

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : YOUSFI Mahfoud

Intitulé de la thèse

**Etude de l'effet de porosités sur le comportement
mécanique des structures FGM**

Soutenu le : 28 /12 /2020 Composition du jury :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Président
MERADJAH Mustapha	Pr	UDL SBA	Directeur de thèse
AIT ATMANE Hassen	Pr	UHBC Chlef	Co-Directeur de thèse
BOURADA Mohamed	Pr	UDL SBA	Examineur
SADOUNE Mohamed	MCA	UMS Mascara	Examineur
BELABED Zakaria	MCA	CUSA Naama	Examineur

Année universitaire 2020-2021

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier et en premier lieu **ALLAH**, le Tout Puissant et Miséricordieux de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Monsieur **MERADJAH Mustapha** Maître de conférences à l'UDL de Sidi Bel Abbès pour son encadrement scientifique très riche et le suivi efficace et dynamique, son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier également Monsieur **AIT ATMANE Hassen**, Professeur à l'UHB de Chlef, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Je tiens aussi à rendre hommage au Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbès, pour son intérêt à mon travail et je lui exprime mon honneur ainsi que mes gratitude d'être président de jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements vont également à Messieurs : **BOURADA Mohamed** Maître de conférences à l'UDL de Sidi Bel Abbés, **SADOUNE Mohamed** Maître de conférences à l'UMS de Mascara et **BELABED Zakaria** Maîtres de conférences au CUSA de Naama, qui ont voulu examiner ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur **BENNAI Riadh** Maître de conférences à l'Université de Chlef, pour toute l'aide qu'il m'a apportée et sa disponibilité tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier ma famille et mes amis, pour le soutien continu qu'ils m'ont apporté tout aux longs de ces années d'études.

Résumé

Dans cette étude, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre élevé avec quatre variables est présentée pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques poreuse fonctionnellement graduées. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les solutions analytiques pour une plaque fonctionnellement graduée simplement appuyée et soumise à une charge transversale sont obtenues et déterminées par les solutions de Navier. Une comparaison avec les résultats correspondants à la littérature est faite pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle.

Mots clés : Plaques fonctionnellement gradués; Vibration libre ; Porosité; Déformation de cisaillement d'ordre élevées.

ملخص

في هذه الدراسة، تم تقديم نظرية جديدة لتشوه القص عالي الترتيب مع أربعة متغيرات لتحليل السلوك الاهتزازي للألواح المسامية المتدرجة وظيفياً. يتم الحصول على معادلات الحركة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي. يتم الحصول على الحلول التحليلية للوحة متدرجة وظيفياً يتم دعمها وتعريضها للحمل العرضي وتحديدتها بواسطة حلول نافبي. يتم إجراء مقارنة مع النتائج السابقة للتحقق من دقة وفعالية النظرية الحالية.

الكلمات المفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفياً، الإهتزاز الحر، المسامية، تشوه القص عالي الترتيب

Abstract

In this study, a new theory of high-order hyperbolic shear deformation with four variables is presented for the analysis of the vibrational behavior of functionally graduated porous plates. The equations of motion are obtained using the principle of virtual work. The analytical solutions for a functionally graduated plate simply supported and subjected to a transverse load are obtained and determined by Navier solutions. A comparison with the results corresponding to the literature is made to verify the accuracy and effectiveness of the current theory.

Keywords: Functionally graded plate; Free vibration; Porosity; Higher-order shear deformation.

Table des matières

Résumé	
ملخص	
Abstract	
Table des Matières	
Liste des Figures	
Liste des Tableaux	
Liste des Notations	
Introduction Générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM	5
I.1. Introduction.....	5
I.2. Concept des matériaux FGM	5
I.3. Différences entre matériaux à fonctionnellement gradués et matériaux composites traditionnels :	8
I.4. Historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués.....	9
I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux fonctionnellement gradués.....	10
I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting).....	10
I.5.2 Compaction sèche des Poudres.....	10
I.5.3 Projection plasma	11
I.5.4 Frittage et Infiltration	11
I.6. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués	11
I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	12
I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	13
I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	14
I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	15
I.8. Conclusion	16
Chapitre II : Les théories des structures FGM	17
II.1. Introduction	17
II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....	17
II.2.1. Approche monocouche équivalente	17
a. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT).....	18
b. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT).....	18
c. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur.....	20
II.2.2. Approche par couche.....	23

a. Les modèles zig-zag	24
b. Les modèles couches discrètes	26
II.2.3. Modèle éléments finis de structure multicouche:.....	27
a. Modèles éléments finis 2D	27
c. Modèles éléments finis 3D	29
II.3. Conclusion.....	30
Chapitre III Les matériaux impropres (poreux).....	31
III.1. Définition de la porosité.....	31
III.2. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau.....	32
III.3. Causes possibles d'apparition de la porosité.....	34
III.3.1. Les causes mécaniques	34
III.3.2. Les causes thermodynamiques.....	37
III.4. Quantification de la porosité	40
III.4.1. La micro-tomographie	41
III.4.2. Les ultrasons	41
III.4.3. La dégradation chimique	42
III.4.4. L'analyse d'images.....	43
III.5. Conclusion	45
Chapitre IV : Étude analytique des vibrations des plaques FGM.....	46
IV.1. Introduction.....	46
IV.2. Propriétés des matériaux constitutifs de FGM	46
IV.3. Equations fondamentales	48
IV.3.1 Cinématique et déformations.....	48
IV.3.2 Equations de mouvement.....	50
IV.3.3 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées.....	53
IV.4. Conclusion	55
Chapitre V : Validation et comparaison des résultats	56
V.1. Introduction.....	56
V.2. Résultats numériques et discussion	56
V.3. Comparaison entre les plaques en FGM.....	71
V.4. Conclusions	78

Liste des figures

Figure I.1 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués [Houari M.S.A., 2011]	7
Figure I.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et non FGM [Houari M.S.A., 2011].....	8
Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi. M., 1996]	8
Figure I.4 : Formes de conversion d'énergies convertes par la partie II de projet de FGM [Koizumi. M., 1996]	10
Figure I.5 : Les principaux domaines d'application des FGM.....	12
Figure I.6 : Géométrie d'une plaque en FGM	13
Figure I.7 : Variation de fraction volumique dans une plaque P-FGM	14
Figure I.8 : Variation de fraction volumique dans une plaque S-FGM	15
Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	16
Figure II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.	18
Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	19
Figure. II.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.....	20
Figure .II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.	21
Figure. II.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen V.T., 2004]	23
Figure. II.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Nguyen V.T., 2004].....	24
Figure. II.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Nguyen V.T., 2004].....	24
Figure. II.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [Nguyen V.T., 2004].....	25
Figure II. 9: Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds (Polit, 1997).	28
Figure II.10 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds (Nguyen V.T., 2004).	28
Figure II.11 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds.....	29
Figure II.12 : Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires (Nguyen V.T., 2004)	29
Figure.II.13: Élément d'interface. [Bui V.Q., 2000].....	30
Figure III.1: (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. [Ledru Y., 2009]	32
Figure III.2 : Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy [Wisnom M.R., 1996].....	33
Figure III.3 : Formation des macros et micros porosités en fonction de la vitesse de déplacement du fluide lors de l'imprégnation d'un renfort : (a) force de capillarité prédominante, (b) force de viscosité prédominante [Trochu F., 2006]	35

Figure III.4 : Comparaison des résultats expérimentaux et numériques donnant la position du front d'une huile silicone injectée de manière 'demi-sphérique' dans un renfort anisotrope [Trochu F., 2006].	36
Figure III.5 : (a) machine automatique à placement de nappes, (b) Tête de la machine à placement de fibres. ...	37
Figure III.6 : Enthalpie libre d'activation de nucléation homogène en fonction du rayon du germe [Veesler S., 2005].	39
Figure III.7 : Principe de la méthode de contrôle non destructif par ultrasons de la qualité d'une pièce stratifiée. Le graphe présenté correspond à des séries successives de C-Scan, avec F, D et B les réponses respectives données par la réflexion de l'onde sur la surface, l'intérieur et le fond de la pièce [Liu L., 2006].	42
Figure IV.1 : La géométrie et les coordonnées de la plaque FGM.	46
Figure V. 1 : Influence de l'indice de puissance de la plaque imparfaite ($\alpha = 0,1$) sur la fréquence, (a) $a / h = 5$ et (b) $a / h = 100$.	65
Figure V.2 : Influence du rapport d'épaisseur de la plaque imparfaite ($\alpha = 0.1$) sur la fréquence, (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$.	66
Figure V.3 : Effet de l'indice de puissance de la plaque carrée FG sur le paramètre de fréquence fondamentale, (a) $a / h = 5$ et (b) $a / h = 100$.	67
Figure V.4 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur a / h et du coefficient de porosité α , (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$.	68
Figure V.5 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la porosité pour différents rapports d'épaisseur a / h , (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$.	69
Figure V.6 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique (a/b) et du coefficient de porosité α , (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$.	70
Figure V.7 : Comparaisons des fréquences adimensionnelles en fonction de l'indice de puissance des plaques en FGM 1 (AL/AL_2O_3), FGM 2 (AL/ZrO_2) et FGM 3 (AL/SiC), $a/h = 5$, (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0,1$ et (c) $\alpha = 0,2$...	74
Figure V.8 : Comparaisons des fréquences adimensionnelles en fonction du rapport d'épaisseur des plaques en FGM 1 (AL/AL_2O_3), FGM 2 (AL/ZrO_2) et FGM 3 (AL/SiC), $P = 1$, (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0,1$ et (c) $\alpha = 0,2$.	76
Figure V.9 : Comparaisons des fréquences adimensionnelles en fonction de la porosité des plaques en FGM 1 (AL/AL_2O_3), FGM 2 (AL/ZrO_2) et FGM 3 (AL/SiC), $P = 1$, (a) $a/h = 5$, (b) $a/h = 10$ et (c) $a/h = 20$.	78

Liste des tableaux

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	6
Tableau V.1 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale β de la plaque carrée Al / ZrO ₂	57
Tableau V.2 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle β de la plaque carrée Al / Al ₂ O ₃	57
Tableau V.3 : Comparaison du paramètre de fréquence \square de la plaque rectangulaire Al / Al ₂ O ₃ (b = 2a)	60
Tableau V.4 : Neuf premiers paramètres de fréquence de la plaque carrée Al / Al ₂ O ₃ (a / h = 5)	63
Tableau V.5 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle β des trois types de plaques en FGM	71

Liste des notations

E	Module de Young
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
w	Déplacement transversale
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
P	Paramètre du matériau
α	Fraction volumique de porosité
V_c	Fraction volumique de la céramique
V_m	Fraction volumique du métal
ρ	La masse volumique
ρ_c	La masse volumique de la céramique
ρ_m	La masse volumique du métal
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x,y,z.
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$f(z)$	La fonction de forme
∂	Dérivée partielle
σ_x, σ_y	Contrainte normale
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformation normal
δU	La variation de l'énergie de déformation
δV	La variation du travail externe
δK	La variation de l'énergie cinétique
N_x, N_y, N_{xy}	Les efforts normaux

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Les moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Les moments supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
$q_{(x,y)}$	La charge transversale
I_l, J_l, K_l	Inerties de masse
ω	La fréquence de vibration libre
a	Longueur de la plaque suivant la direction de x.
b	Largeur de la plaque suivant la direction de y.
h	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.
A	La surface supérieure
{ }	Vecteur colonne
[]	Matrice
FGM	Matériau fonctionnellement graduée
Al	Aluminium
Al_2O_3	Alumine
ZrO_2	Zircone
SiC	Carbure de silicium
CLPT	La théorie classique de la plaque laminée
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
ESDPT	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.
TSDT	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Introduction Générale

Les matériaux à gradients de propriétés ou les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais : **Functionally Graded Materials**) constituent une nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant dans les trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la mécanique, la médecine, le génie civil, l'électricité, le nucléaire, etc. (Bouderba et al. 2013, Tounsi et al. 2013, Kar et Panda 2013, 2014, Ahmed 2014, Zidi et al. 2014, Kar et Panda 2015a, b, c, d, Zemri et al. 2015, Taibi et al. 2015, Kar et al. 2016, Boukhari et al. 2016, Bounouara et al. 2016, Kar and Panda 2016a, b, c, d, e, Aldousari 2017, Abdelaziz et al. 2017, Sekkal et al. 2017a, Kar et al. 2017, Kar and Panda 2017, Bellifa et al. 2017a, Benadouda et al. 2017, Mouffoki et al. 2017, Attia et al. 2018, Shahsavari et al. 2018, Zine et al. 2018, Kaci et al. 2018, Fourn et al. 2018). Ce sont les Japonais, en 1984, qui ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants (Koizumi 1997). En général, les FGM sont des matériaux multicouches fabriqués par différents composants tels que la céramique et le métal. L'utilisation de ce type de matériaux dans les structures nécessite une bonne compréhension du comportement mécanique des structures en FGM afin d'offrir un profil optimum aux concepteurs. Pour cela, plusieurs travaux concernant l'étude du comportement mécanique des plaques en FGM sont annoncés sur l'analyse du comportement dynamique des structures en FGM. Par exemple, Reddy (2000) a analysé le comportement statique des plaques rectangulaires en FGM sur la base de la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre. Reddy et Cheng (2001) ont présenté un modèle tridimensionnel pour une plaque en FGM soumise à des contraintes mécaniques et thermiques, les deux appliquées à la partie supérieure de la plaque. Woo et al. (2006) ont étudié le comportement de vibration libre non linéaire des plaques en FGM en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déflexion transversale. En outre, Park et Kim (2006) ont étudié les analyses thermiques de post-flambement et de vibration des

plaques en FGM. Sobhy (2013) a étudié le comportement de vibration et de flambement d'une plaque sandwich à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques sous différentes conditions aux limites. Chakraverty et Pradhan (2014) ont étudié la vibration libre des plaques rectangulaires à gradient de propriétés dans un environnement thermique avec des conditions limites générales. Hebali et al. (2014) ont développé une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour le comportement de flexion et de vibration libre de la plaque en FGM. Belabed et al. (2014) ont utilisé une théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé basée sur la fonction hyperbolique pour analyser les caractéristiques de vibration d'une plaque en FGM. Vo et al. (2015a et b) ont étudié les réponses aux vibrations et au flambement des poutres sandwiches en FGM en utilisant une théorie quasi-3D. Bennai et al. (2015) ont proposé une nouvelle théorie du cisaillement et de la déformation normale d'ordre élevé pour l'étude de la vibration et de la stabilité des poutres sandwiches en FGM. Mahi et al. (2015), ont présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour la flexion et la vibration libre des plaques isotropes, en gradient de propriétés, sandwich et en composites stratifiées. Belkorissat et al. (2015) ont étudié les propriétés dynamiques des plaques nanométriques en FGM en utilisant une nouvelle théorie raffinées non locales à quatre variables. Mehar et al. (2016) ont présenté une analyse vibratoire des plaques composites renforcées en nanotubes de carbone fonctionnellement graduées dans un environnement thermique. Boudarba et al. (2016) ont étudié la stabilité thermique des plaques sandwich en FGM en utilisant une théorie de déformation par cisaillement simple. Bousahla et al. (2016) ont analysé le comportement de flambage thermique des plaques en FGM avec le coefficient de dilatation thermique. Bellifa et al. (2016) ont présenté une analyse statique et dynamique en flexion des plaques en FGM en utilisant une théorie simple de la déformation en cisaillement et le concept de la position neutre de la surface. Beldjelili et al. (2016) ont analysé la réponse en flexion hygro-thermomécanique des plaques en S-FGM reposant sur des bases élastiques variables en utilisant une théorie des plaques trigonométriques à quatre variables. Houari et al. (2016) ont présenté une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement sinusoïdal à trois inconnues pour les plaques en FGM. Draiche et al. (2016) ont utilisé une théorie raffinée à effet d'étirement pour l'analyse de la flexion des plaques composites stratifiées. Bennoun et al. (2016) ont étudié la réponse vibratoire des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie des plaques raffinée à cinq variables. Bellifa et al. (2017b) ont proposé une théorie de déformation par cisaillement de zéro ordre non local pour le post-flambement non linéaire de nanopoutres. Kolahchi et al. (2017) ont discuté le problème de la propagation des

ondes des plaques sandwich en FG-CNT-renforcées viscoélastiques, intégrées à un capteur et à un actionneur, sur la base d'une théorie de zigzag raffinée. Chikh et al. (2017) ont étudié le flambage thermique des plaques laminées croisées à l'aide d'une HSDT simplifiée. Mehar et Panda (2017) ont présenté une étude expérimentale, numérique et de simulation pour l'analyse de la flexion élastique et de la contrainte des plaques composites renforcées par des nanotubes de carbone. Mehar et al. (2017a) ont également présenté une étude théorique et expérimentale des caractéristiques de vibration de la structure composite en polymère renforcé de nanotubes de carbone. Mehar et al. (2017b) ont fourni une analyse de fréquence thermoélastique non linéaire des panneaux à coquille simplement/doublement courbée en FG-CNT-renforcées par FEM.

Pendant la production de matériaux en FGM, des pores peuvent apparaître dans les matériaux pendant l'étape de frittage en raison de la grande différence de température de solidification entre les composants du matériau (Zhu et al. 2001). Wattanasakulpong et al. (2012) ont également donné une discussion sur les porosités qui se produisent dans les échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle à plusieurs étapes. Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont étudié les problèmes de vibrations linéaires et non linéaires des poutres en FGM présentant des porosités. Ait Atmane et al. (2015) ont présenté un modèle informatique de déplacement par cisaillement pour l'analyse vibrationnelle des poutres en FGM avec des porosités. Ait Yahia et al. (2015) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques FGM en tenant compte de l'effet de porosité. Récemment, Jahwari et Naguib (2016) ont étudié les plaques poreuses viscoélastiques en FGM avec une théorie de plaque d'ordre élevé et un modèle statistique de distribution cellulaire. Mouaici et al. (2016) ont proposé une solution analytique pour la vibration des plaques en FGM avec des porosités. L'analyse a été basée sur la théorie de la déformation par cisaillement en tenant compte de la position exacte de la surface neutre. Ait Atmane et al. (2017) ont présenté une étude sur l'effet de l'étirement de l'épaisseur et de la porosité sur la réponse mécanique d'une poutre FGM reposant sur des fondations élastiques. Akbas (2017) a étudié les effets thermiques sur le comportement vibratoire des poutres en FGM avec la porosité.

Dans ce travail, une étude analytique de la vibration libre des plaques poreuses en FGM simplement appuyées en utilisant un nouveau modèle de déplacement a été présentée. Les plaques sont constituées d'un matériau isotrope avec des propriétés de matériau variant dans la direction de l'épaisseur. Les équations de la plaque FGM sont obtenues en utilisant le principe

de Hamilton. Pour résoudre le problème, la solution de Navier est également utilisée. À la fin, des résultats numériques pour l'effet de la porosité et des paramètres de distribution des matériaux sur les fréquences naturelles des plaques en MGF sont présentés. L'efficacité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature.

Le présent travail de thèse est organisé en cinq chapitres:

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel (matériaux à gradient de propriétés ou matériaux fonctionnellement gradués) ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse, le premier chapitre est consacré à donner une généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM tels que leur définition, comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels, principaux classification, les différents domaines d'applications, et les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives.

Le deuxième chapitre présente une revue des différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et le modèle éléments finis de structure multicouche.

Le troisième chapitre est réservé, à la définition de la porosité dans les matériaux composites, aux causes faisables d'apparition de la porosité dans les matériaux composites et la présentation de quelques méthodes de quantification de la porosité.

Nous avons présenté en quatrième chapitre le développement de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour étudier le comportement vibratoire des structures en matériaux à gradient de propriétés FGM simplement appuyées en tenant compte de l'effet de la porosité, en utilisant un champs de déplacement à quatre variable intégrale.

La validation et les discussions des résultats obtenus par la présente méthode sont illustrées dans le cinquième chapitre, une comparaison des résultats obtenus à celle de la littérature confirme la précision de la présente théorie.

A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux qui permet de revenir sur les résultats importants de ce travail, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM

I.1. Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...), ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes interfaciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [Saeedi N., 2012]. À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués (en anglais : Functionally Graded Materials « FGM ») dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [Baron C., 2008].

I.2. Concept des matériaux FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials :FGM) fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales [Niino M., 1988]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou discontinuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [Kawasaki A.,

1997]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini K., 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch P., 1989].

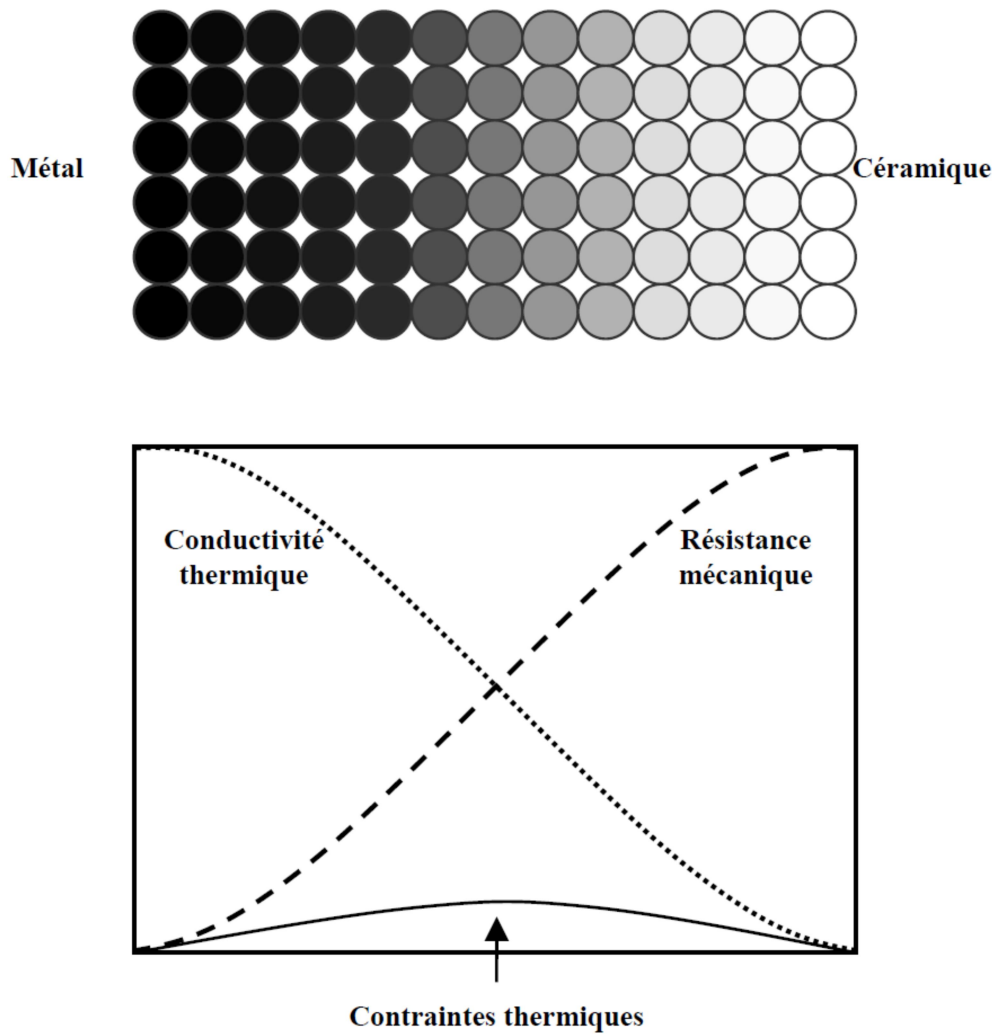


Figure I.1 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués [Houari M.S.A., 2011]

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

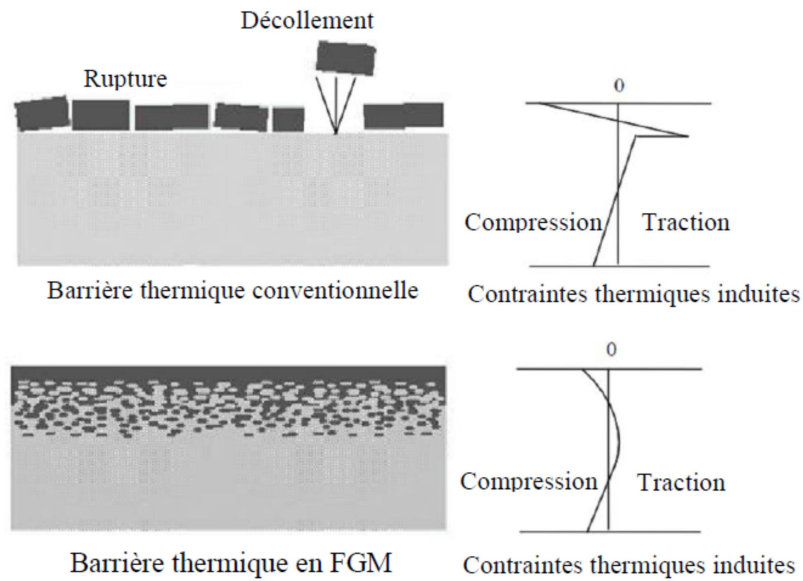


Figure I.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et non FGM [Houari M.S.A., 2011]

I.3. Différences entre matériaux à fonctionnellement gradués et matériaux composites traditionnels :

Les matériaux fonctionnellement gradués sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	<p>Éléments constitutifs:</p> <ul style="list-style-type: none"> Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre ◆ 		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi. M., 1996]

I.4. Historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi M., 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [Koizumi M., 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [Nguyen T. K., 2007]. En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C [Koizumi M., 1997]. En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura H., 1991]. En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques...etc. [Okamura H., 1991]. En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [Kieback B., 2003]. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie.

La figure I.4 [Koizumi, M. 1996] montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.

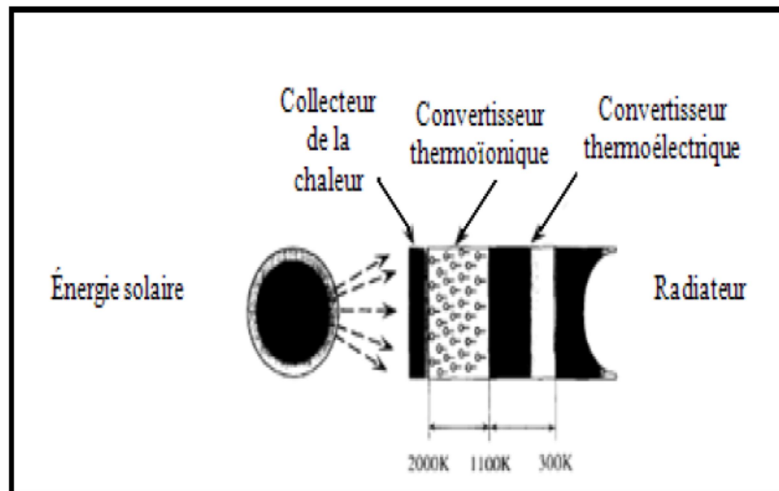


Figure I.4 : Formes de conversion d'énergies convertes par la partie II de projet de FGM [Koizumi. M., 1996]

I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux fonctionnellement gradués

Depuis plus de vingt ans, une partie importante de la recherche concernant les structures en matériaux fonctionnellement gradués a été consacrée à leur fabrication. Une grande variété de méthodes de production a été mise au point ou adaptée en vue de produire ce type de pièces [Kieback B., 2003].

Les principaux procédés disponibles pour la production des matériaux FGM sont expliqués ci-après :

I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuses, dans lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en enlevant la reliure, et en pressant les produits obtenus à chaud. Le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [Zeng Y., 2000].

I.5.2 Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop A.,

1993]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique et de façon industrielle.

I.5.3 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens H.D., 1990].

I.5.4 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi M., 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.6. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.5. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

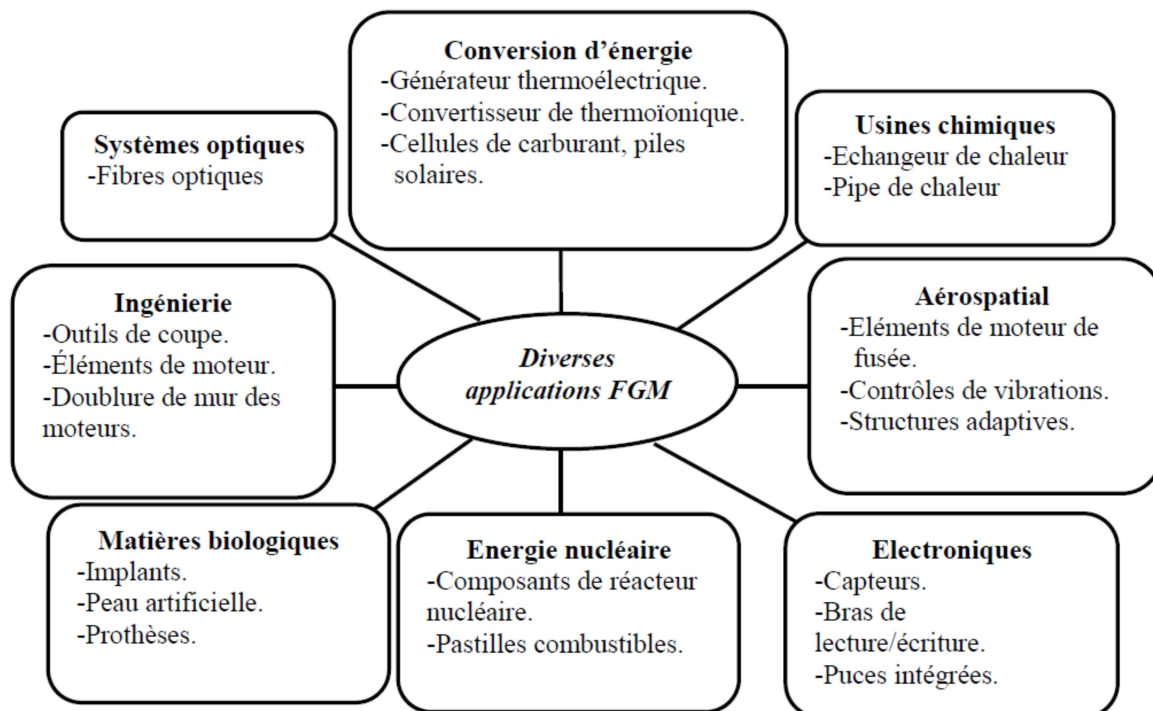


Figure I.5 : Les principaux domaines d'application des FGM

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

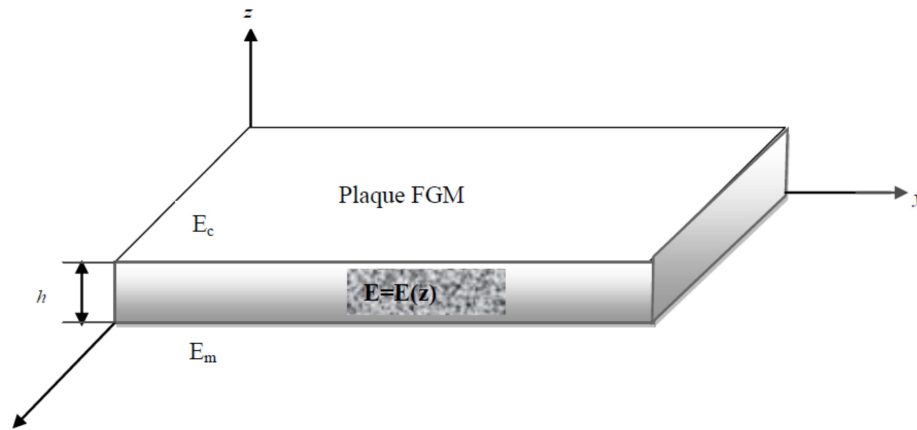


Figure I.6 : Géométrie d'une plaque en FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau : dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [G. Bao.,1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparait

clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

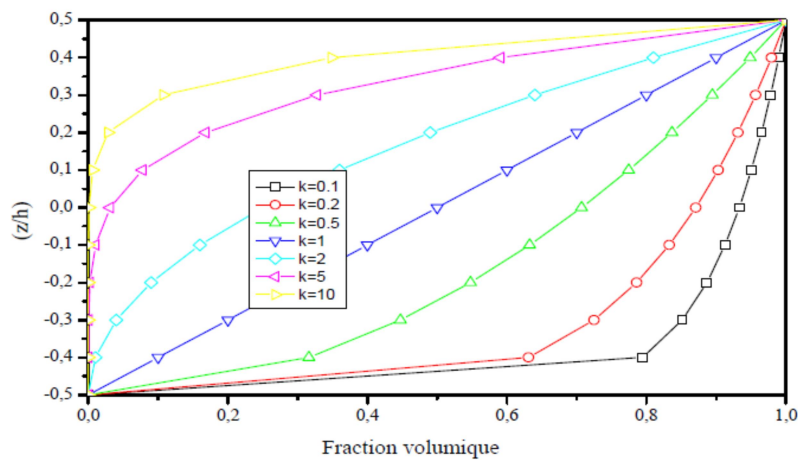


Figure I.7 : Variation de fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [G. Bao., 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Shyang-ho Chi.,2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.3.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.3.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.4.b)$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.4.b)$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

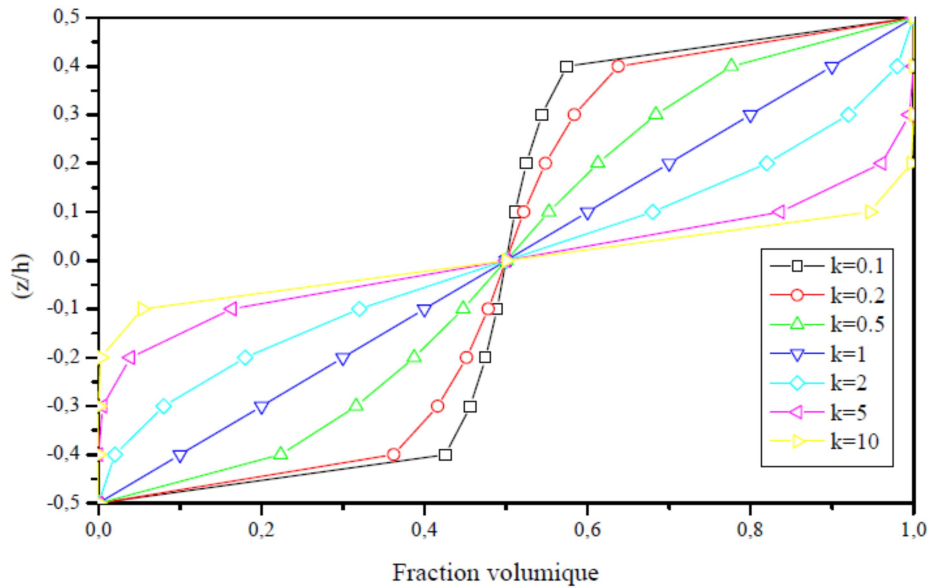


Figure I.8 : Variation de fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale F., 1983] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \tag{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.

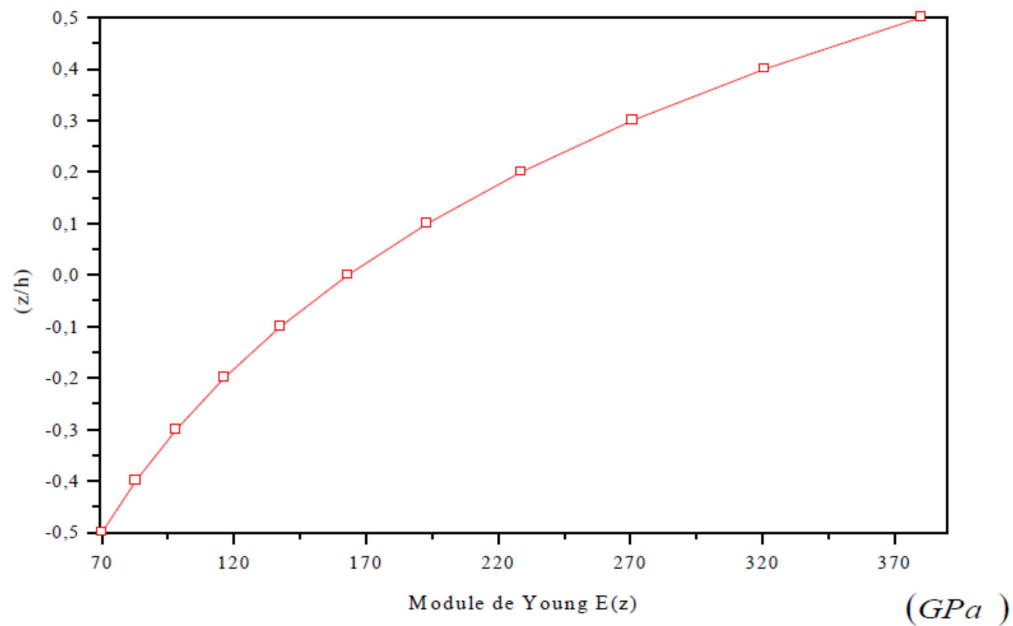


Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné une généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM tels que leur définition, comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels, principale classification, les différents domaines d'application, et les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives.

Chapitre II

Les théories des structures FGM

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor A. K. 1989, Kapania R. K. 1989, Kant T. 2000, Carrera E. 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

a. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner E., 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff G., 1950] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation figure. II.1.

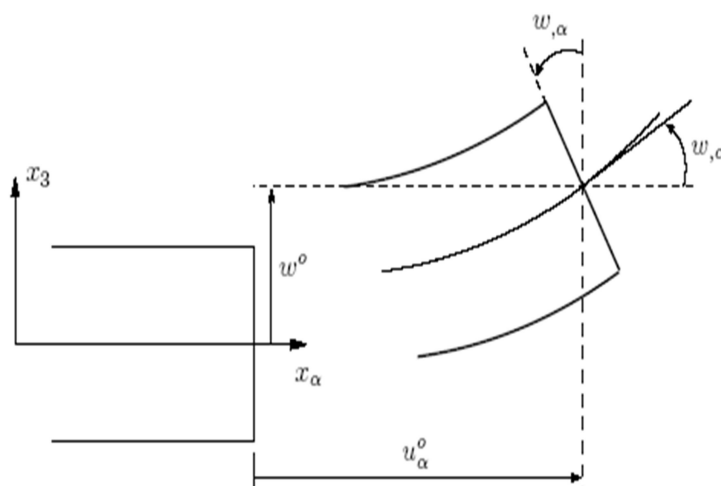


Figure II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad , \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

b. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée figure.II.2. Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

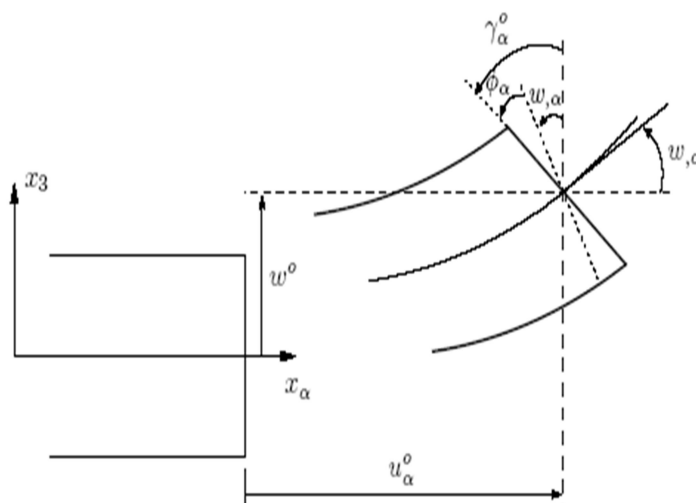


Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [Whitney J.M, 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

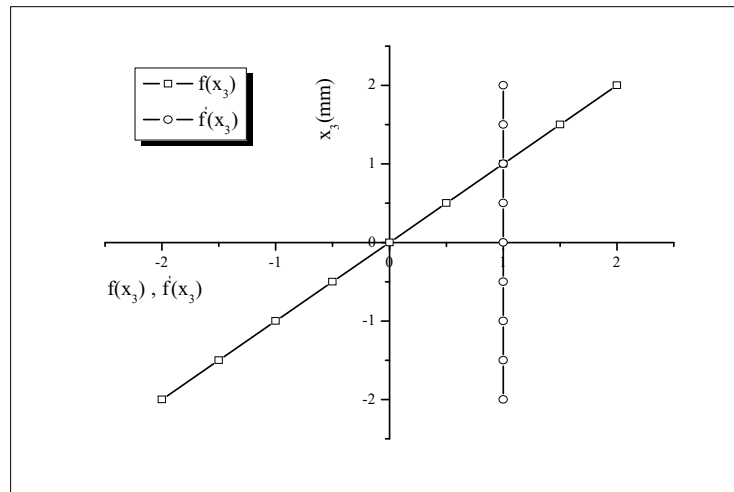


Figure. II.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

c. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure.II.4) [Liberscu L.,1967, Whitney J.M., 1973, Touratier M., 1991, Nguyen V.T., 2004]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{o(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{o(i)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de

Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(3)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (II.4)$$

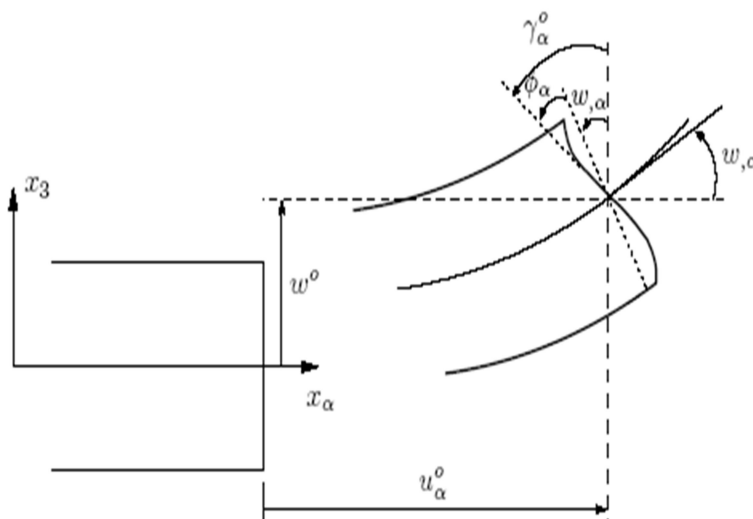


Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan S.A., 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (II.5)$$

- L'approche de Reissner [Reissner E., 1945], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.6)$$

- L'approche de [Reddy J.N., 1987] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.7)$$

Dans le modèle de [Reddy J.N., 1987], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [Touratier M., 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy J.N., 1984].

Récemment, Afaq et al. [Afaq K.S., 2003] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier M., 1991] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu [Aydogdu M., 2005] avec ;

$$f(z) = z \alpha \frac{e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est

assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche parait très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot A., 1997, Carrera E., 2000, Afaq K.S., 2003, Reddy J.N., 1984, Di Sciuva M., 1987]. Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes :

- les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. II.5 et II.6).

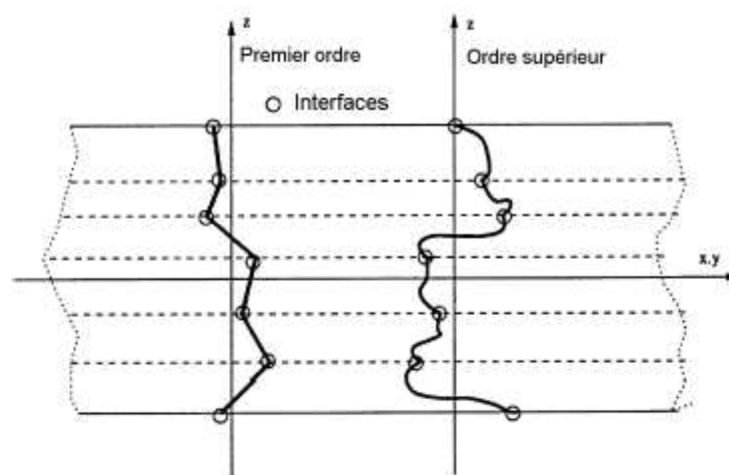


Figure. II.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.

[Nguyen V.T., 2004]

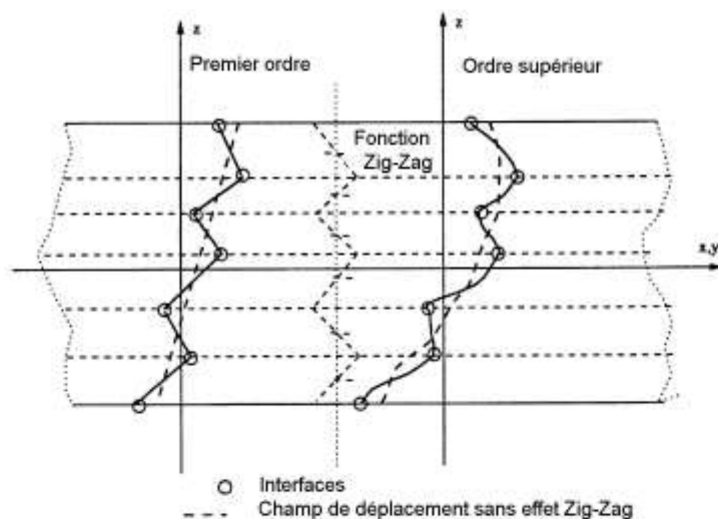


Figure. II.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Nguyen V.T., 2004]

a. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva M., 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside).

La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

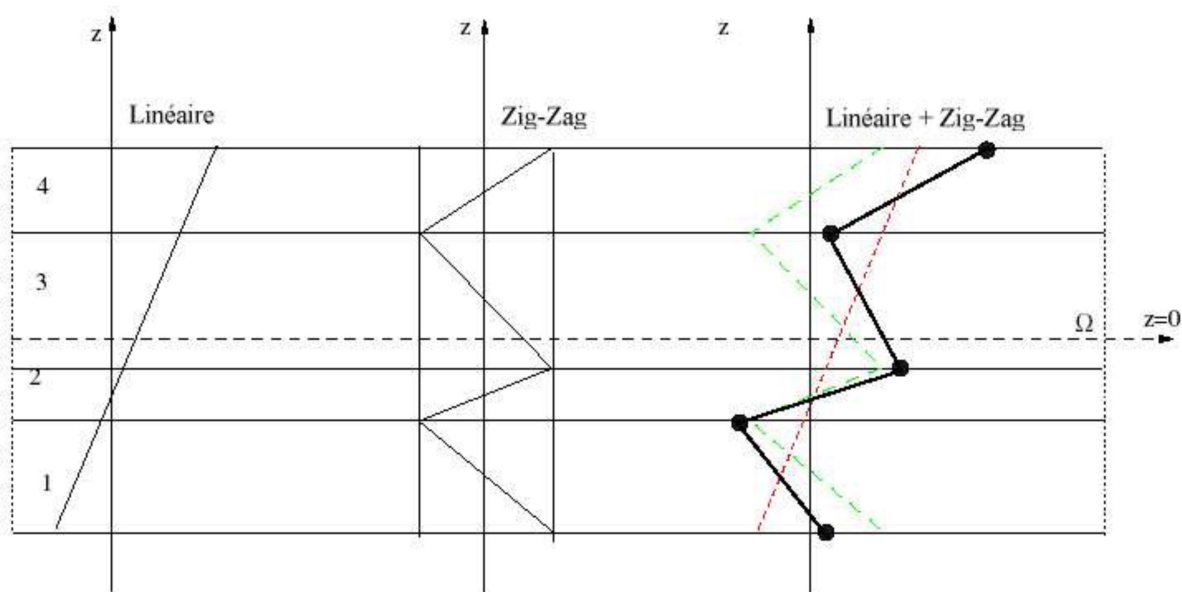


Figure. II.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Nguyen V.T., 2004].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de [Di Sciuva M., 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Nguyen V.T., 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.II.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

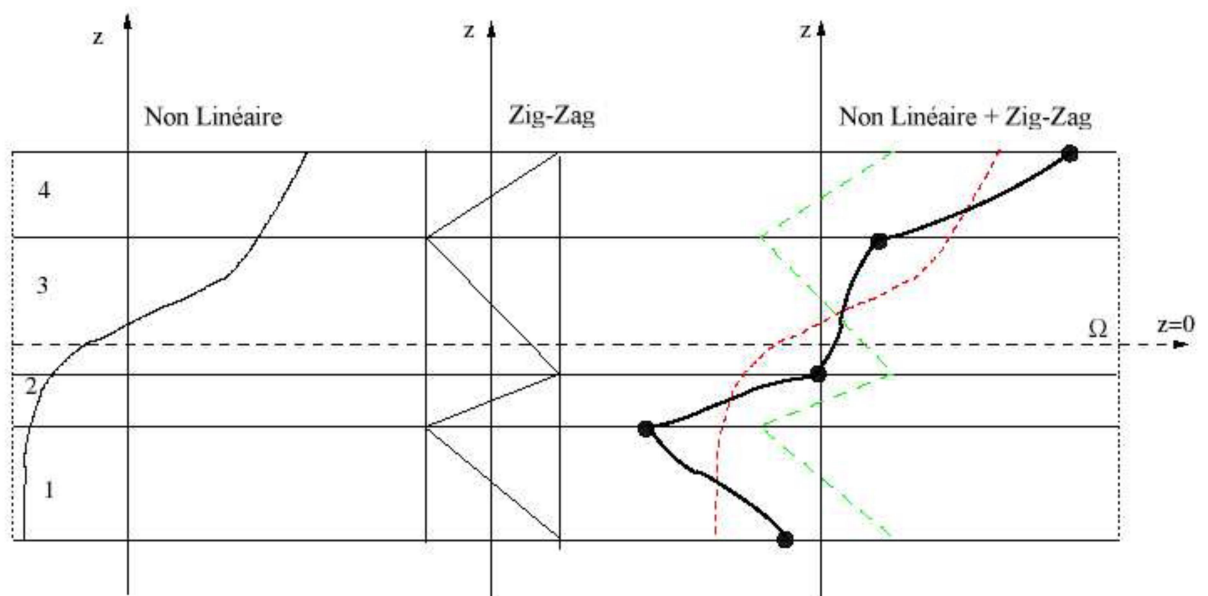


Figure. II.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [Nguyen V.T., 2004].

Dans les travaux de [Karama M., 1998, Ossadzow C., 2001], la fonction sinus de [Touratier M., 1991] est combiné avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [Afaq K.S., 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peut artificiels peuvent prévoir les délaminages,

par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'éclatement diminue [Icardi U., 2001]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

b. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. II.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [Srinivas S., 1973, Reddy J.N., 1987, Tahani M., 2003], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [Ren J.G., 1986, Kassapoglou C., 1987, Yin W.L., 1994] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou un mixte contrainte cinématique. Ainsi [Ren J.G., 1986] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou C., 1987], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [Yin W.L., 1994], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [Pagano N.J., 1978]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouche à $7n$ champs en $(x; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen V.T., 2004].

II.2.3. Modèle éléments finis de structure multicouche:

Les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples, mais pour les cas compliqués, plusieurs méthodes numériques ont été développées. La méthode des éléments finis est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides).

a. Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [Reddy J.N., 1980 ; Ganapathi M., 1997]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité, les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Nguyen V.T., 2004].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants.

En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier [Touratier M., 1991], différents éléments finis quadrilatères et triangulaires sont considérés. L'élément triangulaire développé par [Polit O., 1997] est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds, la continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure.II. 9.

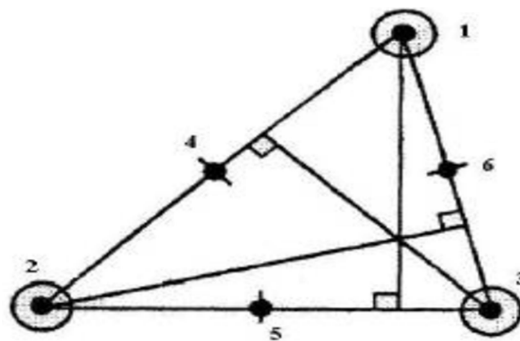


Figure II. 9: Éléments finis « sinus » triangulaires à 6 nœuds (Polit, 1997).

Les travaux de [Shankara C.A., 1996 ; Khare R.K., 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures.II.10 et II.11). Ils diffèrent par l'ordre du développement de série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:

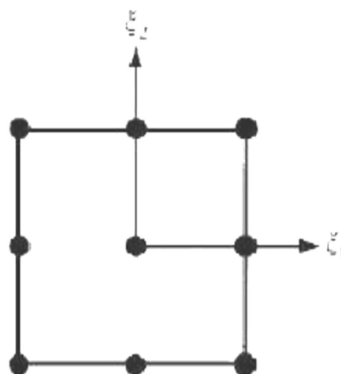


Figure II.10 : Éléments finis quadrilatères de type Lagrange à 9 nœuds (Nguyen V.T., 2004).

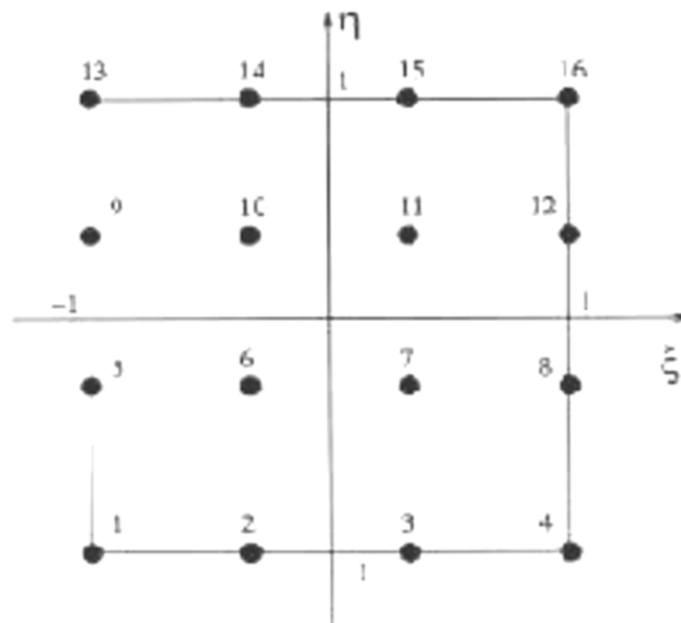


Figure II.11 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds

c. Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso-paramétrique 20 nœuds de [Raju I.S., 1981] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure.II.12.

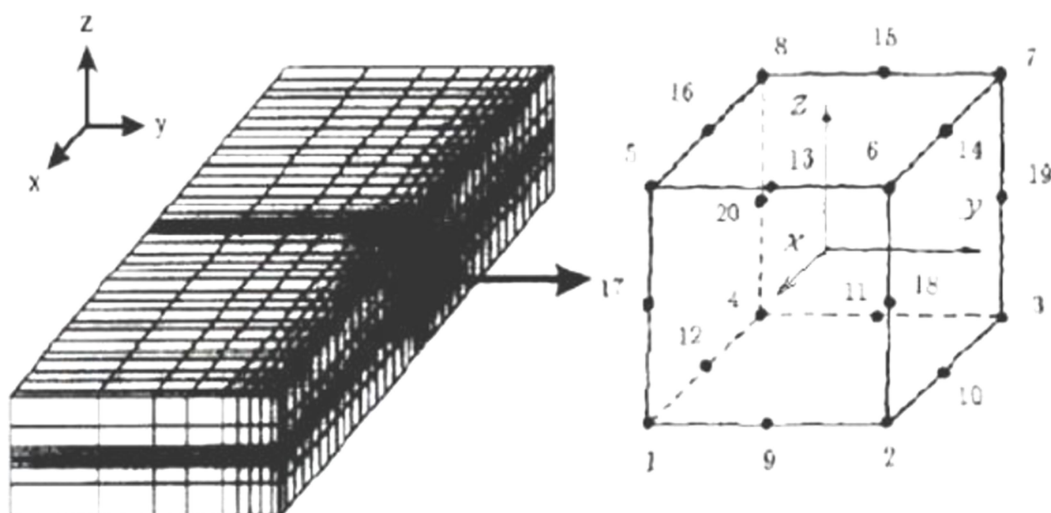


Figure II.12 : Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires (Nguyen V.T., 2004)

Dans [Bui V.Q., 2000] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement l'épaisseur d'un élément de plaque mince vers zéro (voir Figure.II.13). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

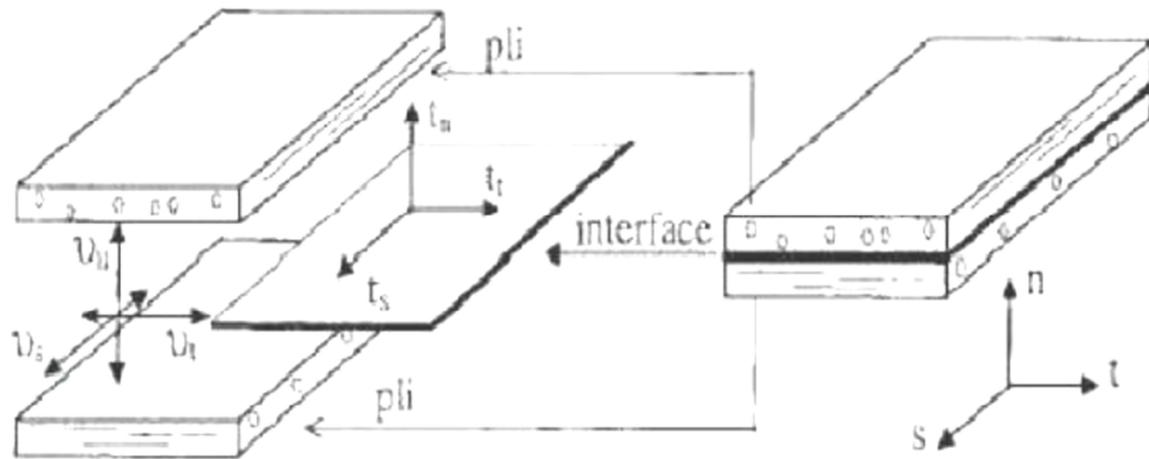


Figure.II.13: Élément d'interface. [Bui V.Q., 2000]

II.3. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Chapitre III

Les matériaux impropres (poreux)

III.1. Définition de la porosité

Selon le glossaire international d'hydrologie, la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (liquide ou gaz). La porosité est aussi une valeur numérique définie comme le rapport entre le volume des vides et le volume total d'un milieu poreux.

$$\alpha_0 = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad (III.1)$$

Avec : α_0 c'est la porosité, V_{pores} le volume des pores et V_{total} le volume total du matériau, c'est-à-dire la somme du volume de solide et du volume des pores.

La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension).

D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant à priori de la matière gazeuse (tâches noires sur la Figure III.1 (a)). Schoeller [Schoeller H., 1955], distingue deux catégories de pores représentés sur la Figure III.1 (b) :

- les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau.
- les porosités fermées, isolées à l'intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité.

Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreux.

Les nombreuses applications des matériaux poreux font appel à des tailles de pores qui peuvent varier de l'échelle atomique à l'échelle millimétrique. L'IUPAC (International Union

of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la Figure III.1 (c) [Schaefer D.W., 1994]. En se référant à la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et aux états physiques de l'eau contenue en leur sein, une seconde classification des porosités avait préalablement été proposée [Schoeller H., 1955]. Celle-ci définit une micropore (ou pore matricielle) comme une cavité de diamètre inférieur à 0,1 μm et une macropore (ou porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à 2,5mm. Les mésoporosités (ou porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre 0,1 μm et 2,5 mm (Figure III.1 (d)).

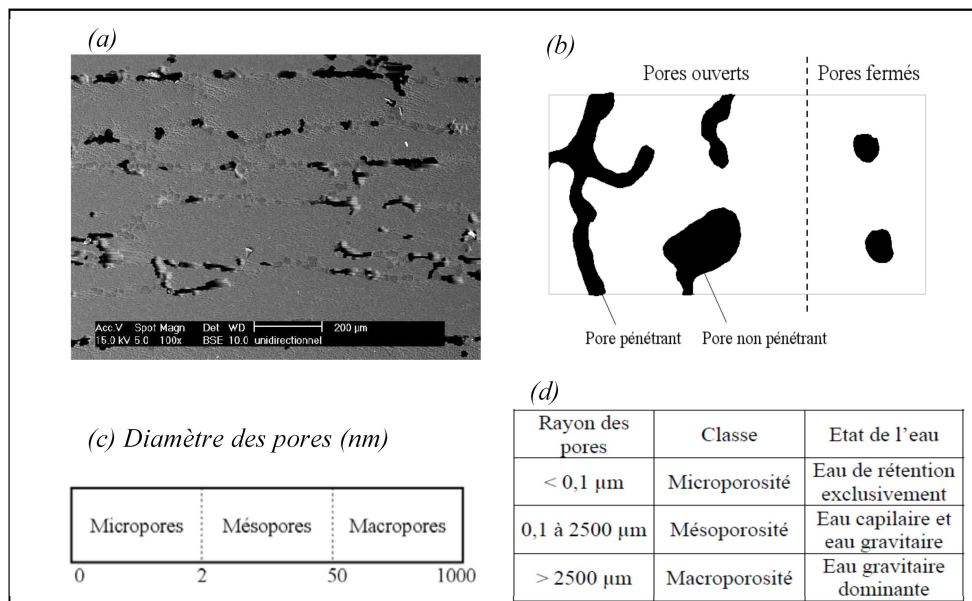


Figure III.1: (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. [Ledru Y., 2009]

La porosité est donc un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Seuls les volumes sont considérés. Néanmoins, il est important de signaler que pour les matériaux composites, le concept de porosité correspond à des interstices de petites tailles (ordre millimétrique et inférieur) par rapport aux fissures, diaclases ou délaminages.

III.2. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau

Très recherchée dans la fabrication des mousses ou des membranes filtrantes, la porosité est en revanche néfaste aux matériaux composites à hauts performances. L'impact de ce défaut a fait l'objet de beaucoup d'attention, comme en atteste le nombre important d'études sur ce sujet. Tous les auteurs sont d'accord pour affirmer qu'en dessous d'un certain pourcentage volumique, compris entre 0.5% et 1% suivant le matériau étudié, la porosité n'a pas d'influence sur le comportement de la pièce si elle est iso répartie.

En revanche, pour des taux de porosité plus élevés, les propriétés mécaniques de la pièce sont affectées de manière significative et en particulier le cisaillement interlaminaire. En effet, la résistance au cisaillement interlaminaire, notée ILSS (InterLaminar Shear Stress), est très sensible à la présence de ces inclusions gazeuses. Sa diminution représentée à la (Figure III.2), a été mesurée en fonction du taux de porosité par plusieurs chercheurs [Yokota M.J., 1978], [Yoshida H., 1986], [Tang J.M., 1987], [Bowles K.J., 1992], [Costa M.L., 2001], [Liu L., 2006(a)].

La diminution moyenne de l'ILSS a été estimée en moyenne à 6% par unité volumique de taux de porosité pour des stratifiés carbone/époxy. On peut remarquer de grandes disparités suivant les études considérées. Celles-ci sont dues essentiellement à la nature des matériaux des différentes études (tissu préimprégné (Costa), ou nappes avec différents types de fibres (T300 (Bowles), T700 (Liu)...), et différents types de résine de classe 120°C (Yoshida) ou 180°C (autres)).

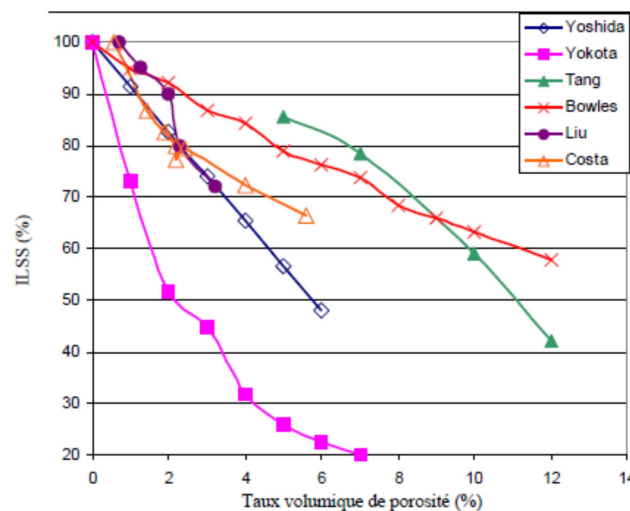


Figure III.2 : Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy [Wisnom M.R., 1996].

L'étude la plus réaliste permettant d'expliquer la diminution de l'ILSS en fonction de l'augmentation du taux volumique de porosité est proposée par Wisnom [Wisnom M.R., 1996]. Ces travaux mettent en évidence l'initiation des fissures à partir des porosités dès que ces dernières sont suffisamment grandes (diamètre équivalent > 0.2 mm). Les résultats présentés montrent aussi que la présence de porosité diminue la surface de contact entre les fibres et la matrice, ce qui favorise la rupture de la pièce en cisaillement interlaminaire.

Plusieurs modèles sont proposés afin de prévoir numériquement la valeur de la contrainte à rupture en cisaillement interlaminaire d'une pièce en fonction de son pourcentage volumique de porosité [Bowles K.J., 1992], [Yoshida H., 1986]. Cependant, quelque soit le

modèle considéré, les résultats théoriques diffèrent sensiblement des résultats expérimentaux. Ceci est dû aux nombreuses hypothèses simplificatrices utilisées pour l'élaboration de certaines équations, notamment concernant la forme des porosités (sphérique ou cylindrique), et de leur répartition supposée homogène au sein de la pièce. Une telle répartition est en réalité rarement constatée. De plus, il est signalé que la dispersion des résultats augmente avec le taux volumique de porosité, ce qui rend difficile la comparaison des données expérimentales et théoriques pour des taux de porosité supérieurs à 10%.

D'après toutes ces études, il est indéniable que la porosité affecte le comportement en cisaillement inter laminaire du matériau composite, dès que le pourcentage volumique de ce défaut est supérieur à 1%. Les autres caractéristiques mécaniques (traction, compression, cisaillement plan) sont également affectées par la présence de porosité, mais de façon moindre, bien que non négligeable [Harper B.D., 1987], [Liu L., 2004].

De manière générale, une augmentation du taux volumique de porosité entraîne une diminution des propriétés mécaniques du matériau. L'une des raisons invoquée [Olivier P., 1994], [Olivier P., 1995] notamment pour expliquer la chute de la contrainte à rupture en traction et en compression, concerne la déformation locale des fibres due essentiellement à l'apparition de ces porosités et à leurs mouvements au sein de la matrice durant le cycle de cuisson. On peut aussi raisonnablement penser que la présence de porosité au sein du stratifié modifie à la fois le transfert d'effort entre la résine et le renfort mais aussi la cohésion de celui-ci. Cette hypothèse reste cependant encore à démontrer.

Dans le milieu industriel aéronautique, il est admis qu'une pièce structurale comportant un taux volumique de porosité supérieur à 2% doit être rebutée. On comprend dès lors l'intérêt de cette étude pour minimiser au maximum l'apparition de ces défauts, apparition qui peut être due à plusieurs causes détaillées ci-après.

III.3. Causes possibles d'apparition de la porosité.

III.3.1. Les causes mécaniques

La création de porosité par emprisonnement mécanique d'air lors de la conception de la pièce est la cause la plus facile à comprendre intuitivement.

Les deux exemples suivants illustrent ce type de création :

Le premier concerne l'emprisonnement de poches d'air dans la résine durant sa phase de fabrication (malaxage, etc....) ou durant l'imprégnation du renfort. Ce deuxième point est largement développé par de nombreux auteurs travaillant sur la mise en œuvre des composites par RTM ou par infusion (RLI, RFI...). L'intégralité de ces travaux expliquent la formation

lors du moulage par LCM de deux types de porosités : les macros porosités observées entre les mèches et les micros porosités, observées au sein même des mèches (figure III.3).

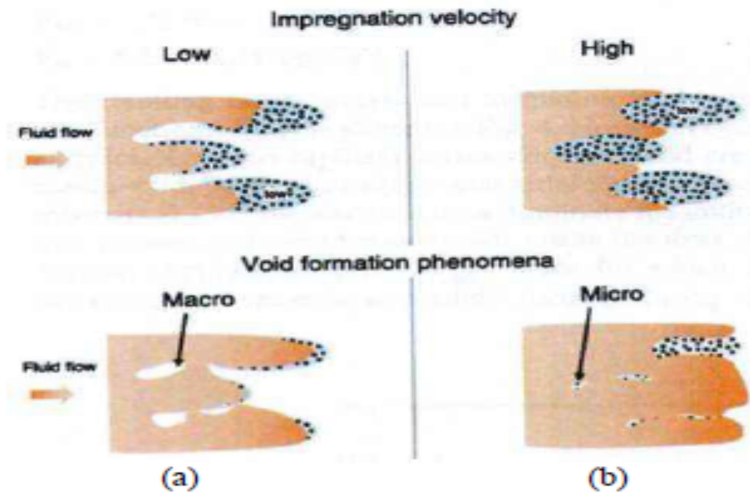


Figure III.3 : Formation des macros et micros porosités en fonction de la vitesse de déplacement du fluide lors de l'imprégnation d'un renfort : (a) force de capillarité prédominante, (b) force de viscosité prédominante [Trochu F., 2006] .

Les macros porosités sont principalement présentes dans la pièce lorsque l'écoulement de la résine, lors de l'imprégnation du renfort, est gouverné par la pression visqueuse (viscosité faible) contrairement aux micros porosités qui sont majoritaires lorsque l'écoulement est gouverné par la capillarité (viscosité importante) [Binétruy C., 2004], [Lundström T.S., 1996], [Bréard J., 2003]. La vitesse d'écoulement de la résine étant régie par la loi de Darcy (I.18) [Trochu F., 2006], il est important d'ajuster la différence de pression imposée au système en fonction de la perméabilité du renfort et de la viscosité de la résine afin d'obtenir une vitesse d'écoulement intra-mèche et inter-mèche la plus uniforme possible.

$$v = -\frac{[K]}{\mu} \nabla P \quad (\text{III.2})$$

avec v (m.s^{-1}) la vitesse moyenne du fluide (Darcy), $[K]$ (m^2) le tenseur de perméabilité du renfort, μ (Pa.s) la viscosité de la résine et ∇P (Pa.m^{-1}) le gradient de pression.

L'objectif majeur de ces recherches consiste à développer un modèle numérique permettant de simuler l'imprégnation du renfort en fonction de la forme de la pièce. Les variables prises en compte sont la pression ou dépression appliquée au système, la perméabilité du renfort et la viscosité de la résine directement liée à la température de l'outillage (moule,...), ainsi que le nombre de point d'injection. Une fois développés, ces modèles ont servi à l'optimisation des paramètres précédemment cités pour limiter la création des macros et micros porosités [Pillai K.M., 2004], [Pillai, K.M., 2007], [Kang M.K., 2001],

[Patel N., 1996 (a) et (b)], [Yang J., 2006], [Yamaleev N., 2006], [Frishfelds V., 2008]. Malgré la difficulté rencontrée dans l'expression du tenseur de perméabilité du renfort, les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. La figure III.4, représente en fonction du temps, la position du front de résine injectée dans un renfort tridimensionnel. La courbe continue, représentative des résultats numériques obtenus par Trochu [Trochu F., 2006], concorde presque parfaitement les résultats expérimentaux obtenus par Bréard [Bréard J., 1997].

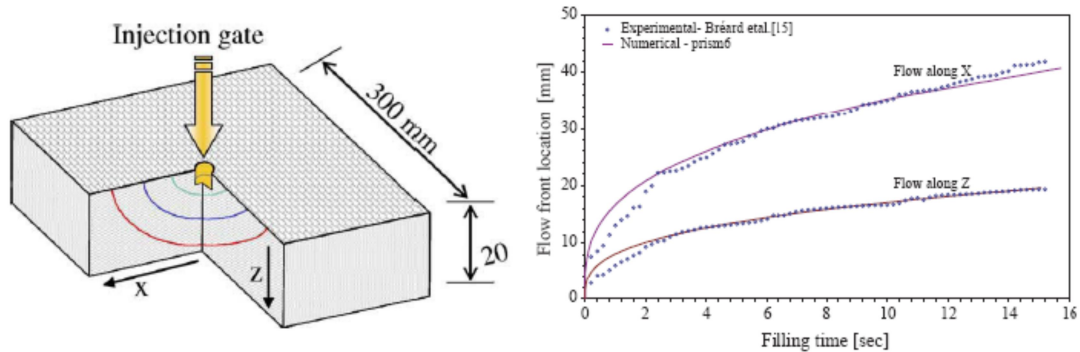


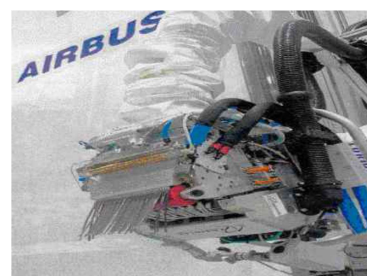
Figure III.4 : Comparaison des résultats expérimentaux et numériques donnant la position du front d'une huile silicone injectée de manière 'demi-sphérique' dans un renfort anisotrope [Trochu F., 2006].

Ces modèles ne sont pas développés plus en détail car relativement éloignés de la situation correspondant à cette étude. Les procédés de mise en œuvre ne sont pas les mêmes et les viscosités des résines utilisées lors de l'injection sont environ mille fois plus faible que celles des résines utilisées au sein des préimprégnés. Les phénomènes de création de la porosité sont donc différents en fonction du procédé de mise en œuvre considéré.

Le second exemple de création de porosité par voie mécanique concerne directement l'étape de drapage qui se fait de plus en plus à l'aide de machine automatique à placement de nappes ou de fibres (figure III.5). Des microcavités gazeuses sont observées lorsqu'une fibre est rompue ou lors d'une pliure, d'un chevauchement de plis ou d'un décalage entre deux nappes au sein du composite.



(a)



(b)

Figure III.5 : (a) machine automatique à placement de nappes, (b) Tête de la machine à placement de fibres.

Bien que très largement mentionnée dans la littérature, la création de porosité par voie mécanique n'a fait l'objet que d'un très petit nombre d'études. Seuls Ranganathan et Pitchumani [Ranganathan S., 1995], [Pitchumani R., 1996] se sont intéressés à la modélisation du comportement des porosités créées lors du drapage automatisé d'une pièce en composite thermoplastique AS-4/PEEK. A la différence du préimprégné thermodurcissable, le drapage de nappe carbone/thermoplastique nécessite l'application de température élevée afin de favoriser l'adhésion des plis entre eux et d'assurer la consolidation de la pièce. La vitesse de dépose de la nappe, la pression d'application et la température imposée par la machine de dépose, ainsi que la configuration du rouleau sont les paramètres principaux à contrôler pour minimiser la présence de porosité dans la pièce finale.

Hormis l'effet de la température, cette étude pourrait être extrapolée à la dépose de nappe pré-imprégnée à fibre carbone / résine époxyde. Il serait alors nécessaire de contrôler la vitesse de dépose, la configuration du rouleau ainsi que la pression de compactage imposé par le galet de la tête de dépose lors de l'étape de drapage. Une fois optimisé, ce procédé de drapage permet d'obtenir une très bonne adhésion homogène des plis entre eux, ce qui est beaucoup plus difficile à garantir sur le drapage manuel.

Enfin, la porosité pourrait aussi provenir de grosses particules ou d'un amas de celles-ci présentes dans le pré imprégné (particules volant dans l'air, poussières, cheveux....). Cette cause de création mécanique de la porosité peut cependant être partiellement écartée, car le drapage en milieu industriel s'effectue dans une pièce confinée appelée 'salle blanche', à température et taux d'hygrométrie contrôlés, et surtout avec un taux de particules de poussière présentes dans l'air ambiant contrôlé, inférieur à 100 000 particules par m³.

En plus des causes mécaniques, la présence de porosité peut aussi être expliquée en considérant certains phénomènes thermodynamiques.

III.3.2. Les causes thermodynamiques

L'observation du diagramme de phase de l'eau montre qu'une bulle de vapeur dans la phase liquide se forme soit en augmentant la température localement dans le liquide [Divinis N., 2005], soit en provoquant une rapide décompression [Payvar P., 1987]. Ces deux paramètres favorisent en effet les nucléations homogène et hétérogène des germes initiateurs de bulle. Seul un aperçu des théories relatives à la nucléation, présentées par [Kardos J.L., 1983],[Kardos J.L., 1986], [Kwak H.Y., 1998], [Lee J.G., 1996] et [Veesler S., 2005] sont abordées dans cette partie.

Au sein de la résine, les molécules de gaz diffusent au hasard et finissent par se rencontrer d'autant plus facilement que leur concentration est élevée. Les molécules diffusantes, à l'état de monomère s'additionnent donc successivement pour former des agglomérats qui ont une taille suffisante pour être qualifiés de germes (entre 50 et 100 molécules pour une espèce chimique à faible masse molaire comme l'eau [Kingery W.D., 1975]). Le processus de formation de tels germes met en jeu l'enthalpie libre, ΔG , de Gibbs. La création d'un germe nécessite la création d'un volume et d'une surface, qui met en jeu deux énergies antagonistes :

L'énergie de volume, apportée par la sursaturation de la solution, et l'énergie de surface résistant à la croissance du germe. Si le germe est supposé sphérique de rayon R_p (m), l'enthalpie libre ΔG (J.mol^{-1}) est donnée par :

$$\Delta G = -\frac{4\pi R_p^3}{3V_m} kT \ln(\beta) + 4\pi R_p^2 \gamma_{LV} \quad (\text{III.3})$$

avec k (J.K^{-1}) la constante de Boltzmann; T (K) la température du milieu, V_m (m^3) le volume d'une molécule dans le germe, γ_{LV} (Pa.m) ou (J.m^{-2}) l'énergie de surface entre la porosité et la matrice et β le degré de saturation.

Le premier terme correspondant à l'énergie de volume est le produit du nombre de molécules contenues dans le germe, par la différence de potentiel chimique. Le terme β , représentatif du degré de saturation, peut être exprimé dans le cas de la cavitation, c'est à dire d'une création de bulle gazeuse, par le rapport entre la pression de gaz p_{gaz} et la pression du liquide p_s , [Fletcher N.H., 1993]. Dans le cas d'une rapide dépression, β augmente et ΔG diminue, ce qui favorise la création de bulle de gaz. Le second terme de l'expression (III.3) représente l'énergie de surface. La compétition entre ces deux termes est montrée à l'aide de la Figure III.6. La taille du germe critique, c'est à dire le rayon critique R_p^* (équation (III.4)) dit de Gibbs-Thomson- Freundlich), est obtenu à l'équilibre.

$$R_p^* = \frac{2V_m \gamma_{LV}}{kT \ln(\beta)} \quad (\text{III.4})$$

A la taille critique R_p^* le germe est en équilibre instable. Il croît ou se dissout selon qu'il gagne ($R_p > R_p^*$) ou qu'il perd ($R_p < R_p^*$) une molécule.

Le calcul de la barrière énergétique à franchir appelée enthalpie libre d'activation critique, pour créer une porosité est donné par l'équation (III.4).

$$\Delta G_{\text{hom}}^* = \frac{4}{3} \pi (R_p^*)^2 \gamma_{LV} \quad (\text{III.5})$$

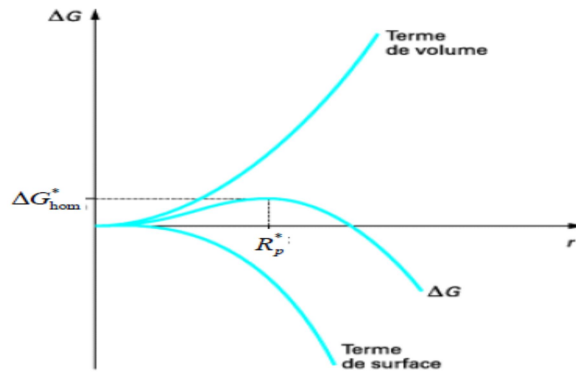


Figure III.6 : Enthalpie libre d'activation de nucléation homogène en fonction du rayon du germe [Veesler S., 2005].

En combinant les équations précédentes, il est possible de montrer qu'une température élevée du système ainsi qu'une importante sursaturation en molécules génératrices de germe vont favoriser la nucléation: l'augmentation de T et β entraîne une diminution de R_p^* , et donc de ΔG_{hom}^* . La vitesse à laquelle apparaissent les germes, appelée fréquence de nucléation, est le nombre de germes formés par unité de temps et de volume de fluide. Cette fréquence J_{hom} s'écrit dans le cas de la nucléation homogène par une loi similaire à une loi d'Arrhénius (III.6)

$$J_{\text{hom}} = A_{\text{hom}} \exp\left(-\frac{\Delta G_{\text{hom}}^*}{kT}\right) \quad (\text{III.6})$$

Avec A_{hom} ($\text{nb.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$) le coefficient cinétique

Ce coefficient peut être modifié suivant la viscosité du fluide, pour prendre en compte la diminution de la fréquence de nucléation dans le cas d'un milieu très visqueux. Cette expression confirme le fait que plus la température du système est élevée, plus la fréquence de nucléation est élevée.

Le mécanisme de nucléation homogène décrit précédemment reste très rare en milieu industriel où il est impossible d'éliminer tous les corps étrangers (poussière, etc...). La nucléation va alors se développer de préférence au contact de ces corps étrangers, appelés substrats. On parlera de nucléation hétérogène. En supposant une géométrie sphérique du germe, la résolution des équations montre que le rayon de courbure du germe critique R_p^* pour la nucléation hétérogène est le même que celui donné par l'équation (III.4). En revanche, la barrière d'énergie à franchir appelée enthalpie libre d'activation critique de nucléation

hétérogène $\Delta G_{hét}^*$ est fonction de l'angle de contact θ entre le germe et le substrat. Sa valeur est décrite par l'équation (III.7).

$$\Delta G_{hét}^* = f \Delta G_{hom}^* \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos^3 \theta \quad (\text{III.7})$$

$\cos \theta$ étant inférieur à 1, la barrière énergétique à franchir pour la création d'un germe est plus faible pour une nucléation hétérogène qu'une nucléation homogène. La nucléation hétérogène se fera donc plus facilement que la nucléation homogène et ce d'autant plus que le germe présentera une affinité avec le substrat (θ décroissant, meilleur mouillabilité).

Cette conclusion est confirmée par l'expression de la fréquence de nucléation hétérogène $J_{hét}$ (III.8) :

$$J_{hét} = A_{hét} \exp\left(-\frac{\Delta G_{hét}^*}{kT}\right) \quad (\text{III.8})$$

Pour cette nucléation hétérogène, nous retrouvons les mêmes influences des paramètres opératoires (température, pression...) que pour la nucléation homogène.

La création de porosité par nucléation est une hypothèse très réaliste, notamment lors de la polymérisation. Le système subit alors une dépression, une augmentation de la température jusqu'à 180°C et les concentrations en espèces diffusantes peuvent considérablement augmenter, en particulier si le préimprégné contient quelques résidus de solvant ou d'humidité, absorbés lors de sa phase de fabrication, ou de stockage. En revanche, la détermination expérimentale de certains paramètres développés dans ce paragraphe, tel que le coefficient cinétique $A_{hét}$ limite considérablement l'utilisation de ce modèle pour prévoir la fréquence d'apparition des germes en fonction de la température.

Une fois le germe formé sous des conditions thermodynamiques favorables, ou une fois la microcavité créée au sein du matériau par voie mécanique, leur stabilité, leur croissance ou leur dissolution va dépendre de plusieurs facteurs et notamment des paramètres imposés lors de la polymérisation.

III.4. Quantification de la porosité

Les difficultés d'observation et de quantification des porosités dans leur ensemble est un des facteurs limitant pour l'étude de leur formation et de leur influence. Ceci est vrai pour tous les types de matériaux composites : les matériaux composites organiques, céramiques ou métalliques. La recherche bibliographique sur ce point a mis en évidence de nombreuses méthodes d'analyse de la porosité. Cependant, seules quelques unes peuvent être utilisées

pour quantifier ces interstices fermés, c'est à dire inaccessibles par des agents extérieurs (mercure, azote, argon...). Les plus utilisées sont la microtomographie, les ultrasons, la dégradation chimique, et l'analyse d'image.

III.4.1. La micro-tomographie

La micro-tomographie est une technique d'analyse 3D très récente, fournissant une image volumique de la répartition du coefficient (μ) d'absorption linéaire des rayons X. Lorsque l'échantillon considéré est un multi matériau dont les constituants absorbent différemment les rayons X, il est possible d'extraire par segmentation une image 3D de la microstructure de ce matériau. Ainsi, Schell [Schell J.S.U., 2006], obtient à l'aide de la microtomographie une cartographie 3D du réseau fibreux d'un matériau composite à renfort fibre de verre et matrice époxy. Ces mêmes travaux, ainsi que ceux de Saint-Martin [Saint-Martin G., 2003] décrivent comment obtenir une cartographie 3D des porosités présentes dans ce matériau. Le pourcentage volumique de ces interstices est alors calculé avec précision. Des analyses morphologiques et de leurs répartitions au sein de la pièce peuvent ensuite être effectuées à partir de ces résultats.

Cette technique reste actuellement relativement onéreuse et surtout applicable à de très petits volumes pas forcément représentatifs de la pièce. Cette limitation en taille est liée au principe même de l'analyse mais aussi au très grand nombre de données générées par échantillon.

Néanmoins, si les avancées technologiques en terme de capacité de calcul continuent de s'accroître, cette technique pourrait être un moyen de contrôle qualité d'une pièce très intéressant.

III.4.2. Les ultrasons

Très utilisée dans le milieu industriel car non destructive, cette méthode permet d'analyser rapidement la totalité du volume d'une pièce et d'évaluer la quantité de porosité. En effet, la présence de porosité dans les matériaux en général vient perturber fortement la propagation d'ondes ultrasonores [Jeong H., 1994], [Costa M.L., 2001] et [Goueygou M., 2009]. La comparaison d'amplitude entre le signal d'entrée et le signal de sortie donne une estimation de la quantité de porosités présentes dans la pièce peut être déterminée [Mascaro B., 2006], [Liu L., 2006].

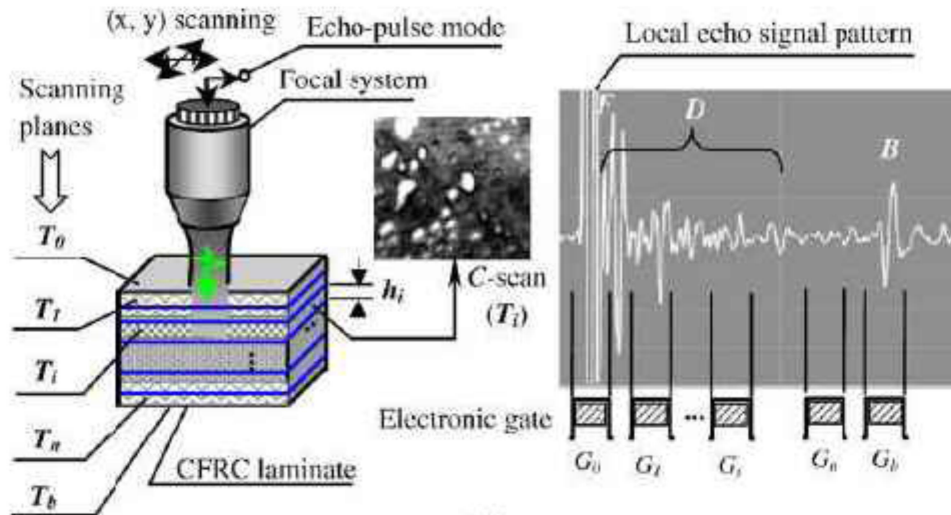


Figure III.7 : Principe de la méthode de contrôle non destructif par ultrasons de la qualité d'une pièce stratifiée. Le graphe présenté correspond à des séries successives de C-Scan, avec F, D et B les réponses respectives données par la réflexion de l'onde sur la surface, l'intérieur et le fond de la pièce [Liu L., 2006].

Cette technique repose sur la comparaison de l'atténuation mesurée sur la pièce par rapport à l'atténuation mesurée sur des éprouvettes étalons. Des estimations sur le taux volumique de porosité et sur l'homogénéité générale des pièces (répartition de la porosité, répartition de la matrice...) sont ainsi obtenues. Ce type d'analyse donne peu d'informations relatives à la répartition de la porosité dans l'épaisseur, à leurs morphologies, ni de valeur précise de leur taux volumique au sein de la pièce peuvent être avancées. Liu [Liu L., 2006 (b)] arrive à localiser précisément quelques défauts de structures, dans un stratifié, à l'aide de pulsations ultrasoniques convergentes à très haute fréquence. Ces défauts doivent cependant être de dimensions spatiales supérieures à $60 \mu\text{m}^2$ et situés à une profondeur supérieure à $80 \mu\text{m}$, ce qui est largement plus grand que la taille des plus petites porosités observées. De plus, la conception et la quantification des défauts au sein des éprouvettes étalons peuvent amener quelques interrogations, car hormis la microtomographie, aucune méthode ne donne de valeur précise du taux volumique de porosité.

III.4.3. La dégradation chimique

La dégradation chimique consiste dans un premier temps, à évaluer la densité du matériau composite en mesurant, par exemple, la poussée d'Archimède exercée sur l'éprouvette placée dans de l'eau distillée. La balance de Mohr autrement appelée balance hydrostatique, peut être utilisée pour l'évaluation de ce paramètre, en suivant le protocole

décrit par la norme NF EN ISO 1183. La masse de l'éprouvette en gramme est notée m_1 et son volume en cm^3 $V_{\text{éprouvette}}$.

Dans un second temps, le réseau fibreux du composite est séparé de la matrice soit par calcination, soit par dégradation chimique. La calcination consiste à chauffer l'échantillon sous air à haute température (ASTM D2734), pour provoquer la combustion et la vaporisation de la matrice. Contrairement au composite à base de fibre de verre, cette technique n'est pas adaptée pour mesurer le taux de porosité d'un composite à renfort en fibre de carbone. Le carbone réagit avec le dioxygène de l'air pour former du CO ou CO². Les fibres se volatilisent en même temps que la résine. Cette technique ne pourra donc pas être utilisée dans cette étude.

La dégradation par attaque acide se fait par voie chimique (dégradation du réseau polymère macromoléculaire à l'aide d'acide sulfurique concentré, d'eau oxygénée et de la température), et est détaillée par la norme NF EN 2564. Ce procédé est très employé dans le milieu industriel comme dans le milieu de la recherche.

Une fois les fibres séparées de la matrice, elles sont pesées (m_2). Connaissant les densités des fibres (ρ_f) et de la matrice (ρ_r), il est alors facile de calculer le taux volumique de porosité, V_0 selon l'équation (III.9):

$$\frac{V_0}{100} = 1 - \frac{m_1 - m_2}{\rho_r V_{\text{éprouvette}}} - \frac{m_2}{\rho_f V_{\text{éprouvette}}} \quad (\text{III.9})$$

Cette technique destructive, nécessite le prélèvement d'échantillons représentatifs, et ne donne aucune information sur la répartition, ni sur la morphologie de la porosité. De plus, elle n'est pas très précise : une erreur de 1% sur les valeurs des densités de la résine ou de la matrice entraîne une modification de $\pm 0,5\%$ (valeur absolue) sur le taux de porosité déterminé. La même erreur de mesure sur les masses m_1 ou m_2 induit une modification de $\pm 0,3\%$ (valeur absolue) sur ce même taux.

III.4.4. L'analyse d'images

Les premières études utilisant l'analyse d'image et ayant pour but de quantifier le taux volumique d'un constituant par rapport au reste de l'échantillon ont été menées par le géologue A. Delesse au milieu du XIX^{ème} siècle. Ce procédé est donc le plus ancien et surtout le plus utilisé dans le milieu des matériaux, pour caractériser morphologiquement et quantitativement la porosité, notamment par les céramistes [Aliotti A., 1996], [Redon C., 1997]. Ces deux études détaillent l'intégralité des opérations à mener pour caractériser la

microstructure d'une céramique ou d'un béton renforcé par des fibres métalliques. La première étape concerne l'échantillonnage qui devra faire l'objet d'attention particulière car ce paramètre est essentiel pour valider et généraliser les résultats obtenus à l'intégralité de la pièce analysée [Russ J.C., 1986]. Ensuite, la surface analysée de l'échantillon est préparée par attaque chimique et/ou polissage [Scrivener K.L., 1997], [Hoffmann M., 1996]. L'attaque chimique n'est pas nécessaire pour les composites à matrice organique utilisés dans cette étude. L'acquisition des images à analyser se fait à l'aide de la technique la mieux adaptée à la détermination des paramètres étudiés. Elle dépend aussi de la nature du matériau analysé ainsi que de l'échelle de travail souhaitée. Les équipements les plus utilisés sont le microscope optique et le microscope électronique à balayage. Le premier, extrêmement répandu, est utilisé avec des grossissements allant jusqu'à X 100. Son utilisation est cependant limitée par la résolution en épaisseur (quelques microns) et nécessite ainsi d'avoir des surfaces d'échantillons très plates. Le second équipement permet d'atteindre des grossissements bien plus élevés (> X 50000) sans problème de planéité d'échantillon.

L'échantillon doit néanmoins être conducteur, ce qui induit une étape supplémentaire de métallisation dans le cas des résines époxydes.

Une fois la micrographie acquise sous forme numérique, généralement à l'aide d'une caméra CCD (Charge-Coupled Device) et d'un logiciel adapté, l'image est traitée afin d'en extraire les informations intéressantes, comme par exemple, le taux surfacique de porosité. Une étude statistique sur ces données généralise les résultats à l'ensemble de la pièce [Shen H., 2006].

Les caractéristiques d'un matériau dans l'espace R3 peuvent alors être obtenues à partir de mesures réalisées dans l'espace R² en utilisant les relations stéréométriques détaillées par Russ [Russ J.C., 1999]. De la même façon, les taux surfaciques de porosité peuvent être extrapolés à des taux volumiques. La grande majorité des études morphologiques des matériaux souligne les problèmes engendrés par la qualité de la préparation de l'échantillon avant l'analyse, liés à l'acquisition, au traitement de l'image et à la validité de la mesure et des résultats obtenus via cette méthode. Toutefois, la quantification de cette erreur reste un problème à part entière (chapitre XI du Précis d'Analyse d'Image [Coster M., 1989])...

L'analyse d'image reste à ce jour la technique la plus fiable et la plus informative (localisation, morphologie) sur la porosité. Elle se limite cependant à l'observation d'échantillons aux dimensions relativement petites, ce qui nécessite une réflexion sur l'échantillonnage.

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre on a défini la porosité dans les matériaux composites et les travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau, puis on a passé aux causes faisables d'apparition de la porosité dans les matériaux composites. Enfin on a terminé par la présentation de quelques méthodes de quantification de la porosité.

Chapitre IV

Étude analytique des vibrations des plaques FGM

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre on va présenter le développement de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour étudier le comportement vibratoire des structures en matériaux à gradient de propriétés FGM. Deux types de plaques FGM sont considérés, dans cette partie, une plaque parfaite, tandis que l'autre est une plaque poreuse.

Pour analyser le comportement vibratoire des plaques FGM simplement appuyées, et pour le calcul des fréquences de vibration libre de ces plaques, une théorie de cisaillement à quatre variables a été utilisée et développée.

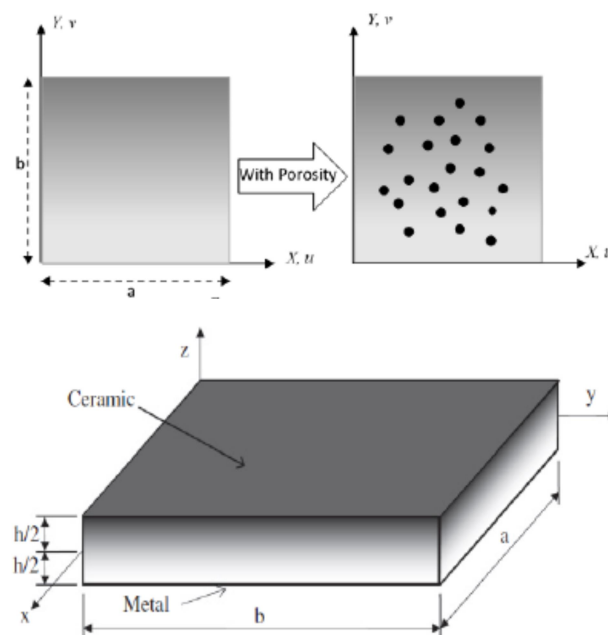


Figure IV.1 : La géométrie et les coordonnées de la plaque FGM.

IV.2. Propriétés des matériaux constitutifs de FGM

Une plaque FGM composée d'un mélange de deux phases de matériaux, par exemple un métal et une céramique. Les propriétés du matériau de la plaque FGM sont supposées varier de manière continue dans l'épaisseur de la plaque. Dans cette étude, on suppose que la plaque

imparfaite avoir des porosités se propageant dans l'épaisseur due à un défaut pendant la production. Considérons une plaque en FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la règle de mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est utilisée comme :

$$\bar{P}(z) = \bar{P}_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + \bar{P}_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV.1})$$

Maintenant, la fraction volumique totale du métal et de la céramique est $V_m + V_c = 1$, et l'indice de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P \quad (\text{IV.2})$$

Par conséquent, toutes les propriétés de la plaque en FGM imparfaite peuvent être écrites comme suit :

$$\bar{P}(z) = \bar{P}_m + (\bar{P}_c - \bar{P}_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P - (\bar{P}_c + \bar{P}_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV.3})$$

On note que le nombre réel positif P ($0 \leq P < \infty$) est l'indice de puissance ou l'indice de fraction volumique, et z la distance du plan moyen de la plaque FGM. La plaque FGM devient une plaque entièrement céramique lorsque P est mis à zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de P . Ainsi, les équations du module de Young (E) et de la densité du matériau (ρ) de la plaque en FGM imparfaite peuvent être exprimées comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV.4})$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV.5})$$

Puisque les influences de la variation du coefficient de Poisson (ν) sur le comportement des plaques en FGM sont très faibles (Yang et al. 2005, Kitipornchai et al. 2006), elles sont supposées constantes pour des raisons pratiques. En outre, pour un autre scénario de distribution de la porosité, il est possible d'obtenir des échantillons de FGM imparfaits, dont les porosités s'étalent presque autour de la zone médiane de la section transversale, et la quantité de porosité semble diminuer à zéro en haut et en bas de la section transversale. Sur la base du principe de la technique d'infiltration séquentielle à plusieurs étapes pouvant être utilisée pour fabriquer des échantillons de FGM (Wattanasakulpong et al. 2012), les porosités se produisent principalement dans la zone médiane. Dans cette zone, il est difficile d'infiltrer

complètement les matériaux, tandis qu'au niveau des zones supérieure et inférieure, le processus d'infiltration des matériaux peut être effectué plus facilement et laisse moins de porosité. Considérons ce scénario, les équations du module de Young (E) et la densité du matériau (ρ) dans les équations (4) et (5) sont remplacés par les formules suivantes :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{IV.6})$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{IV.7})$$

IV.3. Equations fondamentales

IV.3.1 Cinématique et déformations

Dans ce travail, d'autres hypothèses simplificatrices sont apportées à la théorie présentée afin de minimiser le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement de la théorie conventionnelle est donné par (Bakhadda et al. 2018, Belabed et al. 2018) :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y, t) \quad (\text{IV.8a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y, t) \quad (\text{IV.8b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV.8c})$$

où u_0 ; v_0 ; w_0 , φ_x , φ_y sont cinq déplacements inconnus du plan moyen de la plaque, $f(z)$ désigne la fonction de forme représentant la variation des déformations de cisaillement transversales et des contraintes dans l'épaisseur.

En considérant que (Menasria et al. 2017, Besseghier et al. 2017, El-Haina et al. 2017, Fahsi et al. 2017, Khetir et al. 2017, Yazid et al. 2018) $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$ le champ de déplacement du modèle actuel peut être exprimé sous une forme plus simple :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{IV.9a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{IV.9b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV.9c})$$

Dans cette étude, la fonction de forme est donnée par Reissner (1975) en tant que :

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.10)$$

On peut voir que le champ de déplacement dans Eq. (9) n'introduit que quatre inconnues (u_0 , v_0 , w_0 et θ). Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation (9) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.11)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (IV.12a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}$$

et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.12b)$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.13)$$

où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisé, dans ce cas par Navier. Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (IV.14)$$

où α et β sont définis dans l'expression (30).

Pour les plaques en FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation. En utilisant les propriétés du matériau définies dans Eq. (1), les coefficients de rigidité, C_{ij} , peuvent être donnés comme :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.16})$$

IV.3.2 Equations de mouvement

Pour déterminer les équations du mouvement, nous appliquons le principe de Hamilton (Meksi et al. 2018, Youcef et al. 2018, Hachemi et al. 2017, Zidi et al. 2017, Klouche et al.2017, Ahouel et al. 2016, Al-Basyouni et al. 2015, Attia et al. 2015, Ait Amar Meziane et al. 2014).

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV.17})$$

où δU est la variation de l'énergie de déformation; δV est la variation du travail externe effectué par la charge externe appliquée à la plaque; et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

où A est la surface supérieure et les résultantes de contraintes N, M, et S sont définis par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{et} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{IV.19})$$

La variation du travail externe peut être exprimée comme :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (\text{IV.20})$$

où q et (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont des charges appliquées transversalement et dans le plan, respectivement.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \right. \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

La différenciation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par Eq. (7); et (I_i, J_i, K_i) sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV.22a})$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV.22b})$$

En remplaçant les équations. (18), (20) et (21) dans l'équation (17), on peut déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= I_0 \ddot{w}_0 \\
 &+ I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 &- K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.23}$$

En substituant Eq. (11) dans Eq. (15) et les résultats ultérieurs en Eq. (19), les résultantes de contraintes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \tag{IV.24}$$

dans lequel

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{IV.25a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \tag{IV.25b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{IV.25c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{IV.25d}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \tag{IV.25e}$$

et les composants de rigidité sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.26a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV.26b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.26c})$$

Insertion de l'équation (24) en Eq. (23), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées prennent la forme

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_{11} \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_{11} \ddot{\theta}, \quad (\text{IV.27a})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_{22} \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_{22} \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_{22} \ddot{\theta}, \quad (\text{IV.27b})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta + N_x^0 d_{11} w_0 + 2 N_{xy}^0 d_{12} w_0 + N_y^0 d_{22} w_0 + q = \quad (\text{IV.27c})$$

$$I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) - (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 - (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2) d_{22} v_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - ((k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta = -J_1 (k_1 A' d_{11} \ddot{u}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \quad (\text{IV.27d})$$

où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2) \quad (\text{IV.28})$$

IV.3.3 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées

La méthode de la solution de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont écrites sous la forme de produits de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues afin de respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

où ω est la fréquence de vibration libre de la plaque, $\sqrt{-1}$ l'unité imaginaire.

avec

$$\alpha = m\pi/a \text{ and } \beta = n\pi/b \quad (\text{IV.30})$$

La charge transversale q est également étendue dans la série sinus de double-Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{IV.31})$$

où

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

$$= \begin{cases} q_0 \text{ pour charge répartie de manière sinusoïdale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} \text{ pour une charge uniformément répartie} \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

Considérant que la plaque est soumise à des charges de compression dans le plan de forme:

$$N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}, \quad N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{ici, } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ sont des paramètres de charge non dimensionnels}).$$

En substituant Eq. (29) dans Eq. (28), le problème suivant est obtenu :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}+k & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

où

$$S_{11} = -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad S_{12} = -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2),$$

$$\begin{aligned}
S_{14} &= \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2), \\
S_{22} &= -(A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2), & S_{23} &= \beta(B_{22} \beta^2 + B_{12} \alpha^2 + 2B_{66} \alpha^2), \\
S_{24} &= \beta(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2) & S_{33} &= -(D_{11} \alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^4), \\
S_{34} &= -k_1 (D_{11}^s \alpha^2 + D_{12}^s \beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 (D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2), \\
S_{44} &= -k_1 (H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2 (H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \\
k &= N_{cr} (\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2) \\
m_{11} &= -I_0, \quad m_{13} = \alpha I_1, \quad m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha, \quad m_{22} = -I_0, \quad m_{23} = \beta I_1, \quad m_{24} = -k_2 B' \beta J_1, \\
m_{33} &= -I_0 - I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \quad m_{34} = J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \quad m_{44} = -K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2)
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

Pour le cas des vibrations libres, nous avons l'énergie externe V zéro, ce qui donne $k = 0$ et $Q_{mn} = 0$; les fréquences de vibration sont obtenues en résolvant le système d'Eq. (33) en valeurs propres.

IV.4. Conclusion

Dans le présent chapitre, une théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique est développée pour étudier le comportement dynamique des plaques en FGM poreuses. Contrairement aux autres théories sur la déformation par cisaillement, seules quatre fonctions de déplacement inconnues sont utilisées dans la théorie actuelle, par contre cinq fonctions de déplacement inconnues utilisées dans d'autres théories. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur de la plaque selon la règle du mélange, qui est reformulée pour évaluer les caractéristiques du matériau avec les phases de porosité. Les équations du mouvement sont dérivées selon le principe de Hamilton.

Une validation de résultats ainsi qu'une étude paramétrique seront faites dans le chapitre qui suit.

Chapitre V

Validation et comparaison des résultats

V.1. Introduction

Dans ce chapitre, les résultats numériques de la fréquence fondamentale de la vibration libre des plaques en FGM sont présentés sous forme des tableaux et des graphes explicites. Les résultats sont comparés avec ceux trouvés dans la littérature.

V.2. Résultats numériques et discussion

La plaque FGM est supposée être en aluminium et en alumine avec les propriétés matérielles suivantes:

Céramique (alumine, Al_2O_3) $E_c = 380$ GPa, $\nu = 0,3$ et $\rho_c = 3800$ kg / m³.

Céramique (Zircone, ZrO_2) $E_c = 200$ GPa, $\nu = 0,3$ et $\rho_c = 5700$ kg / m³.

Céramique (Carbure de Silicium, SiC) $E_c = 450$ GPa, $\nu = 0,3$ et $\rho_c = 3110$ kg / m³.

Métal (aluminium, Al) $E_m = 70$ GPa, $\nu = 0,3$ et $\rho_m = 2702$ kg / m³.

Pour des raisons de simplicité, le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel suivant est utilisé dans les exemples numériques.

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \hat{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$$

Tout d'abord, nous allons tester la précision de cette théorie en comparant les résultats de fréquences adimensionnelles avec ceux de la littérature. Dans cette partie, divers exemples numériques sont décrits, discutés et comparés à d'autres théories existantes telles que la théorie de la déformation hyperbolique du cisaillement présentée par Mouaici et al. (2016), la théorie classique des plaques (CPT), la théorie des plaques de déformation au premier ordre (FSDPT) [Hosseini-Hashemi S., 2011(c)], la solution exacte 3D (Vel S.S., 2004) et la théorie

de la contrainte de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ([Hosseini-Hashemi S., 2011(b)], [Matsunaga H., 2008]).

Tableau V.1 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ de la plaque carrée Al / ZrO₂

Théorie	Porosité	P=1			a/h=5		
		a/h=5	a/h=10	a/h=20	P=2	P=3	P=5
Vel et Batra (2004) 3-D	$\alpha=0$	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Matsunaga (2008) HSDT		0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.2270	0.2281
Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT		0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.2276	0.0619	0.0158	0.2264	0.2276	0.2291
CPT		0.2479	0.0634	0.0159	0.2473	0.2497	0.2526
Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.2276	0.0618	0.0158	0.2257	0.2263	0.2272
	$\alpha=0.1$	0.2258	0.0612	0.0156	0.2228	0.2233	0.2244
	$\alpha=0.2$	0.2231	0.0604	0.0154	0.2184	0.2186	0.2199
Present	$\alpha=0$	0,2276	0,0618	0,0158	0,2256	0,2262	0,2271
	$\alpha=0.1$	0,2258	0,0612	0,0156	0,2228	0,2232	0,2243
	$\alpha=0.2$	0,2231	0,0604	0,0154	0,2184	0,2185	0,2197

Tableau V.2 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle $\hat{\beta}$ de la plaque carrée Al / Al₂O₃

a/h	Mode	Théorie	Porosité	p			
				0.5	1	4	10
5	(1,1)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		CPT		0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.1807	0.1631	0.1397	0.1301
			$\alpha=0.1$	0.1806	0.1599	0.1280	0.1195
			$\alpha=0.2$	0.1803	0.1552	0.1111	0.1009
		Present	$\alpha=0$	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
			$\alpha=0.1$	0.1806	0.1599	0.1280	0.1195

			$\alpha=0.2$	0.1804	0.1553	0.1110	0.1008
	(1,2)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		CPT		0.4681	0.4198	0.3603	0.3481
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.3988	0.3606	0.2982	0.2772
			$\alpha=0.1$	0.3991	0.3544	0.2776	0.2534
			$\alpha=0.2$	0.3991	0.3453	0.2428	0.2128
	Present	$\alpha=0$	0.3989	0.3607	0.2979	0.2771	
		$\alpha=0.1$	0.3991	0.3545	0.2773	0.2531	
		$\alpha=0.2$	0.3992	0.3454	0.2425	0.2123	
	(2,2)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		CPT		0.7184	0.6425	0.5478	0.5306
Mouaici et al. (2016)		$\alpha=0$	0.5801	0.5253	0.4288	0.3950	
		$\alpha=0.1$	0.5810	0.5171	0.4000	0.3601	
		$\alpha=0.2$	0.5816	0.5050	0.3517	0.3018	
Present	$\alpha=0$	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948		
	$\alpha=0.1$	0.5811	0.5172	0.3994	0.3597		
	$\alpha=0.2$	0.5817	0.5051	0.3512	0.3009		
10	(1,1)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		CPT		0.0502	0.0452	0.0392	0.0377
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363
			$\alpha=0.1$	0.0489	0.0432	0.0353	0.0336
			$\alpha=0.2$	0.0489	0.0418	0.0304	0.0285
Present	$\alpha=0$	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364		
	$\alpha=0.1$	0.0489	0.0432	0.0353	0.0336		

			$\alpha=0.2$	0.0488	0.0419	0.0304	0.0285
	(1,2)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		CPT		0.1239	0.1115	0.0966	0.0930
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.1173	0.1059	0.0902	0.0856
			$\alpha=0.1$	0.1172	0.1037	0.0837	0.0788
			$\alpha=0.2$	0.1170	0.1006	0.0724	0.0668
		Present	$\alpha=0$	0.1174	0.1059	0.0902	0.0856
			$\alpha=0.1$	0.1173	0.1037	0.0837	0.0788
			$\alpha=0.2$	0.1170	0.1006	0.0724	0.0667
	(2,2)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		CPT		0.1959	0.1762	0.1524	0.1467
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.1807	0.1631	0.1379	0.1301
			$\alpha=0.1$	0.1631	0.1599	0.1280	0.1195
			$\alpha=0.2$	0.1599	0.1552	0.1111	0.1009
		Present	$\alpha=0$	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
			$\alpha=0.1$	0.1806	0.1599	0.1280	0.1195
			$\alpha=0.2$	0.1804	0.1553	0.1110	0.1008
20	(1,1)	Hosseini –Hashemi et al. (2011b) HSDT	$\alpha=0$	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT		0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		CPT		0.0126	0.0114	0.0099	0.0095
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
			$\alpha=0.1$	0.0125	0.0110	0.0090	0.0087
			$\alpha=0.2$	0.0124	0.0106	0.0078	0.0074
		Present	$\alpha=0$	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
			$\alpha=0.1$	0.0125	0.0111	0.0091	0.0087

			$\alpha=0.2$	0.0125	0.0107	0.0078	0.0074
--	--	--	--------------	--------	--------	--------	--------

Tableau V.3 : Comparaison du paramètre de fréquence ω de la plaque rectangulaire Al / Al₂O₃ (b = 2a)

a/h	Mode	Théorie	Porosité	P					
				1	2	5	8	10	
5	(1,1)	Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677	
			$\alpha=0$	2.6476	2.3952	2.2285	2.1707	2.1414	
				$\alpha=0.1$	2.5934	2.2740	2.0610	2.0009	1.9723
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0.2$	2.5150	2.0819	1.7655	1.6971	1.6703	
			Present	$\alpha=0$	2.6475	2.3949	2.2272	2.1696	2.1407
				$\alpha=0.1$	2.5934	2.2737	2.0594	1.9993	1.9711
		$\alpha=0.2$		2.5150	2.0817	1.7638	1.6948	1.6683	
		(1,2)	Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
				$\alpha=0$	4.0782	3.6812	3.3966	3.2987	3.2529
	$\alpha=0.1$				3.9982	3.4997	3.1417	3.0358	2.9893
	Mouaici et al. (2016)		$\alpha=0.2$	3.8821	3.2118	2.6966	2.5724	2.5249	
			Present	$\alpha=0$	4.07809	3.6805	3.3938	3.2964	3.2513
				$\alpha=0.1$	3.99813	3.4991	3.1383	3.0325	2.9868
	$\alpha=0.2$			3.88199	3.2114	2.6930	2.5676	2.5206	
	(1,3)		Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$	6.2626	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
				$\alpha=0$	6.2664	5.6403	5.1481	4.9804	4.9085
		$\alpha=0.1$			6.1508	5.3723	4.7631	4.5748	4.4985
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0.2$	5.9821	4.9466	4.1001	3.8729	4.9804	
			Present	$\alpha=0$	6.2662	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
				$\alpha=0.1$	6.1507	5.3711	4.7564	4.5683	4.4937
		$\alpha=0.2$		5.9820	4.9458	4.0928	3.8633	3.7798	
(2,1)		Hosseini –Hashemi et al.	$\alpha=0$	7.7811	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518	

10	(1,1)	(2011c) FSDT							
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	7.8762	7.0768	6.4153	6.1909	6.0995	
			$\alpha=0.1$	7.7369	6.7490	5.9372	5.6808	5.5811	
			$\alpha=0.2$	7.5330	6.2278	5.1208	4.8076	4.6922	
		Present	$\alpha=0$	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954	
			$\alpha=0.1$	7.7369	6.7474	5.9277	5.6717	5.5745	
			$\alpha=0.2$	7.5330	6.2268	5.1105	4.7941	4.6804	
		(1,2)	Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
				Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	2.7937	2.5365	2.3920	2.3414
$\alpha=0.1$	2.7328				2.4031	2.2122	2.1643	2.1370	
$\alpha=0.2$	2.6452		2.1921		1.8894	1.8396	1.8189		
Present	$\alpha=0$		2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110		
	$\alpha=0.1$		2.7329	2.4030	2.2117	2.1638	2.1366		
	$\alpha=0.2$		2.6453	2.1921	1.8889	1.8390	1.8182		
Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$		4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580		
	Mouaici et al. (2016)		$\alpha=0$	4.4193	4.0092	3.7693	3.6855	3.2529	
			$\alpha=0.1$	4.3243	3.8001	3.4859	3.4043	2.9893	
			$\alpha=0.2$	4.1875	3.4693	2.9792	2.8922	2.5249	
	Present		$\alpha=0$	4.4192	4.0089	3.7682	3.6846	3.6368	
		$\alpha=0.1$	4.3243	3.7999	3.4847	3.4031	3.3592		
$\alpha=0.2$		4.1874	3.4691	2.9778	2.8903	2.8548			
(1,3)	Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086		
		Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	7.0516	6.3893	5.9790	5.8362	5.7590	
			$\alpha=0.1$	6.9033	6.0604	5.5295	5.3858	5.3128	
	$\alpha=0.2$		6.6891	5.5398	4.7305	4.5720	4.5085		
	Present	$\alpha=0$	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575		
		$\alpha=0.1$	6.9032	6.0598	5.5265	5.3827	5.3105		
$\alpha=0.2$		6.6890	5.5393	4.7272	4.5675	4.5045			
(2,1)	Hosseini –Hashemi et al. (2011c) FSDT	$\alpha=0$	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639		

	Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	9.0935	8.2319	7.6772	7.4847	7.3845
		$\alpha=0.1$	8.9053	7.8123	7.1001	6.9022	6.8058
		$\alpha=0.2$	8.6331	7.1479	6.0788	5.8564	5.7685
	Present	$\alpha=0$	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821
		$\alpha=0.1$	8.9051	7.8114	7.0953	6.8974	6.8021
		$\alpha=0.2$	8.6329	7.1472	6.0736	5.8493	5.7621

Le tableau V.1 présente une comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ d'après ces résultats on voit qu'il y a un grand accord entre nos résultats et les résultats obtenus par Mouaici [Mouaici F., 2016] et Hosseini-Hashemi [Hosseini-Hashemi S., 2011(b), (c)] et un peu grand par rapport à la solution exacte présentée par Vel et Batra [Vel, S.S., 2004], et un peu petit par rapport aux résultats de la théorie classique (CPT) pour le cas des plaque parfaite ($\alpha = 0$).

Dans le tableau V.2 en utilisant différentes théories de plaques pour la comparaison du paramètre de fréquence naturelle $\hat{\beta}$ de la plaque carrée Al / Al₂O₃ avec différents rapports d'épaisseur (a / h) et de l'indice de puissance P. Les résultats du présent modèle dans le cas de la plaque parfaite ($\alpha = 0$) est en bon accord avec celles obtenus par [Hosseini-Hashemi S., 2011(b), (c)] et [Mouaici F., 2016]. En outre, les résultats de la théorie classique des plaques (CPT) surestiment la fréquence naturelle des plaques FGM, en particulier pour la plaque épaisse à des modes de vibration plus élevés. De plus, on peut montrer que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la porosité (α). Lorsque l'indice de puissance P augmente pour les plaques FGM, la fréquence naturelle diminue. Ces fréquences sont également sensibles à la variation du rapport a/h .

Une comparaison de la fréquence ϖ de la plaque rectangulaire parfaite et imparfaite Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance P et rapport d'épaisseur (a/h) est présenté dans le Tableau V.3. On peut observer qu'il y a un grand accord entre nos résultats et les résultats obtenus par [Mouaici F., 2016], et une petite différence avec les résultats de [Hosseini-Hashemi S., 2011(c)]; ceci est dû aux différentes approches utilisées pour prédire les fréquences naturelles. La première théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) présentée par [Hosseini-Hashemi S., 2011 (c)] ont cinq inconnues contrairement à la présente théorie qui utilisent quatre inconnues. En outre, la fréquence diminue avec l'existence d'une imperfection dans la plaque ($\alpha \neq 0$).

Tableau V.4 : Neuf premiers paramètres de fréquence de la plaque carrée Al / Al₂O₃ (a / h = 5)

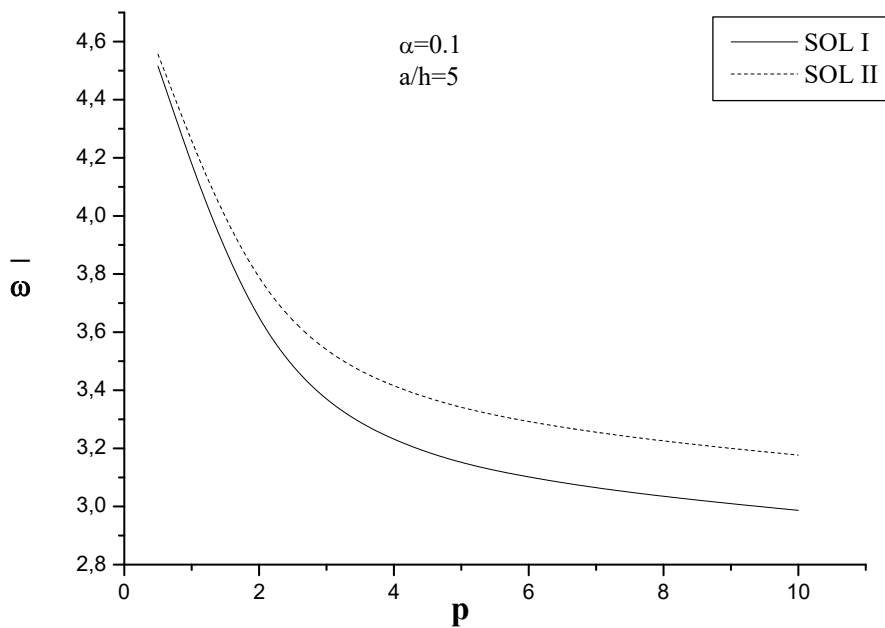
Mode N°	Théorie	Porosité	P					
			0.5	1	2	5	10	100
1 (1,1)	Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	4.5181	4.0782	3.6812	3.3966	3.2529	2.8175
		$\alpha=0.1$	4.5158	3.9982	3.4997	3.1417	2.9893	2.5267
		$\alpha=0.2$	4.5096	3.8821	3.2118	2.6966	2.5249	2.0688
	Present	$\alpha=0$	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2514	2.8204
		$\alpha=0.1$	4.5157	3.9981	3.4991	3.1383	2.9868	2.5273
		$\alpha=0.2$	4.5095	3.8820	3.2114	2.6930	2.5206	2.0697
2 (2,1)	Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	9.9714	9.0164	8.0925	7.3040	6.9318	6.1291
		$\alpha=0.1$	9.9783	8.8616	7.7240	6.7612	6.3365	5.4824
		$\alpha=0.2$	9.9797	8.6343	7.1378	5.8394	5.3223	4.4593
	Present	$\alpha=0$	9.9715	9.0166	8.0905	7.2944	6.9270	6.1369
		$\alpha=0.1$	9.9784	8.8617	7.7223	6.7496	6.3286	5.4854
		$\alpha=0.2$	9.9798	8.6345	7.1367	5.8268	5.3081	4.4634
3 (1,2)	Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	9.9714	9.0164	8.0925	7.3040	6.9318	6.1291
		$\alpha=0.1$	9.9783	8.8616	7.7240	6.7612	6.3365	5.4824
		$\alpha=0.2$	9.9797	8.6343	7.1378	5.8394	5.3223	4.4593
	Present	$\alpha=0$	9.9715	9.0166	8.0905	7.2944	6.9270	6.1369
		$\alpha=0.1$	9.9784	8.8617	7.7223	6.7496	6.3286	5.4854
		$\alpha=0.2$	9.9798	8.6345	7.1368	5.8268	5.3081	4.4634
4 (2,2)	Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	14.5049	13.1339	11.7508	10.4660	9.8768	8.8372
		$\alpha=0.1$	14.5261	12.9296	11.2462	9.6970	9.0043	7.8932
		$\alpha=0.2$	14.5423	12.6272	10.4411	8.4136	7.5460	6.3957
	Present	$\alpha=0$	14.5064	13.1354	11.7487	10.4506	9.8703	8.8508
		$\alpha=0.1$	14.5275	12.9311	11.2445	9.67822	8.9925	7.8999
		$\alpha=0.2$	14.5436	12.6286	10.4406	8.39291	7.5231	6.4043
5 (3,1)	Mouaici et al. (2016)	$\alpha=0$	17.1907	15.5781	13.9180	12.3165	11.5907	10.4286
		$\alpha=0.1$	17.2224	15.3488	13.3393	11.4184	10.5546	9.3081
		$\alpha=0.2$	17.2502	15.0078	12.4146	9.9325	8.8382	7.5288
	Present	$\alpha=0$	17.1939	15.5813	13.9166	12.2984	11.5840	10.4464
		$\alpha=0.1$	17.2254	15.3518	13.3383	11.3958	10.5410	9.3179

		$\alpha=0.2$	17.2529	15.0107	12.4152	9.9073	8.8108	7.5409
6 (1,3)	Mouaïci et al. (2016)	$\alpha=0$	17.1907	15.5781	13.9180	12.3165	11.5907	10.4286
		$\alpha=0.1$	17.2224	15.3488	13.3393	11.4184	10.5546	9.3081
		$\alpha=0.2$	17.2502	15.0078	12.4146	9.9325	8.8382	7.5288
	Present	$\alpha=0$	17.19387	15.58130	13.91658	12.29840	11.58401	10.44643
		$\alpha=0.1$	17.22541	15.35184	13.33835	11.39582	10.54106	9.31793
		$\alpha=0.2$	17.25290	15.01068	12.41521	9.90734	8.81078	7.54093
7 (3,2)	Mouaïci et al. (2016)	$\alpha=0$	20.8537	18.9173	16.8757	14.8221	13.9024	12.5875
		$\alpha=0.1$	20.9019	18.6582	16.2029	13.7530	12.6443	11.2264
		$\alpha=0.2$	20.9481	18.2705	15.1256	12.0027	10.5816	9.0621
	Present	$\alpha=0$	20.8603	18.9239	16.8765	14.8013	13.8967	12.6124
		$\alpha=0.1$	20.9081	18.6645	16.2042	13.7262	12.6296	11.2416
		$\alpha=0.2$	20.9538	18.2763	15.1288	11.9724	10.5488	9.0802
8 (2,3)	Mouaïci et al. (2016)	$\alpha=0$	20.8537	18.9173	16.8757	14.8221	13.9024	12.5875
		$\alpha=0.1$	20.9019	18.6582	16.2029	13.7530	12.6443	11.2264
		$\alpha=0.2$	20.9481	18.2705	15.1256	12.0027	10.5816	9.0621
	Present	$\alpha=0$	20.8603	18.9239	16.8765	14.8013	13.8967	12.6124
		$\alpha=0.1$	20.9081	18.6645	16.2042	13.7262	12.6296	11.2416
		$\alpha=0.2$	20.9538	18.2763	15.1288	11.9724	10.5487	9.0802
9 (4,1)	Mouaïci et al. (2016)	$\alpha=0$	25.2274	22.9124	20.4125	17.7953	16.6351	15.1525
		$\alpha=0.1$	25.2978	22.6233	19.6365	16.5287	15.1139	13.5042
		$\alpha=0.2$	25.3690	22.1875	18.3910	14.4786	12.6451	10.8801
	Present	$\alpha=0$	25.2402	22.9251	20.4180	17.7735	16.6330	15.1878
		$\alpha=0.1$	25.3100	22.6354	19.6426	16.49900	15.1002	13.5278
		$\alpha=0.2$	25.3805	22.1989	18.3994	14.4439	12.6078	10.9072

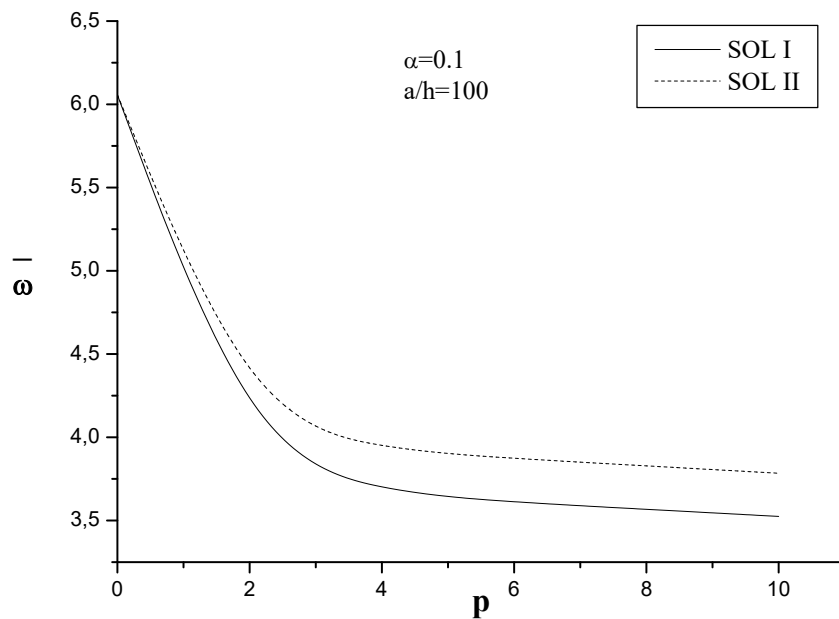
Dans le tableau V.4, autre comparaison avec les résultats de [Mouaïci F., 2016] pour les neuf premiers modes de la fréquence ω d'une plaque carrée Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance P et un rapport d'épaisseur (a/h = 5). Là aussi les résultats sont en grande concordance avec ceux de [Mouaïci F., 2016].

Dans les figures V.1 (a) et (b), nous présentons une comparaison entre deux solutions de porosité en traçant l'évolution de la fréquence. Le coefficient de porosité est pris $\alpha = 0,1$ et

l'épaisseur de la plaque est $h = 0,2$ m (Figure V.1 (a)) et $h = 0,01$ m (Figure V.1 (b)). On peut voir que la fréquence diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance et que la solution II fournit des fréquences plus élevées que celles de la solution I. Ceci est dû à la distribution de la porosité sur l'épaisseur. En effet, la distribution linéaire de la porosité (solution II) et la distribution constante (solution I) de la porosité sont très différentes pour induire des résultats différents.

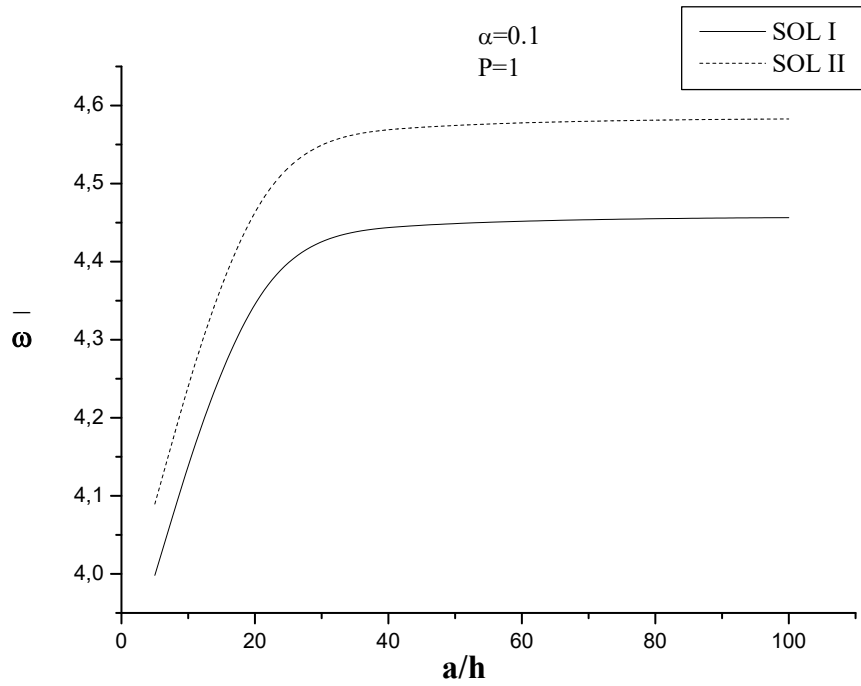


(a)

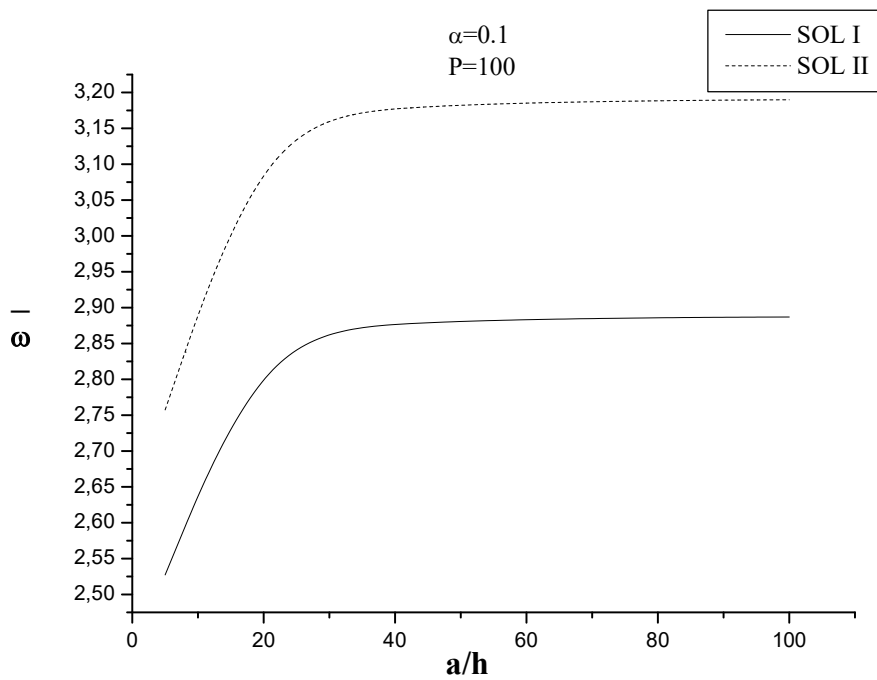


(b)

Figure V. 1 : Influence de l'indice de puissance de la plaque imparfaite ($\alpha = 0,1$) sur la fréquence, (a) $a / h = 5$ et (b) $a / h = 100$



(a)

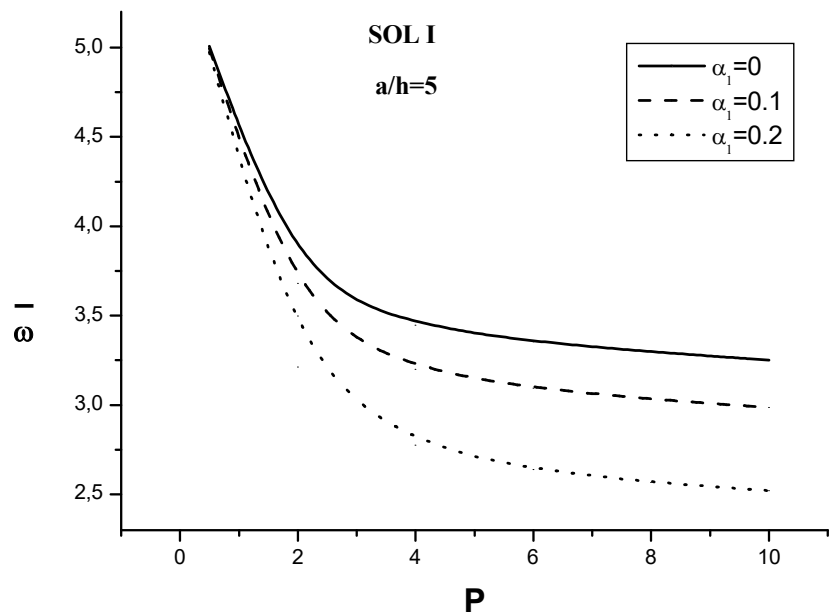


(b)

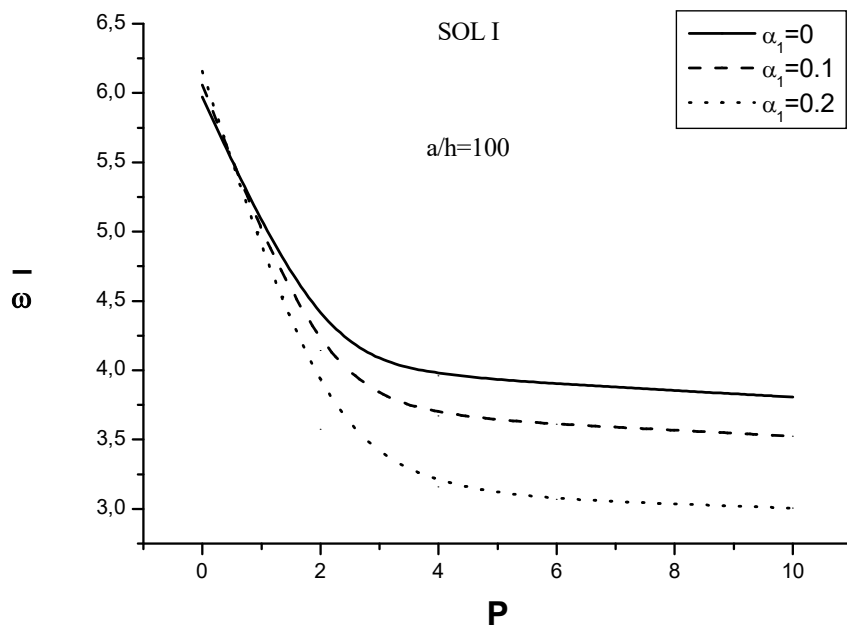
Figure V.2 : Influence du rapport d'épaisseur de la plaque imparfaite ($\alpha = 0.1$) sur la fréquence, (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$

Nous étudions la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur a/h pour les deux distributions de la porosité pour l'indice de puissance $P = 1$ et $P = 100$.

Dans les figures 2 (a) et (b). Il a été constaté que l'augmentation du rapport d'épaisseur augmente la fréquence adimensionnelle.



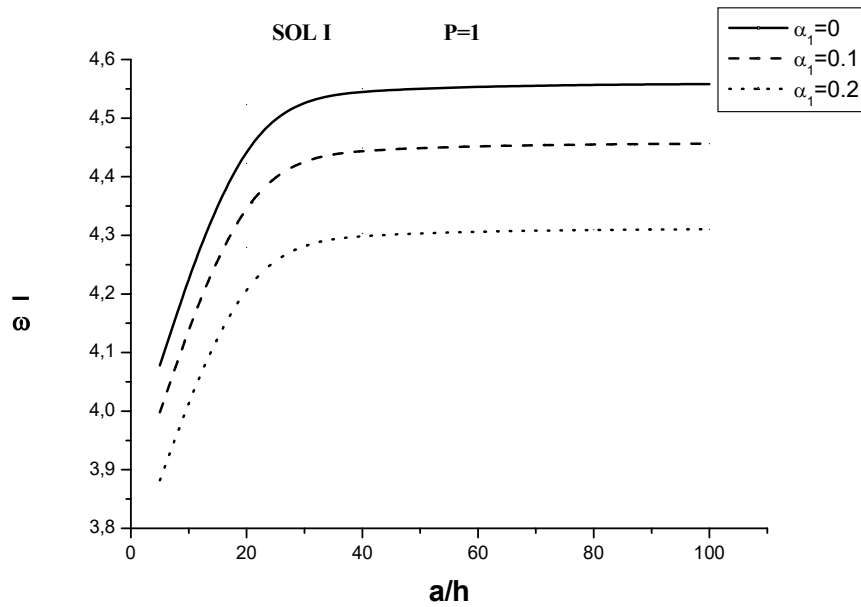
(a)



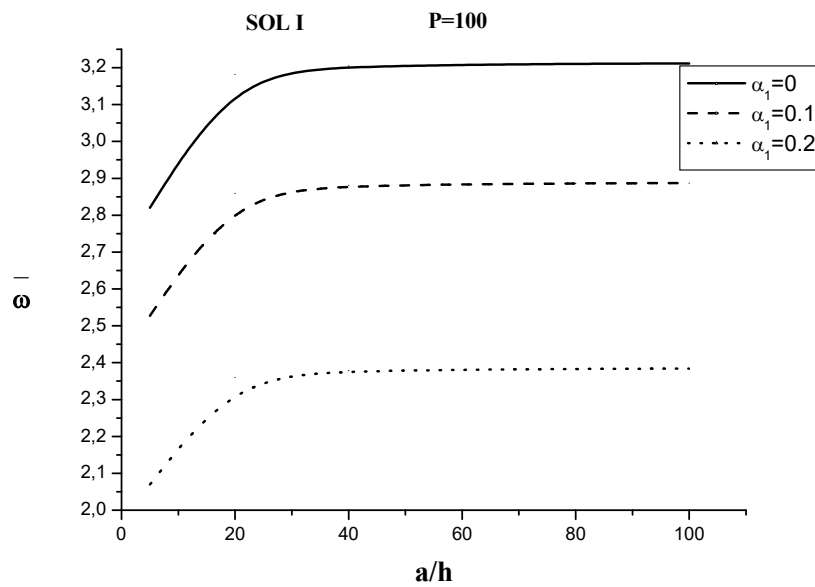
(b)

Figure V.3 : Effet de l'indice de puissance de la plaque carrée FG sur le paramètre de fréquence fondamentale, (a) $a/h = 5$ et (b) $a/h = 100$

Les figures V.3 (a) et 3 (b) présentent la variation du paramètre de fréquence avec l'indice de puissance P donné pour $a / h = 5$ et $a / h = 100$ respectivement. Selon ces figures, le paramètre de fréquence décroît avec l'augmentation de l'indice P et du paramètre de porosité α .



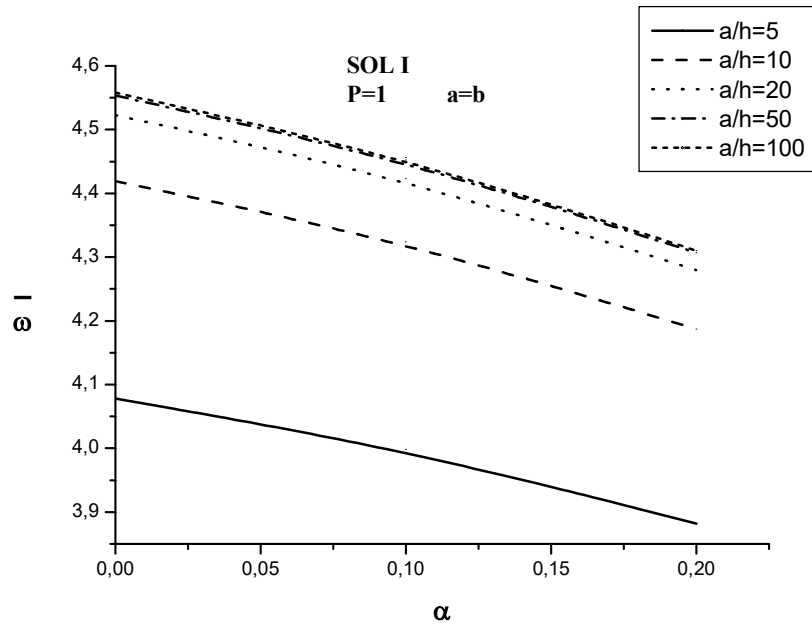
(a)



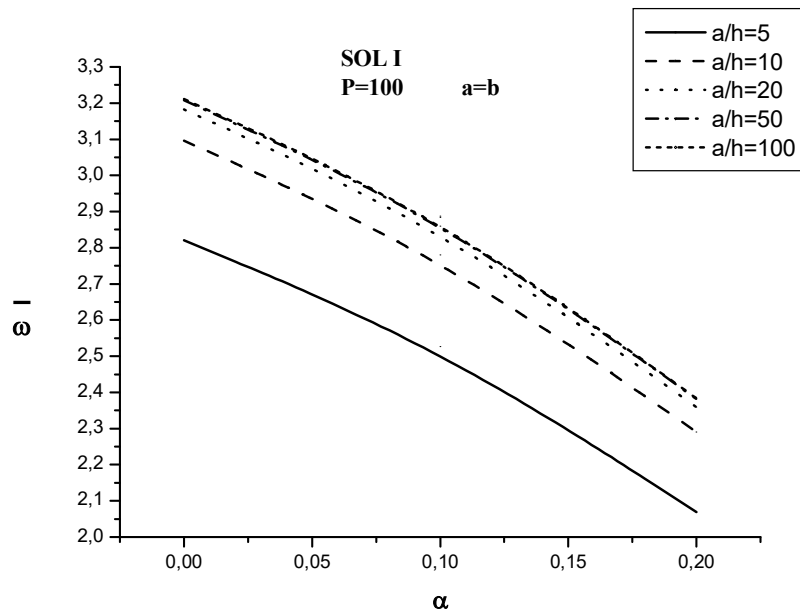
(b)

Figure V.4 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur a / h et du coefficient de porosité α , (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$

Les figures V.4 (a) et 4 (b) décrivent les paramètres de fréquence fondamentaux en fonction du rapport d'épaisseur de la plaque FGM pour $p = 1$ et $p = 100$ respectivement. On voit que les résultats augmentent lorsque le rapport d'épaisseur de la plaque augmente dans tous les cas (plaque parfaite et imparfaite). De plus, la fréquence adimensionnelle est approximativement insensible au rapport a/h après $a/h > 30$ pour tous les cas (plaque parfaite et imparfaite).



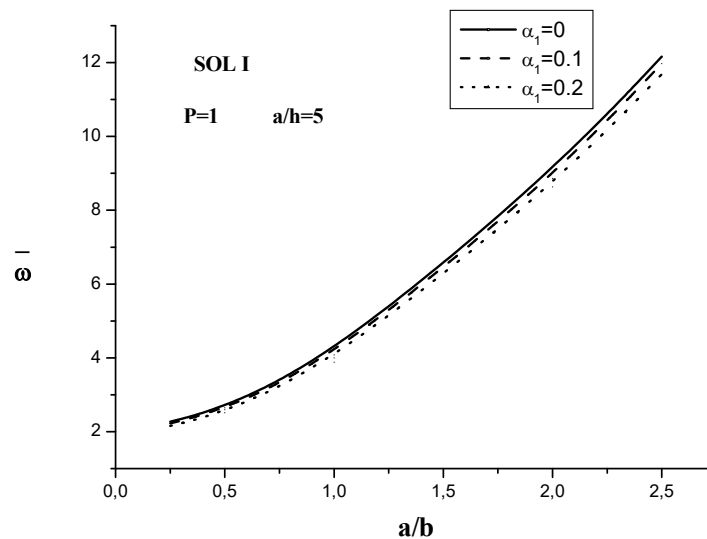
(a)



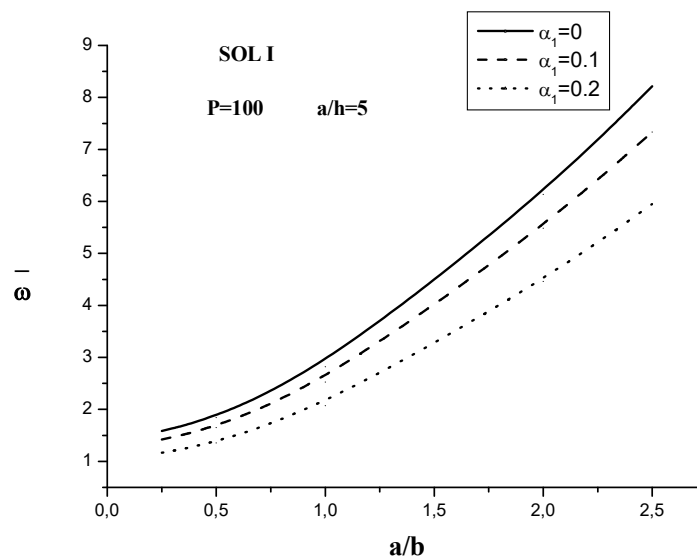
(b)

Figure V.5 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la porosité pour différents rapports d'épaisseur a/h , (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$

A partir des figures V.5 (a) et (b), la fréquence adimensionnelle est établie en fonction de la porosité et pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur. On peut déduire de cette courbe que l'augmentation de la porosité réduit la fréquence adimensionnelle, quel que soit le rapport d'épaisseur. Au contraire, une augmentation du rapport d'épaisseur entraîne une augmentation de la fréquence adimensionnelle.



(a)



(b)

Figure V.6 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique (a/b) et du coefficient de porosité α , (a) $P = 1$ et (b) $P = 100$

L'influence du coefficient de porosité α sur la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique pour $P = 1$ et $P = 100$ sont illustrés sur les figures 6 (a) et (b), respectivement, pour une plaque FGM. Le rapport d'épaisseur a/h est considéré égal à 5. On peut constater que la fréquence adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport géométrique. En effet, selon la figure V.6 (a) ($P = 1$) les fréquences sont très proches, et ce quel que soit l'état de la plaque (parfait ou imparfait). Cependant, pour le cas où $P = 100$, la différence entre les fréquences pour les différents cas de porosité est considérable.

V.3. Comparaison entre les plaques en FGM

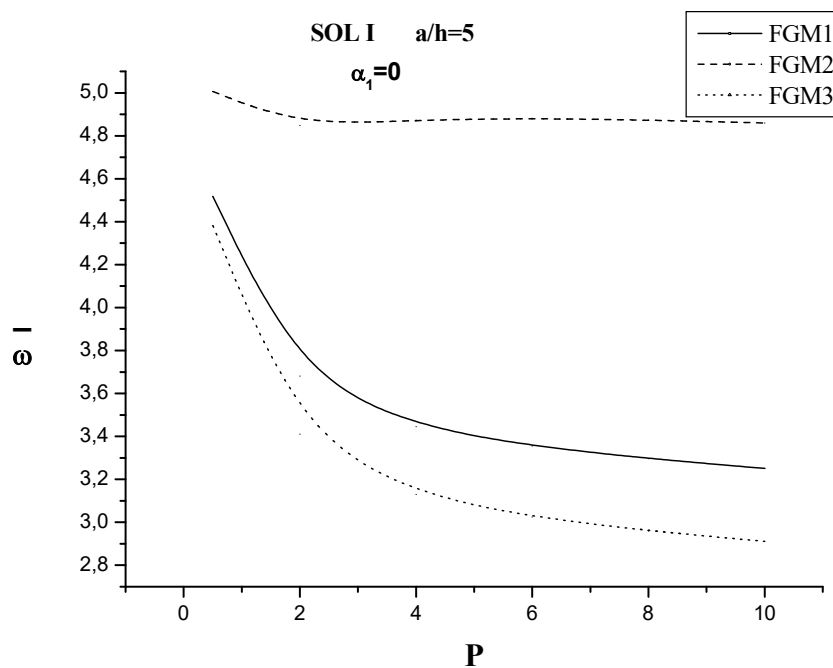
Tableau V.5 : Comparaison du paramètre de fréquence naturelle $\hat{\beta}$ des trois types de plaques en FGM

a/h	Mode	Théorie	Porosité	p			
				0.5	1	4	10
5	(1,1)	FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.18072	0.16312	0.13783	0.13005
			$\alpha=0.1$	0.18063	0.15992	0.12798	0.11947
			$\alpha=0.2$	0.18038	0.15528	0.11102	0.10082
		FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.20026	0.19563	0.19495	0.19441
			$\alpha=0.1$	0.19972	0.19404	0.19245	0.19225
			$\alpha=0.2$	0.19898	0.19177	0.18840	0.18871
		FGM3 (AL/SiC)	$\alpha=0$	0.17525	0.15494	0.12521	0.11648
			$\alpha=0.1$	0.17537	0.15157	0.11437	0.27050
			$\alpha=0.2$	0.17537	0.14668	0.09527	0.08367
	(1,2)	FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.39886	0.36066	0.29795	0.27708
			$\alpha=0.1$	0.39914	0.72487	0.27732	0.25315
			$\alpha=0.2$	0.39919	0.34538	0.24248	0.21232
		FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.44100	0.43073	0.42185	0.41889
			$\alpha=0.1$	0.44022	0.42786	0.41620	0.41317
			$\alpha=0.2$	0.43910	0.42375	0.40738	0.40413
		FGM3 (AL/SiC)	$\alpha=0$	0.38676	0.34258	0.27072	0.24771
			$\alpha=0.1$	0.38747	0.33598	0.24808	0.22166
			$\alpha=0.2$	0.38805	0.32626	0.20881	0.17606
	(2,2)	FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.58026	0.52542	0.42836	0.39481
			$\alpha=0.1$	0.58110	0.51724	0.39945	0.35970
			$\alpha=0.2$	0.58174	0.50514	0.35123	0.30092

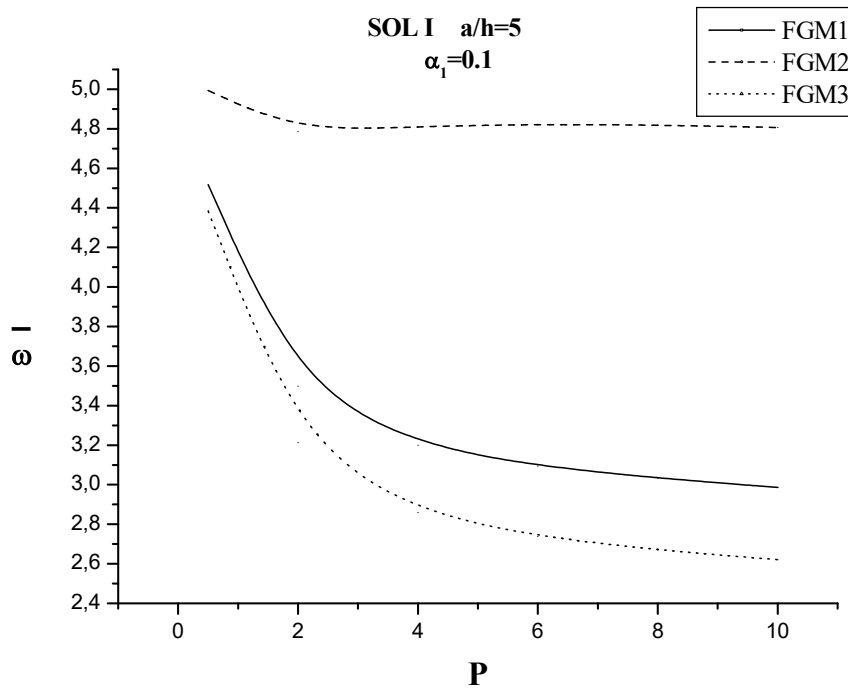
		FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.64055	0.62559	0.60637	0.60470	
			$\alpha=0.1$	0.63977	0.62199	0.59808	0.59156	
			$\alpha=0.2$	0.63861	0.61683	0.58540	0.57745	
		FGM3 (AL/SiC)	$\alpha=0$	0.56267	0.49916	0.38934	0.35264	
			$\alpha=0.1$	0.56412	0.49034	0.35766	0.31465	
			$\alpha=0.2$	0.56550	0.47725	0.30322	0.24957	
	10	(1,1)	FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.04901	0.04419	0.03807	0.03637
				$\alpha=0.1$	0.04894	0.04324	0.03529	0.03359
				$\alpha=0.2$	0.04882	0.04187	0.03044	0.02855
			FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.05440	0.05316	0.05376	0.05380
				$\alpha=0.1$	0.05422	0.05266	0.05309	0.05333
				$\alpha=0.2$	0.05396	0.05196	0.05198	0.05251
FGM3 (AL/SiC)			$\alpha=0$	0.04753	0.04198	0.03459	0.03263	
			$\alpha=0.1$	0.04752	0.04099	0.03153	0.02954	
			$\alpha=0.2$	0.04747	0.03956	0.02606	0.02373	
(1,2)		FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.11739	0.10590	0.09025	0.08563	
			$\alpha=0.1$	0.11728	0.10373	0.08374	0.07884	
			$\alpha=0.2$	0.11705	0.10060	0.07244	0.06673	
	FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.13018	0.12718	0.12757	0.12742		
		$\alpha=0.1$	0.12979	0.12608	0.12596	0.12613		
		$\alpha=0.2$	0.12925	0.12451	0.12332	0.12398		
	FGM3 (AL/SiC)	$\alpha=0$	0.11384	0.10059	0.08199	0.07675		
		$\alpha=0.1$	0.11387	0.09832	0.07482	0.06926		
		$\alpha=0.2$	0.11381	0.09503	0.06210	0.05542		
(2,2)	FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.18072	0.16312	0.13783	0.13005		
		$\alpha=0.1$	0.18062	0.15992	0.12798	0.11947		
		$\alpha=0.2$	0.18038	0.15528	0.11102	0.10082		
	FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.20026	0.19563	0.19495	0.19441		
		$\alpha=0.1$	0.19972	0.19404	0.19245	0.19225		
		$\alpha=0.2$	0.19898	0.19177	0.18840	0.18871		
	FGM3 (AL/SiC)	$\alpha=0$	0.17525	0.15494	0.12521	0.11648		
		$\alpha=0.1$	0.17537	0.15157	0.11437	0.10484		
		$\alpha=0.2$	0.17537	0.14668	0.09527	0.08367		

20	(1,1)	FGM1 (AL/AL ₂ O ₃)	$\alpha=0$	0.04901	0.04419	0.03807	0.03637
			$\alpha=0.1$	0.04894	0.04324	0.03529	0.03359
			$\alpha=0.2$	0.04882	0.04187	0.03044	0.02855
		FGM2 (AL/ZrO ₂)	$\alpha=0$	0.01393	0.01361	0.01383	0.01386
			$\alpha=0.1$	0.01388	0.01348	0.01367	0.01375
			$\alpha=0.2$	0.01381	0.01329	0.01338	0.01356
		FGM3 (AL/SiC)	$\alpha=0$	0.01217	0.01074	0.00891	0.00844
			$\alpha=0.1$	0.01216	0.01048	0.00811	0.00766
			$\alpha=0.2$	0.01214	0.01011	0.00669	0.00617

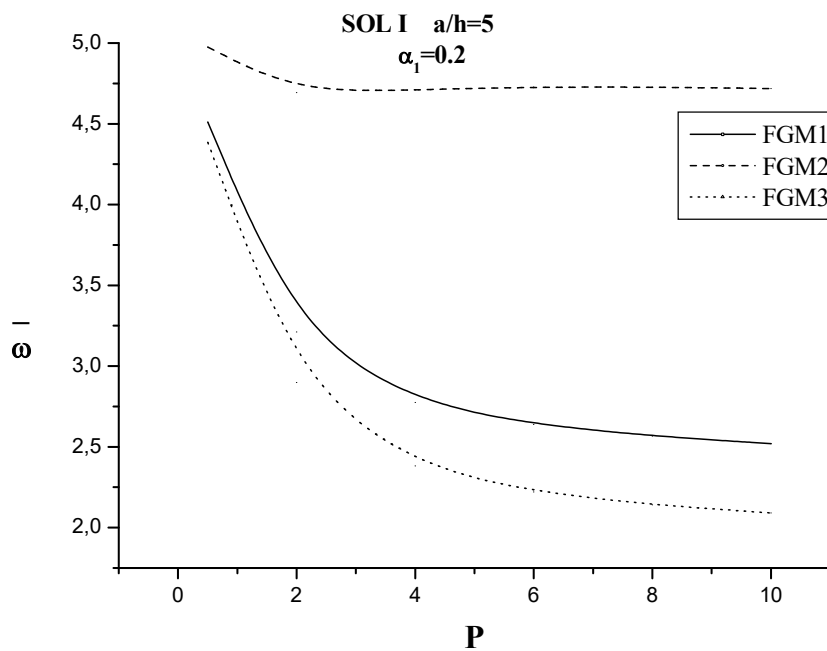
Le tableau V.5 présente les fréquences naturelles $\hat{\beta}$ des trois types de plaques en FGM (FGM 1 (AL/AL₂O₃), FGM 2 (AL/ZrO₂) et FGM 3 (AL/SiC)) pour différents cas de porosité. À partir des résultats présentés dans ce tableau, on peut remarquer que la plaque en FGM 2 (AL/ZrO₂) fournit des valeurs de la fréquence naturelle plus élevées que les autres types de plaques, quel que soit le facteur de porosité α , l'indice de puissance P et le rapport épaisseur a/h.



(a)



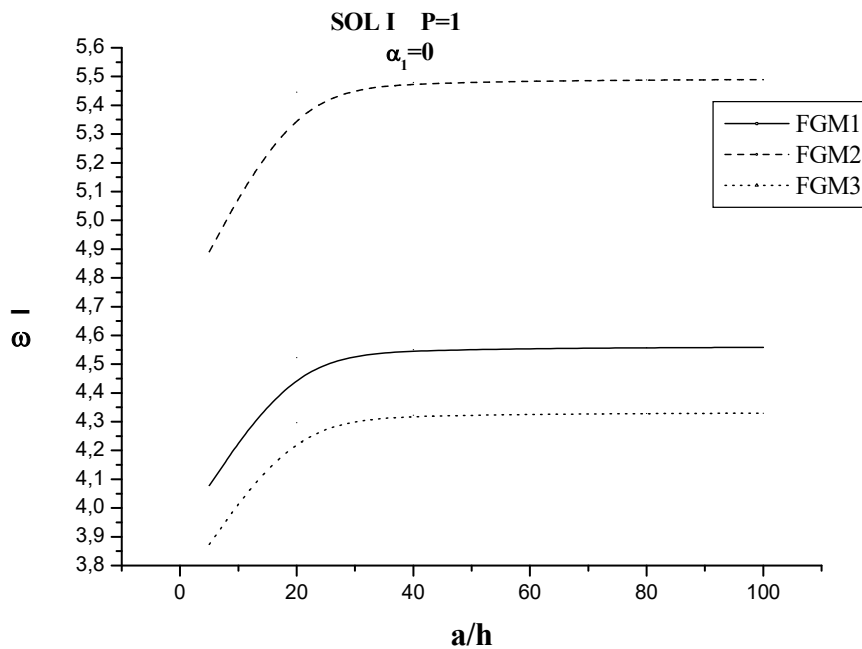
(b)



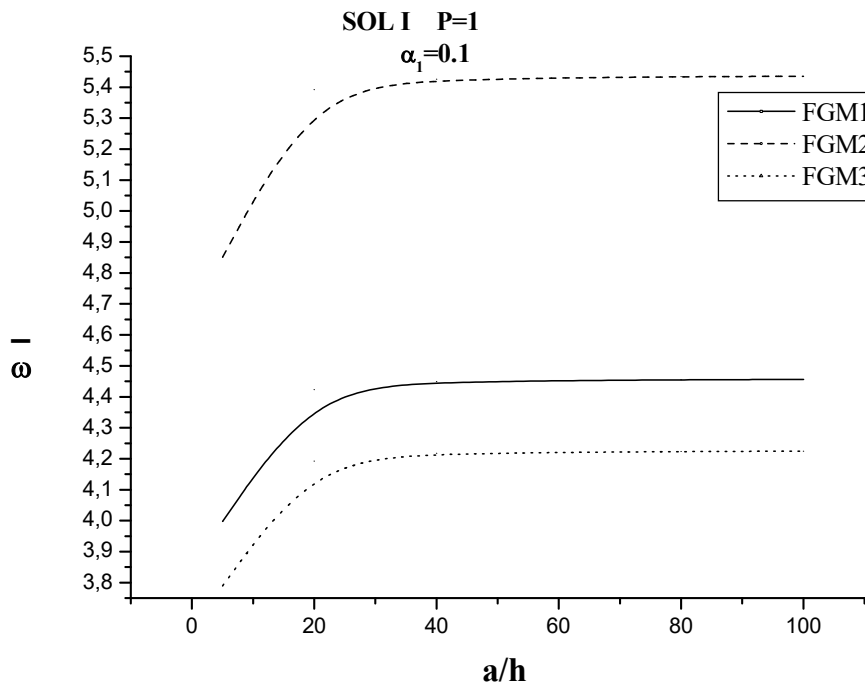
(c)

Figure V.7 : Comparaisons des fréquences adimensionnelles en fonction de l'indice de puissance des plaques en FGM 1 (AL/AL₂O₃), FGM 2 (AL/ZrO₂) et FGM 3 (AL/SiC), $a/h = 5$, (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0,1$ et (c) $\alpha = 0,2$.

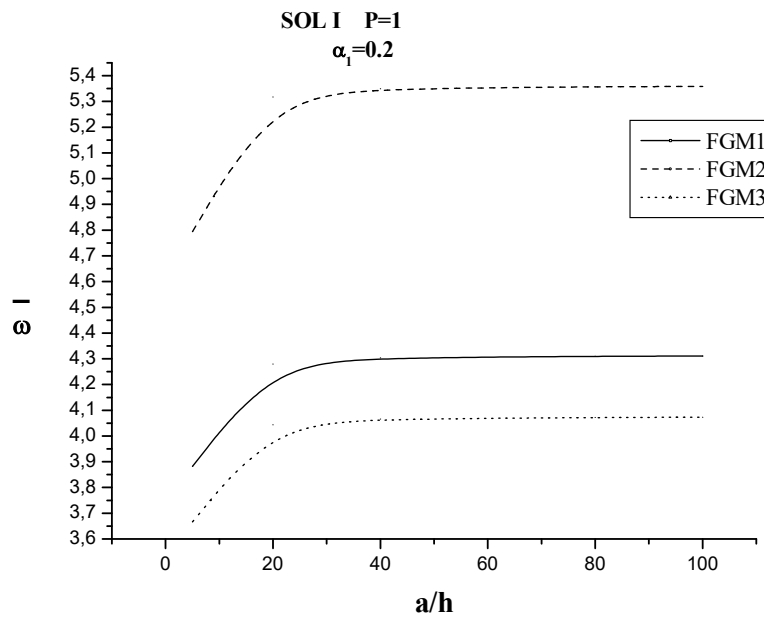
Les figures V.7 (a), (b) et (c) contiennent des comparaisons de la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de l'indice de puissance des plaques carrées en FGM (FGM 1 : AL/AL₂O₃, FGM 2 : AL/ZrO₂ et FGM 3 : AL/SiC) avec un rapport d'épaisseur a/h est égal à 5, et pour différentes valeurs de porosité α : (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0,1$ et (c) $\alpha = 0,2$. Il est clair que la plaque FGM 2 (AL/ZrO₂) présente des résultats supérieurs à ceux de la plaque FGM 1 (AL/AL₂O₃) et de la plaque FGM 3 (AL/SiC). Cette observation est valable pour différentes valeurs de porosité. Ainsi, l'indice de puissance a un effet négligeable pour la plaque en FGM 2 dans les cas où P est supérieur à 2, tandis que il fait diminuer la fréquence adimensionnelle pour les plaques FGM 1 et FGM 3.



(a)



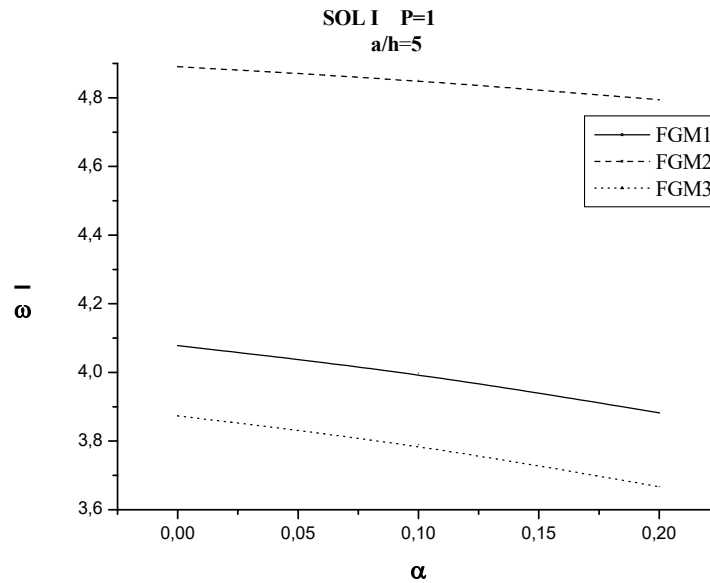
(b)



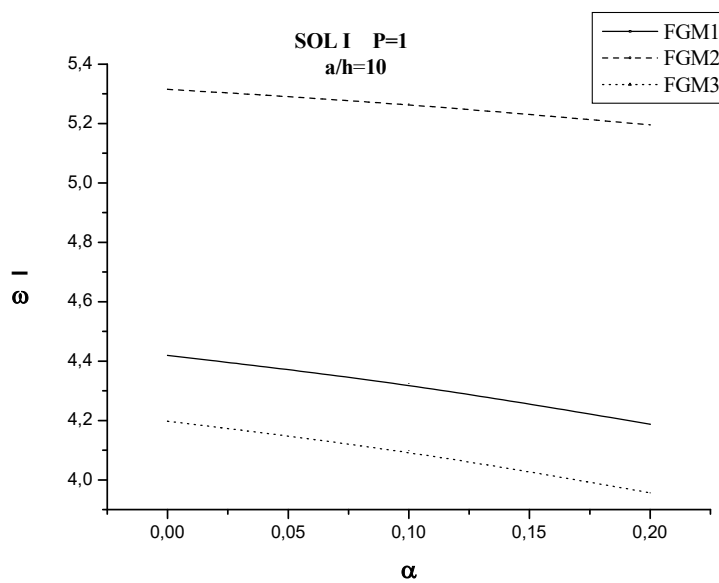
(c)

Figure V.8 : Comparaisons des fréquences adimensionnelles en fonction du rapport d'épaisseur des plaques en FGM 1 (AL/AL₂O₃), FGM 2 (AL/ZrO₂) et FGM 3 (AL/SiC), P = 1, (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0,1$ et (c) $\alpha = 0,2$.

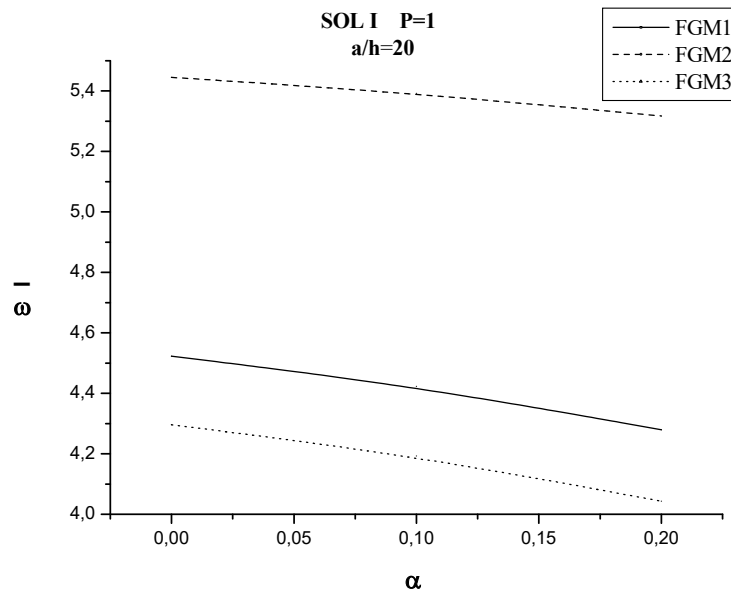
Les courbes de variation de la fréquence adimensionnelle pour les différentes valeurs de porosité (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0,1$ et (c) $\alpha = 0,2$ des plaques carrées à gradation fonctionnelle, en fonction du rapport d'épaisseur a/h pour un indice de puissance $P = 1$ ont été présentées aux figures V.8 (a), 8 (b) et 8 (c); nous pouvons voir que les valeurs de la fréquence adimensionnelle de la plaque en FGM 2 (AL/ZrO₂) sont supérieures à ceux de la plaque en FGM 1 (AL/AL₂O₃) et en FGM 3 (AL/SiC), quel que soit le facteur de porosité.



(a)



(b)



(c)

Figure V.9 : Comparaisons des fréquences adimensionnelles en fonction de la porosité des plaques en FGM 1 (AL/AL₂O₃), FGM 2 (AL/ZrO₂) et FGM 3 (AL/SiC), P = 1, (a) a/h = 5, (b) a/h = 10 et (c) a/h = 20.

A partir des figures V.9 (a), (b) et (c), la fréquence adimensionnelle est établie en fonction de la porosité et pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur ; (a) a/h = 5, (b) a/h = 10 et (c) a/h = 20 et pour un indice de puissance P = 1. On peut déduire que les courbes présentent des valeurs de la fréquence adimensionnelle plus élevées de la plaque en FGM 2 (AL/ZrO₂) par rapport aux plaques en FGM 1 (AL/AL₂O₃) et en FGM 3 (AL/SiC), quel que soit le rapport d'épaisseur.

V.4. Conclusions

Dans ce chapitre une validation numérique a été effectuée pour établir les fréquences naturelles des plaques en FGM, tandis que l'accent est mis sur l'examen de l'influence de plusieurs paramètres. Les résultats obtenus par le modèle présenté montrent que ses résultats sont très précis par rapport à ceux obtenus par [Hosseini-Hashemi S., 2011(b), (c)], et [Mouaici F., 2016], et que la porosité contribue à réduire de manière significative la fréquence non dimensionnelle.

Conclusion Générale

Dans la présente étude, une théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique est développée pour étudier le comportement dynamique des plaques poreuses en FGM. Contrairement aux autres théories sur la déformation par cisaillement, seules quatre fonctions de déplacement inconnues sont utilisées dans la théorie actuelle, par contre cinq fonctions de déplacement inconnues utilisées dans d'autres théories. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur de la plaque selon la règle du mélange, qui est reformulée pour évaluer les caractéristiques du matériau avec les phases de porosité. Les équations du mouvement sont dérivées selon le principe de Hamilton. Une validation numérique a été effectuée pour établir les fréquences naturelles des plaques en FGM, tandis que l'accent est mis sur l'examen de l'influence de plusieurs paramètres.

Les résultats obtenus de cette étude sont validés et clairement discutés à travers une étude paramétrique qui nous a permis de dégager les points suivants:

- La distribution de la porosité sur l'épaisseur a un effet considérable sur la fréquence ω , dont, la distribution linéaire de la porosité (solution II) fournit des fréquences plus élevées que celles de la distribution constante (solution I).
- L'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h) augmente la fréquence adimensionnelle.
- La fréquence décroît avec l'augmentation de l'indice de puissance P et du paramètre de porosité α .
- La fréquence augmente lorsque le rapport d'épaisseur de la plaque augmente dans tous les cas (plaque parfaite et imparfaite). De plus, la fréquence adimensionnelle est approximativement insensible au rapport a/h après $a/h > 30$ pour tous les cas (plaque parfaite et imparfaite).
- L'augmentation de la porosité réduit la fréquence adimensionnelle, quel que soit le rapport d'épaisseur. Au contraire, une augmentation du rapport d'épaisseur entraîne une augmentation de la fréquence adimensionnelle.
- La fréquence adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport géométrique (a/b). En effet, pour $P = 1$ les fréquences sont très proches, et ce quel que soit l'état de

la plaque (parfait ou imparfait). Cependant, pour le cas où $P = 100$, la différence entre les fréquences pour les différents cas de porosité est considérable.

- La plaque en FGM 2 (AL/ Z_rO_2) fournit des valeurs de la fréquence naturelle $\hat{\beta}$ plus élevés que les autres types de plaques, quel que soit le facteur de porosité α , l'indice de puissance P et le rapport épaisseur a/h .
- La plaque FGM 2 (AL/ Z_rO_2) présente une fréquence adimensionnelle supérieure à ceux de la plaque FGM 1 (AL/ AL_2O_3) et de la plaque FGM 3 (AL/SiC). Cette observation est valable pour différentes valeurs de porosité. Ainsi, l'indice de puissance a un effet négligeable pour la plaque en FGM 2 dans les cas où P est supérieur à 2, tandis que il fait diminuer la fréquence adimensionnelle pour les plaques FGM 1 et FGM 3.
- Les valeurs de la fréquence adimensionnelle de la plaque en FGM 2 (AL/ Z_rO_2) sont supérieurs à ceux de la plaque en FGM 1 (AL/ AL_2O_3) et en FGM 3 (AL/SiC), quel que soit le facteur de porosité.
- Les valeurs de la fréquence adimensionnelle de la plaque en FGM 2 (AL/ Z_rO_2) sont plus élevés par rapport aux plaques en FGM 1 (AL/ AL_2O_3) et en FGM 3 (AL/SiC), quel que soit le rapport d'épaisseur.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont les suivantes :

- Il serait intéressant de valider les modèles analytiques par l'élaboration de modèles numériques basées sur les éléments finis permettant de résoudre des formes géométriques de structure quelconques;
- Etude du comportement statique des structures poreuses en tenant compte de l'effet de l'amortissement visqueux;
- La prise en compte de l'effet des efforts thermomécaniques et hygrométriques;
- La prise compte de l'effet de la déformation normale (stretching effect) dans l'étude de la réponse dynamique afin de peaufiner le modèle analytique utilisé dans cette étude.

Références Bibliographiques

- [Abdelaziz, H.H., 2017] Abdelaziz, H.H., Ait Amar Meziane, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S., «*An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions*», *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704, 2017.
- [Afaq K.S., 2003] Afaq K.S., «*Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord*». PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, (2003).
- [Ahmed A., 2014] Ahmed A., «*Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory*», *Int. J. Civil Struct. Environ.*, 4(2), 59-64, 2014.
- [Ait Atmane, H., 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R., «*A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities*», *Steel Compos. Struct.*, 19(2), 369-384, 2015.
- [Ait Atmane, H., 2017] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F., «*Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations*», *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 13(1), 71-84, 2017.
- [Ait Yahia, S., 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., «*Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories*», *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1143-1165, 2015.
- [Akbas, S.D., 2017] Akbas, S.D., «*Thermal effects on the vibration of functionally graded deep beams with porosity*», *Int. J. Appl. Mech.*, 9(5), 1750076, 2017.
- [Aldousari, S.M., 2017] Aldousari, S.M., «*Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam*», *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Proc.*, 123(4), 296, 2017.
- [Aliotti A., 1996] Aliotti A., «*Caractérisation microstructurale des céramiques par analyse d'images*», *Spectra Analyse*, Vol. 188, pp 34-37, 1996.
- [Ambartsumyan S.A., 1969] Ambartsumyan S.A., «*Theory of anisotropic plate*», Technomic Publishing Co, 1969.
- [Attia, A., 2018] Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S., «*A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations*», *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464, 2018.
- [Ayache, B., 2018] Ayache B., Bennai R., Fahsi B., Fourn H., Atmane HA., Tounsi A., «*Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory*». *EARTHQUAKES AND STRUCTURES*. 2018;15(4):369-82.
- [Aydogdu M., 2005] Aydogdu M., «*Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method*», *International Journal of Mechanical Sciences* 47 1740–1755, 2005.

- [Baron C., 2008] Baron. C, Naili. S. «*Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide*», *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [Batou B., 2019] Batou, B., Nebab, M., Bennai, R., Atmane, H. A., Tounsi, A., and Bouremana, M., «*Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs*». *Steel and Composite Structures*, 33(5), 699-716, 2019.
- [Belabed, Z., 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Bég, O.A., «*An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates*», *Compos. Part B*, 60, 274-283, 2014.
- [Beldjelili, Y., 2016] Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory*», *Smart Struct. Syst.*, 18(4), 755-786, 2016.
- [Belkorissat, I., 2015] Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R., «*On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model*», *Steel Compos. Struct.*, 18(4), 1063-1081, 2015.
- [Bellifa, H., 2017(b)] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams*», *Struct. Eng. Mech.*, 62(6), 695-702, 2017.
- [Bellifa, H., 2016] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., «*Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position*», *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38, 265-275, 2016.
- [Bellifa, H., 2017(a)] Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R., «*An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates*», *Steel Compos. Struct.*, 25(3), 257-270, 2017.
- [Benadouda, M., 2017] Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R., «*An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities*», *Earthq. Struct.*, 13(3), 255-265, 2017.
- [Bennai, R., 2015] Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A., «*A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams*», *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546, 2015.
- [Bennai, R., 2019a] Bennai, R., Ait Atmane, H., Ayache, B., Tounsi, A., Bedia, E. A., and Al-Osta, M. A., «*Free vibration response of functionally graded Porous plates using a higher-order Shear and normal deformation theory*», *Earthquakes and Structures*, 16(5), 547-561, (2019a).
- [Bennai, R., 2019b] Bennai, R., Fourn, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., and Bessaim, A., «*Dynamic and wave propagation investigation of FGM plates with porosities using a four variable plate theory*». *Wind and Structures*, 28(1), 49-62, (2019b).
- [Bennoun, M., 2016] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., «*A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates*», *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431, 2016.
- [Binétruy C., 2004] Binétruy C., «*Physique du moulage des composites avancés : aspects théoriques*», *Techniques de l'Ingénieur*, 2004 AM 3718, pp 1-16, 2004.
- [Bishop A., 1993] Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B., «*A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process*», *Journal of Materials*

- Science Letters; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Boch P., 1989] Boch P., Chartier T., Huttepain M., «*Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites*», J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192,1986.
- [Bouderba B., 2013] Bouderba B., Houari, M.S.A., Tounsi, A., «*Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations*», Steel and Composite Structures, vol. 14, no. 1, pp. 85–104, 2013.
- [Bouderba, B., 2016] Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory*», Struct. Eng. Mech., 58(3), 397-422, 2016.
- [Boukhari, A., 2016] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R., «*An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates*», Struct. Eng. Mech., 57(5), 837-859, 2016.
- [Bounouara F., 2016] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A., «*A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation*», Steel Compos. Struct., 20(2), 227-249, 2016.
- [Bousahla, A.A., 2016] Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion*», Struct. Eng. Mech., 60(2), 313-335, 2016.
- [Bowles K.J., 1992] Bowles K.J., Frimpong S., «*Voids effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites*», Journal of Composite Materials, Vol 26, pp 1487-1509, 1992.
- [Bowles K.J., 1992] Bowles K.J., Frimpong S., «*Voids effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites*», Journal of Composite Materials, Vol 26, pp 1487-1509, 1992.
- [Bréard J., 1997] Bréard J., «*Matériaux composites à matrice polymère, modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé R.T.M. et détermination expérimentale de la perméabilité d'un renfort fibreux*», Thèse de doctorat, Université du Havre, 1997.
- [Bréard J., 2003] Bréard J., Saouab A., Bouquet G., «*Numerical simulation of void formation in LCM*», Composites : Part A, Vol. 34, pp 517-523, 2003.
- [Bui V.Q., 2000] Bui V.Q., Marechal E., Nguyen-Dang H., «*Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : interlaminar stresses and strain-energy release rates*», Composites Science and Technology, vol. 60, pages 131,143, 2000.
- [Carrera E., 2000] Carrera E., «*An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates*», Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [Chabot A., 1997] Chabot A., «*Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches*», PhD thesis, ENPC, 1997.
- [Chakraverty, S. 2014] Chakraverty, S. and Pradhan, K.K., «*Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions*», Aerosp. Sci. Technol., 36, 132-156, 2014.
- [Chikh, A., 2017] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R., «*Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT*», Smart Struct. Syst., 19(3), 289-297, 2017.

- [Costa M.L., 2001] Costa M.L., Müller de Almeida S.F., Rezende M.C., «*The influence of porosity on the ILSS of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates*», Composites Science and Technology, Vol. 61; pp 2101-2108; 2001
- [Coster M., 1989] Coster M., Chermant J.L., «*Précis d'analyse d'images*», 22^e édition, Presses du CNRS, Paris, ISBN 2-87682-020-X, 1989.
- [Delale F., 1983] Delale F., Erdogan F., «*The crack problem for a nonhomogeneous plane*», ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614, 1983.
- [Di Sciuva M., 1984] Di Sciuva M., «*A refined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates*». Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279, 295, 1984.
- [Di Sciuva M., 1987] Di Sciuva M., «*An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates*». Journal of Applied Mechanics, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [Divinis N., 2005] Divinis N., Kostoglou M., Karapantsios T.D., Bontozoglou V., «*Selfsimilar growth of a gas bubble induced by localized heating : the effect of temperature dependent transport properties*», Chemical Engineering Science; Vol. 60; pp 1673-1683; 2005.
- [Draiche, K., 2016] Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates*», Geomech. Eng., 11(5), 671-690, 2016.
- [Fletcher N.H., 1993] Fletcher N.H., «*Van der Waals' equation and nucleation theory*», European Journal Physics, Vol. 14, pp 29-35, 1993.
- [Fourn, H., 2018] Fourn, H., Ait Atmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates*», Steel Compos. Struct., Accepted, 2018.
- [Frishfelds V., 2008] Frishfelds V., Lundström T.S., Jakovics A., «*Bubble motion through non-crimp fabrics during composites manufacturing*», Composites: Part A, Vol. 39, pp 243-251, 2008.
- [G. Bao., 1995] Bao G., Wang L., «*Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings*», Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Ganapathi M., 1997] Ganapathi M., M. Touratier M., «*A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-exible finite element*», Finite Element in Analysis and Design, vol. 28, pages 115,135, 1997.
- [Goueygou M., 2009] Goueygou M., Lafhaj Z., Soltani F., «*Assessment of porosity of mortar using ultrasonic Rayleigh waves*», NDT&E International, Vol. 42, pp 353-360, 2009.
- [Harper B.D., 1987] Harper B.D., Staab G.H., Chen R.S., «*A note on the effects of voids upon the hygral and mechanical properties of AS4/3502 Graphite/Epoxy*», Journal of Composite Materials, Vol. 21, pp 280-289, March 1987.
- [Hebali, H., 2014] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A., «*A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plate*», ASCE J. Eng. Mech., 140, 374-383, 2014.
- [Hoffmann M., 1996] Hoffmann M., Diaz D.J., «*Characterization of fiber materials using metallographic and image analysis techniques*», Ceramic Engineering and Science Proceedings, Vol. 17, no. 4, pp 68-75, 1996.
- [Hosseini-Hashemi S., 2011(b)] Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Atashipour S.R., «*Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form*

- procedure*», Compos. Struct, 2011.
- [Hosseini-Hashemi S., 2011(c)] Hosseini-Hashemi S., Fadaee. M., Atashipour S.R., «*A new exact analytical approach for free vibration of Reissner—Mindlin functionally graded rectangular plates*». Int. J. Mech. Sci.. 53(1). 11-22, 2011.
- [Houari M.S.A., 2011] Houari M.S.A., «*Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances*», Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [Houari, M.S.A., 2016] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R., «*A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates*», Steel Compos. Struct., 22(2), 257-276, 2016.
- [Icardi U., 2001] Icardi U., «*Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations*». Composites: Part B, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Jahwari, F., 2016] Jahwari, F. and Naguib, H.E., «*Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular distribution*», Appl. Math. Model., 40(3), 2190-2205, 2016.
- [Jeong H., 1994] Jeong H., Hsu D.K., «*Experimental analysis of porosity induced ultrasonic attenuation and velocity change in carbon composites*», Ultrasonics, Vol33, N°3, pp 195-203, 1995.
- [Kaci, A., 2018] Kaci, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*Post-buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two-unknown beam theory*», Struct. Eng. Mech., Accepted, 2018.
- [Kang M.K., 2001] Kang M.K., Lee W.I., Hahn H.T., «*Analysis of vacuum bag transfer molding process*», Composites: Part A, Vol 32, pp 1553-1560, 2001.
- [Kant T., 2000] Kant T., Swaminathan K., «*Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments*», Composite structures, vol. 49, pages 65, 75, 2000.
- [Kapania R. K., 1989] Kapania R. K., Raciti S., «*Recent advances in analysis of laminated beams and plates*», Part I : Shear effects and buckling. AIAA Journal, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.
- [Kar V.R. 2015(a)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method*», Compos. Struct., 129, 202-212, 2015.
- [Kar V.R. 2015(b)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment*», Lat. Am. J. Sol. Struct., 12(11), 2006-2024, 2015.
- [Kar V.R. 2015(c)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM*», Struct. Eng. Mech., 53(4), 661-679, 2015.
- [Kar V.R. 2015(d)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel*», Steel Compos. Struct., 18(3), 693-709, 2015.
- [Kar V.R., 2013] Kar V.R. and Panda S.K., «*Free vibration responses of functionally graded spherical shell panels using finite element method*», Proceedings of the ASME 2013 Gas Turbine India Conference, (2013).
- [Kar V.R., 2016(a)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Post-buckling behaviour of shear deformable functionally graded curved shell panel under edge compression*», Int. J. Mech. Sci., 115, 318-324, 2016.

- [Kar V.R., 2016(b)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Nonlinear thermomechanical behavior of functionally graded material cylindrical/hyperbolic/elliptical shell panel with temperature-dependent and temperature-independent properties*», J. Press. Vess. Technol., 138(6), 061202, 2016.
- [Kar V.R., 2016(c)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel*», Chin. J. Aeronaut., 29(1), 173-183, 2016.
- [Kar V.R., 2016(d)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Geometrical nonlinear free vibration analysis of FGM spherical panel under nonlinear thermal loading with TD and TID properties*», J. Therm. Stress., 39(8), 942-959, 2016.
- [Kar V.R., 2016(e)] Kar, V.R. and Panda, S.K., «*Nonlinear free vibration of functionally graded doubly curved shear deformable panels using finite element method*», J. Vibr. Contr., 22(7), 1935-1949, 2016.
- [Kar, V.R., 2017] Kar, V.R., and Panda, S.K., «*Large-amplitude vibration of functionally graded doubly-curved panels under heat conduction*», AIAA J., 55(12), 4376-4386, 2017.
- [Kar, V.R., 2017] Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K., «*Effect of different temperature load on thermal postbuckling behaviour of functionally graded shallow curved shell panels*», Compos. Struct., 160, 1236-1247, 2017.
- [Karama M., 1998] Karama M., Abou Harb B., Mistou S., Caperaa S., «*Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model*», Composite Part B, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [Kardos J.L., 1983] Kardos J.L., Dudukovic M.P., Mc Kagne E.L., Lehman M.W., «*Void formation and transport during composite laminate processing: an initial model Framework*», Composite Materials: Quality Assurance and Processing, ASTM STP
- [Kardos J.L., 1986] Kardos J.L., Dudukovic M.P., «*Void growth and resin transport during processing of thermosetting – matrix composites*», Advances in Polymer Science, Vol. 80, p 101-123, 1986.
- [Kassapoglou C., 1987] Kassapoglou C., Lagace P.A., «*Closed form solutions for the interlaminar stress_eld in angle-ply and cross-ply laminates*», Journal of Composite Materials, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [Kawasaki A., 1997] Kawasaki A., Watanabe R. «*Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials*», Ceramics International, 8842(95):73–83, 1997.
- [Khare R.K., 2004] Khare R.K., Kant T., Garg A.K., «*Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element*», Composite Structures, vol. 65, pages 405-418, 2004.
- [Kieback B., 2003] Kieback B., Neubrand A., Riedel H., «*Processing techniques for functionally graded materials*», Materials Science and Engineering : A, 362(1-2):81–106, 2003.
- [Kingery W.D., 1975] Kingery W.D., Bowen K., Uhlmann D.R., «*Introduction to ceramics*», Wiley-Interscience publication, 2nd Edition, ISBN 0-471-47860-1, 1032 p, 1975.
- [Kirchhoff G., 1950] Kirchhoff G., «*uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheid*», Journal fur reine und angewandte Mathematik, Vol .40, pages 51-88, 1950.
- [Koizumi M., 1992] Koizumi M., «*Recent Progress of functionally graded materials in Japan*», Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [Koizumi M., 1997] Koizumi M., «*FGM activities in Japan*», Composites; 28 (1-2):1– 4. 1997.

- [Koizumi, M. 1996] Koizumi, M., «*FGM activities in Japan*», department of materials chemistry». Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan, 1996.
- [Koizumi, M., 1997] Koizumi, M., «*FGM activities in Japan*», Compos. Part B, 28, 1-4,1997.
- [Kokini K., 1990] Kokini K., Takeuchi Y., «*Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads*», In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, 1990.
- [Kolahchi, R., 2017] Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H. and Nouri, A., «*Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory*», Int. J. Mech. Sci., 130, 534-545, 2017.
- [Kwak H.Y., 1998] Kwak H.Y., Kim Y.W., «*Homogeneous nucleation and macroscopic growth of gas bubble in organic solutions*», International Journal of Heat mass transfer; Vol. 41 N°4-5; pp 757-767; 1998.
- [Ledru Y., 2009] Ledru Y., «*Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques*», Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 242p, 2009.
- [Lee J.G., 1996] Lee J.G., Flumerfelt R.W., «*A refined approach to bubble nucleation and polymer foaming process : dissolved gas and cluster size effects*», Journal of Colloid and Interface Science, Vol 184, pp 335-348, 1996.
- [Liberscu L., 1967] Liberscu L., «*On the theory of anisotropic elastic shell and plates*», Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [Liu L., 2004] Liu L., Zhang B., Wang D., «*Void content in carbon/epoxy composites and its effects on flexural properties*», 49th International Sampe Symposium and Exhibition, pp 254-261, 2004.
- [Liu L., 2006 (a)] Liu L., Zhang B., Wang D., Wu Z., «*Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates*», Composite Structure, Vol. 73, pp 303-309, 2006.
- [Liu S., 2006 (b)] Liu S., Guo E., Levin V.M., Liu F., Petronyuk, Zhang Q., «*Application of pulse acoustic microscopy technique Y.S.for 3D imaging bulk microstructure of carbon fiber-reinforced composite*», Ultrasonics, 2006.
- [Lundström T.S., 1996] Lundstrom T.S., «*Bubble transport through constricted capillary tubes with application to resin transfer molding*», Polymer Composites, Vol 17, N°6, pp 770-779 1996
- [Mahi, A., 2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A., «*A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates*», Appl. Math. Model., 39, 2489-2508, 2015.
- [Mascaro B., 2006] Mascaro B., «*Caractérisation ultrasonore de la porosité dans les composites*», Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 170p, 2006.
- [Matsunaga H., 2008] Matsunaga H., «*Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory*», Compos. Struct., 82(4), 499-512, 2008.
- [Mehtar, K., 2017(a)] Mehtar, K., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R., «*Theoretical and experimental investigation of vibration characteristic of carbon nanotube reinforced polymer composite structure*», J. Mech. Sci., 133, 319-329, 2017.
- [Mehtar, K., 2017(b)] Mehtar, K., Panda, S.K., Bui, T.Q. and Mahapatra, T.R., «*Nonlinear thermoelastic frequency analysis of functionally graded CNT-reinforced single/doubly curved shallow shell panels by FEM*», J. Therm. Stress., 40(7), 899-916, 2017.

- [Mehar, K., 2017] Mehar, K. and Panda, S.K., «*Elastic bending and stress analysis of carbon nanotube-reinforced composite plate: Experimental, numerical, and simulation*», Adv. Polym. Technol., In Press, 2017.
- [Mehar, K., 2016] Mehar, K., Panda, S.K., Dehengia, A., Kar, V.R., «*Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate in thermal environment*», J. Sandw. Struct. Mater., 18(2), 151-173, 2016.
- [Mouaici F., 2016] Mouaici F., Benyoucef S., Ait Atmane H., Tounsi A., «*Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory*», Wind Struct., 22(4), 429-454, 2016.
- [Mouffoki, A., 2017] Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory*», Smart Struct. Syst., 20(3), 369-383, 2017.
- [Nebab M., 2018] Nebab M., Ait Atmane H., Bennai R., «*Analyse en flexion des plaques FGM sur fondation élastique*». Academic Journal of Civil Engineering.;36(1):516-9, 2018.
- [Nebab M., 2019a] Nebab M., Ait Atmane H., Bennai R., Tounsi A., Bedia E., «*Vibration response and wave propagation in FG plates resting on elastic foundations using HSDT*». Structural Engineering and Mechanics. 69(5):511-25, 2019.
- [Nebab M., 2019b] Nebab M, Ait Atmane H, Bennai R, Tounsi A., «*Effect of variable elastic foundations on static behavior of functionally graded plates using sinusoidal shear deformation*». Arabian Journal of Geosciences. 12(24):809, 2019.
- [Nebab M., 2019c] Nebab M., Ait Atmane H., Bennai R., Tahar B., «*Effect of nonlinear elastic foundations on dynamic behavior of FG plates using four-unknown plate theory*». Earthquakes and Structures. 17(5):447-62, 2019.
- [Nguyen T. K., 2007] Nguyen T. K., Sab K., Bonnet G., «*Shear correction factors of functionally graded plates*», Mech. Advanced Mater. Struct; 14 (8): 567-575, 2007.
- [Nguyen V.T., 2004] Nguyen V.T., «*Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques* ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Niino M., 1988] Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. «*Method of producing a functionally gradient material*», U.S. Patent 4571099, 1988.
- [Noor A. K. 1989] Noor A. K., Burton W. S., «*Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates*», Appl Mech Rev, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.
- [Okamura H., 1991] Okamura H., «*State of the art of material design projects for severe service applications*», Mater. Sci. Eng :A; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [Olivier P., 1995] Olivier P., Cottu J.P., Ferret B., «*Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates*», Composites, Vol. 26 N°7, p 509, 1995.
- [Olivier, 1994] Olivier P., «*Etude des contraintes résiduelles de cuisson dans les stratifiés carbone / époxy en relation avec les cycles de polymérisation*», Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 270p, 1994.
- [Ossadzow C., 2001] Ossadzow C., Touratier M., «*An improved shear-membrane theory for multi-layered shells*», Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [Pagano N.J, 1978] Pagano N.J, «*Stress fields in composite laminates*», International Journal of Solids and

- Structures, vol. 14, page 385, 1978.
- [Park, J.S., 2006] Park, J.S. and Kim, J.H., «*Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates*», J. Sound Vibr., 289(1-2), 77-93, 2006.
- [Patel N., 1996 (a)] Patel N., Lee J.L., «*Modeling of void formation and removal in liquid composite molding. Part I : Wettability analysis*», Polymer Composites, Vol 17 N°1, pp 96-103, 1996.
- [Patel N., 1996 (b)] N. Patel, J.L. Lee, «*Modeling of void formation and removal in liquid composite molding. Part II : Model development and implementation*», Polymer Composites, Vol 17 N°1, pp 104-114, 1996.
- [Payvar P., 1987] Payvar P., «*Mass transfer controlled bubble growth during rapid decompression of a liquid*», International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 30, N° 4, pp 699-706, 1987.
- [Pillai K.M., 2004] Pillai K.M., Munagavalasa M.S., «*Governing equations for unsaturated flow through woven fiber mat*», Part 2. Non-isothermal reactive flows', Composites: Part A, Vol. 35, pp 403-415, 2004.
- [Pillai K.M., 2007] Pillai K.M., Roy T., Dulmes C., «*Experimental investigations of the unsaturated flow in liquid composite molding*», Workshop à l'IMFT, Novembre 2007.
- [Pitchoumani R., 1996] Pitchoumani R., Ranganathan S., Don R.C., Gillespie J.W., Lamontia M.A., «*Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow placement*», International Journal of Heat Mass Transfer, Vol. 39, N°9, pp 1883-1897, 1996.
- [Polit O., 1997] Polit O., Touratier M., «*A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses*», Composite Structures, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- [Raju I.S., 1981] Raju I.S., Crews J.H., «*Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates*», Comput. Struct., vol. 14, page 21, 1981.
- [Ranganathan S., 1995] Ranganathan S., Advani, Lamontia M.A., «*A nonisothermal process model for consolidation S.G. and void reduction during in-situ tow placement of thermoplastic composites*», Journal of composite materials, Vol. 29, N°8, pp 1040-1062, 1995.
- [Reddy J.N., 1980] Reddy J.N., «*A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates*», International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, pages 1187,1206, 1980.
- [Reddy J.N., 1984] Reddy. J.N, «*A simple higher-order theory for laminated composite plates*», Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.
- [Reddy J.N., 1987] Reddy, «*A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates*». Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [Reddy, J.N., 2000] Reddy, J.N., «*Analysis of functionally graded plates*», Int. J. Numer. Meth. Eng., 47, 663-684, 2000.
- [Reddy, J.N., 2001] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q., «*Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates*», Eur. J. Mech. A/Sol., 20, 841-855, 2001.
- [Redon C., 1997] Redon C., Chermant L., Quenec'h J.L., Chermant J.L., «*Caractérisation par analyse d'images de la morphologie de bétons renforcés par des fibres de fonte amorphe*», Annales du bâtiment et des travaux publics, pp 37-53, 1997.

- [Reissner E., 1945] Reissner.E., «*The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates*». J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [Reissner E., 1961] Reissner E., Stavsky Y., «*Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate*», J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [Ren J.G., 1986] Ren J.G., «*A new theory of laminated plate*». Composite Science and Technology, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- [Russ J.C., 1999] Russ J.C., Dehoff R.T., «*Practical Stereology*», 2nd edition, Plenum Press, New York, 1986, ISBN 0-306-46476-4.
- [Saeedi N., 2012] Navid Saeedi. «*Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues*», Thèse de Doctorat, Laboratoire Navier, 2012.
- [Saint-Martin G., 2003] Saint-Martin G., «*Etude typologique des défauts structuraux générés au cours de la mise en forme par injection de composites à matrice thermostable renforcés par fibres de verre courtes*», Thèse de doctorat, Ecole des Mines d'Albi; 2003.
- [Schaefer D.W., 1994] Schaefer D.W., «*Engineered porous materials*», A publication of the Materials Research Society : Bulletin MRS, Vol 19, N°4, pp 14-17, 1994.
- [Schell J.S.U., 2006] Schell J.S.U., Renggli M., Van Lenthe G.H., Müller R., Ermanni P., «*Micro-computed tomography determination of glass fibre reinforced polymer mesostructure*», Composites Science and Technology, Vol. 66, pp. 2016-2022, 2006.
- [Schoeller H., 1955] Schoeller H., «*Hydrogéologie*». Ecole Nationale Supérieur du Pétrole, Technip, Paris, 2 vol, 443 p, 1955.
- [Scrivener K.L., 1997] Scrivener K.L., «*Méthodes microscopiques dans la science du ciment et du béton*», World Cement, pp 121-126, 1997.
- [Sekkal, M., 2017(a)] Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., «*A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate*» Steel Compos. Struct., 25(4), 389-401, 2017.
- [Shahsavari, D., 2018] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L. and Karami, B., «*A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation*», Aerosp. Sci. Technol., 72, 134-149, 2018.
- [Shankara C.A., 1996] Shankara C.A., Iyengar N.G.R., «*A Co element for the free vibration analysis of laminated composite plates*», Journal of Sound and Vibration, vol. 191, no. 5, pages 721-738, 1996.
- [Shen H., 2006] Shen H., Oppenheimer S.M., Dunand D.C., Brinson L.C., «*Numerical modelling of pore size and distribution on foamed titanium*», Mechanics of materials, Vol 38, pp 933-944, 2006.
- [Shyang-ho Chi., 2003] Shyang-ho Chi., Chung Yen-Ling, «*Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings*», Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [Sobhy, M., 2013] Sobhy, M., «*Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions*», Compos. Struct., 99, 76-87, 2013.
- [Srinivas S., 1973] Srinivas S., Rao A.K., «*Flexure of thick plates*». ASME, pages 298-299, 1973.
- [Steffens H.D., 1990] Steffens H.D., Dvorak M., Wewel M., «*Plasma sprayed functionally gradient materials-*

- processing and applications*», in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, 1990.
- [Tahani M., 2003] Tahani M., A. Nosier. «*Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate*». Material and Design, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [Taibi F.Z., 2015] Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (), «*A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations*», J. Sandw. Struct. Mater., 17(2), 99-129, 2015.
- [Takahashi M., 1990] Takahashi M., Itoh Y., Kashiwaya H., «*Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique*», in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, 1990.
- [Tang J.M., 1987] Tang J.M., Lee W.I., Springer G.S., «*Effects of cure pressure on resin flow, voids and mechanical properties*», Journal of Composite Materials, Vol 21, p 421- 440, May 1987.
- [Tounsi M. S. A., 2013] Tounsi M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, «*A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates*», Aerospace Science and Technology, vol. 24, no. 1, pp. 209–220, 2013.
- [Touratier M., 1991] Touratier M., «*An efficient standard plate theory*». Engng Sci, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [Trochu F., 2006] Trochu F., Ruiz E., Achim V., Soukane S., «*Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization*», Composites:Part A, Vol 37, pp 890-902, 2006.
- [Veesler S., 2005] Veesler S., Mangin D., Puel F., «*Cristallisation*», Technique de l'ingénieur, Ch Nucléation, J2710, 2005.
- [Vel, S.S., 2004] Vel S.S., Batra R.C., «*Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates*», J. Sound Vibr., 272, 703-730, 2004.
- [Vo, T.P., 2015(a)] Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F. and Lee, J., «*A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams*», Compos. Struct., 119, 1-12, 2015.
- [Vo, T.P., 2015(b)] Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F. and Lee, J., «*Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory*», Compos. Part B Eng., 68, 59-74, 2015.
- [Wattanasakulpong, N., 2012] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M., «*Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation*», Mater. Des., 36, 182-190, 2012.
- [Wattanasakulpong, N., 2014] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V., «*Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities*», Aerosp. Sci. Technol., 32(1), 111-120, 2014.
- [Whitney J.M., 1973] Whitney. J.M, «*Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads*». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [Wisnom M.R., 1996] Wisnom M.R., Reynolds T., Gwilliam N., «*Reduction in ILSS by discrete and distributed Voids*», Composites Science and Technology, 56, pp 93-101, 1996.
- [Woo, J., 2006] Woo, J., Meguid, S.A. and Ong, L.S., «*Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates*», J. Sound Vibr., 289, 595-611, 2006.

- [Yamaleev N., 2006] Yamaleev N., Mohan R., «*Effect of the phase transition on intratow flow behavior and void formation in liquid composite molding*», International journal of multiphase flow; Vol 32; pp 1219-1233; 2006.
- [Yang J., 2006] Yang J., Jia Y., Sun S., Ma D., Shi T., An L., «*Mesoscopic simulation of the impregnating process of unidirectional fibrous preform in resin transfer molding*», Materials Science and Engineering, pp 515-520, 2006.
- [Yin W.L., 1994] Yin W.L., «*Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model*», International Journal of Solids and Structures, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [Yokota M.J., 1978] Yokota M.J., «*Process controlled curing of resin matrix composites*», Sample Journal, p11-17, July/Augus, 1978.
- [Yoshida H., 1986] Yoshida H., Ogasa T., Hayashi R., «*Statistical approach to the relationship between ILSS and void content of CFRP*», Composites Science and Technology, Vol 25, pp 3-18, 1986.
- [Yousfi M., 2018] Yousfi M., Ait Atmane H., Meradjah M., Tounsi A., Bennai R., «*Free vibration of FGM plates with porosity by a shear deformation theory with four variables*», Structural Engineering and Mechanics . 2018;66(3):353-68.
- [Zemri A., 2015] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A., «*A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: An assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory*», Struct. Eng. Mech., 54(4), 693-710, 2015.
- [Zeng Y., 2000] Zeng Y., Jiang D., Watanabe T., «*Fabrication and Properties of Tape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina–Titanium Carbide Materials*», Journal of the American Ceramic Society, 83 (12): 2999–3003, 2000.
- [Zhu, J., 2001] Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S., «*Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy*», Mater. Chem. Phys., 68, 130-135, 2001.
- [Zidi M., 2014] Zidi M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bég, O.A., «*Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory*», Aerosp. Sci. Technol., 34, 24-34, 2014.
- [Zine, A., 2018] Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M. and Mahmoud, S.R., «*A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells*», Steel Compos. Struct., 26(2), 125-137, 2018.