</i> , (2012)	$\neq 0$	0.6997	0.5845	0.5624	0.5925	1.4962	14.9690
	Zenkour, (2013)	$\neq 0$	0.6828	0.5592	0.5624	0.5944	1.4962	14.5520
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	$\neq 0$	0.6828	0.5592	0.5459	0.5945	1.4966	14.5580
	Présente théorie (modèle 2)	$\neq 0$	0.6827	0.5592	0.5459	0.5935	1.4933	14.5120
4	Carrera <i>et al.</i> , (2011)	$\neq 0$	1.1585	0.8821	0.8286	0.4877	1.1971	11.9230
	Neves <i>et al.</i> , (2012)	$\neq 0$	1.1178	0.8750	0.8286	0.4404	1.1783	11.9320
	Zenkour, (2013)	$\neq 0$	1.1001	0.8404	0.7933	0.4321	1.1410	11.3880
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	$\neq 0$	1.1001	0.8404	0.7933	0.4324	1.1416	11.3950
	Présente théorie (modèle 2)	$\neq 0$	1.1002	0.8403	0.7933	0.4305	1.1368	11.3396
10	Carrera <i>et al.</i> , (2011)	$\neq 0$	1.3745	1.0072	0.9361	0.3695	0.8965	8.9077
	Neves <i>et al.</i> , (2012)	$\neq 0$	1.3490	0.8750	0.9361	0.3227	1.1783	11.9320
	Zenkour, (2013)	$\neq 0$	1.3391	0.9806	0.9140	0.3154	0.8530	8.5853
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	$\neq 0$	1.3391	0.9806	0.9139	0.3156	0.8535	8.5914
	Présente théorie (modèle 2)	$\neq 0$	1.3390	0.9807	0.9141	0.3139	0.8491	8.5429

On peut constater qu'il y a une bonne concordance entre les résultats trouvés et les théories données. On peut également noter que la flèche non dimensionnelle est en corrélation directe avec l'indice matériel " p " et en relation inverse avec le rapport longueur/épaisseur " a/h ".

Le tableau.IV.9 présente les comparaisons des valeurs des déplacements non dimensionnels " \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} " et des contraintes " $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xz}$, $\bar{\tau}_{yz}$ et $\bar{\tau}_{xy}$ " d'une plaque FG carrée ($a/h = 10$) avec celles données par Zenkour, (2006) en utilisant une théorie généralisée de déformation de cisaillement et celle de Zenkour et Alghanmi, (2018) en utilisant le modèle RPT (théorie des plaques raffinées).

Le tableau.IV.9 montre bien que les résultats actuels (déplacements et contraintes non dimensionnels) calculés en utilisant la théorie hyperbolique de la déformation de cisaillement quasi-3D sont en accord avec celles de Zenkour, (2006) et Zenkour et Alghanmi, (2018) dans le cas de $\varepsilon_z = 0$, tandis que ces derniers sont identiques à ceux donnés par Zenkour et Alghanmi, (2018) ($\varepsilon_z \neq 0$) en utilisant la théorie des plaques raffinées en raison de l'effet de la déformation normale " ε_z " qui engendre un changement considérable. Nous pouvons confirmer à nouveau que la déflexion non dimensionnelle " \bar{w} " augmente avec l'augmentation de l'indice matériel " p ".

Tableau.IV.9 : Comparaison des déplacements et des contraintes non dimensionnels d'une plaque FG carrée simplement appuyée

p	Source	ε_c	$\bar{u}\left(-\frac{1}{4}\right)$	$\bar{v}\left(-\frac{1}{6}\right)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{1}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_y\left(\frac{1}{3}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(\frac{1}{6}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(-\frac{1}{3}\right)$
Céramique	Zenkour, (2006)	=0	0.2309	0.1539	0.2960	1.9955	1.3121	0.2132	0.2462	0.7065
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	=0	0.2183	0.1451	0.2961	1.9943	1.3124	0.2121	0.2386	0.7067
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	≠0	0.2063	0.1369	0.2881	2.0635	1.3580	0.2963	0.3333	0.7067
	Présente théorie (modèle 2)	≠0	0.2062	0.1369	0.2881	2.0726	1.3436	0.2966	0.3345	0.6688
1	Zenkour, (2006)	=0	0.6626	0.5093	0.5889	3.0870	1.4894	0.2622	0.2642	0.6110
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	=0	0.6414	0.4348	0.5592	3.0850	1.4898	0.2608	0.2386	0.6111
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	≠0	0.5710	0.4348	0.5592	3.1738	1.4966	0.3643	0.3333	0.5486
	Présente théorie (modèle 2)	≠0	0.5709	0.4347	0.5592	3.1892	1.4933	0.3646	0.3345	0.5486
2	Zenkour, (2006)	=0	0.9281	0.7311	0.7573	3.6094	1.3954	0.2763	0.2265	0.5441
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	=0	0.8984	0.7102	0.7573	3.6067	1.3960	0.2737	0.2186	0.5442
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	≠0	0.7941	0.6198	0.7158	3.6812	1.3781	0.3501	0.2796	0.4853
	Présente théorie (modèle 2)	≠0	0.7938	0.6195	0.7157	3.6999	1.3740	0.3506	0.2807	0.4852
4	Zenkour, (2006)	=0	1.0941	0.8651	0.8819	4.0693	1.1783	0.2580	0.2029	0.5667
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	=0	1.0502	0.8342	0.8815	4.0655	1.1794	0.2537	0.1944	0.5669
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	≠0	0.9365	0.7334	0.8404	4.0935	1.1416	0.2858	0.2029	0.5104
	Présente théorie (modèle 2)	≠0	0.9362	0.7331	0.8403	4.1158	1.1368	0.2866	0.2201	0.5103
10	Zenkour, (2006)	=0	1.3720	0.8756	1.0089	5.0890	0.8775	0.2041	0.2198	0.5894
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	=0	1.0766	0.8329	1.0087	5.0849	0.8785	0.2014	0.2114	0.5896
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	≠0	0.9841	0.7498	0.9806	5.0870	0.8535	0.2172	0.2279	0.5443
	Présente théorie (modèle 2)	≠0	0.9840	0.7497	0.9806	5.1137	0.8492	0.2180	0.2293	0.5442
Métal	Zenkour, (2006)	=0	1.2534	0.8356	1.6070	1.9955	1.3121	0.2132	0.2462	0.7065
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	=0	1.1810	0.7875	1.6072	1.9943	1.3124	0.2121	0.2386	0.7067
	Zenkour et Alghanmi, (2018)	≠0	1.1199	0.7433	1.5642	2.0635	1.3458	0.2963	0.3333	0.6689
	Présente théorie (modèle 2)	≠0	1.1196	0.7430	1.5640	2.0726	1.3436	0.2966	0.3345	0.6688

Les résultats de l'effet du paramètre de porosité " ξ " et de l'indice matériel " p " sur la flèche non dimensionnel " \bar{w} " de la plaque FG carrée simplement appuyée sous une charge externe " q " sont présentés dans le tableau.IV.10. Ces résultats sont obtenus en utilisant différentes distributions des micro-vides à travers l'épaisseur.

A partir de valeurs calculées en utilisant la théorie actuelle de la déformation de cisaillement quasi3-D, on observe que les valeurs des paramètres de porosité " ξ " et d'indice de matériel " p " ont un rôle important sur la flèche non dimensionnel car elle augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité " ξ ". Ainsi, il est clair que les types de distribution de la porosité entraînent différentes rigidités à la flexion, bien que les valeurs de l'indice de porosité soient les mêmes.

Tableau.IV.10 : L'effet du paramètre de porosité " ξ " et de l'indice matériel " p " sur la flèche non dimensionnel " \bar{w} " de la plaque FG carrée simplement appuyée.

Distributions	ξ	p			
		0.5	1	5	10
Uniforme $\varphi = 0$	0	0.4352	0.5592	0.8729	0.9807
	0.05	0.4568	0.5986	0.9826	1.1093
	0.1	0.4809	0.6448	1.1318	1.2843
	0.15	0.5078	0.6999	1.3508	1.5423
	0.2	0.5381	0.7668	1.7157	1.9778
Linéaire $\varphi = 1$	0.05	0.4414	0.5708	0.9063	1.0193
	0.1	0.4479	0.5830	0.9435	1.0620
	0.15	0.4546	0.5959	0.9853	1.1104
	0.2	0.4615	0.6096	1.0326	1.1651
quadratique non linéaire $\varphi = 2$	0.05	0.4382	0.5650	0.8905	1.0007
	0.1	0.4413	0.5710	0.9093	1.0221
	0.15	0.4445	0.5772	0.9295	1.0455
	0.2	0.4478	0.5836	0.9511	1.0705
cubique non linéaire $\varphi = 3$	0.05	0.4370	0.5629	0.8845	0.9937
	0.1	0.4390	0.5666	0.8966	1.0076
	0.15	0.4409	0.5705	0.9094	1.0221
	0.2	0.4429	0.5744	0.9228	1.0377

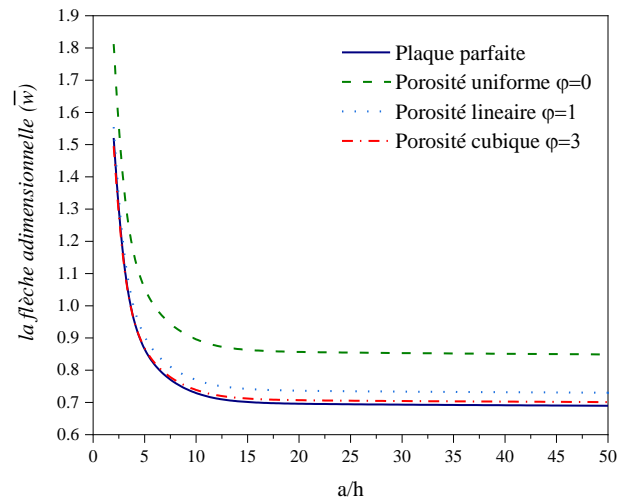


Figure.IV.6 : la variation de la flèche adimensionnelle " \bar{w} " d'une plaque FG en fonction du rapport de géométrie " a/h " et diffèrent variation de porosité " φ "

La figure.IV.6 montre la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque FG simplement appuyée avec diverses variations de porosité. D'après les courbes, la flèche " \bar{w} " est en relation inverse avec le rapport de géométrie " a/h ".

On peut également constater que la plaque avec une distribution cubique est plus rigide que les autres distributions. Il est clair que différents types de distribution de porosité entraînent une rigidité différente à la flexion bien qu'ils aient le même indice de porosité " $\xi=0.1$ ".

Les résultats des contraintes normales et tangentielles sont présentés dans les figures pour différents types de distribution de porosité (uniforme, linéaire et cubique) IV.7-IV.9.

L'influence de l'indice de porosité uniforme " ξ " sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque FG imparfaite avec ($p=2$ et $a/h=10$) est donnée dans la figure.IV.7.a. On observe que la contrainte se comprime à travers l'épaisseur de la plaque FG pour " $\bar{z} > 0.1$ " et s'avère ensuite être de la traction dans le cas " $\bar{z} < 0.1$ ". On peut en conclure que l'indice de porosité " ξ " joue un rôle important sur la contrainte axiale " $\bar{\sigma}_x$ ".

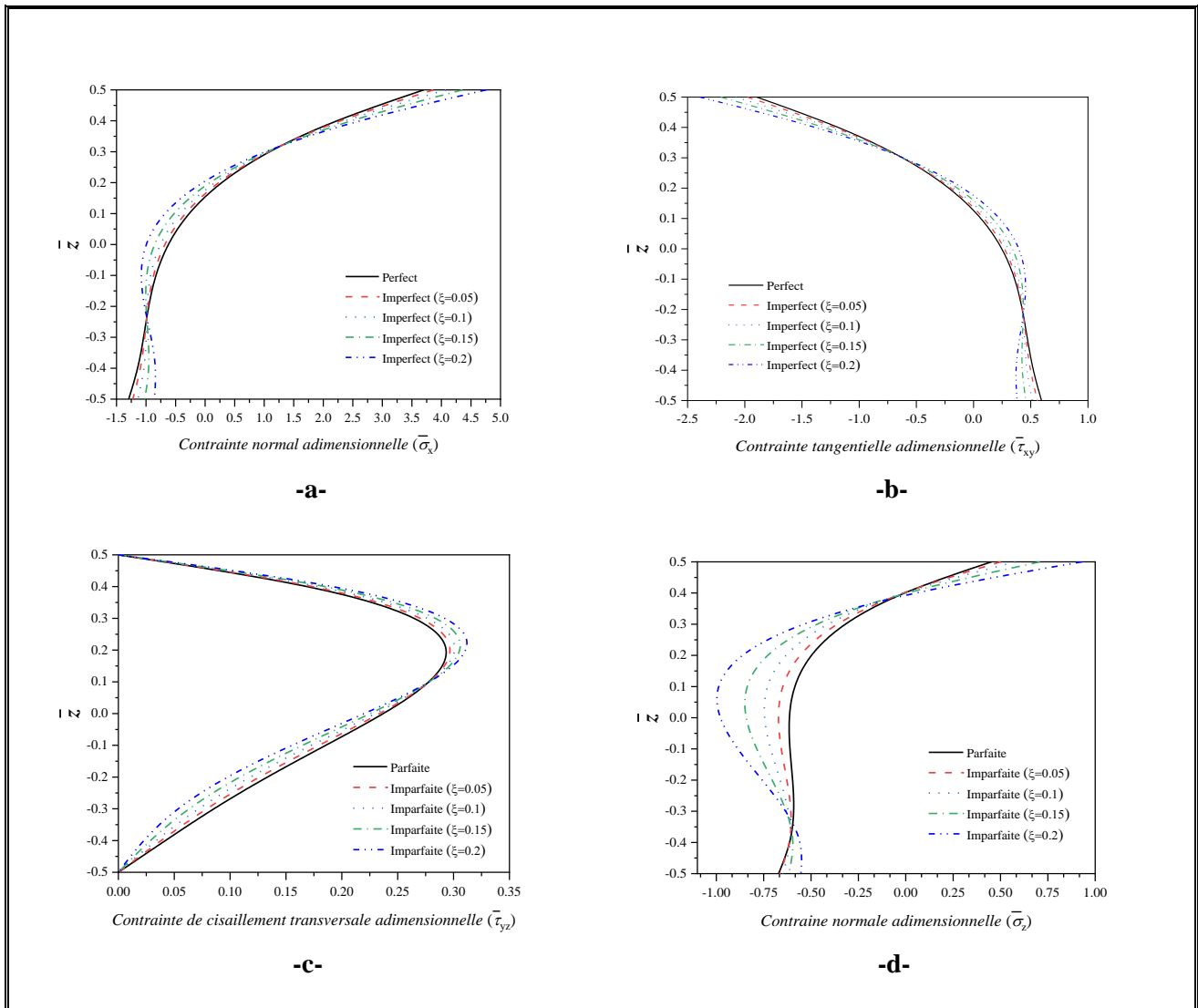


Figure.IV.7 : L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur les contraintes normales ($\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_z$) et les contraintes de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{yz}$) avec $\varphi = 0$.

La figure.IV.7.b montre la variation de la contrainte tangentielle non dimensionnelle " $\bar{\tau}_{xy}$ " sur l'épaisseur " \bar{z} " en fonction de l'indice de porosité " ξ " de la plaque FG carrée avec ($p = 2$ et $a/h = 10$) sous une charge uniforme " q ". Les courbes tracées montrent que la contrainte tangentielle " $\bar{\tau}_{xy}$ " augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité " ξ " dans l'intervalle $-0.25 < \bar{z} < 0.3$ et diminue dans les intervalles $-0.5 < \bar{z} < -0.25$ et $0.3 < \bar{z} < 0.5$. Nous pouvons conclure à nouveau que la présence des micro-vides " $\xi \neq 0$ " dans le matériau à un rôle significatif sur les contraintes.

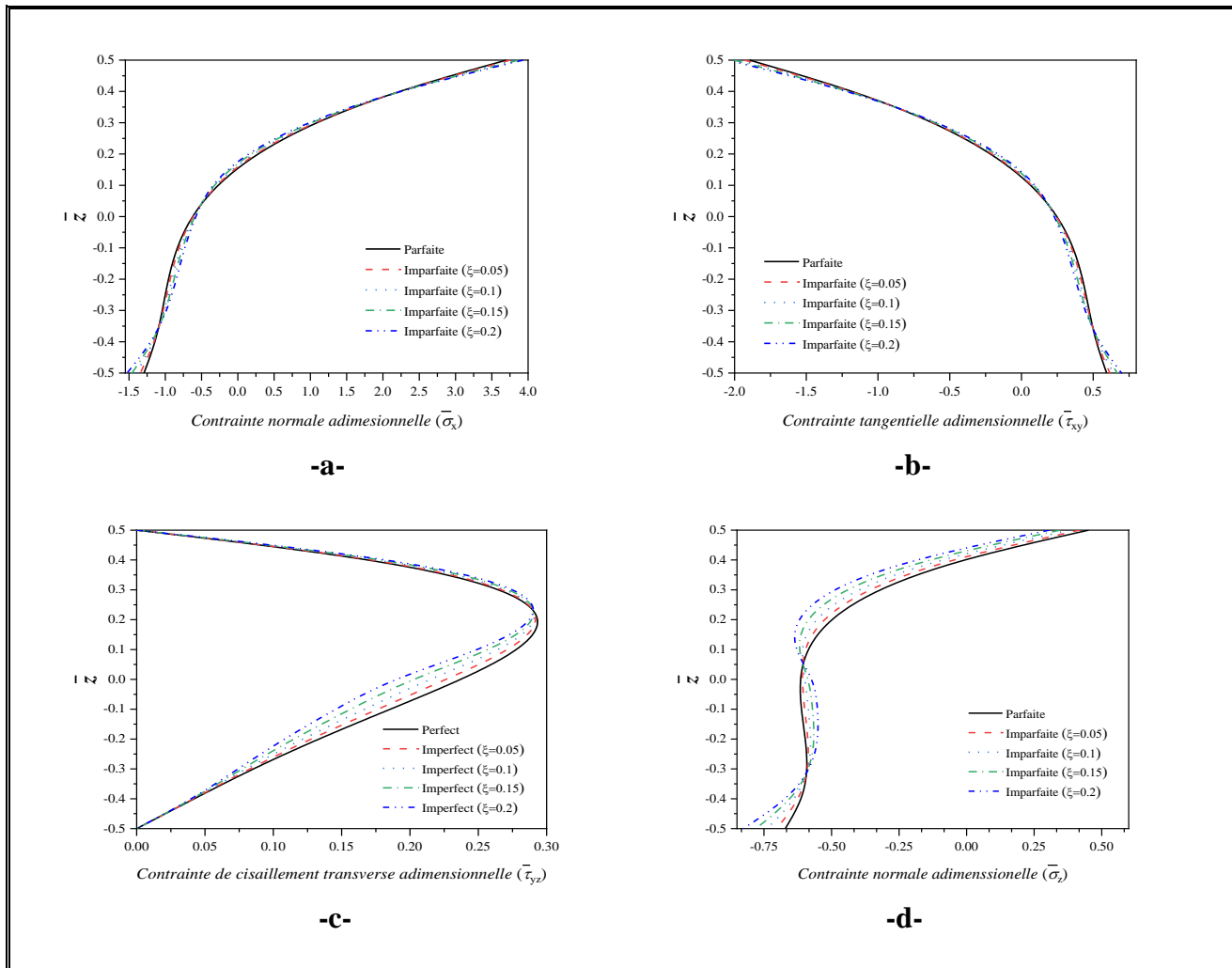


Figure.IV.8 : L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur les contraintes normales ($\overline{\sigma}_x$ et $\overline{\sigma}_z$) et les contraintes de cisaillement ($\overline{\tau}_{xy}$ et $\overline{\tau}_{yz}$) avec $\varphi = 1$.

La figure.IV.7.c montre l'effet du paramètre de porosité " ξ " sur les différentes variations de la contraintes de cisaillement transversales non dimensionnelles " $\overline{\tau}_{yz}$ " à travers l'épaisseur " z " d'une plaque FG rectangulaire simplement appuyée sous une charge uniforme avec ($p = 2$, $a/h = 10$ et $a/b = 0.5$). D'après les courbes présentées, on remarque que la plaque FG imparfaite avec le paramètre de porosité " $\xi = 0.2$ " donne une contrainte de cisaillement transversale maximale " $\overline{\tau}_{yz}$ ".

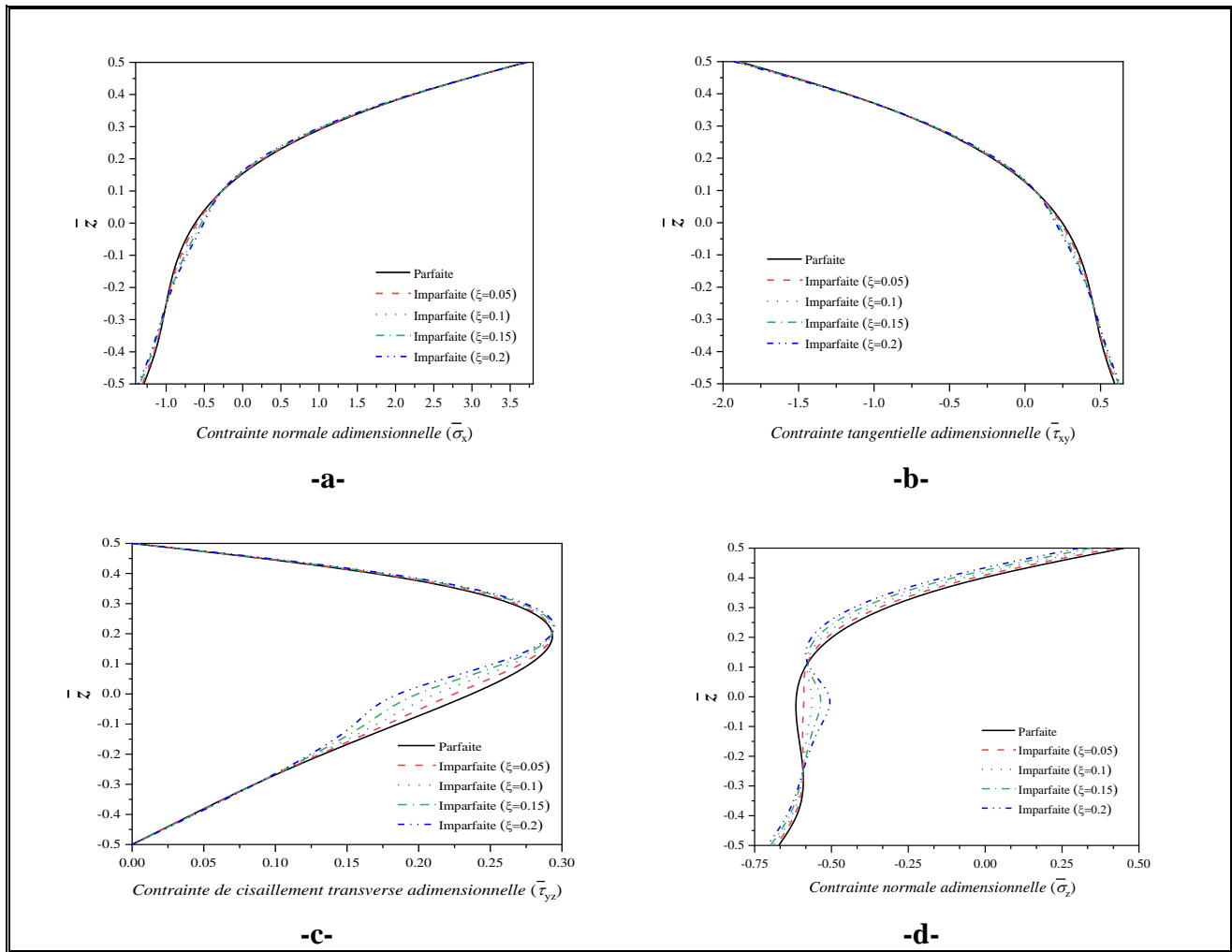


Figure.IV.9 : L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur les contraintes normales ($\overline{\sigma}_x$ et $\overline{\sigma}_z$) et les contraintes de cisaillement ($\overline{\tau}_{xy}$ et $\overline{\tau}_{yz}$) avec $\varphi = 3$.

La figure.IV.7.d illustre la distribution de la contrainte normale $\overline{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur dans des plaques FG rectangulaires imparfaites. L'influence de l'indice de porosité " ξ " sur cette contrainte est très bien représentée.

Nous remarquons que l'effet des différents type de distributions des micro-vides est très évident dans les figures IV.8 et IV.9, en particulier sur les contraintes axiales " $\overline{\sigma}_x$ " et les contraintes tangentielles " $\overline{\tau}_{xy}$ ".

On conclut que les plaques avec les distributions linéaire " $\varphi = 1$ " et cubique non linéaire " $\varphi = 3$ " sont plus rigides que celle de la distribution uniforme et avec le même indice de porosité " ξ ".

IV.4. Conclusion :

L'étude des vibrations libres et de la flexion des plaques FG s'est faite en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D dont deux modèles de fonction de cisaillement ont été appliqués.

Les propriétés mécaniques des plaques ont été prises comme variantes à travers l'épaisseur selon une loi de puissance modifiée pour inclure effet des micro-vides.

La précision et l'efficacité des modèles utilisés sont vérifiées en les comparant avec d'autres théories disponibles dans la littérature et un bon accord a été observé dans tous les exemples.

Nous pouvons enfin conclure que la présence de micro-vides dans le matériau a un effet significatif sur la flèche, les contraintes et la fréquence des plaques FG simplement appuyées.

Dans le cas de dynamique, le modèle proposé pour les plaques FG reposant sur la fondation de Kerr fournira la meilleure explication de la rigidité des plaques par rapport à celle des fondations de Winkler et Pasternak. Il a été constaté que les différentes distributions donnent des valeurs plus ou moins proches à l'exception du type I où une légère différence a été constatée.

*CONCLUSION ET
PERSPECTIVES*

Dans ce travail de thèse, une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D à quatre variables a été utilisée pour l'analyse du comportement dynamique et statique d'une plaque FG parfaite et imparfaite reposant ou non sur une fondation élastique Winkler-Pasternak-Kerr. Plusieurs distributions de porosité ont été considérées pour décrire l'effet des micro-vides dans les matériaux gradués. Les équations de mouvement (gouvernantes) sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton et résolues par des solutions de Navier. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été vérifiées et comparées à d'autres théories. Un très bon accord a été observé dans tous les exemples considérés.

Ceci permet de conclure que :

- La fréquence obtenue par le modèle 1 de la théorie hyperbolique quasi-3D montre un excellent accord avec celle obtenue par les résultats 3D exact et quasi-3D de la littérature.
- La théorie hyperbolique quasi-3D est simple et facile à appliquer puisqu'elle n'utilise que quatre variables inconnues pour déterminer les réponses vibratoires couplées (cisaillement axial-flexion-étirement).
- Les porosités à l'intérieur des matériaux ont un effet d'adoucissement de la rigidité sur la fréquence vibratoire des plaques FG. La fraction volumique des porosités joue un rôle majeur sur la fréquence de vibration des plaques FG.
- Dans le cas d'une fondation élastique de faible rigidité, la plaque FG avec le modèle masse volumique de la porosité a donné des petites valeurs de fréquences et a permis d'obtenir une plaque de faible rigidité par rapport aux autres modèles de distributions.
- Dans le cas d'une fondation élastique à haute rigidité, la plaque FG avec le modèle uniforme de répartition de la porosité a donné des fréquences naturelles les plus élevées par rapport à celle des autres modèles de porosité. Ce qui implique que la plaque FG à répartition uniforme peut atteindre la rigidité la plus élevée si la fondation élastique est un facteur déterminant.
- La couche de cisaillement de la fondation Pasternak et la couche de ressort supplémentaire de la fondation Kerr jouent des rôles importants sur la fréquence de vibration des plaques FG. Ainsi, le modèle développé pour la plaque FG reposant sur la fondation Kerr fournit la meilleure explication de rigidité par rapport à celle de la fondation Winkler et Pasternak.
- Dans le modèle 2 de la théorie hyperbolique quasi-3D, les résultats des déplacements et contraintes calculés sont identiques à ceux trouvés dans la littérature concernant les résultats des théories quasi-3D.
- La flèche adimensionnelle augmente avec l'augmentation des valeurs de l'indice matériel.
- La présence de micro-vides dans le matériau a un effet significatif sur la flèche et les contraintes des plaques FG simplement appuyées.

- Les paramètres intervenants dans les calculs tels que le rapport a/h , l'indice de matériel, l'indice de porosité et le modèle de distribution ont des effets remarquables sur le comportement statique des plaques FG.

En perspective,

- nous comptons améliorer la formulation actuelle envisagée dans les travaux futurs pour prendre en compte d'autres types de matériaux.
- utiliser des FGM dans plusieurs domaines et sous diverses sollicitations et conditions aux limites qui permettront d'élargir cette recherche vers d'autres formes géométriques, des types de chargement thermique et hygrothermique.

RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

- Abdelrahman, W. G. (2020) « Effect of material transverse distribution profile on buckling of thick functionally graded material plates according to TSDT », *Structural Engineering and Mechanics*, 74(1). doi: 10.12989/sem.2020.74.1.083.
- Addou, F. Y. et al. (2019) « Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT », *Computers and Concrete*, 24(4). doi: 10.12989/cac.2019.24.4.347.
- Akavci, S. S. et Tanrikulu, A. H. (2015) « Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories », *Composites Part B: Engineering*, 83. doi: 10.1016/j.compositesb.2015.08.043.
- Almasi, D. et al. (2016) « Functionally graded polymeric materials: A brief review of current fabrication methods and introduction of a novel fabrication method », *Materials Science and Engineering C*, 64. doi: 10.1016/j.msec.2016.03.053.
- Askari, E. et al. (2012) « Fabrication and mechanical properties of Al₂O₃/SiC/ZrO₂ functionally graded material by electrophoretic deposition », *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 12. doi: 10.1016/j.jmbbm.2012.02.029.
- Atai, A. A., Nikranjbar, A. et Kasiri, R. (2012) « Buckling and post-buckling behaviour of semicircular functionally graded material arches: A theoretical study », *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 226(3). doi: 10.1177/0954406211416179.
- Avcar, M. et Mohammed, W. K. M. (2018) « Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation », *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10). doi: 10.1007/s12517-018-3579-2.
- Baferani, A. H., Saidi, A. R. et Ehteshami, H. (2011) « Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation », *Composite Structures*, 93(7). doi: 10.1016/j.compstruct.2011.01.020.
- Bakar, W. Z. W. et al. (2018) « Functionally graded materials: An overview of dental applications », *World Journal of Dentistry*. doi: 10.5005/jp-journals-10015-1523.
- Banerjee, J. R. et Ananthapuvirajah, A. (2018) « Free vibration of functionally graded beams and frameworks using the dynamic stiffness method », *Journal of Sound and Vibration*, 422. doi: 10.1016/j.jsv.2018.02.010.
- Bao, G. et Wang, L. (1995) « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *International Journal of Solids and Structures*, 32(19). doi: 10.1016/0020-7683(94)00267-Z.
- Belabed, Z. et al. (2018) « A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate », *Earthquake and Structures*, 14(2). doi: 10.12989/eas.2018.14.2.103.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Belkhodja, Y. et al. (2020) « An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory (HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates », *Advanced Composites Letters*, 29. doi: 10.1177/0963693519875739.
- Bellifa, H. et al. (2016) « Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position », *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(1). doi: 10.1007/s40430-015-0354-0.
- Bellifa, H. et al. (2017) « An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates », *Steel and Composite Structures*, 25(3). doi: 10.12989/scs.2017.25.3.257.
- Belmonte, M. et al. (2009) « Continuous in situ functionally graded silicon nitride materials », *Acta materialia*, 57(9), p. 2607-2612.
- Benahmed, A. et al. (2017) « A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation », *Geomechanics and Engineering*, 12(1). doi: 10.12989/gae.2017.12.1.009.
- Bennoun, M., Houari, M. S. A. et Tounsi, A. (2016) « A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates », *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4). doi: 10.1080/15376494.2014.984088.
- Bessaim, A. et al. (2013) « A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets », *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15(6). doi: 10.1177/1099636213498888.
- Besseghier, A. et al. (2017) « Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory », *Smart Structures and Systems*, 19(6). doi: 10.12989/sss.2017.19.6.601.
- Biesheuvel, P. M. et al. (2001) « Graded membrane supports produced by centrifugal casting of a slightly polydisperse suspension », *Chemical engineering science*, 56(11), p. 3517-3525.
- Bohidar, S. K., Sharma, R. et Mishra, P. R. (2014) « Functionally Graded Materials: A Critical Review », *International Journal of Research*, 1(7).
- Bostancıoğlu, M. (2019) « Effect of functional grading on the performance of flexible pavements », *International Journal of Pavement Engineering*. doi: 10.1080/10298436.2019.1623403.
- Bouanati, S. et al. (2019) « Investigation of wave propagation in anisotropic plates via quasi 3D HSDT », *Geomechanics and Engineering*, 18(1). doi: 10.12989/gae.2019.18.1.085.

- Bouhadra, A. et al. (2018) « Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates », *Structural Engineering and Mechanics*, 66(1). doi: 10.12989/sem.2018.66.1.061.
- Boukhelif, Z. et al. (2019) « A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation », *Steel and Composite Structures*, 31(5). doi: 10.12989/scs.2019.31.5.503.
- Bourada, M. et al. (2015) « A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams », *Steel and Composite Structures*, 18(2). doi: 10.12989/scs.2015.18.2.409.
- Boussoula, A. et al. (2020) « A simple nth-order shear deformation theory for thermomechanical bending analysis of different configurations of FG sandwich plates », *Smart Structures and Systems*, 25(2). doi: 10.12989/sss.2020.25.2.197.
- Carrera, E. et al. (2011) « Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells », *Composites Part B: Engineering*, 42(2). doi: 10.1016/j.compositesb.2010.10.005.
- Chakraverty, S. et Pradhan, K. K. (2014) « Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh-Ritz method », *International Journal of Applied Mechanics*, 6(4). doi: 10.1142/S1758825114500434.
- Chung, Y.-L. et Chi, S. H. (2001) « The residual stress of functionally graded materials », *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 13, p. 1-9.
- Çömez, I. (2015) « Contact problem for a functionally graded layer indented by a moving punch », *International Journal of Mechanical Sciences*, 100. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.07.006.
- Croce, L. Della et Venini, P. (2004) « Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9-11). doi: 10.1016/j.cma.2003.09.014.
- Das, Shubhajit et al. (2021) « Functionally Grade Composite Material Production », in *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*. doi: 10.1016/b978-0-12-803581-8.11880-6.
- del Val, J. et al. (2017) « Functionally graded 3D structures produced by laser cladding », *Procedia Manufacturing*, 13. doi: 10.1016/j.promfg.2017.09.029.
- Delale, F. et Erdogan, F. (1983) « The crack problem for a nonhomogeneous plane », *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 50(3). doi: 10.1115/1.3167098.
- Ebrahimi, F., Mahmoodi, F. et Barati, M. R. (2017) « Thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded micro/nanoscale beams with porosities based on modified couple

- stress theory », *Advances in Materials Research (South Korea)*, 6(3). doi: 10.12989/amr.2017.6.3.279.
- Edwin, A., Anand, V. et Prasanna, K. (2017) « Sustainable development through functionally graded materials: An overview », *Rasayan Journal of Chemistry*, 10(1). doi: 10.7324/RJC.2017.1011578.
- Ekwulo, E. O. et Eme, D. B. (2009) « Fatigue and rutting strain analysis of flexible pavements designed using CBR methods », *African Journal of Environmental Science and Technology*, 3(12).
- El-Haina, F. et al. (2017) « A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates », *Structural Engineering and Mechanics*, 63(5). doi: 10.12989/sem.2017.63.5.585.
- Eltaher, M. A. et al. (2018) « Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams », *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(3). doi: 10.1007/s40430-018-1065-0.
- Fahsi, A. et al. (2017) « A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates », *Geomechanics and Engineering*, 13(3). doi: 10.12989/gae.2017.13.3.385.
- Fallah, A., Aghdam, M. M. et Kargarnovin, M. H. (2013) « Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method », *Archive of Applied Mechanics*, 83(2). doi: 10.1007/s00419-012-0645-1.
- Farzam-Rad, S. A., Hassani, B. et Karamodin, A. (2017) « Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface », *Composites Part B: Engineering*, 108. doi: 10.1016/j.compositesb.2016.09.029.
- Gayen, D., Tiwari, R. et Chakraborty, D. (2019) « Static and dynamic analyses of cracked functionally graded structural components: A review », *Composites Part B: Engineering*. doi: 10.1016/j.compositesb.2019.106982.
- Grosjean, A. (2004) « Etude et réalisation par coulage en bande et co-frittage de cellules de pile à combustible à oxydes solides ». *École Nationale Supérieure des Mines de Paris*.
- Guler, M. A. et Erdogan, F. (2004) « Contact mechanics of graded coatings », *International Journal of Solids and Structures*, 41(14). doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.02.025.
- Gupta, A. et Talha, M. (2015) « Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures », *Progress in Aerospace Sciences*. doi: 10.1016/j.paerosci.2015.07.001.

- Gupta, A. et Talha, M. (2018) « Influence of Porosity on the Flexural and Free Vibration Responses of Functionally Graded Plates in Thermal Environment », *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(1). doi: 10.1142/S021945541850013X.
- Gupta, B. (2017) « Few Studies on Biomedical Applications of Functionally Graded Material », in.
- Hebali, H. et al. (2014) « New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates », *Journal of Engineering Mechanics*, 140(2). doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000665.
- Hellal, H. et al. (2019) « Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory », *Journal of Sandwich Structures and Materials*. doi: 10.1177/1099636219845841.
- Herrmann, M. et Sobek, W. (2015) « Gradientenbeton–Numerische Entwurfsmethoden und experimentelle Untersuchung gewichtsoptimierter Bauteile », *Beton-und Stahlbetonbau*, 110(10), p. 672-686.
- Herrmann, M. et Sobek, W. (2017) « Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components », *Structural Concrete*, 18(1). doi: 10.1002/suco.201600011.
- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. et Atashipour, S. R. (2011) « A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates », *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(1), p. 11-22.
- Hu, Y. et Zhang, X. (2011) « Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate », *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 39(3). doi: 10.1080/15397734.2011.557970.
- Jamaludin, S. N. S. et al. (2013) « A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites », *Scientific Research and Essays*, 8(21), p. 828-840.
- Javaheri, R. et Eslami, M. R. (2002) « Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory », *Journal of Thermal Stresses*, 25(7). doi: 10.1080/01495730290074333.
- Jha, D. K., Kant, T. et Singh, R. K. (2013) « Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects », *Composite Structures*, 96. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.034.
- Jin, G. et al. (2014) « Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions », *Composite Structures*, 108(1). doi: 10.1016/j.compstruct.2013.09.051.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Jin, X. et al. (2009) « Microstructure and mechanical properties of ZrO₂/NiCr functionally graded materials », *Materials Science and Engineering: A*, 509(1-2), p. 63-68.
- Jones, A. C. (1998) « MOCVD of electroceramic oxides: A precursor manufacturer' s perspective », *Chemical Vapor Deposition*, 4(5), p. 169-179.
- Kaci, A. et al. (2014) « Nonlinear cylindrical bending analysis of E-FGM plates with variable thickness », *Steel and Composite Structures*, 16(4). doi: 10.12989/scs.2014.16.4.339.
- Kaddari, M. et al. (2020) « A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: Bending and free vibration analysis », *Computers and Concrete*, 25(1). doi: 10.12989/cac.2020.25.1.037.
- Karakoti, A., Pandey, S. et Kar, V. R. (2020) « Free vibration response of P-FGM and S-FGM sandwich shell panels: A comparison », in *Materials Today: Proceedings*. doi: 10.1016/j.matpr.2020.05.131.
- Karama, M., Afaq, K. S. et Mistou, S. (2003) « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », *International Journal of solids and structures*, 40(6), p. 1525-1546.
- Karami, B. et al. (2019) « Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets », *International Journal of Mechanical Sciences*, 156. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.03.036.
- Karami, B., Janghorban, M. et Tounsi, A. (2019) « Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation », *Structural Engineering and Mechanics*, 70(1). doi: 10.12989/sem.2019.70.1.055.
- Khiloun, M. et al. (2020) « Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT », *Engineering with Computers*, 36(3). doi: 10.1007/s00366-019-00732-1.
- Koizumi, M. et Niino, M. (1995) « Overview of FGM Research in Japan », *MRS Bulletin*, 20(1). doi: 10.1557/S0883769400048867.
- Kunimine, T. et al. (2016) « New processing routes for functionally graded materials and structures through combinations of powder metallurgy and casting », in *Advances in Functionally Graded Materials and Structures*. IntechOpen.
- Le Syndicat des Industriels des Céramiques Techniques (sans date). Disponible sur: <https://ceramique-technique.com/procedes/coulage>.
- Leissa, A. W. (1973) « The free vibration of rectangular plates », *Journal of Sound and Vibration*, 31(3). doi: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2.

- Li, M. Q., Zhang, F. et Feng, D. C. (2019) « Study on dynamic response of steel bridge asphalt pavement under vehicle bridge coupling (in Chinese) », *Eng Mech*, (36), p. 177-187.
- Liew, K. M., Xiang, Y. et Kitipornchai, S. (1993) « Transverse vibration of thick rectangular plates-I. Comprehensive sets of boundary conditions », *Computers and Structures*, 49(1). doi: 10.1016/0045-7949(93)90122-T.
- Liu, T. J. et Wang, Y. S. (2008) « Axisymmetric frictionless contact problem of a functionally graded coating with exponentially varying modulus », *Acta Mechanica*, 199(1-4). doi: 10.1007/s00707-007-0556-3.
- Loh, G. H. et al. (2018) « An overview of functionally graded additive manufacturing », *Additive Manufacturing*. doi: 10.1016/j.addma.2018.06.023.
- Lü, C. F., Lim, C. W. et Chen, W. Q. (2009) « Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations », *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 16(8). doi: 10.1080/15376490903138888.
- Mahamood, R. M. et Akinlabi, E. T. (2017a) « Functionally Graded Material », Springer. doi: 10.1007/978-3-319-53756-6.
- Mahamood, R. M. et Akinlabi, E. T. (2017b) « Types of Functionally Graded Materials and Their Areas of Application », in. doi: 10.1007/978-3-319-53756-6_2.
- Maimunnisa, S. et al. (2018) « Role of Centrifugal Casting on Electrochemical Corrosion Behavior of A356-SiCp Composite in 3.5 wt.% NaCl », *Journal of Materials Engineering and Performance*, 27(8). doi: 10.1007/s11665-018-3508-2.
- Makwana, A. B., Panchal, K. C. et Gandhi, A. H. (2014) « Stress analysis of functionally graded material plate with cut-out ».
- Mantari, J. L. et al. (2014) « Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT », *Composite Structures*, 118(1). doi: 10.1016/j.compstruct.2014.07.039.
- Mindlin, R. D. (1951) « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », *J. appl. Mech.*, 18, p. 31-38.
- Miteva, A. M. (2014) « An Overview of the Functionally Graded Materials », *Machines. Technologies. Materials*, 8(3).
- Moon, J. et al. (2001) « Fabrication of functionally graded reaction infiltrated SiC-Si composite by three-dimensional printing (3DPTM) process », *Materials Science and Engineering: A*, 298(1-2), p. 110-119.
- Muller, P., Mognol, P. et Hascoet, J. Y. (2013) « Modeling and control of a direct laser powder deposition process for Functionally Graded Materials (FGM) parts

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- manufacturing », *Journal of Materials Processing Technology*, 213(5). doi: 10.1016/j.jmatprotec.2012.11.020.
- Naebe, M. et Shirvanimoghaddam, K. (2016) « Functionally graded materials: A review of fabrication and properties », *Applied Materials Today*. doi: 10.1016/j.apmt.2016.10.001.
- Nairobi Duque, B., Humberto Melgarejo, Z. et Marcelo Suarez, O. (2005) « Functionally Graded Aluminium Matrix Composites Produced by Centrifugal Casting », *Materials Characterization*, 55, p. 167-171.
- Neves, A. M. A. et al. (2012) « A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates », *Composite Structures*, 94(5). doi: 10.1016/j.compstruct.2011.12.005.
- Nguyen, T. K., Sab, K. et Bonnet, G. (2008) « First-order shear deformation plate models for functionally graded materials », *Composite Structures*, 83(1). doi: 10.1016/j.compstruct.2007.03.004.
- Nikbakht, S., Kamarian, S. et Shakeri, M. (2019) « A review on optimization of composite structures Part II: Functionally graded materials », *Composite Structures*. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.01.105.
- Oruç, Ş. et Yılmaz, B. (2016) « Improvement in performance properties of asphalt using a novel boron-containing additive », *Construction and Building Materials*, 123. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2016.07.003.
- Parihar, R. S., Setti, S. G. et Sahu, R. K. (2018) « Recent advances in the manufacturing processes of functionally graded materials: A review », *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 25(2). doi: 10.1515/sectm-2015-0395.
- Petit, C., Montanaro, L. et Palmero, P. (2018) « Functionally graded ceramics for biomedical application: Concept, manufacturing, and properties », *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 15(4). doi: 10.1111/ijac.12878.
- Rabhi, M. et al. (2020) « A new innovative 3-unknowns hsdt for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions », *Geomechanics and Engineering*, 22(2). doi: 10.12989/gae.2020.22.2.119.
- Rahmani, M. C. et al. (2020) « Influence of boundary conditions on the bending and free vibration behavior of FGM sandwich plates using a four-unknown refined integral plate theory », *Computers and Concrete*, 25(3). doi: 10.12989/cac.2020.25.3.225.
- Reddy, J. N. (1999) *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
- Reddy, J. N. (2000) « Analysis of functionally graded plates », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), p. 663-684. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8.

- Reddy, J. N., Wang, C. M. et Lee, K. H. (1997) « Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories », *International Journal of Solids and Structures*, 34(26). doi: 10.1016/S0020-7683(96)00211-9.
- Reissner, E. (1945) « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *Journal of Applied Mechanics*, 12, p. 69-77.
- Rodriguez, J. et al. (2019) « Functionally graded SS 316L to ni-based structures produced by 3D plasma metal deposition », *Metals*, 9(6). doi: 10.3390/met9060620.
- Saleh, B. et al. (2019) « Effect of Main Parameters on the Mechanical and Wear Behaviour of Functionally Graded Materials by Centrifugal Casting: A Review », *Metals and Materials International*. doi: 10.1007/s12540-019-00273-8.
- Saleh, B. et al. (2020) « Review on the Influence of Different Reinforcements on the Microstructure and Wear Behavior of Functionally Graded Aluminum Matrix Composites by Centrifugal Casting », *Metals and Materials International*. doi: 10.1007/s12540-019-00491-0.
- Saleh, B. I. et Ahmed, M. H. (2019) « Development of Functionally Graded Tubes Based on Pure Al/Al₂O₃ Metal Matrix Composites Manufactured by Centrifugal Casting for Automotive Applications », *Metals and Materials International*. doi: 10.1007/s12540-019-00391-3.
- Sato, M., Inoue, A. et Shima, H. (2017) « Bamboo-inspired optimal design for functionally graded hollow cylinders », *PLoS ONE*, 12(5). doi: 10.1371/journal.pone.0175029.
- Shahrjerdi, A. et al. (2011) « Fabrication of functionally graded hydroxyapatite-titanium by applying optimal sintering procedure and powder metallurgy », *International Journal of Physical Sciences*, 6(9), p. 2258-2267.
- Shahsavari, D. et al. (2018) « A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation », *Aerospace Science and Technology*, 72. doi: 10.1016/j.ast.2017.11.004.
- Shahsavari, D. et Janghorban, M. (2017) « Bending and shearing responses for dynamic analysis of single-layer graphene sheets under moving load », *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 39(10). doi: 10.1007/s40430-017-0863-0.
- Shanmugavel, P. et al. (2012) « An overview of fracture analysis in Functionally Graded Materials », *European Journal of Scientific Research*.
- Shen, H. S. (2002) « Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments », *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(3). doi: 10.1016/S0020-7403(01)00103-5.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Shimpi, R. P. (2002) « Refined plate theory and its variants », *AIAA Journal*, 40(1). doi: 10.2514/2.1622.
- Shimpi, R. P. et Patel, H. G. (2006) « Free vibrations of plate using two variable refined plate theory », *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5). doi: 10.1016/j.jsv.2006.03.030.
- Sidhoum, I. A. et al. (2017) « An original HSDT for free vibration analysis of functionally graded plates », *Steel and Composite Structures*, 25(6). doi: 10.12989/scs.2017.25.6.735.
- Sidhoum, I. A. et al. (2018) « A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of simply supported functionally graded plates », *Smart Structures and Systems*, 22(3). doi: 10.12989/sss.2018.22.3.303.
- Singh, A. K. et Siddhartha (2018) « A novel technique for manufacturing polypropylene based functionally graded materials », *International Polymer Processing*, 33(2). doi: 10.3139/217.3449.
- Sofiyev, A. H. et Avcar, M. (2010) « The Stability of Cylindrical Shells Containing an FGM Layer Subjected to Axial Load on the Pasternak Foundation », *Engineering*, 02(04). doi: 10.4236/eng.2010.24033.
- Steffens, H. D., Dvorak, M. et Wewel, M. (1990) « Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications », in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM*, p. 139-143.
- Takahashi, M. (1990) « Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique », in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM' 90-Sendai-Japan*, p. 129-134.
- Texier, D. (2013) *Mesure et Evolution des gradients de propriétés mécaniques dans le système superalliage à base de nickel MC2 revêtus MCrAlY*. Disponible sur: <http://www.theses.fr/2013INPT0010/document>.
- Thai, H. T. et al. (2014) « A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates », *Acta Mechanica*, 225(3). doi: 10.1007/s00707-013-0994-z.
- Thai, H. T. et Choi, D. H. (2011) « A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation », *Composites Science and Technology*, 71(16). doi: 10.1016/j.compscitech.2011.08.016.
- Thai, H. T. et Kim, S. E. (2013) « A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates », *Composite Structures*, 99. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.11.030.
- Timoshenko, S. P. et Woinowsky-Krieger, S. (1959) *Theory of plates and shells*. McGraw-hill.

- Tounsi, A. et al. (2013) « A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates », *Aerospace Science and Technology*, 24(1). doi: 10.1016/j.ast.2011.11.009.
- Tripathy, A., Sarangi, S. K. et Panda, R. (2017) « Fabrication of functionally graded composite material using powder metallurgy route: An overview », *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development*. doi: 10.24247/ijmperdddec201714.
- Udupa, G., Rao, S. S. et Gangadharan, K. V. (2014) « Functionally Graded Composite Materials: An Overview », *Procedia Materials Science*, 5. doi: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
- Wang, L. B., Hou, Y. et Zhang, L. (2017) « A combined static-and-dynamics mechanics analysis on the bridge deck pavement », *J Cleaner Product*, (166), p. 209-220.
- Watanabe, Y., Yamanaka, N. et Fukui, Y. (1998) « Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method », *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 29(5-6), p. 595-601.
- Wattanasakulpong, N. et Ungbhakorn, V. (2014) « Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities », *Aerospace Science and Technology*, 32(1). doi: 10.1016/j.ast.2013.12.002.
- Yang, J., Liew, K. M. et Kitipornchai, S. (2004) « Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory », *Computational Mechanics*, 33(4). doi: 10.1007/s00466-003-0533-1.
- Yin, S. et al. (2018) « Hybrid additive manufacturing of Al-Ti6Al4V functionally graded materials with selective laser melting and cold spraying », *Journal of Materials Processing Technology*, 255. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2018.01.015.
- Zaoui, F. Z., Ouinas, D. et Tounsi, A. (2019) « New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations », *Composites Part B: Engineering*, 159. doi: 10.1016/j.compositesb.2018.09.051.
- Zarga, D. et al. (2019) « Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory », *Steel and Composite Structures*, 32(3). doi: 10.12989/scs.2019.32.3.389.
- Zemri, A. et al. (2015) « A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: An assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory », *Structural Engineering and Mechanics*, 54(4). doi: 10.12989/sem.2015.54.4.693.
- Zeng, Y., Jiang, D. et Watanabe, T. (2000) « Fabrication and Properties of Tape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina–Titanium Carbide Materials », *Journal of the American Ceramic Society*, 83(12), p. 2999-3003.

- Zenkour, A. M. (2006) « Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates », *Applied Mathematical Modelling*, 30(1). doi: 10.1016/j.apm.2005.03.009.
- Zenkour, A. M. (2013) « A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates », *Applied Mathematical Modelling*, 37(20-21). doi: 10.1016/j.apm.2013.04.022.
- Zenkour, A. M. (2014) « Simplified theory for hygrothermal response of angle-ply composite plates », *AIAA Journal*, 52(7). doi: 10.2514/1.J052631.
- Zenkour, A. M. (2015) « Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory », *Composite Structures*, 122. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.11.064.
- Zenkour, A. M. et Alghanmi, R. A. (2018) « Bending of functionally graded plates via a refined quasi-3D shear and normal deformation theory », *Curved and Layered Structures*, 5(1). doi: 10.1515/cls-2018-0014.
- Zhang, B. et al. (2018) « Additive Manufacturing of Functionally Graded Material Objects: A Review », *Journal of Computing and Information Science in Engineering*. doi: 10.1115/1.4039683.
- Zhang, C. et al. (2019) « Additive manufacturing of functionally graded materials: A review », *Materials Science and Engineering A*, 764. doi: 10.1016/j.msea.2019.138209.
- Zhou, C. et al. (2018) « A novel approach for fabrication of functionally graded W/Cu composites via microwave processing », *Journal of Alloys and Compounds*, 743. doi: 10.1016/j.jallcom.2018.01.372.
- Zhou, D. et al. (2002) « Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method », *International Journal of Solids and Structures*, 39(26). doi: 10.1016/S0020-7683(02)00460-2.
- Zhu, J. et al. (2001) « Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy », *Materials Chemistry and Physics*, 68(1-3). doi: 10.1016/S0254-0584(00)00355-2.
- Zidi, M. et al. (2017) « A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams », *Structural Engineering and Mechanics*, 64(2). doi: 10.12989/sem.2017.64.2.145.
- Zine, A. et al. (2020) « Bending analysis of functionally graded porous plates via a refined shear deformation theory », *Computers and Concrete*, 26(2). doi: 10.12989/cac.2020.26.2.161.