

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT 3^{ème} cycle LMD

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présentée par

MAHMOUDI Abdelkader

Intitulé de la thèse

Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur
la réponse globale des structures FGM

Soutenu le : 19 / 11 / 2018

Composition du jury :

Président	TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Directeur de thèse	BENYOUCEF Samir	Pr	U.D.L SBA
Co-Directeur de thèse	BENACHOUR Abdelkader	Pr	U.D.L SBA
Examineur	BOURADA Mohamed	MCA	U.D.L SBA
Examineur	HOUARI Mohammed Sid Ahmed	MCA	U de Mascara
Examineur	YEGHNEM Redha	MCA	U de Saida

Année universitaire 2018-2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement mon directeur de thèse, Benyoucef Samir. Il a suivi de près mon travail, m'a fait profiter de sa vaste connaissance et m'a souvent fasciné par sa rigueur, sa clarté d'esprit, son enthousiasme et sa curiosité intellectuelle. Son soutien m'a beaucoup aidé surtout pendant les moments de doute et d'incertitude. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je voudrais également remercier mon co-directeur de thèse, Benachour Abdelkader, qui a participé à l'encadrement de ma thèse. Pr. Benachour fût mon conseiller et interlocuteur. Je lui adresse ma sincère gratitude.

J'exprime également toute ma gratitude et ma reconnaissance à Professeur Tounsi Abdelouahed qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche et m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Mes vifs remerciements sont également adressés à Messieurs Dr. Bourada Mohamed, Dr. Houari Sid Ahmed Mohamed et Dr. Yeghnem Redha pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail en acceptant d'être membre de mon jury.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du LMH, permanents, doctorants, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces trois années une belle étape de ma vie.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à mes frères et tous mes amis pour leur soutien durant ces années de thèse.

Enfin, je ne remerciera jamais assez mes parents pour leur soutien inconditionnel pour accomplir ce travail et leur amour. **Je leur dédie ce travail.**

ملخص

في هذه الأطروحة، تم دراسة تأثير النماذج الميكانيكية البديلة على سلوك لوحة متدرجة وظيفيا على أساس نظريات القص. ويتم اختبار العديد من النماذج الميكروميكانيكية للحصول على خصائص المواد الفعالة للمواد المتدرجة وظيفيا التي تتغير أجزاءها بشكل مستمر من خلال سمك البنية. تم فحص الاهتزاز الحر و السلوك الحراري الميكانيكي في الانحناء للهياكل ذات الخصائص المتغيرة تدريجيا والمستندة إلى أساس مرن من نوع وينكلر-باسترناك بواسطة نظريتين جديدتين لتشوه القص. النظريات الحالية بالضبط تحقق شروط حدود التوتر على الوجه العلوي والسفلي للوحة. يتم الحصول على الطاقة الوظيفية للنظام باستخدام مبدأ هاملتون. يتم الحصول على حلول النموذج باستخدام تقنية نافيا؛ ثم يتم العثور على الترددات الأساسية، الانحناء والضغطات من خلال حل نتائج نظام المعادلة التي تم الحصول عليها. وأخيراً ، يتم توفير النتائج العددية للكشف عن تأثير النماذج الميكروميكانيكية والحمل الحراري الميكانيكي على سلوك الهياكل ذات الخصائص المتغيرة تدريجيا.

كلمات مفتاحية : هياكل ذات خصائص متغيرة تدريجيا, النماذج الميكروميكانيكية , أساس مرن , تحميل ميكانيكي-حراري, الانحناء , الاهتزاز الحر.

Résumé

Dans cette thèse, l'influence des modèles micromécaniques alternatifs sur le comportement macroscopique d'une plaque fonctionnellement graduée basée sur des théories de déformation de cisaillement est étudiée. Plusieurs modèles micromécaniques sont testés pour obtenir les propriétés matérielles d'un matériau fonctionnellement gradué dont les fractions volumiques des particules varient d'une façon continue à travers l'épaisseur de la structure. La vibration libre et le comportement thermomécanique en flexion des structures fonctionnellement graduées simplement supportées reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak sont étudiées par deux nouvelles théories de la déformation de cisaillement. Les théories actuelles vérifient exactement les conditions aux limites des contraintes nulles sur les faces supérieure et inférieure de la structure. La fonction énergétique du système est obtenue en utilisant le principe d'Hamilton et le principe des travaux virtuels. Les solutions de forme sont obtenues en utilisant la technique de Navier; puis les fréquences fondamentales, la flèche et les contraintes sont trouvées en résolvant les résultats de système d'équation obtenu. Enfin, les résultats numériques sont fournis pour révéler l'effet des modèles micromécaniques et la charge thermo-mécanique sur le comportement des structures FGM.

Mots clés : Structures FGM ; modèles micromécaniques ; fondation élastique ; chargement thermo-mécanique ; flexion ; vibration libre.

Abstract

In this thesis, the influence of alternative micromechanical models on the macroscopic behavior of a functionally graded plate based on shear-deformation plate theories is examined. Several micromechanical models are tested to obtain the effective material properties of a two-phase particle composite as a function of the volume fraction of particles which continuously varies through the thickness of a functionally graded plate. Free vibration and thermomechanical bending of simply supported functionally graded structures resting on a Winkler–Pasternak elastic foundation are investigated by a new shear deformation theories. Present theory exactly satisfies stress boundary conditions on the top and the bottom of the plate. The energy functional of the system is obtained using Hamilton’s principle. The closed form solutions are obtained by using Navier technique, and then fundamental frequencies, deflexion and stresses are found by solving the results of the equation system obtained. Finally, the numerical results are provided to reveal the effect of explicit micromechanical models and the thermo-mechanical load on the behavior of FGM structures.

Keywords : FGM structures ; micromechanical models ; elastic foundation ; thermo-mechanical loading ; bending ; free vibration.

Table des matières

ملخص.....	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des Figures	iv
Liste des Tableaux.....	vi
Liste des Notations	vii
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	
Introduction	3
I.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM).....	4
I.2 Fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM).....	8
I.2.1 Powder metallurgy	9
I.2.2 Solid free form fabrication method.....	9
I.2.3 Laser cladding	9
I.3 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	10
I.3.1 Génie civil	10
I.3.2 Réacteur nucléaire.....	11
I.3.3 Cylindres de moteur de voiture	11
I.3.4 Lames de turbine	11
I.3.5 Electronique et optoélectronique.....	12
I.3.6 Médecine	12
I.4 Structures sandwiches en FGM	13
I.5 Les modèles micromécaniques des FGM (homogénéisation)	13
I.5.1 Modèles de Voigt et Reuss.....	14
I.5.2 Modèle de Tamura	15
I.5.3 La représentation locale des éléments de volume (LRVE)	15
I.5.4 Modèle de Mori-Tanaka.....	16
I.5.5 Comparaison entre les modèles micromécaniques.....	17

I.6 L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	18
I.6.1 La loi de puissance (P-FGM)	18
I.6.2 La loi sigmoïde (S-FGM)	19
I.6.3 La loi exponentielle (E-FGM).....	20
Conclusion.....	21
Chapitre II : Revue bibliographique sur la modélisation et l'analyse des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	
Introduction	22
II.1 Les modèles analytiques des plaques (FGM).....	22
II.1.1 La théorie classique des plaques mince de Love-Kirchhoff (CPT).....	22
II.1.2 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	24
II.1.3 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT).....	25
II.2 Les modèles micromécaniques des FGM (homogénéisation)	28
II.2.1 Vibration et réponse dynamique des structures FGM	28
II.2.2 instabilité et réponse statique des structures FGM.....	33
Conclusion.....	36
Chapitre III : Effet des modèles micromécaniques sur la réponse dynamique des plaques FGM	
Introduction	37
III.1 Formulation théorique	37
III.1.1 Cinématique	38
III.1.2 Relations constitutive	39
III.1.3 Equations de mouvement	39
III.1.4 Solutions de Navier	42
III.2 Résultats & discussions	43
III.2.1 Etude comparative.....	43
III.2.2 Etude paramétrique.....	45
Conclusion.....	49
Chapitre IV : Analyse thermomécanique des plaques sandwiches FGM	
Introduction	50
IV.1 Formulation théorique.....	50
IV.1.1 Cinématique.....	51
IV.1.2 Relations constitutive.....	52
IV.1.3 Equations de mouvement	53

IV.1.4 Solutions de Navier	55
IV.2 Résultats & discussions	57
IV.2.1 Etude comparative	58
IV.2.2 Etude paramétrique	61
Conclusion.....	66
Conclusion générale & Perspectives	67
Références bibliographiques	

Liste des Figures

Chapitre I : Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Fig I.1 Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes	4
Fig I.2 Gradation de la microstructure FGM avec des constituants céramique–métal	6
Fig I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés	7
Fig I.4 Protection thermique des FGM	8
Fig I.5 Configuration expérimentale pour le traitement assisté par laser à l'aide du Laser Nd: YAG	10
Fig I.6 Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité (Hermann, 2017)	11
Fig I.7 Réacteur nucléaire	11
Fig I.8 Cylindre du moteur de la voiture	12
Fig I.9 Lames de turbine	12
Fig I.10 Les champs potentiels de l'application des FGM	13
Fig I.11 Variation du module d'Young en fonction de la fraction volumique pour plusieurs modèles micromécaniques	18
Fig I.12 Géométrie d'une plaque en FGM	19
Fig I.13 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	20
Fig I.14 Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	21
Fig I.15 Variation du module d'Young dans une plaque E-FGM	21

Chapitre II : Revue bibliographique sur la modélisation et l'analyse des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Fig II.1 Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff (Reddy, 1997)	24
Fig II.2 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, 1997).....	25
Fig II.3 La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT	26

Fig II.4 Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).....	27
Fig II.5 La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT	27
Fig II.6 Publications de revues arbitrées reliées aux FGM (Gupta, 2015)	29

Chapitre III : Effet des modèles micromécaniques sur la réponse dynamique des plaques FGM

Fig III.1 Plaque FGM reposant sur une fondation élastique	38
Fig III.2 L'effet de l'indice de puissance « p » sur la fréquence fondamentale Ω des plaques carrées FG sur différentes configurations de fondation élastique ($a/h=10$). (a) Plaque FG sans fondation élastique, (b) Plaque FG reposant sur la fondation Winkler, (c) Plaque FG reposant sur la fondation Pasternak	47
Fig III.3 Différence relative en pourcentage de la fréquence fondamentale entre les modèles micromécaniques par rapport à l'indice de loi de puissance « p », $a/h=10$, $a=b$	48
Fig III.4 L'effet de la fondation élastique sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques carrées FG en fonction du rapport a/h . (a) comparaison entre Voigt-Reuss, (b) comparaison entre Tamura- Mori-Tanaka	49

Chapitre IV : Analyse thermomécanique des plaques sandwiches FGM

Fig IV.1 Plaque sandwich FGM reposant sur une fondation élastique	52
Fig IV.2 Le déplacement transversale $\bar{w}$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich carrées (FG). (a) Type (1-2-1). (b) Type (2-2-1)	62
Fig IV.3 Effet des paramètres de fondations élastiques sur la flèche centrale $\hat{w}$ d'une plaque sandwich carré FG en fonction du rapport a/h Type (1-1-1). (a) $K_p=10$. (b) $K_w=100$	63
Fig IV.4 Effet de la charge thermique sur la flèche centrale $\hat{w}$ d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) en fonction du rapport a/b	64
Fig IV.5 Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) pour différents valeurs de la fondation élastique (a) $t_2=t_3=100$. (b) $t_2=t_3=10$	65
Fig IV.6 Variation de la contrainte de cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) pour différents valeurs de l'indice de puissance p	66
Fig IV.7 Variation de la contrainte de cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) pour différents valeurs du paramètre Winkler K_w	66

Liste des Tableaux

Chapitre I : Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Tab I.1 Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	6
---	----------

Chapitre III : Effet des modèles micromécaniques sur la réponse dynamique des plaques FGM

Tab III.1 Comparaison des six premières fréquences naturelles de la plaque carrée FG	44
---	-----------

Tab III.2 Comparaison de la fréquence fondamentale Ω de la plaque carrée isotrope	45
---	-----------

Chapitre IV : Analyse thermomécanique des plaques sandwiches FGM

Tab IV.1 Comparaison de la flèche centre adimensionnelle $\bar{w}$ pour différents types de plaques sandwich FGM carrées	59
---	-----------

Tab IV.2 Comparaison de la flèche centre adimensionnelle $\hat{w}$ pour différents types de plaques sandwich FGM	59
---	-----------

Tab IV.3 Comparaison de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour différents types de plaques sandwich FGM carrées	60
--	-----------

Tab IV.4 Comparaison de la contrainte axiale adimensionnelle $\hat{\sigma}_x$ pour différents types de plaques sandwich FGM carrées	60
--	-----------

Liste des notations

t_{FGM}	Epaisseur des couches FGM
t_c	Epaisseur de la couche centrale
h	Epaisseur de la structure
a	La largeur de la plaque
b	La longueur de la plaque
t_{FGM}/h	Rapport d'épaisseur
p	Paramètre du matériau
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de l'épaisseur
$V^{(n)}$	Fraction volume de la $n^{\text{ème}}$ couche
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$G(z)$	Module de Cisaillement en fonction de l'épaisseur
$K(z)$	Module de Compressibilité en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	La densité
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur
$\alpha_t(z)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de l'épaisseur
P_m	Propriétés matérielles de Métal
P_c	Propriétés matérielles de céramique
q_r	Paramètre de Tamura (transfert de contrainte-déformation)
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
w_b	Déplacement transversal dû au flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
(u_0, v_0, w_0)	Les déplacements au niveau du plan moyen ($z=0$)
θ_x, θ_y	Les rotations autour des axes x et y, respectivement.

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Les composants des déformations
i, j	Nombres naturelles
$f(z)$	La fonction de forme (fonction de gauchissement)
$g(z)$	fonction de cisaillement
$\int$	Intégrale indéterminée
k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
α	Nombre d'onde selon x
β	Nombre d'onde selon y
δ	Variation
δU	L'énergie de déformation de la plaque
δK	L'énergie cinétique de la plaque
δU_F	La variation de l'énergie de déformation de la fondation
f_e	Densité de la force de réaction de la fondation
k_w	Paramètre de Winkler
k_p	Paramètre de Pasternak
$\partial/\partial x$	Dérivée partielle par rapport à x
$\partial/\partial y$	Dérivée partielle par rapport à y
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
C_{ij}	Les coefficients de rigidité
A	La surface supérieure de la plaque
q	La charge transversale
T	Le chargement thermique
$(\dot{})$	La dérivée première par rapport au temps
$(\ddot{})$	La dérivée seconde par rapport au temps
∇	Opérateur Laplacien
N	Effort normal résultant
M, M^b	Moment de flexion résultant

M^s, S^s, K, P, Q, R	Efforts d'ordre élevé
$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$	Composantes de moment d'inertie
$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij})$	Composantes de rigidité
$(B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s, K_{ij}', L_{ij}, A_{ij}^s)$	Composantes de rigidité
$(O_{ij}, P_{ij}', Q_{ij}', S_{ij}, U_{ij})$	Composantes de rigidité
(N^T, M^T, P^T, R^T)	Les forces et moments résultantes dû à la charge thermique
$\sum$	La somme
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, W_b, W_s, \theta_{mn})$	Paramètres arbitraires
K_w, K_p	Paramètre de la fondation sous forme adimensionnelle
D	Rigidité flexionnelle de la plaque
ω	Fréquence naturelle
Ω	Fréquence naturelle adimensionnelle
$\bar{w}, \hat{w}$	Déplacement transversal adimensionnelle
$\bar{\sigma}_x, \hat{\sigma}_x$	Contrainte axiale adimensionnelle
$\bar{\tau}_{xz}, \hat{\tau}_{xz}$	Contrainte de cisaillement adimensionnelle
$\{\Delta\}$	Vecteur des Paramètres arbitraires
$[K]$	La matrice de rigidité
a_{ij}	Coefficients de matrice de rigidité
$[M]$	La matrice masse
$\{F\}$	Composantes du vecteur de force
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (*Functionally Graded Materials* « FGM ») ont été introduit pour la première fois au Japon au milieu des années 1980 par un groupe de spécialistes des matériaux. Typiquement, les FGM sont faites d'un mélange de métaux et de céramiques. En raison des excellentes caractéristiques des céramiques dans la résistance à la chaleur et à la corrosion associées à la ténacité des métaux, les contraintes inter laminaires à l'interface disparaîtraient. La structure en poutre, plaque ou coque lorsqu'elle est soumise à des charges mécaniques, à la température, à l'humidité ... ou dans d'autres conditions défavorables, ces matériaux présentent généralement des avantages exceptionnels. Par exemple: un système de propulsion de fusée lorsqu'un côté est exposé à des températures très élevées alors que l'autre côté n'est affecté que par des charges normales, ou l'enveloppe sous-marine lorsque la surface extérieure est soumise à la pression hydrostatique de l'eau de mer alors que la surface interne ne répond qu'aux exigences mécaniques de base ... En raison de la pertinence accrue des composants structurels des FGM dans la conception des structures aérospatiales et techniques, leurs caractéristiques ont attirés l'attention de nombreux scientifiques ces dernières années.

L'approfondissement de l'étude de cet objet est donc un besoin urgent aujourd'hui. Il y a plusieurs façons d'aborder cet objet de recherche

- Il est possible par des expériences matérielles de déterminer leurs caractéristiques matérielles ou par des expériences structurelles de plaques ou de poutres pour comprendre les principes comportement de la structure.
- En modélisant des matériaux ou des textures pour dériver des principes généraux de comportement.
- Par des calculs purement théoriques à travers l'analyse du travail de structures spécifiques à partir desquelles obtenir la vue la plus générale ...

Chacune des approches ci-dessus a certains avantages, la première approche donne souvent un rendement élevé mais nécessite des coûts d'investissement élevés, en particulier dans les conditions dans notre pays, certaines expériences ne seront pas pratiques. La deuxième approche est assez intuitive, avec une grande précision mais une puissance de calcul très élevée, ce qui nécessite un moteur de calcul puissant pour répondre aux exigences. La troisième approche est la plus simple mais répond toujours aux objectifs et c'est l'approche la plus courante actuellement adoptée par de nombreux scientifiques dans le monde. La thèse choisira la troisième approche pour analyser l'objet à travers le problème de la structure FGM.

De ce qui précède, Il est donc nécessaire de définir des lois de comportement adaptées à ces possibilités de fonctionnement des pièces ou éléments élaborés à partir de ces matériaux. Les efforts dans ce travail de thèse seront orientés vers l'étude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM.

Pour atteindre nos objectifs, tout d'abord on présente un aperçu général sur les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, les différents modèles micromécaniques, les différents types des structures FGM ainsi que leurs domaines d'application. Le deuxième chapitre est une tentative d'identifier et de mettre en évidence les sujets les plus pertinents pour les structures FGM et d'examiner les publications de revues représentatives qui sont liées à ces sujets, tout en citant les différents théories et modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement des structures en « FGM ».

Pour évaluer l'influence des modèles micromécaniques sur la vibration libre des plaques FG simplement supportées reposant sur une fondation élastique, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement qui inclut des intégrales à variables indéterminées est présentée dans le troisième chapitre; à l'aide d'une méthode analytique, les équations d'équilibres sont traitées et l'effet des modèles Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka sur les fréquences naturelles des plaques FG reposant sur une fondation élastique sont étudiés. Une validation des résultats ainsi qu'une étude paramétrique sont présentés.

Le dernier chapitre est consacré pour l'analyse du comportement statique des plaques sandwiches en FGM soumise à des charges mécanique et thermique (chargement thermomécanique). Cette section développe une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D en tenant compte l'effet d'étirement « stretching », contrairement aux autres théories d'ordre supérieur quasi-3D, le nombre d'inconnues et d'équations directrices de la présente théorie n'est que quatre contre cinq ou plus de fonctions de déplacement inconnues utilisées dans les autres. Une validation des résultats ainsi qu'une étude paramétrique sont présentés, pour examiner l'effet du modèle de Voigt et de la fondation élastique sur les déformations et les contraintes de la plaque sandwich FGM.

Chapitre I :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Introduction

I.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

I.2 Fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

- ✓ Powder metallurgy
- ✓ Solid free form fabrication method
- ✓ Laser cladding

I.3 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

I.4 Structures sandwiches en FGM

I.5 Les modèles micromécaniques des FGM (homogénéisation)

- ✓ Modèles de Voigt et Reuss
- ✓ Modèle de Tamura
- ✓ La représentation locale des éléments de volume (LRVE)
- ✓ Modèle de Mori-Tanaka
- ✓ Comparaison entre les modèles micromécaniques

I.6 L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

- ✓ La loi de puissance (P-FGM)
- ✓ La loi sigmoïde (S-FGM)
- ✓ La loi exponentielle (E-FGM)

Conclusion

Introduction

Les matériaux, l'énergie et la science moderne sont les trois piliers de la technologie moderne. De nouveaux développements de matériaux et de la recherche mènent l'invention des matériaux, et l'utilisation scientifiques des matériaux de base disponibles (tableau périodique) en divers composés inorganiques et organiques a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, les alliages, les céramiques d'ingénierie structurales, etc. La structure du développement d'un matériau moderne est illustrée sur la figure I.1. Les matériaux composites sont une classe de matériaux avancés, constitués d'un ou plusieurs matériaux combinés dans des états solides avec des propriétés physiques et chimiques distinctes. Le matériau composite offre une excellente combinaison de propriétés différentes des matériaux d'origine et est également plus léger. Le bois est un matériau composite de la nature, constitué de cellulose dans une matrice de lignine. Les matériaux composites vont tomber en panne dans des conditions de travail extrêmes grâce à un processus appelé délaminage (séparation des fibres de la matrice). La transition brute des propriétés du matériau à travers l'interface entre des matériaux distincts peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires et entraîner une déformation plastique ou une fissuration. Cela peut arriver par exemple, dans une application à haute température où deux métaux avec un coefficient de dilatation différent sont utilisés. Pour résoudre ce problème, des chercheurs japonais (Niino et collaborateurs) en 1987, confrontés à ce défi dans un projet d'avion spatial hypersonique nécessitant une barrière thermique (température extérieure de 2000K et température intérieure de 1000K sur moins de 10 mm d'épaisseur), est venu avec un nouveau matériau appelé Matériau Fonctionnellement Gradué « en anglais: Functionally Graded Material » (FGM) (Niino et al. 1987). Ils sont maintenant développés pour une utilisation générale en tant que composants structuraux dans des environnements à très haute température. La capacité de prédire la réponse des plaques et des coques en FGM lorsqu'elles sont soumises à des charges thermiques et mécaniques est d'un intérêt primordial pour l'analyse structurelle. En fait, de nombreuses structures sont soumises à des niveaux élevés de charge qui peuvent entraîner des relations contrainte-déformation non linéaire en raison de grandes déformations. L'un des problèmes importants qui méritent une attention particulière est l'étude de leur réponse non linéaire à de grandes déformations, post-flambement et vibrations non linéaires.

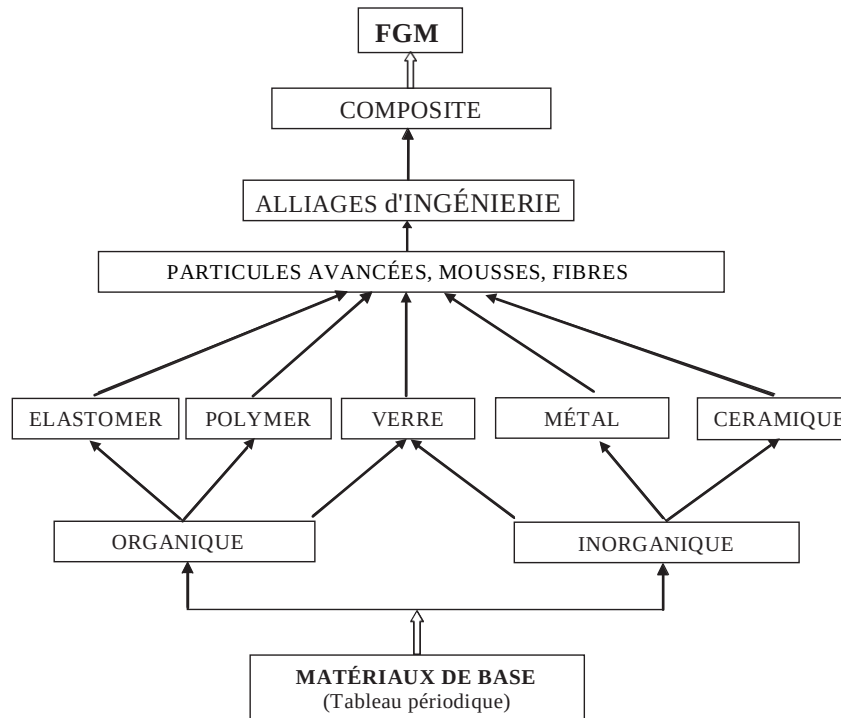


Figure I.1. Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.

I.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués(FGM)

De grandes performances sont déjà bien présentes dans la catégorie des matériaux appelés composites, dans lesquels un type de matériau hybride est constitué de matériaux fonctionnels (FGM). Au cours du XXe siècle, presque toutes les facettes du monde familier, l'aéronautique (navettes spatiales), de l'habillement à la construction, seraient intensivement modifiées par une nouvelle classe de matériaux. Des matériaux de haute performance comme les FGM permettent également certaines des réalisations technologiques les plus étonnantes du siècle dans le domaine des applications biomédicales, optoélectroniques, spatiales, chimiques, mécaniques et autres. Le terme «FGM» a été créé au milieu des années 1980 par un groupe de scientifiques au Japon (Yamanouchi et al. 1990). Depuis lors, un effort de développement de matériaux à haute résistance utilisant des FGM a été poursuivi. Les FGM ont d'abord été conçues comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion (Hirai et Chen 1999, Chan 2001, Uemura 2003). Ils sont maintenant développés pour une utilisation générale en tant que des structures dans des environnements à haute température. Un exemple de ces derniers, des lames rotatives à parois fines FGM (Librescu et Song 2005). Un certain nombre de revues portant sur divers aspects des FGM ont été publiées au cours des dernières décennies (Fuchiyama et Noda 1995, Markworth et al

1995, Tanigawa 1995, Noda1999, Paulino et al., 2003, Hui-ShenShen., 2009). Ils montrent que la plupart des premières études sur les FGM étaient plus axées sur l'analyse des contraintes thermiques et le comportement mécanique. Shen (2004) a présenté une étude complète sur l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations des structures en plaques et en coques composées de FGM.

Récemment, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont attiré beaucoup d'attention. Un FGM typique, avec un fort effet de couplage par flexion-étirement, est un composite inhomogène fabriqué à partir de différentes phases des constituants du matériau. Dans les FGM, les différentes phases micro-structurelles ont des fonctions différentes, et les FGM atteignent l'état multi-structural à partir de leur gradation de propriété. En faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement continu et régulier d'une surface à l'autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et réduire les concentrations de contraintes thermiques. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurelles et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Une microstructure graduée en continu avec des constituants métalliques/céramiques est représentée sur la figure I.2. Cela est dû au fait que les constituants céramiques des FGM sont capables de résister à des environnements à haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent des performances mécaniques plus élevées et réduisent la possibilité de fracture catastrophique. Récemment, Birman et Byrd (2007) ont présenté une revue des principaux développements des FGM, notamment les problèmes de transfert de chaleur, le stress, la stabilité et les analyses dynamiques, les essais, la fabrication et la conception, les applications et les fractures.

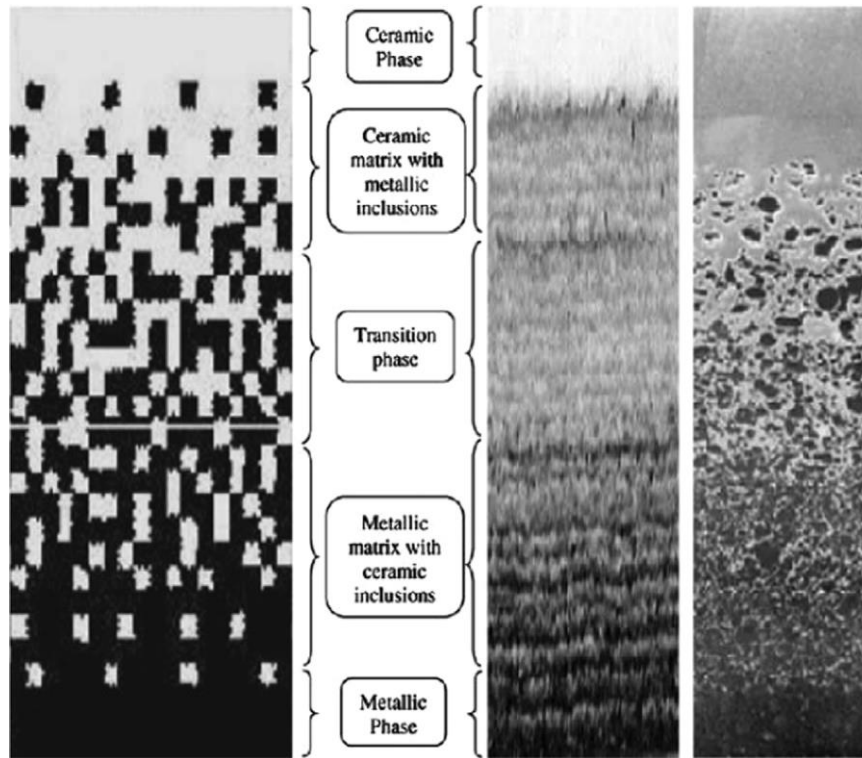


Figure I.2 : Gradation de la microstructure FGM avec des constituants céramique–métal.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le Tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes d'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité à la rupture.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement est continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM ». Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Un exemple d'un tel matériau est montré dans la figure I.3 (Yin et al., 2004) où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch, 1986).

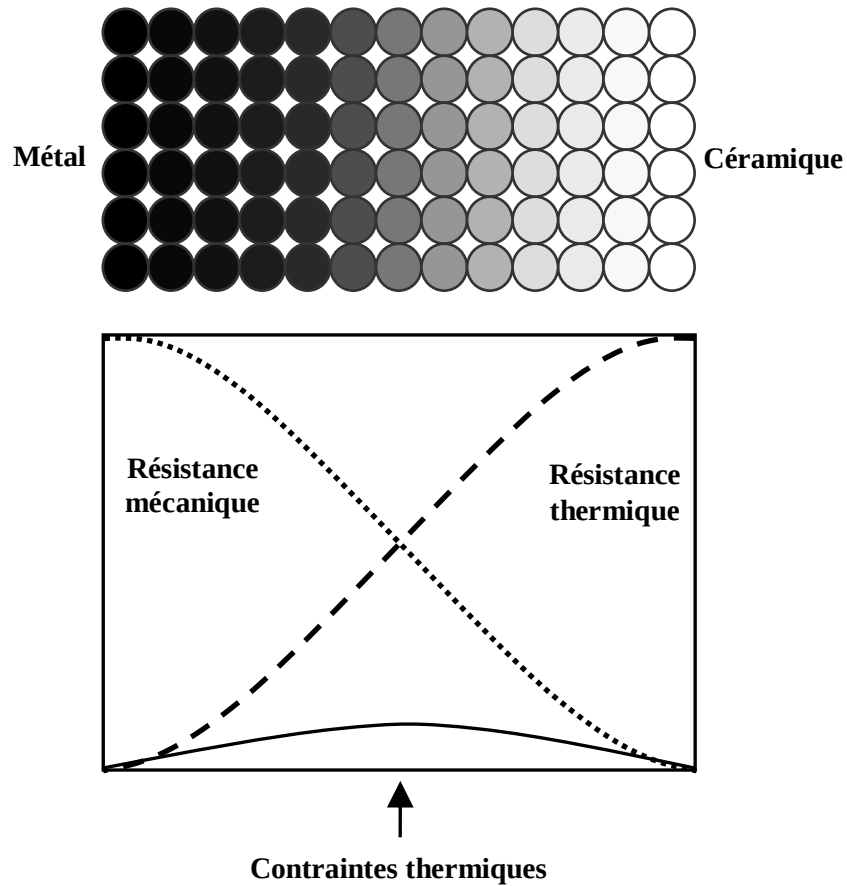


Figure I.3 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

Le concept de FGM a été appliqué avec succès dans des revêtements de barrière thermique où les exigences visent à améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion. Deux matériaux importants dans la technologie de fabrication des FGM sont: les couches céramiques protectrices extérieures Alumina ' Al_2O_3 ' et Zircone ' ZrO_2 ' sur les substrats Ni-super alloy ' NiCrAlY '.

Figure I.4 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

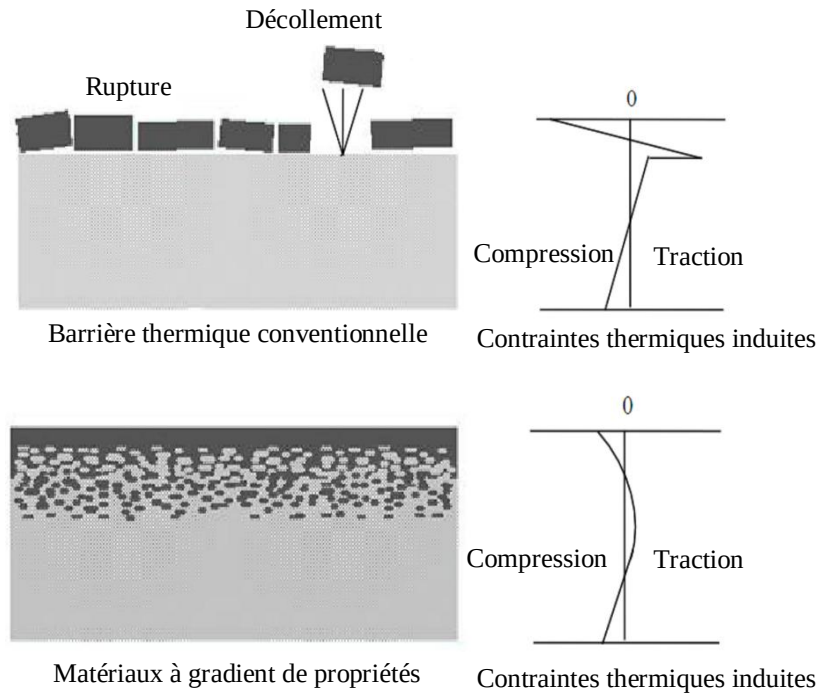


Figure I.4 : Protection thermique des FGM.

I.2 Fabrication des matériaux fonctionnellement gradués(FGM)

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants dans la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux de recherche sur les FGM a été consacrée au traitement et une grande variété de méthodes de production ont été développées pour le traitement des FGM. La plupart des processus de production de FGM sont basés sur une variation des méthodes de traitement conventionnelles déjà bien établies. Les procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation comprennent la compaction sèche des poudres (Powder metallurgy) (Jin et al. 2009, Shahrjerdi et al. 20011), la stratification des feuilles (sheet lamination) et les procédés de dépôt chimique en phase vapeur (chemical vaporde position et coating processes). En général, les méthodes utilisées incluent la coulage centrifuge (centrifugal casting) (Watanabe et al. 1998, Duquea etMelgarejoa 2005),Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), Coulage en bande (Tape Casting), et la projection thermique (thermal spraying) (Cannillo et al. 2007, Belmonte et al. 2009). Laquelle de ces méthodes de production est la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matériaux, du type de fonction de transition requise et de la géométrie du composant souhaité.

1.2.1 Compaction sèche des Poudres (Powder metallurgy)

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliant âge. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop et al.1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

1.2.2 Procédé de fabrication de forme libre solide (Solid free form fabrication method)

La méthode de fabrication de forme libre solide (SFFM) est l'une des principales technologies pour produire des objets physiques directement à partir des informations générées par ordinateur. La fabrication de matériaux à gradient fonctionnel est l'application la plus remarquable de cette méthode car cette méthode représente en détail la distribution variable des matériaux dans la géométrie et sa capacité à contrôler la composition interne des composants (Lin et Yue 2005, Moon et al. 2001). Forme solide libre est un processus de fabrication additif qui ouvre beaucoup d'avantages qui comprennent: une vitesse de production plus élevée, moins d'énergie, une utilisation maximale des matériaux, la capacité de produire des complexes et la conception. Les procédés à base de laser sont principalement employés dans le procédé SFF pour la fabrication de matériaux fonctionnels (Huymacher et al. 2004).

1.2.3 Traitement par laser (Laser cladding)

Deux ou plusieurs matériaux différents sont liés ensemble en utilisant l'intercession au laser dans le processus « Laser cladding ». Pendant le processus, le matériau qui est sous forme de poudre est injecté dans le système qui est construit de manière sûre pour le processus tandis que le laser qui provoque la fusion se dépose sur le substrat. Bien que la technique soit la meilleure pour revêtir diverses formes et soit déclarée comme le procédé le plus approprié pour l'application de matériaux gradués, la limitation existe toujours lorsque le procédé nécessite un coût élevé pour la configuration du système de haute. Le type Laser Nd: YAG était également utilisé dans une fabrication par fusion laser sélective (SLM) d'un alliage de super nickel et de FGM de zircone, Figure. I.5. Les matériaux résultants contenaient une porosité moyenne de 0,34% avec un changement progressif entre les couches sans défauts d'interface majeurs.

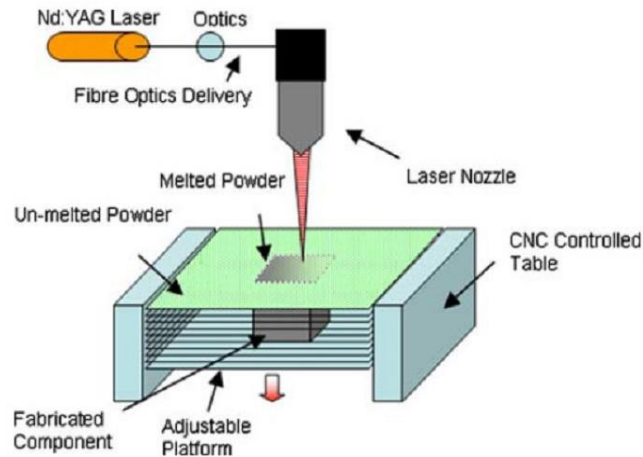


Figure I.5 Configuration expérimentale pour le traitement assisté par laser à l'aide du Laser Nd: YAG.

I.3 Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

De nos jours, les recherches sur les FGM ont été menées de manière intensive. Les FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques et sont utilisés dans les domaines de l'électronique, des diodes, des capteurs, des conducteurs de chaleur et des dispositifs électroniques, thermiques, structurels et militaires. Les FGM sont également une préoccupation dans les autres domaines tels que les matériaux industriels, l'optoélectronique, les biomatériaux et les matériaux énergétiques. Les FGM sont très prometteuses dans les applications où les conditions d'exploitation sont plus nombreuses. En raison du développement du concept des matériaux fonctionnellement gradués dans les années 1990, l'utilisation pratique des FGM est encore très limitée. Ces solides non homogènes sont utilisés dans différentes branches d'applications d'ingénierie, par ex.

I.3.1 Génie civil

La gradation fonctionnelle des éléments en béton permet d'aligner la composition interne des composants structurels avec des exigences de performance structurelles et thermiques spécifiques. Cet alignement est rendu possible en modifiant continuellement les caractéristiques du matériau, y compris sa porosité, sa résistance ou sa rigidité. Le changement graduel des composants en béton permet l'altération continue des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales. Minimiser la porosité améliore les caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids (Figure I.6).

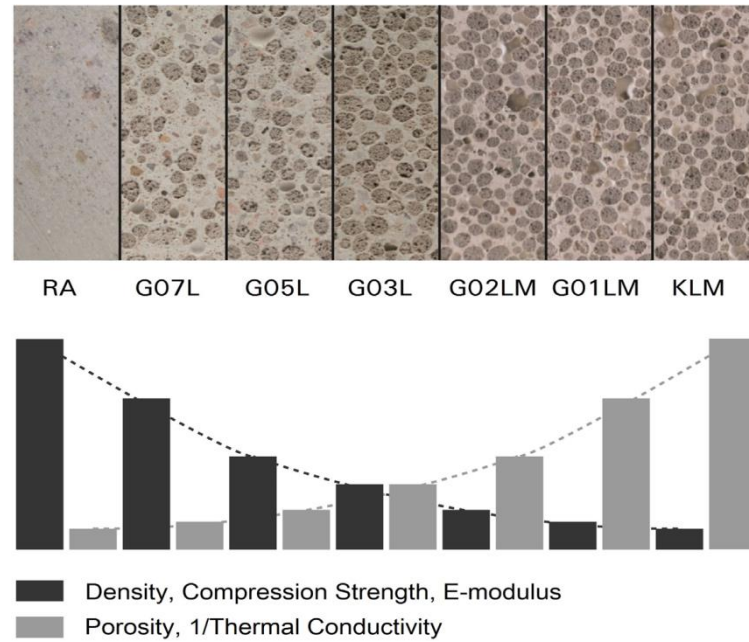


Figure I.6 Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité (Hermann, 2017).

1.3.2 Réacteur nucléaire

Les parois internes des réacteurs nucléaires sont constituées de FGM (Céramique / Métal) dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal comme le montre la figure I.7.

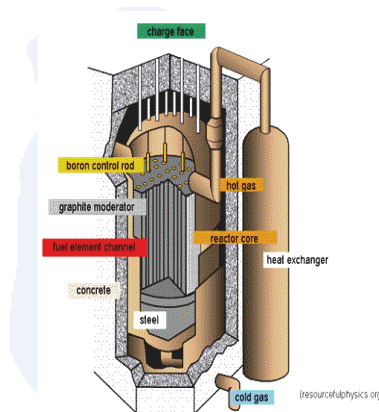


Figure I.7 Réacteur nucléaire.

1.3.3 Cylindres de moteur de voiture

Les cylindres du moteur de la voiture sont en FGM. La phase interne est en céramique et la phase externe est en métal comme le montre la figure I.8.

1.3.4 Lames de turbine

Les FGM sont applicables dans les lames de la turbine comme le montre la figure I.9. Les revêtements typiques pour les applications à haute température impliquent un revêtement résistant à l'oxydation et un revêtement de barrière thermique (TBC). Le revêtement résistant à l'oxydation est également appelé couche de liaison car il fournit une couche sur laquelle la céramique TBC peut adhérer.



Figure I.8 Cylindre du moteur de la voiture.

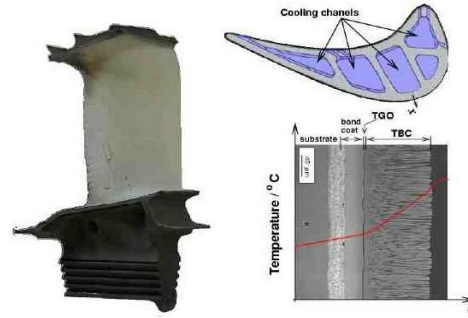


Figure I.9 Lames de turbine.

1.3.5 Électronique et optoélectronique

Fibres optiques utilisées pour la transmission des ondes à haute vitesse. Cartes de circuits imprimés (PCB) Téléphone cellulaire.

1.3.6 Médecine

Les tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisés en tant que matériel gradué fonctionnellement de la nature pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire pour servir le but du bio-tissu original. La solution idéale pour cette application est un matériau fonctionnellement gradué. Les FGM ont trouvé une large gamme d'applications dans les applications dentaires et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os.

Le concept de FGM est applicable à divers domaines, comme l'illustre la figure I.10.

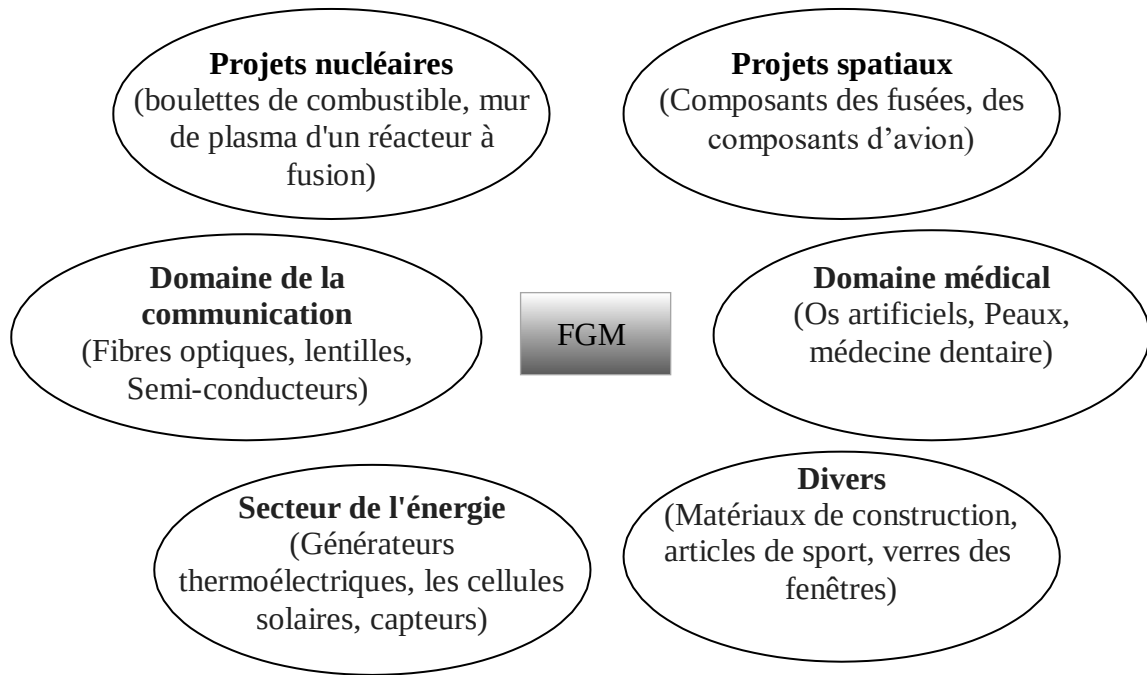


Figure I.10 Les champs potentiels de l'application des FGM.

Les FGM peuvent également trouver une application dans les techniques de communication et d'information. Les outils abrasifs pour la coupe de métal et de pierre sont d'autres exemples importants où la gradation de la couche de surface a amélioré les performances. Comme une observation finale concernant les FGM, on peut noter que ce concept de matériaux gradués a démontré que le gradient de composition micro/macrostructure peut non seulement éliminer les effets indésirables tels que la concentration des contraintes, mais aussi générer une fonction positive unique (Gasik, 2010).

I.4 Structures sandwiches en FGM

Les structures sandwiches, en raison de leurs propriétés exceptionnelles, telles que la rigidité et la résistance spécifiques élevées ainsi que la capacité d'absorption d'énergie, ont été largement utilisées dans les domaines aéronautique, aérospatial, naval/maritime, construction, transport et énergie éolienne. Cependant, le changement brusque des propriétés matérielles à travers les interfaces entre les couches et le noyau peut entraîner des contraintes inter-laminaires (contraintes d'interfaces) importantes, conduisant souvent à une délamination, ce qui constitue un problème majeur dans les structures sandwich. L'une des solutions à ce problème est d'explorer le matériau FGM dans la conception en sandwich. Les FGM sont une classe de matériaux composites avancés dans lesquels les propriétés du matériau varient

continuellement, éliminant ainsi les changements brusques de propriétés mentionnés ci-dessus. Les structures sandwiches FGM peuvent être divisées en trois types: type-A, plaques sandwich avec couches faciales FGM et noyau homogène; type B, plaques sandwich avec des feuilles de face homogènes et un noyau FGM; type C, plaques sandwich avec une couche supérieure homogènes et les couches centrale et inférieure en FGM.

I.5 Les modèles micromécaniques des FGM (homogénéisation)

Les matériaux fonctionnellement gradués possèdent une variation continue des constituants du matériau dans les coordonnées spatiales. Une telle microstructure graduée pourrait être examinée en tant que distribution continue de particules discrètes dans une matrice d'un composite renforcé. Les modèles micromécaniques existants pourraient être étendus pour prédire les propriétés matérielles efficaces des FGM pour toute une gamme de fraction volumique (V_F) des constituants ($0 \leq V_F \leq 1$) (Kim et Paulino, 2003).

Alors que la plupart des articles de la littérature sur les FGM utilisent la règle simple du mélange pour obtenir les propriétés matérielles efficaces, un modèle micromécanique approprié devrait être utilisé pour prédire avec précision les propriétés multi-physiques efficaces. Comme l'a expliqué Eshelby (1957), l'objectif de la micromécanique est de quantifier l'effet de la microstructure sur le comportement multi-physique des matériaux par l'application de la mécanique du milieu continu à une échelle réduite. Parmi les modèles de la littérature, quelques modèles micromécaniques standards pourraient être mentionnés. Les modèles de Voigt (1889) et de Reuss (1929) sont les modèles les plus simples utilisés pour évaluer les propriétés matérielles effectives des composites. En utilisant le principe variationnel, Hashin et Shtrikman (1962,1963) ont établi les limites supérieure et inférieure des propriétés matérielles effectives. Le modèle de Mori-Tanaka (1973) a été introduit pour calculer les contraintes internes moyennes dans la matrice contenant des déformations propres. Benveniste (1987) a également reformulé le modèle de Mori-Tanaka pour l'appliquer aux matériaux composites.

I.5.1 Voigt and Reuss

Le modèle micromécanique le plus simple pour obtenir les propriétés de matériau macroscopique équivalentes est la loi de mélange qui a été formulée par Voigt (1889). L'idée de Voigt était de déterminer les propriétés des matériaux en faisant la moyenne des contraintes sur toutes les phases avec l'hypothèse d'uniformité de déformation dans le matériau. Le modèle Voigt a été adopté dans la plupart des analyses de structures de FGM.

L'avantage du modèle de Voigt est qu'il est facile à calculer et peut être considérée comme les limites supérieures et inférieures des propriétés élastiques effectives d'un matériau hétérogène. Les propriétés de matériaux efficaces p , comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , le coefficient de dilatation thermique α_t et la conductivité thermique K_f peuvent être exprimés par (Mishnaevsky 1994, Zimmerman 1994):

$$P(z) = P_i V_F(z) + P_m (1 - V_F(z)) \quad (I.1)$$

Le module d'Young (E) et le coefficient de Poisson (ν) des FGM ont écrits comme suit:

$$E(z) = E_i V_F(z) + E_m (1 - V_F(z)) \quad (I.2a)$$

$$\nu(z) = \nu_i V_F(z) + \nu_m (1 - V_F(z)) \quad (I.2b)$$

Où les indices "i" et "m" désignent les propriétés matérielles de la matrice et des inclusions (particules). D'autre part, Reuss (1929) a supposé l'uniformité de la contrainte à travers le matériau et a obtenu les propriétés effectives comme:

$$E(z) = \frac{E_i E_m}{E_i (1 - V_F(z)) + E_m V_F(z)} \quad (I.3a)$$

$$\nu(z) = \frac{\nu_i \nu_m}{\nu_i (1 - V_F(z)) + \nu_m V_F(z)} \quad (I.3b)$$

Comme le montrent Hill (1964), les estimations de Voigt et de Reuss fournissent respectivement les faces supérieure et inférieure du module de Young pour toute la loi de la fraction volumique des propriétés.

1.5.2 Tamura

La méthode de Tamura et al. (1973) suppose une règle linéaire de mélange pour le coefficient de Poisson effectif d'un composite à deux phases, alors qu'il incorpore un paramètre d'ajustement empirique q_T (transfert contrainte-déformation) dans la formulation du module d'Young effectif. Le paramètre empirique relie la contrainte et la déformation dans les phases de matrice et de particule. Par conséquent, le module d'Young effectif et le coefficient de Poisson (ν) sont les suivant:

$$E(z) = \frac{(1 - V_F(z)) E_m (q_T - E_i) + V_F(z) E_i (q_T - E_m)}{(1 - V_F(z)) (q_T - E_i) + V_F(z) (q_T - E_m)} \quad (I.4a)$$

$$\nu(z) = \nu_i V_F(z) + \nu_m (1 - V_F(z)) \quad (I.4b)$$

Le modèle Tamura introduit un paramètre supplémentaire q_T comme suit :

$$q_T = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|} \quad (I.4c)$$

Le paramètre q_T représente le transfert de contrainte-déformation. Sa valeur dépend des

propriétés du matériau constitutif et de l'interaction des microstructures dans le composite. Par exemple, $q_T = \infty$ si les éléments constitutifs se déforment de manière identique dans la direction de chargement, donc le modèle de Tamura se réduit à l'estimation de Voigt. Tandis que $q_T = 0$ si les éléments constitutifs subissent le même niveau de contrainte, en aura le modèle de Voigt. En général, les éléments constitutifs d'un composite ne subissent ni contrainte égale ni déformation égale en raison de la microstructure compliquée (variations de la forme des particules, de l'orientation, de la fraction volumique, etc.). Une valeur finie non nulle de q_T reflète approximativement ces effets.

1.5.3 Représentation local des éléments de volume (LRVE)

La méthode de la représentation cubique local des éléments de volume (LRVE) a également été utilisé par Gasik et Lilius (1994, 1998) pour obtenir les propriétés matérielles effectives des FGM en supposant que la seconde phase d'un composite à deux phases est une inclusion. Selon ce modèle micromécanique, un élément de volume orthotrope localement représentatif pourrait être utilisé pour prédire les propriétés globales des FGM. Le module d'Young est exprimé comme suit par la méthode LRVE :

$$E(z) = E_m \left(1 + \frac{V_F(z)}{FE - \sqrt[3]{V_F(z)}} \right), \quad FE = \frac{1}{1 - E_m / E_i} \quad (I.5)$$

Par ailleurs, le modèle micromécanique de Voigt pourrait être utilisé pour déterminer le coefficient de Poisson effectif des FGM.

1.5.4 Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka (Suresh 1998, Pradhan 2000) pour estimer le module d'Young E , et le coefficient de Poisson ν est applicable aux régions de la microstructure graduée qui ont une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue. On suppose que la phase matricielle est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière. Le module de module de compressibilité K et le module de cisaillement G obtenus par le schéma de Mori-Tanaka pour une distribution aléatoire de particules isotropes dans une matrice isotrope sont (Vel et batra 2002, Benveniste 1987, Mori et Tanaka 1973):

$$\frac{K - K_m}{K_i - K_m} = \frac{V_F}{1 + (1 - V_F) \frac{K_i - K_m}{K_m + \frac{4}{3} G_m}}, \quad (I.6a)$$

$$\frac{G - G_m}{G_i - G_m} = \frac{V_F}{1 + (1 - V_F) \frac{G_i - G_m}{G_m + f_1}}, \quad (I.6b)$$

Où

$$f_1 = G_m \frac{9K_m + 8G_m}{6(K_m + 2G_m)} \quad (I.6c)$$

Le module d'Young (E) est donné comme:

$$E(z) = E_m + (E_i - E_m) \left(\frac{V_F(z)}{1 + (1 - V_F(z))(E_i / E_m - 1)(1 + \nu) / (3 - 3\nu)} \right) \quad (I.7)$$

Puisque les effets de la variation du coefficient de Poisson (ν) sur la réponse des plaques FGM sont très faibles (Yang et al. 2005, Kitipornchai et al. 2006), ce paramètre matériel est supposé constant pour des raisons de commodité.

✚ Il est à noter que la densité de masse effective ρ est obtenue par la règle de mélange suivante, quel que soit le modèle micromécanique utilisé:

$$\rho(z) = \rho_i V_F(z) + \rho_m (1 - V_F(z)) \quad (I.8)$$

❖ Comparaison des modèles micromécaniques

Les estimations du module d'Young d'un matériau fonctionnellement gradué, en utilisant les cinq modèles micromécaniques susmentionnés, sont comparées sur la Figure I.11. Les résultats estimés sont représentés en fonction de la fraction volumique des constituants. Comme le montre la figure I.11, les approximations de Voigt et de Reuss représentent les bornes supérieure et inférieure pour l'estimation du module d'Young. Alors que l'estimation de Reuss pour le module d'Young pourrait être inférieure de 48% à l'estimation de Voigt pour la fraction volumique de $V_F = 0,5$. Les estimations faites par Mori-Tanaka, LRVE et Tamura ($q_T = -100\text{GPa}$) sont dans les modèles de Voigt et de Reuss. Il est à noter que les estimations de Tamura dépendent fortement de la valeur de q_T .

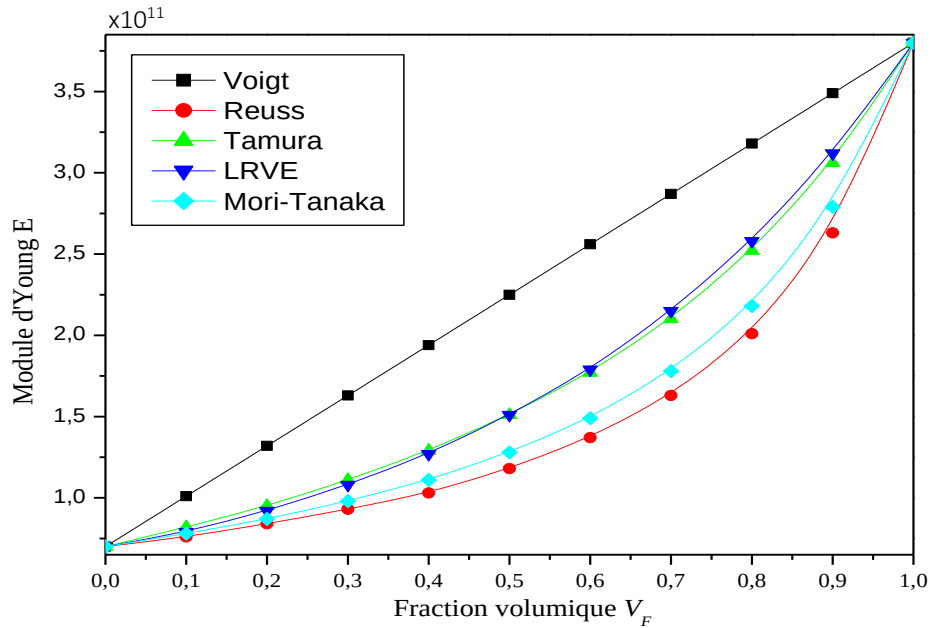


Figure I.11 : Variation du module d'Young en fonction de la fraction volumique pour plusieurs modèles micromécaniques.

Plusieurs modèles micromécaniques des FGM ont été examinés dans (Gasik 1998, Zuiker 1995, Kim et Paulino 2003, Shen et Wang 2012, Jha et al. 2013). Ces modèles micromécaniques sont examinés pour obtenir les propriétés matérielles effectives des FGM avec des distributions de loi de puissance, de Sigmoide et de fonction exponentielle de la fraction volumique dans l'épaisseur de la plaque. En utilisant une méthode analytique avec une technique d'intégration temporelle numérique, les équations directrices sont traitées et les effets des modèles Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka sur les réponses structurelles de la plaque FG sont étudiés.

I.6 Idéalisations mathématiques des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurelles et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

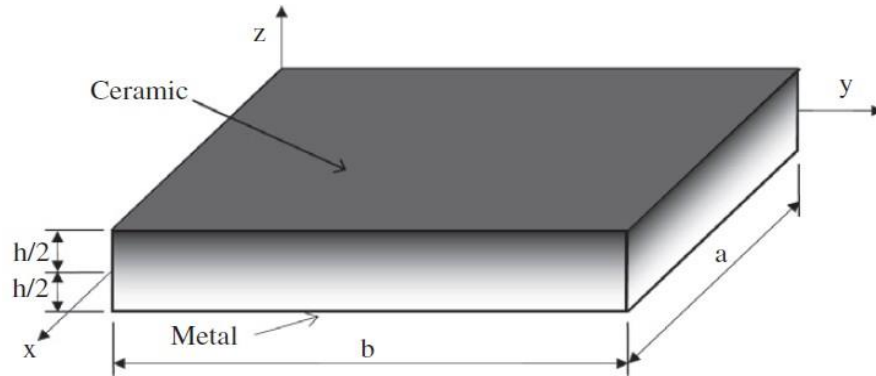


Figure I.12 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module d'Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit: $E=E(z)$, $\nu=\nu(z)$. Le module d'Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

1.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.9)$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par les modèles micromécanique.

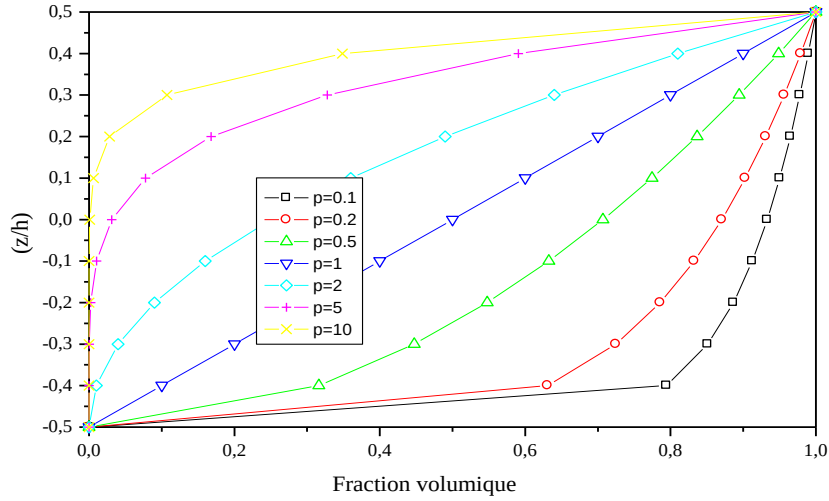


Figure I.13 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Par conséquent, Chung et chi (Shyang-ho, 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.10a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.10b})$$

En utilisant la loi de mélange de Voigt, le module d'Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E_1(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.11a})$$

$$E_2(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.11b})$$

Figure I.14 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.11a) et (I.11b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

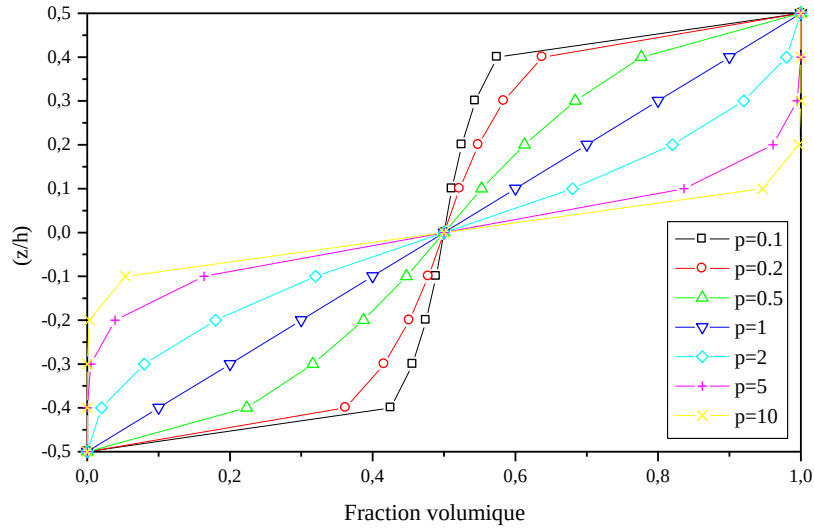


Figure I.14: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, (Delale, 1983) :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)}, \quad B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (I.12)$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.15.

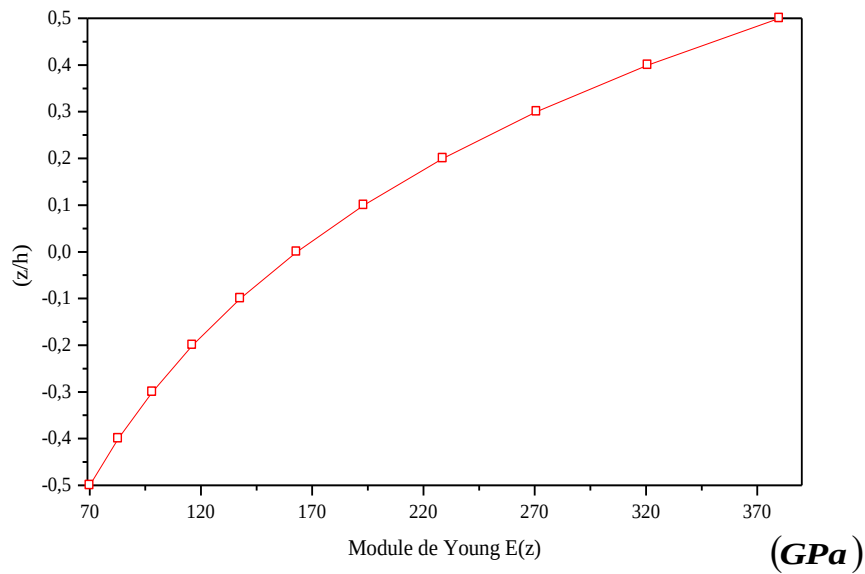


Figure I.15: Variation du module d'Young dans une plaque

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Les résultats généraux de chapitre actuel sont les suivants:

- Le changement graduel des propriétés des matériaux est une préoccupation importante pour la réponse structurelle et dynamique des plaques de FGM. Le comportement de vibration, de flexion, de flambage et de post-flambement est très influencé par le type de charge, la gradation des propriétés du matériau, le type de fondation, etc. Des précautions appropriées doivent être prises lors de l'adaptation de la FGM pour une application spécifique.
- Bien que de nombreuses techniques de fabrication de FGM soient disponibles, la compaction sèche des Poudres (Powder metallurgy) en est aujourd'hui la technique la plus adoptée, mais il faut encore améliorer les techniques pour obtenir la distribution garantie des propriétés dans toute la structure avec plus de fiabilité et de prévisibilité.
- L'importance de choisir un modèle micromécanique et un type de FGM appropriés sur l'estimation précise des propriétés structurelles des structures FG.

Chapitre III :

Revue bibliographique sur la modélisation et l'analyse des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Introduction

II.1 Les modèles analytiques des plaques FGM

- ✓ La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)
- ✓ La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)
- ✓ La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT)

II.2 Les études rapportées sur des structures FGM

- ✓ Vibration et réponse dynamique des structures FGM
- ✓ Instabilité et réponse statique des structures FGM

Conclusion

Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff (1850), elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.1 Les modèles analytiques des plaques FGM

II.1.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (l/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (Figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger (Timoshenko, 1959), (Reddy, 1997), (Reddy, 1999),

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

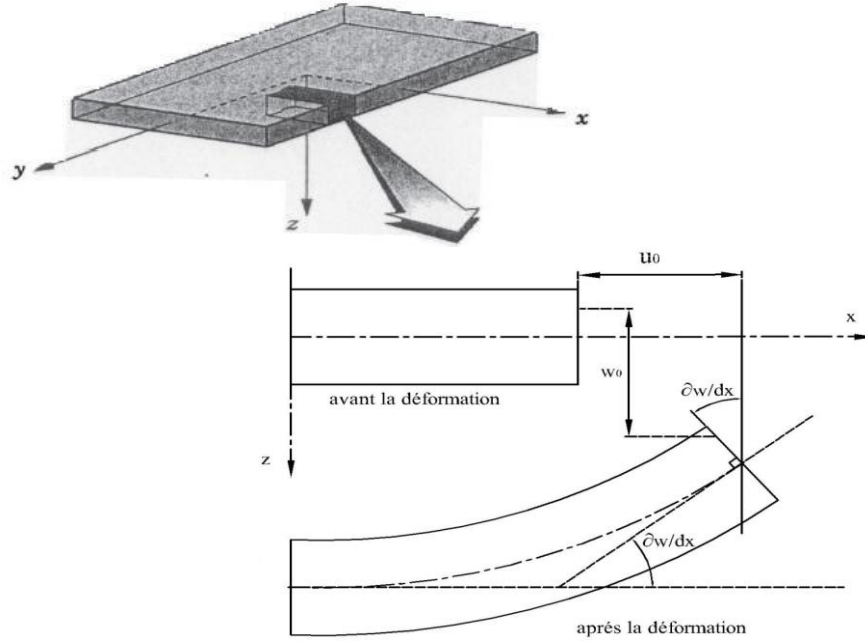


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff (Reddy, 1997).

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x, y), v_0(x, y)$
- Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}, z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement transversal $w_0(x, z)$

Sous ces considérations, les sections droites de la plaque ne subissent aucun glissement, en effet:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.2a})$$

Qui en résulte une contrainte nulle de cisaillement :

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{II.2b})$$

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.1.2 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que la section droite initiale reste plane mais non perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner, 1945),

Mindlin (1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger (Timoshenko, 1959), (Reddy, 1997), (Reddy, 1999).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (II.3)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (θ_x, θ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

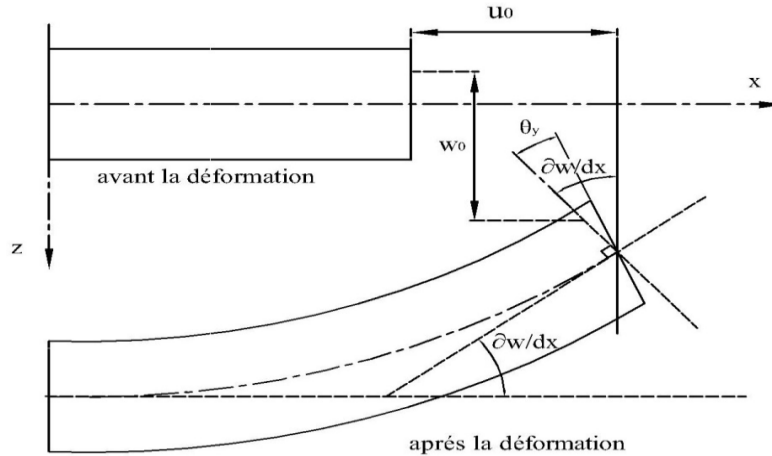


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, 1997).

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x, y), v_0(x, y)$
- Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}, z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement dû au cisaillement $z \theta_x(x, y), z \theta_y(x, y)$

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \theta_x \quad (II.4)$$

Et

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \theta_x$$

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui ne représente pas la réalité ; ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction pour régler ce problème.

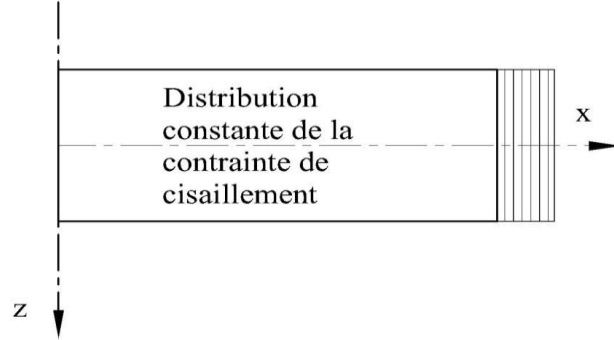


Figure II.3 : La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT.

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse du 1er ordre et celle d'ordre supérieur (Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006; Davoodinik, 2005; Ugural, 1981). Un calcul plus exact trouvé dans la référence (Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006; Nowinski, 1978 ; Zhong et Yu, 2007 ; Chabraborty et al, 2003).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.1.3 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique et de celle de Reissner-Mindlin avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al., 1949 ; Naghdi, 1957 ; Reissner, 1975 ; Reddy , 1984 ; Kant et Swaminathan , 2002).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (II.5)$$

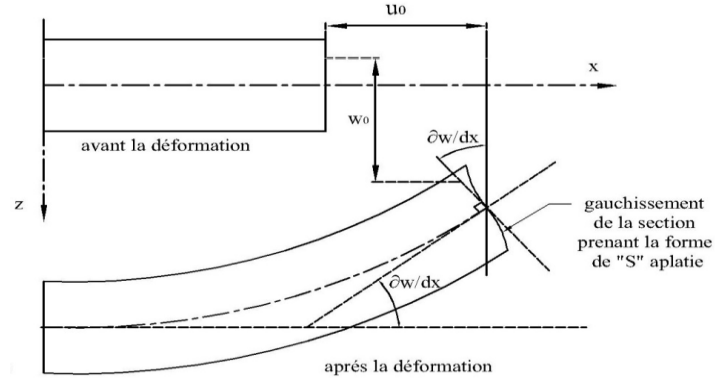


Figure II.4 : Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

On trouve les mêmes parties : le déplacement de la membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction $f(z)$ qu'on l'appelle « fonction de gauchissement » ou « fonction de forme ». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle « le gauchissement », donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la plaque. La fonction de gauchissement doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque. Donc :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + f'(z)\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = f'(z)\theta_x \quad (\text{II.6})$$

Et $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot f'(z)\theta_x \Rightarrow f'(\pm h/2) = 0$

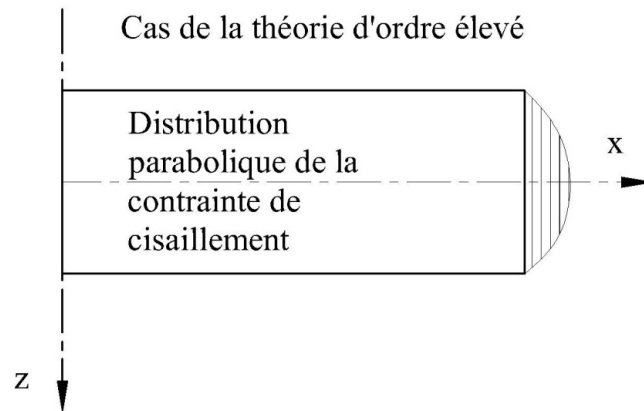


Figure II.5 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997), (Reddy, 1999) sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

(Touratier, 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (Karama, 2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.9})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par (Ait Atmane et al., 2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.10})$$

II.2 Les études rapportées sur des structures FGM

L'analyse des structures composites est l'un des domaines de recherche les plus prometteurs des dernières décennies. Des analyses structurales et dynamiques précises sont nécessaires pour concevoir diverses parties structurales des constructions aérospatiales, mécaniques, navales et civiles afin de trouver le comportement de la réponse structurale en temps réel. Différentes théories ont été développées par les chercheurs pour analyser les structures composites. La théorie classique des plaques et les théories de la plaque de déformation de cisaillement sont une catégorisation bien connue des théories des plaques. Les composantes transversales de la contrainte de cisaillement sont négligées dans la théorie classique des plaques (Reddy, 2007), où elles sont incluses dans les théories de déformation de cisaillement (Talha 2011, Sahoo 2013). La figure II.6 montre l'analyse des structures en FGM rapportées dans la littérature. De plus, les théories disponibles sont infinies et ne sont pas fournies par souci de concision.

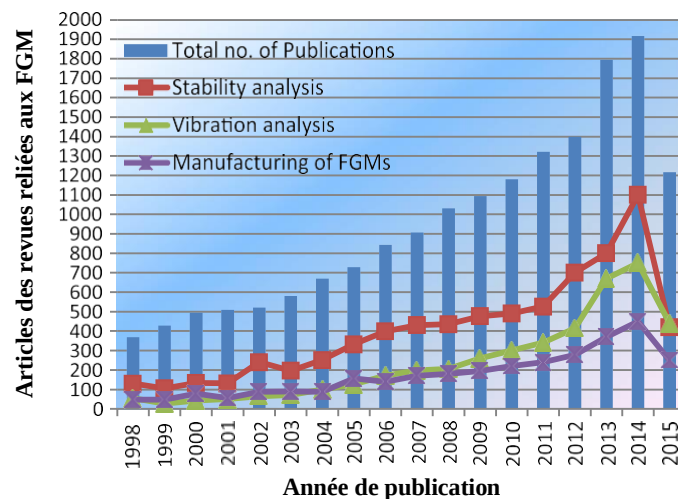


Figure II.6: Publications de revues arbitrées liées aux FGM (Gupta, 2015).

II.2.1 Vibration et réponse dynamique des structures FGM

Un nombre important d'études sur la vibration libre et forcée des plaques FGM avec ou sans charges thermiques et / ou mécaniques initiales dans le plan ont été rapportées dans la littérature au cours des dernières décennies.

Cheng et Kitipornchai (1999) ont utilisé la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) pour étudier le comportement de flambement et de vibration des plaques FGM par analogie avec les vibrations membranaires. Ng et al (2000) ont étudié la résonance paramétrique des plaques en utilisant le principe d'Hamilton. He et al. (2001) ont rapporté la formulation d'éléments finis basée sur la théorie

de la plaque mince pour contrôler la forme et la vibration de la plaque FGM avec des capteurs piézo-électriques intégrés et des actionneurs sous charge mécanique. Reddy et Cheng (2003) ont développé des analyses vibratoires tridimensionnelles pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant une formulation asymptotique et une méthode de matrice de transfert. Yang et Shen (2002) ont étudié la réponse dynamique des plaques de FGM soumises à des charges latérales impulsives combinées à des actions initiales dans le plan dans un environnement thermique. Kim (2005) a utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz basée sur la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre pour étudier les caractéristiques de vibration des plaques rectangulaires FG.

Ferreira et al. (2006) ont utilisé des méthodes de maillage pour étudier les fréquences naturelles des plaques fonctionnelles. Li et al. (2009) ont utilisé la théorie de l'élasticité tridimensionnelle avec la méthode de Ritz pour générer les fréquences propres des plaques rectangulaires FG dépendant de la température. Natarajan et al. (2011) ont étudié la vibration de flexion libre linéaire de plaques FG fissurées dans un environnement thermique sévère. Sheikholeslami et Saidi (2013) ont étudié le cisaillement d'ordre supérieur et la théorie des plaques déformables normales pour analyser les caractéristiques des vibrations des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées posées sur une fondation élastique. Shen et Wang (2012) ont analysé les vibrations de petites et de grandes amplitudes de la plaque à gradients fonctionnels reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans un environnement thermique à l'aide de modèles Voigt et Mori-Tanaka basés sur la théorie des ordres supérieurs. Akavci (2014) a examiné l'effet des déformations de cisaillement transversales lors de la réponse vibratoire d'une plaque de FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak; ils supposaient que les propriétés matérielles de la plaque variaient comme une fonction continue à travers l'épaisseur par simple distribution de la loi de puissance en fonction des fractions volumiques des constituants. Le principe d'Hamilton est utilisé pour formuler les équations gouvernantes basées sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur.

Serge Abrate (2006) a étudié les vibrations libres, le flambement et la flexion statique des plaques FGM dans lesquelles les propriétés du matériau varient à travers l'épaisseur. Après avoir comparé avec la littérature disponible, il a conclu que les fréquences propres, la température critique, la charge de flambement dans le plan et la flexion des plaques de FGM étaient proportionnelles à celles des plaques homogènes équivalentes. Des études approfondies ont été réalisées pour des plaques minces et épaisses avec différents rapports d'aspect, ainsi que des plaques inclinées et circulaires et de nombreuses combinaisons de

conditions aux limites. Ces problèmes ont été analysés avec la théorie des plaques classique, les théories de déformation de cisaillement du premier et du troisième ordre. La méthode multi-quadratique permet une discrétisation de domaine et de frontière rapide et facile. Le schéma Mori-Tanaka est utilisé pour homogénéiser les propriétés du matériau. Mohammad Talha et B.N. Singh (2010) a étudié la vibration libre et la réponse statique des plaques de FGM avec une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur en considérant une modification spécifique du déplacement transversal en combinaison avec des méthodes d'éléments finis. Les équations de mouvement des plaques FGM sont dérivées en utilisant une approche variationnelle, prise en compte la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les résultats de calcul ont été obtenus au moyen d'un élément fini lagrangien iso-paramétrique continu avec 13 degrés de liberté par nœud. On conclut que l'effet du rapport d'épaisseur de la plaque est indépendant de l'indice de fraction volumique. Un changement graduel dans les propriétés du matériau détermine la réponse des plaques FGM. Xiang et al. (2011) ont suggéré une théorie de plaque de déformation de cisaillement d'ordre n pour étudier la réponse de vibration libre des plaques sandwich composites à gradations fonctionnelles. Le champ de déplacement est représenté par un terme polynomial d'ordre n . Les conditions de contrainte de cisaillement transversale nulle sont satisfaites aux faces supérieure et inférieure de la plaque. La théorie du troisième ordre de Reddy (1999) peut être considérée comme un cas particulier de la théorie actuelle de l'ordre n . Les fréquences naturelles des FGM et des plaques composites avec différents rapports de géométrie, les propriétés matérielles sont calculées par la théorie n -ordre avec différentes valeurs d'indice matérielle. Benachour et al. (2011) utilise la théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse des vibrations libres des plaques en FGM avec une gradation aléatoire des matériaux. Cette théorie considère les effets de cisaillement transverse et la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque, de sorte que les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas nécessaires. Dans cette théorie de la plaque raffinée, le nombre de fonctions inconnues est de quatre alors que dans la théorie de la déformation par cisaillement a 5 fonctions inconnues. Les équations du mouvement sont dérivées selon le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir des solutions de forme, et les fréquences fondamentales sont ensuite calculées en résolvant les résultats des problèmes de valeur propre. Y.X. Hao et al. (2011) ont étudié la réponse vibratoire transversale non linéaire des plaques rectangulaires FGM de type cantilever qui ont été soumises à des charges transversales et thermiques combinées. Les équations de mouvement non-linéaire pour la plaque FGM sont dérivées de la théorie de la plaque de

déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (1999) et du principe d'Hamilton.

Madani et al. (2016) ont étudié la vibration libre d'une coque cylindrique piézoélectrique renforcée par des nanotubes de carbone (FG-CNT) soumise à des distributions de température uniformes et non uniformes basées sur le FSDT en utilisant la Méthode différentielle cubique. Contrairement à la FSDT existante, Mantari et Granados (Mantari 2015a, 2015b) ont étudié l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie déformation de cisaillement de première ordre (FSDT) avec un nouveau champ de déplacement incluant des termes indéterminés. De même, Meksi et al. (2015) ont étudié la flexion et la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de plaque de déformation de cisaillement de premier ordre basée sur la position de surface neutre et reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak. Afin d'inclure les effets de déformation de cisaillement, plusieurs théories de déformation de cisaillement polynomiales et non polynomiales d'ordre supérieur (HSDT), sont développées. Les (HSDT) satisfont les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques. Un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas requis. Les HSDT polynomiaux peuvent être basés sur l'expansion en série de Taylor de termes d'ordre supérieur. Ferreira et al. (2006) ont étudié la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées basée sur la théorie de la plaque de Reddy (1997) en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka et la méthode de collocation globale avec des fonctions de base radiales multi-quadratiques. Récemment, la théorie de la déformation de cisaillement polynomiale d'ordre élevé (HSDT) a été utilisée dans des différents environnements pour obtenir les réponses structurelles des structures composites de coques et de plaques fonctionnellement graduées, voir par exemple (Singh 2016, Hirwani 2016, Sahoo 2016). Contrairement aux théories HSDT polynomiales, les HSDT raffinés non polynomiaux peuvent être développés en utilisant des fonctions de déformation de forme non polynomiales. Dans ce contexte, un grand nombre d'études ont été réalisées pour étudier les réponses mécaniques des plaques composites avancées en utilisant des fonctions non polynomiales (sinus, sinus hyperbolique, cosinus, exponentielle et tangente) pour décrire le gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque et prendre en compte les effets de déformation transversale en cisaillement. Mantari et Guedes Soares (Mantari 2014, 2015c) ont développé un HSDT quasi-3D optimisé pour les plaques composites avancées et les coques en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur non polynomiale. Tounsi et ses collègues (Boussahla et al. 2016, Ait Amrane et al. 2014, Attia et al. 2015, Beldjelili 2016) ont développé une nouvelle théorie des plaques raffinée et robuste pour la vibration libre de la

plaque FGM avec seulement quatre fonctions inconnues utilisant diverses fonctions non polynomiales. Afin d'introduire les effets transversaux de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur, les théories quasi-3D, qui sont basées sur une variation d'ordre supérieur des déplacements dans le plan et dans le sens transversal, sont développées. En utilisant ces théories, bien que beaucoup de travail ait été fait pour les plaques FG (Jha et al. 2012, Belabed et al. 2014, Akavci 2016).

Hebali et al. (2014) ont développé une nouvelle théorie quasi-3D pour l'étude de la flexion statique et de la vibration libre des plaques FGM. Les effets du cisaillement transverse et des déformations normales pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG ont été pris en compte par Bessaim et al. (2013). Une théorie efficace de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale a été développée pour les plaques FGM, en divisant le déplacement transversal en composantes de flexion, de cisaillement et d'étirement en épaisseur par Belabed et al. (2014) en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Bourada et al. (2015) ont proposé une théorie simple de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale pour les plaques FGM. Une vibration libre de sandwich avec une feuille de face FGM et un noyau FGM ainsi qu'un sandwich avec une feuille de face homogène et un noyau FGM a été analysée par une nouvelle théorie de plaque quasi-3D par Bennoun et al. (2016). Akavci (2015) a étudié le comportement statique et dynamique de plaques à fonctionnellement graduées basées sur des théories de déformation en cisaillement quasi-3D et 2D. Benahmed et al. (2017) a utilisé une nouvelle théorie quasi-3D pour expliquer les interactions mécaniques des plaques souples avec différentes distributions des propriétés matérielles.

Abualnour et al. (2018) ont présentés une nouvelle théorie de déformation de cisaillement en tenant compte l'effet d'étirement « stretching » pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées. Le comportement dynamique et statique des nanopoutres en FGM sont investigués par Bouafia et al (2017) en utilisant une théorie non-local quasi-3D dans lequel les effets de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur sont introduits. Sekkal et al. (2017) ont réalisés une étude numérique détaillée pour examiner le flambement et vibration des plaques FGM avec une nouvelle théorie quasi-3D HSDT.

Les études comparatives et de validation montrent que les théories avec moins d'inconnues peuvent atteindre la même précision du HSDT conventionnel qui a plus de variables inconnues.

II.2.2 Instabilité et réponse statique des structures FGM

Birman (1995) a pris le premier pas pour étudier le comportement de flambement des plaques composites hybrides à gradient fonctionnel. Reddy et al. (1999) ont formulé la relation entre la théorie des plaques classique (CPT) et la théorie des plaques du premier ordre (FSDT) pour le comportement en flexion des plaques circulaires à gradient fonctionnel. Vel et Batra (2002) ont utilisé la méthode des éléments finis pour obtenir une solution exacte de la déformation thermo-élastique d'une plaque épaisse fonctionnellement graduée exposée à des chargements thermo-mécaniques. Samsamshariat et al. (2007) ont étudié le comportement de flambement des plaques de FGM sous compression uniaxiale et biaxiale, en utilisant CPT et HSDT. Lee et al. (2010) ont utilisé la méthode de Ritz pour effectuer l'analyse de post-flambement pour des plaques à gradations fonctionnelles sous chargement thermomécanique. Thai et Choi (2012) ont présenté une théorie raffinée pour l'analyse de flambement des plaques fonctionnellement graduées sous des charges de compression uniaxiale et biaxiale.

Aydogdu (2008) a étudié les conditions de planéité d'une plaque FGM pendant le stade de pré-flambement. Il a trouvé que le moment de flexion est nécessaire sur la plaque FGM pour maintenir la plaque simplement supportée sous le chargement dans le plan. Le flambement de bifurcation n'existe pas en raison de l'effet de couplage étirement/flexion, et les solutions de bifurcation pour les plaques rectangulaires FGM avec des conditions aux limites simplement supportées soumises à une compression uniaxiale ou biaxiale dans le plan ou une élévation de température uniforme sont physiquement incorrectes. L'auteur a également affirmé que cette condition est également applicable dans les théories de la plaque de déformation de cisaillement lors de l'étude de flambement des plaques FGM. Uymaz et Aydogdu (2013) ont utilisé le concept d'énergie de déformation linéaire et la méthode de Ritz pour étudier le flambement mécanique de plaques FGM rectangulaires sous charges bi-axiales.

Dans ce qui suit, des efforts ont été faits pour incorporer certaines des études qui ont été effectuées pour obtenir l'analyse de stabilité dans plusieurs conditions de charge comme thermique, électromécanique depuis des décennies. Praveen et Reddy (1998) ont utilisé le FSDT pour étudier le comportement thermo-élastique de plaques rectangulaires (FGM). Par ailleurs, Reddy (2000) a utilisé la théorie des plaques TSDT pour étudier l'effet de la distribution du matériau sur les flèches et les contraintes transversales, et conclut que la réponse des plaques FGM est fortement influencée par les gradients des propriétés du matériau. Woo et Meguid (2001) ont étudié les déformations non linéaires basées sur la théorie des plaques non linéaires classiques de Von Karman des plaques minces FGM et de coques. La flèche, les contraintes sont calculées avec les différentes conditions aux limites de

la plaque et de la coque FGM sous chargement transversal thermomécanique. Mian et Spencer (1998) ont proposé un ensemble de solutions exactes des équations d'élasticité 3D pour les plaques FGM rectangulaires et circulaires. Ils ont développé une solution 3D exacte pour une plaque épaisse basée sur des équations classiques 2D pour l'étirement et la flexion des plaques similaires. Cheng et Batra (2000) ont établi une relation exacte entre la flèche d'une plaque polygonale FGM simplement supportée donnée par la FSDT et la TSDT à celle d'une plaque Kirchhoff homogène équivalente. Les propriétés du matériau effectif sont régies par la règle du mélange, et la fraction volumique des constituants suit une distribution de la loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque.

Jusqu'à présent, un certain nombre d'études ont investigué la flexion de plaques sandwiches FGM. Zenkour (2005) a présenté une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale pour étudier la flexion d'une plaque sandwich FGM de type A simplement supportée. Wang et Shen (2011) ont réalisé une analyse en flexion non linéaire d'une plaque sandwich FGM de type A reposant sur des fondations élastiques. Merdaci et al. (2011) ont utilisé une théorie des plaques raffinées à quatre variables (Ait Amar et al. 2014, Zidi et al. 2014, Tounsi et al. 2013) pour étudier le comportement en flexion des plaques sandwiches FGM. Thai et al. (2014) ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse en flexion de plaques sandwiches FGM en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). Mahi et al. (2015) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour la flexion, l'analyse des vibrations libres des plaques composites isotropes, stratifiés, sandwiches et fonctionnellement graduées. Différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur sont développées en utilisant quatre inconnues ou moins, (Hadji et al. (2011), Houari et al. (2011), Henni et al. (2011), Merdaci et al. (2011), Bourada et al. (2012)). En utilisant la même théorie, Taibi et al. (2015) ont étudié la réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwich FGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres. Une nouvelle théorie de plaque raffinée pour la réponse en flexion, le flambement et la vibration libre de la plaque sandwich FGM simplement supportée avec cinq inconnues, est présentée par Bennoun et al. (2016). Dans leur étude, le nombre de fonctions inconnues est de cinq et l'effet d'étirement de l'épaisseur est considéré.

Pour les plaques sandwich FGM de type B, Kashtalyan et ses collaborateurs (2009, 2010) ont présenté une étude sur le comportement en flexion des plaques sandwiches de type B basées sur une solution d'élasticité 3D. Dans leurs études, la plaque sandwich est supposée être symétrique par rapport au plan médian. Henni et al. (2011) ont étudié la réponse en flexion de deux types de plaques sandwich FGM en utilisant une théorie de plaque raffinée à

quatre variables. Basé sur les hypothèses de Reissner, Li et al. (2013) ont étudié la flexion de plaques sandwichs simplement supportées avec un noyau en FGM et des feuilles frontales orthotropes soumises à des chargements répartis transversalement. Neves et al. (2013) ont analysé la flexion d'une plaque sandwich FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur quasi-3D et une technique de maillage (meshless method). Liu et al. (2016) ont utilisé une théorie des stratifiés et une méthode des éléments finis pour l'analyse des coques sandwiches FGM. Alibeigloo et Alizadeh (2015) ont réalisé une analyse statique des plaques sandwiches FGM basée sur la théorie tridimensionnelle de l'élasticité en utilisant la méthode de quadrature différentielle spatiale (DQM).

Rad (2015) a étudié le comportement thermo-élastique de plaques circulaires à gradient fonctionnel avec une base fonctionnel hybride de type Horvath-Colasanti et la théorie 3D de la thermo-élasticité est utilisée pour la modélisation. L'influence des indices d'hétérogénéité du matériau, des coefficients de rigidité des fondations, des différentes charges et de la distribution de la température à travers les surfaces de la plaque sur les champs de déplacement et de contrainte sont étudiées.

Tounsi et al. (2013) ont utilisé une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée pour analyser la flexion thermoélastique de plaques sandwich FGM. Ait et al. (2014) ont présenté une théorie de déformation de cisaillement raffinée simple et efficace pour la vibration et le flambement de la plaque sandwich en matériau à gradations exponentielles reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. Hebali et al. (2014) ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-tridimensionnelle (3D) pour l'analyse de flexion et de vibration libre de la plaque FGM. Hamidi et al. (2015) ont présenté une théorie de la plaque sinusoïdale avec cinq inconnues en tenir compte l'effet d'étirement pour la flexion thermo-mécanique des plaques sandwich FG.

Récemment, Tounsi et al. (2016) et Houari et al. (2016) ont développé une nouvelle théorie des plaques non polynomiales à trois inconnues pour les structures FGM. Basé sur une théorie de plaque raffinée à quatre variables, l'analyse de flambement des plaques FG soumises à des augmentations de température uniformes, linéaires et non linéaires dans la direction de l'épaisseur ont été discutées. La partie intéressante de cette théorie était qu'elle représentait la distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement et satisfaisait les conditions aux limites de traction nulles sur les surfaces de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement pour étudier les paramètres de la plaque vis-à-vis la température critique du flambement (Bousahla et al., 2016).

Conclusion

Une revue critique est donnée dans le présent chapitre, dans lequel différentes théories adoptées pour la réponse statique et dynamique de la plaque FGM ont été discutées. Les résultats généraux de la revue de la littérature actuelle sont les suivants:

- Parmi les différentes théories de plaques comme CPT, FSDT, TSDT, HSDT, employées pour l'analyse des plaques de FGM, FSDT et HSDT ont été largement utilisées. Certaines modifications ont également été incorporées dans FSDT et HSDT par les recherches de temps en temps pour obtenir le résultat précis dans le domaine en temps réel.
- Dans la plupart des théories 2D, seul l'effet de déformation transversale en cisaillement a été considéré et très peu de théories ont été trouvées dans lesquelles un effet de cisaillement transverse et de déformation transversale normale est considéré. De nombreux chercheurs ont prétendu utiliser des théories 2D au lieu de la théorie 3D pour économiser le temps et le coût de calcul mais d'autres recherches devraient être effectuées pour faire des résultats basés sur la théorie 2D avec la proximité des résultats basés sur la théorie 3D.

Chapitre III :

Effet des modèles micromécaniques sur la réponse dynamique des plaques FGM

Introduction

III.1 Formulation théorique

- ✓ Cinématique
- ✓ Relations constitutive
- ✓ Equations de mouvement
- ✓ Solutions de Navier

III.2 Résultats & discussions

- ✓ Etude comparative
- ✓ Etude paramétrique

Conclusion

Introduction

Ce chapitre examine l'influence de divers modèles micromécaniques sur le comportement d'une plaque fonctionnellement graduée basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement. Différents modèles micromécaniques sont testés pour obtenir les propriétés de matériau efficace d'un composite de particules à deux phases en fonction de la fraction volumique de particules qui varie continuellement à travers l'épaisseur d'une plaque fonctionnellement graduée. L'analyse de la vibration libre est effectuée pour une plaque à gradation fonctionnelle simplement supportée reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. La fraction volumique des particules est supposée changer selon les lois de la puissance. Les équations d'équilibres sont résolues par la solution de Navier. Enfin, les résultats numériques sont fournis pour révéler l'effet de modèles micromécaniques sur la fréquence fondamentale des plaques FGM.

III.1 Formulation théorique

Considérons une plaque rectangulaire en FGM d'une longueur a , largeur b , et d'épaisseur h (Figure III.1). On suppose qu'elle est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k_w et une rigidité de cisaillement de k_p . On suppose que la plaque a un comportement élastique linéaire. La plaque est supposée isotrope en tout point, alors que le module de Young E , la densité de la masse ρ et le coefficient de Poisson ν varient suivant l'épaisseur de la plaque selon les différents modèles micromécaniques (voir section I.5).

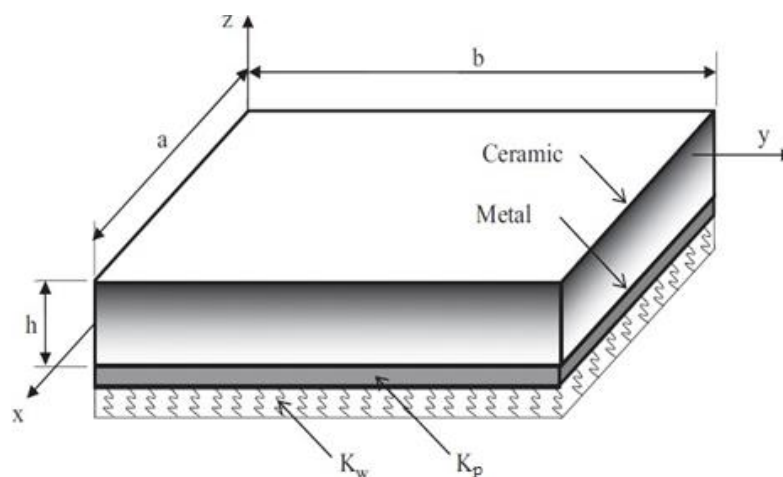


Figure III.1 : Plaque FGM posée sur une fondation élastique.

III.1.1 Cinématique

Depuis CPT, FSDT et HSDT, le nombre de variables inconnues a toujours été une préoccupation importante. Les théories avec un nombre réduit d'inconnues et similaires aux théories classiques sont rares dans la littérature. Dans cette étude, des hypothèses simplificatrices sont faites au HSDT conventionnelle de sorte que le nombre d'inconnues est réduit. Le champ de déplacement du HSDT conventionnelle est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

u_0 , v_0 , w_0 , φ_x et φ_y sont les cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque. En considérant que $\varphi_x = k_1 \int \theta(x, y, t) dx$ et $\varphi_y = k_2 \int \theta(x, y, t) dy$ (Bourada et al. 2016).

Le champ de déplacement mentionnés ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la méthode de Navier et le champ de déplacement peut être réécrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Où les coefficients « A' », « B' » (définis en fonction du type de solution adoptée), k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{III.4})$$

On peut voir que le champ de déplacement dans Eqs. (III.2) et (III.3) contient seulement quatre inconnues u_0 , v_0 , w_0 et θ .

La fonction de forme $f(z)$ (fonction de gauchissement) est donnée par :

$$f(z) = z - \frac{h \sinh\left(\frac{10z}{h}\right)}{10 \cosh(5)} + \frac{h}{100} \quad (\text{III.5})$$

La fonction de cisaillement est présentée dans cette théorie pour satisfaire les contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La fonction de cisaillement est obtenue comme suit:

$$g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad \text{où} \quad g\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de Eq. (III.3) est :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7a})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7b})$$

III.1.2 Les relations constitutives

Pour les plaques FGM, les relations contraintes-déformations peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et déformation, respectivement.

III.1.3 Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous la forme suivante :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_F - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.9})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation de la plaque; δK est la variation de l'énergie cinétique; et δU_F est la variation de l'énergie de déformation de la fondation.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque indiquée comme :

$$\delta U = \int_A \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \quad (\text{III.10})$$

En substituant les Eqs. (III.7) et (III.8) dans Eq. (III.10) et par intégration à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (III.10) peut être réécrit comme:

$$\delta U = \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right. \\ \left. + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} - 2 M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right\} dA \quad (\text{III.11})$$

Où les forces et moments résultants N, M, P , et R sont définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} g(z) dz. \quad (\text{III.12})$$

En utilisant Eq. (III.8) dans Eq. (III.12), les résultantes des efforts de la plaque FGM peuvent être exprimées en fonction de déformations :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (\text{III.13a})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \\ \varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \\ S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t \quad (\text{III.13b})$$

Où $A_{ij}, D_{ij}...$ etc., sont les composantes de la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \\ (A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{III.14})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz$$

La variation de l'énergie cinétique est exprimée en

$$\delta K = \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \rho(z) dA dz \quad (\text{III.15a})$$

$$\delta K = \int_A \left\{ \begin{aligned} & I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 [\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0] + J_1 [k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0] \\ & + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0] + I_2 [\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y}] + K_2 [(k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y}] \\ & - J_2 [k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y}] \end{aligned} \right\} dA \quad (\text{III.15b})$$

Où ($I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$) sont les inerties massiques définis comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.16})$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation est exprimée comme :

$$\delta U_F = \int_A (k_w w_0 - k_p \nabla^2 w_0) \delta w_0 dA \quad (\text{III.17})$$

En Substituant les expressions δU ; δU_F et δK de Eqs. (III.11), (III.15) et (III.17) dans Eq. (III.9) et en intégrant par parties, puis en collectant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$, on obtient les équations de mouvement suivantes de la plaque :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + k_w w_0 - k_p \nabla^2 w_0 &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}) - I_2 (\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}) + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\ \delta \theta : -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 (\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}) + J_2 (\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}) \\ &\quad - K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

En remplaçant Eq. (III.13) dans Eq. (III.18), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0 et θ)

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + k_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \\ + k_2 B' B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ A_{22} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + k_1 A' B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \\ + k_2 B' B_{22}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & + k_1 A' D_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + k_2 B' D_{22}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + k_w w_0 - k_p \nabla^2 w_0 = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\
 & - k_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - (k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - (k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - k_2 B' B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + k_1 A' D_{11}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
 & + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' D_{22}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - (k_1 A')^2 H_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \left[2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \right] \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - (k_2 B')^2 H_{22}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\
 & + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -J_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

III.1.4 Solutions de Navier pour des plaques simplement appuyées

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous sommes concernés par la solution exacte des Eqs. (III.19) pour une plaque FGM simplement supportée. Les fonctions de déplacement suivantes sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites de la plaque et sont sélectionnées comme séries de Fourier

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \theta_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad (III.20)$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$. ω est la fréquence naturelle. U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et θ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer. En substituant Eq. (III.20) dans les Eqs. (III.19), un système de valeur propre est obtenu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & -I_1 \alpha & k_1 A' J_1 \alpha \\ 0 & I_0 & -I_1 \beta & k_2 B' J_1 \beta \\ -I_1 \alpha & -I_1 \beta & I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) & -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) \\ k_1 A' J_1 \alpha & k_2 B' J_1 \beta & -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) & K_2 [(k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \theta_{mn} \end{Bmatrix} = (0) \quad (III.21)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2 \\
 a_{12} &= (A_{12} + A_{66}) \alpha \beta \\
 a_{13} &= -B_{11} \alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \alpha \beta^2 \\
 a_{14} &= [k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \alpha \beta^2 + k_1 A' B_{11}^s \alpha^3 \\
 a_{22} &= A_{22} \beta^2 + A_{66} \alpha^2 \\
 a_{23} &= -B_{22} \beta^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \alpha^2 \beta \\
 a_{24} &= [k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \alpha^2 \beta + k_2 B' B_{22}^s \beta^3 \\
 a_{33} &= D_{11} \alpha^4 + D_{22} \beta^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + k_w + k_p (\alpha^2 + \beta^2) \\
 a_{34} &= -k_1 A' D_{11}^s \alpha^4 - (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 - k_2 B' D_{22}^s \beta^4 \\
 a_{44} &= [2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s] \alpha^2 \beta^2 + (k_1 A')^2 H_{11}^s \alpha^4 + (k_2 B')^2 H_{22}^s \beta^4 + (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 + (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2
 \end{aligned} \quad (III.22)$$

III.2 Résultats & discussions

Dans cette étude, l'effet des modèles micromécaniques sur l'analyse des vibrations libres des plaques FG sur une fondation élastique par une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement est suggéré pour l'étude. Les solutions Navier pour l'analyse libre des vibrations des plaques FG sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres. Le coefficient de Poisson est fixé à $\nu = 0,3$.

Les comparaisons sont faites avec les solutions disponibles dans la littérature. Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont résolus. Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont:

Métal (Aluminium, AL) : $E_M = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$; $\rho_M = 2702 \text{ Kg/m}^3$.

Céramique (Alumine, Al_2O_3) : $E_C = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$; $\rho_C = 3800 \text{ Kg/m}^3$.

Dans tous les exemples, les paramètres de fondation sont présentés sous forme adimensionnelle: $K_w = \frac{k_w a^4}{D}$ et $K_p = \frac{k_p a^2}{D}$ avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Telle que D : c'est la rigidité flexionnelle de la plaque.

Pour des raisons de simplicité, le paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle suivant est utilisé dans les exemples numériques $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_c h / D_c}$

III.2.1 Etude comparative

Dans cette section, divers exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier la précision de la nouvelle théorie de la plaque de déformation de cisaillement actuelle en prédisant le comportement de vibration libre des plaques FG simplement supportées. Pour la vérification, les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés à d'autres théories existantes dans la littérature, comme la théorie 2D de Matsunaga (2008), la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur de Ait Atmane et al. (2010) et les résultats obtenus par Akhavan et al. (2009).

Dans le tableau III.1, les six premières fréquences naturelles de la plaque FG sont comparées à ceux de Matsunaga (2008) et Ait Atmane et al. (2010) pour différentes valeurs de la loi de puissance " p ". On note respectivement par " α " et " β " les nombres d'onde le long des directions x et y , et " i " est l'ordre de la solution des valeurs propres. Un excellent accord entre les résultats donnés par le présent modèle et ceux de la littérature est à constater.

Tableau III.1: Comparaison des six premières fréquences naturelles Ω de la plaque carrée FG.

a/h	Mode n°	Mode (α, β, i)	Théorie	p				
				$p=0$	$p=1$	$p=4$	$p=10$	$p=\infty^a$
2	1	101	Matsunaga (2008)	0,5572	0,4375	0,3579	0,3313	0,2829
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,5524	0,4324	0,3554	0,3289	0,2812
			Présente	0,5546	0,4338	0,3592	0,3323	0,2823
	2	111	Matsunaga (2008)	0,9400	0,7477	0,5997	0,5460	0,4773
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,9300	0,7725	0,6244	0,5573	0,4730
			Présente	0,9337	0,7383	0,6008	0,5478	0,4753
	3	102	Matsunaga (2008)	0,9742	0,8005	0,6325	0,5664	0,4946
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,9742	0,8013	0,6356	0,5668	0,4958
			Présente	0,9740	0,8092	0,6539	0,5671	0,4958
	4	112	Matsunaga (2008)	1,3777	1,1166	0,8731	0,7885	0,6995
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	1,3777	1,1209	0,8751	0,7895	0,7012
			Présente	1,3777	1,1461	0,9260	0,8155	0,7012
	5	201	Matsunaga (2008)	1,5090	1,2163	0,9591	0,8588	0,7661
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	1,4907	1,1933	0,9466	0,8526	0,7587
			Présente	1,4959	1,1935	0,9558	0,8600	0,7614
	6	103	Matsunaga (2008)	1,6078	1,3091	1,0008	0,9050	0,8163
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	1,6466	1,3391	1,0440	0,9426	0,8381
			Présente	1,6466	1,3410	1,0507	0,9443	0,8381
5	1	101	Matsunaga (2008)	0,1120	0,08614	0,07356	0,06999	0,05686
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,1120	0,0860	0,07346	0,06984	0,05689
			Présente	0,1119	0,0860	0,07371	0,07007	0,05697
	2	111	Matsunaga (2008)	0,2121	0,1640	0,1383	0,1306	0,1077
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,2113	0,1740	0,1520	0,1369	0,1075
			Présente	0,2117	0,1634	0,1387	0,1308	0,1077
	3	102	Matsunaga (2008)	0,3874	0,3020	0,2502	0,2300	0,1967
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,3850	0,3000	0,2500	0,2300	0,1958
			Présente	0,3861	0,3002	0,2512	0,2344	0,1965
	4	112	Matsunaga (2008)	0,3897	0,3236	0,2607	0,2337	0,1979
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,3897	0,3236	0,2606	0,2324	0,1983
			Présente	0,3896	0,3240	0,2618	0,2306	0,1983
	5	201	Matsunaga (2008)	0,4658	0,3644	0,3000	0,2790	0,2365
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,4622	0,3674	0,3037	0,2794	0,2353
			Présente	0,4639	0,3620	0,3014	0,2799	0,2361
	6	103	Matsunaga (2008)	0,5511	0,4567	0,3668	0,3243	0,2798
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,5511	0,4568	0,3668	0,3243	0,2804
			Présente	0,5511	0,4584	0,3704	0,3262	0,2805
10	1	101	Matsunaga (2008)	0,02936	0,02246	0,01942	0,01861	0,01491
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,02934	0,02244	0,01941	0,01859	0,01493
			Présente	0,02935	0,02244	0,01943	0,01861	0,01494
	2	111	Matsunaga (2008)	0,05777	0,04427	0,03811	0,03642	0,02933
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,05770	0,04718	0,04210	0,03832	0,02936
			Présente	0,05773	0,04422	0,03815	0,03644	0,02938
	3	102	Matsunaga (2008)	0,1120	0,08614	0,07356	0,06999	0,05686
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,1120	0,08600	0,07346	0,06984	0,05689
			Présente	0,1119	0,08597	0,07371	0,07007	0,05696
	4	112	Matsunaga (2008)	0,1381	0,1063	0,09045	0,08588	0,07012
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,1380	0,1092	0,09455	0,08764	0,07006
			Présente	0,1379	0,1060	0,09067	0,08600	0,07017
	5	201	Matsunaga (2008)	0,1948	0,1620	0,1308	0,1153	0,09890
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,1948	0,1620	0,1308	0,1152	0,09916
			Présente	0,1948	0,1621	0,1309	0,1153	0,09917
	6	103	Matsunaga (2008)	0,2121	0,1640	0,1383	0,1306	0,1077
			Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	0,2113	0,1740	0,1520	0,1368	0,1075
			Présente	0,2117	0,1634	0,1387	0,1308	0,1077

^a Plaque entièrement métallique ($p=\infty$), $\Omega_m = \omega a^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$.

Afin de valider la présente méthode dans le cas de plaques posées sur des fondations élastiques, les résultats de la fréquence fondamentale d'une plaque épaisse isotrope avec différentes valeurs de rapport des dimensions (a/h) et différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique sont présentés dans le tableau III.2. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Akhavan et al (2009) et Ait Atmane et al (2010). Un excellent accord entre les trois méthodes peut être observé.

Tableau III.2: Comparaison de la fréquence fondamentale Ω de la plaque carrée isotrope.

Rapport d'épaisseur	K_w, K_p	Théorie		
		Akhavan <i>et al.</i> (2009)	Ait Atmane <i>et al.</i> (2010)	Présente
$h/a=0,001$	0 , 0	19,7391	19,7392	19,7391
	100 , 10	26,2112	26,2112	26,2112
	1000 , 100	57,9961	57,9962	57,9961
$h/a=0,1$	0 , 0	19,0840	19,0658	19,0786
	100 , 10	25,6368	25,6236	25,6328
	1000 , 100	57,3969	57,3923	57,3955
$h/a=0,2$	0 , 0	17,5055	17,4531	17,4899
	100 , 10	24,3074	24,2728	24,2971
	1000 , 100	56,0359	56,0311	56,0345

Il est à noter que pour les valeurs indiquées dans les tableaux III.1-2, les résultats de la présente étude sont obtenus pour le modèle de Voigt.

III.2.2 Etude paramétrique

L'impact des modèles micromécaniques sur la fréquence fondamentale des plaques FG est étudié dans cette section.

Sur la figure III.2, les variations des fréquences fondamentales adimensionnelles de la plaque FG avec l'indice de loi de puissance « p » sont données pour différents modèles micromécaniques. Trois configurations sont étudiées: plaque sans fondation, plaque sur fondation Winkler et plaque reposant sur la fondation Pasternak. On voit sur les figures que l'augmentation de l'indice de loi de puissance « p » produit une réduction des valeurs de fréquences fondamentales.

De plus, quel que soit le type de fondation utilisé, le modèle de Voigt donne des résultats plus élevés par rapport aux autres modèles micromécaniques. Alors que les autres modèles fournissent des résultats sensiblement similaires. La présence de la fondation Pasternak augmente la fréquence fondamentale, pour n'importe quelle valeur de l'indice de loi de puissance ou le modèle utilisé. La présence de la fondation Winkler a peu d'influence sur les valeurs de la fréquence fondamentale.

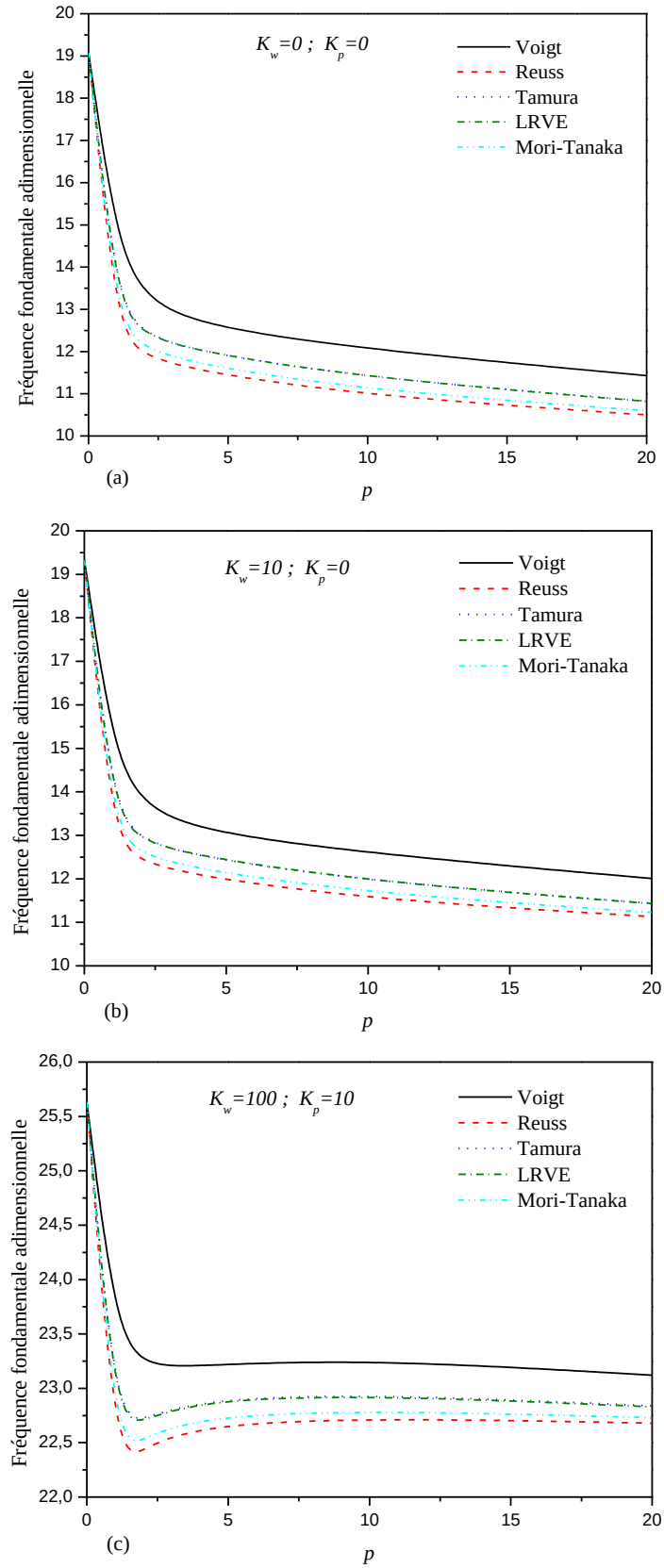


Figure III.2 : L'effet de l'indice de puissance « p » sur la fréquence fondamentale Ω des plaques carrées FG sur différentes configurations de fondation élastique ($a/h=10$).

(a) Plaque FG sans fondation élastique, (b) Plaque FG posée sur la fondation Winkler, (c) Plaque FG posée sur la fondation Pasternak.

La différence relative en pourcentage de la fréquence fondamentale entre les modèles micromécaniques par rapport à l'indice de loi de puissance « p » est montrée sur la figure III.3.

L'écart entre la fréquence fondamentale estimée des plaques FG par les modèles de Voigt, de Reuss et d'autres modèles micromécaniques dépend considérablement de l'indice de loi de puissance « p ». L'écart entre le modèle de Voigt et les autres modèles micromécaniques pour les valeurs estimées de la fréquence fondamentale atteint un maximum de 12% entre Voigt et Reuss et il est de 11% entre Voigt et Mori-Tanaka. Alors que, entre Voigt et d'autres modèles à savoir LRVE et Tamura, il ne dépasse pas 8%.

La deuxième comparaison présentée dans cette figure est l'écart entre les valeurs de la fréquence fondamentale estimées par le modèle de Reuss et les autres modèles micromécaniques. La différence est insignifiante entre Reuss et Mori-Tanaka et elle atteint un maximum de 5% entre Reuss et les autres modèles. Par conséquent, la nécessité de la modélisation micromécanique appropriée des FGM est évidente pour estimer avec précision la fréquence fondamentale.

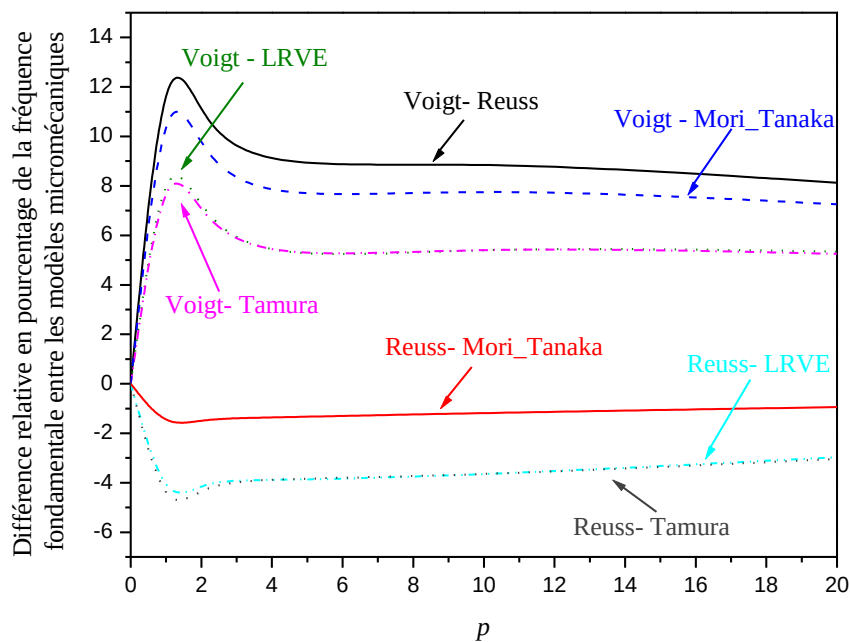


Figure III.3 : Différence relative en pourcentage de la fréquence fondamentale entre les modèles micromécaniques par rapport à l'indice de loi de puissance « p », $a/h=10$, $a=b$.

La figure III.4 montre la fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour une plaque FG carrée simplement supportée. Comme on peut le voir, la fréquence fondamentale augmente pour les petites valeurs du rapport et maintient ensuite une forme constante. De plus, le paramètre de fondation de Winkler affecte très peu la valeur de la

fréquence fondamentale par rapport à celle du paramètre de Pasternak. D'après les figures III.4 (a) et (b), nous pouvons voir qu'il y a un écart entre les résultats fournis par Voigt et Reuss, alors que les résultats de Tamura et Mori-Tanaka sont sensiblement similaires.

Cela confirme ce qui a déjà été mentionné ci-dessus qu'une modélisation micromécanique correcte des FGM devrait être définie.

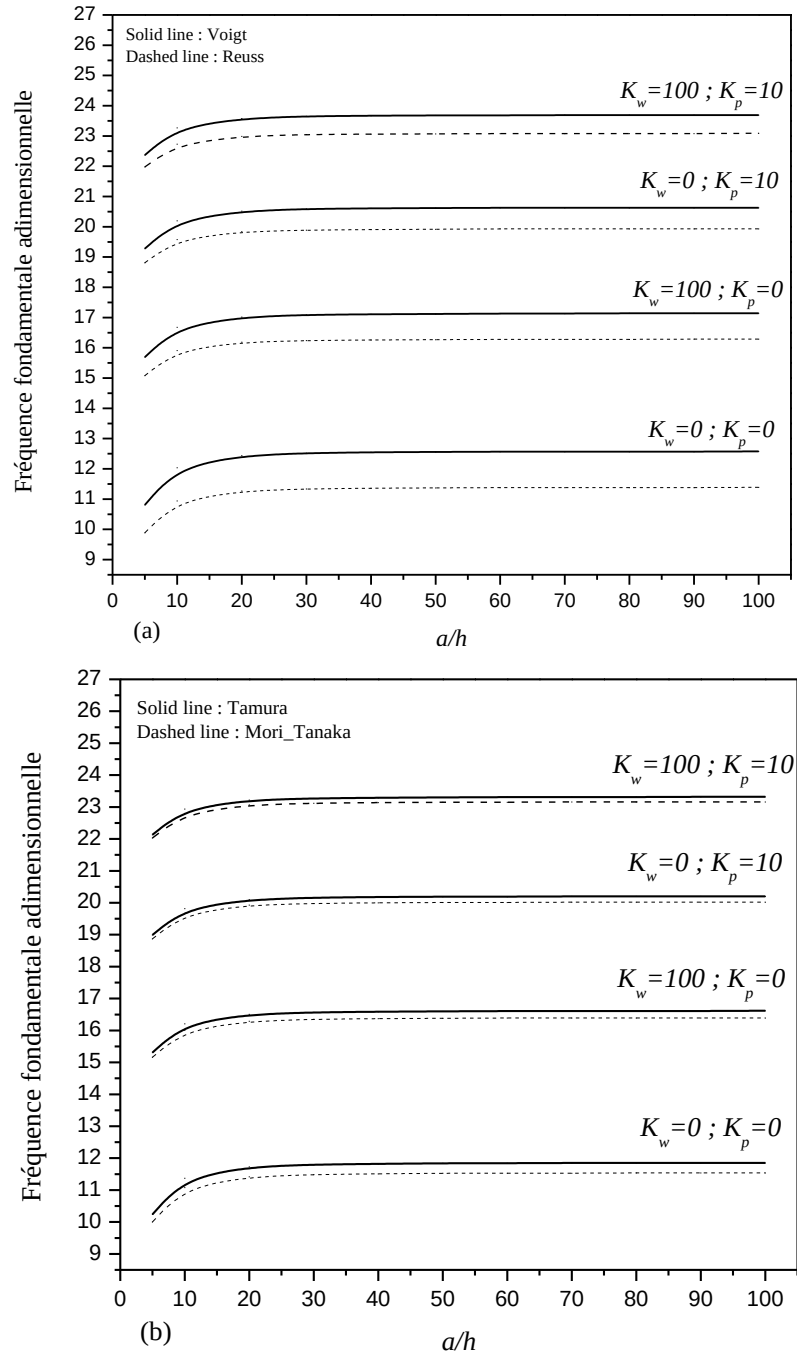


Figure III.4 : L'effet de la fondation élastique sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques carrées FG en fonction du rapport a/h .

(a) comparaison entre Voigt-Reuss, (b) comparaison entre Tamura- Mori-Tanaka.

Conclusion

La signification de la sélection d'un modèle micromécanique approprié et un profil FGM approprié sur l'estimation précise des propriétés structurelles des matériaux FG est observée à partir des résultats numériques. L'écart entre les réponses structurelles des FGM estimées par le modèle de Voigt et d'autres modèles micromécaniques est notamment dépendant de l'indice de non-homogénéité « p ». Le modèle de Voigt estime la fréquence fondamentale d'une plaque FG avec $p=1$ jusqu'à 12%, 11% et 8% de plus que les modèles de Reuss, Mori_Tanaka et Tamura-LRVE, respectivement.

Enfin, en raison de la corrélation entre la réponse structurelle, les propriétés matérielles des FGM en fonction de l'indice de non-homogénéité et les paramètres de la fondation élastique, un système d'optimisation multi-objectif pourrait être utilisé pour optimiser la conception des FGM.

Chapitre IV :

Analyse thermomécanique des plaques sandwiches FGM

Introduction

- IV.1** Formulation théorique
 - ✓ Cinématique
 - ✓ Relations constitutive
 - ✓ Equations du mouvement
 - ✓ Solutions de Navier
- IV.2** Résultats & discussions
 - ✓ Etude comparative
 - ✓ Etude paramétrique

Conclusion

Introduction

À notre connaissance, il n'y a pas eu d'étude sur la flexion des plaques sandwich FGM sur une fondation élastique en utilisant une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D raffinée pour le comportement thermomécanique. Dans ce chapitre, notre objectif est d'étendre le travail de Mantari (2015) à l'étude de l'effet de la charge thermomécanique sur la flexion de la plaque sandwich FG reposant sur une fondation élastique.

À cet effet, le champ de déplacement est exprimé de la même manière que dans l'article de Mantari (2015) mais en utilisant une autre fonction de déformation de cisaillement pour laquelle on définit des coefficients appropriés afin d'assurer des valeurs précises des contraintes et déplacements moyen. La théorie proposée est d'ordre élevé mais avec seulement quatre inconnues tout en tenant compte de l'effet d'étirement. Par conséquent, l'effort de calcul est beaucoup plus faible par rapport à d'autres théories d'ordre supérieur de la littérature et ayant plus d'un nombre d'équations de gouvernance. Différents types de plaques sandwich FGM sont considérés, et le modèle utilisé dans cette partie est celle de Voigt.

IV.1 Formulation théorique

Considérons le cas d'une plaque sandwich FG rectangulaire d'épaisseur uniforme reposant sur une fondation élastique et composée de trois couches, se référant à des coordonnées rectangulaires (x, y, z) comme le montre la figure IV.1. Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y . Les ordonnées verticales de la face inférieure, des deux interfaces et la face supérieure sont désignées respectivement par $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 , $h_3 = h/2$. Le volume et la surface supérieure, soumis à une charge transversale $q(x, y)$. Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas en haut est indiqué par la combinaison de trois nombres, c'est-à-dire «1-0-1», «2-1-2» et ainsi de suite. L'épaisseur totale de la plaque FG est h , où $h = t_c + t_{FGM}$ et $t_c = h_2 - h_1$. t_c et t_{FGM} sont l'épaisseur de la couche centrale et de toutes les couches FGM, respectivement. Les propriétés matérielles pour chaque couche, comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α_t , peuvent être exprimées comme suit (modèle de Voigt):

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (IV.1)$$

La fraction volumique $V^{(n)}$ des FGM est supposée varier en fonction de loi de puissance dans le sens de l'épaisseur :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \left(\frac{1+2z}{1+2h_1} \right)^p, & -1/2 \leq z \leq h_1, \\
 V_2 &= 1, & h_1 \leq z \leq h_2, \\
 V_3 &= \left(\frac{1-2z}{1-2h_2} \right)^p, & h_2 \leq z \leq 1/2,
 \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Où " p " est l'indice de loi de puissance. Notez que, lorsque $p=0$, on obtient une plaque céramique entièrement homogène. En revanche, si $p=\infty$, on obtient une plaque sandwich métal-céramique-métal (m-c-m).

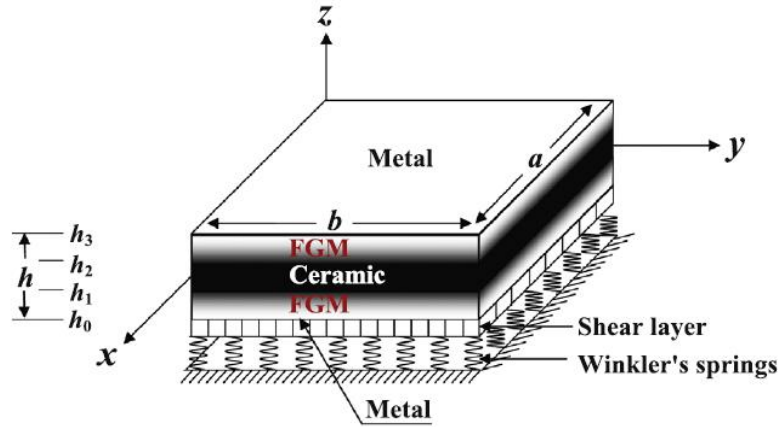


Figure IV.1 : Plaque sandwich FGM (Type A) reposant sur une fondation élastique.

IV.1.1 Cinématique

Le champ de déplacement satisfaisant les conditions de contraintes de cisaillement transversales (et donc de déformations) disparaissant sur les surfaces extérieures (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich est donné comme suit (Mantari ,2015)

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0 + z \left[y^{**} \frac{\partial w_b}{\partial x} + q^{**} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0 + z \left[y^{**} \frac{\partial w_b}{\partial y} + q^{**} \frac{\partial w_s}{\partial y} \right] + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b + g(z) w_s
 \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Avec

$$f(z) = z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh(\pi/2) - 1} \tag{IV.4}$$

Où $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_b(x, y)$ et $w_s(x, y)$ sont les quatre fonctions de déplacement inconnues de la surface médiane de la plaque, $g(z)=rf'(z)$ tandis que $y^{**}=-1$, $y^*=-f'(h/2)$, $q^*=-g(h/2)$ et

$q^{**}=y^{*}+q^{*}$. La valeur du paramètre a été correctement sélectionnée pour fournir des résultats précis de la déformation et des contraintes dans un milieu statique $r=1$.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de Eq. (IV.3) est :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}, \quad (IV.5)$$

$$\varepsilon_z = g'(z)\varepsilon_z^0$$

Où

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y^{**} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + q^{**} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ y^{**} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + q^{**} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2 \left[y^{**} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + q^{**} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} y^{**} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + q^{**} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ y^{**} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + q^{**} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2 \left[y^{**} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + q^{**} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (IV.6) \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} q^{**} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ q^{**} \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = w_s \end{aligned}$$

IV.1.2 Les relations constitutives

Pour les plaques FGM, les relations contraintes-déformations peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \alpha_t T \\ \varepsilon_y - \alpha_t T \\ \varepsilon_z - \alpha_t T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (IV.7)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et déformation, respectivement.

IV.1.3 Equations de mouvement

Considérant la version statique du principe des travaux virtuels, les expressions suivantes peuvent être obtenues:

$$\int_A \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz + \int_A (f_e - q) \delta w dA = 0 \quad (IV.8)$$

Où A est la surface supérieure, q est la charge transversale répartie et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak :

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w \quad (IV.9)$$

Substituer des Eqs. (IV.5) et (IV.7) dans l'Eq. (IV.8) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (IV.8) peut être réécrit comme suit:

$$\int_A \left\{ N_1 \delta \varepsilon_x^0 + M_1 \delta k_x + P_1 \delta \eta_x + N_2 \delta \varepsilon_y^0 + M_2 \delta k_y + P_2 \delta \eta_y + R_3 \delta \varepsilon_z^0 + N_4 \delta \gamma_{yz}^0 + Q_4 \delta \gamma_{yz}^1 + K_4 \delta \gamma_{yz}^1 + N_5 \delta \gamma_{xz}^0 + Q_5 \delta \gamma_{xz}^1 + K_5 \delta \gamma_{xz}^1 + N_6 \delta \gamma_{xy}^0 + 2M_6 \delta k_{xy} + 2P_6 \delta \eta_{xy} \right\} dA + \int_A (f_e - q) \delta w dA = 0 \quad (IV.10)$$

Les forces et moments résultants N , M , P , Q et R sont définies par:

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_i (1, z, f(z)) dz, \quad (i = 1, 2, 6) \\ N_i &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_i dz, \quad (i = 4, 5) \\ (K_i, Q_i) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_i (f'(z), g(z)) dz, \quad (i = 4, 5) \\ R_i &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_i g'(z) dz, \quad (i = 3) \end{aligned} \quad (IV.11)$$

Où h_n et h_{n-1} sont les coordonnées z supérieures et inférieures de la n^{eme} couche.

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'Eq. (IV.10) en intégrant les composantes de déplacement par parties et en fixant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s à zéro. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation_de_cisaillement :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w_b : -y^{**} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \right) - k_w (w_b - q^* w_s) + k_p \left(\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - q^* \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \right) &= -q \\
 \delta w_s : -q^{**} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \frac{\partial N_4}{\partial y} - \frac{\partial N_5}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 P_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_4}{\partial y} + \frac{\partial K_4}{\partial y} + \frac{\partial Q_5}{\partial x} \\
 + \frac{\partial K_5}{\partial x} - R_3 + q^* k_w (w_b - q^* w_s) - q^* k_p \left(\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - q^* \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \right) &= q^* q
 \end{aligned} \tag{IV.12}$$

Utilisation de l'Eq (IV.7) dans l'Eq (IV.11), les forces et moments résultantes de la plaque sandwich peuvent être reliées aux déformations totales par

$$\begin{aligned}
 N_i &= A_{ij} \varepsilon_j^0 + B_{ij} k_j + C_{ij} \eta_j + D_{ij} \gamma_j^1 + E_{ij} \gamma_j^1 + F_{ij} \varepsilon_z^0 - N_i^T, \quad (i = 1, 2, 4, 5, 6) \\
 M_i &= B_{ij} \varepsilon_j^0 + G_{ij} k_j + H_{ij} \eta_j + K_{ij}' \varepsilon_z^0 - M_i^T, \quad (i = 1, 2, 6) \\
 P_i &= C_{ij} \varepsilon_j^0 + H_{ij} k_j + L_{ij} \eta_j + O_{ij} \varepsilon_z^0 - P_i^T, \quad (i = 1, 2, 6) \\
 Q_i &= D_{ij} \gamma_j^0 + Q_{ij}' \gamma_j^1 + P_{ij}' \gamma_j^1, \quad (i = 4, 5) \\
 K_i &= E_{ij} \gamma_j^0 + Q_{ij}' \gamma_j^1 + S_{ij} \gamma_j^1, \quad (i = 4, 5) \\
 R_i &= F_{ij} \varepsilon_j^0 + K_{ij}' k_j + O_{ij} \eta_j + U_{ij} \varepsilon_z^0 - R_i^T, \quad (i = 3)
 \end{aligned} \tag{IV.13}$$

Où

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij} (1, z, f(z), g(z), f'(z), g'(z)) dz \\
 (G_{ij}, H_{ij}, K_{ij}', L_{ij}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij} (z^2, f(z), zf(z), zg'(z)) dz \\
 (O_{ij}, P_{ij}', Q_{ij}', S_{ij}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij} (f(z)g(z), g^2(z), g(z)f'(z), f'^2(z)) dz \\
 U_{ij} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{ij} (g'^2(z)) dz
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Les forces et moments résultantes $N_1^T = N_2^T$, $M_1^T = M_2^T$, $P_1^T = P_2^T$ et R_3^T dû à la charge thermique sont définies par

$$\begin{Bmatrix} N_1^T \\ M_1^T \\ P_1^T \\ R_3^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+2\nu)\alpha(z)T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (IV.15)$$

La variation du champ de température à travers l'épaisseur est supposée être

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\bar{f}(z)}{h} T_3(x, y) \quad (IV.16)$$

Où T_1 , T_2 et T_3 sont les charges thermiques.

Pour la brièveté, seulement la distribution de température linéaire (à travers l'épaisseur) $T = \bar{z} T_2$; distribution non linéaire de température $T = \bar{f}(z) T_3$; et une combinaison des deux $T = \bar{z} T_2 + \bar{f}(z) T_3$ sont considérées.

IV.1.4 Solutions de Navier pour des plaques simplement appuyées

Les conditions aux limites le long des bords de la plaque simplement supportée peuvent être obtenues

$$\begin{aligned} N_1 = M_1 = P_1 = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{à } x = 0, a \\ N_2 = M_2 = P_2 = u = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{à } x = 0, b \end{aligned} \quad (IV.17)$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté la charge transversale mécanique q , et la température T_1 , T_2 et T_3 sous la forme d'une série trigonométrique double

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (IV.18)$$

Où q_0 , t_1 , t_2 et t_3 sont des constantes, $\alpha = \pi / a$, $\beta = \pi / b$.

Pour la solution analytique des Eqs. (IV.12), la méthode Navier est utilisée dans les conditions aux limites spécifiées. Les fonctions de déplacement qui satisfont aux équations des conditions aux limites (IV.17) sont sélectionnées comme les séries de Fourier

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w_b(x, y) \\ w_s(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_b \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_s \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (IV.19)$$

En remplaçant les Eqs. (IV.13) et (IV.19) dans les Eqs. (IV.12), l'équation suivante est obtenue

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (IV.20)$$

Où $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$ et $[K]$ est la matrice de rigidité donnée par

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \\ a_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -B_{11}y^{**}\alpha^3 - y^{**}\alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\ a_{14} &= -B_{11}q^{**}\alpha^3 - C_{11}\alpha^3 - q^{**}\alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) - \alpha\beta^2(C_{12} + 2C_{66}) + F_{13}\alpha \\ a_{22} &= -(A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2) \\ a_{23} &= -B_{22}y^{**}\beta^3 - y^{**}\alpha^2\beta(B_{12} + 2B_{66}) \\ a_{24} &= -B_{22}q^{**}\beta^3 - C_{22}\beta^3 - q^{**}\alpha^2\beta(B_{12} + 2B_{66}) - \alpha^2\beta(C_{12} + 2C_{66}) + F_{23}\beta \\ a_{33} &= -G_{11}y^{**2}\alpha^4 - G_{22}y^{**2}\beta^4 - 2y^{**2}\alpha^2\beta^2(G_{12} + 2G_{66}) - k_w - k_p(\alpha^2 + \beta^2) \\ a_{34} &= -G_{11}y^{**}q^{**}\alpha^4 - H_{11}y^{**}\alpha^4 - G_{22}y^{**}q^{**}\beta^4 - H_{22}y^{**}\beta^4 - 2y^{**}q^{**}\alpha^2\beta^2(G_{12} + 2G_{66}) \\ &\quad - 2y^{**}\alpha^2\beta^2(H_{12} + 2H_{66}) + K'_{13}y^{**}\alpha^2 + K'_{23}y^{**}\beta^2 + k_w q^* + k_p q^*(\alpha^2 + \beta^2) \\ a_{44} &= -G_{11}q^{**2}\alpha^4 - 2H_{11}q^{**}\alpha^4 - G_{22}y^{**}q^{**}\beta^4 - 2H_{22}q^{**}\beta^4 - 2q^{**2}\alpha^2\beta^2(G_{12} + 2G_{66}) \\ &\quad - 4q^{**}\alpha^2\beta^2(H_{12} + 2H_{66}) + 2K'_{13}q^{**}\alpha^2 + 2K'_{23}q^{**}\beta^2 - q^{**}(A_{44}q^{**} + E_{44} + D_{44})\beta^2 \\ &\quad - q^{**}(A_{55}q^{**} + E_{55} + D_{55})\alpha^2 - (D_{44}q^{**} + Q_{44} + P_{44})\beta^2 - (D_{55}q^{**} + Q_{55} + P_{55})\alpha^2 \\ &\quad - L_{11}\alpha^4 - L_{22}\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2(L_{12} + 2L_{66}) - (E_{44}q^{**} + S_{44} + Q_{44})\beta^2 - (E_{44}q^{**} + S_{44} + Q_{44})\alpha^2 \\ &\quad + 2O_{13}\alpha^2 + 2O_{23}\beta^2 - U_{33} - q^{*2}(k_w + k_p(\alpha^2 + \beta^2)) \end{aligned} \quad (IV.22)$$

Les composantes du vecteur de force $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^t$ sont données par

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha(A^T t_1 + B^T t_2 + B_a^T t_3) \\ F_2 &= \beta(A^T t_1 + B^T t_2 + B_a^T t_3) \\ F_3 &= -q_0 - h(\alpha^2 + \beta^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + D_a^T t_3) \\ F_4 &= q^* q_0 + q^* h(\alpha^2 + \beta^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + D_a^T t_3) + h(\alpha^2 + \beta^2)(B_a^T t_1 + D_a^T t_2 + F_a^T t_3) \\ &\quad - h(C_a^T t_1 + C_s^T t_2 + C_d^T t_3) \end{aligned} \quad (IV.23)$$

Où

$$\begin{aligned}
 \{A^T, B^T, D^T\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+2\nu) \alpha_t(z) \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz, \\
 \{B_a^T, D_a^T, F_a^T\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+2\nu) \alpha_t(z) \bar{f}(z) \{1, \bar{z}, \bar{f}(z)\} dz, \\
 \{C_a^T, C_s^T, C_d^T\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+2\nu) \alpha_t(z) \bar{g}'(z) \{1, \bar{z}, \bar{f}(z)\} dz,
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

Avec $\bar{z} = \frac{z}{h}$, $\bar{f}(z) = \frac{f(z)}{h}$, $\bar{g}'(z) = \frac{g(z)}{h}$.

IV.2 Résultats & discussions

Dans cette section, les résultats numériques de la flexion de la plaque sandwich FGM sur une fondation élastique et soumise à une charge thermomécanique sont présentés. Pour évaluer l'exactitude de l'approche générale décrite dans les sections précédentes, les résultats de cette théorie sont comparés avec d'autres de la littérature.

Plusieurs types de plaques sandwich sont présentés en fonction de l'épaisseur de la couche centrale qui est entièrement en céramique, tandis que les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sont riches en métal (figure IV.1).

- **(1-0-1) plaque sandwich FGM** : La plaque est symétrique et faite de seulement deux couches FGM d'épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. Ainsi,

$$h_1 = h_2 = 0$$

- **(1-1-1) plaque sandwich FGM** : Ici la plaque est symétrique et faite de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons,

$$h_1 = -\frac{h}{6}, \quad h_2 = \frac{h}{6}$$

- **(2-1-2) plaque sandwich FGM** : Dans cet état, la couche centrale de la plaque est la moitié de l'épaisseur des deux autres. Donc, on obtient

$$h_1 = -\frac{h}{10}, \quad h_2 = \frac{h}{10}$$

- **(2-2-1) plaque sandwich FGM** : Ici, la plaque sandwich est non symétrique par rapport au plan médian dans lequel l'épaisseur de la couche centrale est égale à l'épaisseur de la couche inférieure, alors qu'elle est deux fois supérieure à l'épaisseur de la couche supérieure. Ainsi,

$$h_1 = -\frac{h}{10}, \quad h_2 = \frac{3h}{10}$$

• **(1-2-1) plaque sandwich FGM** : Dans ce cas, la couche centrale est le double d'épaisseur des deux autres. Nous avons,

$$h_1 = -\frac{h}{4}, \quad h_2 = \frac{h}{4}$$

Les comparaisons sont faites avec les solutions disponibles dans la littérature. Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont:

Métal (Titanium, Ti-6Al-4V) : $E_M = 66.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 1/3$; $\alpha_M = 10.3 (10^{-6}/\text{C})$.

Céramique (Zirconia, ZrO_2) : $E_C = 117 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 1/3$; $\alpha_C = 7.11 (10^{-6}/\text{C})$.

Dans ce qui suit, les paramètres adimensionnels utilisés sont introduits

Déplacement transversale $\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + 10^3 \alpha_0 t_2 a^2 / h} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\hat{w} = \frac{10^2 D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Contrainte axiale $\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 E_0 \alpha_0 t_2 a^2 / h^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$, $\hat{\sigma}_x = \frac{1}{10^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$

Contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 a / h + E_0 \alpha_0 t_2 a / 10 h} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$, $\hat{\tau}_{xz} = \frac{-1}{10 q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$

où les valeurs de référence sont prises comme $E_0 = 1 \text{ GPa}$ et $\alpha_0 = 10^{-6}/\text{C}$. Avec,

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D} \quad \text{et} \quad K_p = \frac{k_p a^2}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Telle que D : c'est la rigidité flexionnelle de la plaque.

IV.2.1 Etude comparative

Afin de valider la précision des présentes formulations, dans le tableau IV.1, une comparaison a été effectuée entre la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}$ du présent travail et les résultats obtenus par Zenkour et Alghamdi (2008) et Saidi et al. (2013) dans le cas d'un chargement thermo-élastique ($q_0 = 0$). Les résultats de cette théorie sont en bon accord avec les autres résultats pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p en particulier avec Saidi et al. (2013) où l'effet d'étirement est pris en compte.

Comme deuxième exemple pour prouver la précision de la présente méthode, une comparaison entre la flèche centrale adimensionnelle $\hat{w}$ du présent travail et celles de Taibi et al. (2015) dans le cas d'une plaque sandwich FGM sur une fondation élastique et soumise à une charge thermomécanique est présentée dans le tableau IV.2. On peut voir que les résultats actuels sont en accord avec les résultats publiés et ceci pour les différentes configurations de la fondation élastique et pour les différents types de plaques sandwich FG. Il a été précisé que dans Taibi et al. (2015), l'effet d'étirement n'est pas pris en compte.

Tableau IV.1: Comparaison de la flèche centre adimensionnelle $\bar{w}$ pour différents types de plaques sandwich FGM carrées ($q_0=t_1=t_3=0$, $t_2=100$ et $a/h=10$).

p	Théorie		Schéma			
			1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	Saidi et al.	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.449863	0.449863	0.449863	0.449863
	Zenkour et Alghamdi	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634
	Présente théorie	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.447489	0.447489	0.447489	0.447489
1	Saidi et al.	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.594840	0.565276	0.542436	0.579538
	Zenkour et Alghamdi	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.614565	0.586124	0.563416	0.599933
	Présente théorie	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.592796	0.563303	0.540275	0.577617
2	Saidi et al.	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.627934	0.596416	0.567938	0.612832
	Zenkour et Alghamdi	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.647135	0.618046	0.590491	0.633340
	Présente théorie	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.626009	0.594869	0.566134	0.611281
3	Saidi et al.	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.639690	0.610125	0.579769	0.626505
	Zenkour et Alghamdi	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.658153	0.631600	0.602744	0.646475
	Présente théorie	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.637658	0.608774	0.578166	0.625066
4	Saidi et al.	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.644833	0.617502	0.586469	0.633395
	Zenkour et Alghamdi	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.662811	0.638705	0.609560	0.652890
	Présente théorie	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.642656	0.616224	0.584986	0.631975
5	Saidi et al.	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.647421	0.621990	0.590728	0.637353
	Zenkour et Alghamdi	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.665096	0.642948	0.613842	0.656490
	Présente théorie	$(\varepsilon z \neq 0)$	0.645108	0.620778	0.589326	0.635918

Tableau IV.2: Comparaison de la flèche centre adimensionnelle $\hat{w}$ pour différents types de plaques sandwich FGM ($q_0=100$, $t_1=t_3=0$, $t_2=10$, $b=2a$ et $a/h=10$).

Schéma	p	Théorie		$K_w=0$ $K_p=0$	$K_w=100$ $K_p=0$	$K_w=0$ $K_p=100$	$K_w=100$ $K_p=100$
1-0-1	0	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	1.524169	0.9065374	0.1871406	0.1726943
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	1.523237	0.8674752	0.1360427	0.1257335
	0.5	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	1.926313	1.020974	0.1870433	0.1722154
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	1.931656	0.970295	0.1310419	0.1205855
	1	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	2.120839	1.058691	0.1840896	0.1693426
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	2.134239	1.005042	0.1271727	0.1167998
3-1-3	0.5	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	1.893111	1.013118	0.1872793	0.1724601
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	1.897610	0.963003	0.1314823	0.1210285
	2	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	2.241917	1.077328	0.1817403	0.1670975
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	2.262751	1.022561	0.1245592	0.1142704
2-1-2	0.5	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	1.877873	1.009386	0.1873625	0.1725498
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	1.881921	0.959531	0.1316713	0.1212200
	2	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	2.217696	1.073225	0.1820381	0.1673863
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	2.237604	1.018647	0.1248993	0.1146044
1-1-1	0.5	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	1.837326	0.9991025	0.1875225	0.1727319
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	1.840099	0.9499737	0.1321465	0.1217047
	2	Taibi et al.	$(\varepsilon z=0)$	2.146174	1.060160	0.1827747	0.1681089
		Présente	$(\varepsilon z \neq 0)$	2.162731	1.006181	0.1258436	0.1155377

La corrélation entre la présente théorie de déformation de cisaillement quasi 3D raffinée et différentes HSDT est représentée dans les tableaux IV.3 et IV.4 pour des plaques sans et avec fondation élastique et soumises à une charge thermomécanique, respectivement. Ces tableaux représentent respectivement des contraintes axiales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ et $\hat{\sigma}_x$. Encore une fois, il est clair que les résultats sont en très bon accord.

Tableau IV.3: Comparaison de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour différents types de plaques sandwich FGM carrées ($t_1=0$, $q_0=t_2=t_3=100$ et $a/h=10$).

p	Théorie		$t_{FGM}/h=0.2$	$t_{FGM}/h=0.4$	$t_{FGM}/h=0.6$	$t_{FGM}/h=0.8$	$t_{FGM}/h=1$
0	Saidi et al. (RHSDT)	($\varepsilon z \neq 0$)	-1.650736	-1.650736	-1.650736	-1.650736	-1.650736
	Saidi et al. (TSDT)	($\varepsilon z = 0$)	-2.461177	-2.461177	-2.461177	-2.461177	-2.461177
	Présente théorie	($\varepsilon z \neq 0$)	-1.733664	-1.733664	-1.733664	-1.733664	-1.733664
1	Saidi et al. (RHSDT)	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.372080	-2.859305	-2.461461	-2.179138	-1.993540
	Saidi et al. (TSDT)	($\varepsilon z = 0$)	-3.412724	-3.076466	-2.804750	-2.606343	-2.473903
	Présente théorie	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.432936	-2.929687	-2.536981	-2.256454	-2.070533
2	Saidi et al. (RHSDT)	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.211762	-2.556774	-2.066031	-1.751165	-1.580468
	Saidi et al. (TSDT)	($\varepsilon z = 0$)	-3.312889	-2.879670	-2.537489	-2.308903	-2.181780
	Présente théorie	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.277030	-2.634200	-2.148618	-1.833634	-1.659891
3	Saidi et al. (RHSDT)	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.137344	-2.419727	-1.898185	-1.588667	-1.446122
	Saidi et al. (TSDT)	($\varepsilon z = 0$)	-3.266245	-2.788595	-2.420027	-2.190823	-2.081815
	Présente théorie	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.204698	-2.500132	-1.982962	-1.671636	-1.524290
4	Saidi et al. (RHSDT)	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.094600	-2.343139	-1.809688	-1.511078	-1.390767
	Saidi et al. (TSDT)	($\varepsilon z = 0$)	-3.239292	-2.736867	-2.356554	-2.132710	-2.039172
	Présente théorie	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.163154	-2.425070	-1.895230	-1.593659	-1.467506
5	Saidi et al. (RHSDT)	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.066950	-2.294758	-1.756372	-1.468147	-1.446122
	Saidi et al. (TSDT)	($\varepsilon z = 0$)	-3.221769	-2.703791	-2.317655	-2.099863	-2.018086
	Présente théorie	($\varepsilon z \neq 0$)	-3.136271	-2.377566	-1.842194	-1.550187	-1.439624

Tableau IV.4: Comparaison de la contrainte axiale adimensionnelle $\hat{\sigma}_x$ pour différents types de plaques sandwich FGM carrées ($q_0=100$, $t_1=0$, $t_2=t_3=10$ et $a/h=10$).

Schéma	p	Théorie	$K_w=0, K_p=0$	$K_w=100, K_p=0$	$K_w=0, K_p=100$	$K_w=100, K_p=100$
1-0-1	1	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.1105227	-0.3116192	-0.7364776	-0.739899
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.0890748	-0.2636021	-0.6072045	-0.609842
	2	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.0623908	-0.2927379	-0.7375602	-0.7409318
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.0289341	-0.2292192	-0.5891432	-0.5917456
3-1-3	1	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.1241574	-0.3177678	-0.7367466	-0.7401768
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.1064081	-0.2743646	-0.6129418	-0.6155828
	2	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.0755402	-0.2980086	-0.7381727	-0.7415633
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.0451395	-0.2384976	-0.5940426	-0.5966521
2-1-2	1	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.1308154	-0.3208612	-0.736815	-0.7402472
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.1149129	-0.2797275	-0.615769	-0.6184114
	2	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.0826525	-0.3009895	-0.7383215	-0.7417185
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.0539636	-0.2436501	-0.5966793	-0.5992908
1-1-1	1	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.1494431	-0.329774	-0.7369009	-0.7403335
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.1388744	-0.295114	-0.6238812	-0.6265216
	2	Taibi et al. ($\varepsilon z=0$)	-0.1042201	-0.3104047	-0.738477	-0.7418835
		Présente théorie ($\varepsilon z \neq 0$)	-0.0809590	-0.2598138	-0.604892	-0.6075066

Après cette étude comparative, on peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple dans la prédiction de la réponse des plaques sandwich FG reposant sur des fondations élastiques. La présente théorie prend en compte l'effet d'étirement dû à sa nature quasi-3D avec un nombre minimum d'inconnues réduit qui n'est que de quatre.

III.2.3 Etude paramétrique

Sur la figure IV.2, nous présentons la variation du déplacement transversale $\bar{w}$ pour différentes valeurs de la fraction volumique p . Pour les deux cas, symétrique et non-symétrique, on constate que le déplacement $\bar{w}$ des plaques métalliques est plus important que celui des plaques céramiques correspondantes ; et en général, le déplacement transversal augmente lorsque l'indice de fraction volumique p augmente.

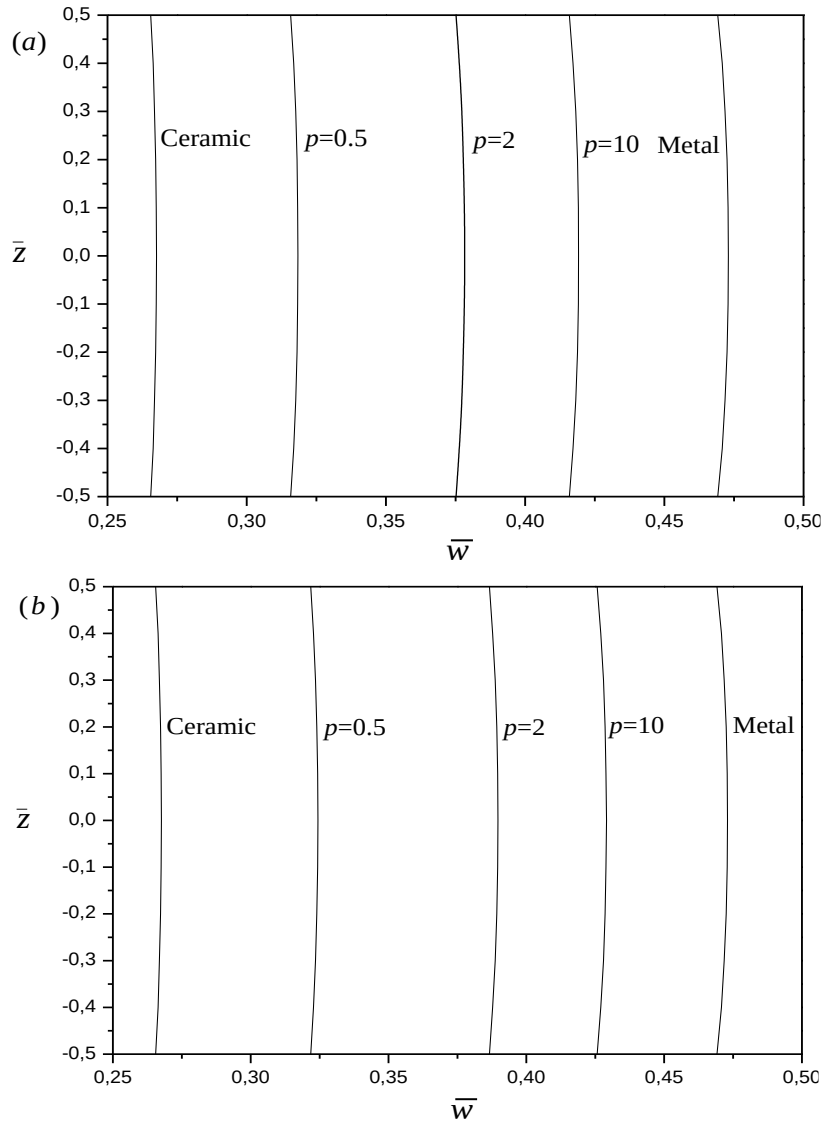


Figure IV.2 : Le déplacement transversale $\bar{w}$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich carrées (FG) ($q_0=100$, $t_1=t_2=t_3=0$ et $a/h=10$). (a) Type (1-2-1). (b) Type (2-2-1).

La figure IV.3 montre la variation de la flèche centrale $\hat{w}$ d'une plaque sandwich FG carrée (1-1-1) en fonction du rapport a/h . De plus, les effets de la fondation élastique de Winkler et de Pasternak sont représentés sur la figure IV.3 (a) et (b), respectivement. D'après ces figures, on peut voir que l'augmentation des valeurs du rapport a/h conduit à une réduction de la flèche centrale. Cette réduction est assez significative pour des valeurs de a/h inférieures à 10. A partir de cette valeur, la flèche devient pratiquement constante.

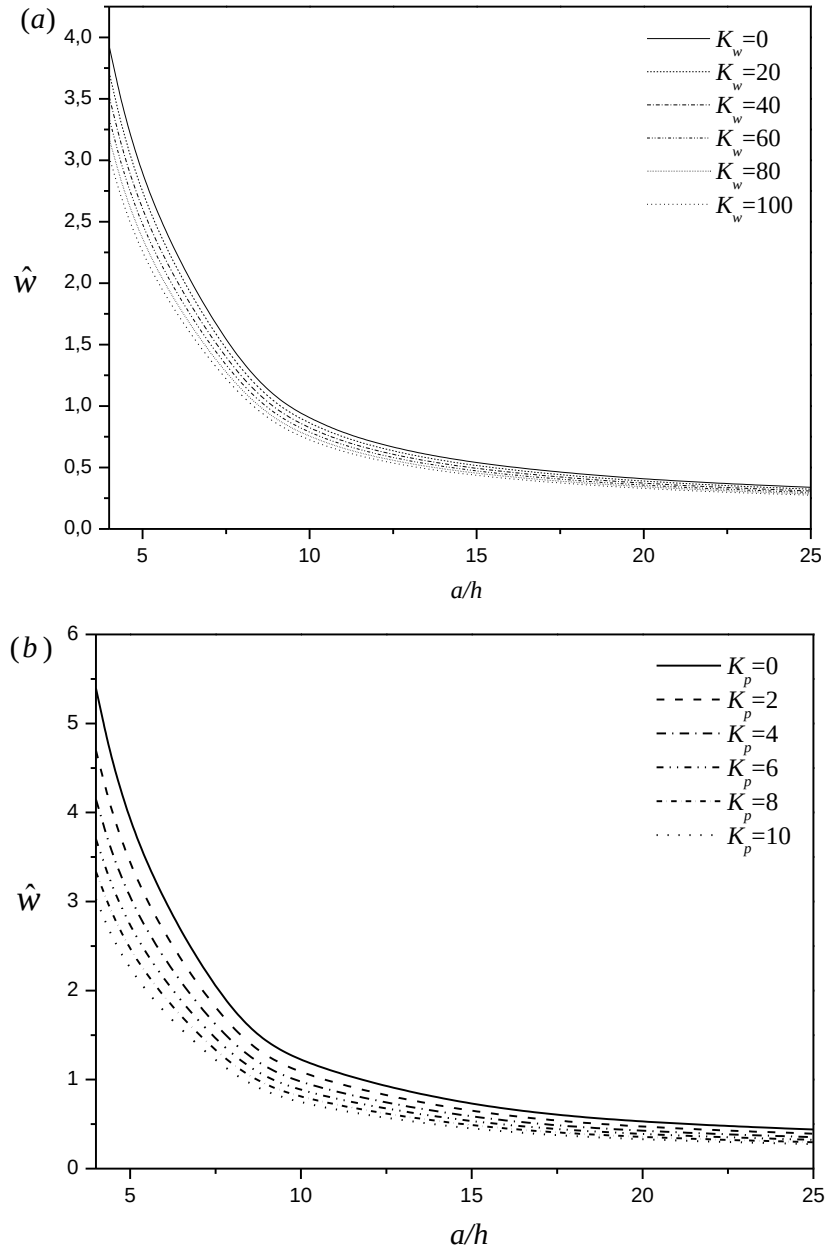


Figure IV.3 : Effet des paramètres de fondations élastiques sur la flèche centrale $\hat{w}$ d'une plaque sandwich carré FGM en fonction du rapport a/h ($q_0=100$, $t_1=0$, $t_2=t_3=10$, $p=2$).

Type (1-1-1). (a) $K_p=10$. (b) $K_w=100$.

De plus, l'augmentation des paramètres de fondation élastique, que ce soit Winkler ou Pasternak, conduit à la diminution de la flèche. Cette tendance décroissante est attribuée à la raideur du milieu élastique.

Figure IV.4 contient des tracés de la flèche centrale $\hat{w}$ d'une plaque sandwich FG carrée (1-1-1) en fonction du rapport a/b . La plaque est soumise à des charges thermiques et mécaniques. La flèche est plus importante pour les plaques soumises à une charge thermique. La flèche diminue en mesure que a/b augmente. La déflexion peut être stable pour toutes les valeurs de $a/b \geq 10$.

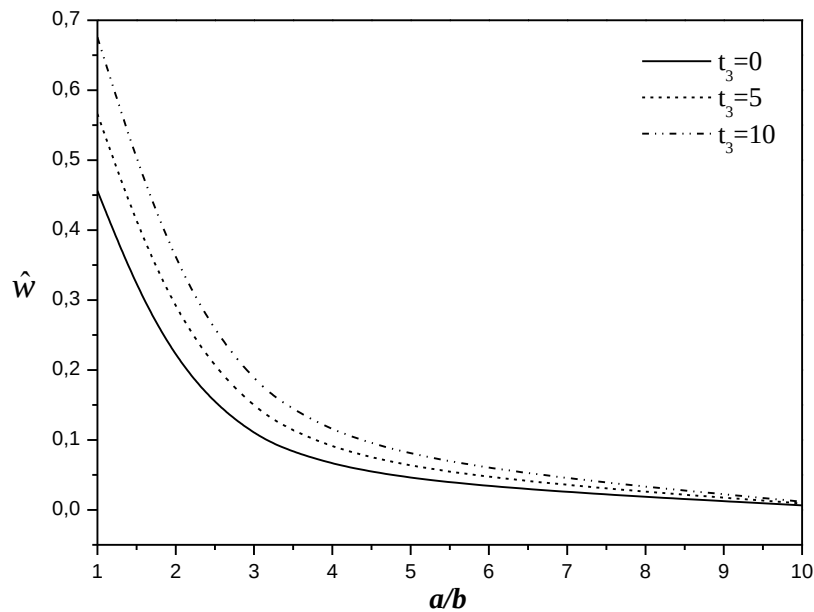


Figure IV.4 : Effet de la charge thermique sur la flèche centrale $\hat{w}$ d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) en fonction du rapport a/b .

($q_0=100$, $t_1=0$, $t_2=10$, $p=2$, $K_w=100$, $K_p=10$, $a/h=10$)

Les figures IV.5 (a) et (b) illustrent les répartitions dans l'épaisseur des contraintes normales $\hat{\sigma}_x$ dans des plaques rectangulaires FG ($p=2$) sous chargement thermomécanique. Comme montré sur ces figures, les contraintes de compression maximales se produisent en un point sur la surface supérieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien entendu, en un point sur la surface inférieure de la plaque sandwich FGM.

On peut voir à partir de ces figures que la fondation élastique augmente les contraintes axiales maximales. Cette augmentation est assez nette en présence d'une fondation de type Pasternak.

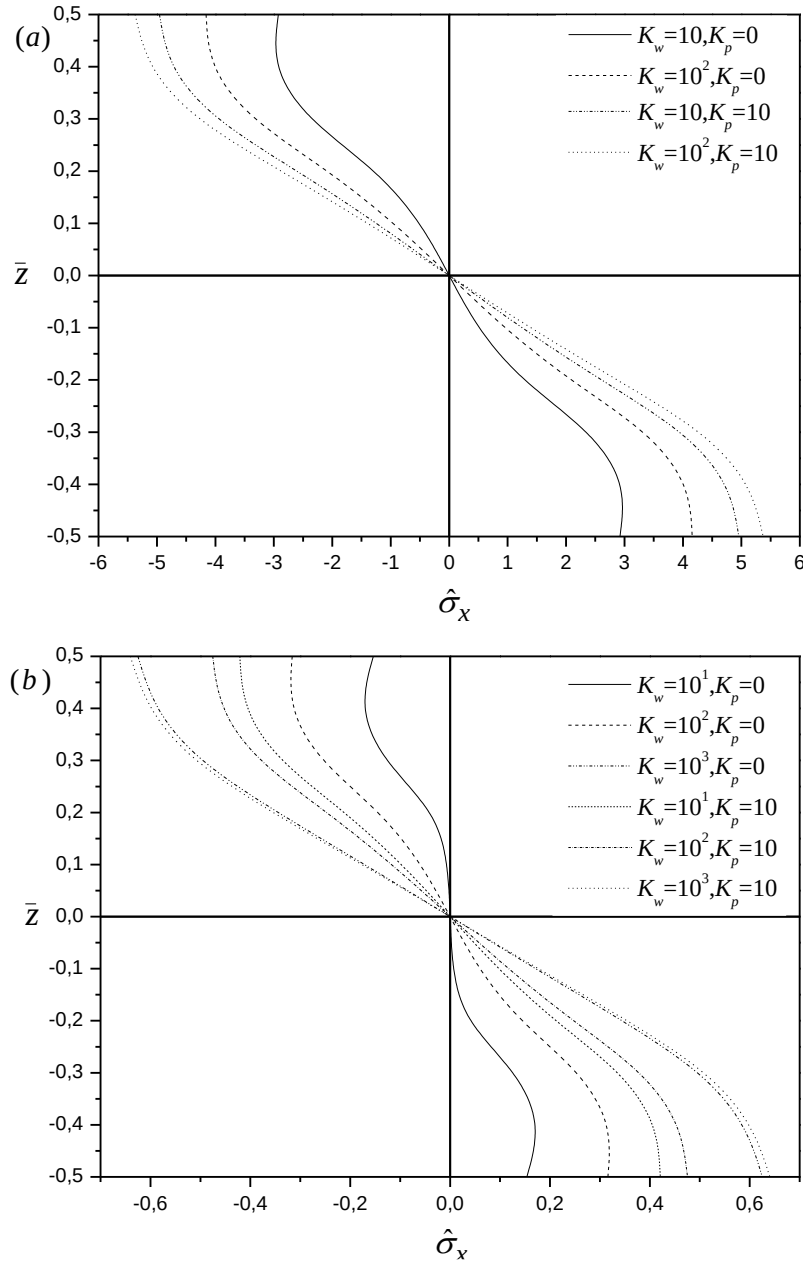


Figure IV.5 : Variation de la contrainte normale $\hat{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) pour différents valeurs de la fondation élastique. ($q_0=100, t_1=0, p=2, a/h=10$). (a) $t_2=t_3=100$. (b) $t_2=t_3=10$.

Sur la figure IV.6, nous avons tracé les distributions de la contrainte de cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FG pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p . La valeur maximale de la contrainte de cisaillement se produit en un point sur le plan médian de la plaque puisque la plaque sandwich est symétrique (1-1-1). De plus, l'amplitude de cette contrainte dans la plaque sandwich FG, et quelle que soit la valeur de l'indice p , est supérieure à celle de la plaque céramique homogène.

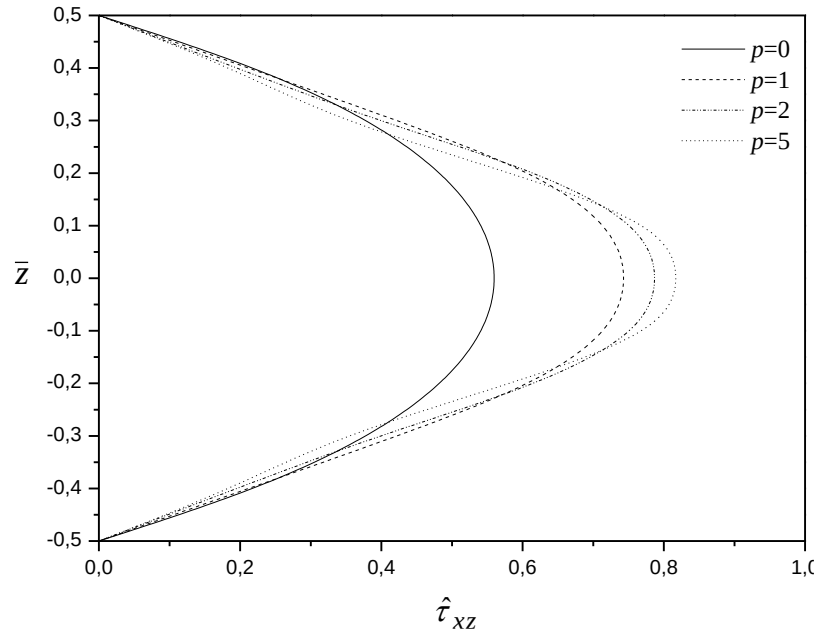


Figure IV.6 : Variation de la contrainte de cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) pour différents valeurs de l'indice de puissance p . ($q_0=100$, $t_1=0$, $t_2=t_3=10$, $K_w=100$, $K_p=10$, $a/h=10$).

La figure IV.7 montre l'effet du paramètre de Winkler sur la contrainte transversale de cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur. De nouveau, les contraintes de cisaillement maximales sont obtenues au niveau du plan médian. De plus, nous avons trouvé que le paramètre de Winkler a peu d'influence sur la variation de ces contraintes.

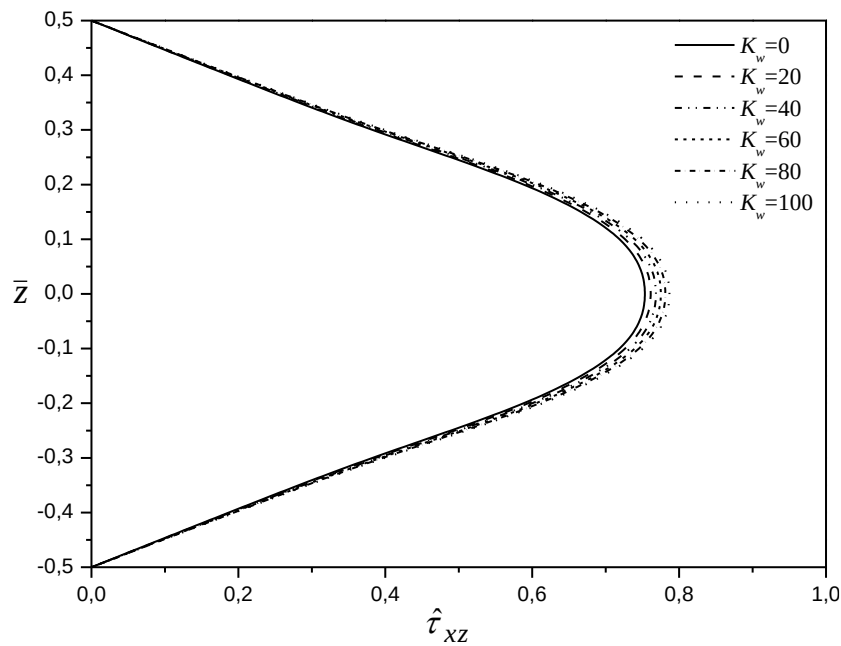


Figure IV.7 : Variation de la contrainte de cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carré FG (1-1-1) pour différents valeurs du paramètre Winkler K_w .

Conclusion

Ce chapitre présente une solution analytique pour la flexion thermo-mécanique de plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique en utilisant une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D de type HSDT avec effet d'étirement. Le principal avantage de la théorie proposée par rapport aux théories existantes de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est que les présentes impliquent moins d'inconnues ainsi que l'effet d'étirement dans la plaque sandwich FG. Le taux de calcul peut donc être réduit. Les équations d'équilibre sont résolues facilement en utilisant les solutions de Navier. Le déplacement transversal ainsi que les contraintes obtenues sont comparées à d'autres et un très bon accord a été trouvé qui prouve la précision de la méthode.

Une étude paramétrique a permis de mettre en évidence les différents facteurs influençant la réponse des plaques sandwich soumises à un chargement thermomécanique.

Conclusion générale
&
Perspectives

Les matériaux fonctionnellement gradués sont la matière de l'avenir qui offre des possibilités d'études et d'applications supplémentaires. Des études expérimentales moindres sont menées dans ce domaine et il n'y a que très peu d'implémentations pratiques jusqu'à présent, même si les exemples naturels sont nombreux. La nature coûteuse de ces matériaux constitue également un obstacle à son développement. D'autres études devraient permettre d'améliorer encore l'acceptabilité et l'application des FGM.

Le concept, les propriétés, l'historique de développement et l'application des FGM en ingénierie, une estimation des propriétés effectives, les modèles micromécaniques, une base théorique et des méthodes de calcul pour des structures FGM ont été discutés dans cette thèse.

L'objectif de cette thèse a été d'apporter une contribution à l'étude de l'effet des modèles micromécaniques sur le comportement des FGM.

Nous avons présentés le comportement des structures FGM à partir des deux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé développées (2D, quasi-3D). Certains modèles de distribution des matériaux sont appliqués aux hypothèses de loi de la puissance (Voigt, Reuss, Tamura, LRVE et Mori-Tanaka) pour déterminer les propriétés matérielles de la plaque FGM. En outre, l'influence de ces modèles micromécaniques, les paramètres de plaque tels que l'indice de loi de puissance, le rapport d'aspect, les paramètres de fondations élastiques sur les fréquences naturelles, le déplacement transversale et les contraintes des structures FGM ont été étudiés de manière approfondie.

Les publications relatives à cette thèse sont : Mahmoudi et al. (2017), Mahmoudi et al. (2018).

Enfin, laissez-nous discuter des futurs travaux possibles.

En fait, la variation spatiale progressive des propriétés matérielles des matériaux fonctionnels a été largement développée pour les applications dans l'ingénierie. L'utilisation de ce concept pour les applications de génie civil est un domaine prometteur pour de futures recherches. Une disposition optimale des matériaux peut en effet créer des structures innovantes ayant les capacités résistantes, thermiques et acoustiques requises (par exemple, structures en béton léger). Les modèles d'ordre supérieur et les modèles d'homogénéisation de plaque présentés dans les chapitres 2 et 3 peuvent être utilisés comme outils de base pour déterminer la distribution optimale des phases. De plus, une stratégie expérimentale doit être envisagée afin de fabriquer la structure à gradation optimale.

Références bibliographiques

- Abrate S. (2006), “Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates”, *Compos. Sci. Technol.*, 66, 2383–94.
- Abualnour, M., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018). A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Composite Structures*, 184, 688-697.
- Ait Amar M, Abdelaziz H, Tounsi A (2014). “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”. *Journal of Sandwich Structures & Materials*; 16(3), 293-318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda, B. A. (2010), “ free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory” , *Int. J Mech. Mater. Des*, 6, 113–121.
- Akavci S (2016). “Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation”. *Composites Part B*; 96: 136 - 152.
- Akavci S., A. Tanrikulu(2015), “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories”, *Composites, Part B, Eng.* 83,203–215
- Akhavan H, Hosseini H. Sh., Rokni D, Alibeigloo A, Vahabi Sh. (2009), “Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part II: Frequency analysis”, *Computational Materials Science*, 44, 951–961.
- Alibeigloo A., M. Alizadeh (2015), “Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method”, *Eur. J. Mech. Asolids*.54 252–266.
- Amal E.A, Eltaher M.A, Mahmoud F.F, (2011),”Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method”, *Appl.Math.Model*; 35(1),412–425.
- Attia A , Tounsi A , Adda Bedia E A , Mahmoud S R (2015). “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”. *Steel and composite structures*; 18(1):187-212.
- Aydogdu M. (2008), “Conditions for functionally graded plates to remain flat under in-plane loads by classical plate theory”, *Compos.Struct.*82 155–157.
- Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H. (2011), “Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation”, *Compos. Struct.*; 93(7), 1842–53.
- Bao G., L. Wang (1995), “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.

- Belabed Z, Houari M S A , Tounsi A , Mahmoud S R, Anwar Bég O (2014). “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”. *Composites Part B: Engineering*; 60: 274-283.
- Beldjelili Y, Tounsi A, Mahmoud S R. (2016) “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”. *Smart Structures and Systems*; 18(4):755-786.
- Belmonte M., Gonzalez J., Miranzo, P., Osendi, M., *Acta Mat.* 57 (2009) 2607.
- Benachour, A., Daouadji, H. T., AitAtmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011),”A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B-Eng.*, 42, 1386–1394.
- Benahmed, A., Houari, M. S. A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., &Tounsi, A. (2017). “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”. *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34.
- Bennoun M., M.S.A. Houari, A. Tounsi (2016), “A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech.Adv.Mat.Struct.* 23423–431.
- Benveniste Y., (1987) “A new approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composite materials”, *Mech.Mater.* 6147-157.
- Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., AitAtmane, H. and AddaBedia, E. A. (2010) “Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations,” *Mech. Compos. Mater.* 46(4), 425–434.
- BessaimA ,Houari M S A , Tounsi A , Mahmoud S R , AddaBedia E A. (2013)“A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”. *Journal of Sandwich Structures and Materials*; 15(6):671-703.
- Birman V. and Byrd L.W. (2007), “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures”, *Applied Mechanics Reviews*, 60, 195–216.
- Birman V.(1995) “Stability of functionally graded hybrid composite plates”, *Compos.Eng.* 5 913–21.
- Bishop A., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane,(1993)“A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process”, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18.
- Boch P., T. Chartier., M. Huttepain, (1986)“Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites”, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192.

- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., & Tounsi, A. (2017). "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams". *Smart Structures and Systems*, 19(2), 115-126.
- Bouderba, B., Houari, M. S. A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations," *Steel Compos. Struct.* 14(1), 85–104.
- Bourada M., A. Kaci, M.S.A. Houari, A. Tounsi, (2015) "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.* 18 409–423.
- Bourada M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., AddaBedia, E.A. (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *J. Sandwich Structures Materials*, 14, 5–33.
- Bourada F., Amara K., Tounsi A. (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory", *Steel.Compos.Struct.*, 21(6), 1287-1306.
- Bousahla A, Benyoucef S, Tounsi A, Mahmoud S.R. (2016) "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion". *Struct.Eng.Mech*; 60: 313-35.
- Cannillo X., Lusvarghi L., Siligard C., Sola A., *J Europ. Ceram. Soci.* 27 (2007) 2393.
- Chabraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J.N., (2003), "A New Beam Finite Element for the Analysis of Functionally Graded Materials", *International Journal of Mechanical Science*; 45: 519-539.
- Chan S.H. (2001), "Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine", *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.
- Cheng Z.Q., R.C.Batra, (2000) "Deflection relationships between the homogeneous plate theory and different functionally graded plate theories", *Arch.Mech.* 52 143–158.
- Cheng Z.Q., S.Kitipornchai, (1999) "Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates", *J.Eng.Mech.ASCE* 125. (11) 1293–1297.
- Davoodinik, A.R., (2005), "Mechanical Behavior Analysis of FGM Timoshenko's Beam", Ph.D. dissertation, TarbiatModarres University, Tehran.
- Dehghan H, Baradaran GH. (2011), "Buckling and free vibration analysis of thick rectangular plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature method", *Appl. Math. Comput.*; 218, 2772–84.
- Delale F., F. Erdogan, (1983) "The crack problem for a nonhomogeneous plane". *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014), "A trigonometric four variable plate theory for free

- vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, 17(1), 69-81.
- Duquea N., Melgarejoa, Z., Suarez O., *Mater. Charact.* 55 (2005) 167.
- Eshelby J., (1957)“The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems”, *Proc. Roy. Soc. London A* 241 (1226) 376-369.
- Fang, X. Hu, Q.C., and Huang, W.H. (2007), “Determination of Dynamic Effective Properties in Functionally Graded Materials”, *ActaMechanica*, 192, 49-63.
- Ferreira A.J.M., R.C.Batra, C.M.C.Roque, L.F.Qian, R.N.Jorge, (2006) “Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method”, *Compos.Struct.* 75593–600.
- Fuchiyama T. and Noda N. (1995), “Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material”, *JSAE Review*, 16, 263–268.
- Gasik M. , K. Lilius, (1994)“Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical model”, *Comput. Mater. Sci.* 3 41-49.
- Gasik MM. (2010)“Functionally graded materials: bulk processing techniques”. *Int J Mater Prod Technol*;39(1–2):20–9.
- Gasik, M.M. (1998), “Micromechanical modeling of functionally graded materials”. *Comput. Mater. Sci.*, 13, 42–55.
- Gupta, A., & Talha, M. (2015). “Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures”. *Progress in Aerospace Sciences*, 79, 1-14.
- Hadji L, Atmane HA, Tounsi A, et al. (2011) “Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory”. *Appl Math Mech*; 32: 925–942.
- Hamidi A, Houari MSA, Mahmoud SR, et al. (2015)“A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”. *Steel Compos Struct*; 18: 235–253.
- Hao Y.X., W. Zhang , J. Yang,(2011) “Nonlinear Oscillation of a Cantilever FGM Rectangular Plate Based on Third-Order Plate Theory and Asymptotic Perturbation Method” *Journal of Composites Part B* Vol.42 pp. 402-413
- Hashin Z., S. Shtrikman, (1963) “A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials”, *J. Mech. Phys. Solids* 11 127-140.
- Hashin Z., (1962) “The elastic moduli of heterogeneous materials”, *ASME.J.Appl.Mech.* 29 143-150.
- He X.Q., T.Y.Ng, S.Sivashankar, K.M.Liew, (2001)“Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators”, *Int.J.SolidsStruct.*38 1641–1655.
- Hebali H, Tounsi A, Houari M.S.A, Bessaim A, Adda B A. (2014) “New quasi-3D hyperbolic

- shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*; 140(2): 374–383.
- Henni A., Atmane HA, Mechab I, et al. (2011)“Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory”. *Chin J Aeronautn*; 24: 434–448.
- Herrmann M, Sobek W (2017) “Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components”. *Struct Concr*, 18(1), 54-66.
- Hildebrand F.B., E. Reissner., G.G. Thomas, (1949)“Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells”. *NACA T. N. N°:1833*.
- Hill R., (1964)“Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. Elastic behavior”, *J. Mech. Phys. Solids* 12 199-212.
- Hirai T. and Chen L. (1999), “Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan”, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.
- Hirwani C K, Patil R K, Panda S K, Mahapatra S S, Mandal S K, Srivastava L, Buragohain M K. (2016)“Experimental and numerical analysis of free vibration of delaminated curved panel”. *Aerospace Science and Technology*; 54: 353-370.
- Houari MSA, Benyoucef S, Mechab I, et al. (2011)“Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”. *J Therm Stress*; 34: 315–334.
- Houari MSA, Tounsi A, Bessaim A,. (2016)“A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”. *Steel.Compos.Struct*; 22:257-276.
- Hutmacher D.W, M.Sittinger, M.V Risbud,(2004) “Scaffold-based tissue engineering: rationale for computer-aided design and solid free-form fabrication systems”,*Trends Biotechnol.*22(7)354–362.
- Jha D K , Kant T , Singh R K.(2012)“Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates”. *Nuclear Engineering and Design* 20; 250: 8–13.
- Jha, D.K., Kant, T., Singh, R.K. (2013), “critical review of recent research on functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, 96,833-849.
- Jin X., Wu L., Guo L., Yu H., Sun Y., *Eng. Fract. Mech.* 76 (2009) 1800.
- Kant T., K. Swaminathan, (2002)“Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory”. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344.
- Kar, V. R., & Panda, S. K. (2015). “Free vibration responses of temperature dependent

- functionally graded curved panels under thermal environment”. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(11), 2006-2024.
- Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou (2003) “Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité”. *Int. J. Solids Structures*; 40(6): 1525-1546.
- Kashtalyan M., M. Menshykova, (2009) “Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core”, *Compos. Struct.* 87 (1) 36–43.
- Kerr AD. (1964) ”Elastic and viscoelastic foundation models”, *ASME.J.Appl.Mech.*; 31(3), 491–8.
- Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.
- Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *International Journal of Computational Methods*, 11(5), 135007.
- Kim J.H. , G.H. Paulino, (2003) “An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 58 1457-1497.
- Kim Y.W., (2005) “Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates”, *J.SoundVib.* 284 531–549.
- Kirchhoff, G., (1850), “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 40, No. 1, pp.51-88.
- Kitipornchai S, Yang J, Liew KM.(2006) “Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments”. *Comp Meth Appl Mech Eng*; 195:1075–95.
- Koizumi. M. (1993), “The concept of FGM”, *Ceramic Trans. Funct. Grad. Mater.* 34, 3–10.
- Koizumi. M. (1997), “FGM activities in Japan”, *Compos. Part B: Eng.* 28(1-2), 1-4
- Kokini K., Y. Takeuchi, (1990) “Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads”. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36.
- Lee Y., X.Zhao, J.Reddy, (2010) “Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads”, *Comput.Meth.Appl.Mech.Eng.* 199, 1645–1653.
- Li H., X. Zhu, Z. Mei, J. Qiu, Y. Zhang, (2013) “Bending of orthotropic sandwich plates with a functionally graded core subjected to distributed loadings”, *Acta Mech. Solid. Sin.* 26(3) 292–301.

- Li Q., V.P.Iu, K.P.Kou, (2009)“Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment”, *J.SoundVib.* 324, 733–750.
- Librescu L. and Song S.-Y. (2005), “Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability”, *Journal of Thermal Stresses*, 28, 649–712.
- Lin X. ,T.M.Yue,(2005)“Phase formation and microstructure evolution in laser rapid forming of graded SS316L/Rene88DT alloy”, *Mater.Sci.Eng.*402 294–306.
- Liu B., A.J.M. Ferreira, Y.F. Xing, A.M.A. Neves, (2016)“Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method”, *Compos. Struct.* 136 546–553.
- Love, A. E. H. (1888). “The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 179, 491-546.
- Madani H, Hosseini H, Shokravi M. (2016) “Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions”. *Steel and Compos Struct*; 22(4): 889-913.
- Mahi A., E.A. AddaBedia, A. Tounsi, (2015)“A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic”, functionally graded, sandwich and laminated composite plates, *Appl. Math. Model.* 39 (9) 2489–2508.
- Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S. R. (2017). “A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations”. *J.Sand.Struc.Mat*, accepté.
- Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., Adda Bedia, E.A. (2018). “ On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation”. *Earthquakes and structures*, 14(2), 117-128.
- Mantari J L, Soares C G. (2014) “A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates”. *Composite Structures*; 107:396-405.
- Mantari J L, Granados EV. (2015a)“A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates”. *Thin-Walled Structures*; 90:150-158.
- Mantari J L, Granados EV.(2015b) “Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT”. *Composites Part B: Engineering*;75:148-155.
- Mantari J L, Soares C G. (2015c) “Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells”. *Composites Part B: Engineering*; 56:126-136.

- Mantari J.L, C. Guedess. (2012)“Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”. *Compos.Struct*, 94 1991-00.
- Mantari J.L. (2015)“A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation”. *Mech Mater*; 86: 31–43.
- Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P. (1995), “Review: modeling studies applied to functionally graded materials”, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193.
- Matsunaga H, (2008), “Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory”, *Compos. Struct.*; 82, 499–512.
- MeksiA ,Benyoucef S , Houari M S A , Tounsi A. (2015)“A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”. *Structural Engineering and Mechanics*; 53(6):1215-1240.
- Merdaci S, Tounsi A, Houari MSA, et al.(2011)“Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates”. *Arch ApplMech*; 81: 1507–1522.
- Mian M.A., A.J.M.Spencer, (1998)“Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials”, *J.Mech.Phys.Solids* 35(1)1172–1184.
- Mindlin, R. D., (1951), “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18 pp. 31–38.
- Mishnaevsky Jr L., (2007)“Computational meso-mechanics of composites”, John Wiley & Sons, England.
- Moon J. ,A.C.Caballero, L.Hozer, Y.M.Chiang, M.J.Cima,(2001)“Fabrication of functionally graded reaction in filtrated SiC–Si composite by three-dimensional printing (3DPMT) process”, *Mater.Sci.Eng.*298110–119.
- Mori T. , K. Tanaka, (1973)“Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions”, *ActaMetall* 21 571-574.
- Naghdi P. M., (1957)“On the theory of thin elastic shells”. *Quarterly.Appl.Math*, 14: 369-380.
- Natarajan S., P.M.Baiz, M.Ganapathi, P.Kerfriden, S.Bordas, (2011)“Linear free flexural vibration of cracked functionally graded plates in thermal environment”, *Comput.Struct.*891535–1546.
- Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mechanics of Composite Materials*, 49(6), 641 – 650.
- Neves A.M.A., A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares, (2013) “Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation

- theory and a meshless technique”, *Compos. Part B-Eng.* 44 (1) 657–674.
- Ng T.Y., K.Y. Lam, K.M. Liew, (2000) “Effect of FGM materials on parametric response of plate structures”, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* 190 953–962.
- Niino M., T. Hirai and R. Watanabe, (1987) “The functionally gradient materials,” *J Jap Soc Compos Mat*, vol. 13, pp. 257-264.
- Noda N. (1999), “Thermal stresses in functionally graded material”, *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512.
- Nowinski, J.L., 1978, "Theory of Thermo Elasticity with Applications", Sijthoff-Noordhoff International Publishers.
- Pasternak P.L. (1954), “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Cosudarstvennoe Izdatelstvo Literatury i Stroitelstva i Arkhitektury*”. Moscow: USSR; pp. 1–56 [in Russian]
- Paulino G.H., Jin Z.H., and Dodds Jr. R.H. (2003), Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karimhallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- Pindera, M., Aboudi, J., and Arnold, S. (1995), “Limitations of the Uncoupled, RVE-Based Micromechanical Approach in the Analysis of Functionally Graded Composites” *Mechanics of Materials*, 20, 77-94.
- Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. (2000) “Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions”. *Appl. Acoust.* 61(1):111–29.
- Praveen G.N., J.N. Reddy, (1998) “Nonlinear transient thermo-elastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates”, *Int. J. Solids Struct.* 35 4457–4471.
- Qian L.F., Batra R.C., Chen L.M. (2004), “Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method”, *Composites: Part B*; 35, 685–97.
- Rad A.B., (2015) “Thermo-elastic analysis of functionally graded circular plates resting on a gradient hybrid foundation”, *Appl. Math. Comput.* 256 276–298.
- Rahman, S., and Chakraborty, A. (2007), “A Stochastic Micromechanical Model for Elastic Properties of Functionally Graded Materials”, *Mechanics of Materials*, 39, 548-563.
- Rayleigh, J. W. S., (1877), “The theory of sound”, London: Macmillan and co.
- Reddy J.N., (1984) “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.
- Reddy J.N., C.M. Wang, S. Kitipornchai, (1999) “Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates”, *Eur. J. Mech. A: Solids* 18(1) 185–199.

- Reddy J.N., Z.Q.Cheng, (2003)“Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach”, J.Eng.Mech.ASCE129 (8) 896–900.
- Reddy J.N.,(2007) “Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, CRC Press, Taylor and Francis, , ISBN9780849384158-CAT#8415.
- Reddy J.N., (2000) “Analysis of functionally graded plates”, Int.J.Numer.Methods.Eng. 47, 663–84.
- Reddy J.N, (1997). “Mechanics of Laminated Composite Plates”. Boca Raton, FL:CRC Press.
- Reddy, J.N., (1999). “Theory and Analysis of Elastic plates”. Taylor & Francis, Philadelphia.
- Reissner, E. (1945). “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”. J. appl. Mech., A69-A77.
- Reissner. E: (1975) “Sur flexion transversale de plaques, y compris les effets de déformation transversale de cisaillement”. Int. J. Solids Structures; 25(5):495-502.
- Reiter, T., and Dvorak, G.J. (1997), “Micromechanical Models for Graded Composite Materials”, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 46, 1655-1673.
- Reuss A., (1929)“Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle”, Z. Angew Math. Mech. 9 (1929) 49–58.
- Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., AddaBedia, E.A. (2014), “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, Steel and Composite Structures, 17(3), 321-338.
- Sahoo R., B.N.Singh, (2013)“A new inverse hyperbolic zig zag theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates”, Compos.Struct.105385–397.
- Sahoo S S, Panda S K, Mahapatra T R. (2016)“Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel–An experimental approach”. European Journal of Mechanics-A/Solids; 59: 95-113.
- Saidi H, Houari MSA, Tounsi A, et al.(2013)“Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”. Steel Compos Struct; 15: 221–245.
- Samsamshariat B.A., M.R.Eslami, (2007)“Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, Compos.Struct. 78433–439.
- Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2017). “A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate”. steel and composite structures, 25(4), 389-401.
- Shahrjerdi A., Mustapha F., Bayat M., Sapuan S., Majid A., J. Phys. Sci. 6 (2011) 2258.
- Sheikholeslami S.A., A.R.Saidi, (2013)“Vibration analysis of functionally graded rectangular

- plates resting on elastic foundation using higher order shear and normal deformable plate theory”, *Compos. Struct.* 106:350–361.
- Shen H.-S. (2004), “Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells” (in Chinese), *Advances in Mechanics*, 34, 53–60.
- Shen, H. (2016) “Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells”. CRC press.
- Shen, H.S., Wang, Z.X. (2012), “Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates”. *Compos. Struct.*, 94(7), 2197–2208.
- Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung, (2006), "Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load-Part I: Analysis", *Inter. J. of Solids and Structures*; 43: 3657-3674.
- Shyang-ho C., Chung Y-L, (2003) “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”. *Engineering Fracture Mechanics*; 70(10), 1227–1243.
- Singh V K, Mahapatra T R, Panda S K. (2016)“Nonlinear transient analysis of smart laminated composite plate integrated with PVDF sensor and AFC actuator”. *Composite Structures*; 157: 121-130.
- Suresh S, Mortensen A. (1998)“Fundamentals of functionally graded materials”. London: IOM Communications Ltd;.
- Taibi F, Samir B, Abdelouahed T, et al. (2015) “A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations”. *J SandwStruct Mater*; 17: 99–129.
- Talha M., B.N.Singh, (2011) “Thermo-mechanical deformation behavior of functionally graded rectangular plates subjected to various boundary conditions and loadings”, *World Acad.Sci.Eng.Technol.* 509–20.
- Talha, M., Singh, B. N. (2010) “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”. *Appl.Mathem.Modell*, 34(12), 3991-4011.
- Tamura I., Y. Tomota, M. Ozawa, (1973) “Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strength”, *Proc. 3rd Int. Conf. Strength of Metals and Alloys*, Cambridge, 1 611-615.
- Tanigawa Y. (1995), “Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials”, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- Thai H, Choi D. (2011), “A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation”, *Compos. Sci. Technol.*, 71, 1850–8.
- Thai H.T., D.H.Choi, (2012) “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of

- functionally graded plates”, *Appl.Math.Model.*36 1008–1022.
- Thai H.T., T. Nguyen, T. Vo, J. Lee, (2014)“Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory”, *Eur.J.Mech.A-Solids*, 45 211–225.
- Timoshenko, S.P. (1921) “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746.
- Timoshenko, S. P.;Woinowsky-Krieger, S., (1959). “Theory of Plates and Shells”. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
- Tounsi A, Houari M.S.A and Bessaim A. (2016)“A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”. *StructEngMechInt J.*; 60: 547–565.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A, Benyoucef, S. and AddaBedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”. *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Touratier M. (1991) “Une theory efficace de plaque standard”. *EngngSci*, 29(8), 901-916,
- Uemura S. (2003), “The activities of FGM on new applications”, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.
- Uflyand, Y.S. (1948). “The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates”. *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech*, 12(287-300), 8.
- Ugural, A.C., (1981), "Stresses in Plates and Shells", McGraw- Hill, New York.
- Uymaz B., M. Aydogdu, (2013)“Threedimensional mechanical buckling of FG plates with general boundary conditions”, *Compos.Struct.*96174–193.
- Vel SS, Batra RC. (2004),” Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.* ;272(3), 703–30.
- Vel SS, Batra RC. (2002)“Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates”. *AIAA J* ;40(7): 1421–33.
- Voigt W., (1889) “Über die Beziehungzwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper”, *Wied Ann. Physik* 38 573–587.
- Wang Z.X., H.S. Shen, (2011)“Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations”, *Compos. Struct.* 93 (10) 2521–2532.
- Watanabe Y., Yamanaka N., Fukui Y., *Comp. Part A* 29A (1998) 595.
- Weng, G.J. (2003), “Effective Bulk Moduli of Two Functionally Graded Composites,” *ActaMechanica*, 166, 57-67.
- Winkler E. (1867), “Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit”. Dominicus: Prag.

- Woo J., S.A.Meguid, (2001)“Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells”, *Int.J.SolidsStruct.*387409–7421.
- Woodward B., M. Kashtalyan, (2010)“Bending response of sandwich panels with graded core: 3D elasticity analysis”, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 17 (8) 586–594.
- Xiang S, Yao-xing J, Ze-yang Bi, Shao-xi J, Ming-sui Y, (2011) “A n-order Shear Deformation Theory for Free Vibration of Functionally Graded and Composite Sandwich Plates” *Journal of Composite Structures.* Vol.93 pp. 2826–2832
- Yaghoobi, H. and Fereidoon, A. (2014), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: an assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory”, *Compos. Part B*, 62, 54-64.
- Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach”, *Meccanica*, 48, 2019-2035.
- Yamanoushi M., Koizumi M., Hirai T., and Shiota I. (eds.) (1990), “Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials”, Japan.
- Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. (2005)“Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading”. *Int J MechSci*;47:1519–41.
- Yang J, H.S.Shen, (2002)“Vibration characteristics and transient response of shear deformable FGM plates in thermal environments”, *J.SoundVib.* 255579–602.
- Yin H.M, Sun L.Z, Paulino G.H. (2004), “Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions”, *ActaMaterialia*, 52,3535–3543.
- Zenkour A.M., (2005) “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—deflection and stresses”, *Int. J. Solids Struct.* 42 (18–19) 5224–5242.
- Zenkour AM and Alghamdi N. (2008) “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”. *J Mater Sci*; 43: 2574–2589.
- Zhong, Z., Yu, T., (2007), "Analytical Solution of a Cantilever Functionally Grade Beam", *Composites Science and Technology*; 67: 481.488.
- Zidi M., A. Tounsi, M.S.A. Houari, E.A. AddaBedia, O.A. Bég, (2014)“Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.* 34 24–34.
- Zimmerman R.W., (1994) “Behavior of the Poisson ratio of a two-phase composite material in the high-concentration limit”, *Appl. Mech. Rev.* 47 (1) 38-44.
- Zuiker, J.R. (1995), “Functionally Graded Materials - Choice of Micromechanics Model and Limitations in Property Variation”, *Compos. Eng.*, 5(7), 807-819.