REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BL ABBES
Laboratoire des matériaux et hydrologie
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT L.M.D $3^{\text{éme}}$ Cycle

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures et Matériaux**

Présentée par :

Khadidja BENSELAMA

Intitulé :

Détermination Des Charges Critiques De Flambement Des Plaques Composites

Soutenue le ……2015 devant le jury composé de :

Mr. ADDA BEDIA El abbas	Professeur	UDL-SBA	Président de jury
Mr. ELMEICHE Noureddine	MCA	U.Mascara	Directeur de thèse
Mr. MERADJAH Mustapha	MCA	UDL-SBA	Examinateur
Mr. FEKRAR A.E.K	MCA	UDL-SBA	Examinateur
Mr. BERRABAH Hamza Madjid	MCA	C.U.de Rélizane	Examinateur
Mr. HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	U.Mascara	Examinateur
Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Invité

2015-2016

« Dans les sciences, le chemin est plus important que le but.les sciences n'ont pas de fin ».

REMERCIEMENTS

*Ce travail de doctorat a été réalisé au sein du laboratoire **LMH** « laboratoire de matériaux et hydrologie » de l'université Djillali Liabes de SIDI BEL ABBES.*

*Je remercie tout d'abord Mr. le professeur **ADDA BEDIA EL ABBAS** pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire et me donner ce sujet de recherche et m'a également fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je salue en lui ses qualités humaines et scientifiques. Il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude et je lui exprime ma plus sincère reconnaissance.*

*J'exprime aussi toute ma reconnaissance à Mr. **EL MEICHE NOUREDDINE** Maitre de Conférence à l'université de Mascara pour son encadrement pendant mes années de thèse, Il a mis en place les conditions propices au bon déroulement de mes travaux et a su me prodiguer des inestimables réflexions et je le remercie pour ses multiples conseils.*

*Ma gratitude va tout autant aux membres du jury Mr. **MERADJAH MUSTAPHA** maitre de conférences et chef de département de génie civil à la faculté de technologies, Mr. **FEKRAR AEK** maitre de conférences à la faculté de technologies, Mr. **BERRABAH HAMZA MADJID** maitre de conférences au centre universitaire de Rélizane, Mr. **HOUARI MOHAMED SID AHMED** maitre de conférences à l'université de Mascara pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.*

*En fin mes remerciements vont également à l'ensemble des membres du laboratoire LMH et mes enseignants de la faculté de technologies en particulier Mr **TOUNSI ABDELOUAHED** Professeur à l'université Djillali Liabes.*

Je ne pourrais jamais remercier suffisamment mes très chers parents qui ont su toujours être à mes cotés, ma sœur et son mari, mes adorables nièces Hinda et Wissal, mes frères, ma belle sœur, toute la famille et mes amis qui m'ont accordé un soutien moral sans limite ; ce manuscrit leur est dédié.

RESUME:

Le présent travail vise à mettre en œuvre une démarche analytique qui traite le comportement en flambement des structures en matériaux composites hybrides reposant sur fondations élastiques de type Winkler-Pasternak sous chargement uni et biaxials.

L'instabilité par flambement des plaques stratifiées est un phénomène très complexe, Les charges du flambement des plaques en matériaux composites peuvent être critiques et elles doivent être proprement représentées par variété de modèles de structures afin de prévoir leur comportement. Pour étudier leur comportement vis-à-vis le flambage nous avons employé un modèle simplifié. La formulation a été basée sur la théorie d'ordre élevé en adoptant un champ de déplacement à quatre variables ; nous présentons ensuite la formulation du problème d'instabilité en élisant le principe de l'énergie potentielle pour la construction des équations d'équilibre. La plaque utilisée pour cette étude est simplement appuyé soumise à différentes conditions de chargement (des charges uni-axiales et bi-axiales) et reposant sur des fondations élastiques de type Winkler –Pasternak. Les solutions analytiques sont obtenues en utilisant la technique de Navier .L'influence des différents paramètres géométriques et matériels sont entrepris pour calculer les charges critiques de flambement .Les résultats numériques obtenus par l'analyse actuelle du flambement des plaques stratifiées sont comparés à ceux trouvés dans la littérature.

Mots clés : *flambement, théorie d'ordre élevé, plaque stratifiée, matériaux composites et hybrides, fondation élastique.*

ABSTRACT:

The present work aims at operating an analytical approach of analysis of buckling behaviour in hybrid composite materials resting on elastic foundation Winkler Pasternak under uni-biaxial loads.

The instability by buckling of laminated plates is very complex phenomenon, the buckling loads in composite plates can be critical and they must be cleanly represented by variety of models of structures to predict their behaviour. To study their buckling behaviour, we used a simplify model. The formulation was based on the high order theory with a displacement field in only four variables .we present then the formulation of the instability problem adopting the potential energy principle for the construction of the governing equation. The plate used in this study is simply supported and subjected to various loading conditions and resting on elastic foundation. The analytical solutions are obtained by using the navier technique. The influence of various geometrical and material parameters are undertaken to calculate the critical buckling loads. The numerical results obtained by the current analysis of laminated plates buckling are compared with those in the literature.

Key words: *buckling, high order theory, laminated plate, hybrid material, elastic foundation.*

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES

« Résultats, Validation Et Interprétations »

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE :

La recherche de nouveaux matériaux occupe une place importante dans l'histoire de la technologie ; La production de matériaux composites augmente de plus en plus. En particulier, Les stratifiés composites trouvent un grand intérêt dans une variété de structures complexes et d'applications technologiques grâce à leurs performances ; aptes à remplir plusieurs fonctions, sans doute dans les domaines des lanceurs, navettes spatiales et satellites que le problème de gain de performances, baisse du cout de fabrication.

Une plaque composite utilisée comme élément structural est souvent soumise à différents types de chargement tel que la compression, la flexion qui peuvent causer le flambement. La plupart des investigations entreprises sur les plaques stratifiées sont dévouées à la détermination des contraintes des déformations ou des déplacements d'origines flexionnelles .L'analyse des structures au comportement d'instabilité est moins fréquente en dépit de l'importance du phénomène mis en évidence par la rupture en service de nombreuses constructions monumentales. Un cumul de connaissances et de théories des stratifiées ont été développées dans cet axe pour étudier le comportement en flambement des plaques composites, la connaissance du comportement critique s'avère alors nécessaire dans le dimensionnement de ces plaques.

Cette thèse s'inscrit dans le même registre ; en effet certains aspects liés au phénomène du flambement demeurent jusqu'à présent inexplorés. Il est donc question de proposer de nouveaux modèles pouvant tenir compte de tous les paramètres tel que le cisaillement, l'épaisseur de la plaque, la nature du matériau, les caractéristiques du composite et le mode de chargement, et ce afin d'évaluer les charges critiques de flambement ou encore trouver un moyen de réduire le risque d'instabilité.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature comme Das (1963), Harik and Ekambaram (1988), Bao et al. (1997), Hwang et Lee (2006) qui ont étudié le flambement des plaques orthotropes en se basant sur la théorie classique des plaques (CPT), Phan et Reddy (1985) qui ont utilisé la théorie du premier ordre (FSDT), le modèle de Noor (1975) et (LW3D) de Setoodeh (2004) qui ont proposé un modèle basant sur l'élasticité tridimensionnelle. Akavci (2007) a appliqué une théorie d'ordre élevé avec cinq variables pour déterminer les charges critiques. Ces dernières années Elmeiche et al. (2011), Bourada et al. (2012), Tounsi et al. (2013), Nedri et al. (2014) et Fekrar et al. (2014) et beaucoup d'autres chercheurs ont développé la théorie raffinée à quatre variables pour étudier le comportement en flambement, flexion et cisaillement pour des plaques FGM et composites.

En plus, Il y a eu un nombre considérable d'études sur les plaques reposant sur des fondations élastiques Phan (1985) ; dans certaines des analyses, un paramètre simple k0 est utilisé pour décrire le comportement de fondation Winkler (1867), ensuite il a été présenté par El-Zafrany (1995), Saha (1997), Lee (1998), Utku (2000) and Gupta (2006).La fondation est modelée par des ressorts verticaux discrets et ne prend pas en compte les déformations de cisaillement transversal. Certains chercheurs ont modélisé la fondation à deux paramètres différents ; un de ces modèles est le modèle type Pasternak. Ce deuxième paramètre prend en compte l'effet de l'interaction entre les points de cisaillement dans la fondation, ce modèle est présenté par Xiang et al. (1996), Omurtag and Kadioglu (1998), Hui-Shen et al. (2003), Malekzadeh and Karami (2004), Benyoucef et al. (2010) et Ait Atman et al. (2010).

Ce travail concerne l'analyse de comportement des structures composites et hybrides en flambement. Cette analyse est basée sur l'utilisation d'une théorie à quatre variables avec un champ de déplacement trigonométrique et hyperbolique .Le contexte de ce travail est ciblé sur le calcul des charges critiques de flambement en tenant compte du cisaillement transverse qui pourrait apparaitre dans les plaques composites soumises à de fortes contraintes. La problématique majeure est de pouvoir prendre en compte ce phénomène dans le dimensionnement dans le but de mieux évaluer les variations mécaniques subies, pouvant être prépondérantes dans certaines applications.

Cette thèse s'article autour de quatre chapitres : Hormis cette introduction générale, ce mémoire est organisé en chapitres détaillés ci-dessous. Chaque chapitre contient l'état de l'art du contenu évoqué, le développement de la formulation (avec l'utilisation d'équation mathématique, de tableaux et l'illustration), des exemples d'applications numériques, des conclusions partielles de chaque chapitre et pour finaliser les références bibliographiques utilisées.

Le premier est exclusivement réservé aux notions du phénomène de flambement avec les différentes définitions. L'objectif est de présenter un aperçu sur les connaissances théoriques en rapport avec le thème de cette recherche.

Dans le deuxième chapitre, on trouve une contribution aux matériaux composites et hybrides, leurs principaux constituants en parlant sur leurs utilisations dans les différents domaines de la technologie.

Le troisième chapitre et le principal objectif de cette thèse est de trouver, grâce à de nouveaux modèles, un modèle raffiné proposé pour le calcul des charges critiques de flambement des plaques composites en réduisant les démarches de calcul et le nombre d'équation , il constitue une synthèse sur le phénomène d'instabilité des plaques qui est le flambement. Dans ce paragraphe on a fait une exposition des principaux travaux antérieurs réalisés dans ce sujet avec rappel des théories des plaques stratifiées en allant de la théorie classique ensuite les différentes théories d'ordre élevé.

Le dernier chapitre est consacré à la validation du modèle utilisé pour l'analyse du flambement des plaques en matériaux composites hybrides sous l'effet de différents paramètres notamment l'hybridation du matériau, la fondation élastique, la géométrie et le mode de chargement. Les résultats trouvés ont été comparés avec d'autres modèles analytiques et numériques trouvés dans la littérature étudiant le même phénomène.

En fin, ce travail se termine par une conclusion générale en présentant des perspectives mettant une valeur aux résultats obtenus.

***<u>CHAPITRE I</u>*:**

PHENOMENE DE FLAMBEMENT :

« NOTIONS GENERALES »

I.1 INTRODUCTION

De jour en jour, l'utilisation des matériaux composites prend de l'ampleur vis-à-vis des matériaux traditionnels, dans pratiquement tous les secteurs industriels et plus spécialement dans l'aérospatial et l'aéronautique. Souvent, les structures en matériaux composites sont sujettes à de sérieux chargements mécaniques sévères. Ces derniers, peuvent engendrer des contraintes importantes capables de causer leur instabilité.

Le flambement de plaques stratifiées a fait l'objet d'études depuis plus d'un siècle. Des solutions exactes et approximatives pour des plaques rectangulaires ont été trouvées. Il existe de nombreuses solutions exactes de plaques minces isotropes élastiques linéaires ; qui ont été traitées par Timoshenko (1961). Les propriétés mécaniques des matériaux composites sont souvent estimés comme orthotropes. Le flambement des plaques orthotropes a fait l'objet de nombreuses recherches dans le passé. Selon Vakiener, Zureick, et Will (1991), le premier traitement de la stabilité d'une plaque orthotrope avec un bord libre a été fait par Trayer. Une solution basée sur une méthode énergétique a été présenté pour la stabilité d'une bride articulée élastiquement avec des propriétés orthotropes. Ashton et Waddoups (1969) ont déterminé les charges critiques de flambement pour le cas général de plaques anisotropes. En utilisant la méthode approchée de Rayleigh-Ritz, ils ont présenté des techniques de résolution pour la détermination de la charge critique de flambement de plaques rectangulaires stratifiées anisotropes. Ashton et Whitney (1970) ont formulés des équations approximatives de la charge de flambement pour plaques stratifiées. Ils ont traité le cas de stratifié spécialement orthotrope comme étant équivalent à celui d’une plaque orthotrope homogène.

Les solutions exactes des plaques orthotropes simplement appuyées sur tous les bords ont été obtenues et compilées par Whitney .Bao, Jiang et Roberts (1970) ont utilisé la méthode des éléments finis pour la détermination de la charge critique de flambement de plaques orthotropes rectangulaires. Ils ont constaté, pour les plaques simplement appuyées sur tous les cotés, que les résultats obtenues sont presque confondus avec les solutions exactes. Veres et Kollar (2001) ont présentés sous forme de formules approximatives pour le calcul des plaques orthotropes rectangulaires avec des bords encastrés et/ou simplement appuyés. Ils ont utilisé ces formules et la méthode des éléments finis afin de les comparer aux solutions exactes obtenues par Whitney, ils ont trouvés que les formules surestiment la charge de flambement avec des valeurs qui peuvent aller jusqu'à 8%.

Khdeir (1989) a étudié la stabilité de plaques stratifiées équilibrées antisymétriques.
Khdeir a utilisé une solution généralisée de type Levy pour la détermination des charges critiques de flambement de plaques de forme rectangulaire. Il a montré l'influence de couches, l'orientation des plis du stratifié et le type de conditions aux limites sur le comportement au flambement des plaques composites.

Dans ce chapitre, nous allons étaler les notions générales du phénomène de flambement des plaques composites avec les principales étapes de résolution d'équation.

I.2 NOTIONS GENERALES DE FLAMBEMENT STATIQUE

Le flambement est un phénomène mécanique équivalent à une sollicitation composée de compression et de flexion. L'effort à partir duquel se manifeste les grandes déformations allant jusqu'à l'instabilité est appelé *l'effort critique de flambement*.

Cette partie est consacrée à une présentation générale du phénomène de flambage des structures. Nous présentons brièvement le formalisme général du flambage statique, nous parlons également de l'effet des défauts géométriques et des différentes approches de la stabilité. Ces concepts sont très clairement définis dans Koiter (1974).

Le flambage est un phénomène d'instabilité. Il peut tout particulièrement être observé pour des structures élancées (faible raideur de flexion) soumises à des contraintes de compression, au-delà d'une certaine valeur, la charge appliquée conduit à un important changement de forme de la structure qui se traduit par l'apparition brutale ou progressive de plis ou d'ondulations. Ce changement de configuration, lié aux effets des non linéarités géométriques, peut s'accompagner ou non de plasticité. La notion de flambage recouvre deux notions distinctes que nous allons préciser celle de bifurcation et celle de point limite.

Nous considérons une structure soumise à un chargement l entraînant un déplacement caractéristique d. Dans un premier temps, sous l'effet d'un chargement croissant, la structure passe par une succession d'états d'équilibre stables appelé chemin d'équilibre fondamental ou branche primaire (OA) (***Fig. I.1, I.2***).

I.2.1. Flambage par bifurcation :

Si suivant le domaine d'appartenance de (λ, δ), cette structure peut admettre plusieurs familles (λ, δ) solutions des équations d'équilibre, il y aura flambage par *bifurcation* au point A et la charge λ correspondante est dite *charge critique* (***Fig. I. 1***).

Au-delà du point A, la branche secondaire peut être stable ou instable. En revanche, la solution qui correspondait à l'état fondamental devient instable (branche AA' ***Fig. I. 1***).

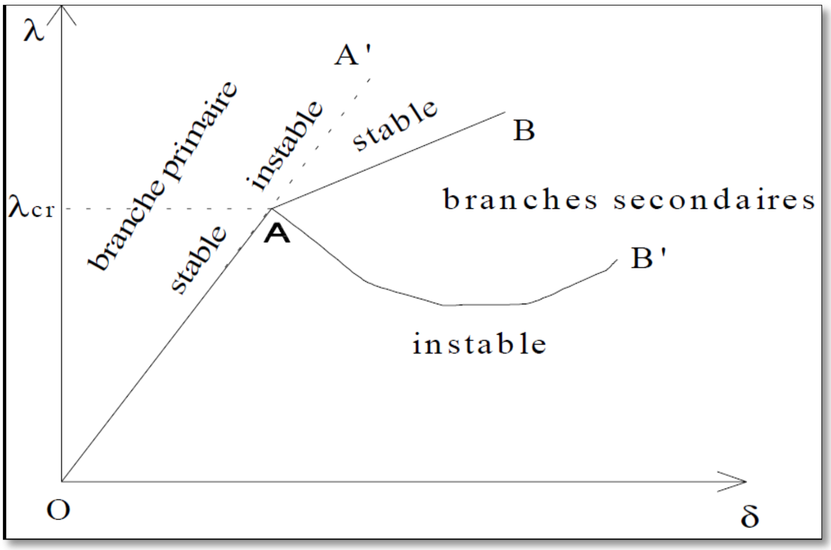


Fig. I. 1 : Schéma stabilité chemin d'équilibre

Le cas d'une branche secondaire instable (AB', flambage par *bifurcation* avec chute de rigidité) peut être illustré par une coque mince cylindrique circulaire, sans défaut, sous compression axiale. Les flambages par *bifurcation* sans chute de la rigidité (branche AB) peuvent se rencontrer dans le cas de structures sans défaut telles que :

- la poutre en compression axiale (comportement élastique).
- l'anneau circulaire en compression radiale.
- la plaque rectangulaire en compression longitudinale.

I.2.2. Flambage par point limite:

Lorsque la structure n'admet qu'une seule famille (λ, δ) solution des équations d'équilibre, le point A est appelé point limite (***Fig. I. 2***). La courbe (λ, δ) présente alors un maximum au point A pour lequel la rigidité de la structure s'annule. La figure ***Fig. I. 2*** illustre deux courbes typiques de flambage par point limite.

Le cas de la ***Fig. I. 2. b*** est représentatif d'une calotte sphérique sous pression externe (phénomène de claquage puis retour à un état stable).

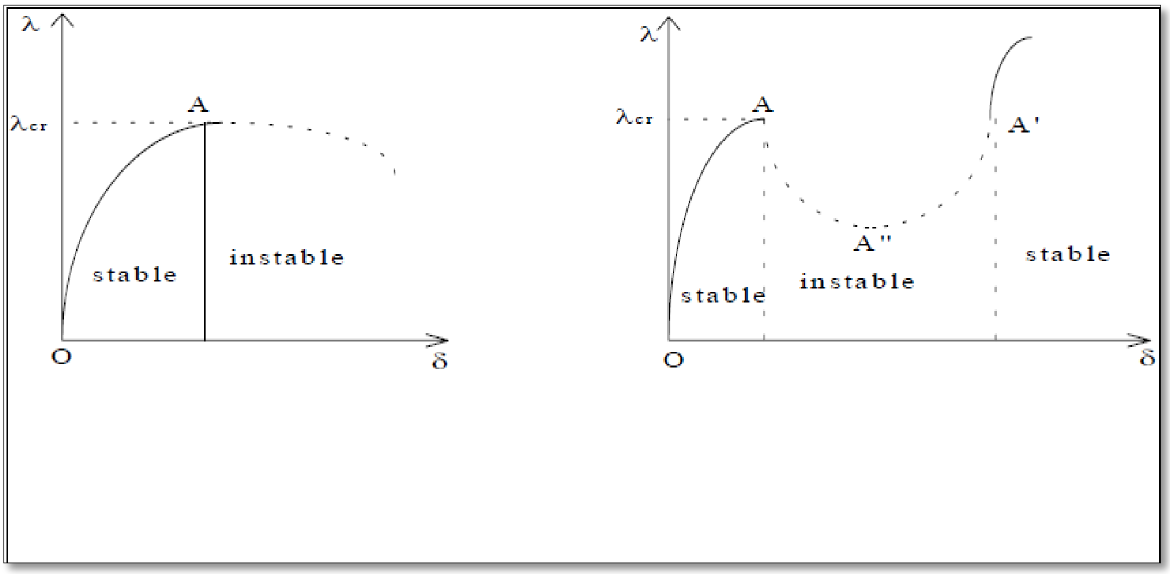


Fig. I. 2 (a et b) Schéma flambage par point limite

Le problème revient donc dans tous les cas à chercher la charge à partir de laquelle la branche fondamentale d'équilibre devient instable ou de stabilité indéfinie.

I.2.3. Flambage élastique linéaire - critères de stabilité

Il existe plusieurs critères de stabilité (critère de *Liapounov*, le critère minimum de l'énergie potentielle *Koiter* (1982) ou le critère de la variation de l'énergie potentielle totale), nous nous contenterons ici d'en présenter deux.

Le premier critère de stabilité est celui défini par *Liapounov Pig* (1990), il est basé sur l'existence d'une borne délimitant la zone de stabilité autour de la position d'équilibre.

Soit une norme définie ($||x|| = \rho$) comme la distance entre la configuration d'équilibre $x = 0$ et la configuration à l'instant t. Si l'on applique une perturbation à l'instant $t = 0$ définie par $x(0) = x_0$ alors la configuration d'équilibre $x = 0$ est stable si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \rangle 0, \exists \delta(\varepsilon) \rangle 0 \text{ Tel que pour } \rho(x) \leq \varepsilon, \forall t \rangle 0 \rho_0 = \rho(x_0) \leq \delta(\varepsilon) \tag{I.1}$$

Nous pouvons noter que la stabilité d'un équilibre est un problème dynamique alors qu'un équilibre est un problème statique. En outre ce critère dépend du choix de la norme ρ et de la distance ρ_0.

Le second critère est un critère énergétique basé sur la variation de l'énergie potentielle totale. Il s'applique à des systèmes conservatifs : « une structure est dans une configuration d'équilibre stable si et seulement si l'accroissement de l'énergie potentielle totale pour tout déplacement cinématiquement admissible suffisamment petit est positif ».

Considérons un système en équilibre stable (énergie potentielle totale minimale) et u_0 le champ de déplacement initial associé au niveau de chargement λ. On applique une petite perturbation cinématiquement admissible ηu, nous avons alors :

$$u = u_0 + \eta u \tag{I.2}$$

L'énergie potentielle totale correspondante s'écrit :

$$w = w_0 + \delta w + \frac{1}{2}\eta^2\delta^2 w + \frac{1}{3!}\eta^3\delta^3 w \tag{I.3}$$

Avec w0 : énergie potentielle totale du système non perturbé.

La variation de l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Delta w = w - w_0 = \delta w + \frac{1}{2}\eta^2\delta^2 w + \frac{1}{3!}\eta^3\delta^3 w \tag{I.4}$$

Le système est en équilibre donc $\delta w = 0$.

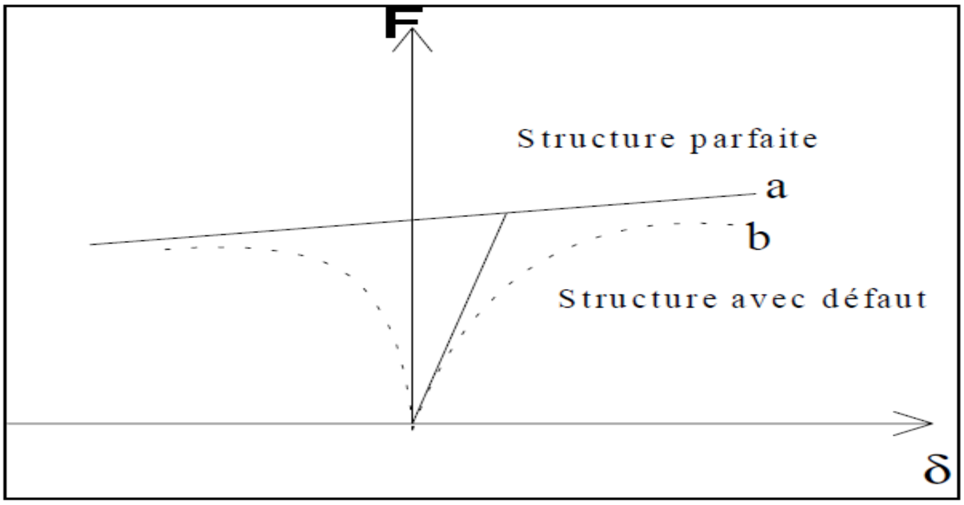
La variation seconde $\delta^2 w$ permet de définir la stabilité de l'équilibre (en négligeant les termes d'ordre supérieur car la perturbation est supposée petite) :

- ✓ si $\delta^2 > 0$ l'équilibre est jugé stable.
- ✓ si $\delta^2 < 0$ l'équilibre est jugé instable.
- ✓ si $\delta^2 = 0$ l'équilibre est jugé neutre et la charge correspondante est appelée charge critique d'EULER λ_E, le mode correspondant est le mode d'EULER (si l'on considère l'hypothèse des petits déplacements).

I.2.4. Effet des défauts

A partir des toutes premières études sur le flambage, il est apparu très clairement qu'un calcul élastique linéaire conduisait à des charges critiques supérieures (parfois d'un facteur très important) aux charges critiques expérimentales. Cette différence provient d'un ensemble de facteurs (défaut de chargement, défaut géométrique, caractéristiques mécaniques du matériau...) qui empêchent d'avoir expérimentalement une étude sur une structure parfaite.

L'un des premiers à tenir compte des défauts géométriques fût Koiter (1974). Dans le cas des défauts géométriques le comportement avant *bifurcation* est généralement non linéaire. Cette non linéarité provient des flexions importantes provoquées par les défauts géométriques, elle entraîne un changement dans la réponse de la structure qui au lieu de suivre le chemin d'équilibre (a) des structures parfaites (***Fig. I. 3.***) suit un autre chemin (b).



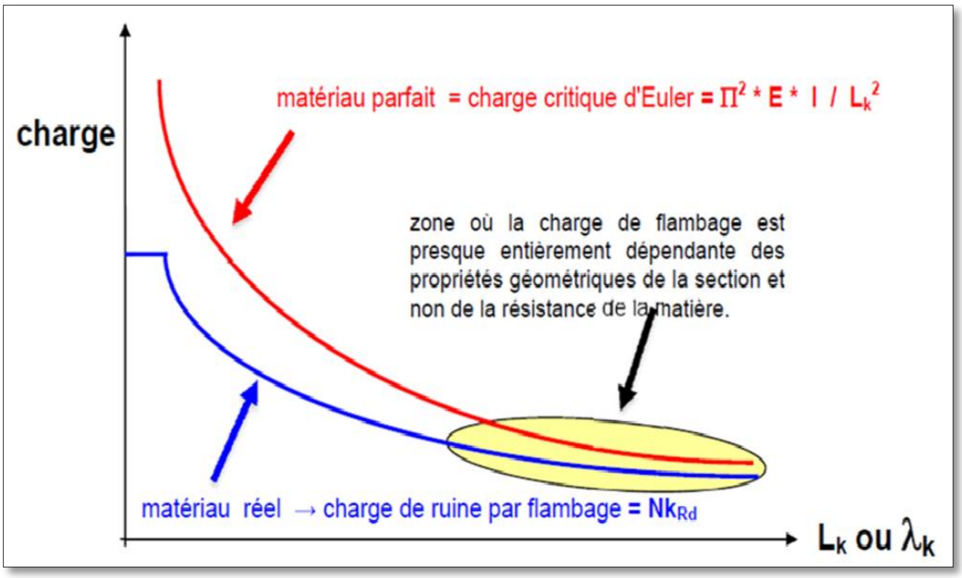


Fig. I. 3. Effet d'un défaut géométrique

I. 3. RELATIONS FONDAMENTALES TENANT COMPTE DU FLAMBEMENT

Pour prendre en compte le phénomène de flambement, il est donc nécessaire d'écrire les équations des plaques en tenant compte de la déformation latérale, c'est-à-dire en considérant pour chaque point de la structure les coordonnées après déformation, contrairement à la théorie initiale. Nous établissons ces équations en considérant directement les résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque de côtés d x et d y (***Fig. I. 4.***).

La déformée latérale dans le plan (x, z) sous l'action de la résultante Nx est schématisée sur la ***Fig. I. 5.*** Il en résulte que la composante suivant z de la charge Nx, exercée sur l'élément de plaque, est pour de faibles déformations :

$$\frac{1}{dx\,dy}\left[\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}dx\right) - N_x\,dy\,\frac{\partial w_0}{\partial x}\right] \qquad (I.5)$$

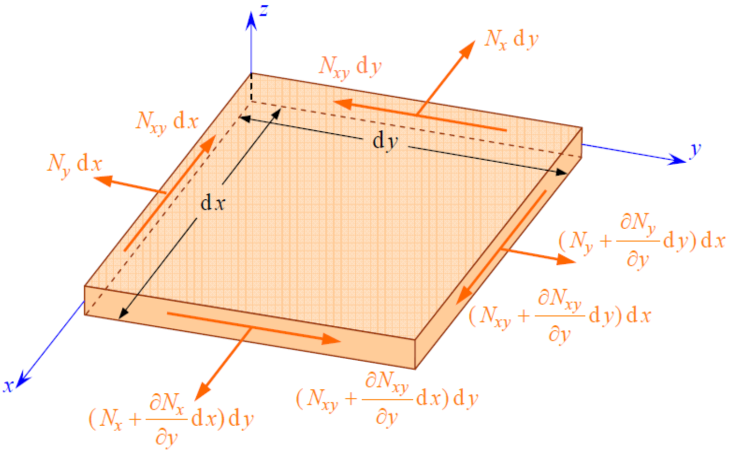


Fig. I. 4. Résultantes en membranes exercées sur un élément de plaque (Berthelot 2005)

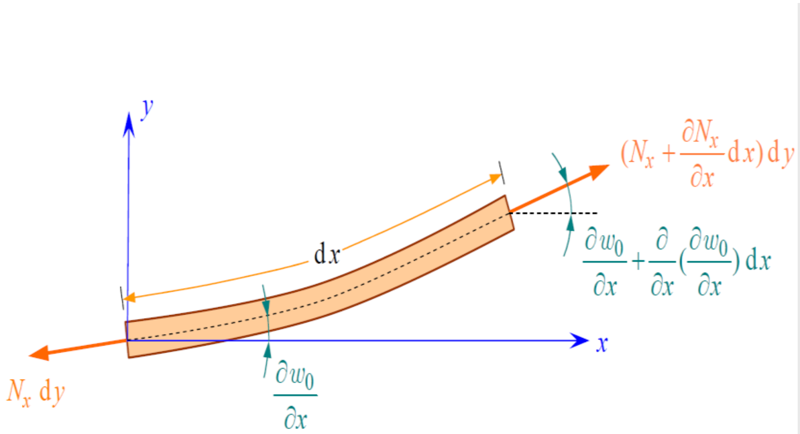


Fig. I. 5. Résultantes en membrane s'exerçants sur un élément de plaque déformée (Berthelot 2005)

En se limitant aux termes du deuxième ordre, la résultante par unité de surface de plaque dans la direction z est :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{I.6}$$

De la même manière, la composante suivant z due à la résultante Ny est :

$$N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{I.7}$$

La composante suivant z due à la résultante en cisaillement Nxy peut être évaluée à partir du schéma de la figure ***Fig. I. 6.*** Elle s'exprime suivant :

$$\frac{1}{dx\,dy}\left[\begin{array}{l}\left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)dx \\ + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}dy - N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}dx\end{array}\right] \tag{I.8}$$

Ou en se limitant aux termes du deuxième ordre :

$$2\,N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{I.9}$$

En regroupant les expressions (I.6), (I.7) et (I.9), la composante totale suivant z s'écrit :

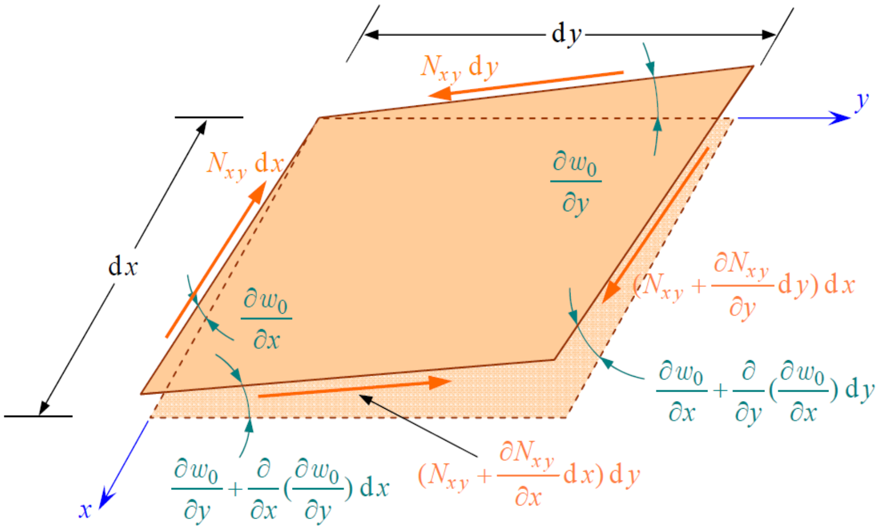


Fig. I. 6. Résultantes de cisaillement en membrane s'exerçants sur un élément de plaque déformée (Berthelot 2005)

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\,N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial y}\left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right) \tag{I.10}$$

Les équations des plaques (1) et (2) (ANNEXE) montrent que les deux derniers termes de l'expression précédente sont nuls dans le cas de problèmes statiques et du troisième ordre dans le cas de problèmes dynamiques. Il en résulte que la composante (I.10) suivant z se réduit à :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\, N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{I.11}$$

Les équations des plaques prenant en compte la déformation latérale sont alors obtenues en introduisant la composante en z dans les équations (1) (ANNEXE). Soit :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\, N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0
\end{gathered} \tag{I.12}$$

Ces équations peuvent être également écrites en éliminant les résultantes de cisaillement sous la forme :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\, N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{I.13}$$

I. 4. FORMULATION ENERGETIQUE DU PROBLEME DE FLAMBEMENT :

Dans le cas où l'on tient compte de la déformation latérale, les actions exercées sur le stratifié résultent des charges transverses q exercées sur les faces inférieure et supérieure du stratifié, et des charges en membrane. La variation du travail des actions exercées sur le stratifié s'écrit donc :

$$\delta W = \delta W_f + \delta W_m \tag{I.14}$$

Où la variation W_f s'écrit :

$$W_f = -\iint q \delta w_0 \, dxdy \tag{I.15}$$

La fonction énergie W_m des actions en membrane s'exprime suivant :

$$W_m = -\iint \left(N_x^i \varepsilon_{xx}^i + N_y^i \varepsilon_{yy}^i + N_{xy}^i \gamma_{xy}^i \right) dxdy \tag{I.16}$$

Où $\varepsilon_{xx}^i, \varepsilon_{yy}^i, \gamma_{xy}^i$ sont les déformations en membrane résultant de la flèche ω_0 .

Ces déformations sont déduites des expressions générales (3) (ANNEXE), incluant les grandes déformations. Dans le cas où l'on tient compte seulement de grandes déformations latérales, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 = \varepsilon_{xx}^0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 = \varepsilon_{yy}^0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} = \gamma_{xy}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}
\end{aligned} \tag{I.17}$$

Il en résulte que les déformations en membrane dues à la déformation latérale s'expriment

suivant : $\varepsilon_{xx}^{'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \qquad \varepsilon_{yy}^{'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \qquad \gamma_{xy}^{'} = \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}$ (I.18)

Et l'énergie W_m s'écrit :

$$W_m = -\frac{1}{2}\iint \left(N_x^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + N_y^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}^i \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dxdy \tag{I.19}$$

La variation du travail des actions en membrane s'exprime finalement en prenant la variation de (I.19), soit :

$$\delta W_m = -\iint \left(N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \delta w_0 \, dxdy \tag{I.20}$$

Les formulations vibrationnelles du problème de flambement sont déduites des relations de la variation des travaux virtuels : $\delta U = 0$ dans le cas de problèmes statiques et l'introduction du facteur temps (t) dans le cas de problèmes dynamiques. Elles s'écrivent ici :

Cas de problèmes statiques :

$$\delta(U_d - W_f - W_m) = 0 \tag{I.21}$$

Cas de problèmes dynamiques :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(U_d - W_f - W_m - Ec)dt = 0 \tag{I.22}$$

I. 5. FLAMBEMENT DE PLAQUES ORTHOTROPES SOUMISES À UNE COMPRESSION BIAXIALE

I. 5.1. Expressions générales

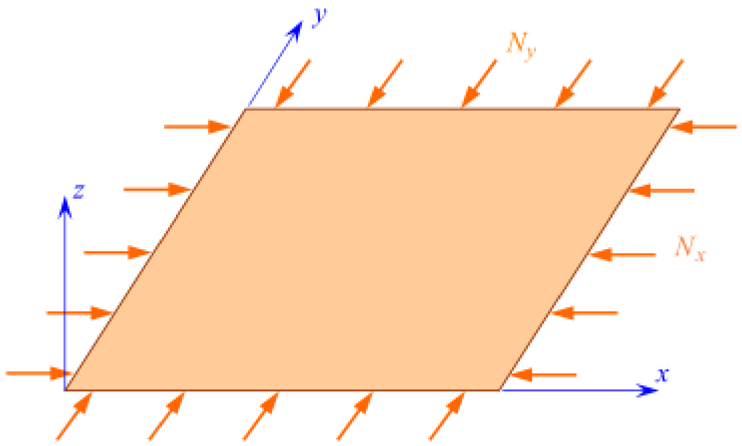


Fig. I. 7. Plaque rectangulaire soumise à une compression biaxiale.

Nous considérons (***Fig. I. 7.***) une plaque rectangulaire en appuis simples sur ses quatre côtés, constituée d'un stratifié orthotrope. Cette plaque est soumise à une compression uniforme sur chaque côté, de résultantes respectives N_x et N_y, aucune charge latérale n'étant exercée (q = 0). L'équation de flambement se déduit de l'équation (4) (ANNEXE), soit :

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = N_x\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{I.23}$$

Les conditions aux frontières s'écrivent :

— sur les côtés x = 0 et x = a :

$$\omega_0 = 0 \qquad M_x = -D_{11}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \tag{I.24}$$

— sur les côtés y = 0 et y = b :

$$\omega_0 = 0 \qquad M_x = -D_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \tag{I.25}$$

Les conditions sont satisfaites avec une flèche de la forme :

$$w_0(x,y) = A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \tag{I.26}$$

En reportant cette expression dans l'équation (I.23), nous obtenons :

$$\pi^2 A_{mn}\left[m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66} + n^4 R^4 D_{22}\right] = -A_{mn}(m^2 N_x + n^2 R^2 Ny)a^2 \tag{I.27}$$

Où R est le rapport longueur sur largeur de la plaque.

Une solution non nulle au problème de flambement conduit à l'expression des résultantes :

$$m^2 N_x + n^2 R^2 N_y = -\frac{\pi^2}{a^2}\left[m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22}\right] \tag{I.28}$$

Nous examinons le cas d'une compression uniforme sur chaque côté de la forme :

$$N_x = -N_0 \qquad N_y = -\alpha N_0 \tag{I.29}$$

Où N_0 est positif. L'expression (I.28) conduit à :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{a^2}\frac{\left[m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22}\right]}{m^2 + \alpha n^2 R^2} \tag{I.30}$$

La charge critique de flambement correspond aux valeurs de *m* et *n*, conduisant aux valeurs les plus faibles de N_0. Nous étudions divers types de chargements.

I. 5.2. Compression uniaxiale

Dans le cas d'une compression uniaxiale suivant x, nous avons α = 0, et l'expression (I.30) devient :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{m^2 a^2}\left[m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22}\right] \tag{I.31}$$

Pour m donné, la plus faible valeur de N_0 est obtenue pour n = 1, soit :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{m^2 a^2}\left[m^4 D_{11} + 2m^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}\right] \tag{I.32}$$

L'expression de la charge critique dépend du rapport longueur sur largeur de la plaque. En effet, nous avons :

$$\Delta N_0 = N_0(m+1) - N_0(m) = \frac{\pi^2}{a^2}\frac{2m+1}{m^2(m+1)} D_{22}\left[\frac{D_{11}}{D_{22}} m^2 (m+1)^2 - R^4\right] \tag{I.33}$$

La valeur de ΔN_0 change de signe pour :

$$R = R_m = \sqrt{m(m+1)}\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4} \tag{I.34}$$

Il en résulte que :

- Si $R \leq Rm$: $N_{cr} = N_0\,(m)$ (I.35)
- Si $R \geq Rm$: $N_{cr} = N_0\,(m+1)$ (I.36)

Ce qui conduit pour les premières valeurs de m à :

✓ Pour $R \leq \sqrt{2}\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4}$:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[D_{11} + 2R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}\right] \tag{I.37}$$

✓ Pour $\sqrt{2}\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4} \leq R \leq \sqrt{6}\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4}$:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{4a^2}\left[16\, D_{11} + 8\, R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}\right] \tag{I.38}$$

✓ Pour $\sqrt{6}\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4} \leq R \leq \sqrt{12}\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4}$:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{9a^2}\left[81\,D_{11} + 18\,R^2(D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}\right] \qquad (I.39)$$

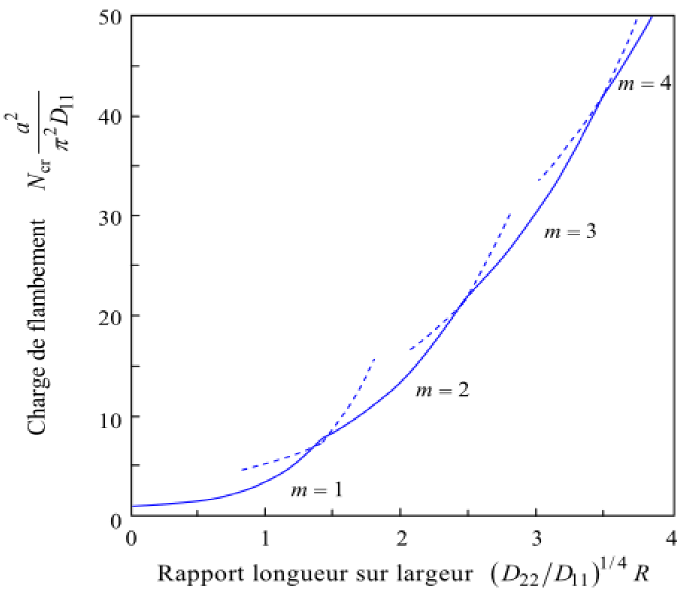


Fig. I. 8. Variation de la charge critique de flambement d'une plaque en compression uniaxiale, en fonction du rapport longueur sur largeur de la plaque.

La variation de la charge critique de flambement en fonction du rapport longueur sur largeur de la plaque est reportée sur la ***Fig. I. 8.*** pour :

$$D_{11} = D_{22} \qquad\qquad D_{12} + 2D_{66} = 0.7D_{22} \qquad (I.40)$$

Pour les valeurs (I.34) du rapport longueur sur largeur, deux modes de flambement, conduisant à la même valeur de la charge critique, sont possibles :

$$w_0 = A_{m1}\sin m\pi\frac{x}{a}\sin\pi\frac{y}{b} \qquad (I.41)$$

$$w_0 = A_{m+1,1}\sin(m+1)\pi\frac{x}{a}\sin\pi\frac{y}{b} \qquad (I.42)$$

I. 5.3. Plaque carrée soumise à une compression biaxiale

Dans le cas d'une plaque carrée soumise à une compression biaxiale de valeurs identiques sur les deux côtés, nous avons α = 1 et R = 1. L'expression (I.30) s'écrit :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{(m^2 + \alpha n^2)a^2}\left[m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 D_{22}\right] \tag{I.43}$$

Cette expression montre que, pour D11 ≥ D22, la plus faible valeur de N0 est obtenue pour $m = 1$, soit :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{(1+n^2)a^2} D_{22}\left[\frac{D_{11}}{D_{22}} + 2n^2\left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}}\right) + n^4\right] \tag{I.44}$$

Pour $n = 1$:

$$N_0(1) = \frac{\pi^2}{a^2} D_{22} \frac{1}{2}\left[\frac{D_{11}}{D_{22}} + 2\left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}}\right) + 1\right] \tag{I.45}$$

Pour $n = 2$:

$$N_0(2) = \frac{\pi^2}{a^2} D_{22} \frac{1}{5}\left[\frac{D_{11}}{D_{22}} + 8\left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}}\right) + 16\right] \tag{I.46}$$

La comparaison des expressions (I.45) et (I.46) montre que dans le cas où :

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} \leq 2\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + 9 \tag{I.47}$$

La charge critique correspond à $n = 1$, soit :

$$N_{cr} = N_0(1) \tag{I.48}$$

Et le mode de flambement est :

$$w_0 = A_{11} \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{b} \tag{I.49}$$

Dans le cas où :

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} \geq 2\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} + 9 \tag{I.50}$$

La charge critique correspond à $n = 2$, soit :

$$N_{cr} = N_0(2) \tag{I.51}$$

Et le mode de flambement est :

$$w_0 = A_{12} \sin \pi \frac{x}{a} \sin 2\pi \frac{y}{b} \qquad (I.52)$$

I. 6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales notions et définitions du phénomène de flambement en exposant les équations fondamentales pour le calcul de la charge critique de flambement dans le cas des plaques stratifiées orthotropes soumises à des charges axiales.

CHAPITRE II:

« REVUE DE LA LITTERATURE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET HYBRIDES »

II. 1. INTRODUCTION

Les matériaux composites ont une longue histoire. Leurs origines sont connues par leurs fortes utilisations et tous les écrits historiques contiennent des références à certaines formes des matériaux composites .Dans le sens le plus large, il s'agit d'un matériau constitué de deux éléments de nature ou de structure différente.

La production de matériaux composites augmente de plus en plus bien que leur coût soit plus élevé que celui des matériaux traditionnels ils apportent par rapport à des produits concurrents des avantages importants : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme permettait d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la fatigue), mais aussi grâce à leurs propriétés mécaniques(résistance à la corrosion) ils renforcent également la sécurité grâce une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions, c'est sans doute dans les domaines des lanceurs, navettes et satellites que le problème de gain de masse est le plus crucial.

Le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place des outils permettant la modernisation de leur comportement mécanique et mieux le cerner. Ces matériaux dont l'emploi industriel ne cesse de s'étendre et se développe rapidement dans le monde possédant de très bonnes caractéristiques en début d'utilisation, ils sont en revanche très sensibles, au cours du temps à l'environnement extérieur et notamment aux contraintes et chargement excessif qui affaiblie leurs propriétés et leurs résistances.

Dans ce chapitre, nous présentons une revue bibliographique qui est devisée en trois parties. La première est consacrée aux matériaux composites à leur mode de synthèse et à différent propriétés (physique, mécanique optique et leurs comportements) ; on passe également en revue leurs principales applications dans le domaine de l'aéronautique : les ailes d'avion, les satellites …et dans le génie civil : armature pour béton, renforcement de structure, élément de structure de ponts et de couverture de grande portée, le domaine médical et sportif.

La seconde partie porte sur les phénomènes d'instabilité, d'endommagement et les mécanismes de rupture des matériaux composites.

La troisième partie est dédiée aux constituants des matériaux composites hybrides en donnant des exemples de construction hybride de graphite/époxy et du verre/époxy qui montrent l'effet de l'hybridation sur le comportement des composites.

II.2. CLASSIFICATION DES MATERIAUX COMPOSITES

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (***Fig. II.1***):

• **Composites à renforts de particules :**

Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

• **Composites à renforts de paillettes :**

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

• **Composites à renforts de fibres :**

Une fibre a une longueur bien supérieure aux dimensions de la section transversale. Ce type de composites peut être divisé selon les renforts : en fibres discontinues (courtes) ou en fibres continues (longues).

• **Composites stratifiés :**

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe *hybride du composite* comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

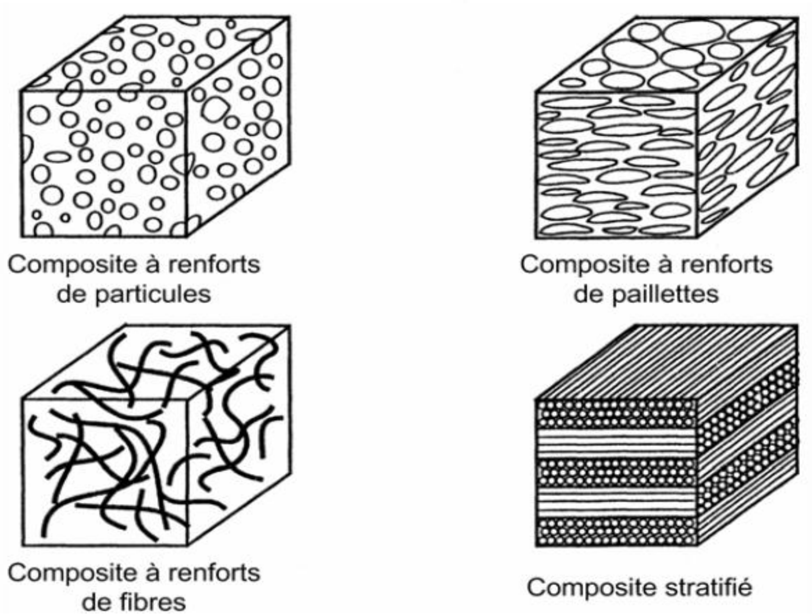


Fig. II.1 : Classification des matériaux composites.

Les matériaux composites peuvent également être classés par la nature de la matrice comme suit :

• **Composites à matrice polymérique :**

Les polymères sont caractérisés par une faible densité, une résistance mécanique relativement faible, et une grande déformation à rupture. Les avantages principaux sont le procédé de fabrication relativement mature et le poids faible. Ce type de composites a été développé surtout pour les applications aéronautiques où la réduction de poids est essentielle.

• **Composites à matrice métallique :**

Dans ces composites, des matériaux métallique comme l'aluminium et le titane sont renforcés par des renforts généralement non-métalliques, souvent des céramiques. De par la nature même du composite, les composites à matrice métallique ont des propriétés mécaniques meilleures ou plus adaptables au chargement que leurs matrices monolithiques. Leurs applications dans les moteurs d'automobile sont bien établies.

• **Composites à matrice céramique :**

Des matrices céramiques telles que le verre et le carbure de silicium (SiC) peuvent être associées aux renforts comme des métaux, le carbone, et des céramiques. Leur développement a pour but d'améliorer les propriétés mécaniques telles que ténacité et résistance au choc thermique des céramiques monolithiques. Ces composites sont utilisés dans des environnements sévères, par exemple les moteurs de fusées, les boucliers thermiques, ou les turbines à gaz.

II. 3. CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES

Dans la suite de la présentation, nous nous intéresserons uniquement aux composites à renfort de fibres longues et à matrices polymériques utilisés, dans la plupart des cas, dans l'industrie aéronautique. Ces matériaux seront parfois appelés « composites fibreux » ou même « composites » par simplicité.

Les propriétés mécaniques des composites fibreux sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la fibre, la matrice, ainsi que l'interphase. La résistance et la rigidité d'un composite sont assurées principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice. Cette dernière, quant à elle, réunit les fibres et donne la forme géométrique de la structure. La matrice sert également à transférer les efforts mécaniques entre les fibres et les protéger contre les environnements.

L'interphase est la zone créée par l'adhérence et la réaction entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice. La disponibilité d'un grand choix de fibres et de matrices permet de réaliser des composites ayant diverses propriétés. Nous présenterons rapidement quelques-uns des constituants les plus couramment utilisés.

II. 3. 1. Les fibres :

La rupture des matériaux hautes résistances ou hauts modules est généralement provoquée par la propagation des défauts. Les matériaux en forme de fibre sont intrinsèquement plus résistants à la rupture qu'en forme massive car la taille des défauts est limitée par le diamètre faible. Dans un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée principalement par les fibres. Par sa nature filamenteuse, la rupture de quelques fibres a pour résultat la redistribution du chargement sur les autres fibres, ce qui empêche la rupture catastrophique de la structure. Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes :

• **Fibres de verre**

La connaissance des matériaux composites fibreux à matrice de polymères est initialement basée sur des études des composites à fibres de verre. Ces fibres sont très répandues dans des applications basses performances ainsi que des applications hautes performances telle que les réservoirs de propulseurs de fusée. Leurs avantages incluent prix compétitif, disponibilité, et résistance élevée. Cependant, à cause de leur rigidité relativement faible, les fibres de verre sont progressivement remplacées par les fibres aramides ou les fibres de carbone dans les applications hautes performances.

• **Fibres de carbone**

Actuellement, les fibres de carbone sont le renfort le plus répandu pour les matériaux composites hautes performances. Deux avantages principaux de ces fibres sont leur fabrication plus adaptée à la production à grande échelle que d'autres fibres hautes performances et leurs excellentes propriétés mécaniques plus facilement transférables aux matériaux composites. Leur prix reste toutefois prohibitif pour les produits grand public.

• **Fibres aramides**

Ces fibres appartiennent à la famille des fibres polyamides aromatiques. Les versions commerciales disponibles incluent le Kevlar (nom déposé) et le Nomex (nom déposé). Elles possèdent une résistance élevée et une rigidité considérablement supérieure à celle des fibres de verre. La tolérance aux dommages est très bonne également. Leurs désavantages incluent une résistance en compression inférieure à celle des fibres de carbone et une adhésion relativement faible aux matrices.

II. 3. 2. Les matrices :

La matrice réunit les fibres par ses caractéristiques cohésive et adhésive. Elle maintient les fibres dans leur orientation et leur position prévues pour les charges appliquées. Ses autres rôles consiste à distribuer les efforts entre les fibres, fournir une résistance à la propagation de fissure, et fournir toutes les résistances en cisaillement du composite. La matrice détermine en général la limite de la température d'utilisation et l'environnement de service du matériau.
Il existe un grand nombre de polymères pouvant servir de matrice aux matériaux composites.

Ceux parmi les plus utilisés sont les suivants :

• **Les résines de polyester et de vinylester**

Ce sont les résines les plus utilisées de toutes les matrices, pour des applications commerciale, industrielle, et de transport. L'adhésion avec les fibres de verre est excellente. Les résines de polyester et de vinylester sont en majeure partie limitées aux applications basses performances à cause d'un problème d'adhésion avec les fibres hautes performances telles que fibres de carbone et fibres aramides.

• **Les résines thermodurcissables**

Lorsqu'une résine thermodurcissable est soumise à une élévation de température, il se crée des réactions chimiques au cours desquelles des liaisons covalentes sont formées entre les chaînes de molécules résultant en un réseau tridimensionnel. Le polymère final se présente sous la forme d'un corps solide et infusible. La polymérisation étant irréversible, ce matériau ne peut être mis en forme qu'une seule fois au moment de sa fabrication.

En règle générale, les matrices thermodurcissables possèdent une faible résistance à l'impact et une faible tenue en température. Les quatre types de résines couramment utilisées dans l'industrie aérospatiale sont les époxydes, les bismaléimides, les polyimides, et les phénoliques.

Les époxydes sont les plus utilisés pour la fabrication de structures aéronautiques. Ils possèdent une combinaison d'avantage quasiment imbattable : facilité de manipulation, flexibilité de traitement, de bonnes propriétés mécaniques, et un prix acceptable.

Leur application est cependant limitée à une température maximale comprise entre 80°C et 120°C.

• **Les résines thermoplastiques**

Les matrices thermoplastiques peuvent être divisées en deux classes selon leurs structures moléculaires : la structure semi-cristalline et la structure amorphe. Ces matrices sont caractérisées par la capacité d'être alternativement ramollies par chauffage au-dessus de la température de fusion ou de ramollissement et durcies par refroidissement. Dans ce cas, la modification de forme et le recyclage du composite sont envisageables. Ces résines possèdent des avantages sur les résines thermodurcissables telles qu'une ténacité améliorée, une déformation à rupture élevée, et une faible absorption d'humidité. De plus, elles ont une durée de stockage illimitée. Cependant, les thermoplastiques amorphes présentent des problèmes de résistance aux solvants organiques.

Parmi les résines thermoplastiques, on peut citer la résine polyéther éthercétone (PEEK), la polysulfure de phénylène (PPS), la polyétherimide (PEI), et la polyamide (PA).

II. 3.3. L'interphase :

La nature de l'adhésion fibre/matrice inclut le verrouillage mécanique, l'attraction électrostatique, l'enchevêtrement moléculaire, et la réaction chimique .

L'interphase est constituée de la surface de contact (interface) fibre/matrice ainsi que de la région d'un volume fini prolongée dans la matrice. Elle peut être considérée comme un constituant du composite car elle possède des propriétés chimiques, physiques, et mécaniques différentes de celles de la fibre et de la matrice. L'interphase assure la liaison fibre/matrice et permet le transfert des contraintes de l'une à l'autre sans déplacement relatif. Cependant, l'hypothèse que l'interphase n'a pas d'épaisseur est souvent faite pour faciliter l'analyse micromécanique des composites.

Les principales propriétés mécaniques de ces constituants sont indiquées dans le tableau suivant :

	Densité t/m^3	Module GPa	Coefficient de Poisson	$\sigma^{rupture}$ MPa	Allongement $\epsilon^{rupture}$	Prix €/kg
Renforts fibrés						
Verre	2,5	74 à 86	0,2 à 0,25	2500 à 3200	4,5 à 5	3 à 14
Aramide	1,45	130	0,4	2900	2,6	80
Carbone	1,8	230 à 390	0,3 à 0,35	2500 à 3200	0,6 à 1,3	80 à 160
Matrices résineuses						
Epoxyde	1,2	4,5	0,4	130	2	7 à 23
Polyester	1,2	4,0	0,4	80	2,5	3
Vinylester	1,15	3,3	0,4	75	4	4,5

Tab. II.1 : Propriétés mécaniques des constituants des composites fibre/résine

II. 4. CONSIDERATIONS D'USAGE DES MATERIAUX COMPOSITES

Dans la conception des produits, il est essentiel d'évaluer et comparer les composites avec les matériaux conventionnels pour bien choisir les matériaux. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont présentés ci-dessous.

II. 4. 1. Les avantages :

Les avantages les plus cités des matériaux composites incluent :

• **Propriétés mécaniques adaptables**

Un stratifié composite fibreux est un empilement des plis élémentaires qui se comportent ensemble comme un élément structural. Un pli élémentaire est anisotrope, ou orthotrope dans la plupart des cas, avec la résistance et la rigidité dans la direction des fibres beaucoup plus élevées que dans d'autres directions. Il faut alors associer différentes orientations de fibres afin d'obtenir un stratifié capable de résister à diverses sollicitations.

Un avantage principal du stratifié composite est que les plis élémentaires peuvent être orientés de telle façon que la résistance dans une direction donnée corresponde aux chargements prévus. La part de matériau dans des directions non-sollicitées est donc minimisée.

La stratification permet également aux ingénieurs de concevoir des structures avec des comportements désirés. Par exemple, les ailes du Grumman X-29, l'avion expérimental à voilure en flèche inversée, peuvent fléchir dans certaines directions et ne peuvent pas se déformer en torsion. Ces comportements, rendus possibles par sa structure en composite, éliminent la divergence structurale (déformation inadmissible ou désintégration des ailes en vol) de l'avion {*NASA*(2007)}.

• **Haute résistance et haut module**

Les propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et le module, des matériaux composites hautes performances permettent de répondre aux exigences de l'industrie aéronautique. D'autres industries en profitent également, par exemple la vitesse d'une balle de tennis est plus élevée avec des raquettes en carbone/époxy.

• **Poids**

Les matériaux composites hautes performances ont une densité de l'ordre de 1,6 contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, ils autorisent un gain de 10 à 30 % sur les éléments de structure. Ce gain de masse permet d'employer des moteurs moins puissants. Ceux-ci consomment moins et permettent de réduire la taille des réservoirs de carburant pour le même cahier des charges de l'avion.

• **Production**

Les matériaux composites permettent de simplifier l'assemblage de la structure, ce qui compense partiellement leur prix élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être substantielle. Par exemple, un tronçon de fuselage qui réclame typiquement mille pièces et plusieurs milliers de fixations est fabriqué en un seul morceau pour le Boeing 787. Sur la chaîne d'assemblage final, l'avion complet devrait voir le jour en trois jours contre onze jours pour un 737.

• **Maintenance**

Les composites ont besoin de moins d'entretien que les alliages métalliques. D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion. D'autre part, la tenue en fatigue est très bonne. Par exemple, l'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787, qui utilise massivement des matériaux composites, est porté à douze ans au lieu de dix ans sur un 777.

II. 4. 2. Les inconvénients :

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

• **Coût**

Les matériaux composites hautes performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

• **Conception et analyse**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels. Elles nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures.

L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micromécanique examine l'interaction des constituants à l'échelle microscopique. La macro-mécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres).

Pour les stratifiés composites, les rigidités sont déterminées à l'aide de la théorie classique des stratifiés. La rupture des stratifiés composites se produit de plusieurs façons très complexes. Il est donc difficile d'établir une théorie de résistance qui tienne compte de tous les modes de rupture et de leurs interactions. Par conséquent, la détermination des résistances est plus compliquée et nécessite des vérifications expérimentales. De plus, la résistance d'un stratifié peut être influencée par les contraintes interlaminaire au voisinage des bords libres. La séquence d'empilement du stratifié doit être soigneusement déterminée afin de minimiser ces contraintes.

• **Assemblage**

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration tel que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure. Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites.

• **Tolérance aux dommages**

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable.

En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement.

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages.

II. 5. APPLICATIONS AERONAUTIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES

Au début des années 1960, une évaluation de l'impact de la fibre de bore et ses matériaux composites a été effectuée par l'armée de l'air des Etats-Unis. Un stratifié unidirectionnel de fibres de bore a été estimé avoir une rigidité supérieure à celle de l'acier pour seulement un quart de la masse. Cela a provoqué une fameuse prévision que les immeubles construits avec un tel matériau pourraient être cinq fois plus hauts et la travée des ponts cinq fois plus longues. Bien que cette prévision ne se soit réalisée pas, elle a lancé les matériaux composites dans des applications aéronautiques sérieuses. Une nouvelle classe de composites appelée les composites hautes performances (Advanced composites), basée sur les fibres de bore et subséquemment les fibres de carbone, a été en développement intensif depuis.

Les mots « haute performance » sont utilisés pour distinguer les composites à fibres très résistances et très rigides comme le bore et le carbone. Les composites carbone/époxy ont connu la plus grande acceptation dans cette classe. Tandis que les fibres de verre sont également très résistantes, leur rigidité n'est pas suffisamment élevée pour l'usage des structures primaires d'avions.

La première utilisation majeure du composite bore/époxy fut l'empennage horizontal du Grumman. Dès lors, l'usage des éléments structuraux en composites a continué à augmenter autant en aviation militaire que civile. La Figure (***Fig. II.2)*** présente la croissance rapide de l'utilisation des matériaux composites dans les structures d'avions.

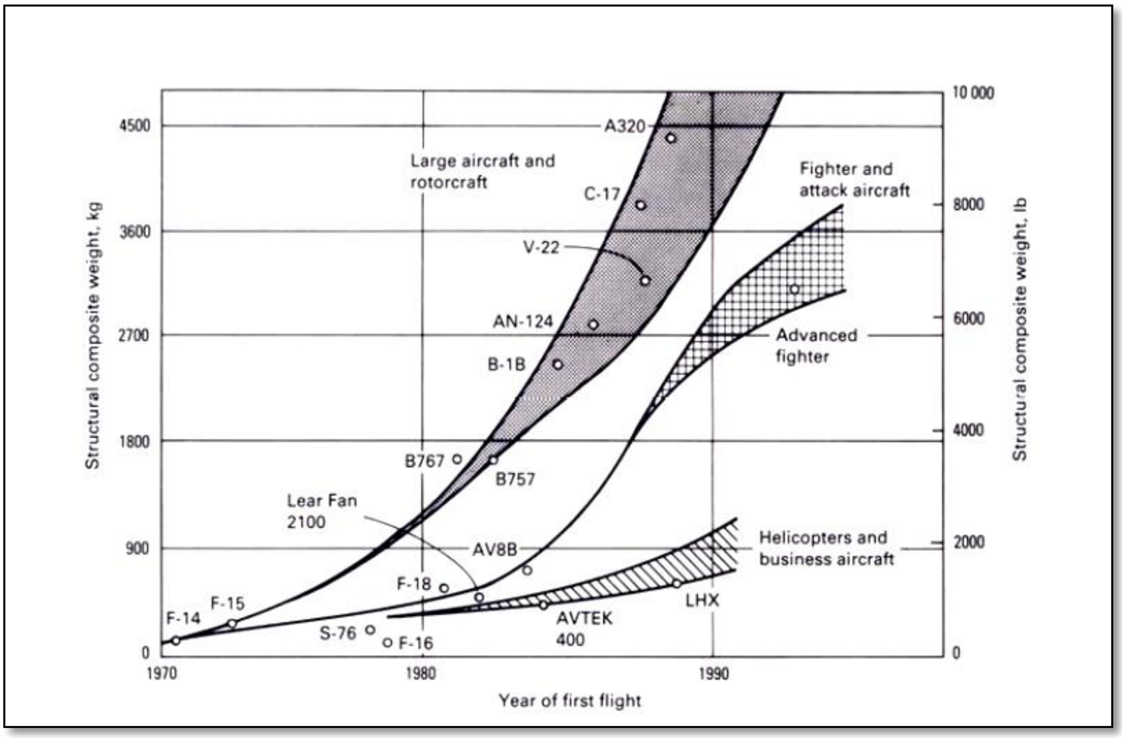


Fig. II.2 : Matériaux composites dans des structures d'avions.

Dans la génération actuelle des avions civils, l'Airbus A380 (première livraison prévue en 2007) contient des matériaux composites jusqu'à 22% de la masse structurale.

L'illustration la plus marquante concerne la comparaison entre le Boeing 777 (première livraison en 1995) et le 787 (première livraison prévue en 2008). En pourcentage de la masse structurale, le 777 contient 12% de composites et 50% d'aluminium tandis que le 787 contiennent 50% de composites et 20% d'aluminium. La répartition des matériaux sur le Boeing 787 est montrée dans la ***Fig. II. 3***. Boeing est le premier grand constructeur à aller aussi loin dans l'utilisation des matériaux composite.

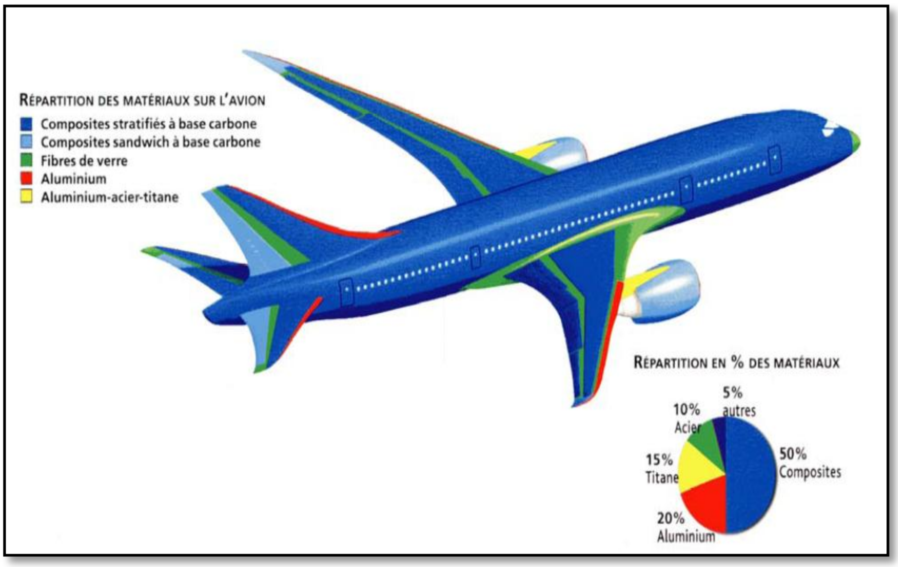


Fig. II. 3. a : Répartition des matériaux sur le Boeing 787 -DUBOIS (2005).

La transition des matériaux composites de l'expérience de laboratoire à l'usage pratique dans la production des avions militaires et civils est une réalité. Des progrès ont passé de l'aviation militaire à l'aviation commerciale, et aujourd'hui à la communauté d'aviation générale. Ces progrès représentent la croissance de la confiance en l'usage des composites et la reconnaissance des avantages en termes de coût et de performance associés à ces matériaux.

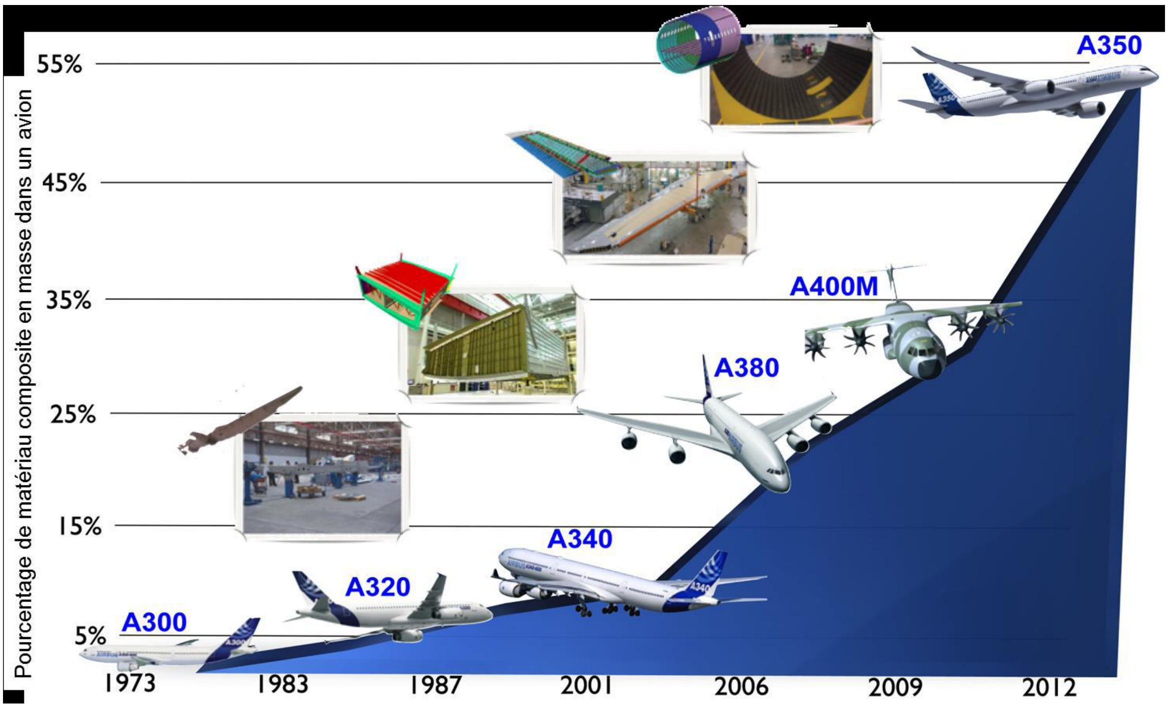


Fig. II. 3. b : Evolution du pourcentage de matériaux composites en masse dans la gamme d'avion Airbus aux cours des 40 dernières années.

II. 6. UTILISATION DES MATERIAUX COMPOSITES EN GENIE CIVIL

Il existe un nombre important de pathologies structurelles issues des erreurs de calcul et de conception, des défauts de résistance dus à un chargement excessif, des dégradations de matériaux et des phénomènes accidentels.

La maintenance des ouvrages de génie civil consiste à les protéger en assurant une meilleure étanchéité ou en limitant la corrosion, à les réparer en cherchant à compenser les pertes de rigidité ou de résistance dues à la fissuration, à les renforcer en améliorant les performances et la durabilité des ouvrages. C'est un problème de plus en plus préoccupant dans la mesure où le coût des ouvrages neufs est de plus en plus élevé et les conditions de réparation de plus en plus difficiles.

Parmi les techniques de réparations et de renforcement disponibles depuis plus d'une décennie, et l'une des plus efficaces pour les désordres structurels, est la réhabilitation par matériaux composites.

Plusieurs éléments de structure peuvent êtres renforcés par collage de tissus ou des plaques en matériaux composites. Ces éléments sont essentiellement les poutres, les poteaux et les dalles.

II. 6. 1. Utilisation des plaques FRP en génie civil

Les techniques traditionnelles ont montré leurs limites au comportement à long terme (oxydation des tôles d'acier..).La recherche dans le domaine de la réhabilitation s'est orientée vers l'utilisation de nouveaux matériaux capables de répondre aux différents critères exigés par les opérations de la maintenance des ouvrages. Plusieurs raisons ont permis aux matériaux composites, restés longtemps limités aux applications militaires et à l'industrie aéronautique, de s'implanter dans le domaine de génie civil.

Cependant, l'utilisation des fibres en polymères est une technique nouvelle qui permet de donner une rigidité et une résistance supplémentaire aux structures dont la conception est insuffisante vis-à-vis des sollicitations auxquelles elles sont soumises.

Les FRP sont composés de fibres à haute résistance liées par une résine de polymère. Ils sont disponibles sous forme de bandes (tissus), de plaques, de barres ou de laminés.

Ces matériaux présentent une contrainte de rupture *très élevés* pour une *densité cinq fois moindre que celle de l'acier*.

- Grande résistance en traction (avec haut module d'élasticité)
- Grande résistance à la fatigue.
- Légèreté
- Grande résistance à l'usure
- Absorption des vibrations
- Grande résistance à la corrosion.

II. 6. 2. Renforcement des poutres par des plaques composites :

Le renforcement vis à vis la résistance à la flexion d'une poutre en béton armé en utilisant les composites FPR est généralement réalisé en liant une plaque FPR à l'intrados de la poutre en béton armé (la partie tendue) dans le but d'augmenter la charge de service, la charge ultime et la rigidité des poutres et diminuer les flèches comme le montre la figure (***Fig. II. 4*** **)**.

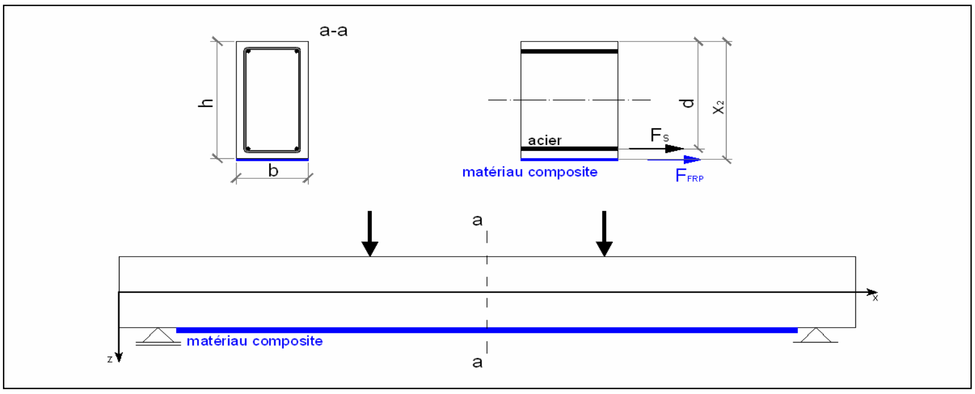


Fig. II. 4 : Configuration d'une poutre en béton armé soumise à la flexion renforcée au moyen de matériaux composites

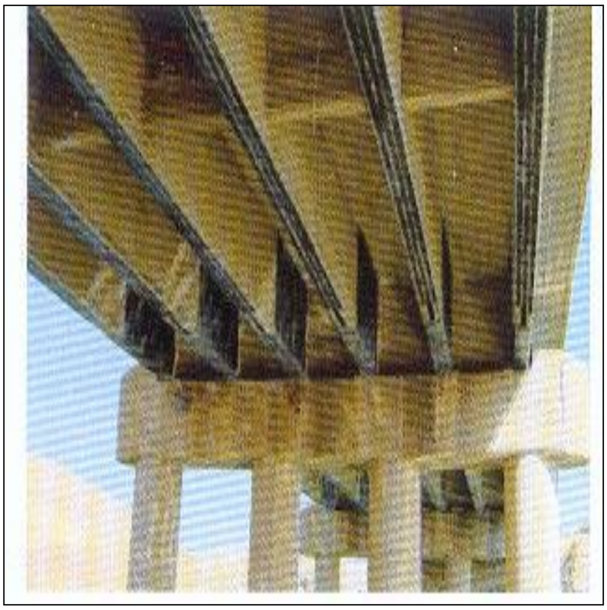
Des exemples de renforcement des poutres sont montrés dans les figures suivantes :

Fig. II. 5 : Renforcement par les FRP installés le long des poutres d'un pont

Fig. II. 6 : Le renfort vis-à-vis l'effort tranchant au niveau des appuis.

II. 6. 3. Renforcement des dalles par les matériaux composites :

La procédure de base de renforcement des dalles par FPR est de coller des bondes ou des lamelles FRP sur la face tendue de la dalle **(*Fig. II. 7,8*)** Pour les dalles travaillantes dans les deux sens on utilise des lamelles croisées *Hau* (1999).



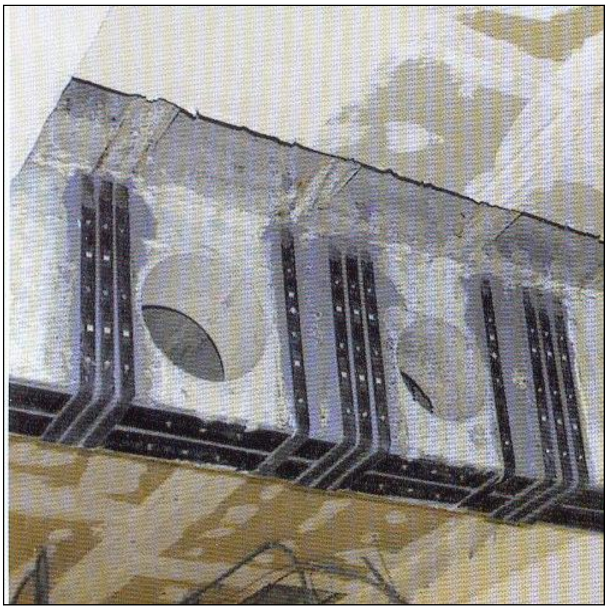


Fig. II. 7 : Renforcement vis à vis la flexion du pont en béton armé

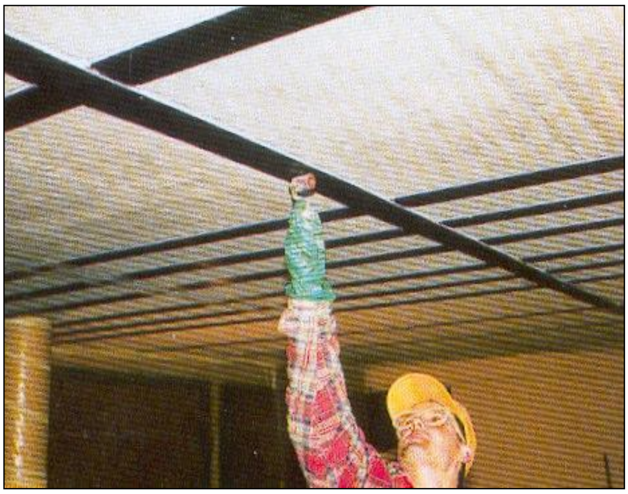


Fig. II. 8 : Emplacement des lamelles composites manuellement

II. 6. 4. Renforcement des colonnes par FRP :

Au nivaux de l'infrastructure, les piles présentent des anomalies qui se résument en la dégradation totale des bétons et l'apparition des aciers complètement corrodés avec diminution de leur section.

La technique de renforcement propre aux colonnes en béton armé consiste à envelopper ces colonnes de feuilles de FRP, les fibres sont placées dans la direction circonférentielle **(*Fig. II. 9-10)*** cette enveloppe crée un effet de confinement du béton qui augmente la résistance aussi bien à la compression qu'au cisaillement. Cette méthode de renforcement améliore le comportement des piles (poteaux) soumises à des chargements sismiques ou déformations dues aux charges axiales.

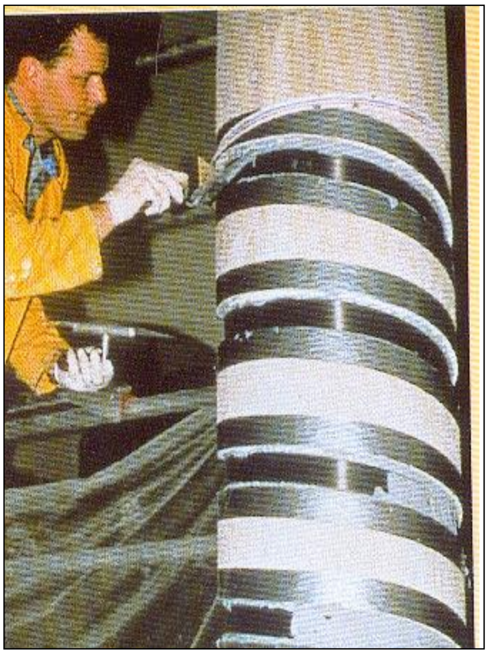


Fig. II. 9 : Colonne partiellement enveloppée par des bandes FRP.

Fig. II. 10 : Colonne entièrement enveloppée par FRP (Enroulement filamentaire)

II. 6. 5. Tablier de pont avec FRP :

Les détériorations des éléments du tablier sont dues aux éclatements du béton d'enrobage, corrosion des armatures et des fissures plus ou moins profondes sur les éléments structuraux du tablier, Cela est dû probablement aux attaques des eaux salées du milieu marin et l'augmentation du trafic routier qui entraînant des éclatements du béton et exposant ainsi les aciers à des corrosions et une perte alarmante de la section résistante.

Puisque les matériaux FRP ne corrodent pas et présentent une légèreté et une bonne résistance mécanique, leur utilisation est devenue solution très attractive pour répondre à ces besoins de renforcement interne du béton pour les tabliers des ponts.

Des armatures et treillis de renforcement en FRP de verre et de carbone ont été utilisés avec succès comme armatures internes pour les poutres et les dalles en béton.la figure montre l'armature FRP de verre installée dans un tablier de pont en béton au Québec (CANADA).

Fig. II. 11 : Barres d'armatures en FRP de verre placée dans un tablier de pont en béton avant le coulage du béton -Calgaro et Lacroix (1997).

II. 7. LES COMPOSITES DANS L'AUTOMOBILE

Le secteur de l’automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003.Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d’entretien et une grande liberté de conception ; l’allègement de 1 kg, obtenu par l’utilisation des composites, autorise un surcoût de 3€/kg gagné ou permet d’économiser 1,5 € de carburant par 100 km.

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclabilité.

En Europe, environ 12 millions de véhicules, d'une masse moyenne de 1000 kg sont produits annuellement, soit 12 millions de tonnes de matériaux Giocosa (1999).

Si à ses débuts, il y a environ 100 ans, une automobile était constituée principalement de bois et d'acier, aujourd'hui elle rassemble de nombreux matériaux appartenant à différentes familles :

- matériaux ferreux : fontes, aciers (environ 70 % de sa masse) ;
- matériaux non ferreux : aluminium, cuivre, magnésium (environ 5 %) ;
- matériaux minéraux : verres, céramiques (environ 4 %) ;
- matériaux organiques : peintures, adhésifs, textiles, fluides, caoutchoucs, thermoplastiques et thermodurcissables renforcés ou non par des fibres (verre, carbone, aramide, naturelles) ou des charges minérales (environ 20 %).

Les matériaux organiques composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour remplir certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules.

- A priori, ces matériaux présentent en effet trois handicaps majeurs par rapport aux matériaux métalliques dans le cadre d’une utilisation dans le secteur automobile :

- un prix élevé au kilogramme ;
- des caractéristiques mécaniques plus faibles ;
- des procédés de mise en œuvre souvent lents à l’exception du procédé d’injection.

- Pourtant les matériaux composites à matrice organique présentent des avantages importants :

- une faible densité ;

- des technologies de mise en œuvre par moulage qui limitent la matière engagée dans la filière, offrent la possibilité d'obtenir des pièces de forme complexe et suppriment les usinages de finition.

II. 8. LES COMPOSITES ET LA CONSTRUCTION ELECTRIQUE

La consommation massive des composites GD, sous forme de semi-produits SMC comprimés, dans les domaines électrique et électronique, prends de l'ampleur avec l'utilisation importante de l'audio visuel (TV, microordinateurs, lecteurs de DVD, etc.….).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

Les cadences de production des composants électriques, pouvant atteindre plusieurs milliers par jour, sont peu compatibles avec celles du procédé de compression SMC. Des exigences croissantes en recyclabilité des produits constituent une menace importante pour ce secteur d'application des composites.

II. 9. LES COMPOSITES ET LA CONSTRUCTION INDUSTRIELLE

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour les constructions industrielles standards, les matériaux composites gardent encore leur handicap d'un coût élevé par rapport aux matériaux conventionnels, les métaux. Leur caractérisation en milieu corrosif est encore insuffisamment connue.

II. 10. LES COMPOSITES DANS LES EQUIPEMENTS DE SPORTS ET LOISIRS

Les performances sportives exigent des matériaux performants. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences, malgré un coût relativement élevé. Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques etc.….

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports.

La résistance mécanique et élastique des composites TP reste encore trop faible comparée à celle des alliages légers, en particulier pour les composites à matrice en polypropylène et en polyamide.

II. 11. LES COMPOSITES ET LA CONSTRUCTION NAUTIQUE

Dans la construction nautique de plaisance et de pêche, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. Le moulage au contact représente encore 85% des composites utilisés dans ce secteur. D'ailleurs c'est le seul domaine exploité en Algérie. Les entreprises étatiques et privées telles que ECOREP, 3S, POLYOR, se sont spécialisées dans la construction des bateaux de pêche et de plaisance. Elles utilisent surtout de la résine polyester et la fibre de verre E.

Les problèmes d'environnement sont susceptibles de menacer à terme l'industrie nautique des matériaux composites ; en effet, les nouvelles réglementations européennes limitant les émissions des composés organiques volatiles COV (styrène), qui pourraient constituer une menace pour cette industrie si elle ne s'adapte pas.

II. 12. LES COMPOSITES DANS LE SECTEUR MEDICAL

Les composites TD et TP ont investi récemment le secteur médical et de la sécurité, comme ils ont investi auparavant les autres secteurs. Il s'agit surtout des composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

Le médical reste attaché à l'utilisation des aciers spéciaux dont le prix de 9€/kg reste bien au dessous de celui des composites HP qui peut atteindre 50€/kg.

II. 13. APERÇU DU MARCHE MONDIAL DES COMPOSITES

Le marché mondial du composite croît, en quantité, de 5,7 % par an depuis 1994 Chalaye (2002). En 2000, sept millions de tonnes ont été produites, dont plus de 95 % sont des composites de grande diffusion, mais seulement 3% pour les composites TD, contre 9% pour les TP, qui sont apparus au début des années quatre-vingt, alors que les TD, existent depuis les années cinquante. Le marché mondial des fibres de verre s'établit à 2,5 millions de tonnes en 2000. Le ***Tab. II.2*** nous donne une idée sur le marché mondial des composites.

Application	France	Europe	Japon	Etat Unis	Brésil	Monde
Automobile	36(108)	32(640)	13(221)	30(1020)	22(37)	25(1788)
Ferroviaire	2(6)	2(20)	2(34)	1(34)	0(0)	1(72)
Aéronautique	4(12)	1(20)	1(17)	1(34)	3(5)	3(215)
Construction nautique	5(12)	4(160)	3(51)	12(408)	4(7)	6(429)
Construction civile	20(63)	33(620)	35(595)	23(782)	26(44)	30(2145)
Construction industrielle	8(24)	10(200)	14(238)	13(442)	32(54)	10(715)
Electricité électronique	15(45)	8(120)	23(391)	10(340)	8(14)	15(1073)
Sports et Loisirs	8(24)	8(160)	7(119)	8(272)	4(7)	8(572)
Matériel médical	1(3)	1(20)	1(17)	1(34)	0(0)	1(72)
Divers	1(3)	1(20)	1(17)	1(34)	1(2)	1(72)
Total milliers de tonnes	300	2000	1700	3400	169	7150

Tab. II.2 : Marché mondial de la fibre de verre –Berreur (2001).

On constate de grandes disparités, en fonction des applications, dans l'utilisation des composites entre les différentes zones géographiques. La figure ci-dessous présente une comparaison des productions en Europe.

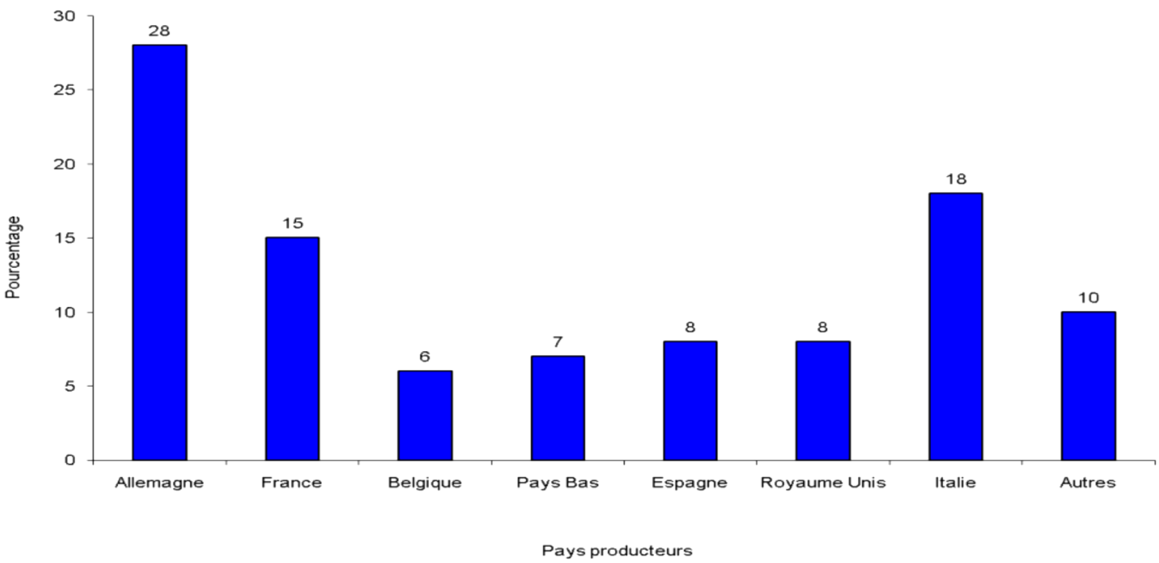


Fig. II. 12 : Production européenne de la fibre de verre - Berreur (2001)

Les fibres de verre (500 kT/an en Europe) sont utilisées dans plus de 95% des composites, et plus particulièrement pour les produits GD.

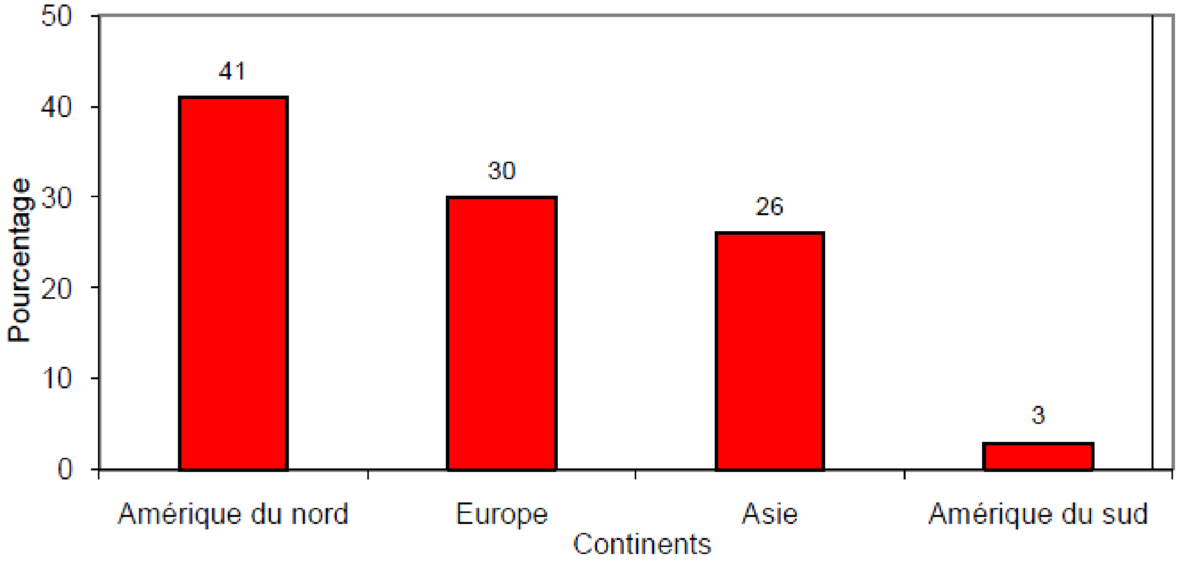


Fig. II. 13 : Consommation mondiale de la fibre de verre (Source : St Gobain-Vétrotex)

La consommation mondiale de la fibre de verre est estimée à 5,8 Mt par an, elle est donnée par la figure ci-dessus. Et seul 2,6 Mt sont utilisés pour le verre de renforcement, qui rentre dans les composites. La croissance de production des fibres de verre est estimée à 4 jusqu'à 10% annuellement jusqu'en 2010. Quant à celle des composites, elle est estimée à 5 jusqu'à 6% par an. La croissance de consommation du verre de renforcement est variable en fonction des continents. L'Amérique du sud a le taux le plus élevé de 12%, suivi de l'Asie avec un taux de 8%. L'Europe et l'Amérique du nord ont un taux plus faible de l'ordre de 5% et 4% respectivement. La plus grande part des fibres est utilisée par la construction et les transports, qui représentent à eux plus de 50%. La figure ci-dessous 1.9, nous donne une idée sur les principales applications des fibres de verre.

Le coût des composites reste relativement élevé, et il est fonction de la nature de ce dernier. Le coût du composite à haute performance HP vari entre 9 et 38 € le kg, en fonction de sa composition, quant à celui de grande diffusion GD, il est de l'ordre de 3 à 6€ le kg. Il reste supérieur à celui des matériaux traditionnels comme l'acier, le bois ou l'aluminium (de 3 euros à 38 euros/kg, selon les performances requises pour les matériaux composites, de 1,5 euros à 5 euros/ kg pour les matériaux plus traditionnels) Chalaye (2002).

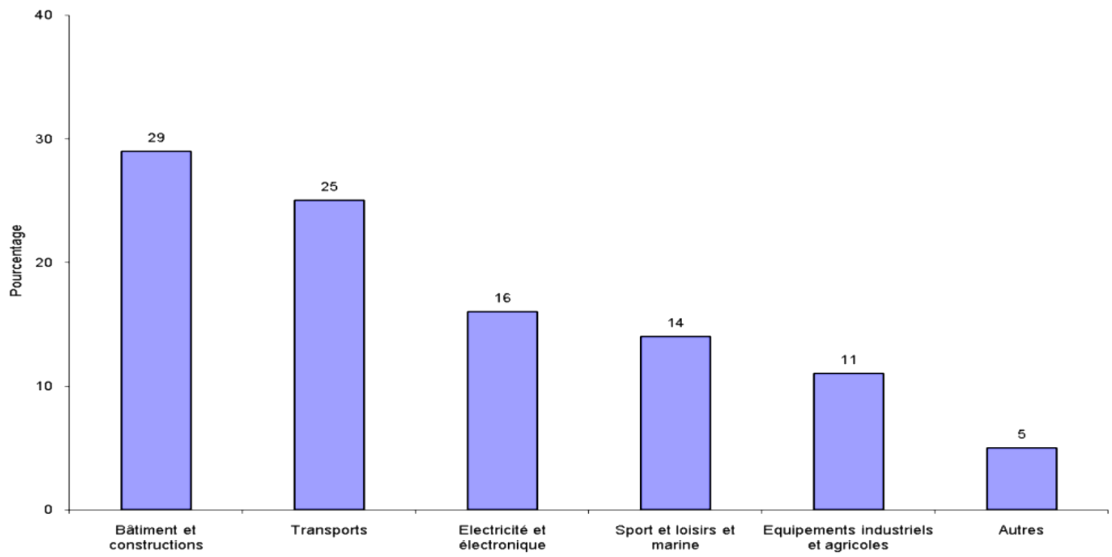


Fig. II. 14 : Application de la fibre de verre (Source : St Gobain-Vétrotex)

La production mondiale des résines époxy est estimée à 0,83 Mt. Ce qui représente 30% de la demande mondiale. Les principales applications sont données par la figure ci-dessous.

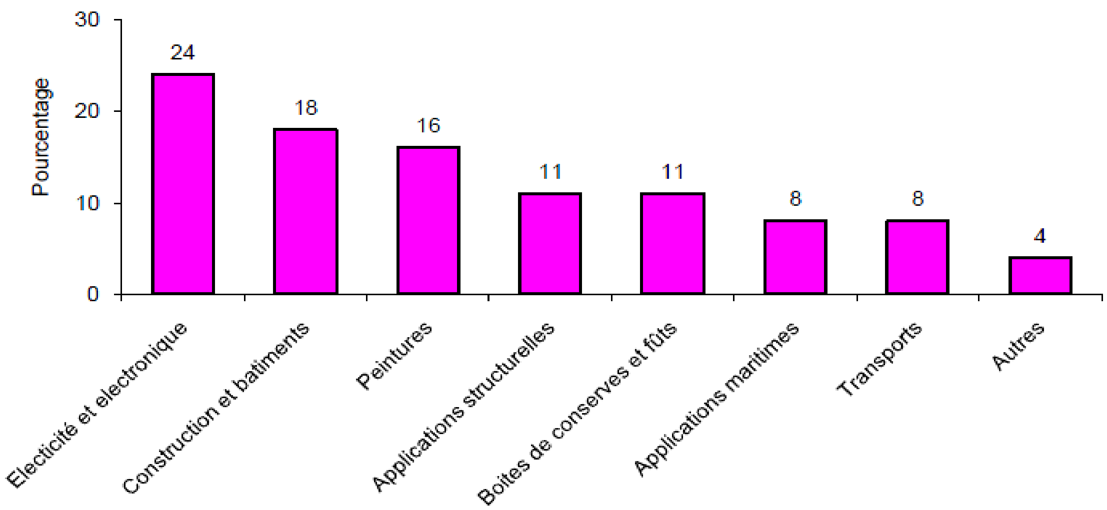


Fig. II. 15 : Application des résines époxy

II. 14. MECANISMES DE RUPTURE DES STRATIFIES COMPOSITES SOUS L'EFFET DE PLUSIEURS PHENOMENES :

L'étude des matériaux composites comporte plusieurs thèmes tels que procédés de fabrication, élasticité anisotrope, micromécanique, etc. Nous nous intéressons au sujet de l'endommagement de ces matériaux, plus particulièrement des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce type de matériau est très répandu dans des applications où la réduction de poids est critique. Comme l'utilisation s'agrandit, la probabilité des ruptures éventuelles est également augmentée. La capacité de caractériser les ruptures, par exemple en termes des modes de rupture, des paramètres, ou des valeurs critiques à la rupture, est essentielle pour assurer l'intégrité des pièces en service et pour la conception des futurs produits.

La rupture des stratifiés composites peut se produire de plusieurs façons très complexes. Les modes de rupture dépendent de la stratification et de la direction du chargement par rapport à l'orientation des fibres. Les Figure (***Fig. II. 16,17)*** montrent les allures des ruptures par flexion et par traction respectivement. Des différences remarquables à l'échelle macroscopique peuvent être constatées selon différentes stratifications. Etant donné la diversité de la stratification et du chargement, des modes de rupture bien définis à l'échelle macroscopique ne peuvent pas, en général, être identifiés

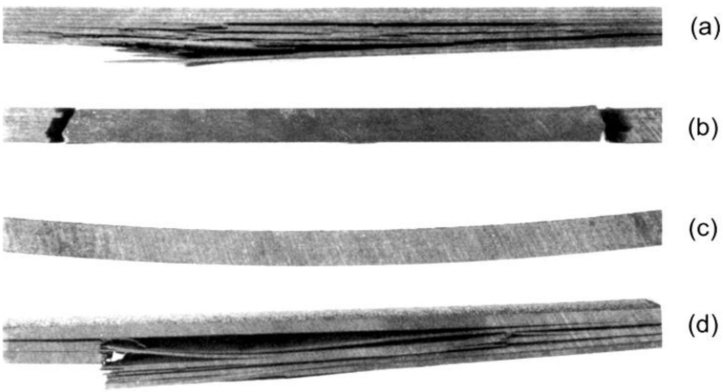


Fig. II. 16*: *Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm$45°, (d) 0°/90° .

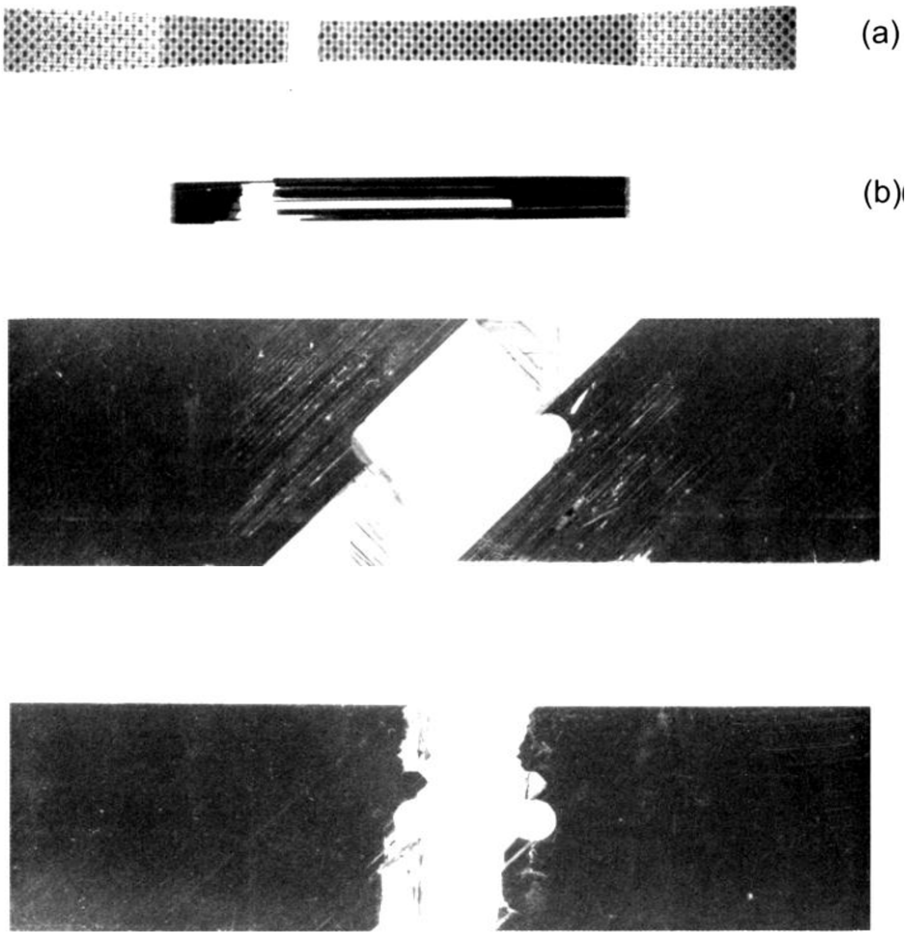


Fig. II. 17 : Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a) 0°/90° tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope trouée, (d) 0°/90° trouée.

La description de la rupture à l'échelle du pli est, par contre, relativement efficace pour le classement des mécanismes de rupture. Les stratifiés à renforts de fibres longues ont trois types de rupture : rupture intralaminaire, rupture interlaminaire, et rupture translaminaire.

Ces trois mécanismes de rupture (***Fig. II. 18***) définissent le plan de rupture par rapport aux constituants du matériau. La rupture intralaminaire se trouve à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture interlaminaire décrit une rupture entre deux plis adjacents. La rupture translaminaire est orientée transversalement à l'orientation de fibres dans le pli endommagé.

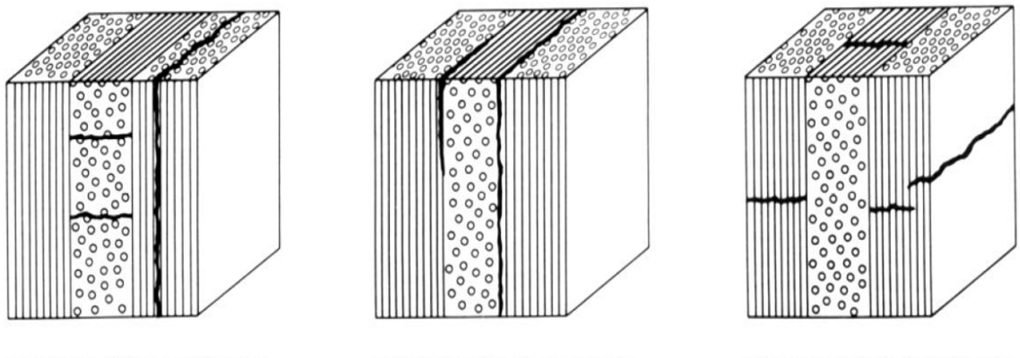


Fig. II. 18: Mécanismes de rupture dans un stratifié 0/90/0.

Avec cette convention, les ruptures des stratifiés à renforts de fibres longues peuvent être décrites en termes des mécanismes de rupture à l'échelle du pli, identifiables par des observations microscopiques sur les surfaces de rupture.

II. 14. 1. Rupture intralaminaire

La rupture intralaminaire est due principalement à la faible résistance de la matrice et de l'adhérence entre la matrice et les fibres. Elle est provoquée par les contraintes dans le plan du stratifié. Un pli se détériore par la contrainte résultante en traction dans la direction normale aux fibres. Ce type de rupture est donc couramment appelée la « fissuration transverse ». Normalement cette fissuration de la matrice se produit bien avant la rupture de fibre.

Dans les stratifiés multidirectionnels, la fissuration transverse se présente, en général, successivement du pli le plus faible au plus résistant. Par exemple, la Figure (***Fig. II. 19)*** présente un stratifié [0/90/+45/-45]s d'un graphite/époxy qui subit une traction uniaxiale. La première fissure apparaît dans les plis de 90°. Quand la charge augmente, plus de fissures se développent mais elles restent dans les plis de 90°. Lors que la charge augmente davantage, des fissures se produisent dans les plis adjacents (+45°), puis elles continuent vers les interfaces +45°/-45° .

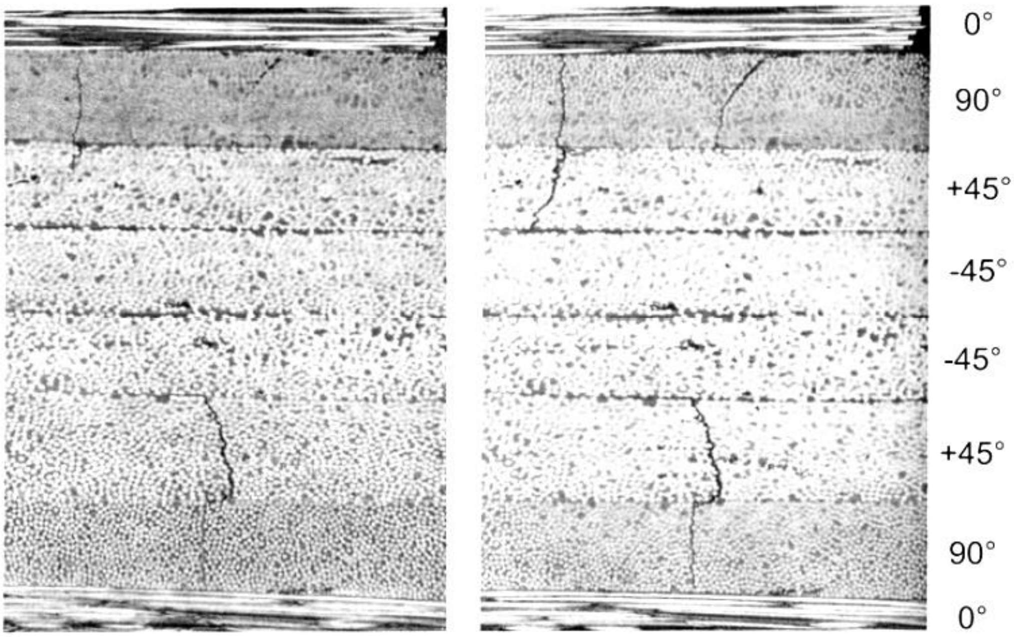


Fig. II. 19: Evolution de la fissuration transverse [GRAPHITE /EPOXY].

Les contraintes intralaminaires et les contraintes interlaminaires ne sont pas deux grandeurs indépendantes parce qu’elles sont couplées par les relations d’équilibre de la pièce sur laquelle elles agissent. Par conséquent, l’apparition de la fissuration transverse peut induire une nouvelle répartition des contraintes et provoquer la rupture interlaminaire. En effet, la rupture intralaminaire et la rupture interlaminaire se produisent souvent dans les stratifiés bien avant la rupture totale de ceux-ci.

II. 14. 2. Rupture interlaminaire

La rupture interlaminaire se produit dans l’interface entre deux plis d’un stratifié. La surface de rupture montre, en général, la rupture de la matrice et la décohésion fibre/matrice. Ces mécanismes impliquent peu de rupture de fibres. Comme pour les matériaux métalliques, la rupture peut être en mode I (ouverture), mode II (glissement droit), mode III (glissement vis), ou une combinaison des trois modes. Bien que le mode III soit moins étudié, un grand nombre d’études décrivent les mécanismes de séparation en mode I et mode II (***Fig. II. 20***).

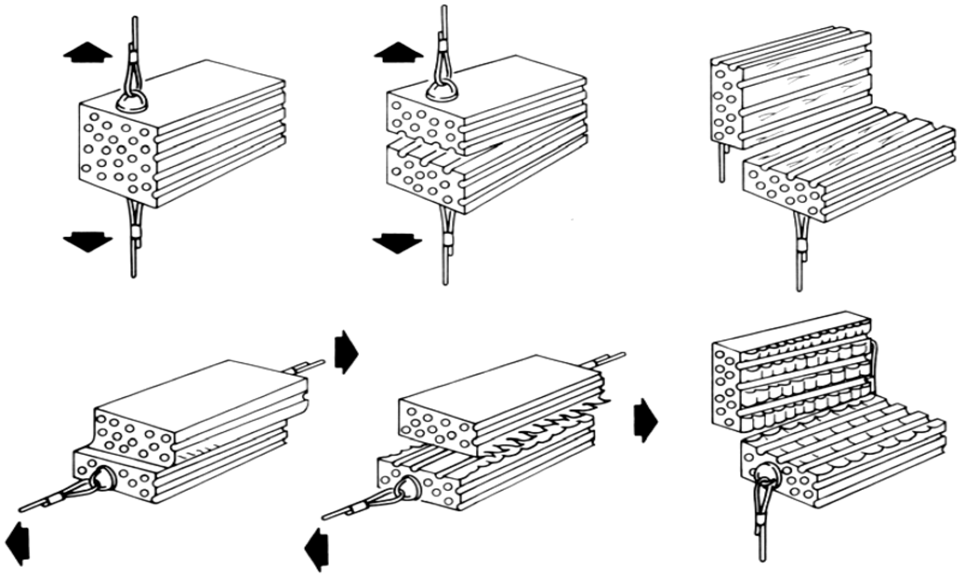


Fig. II. 20: Schéma de la rupture interlaminaire (a) Mode I traction, (b) Mode II cisaillement

Les caractéristiques de la surface de rupture dépendent des types de polymère utilisés.

II. 14. 3. Matrice thermodurcissable

Pour la plupart des matrices thermodurcissables, la rupture est de type fragile. La surface de rupture présente un plan relativement plat avec peu de marques de la déformation du matériau. La séparation en mode I et mode II est dû au même mécanisme microscopique, à savoir la rupture fragile en traction. La seule différence entre les deux modes est l'orientation de la contrainte principale en traction.

Dans le cas du mode I, le plan de rupture est parallèle au plan de fibres. Le faciès de rupture (***Fig. II. 21***) présente une surface relativement plate de la matrice contenant des « marques de rivière ».

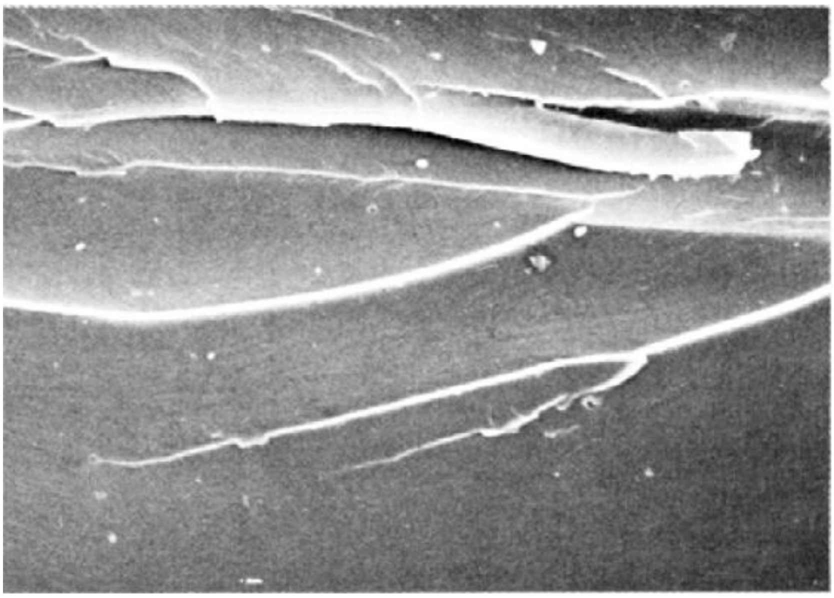


Fig. II. 21 : la rupture en mode I.

Sous un chargement en mode II, les deux parties de part et d'autre de la fissure se voient imposer un déplacement relatif dans un même plan. La contrainte principale en traction pour le cisaillement appliqué est donc orientée à 45° du plan de rupture. La rupture fragile de la matrice se produit perpendiculairement à cette contrainte résultante de traction sous la forme d'une série de microfissures inclinées (***Fig. II. 22***).

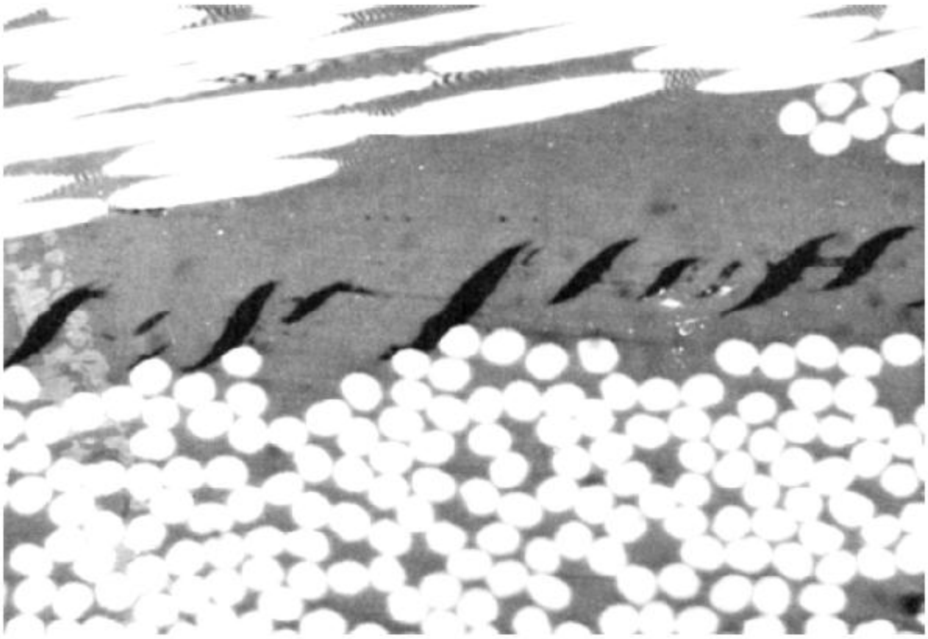


Fig. II. 22: Microfissures orientée à 45° du plan de rupture (mode II)- SMITH (1993).

Pendant le processus de rupture, ces microfissures s'unissent. Une multitude de petites languettes sont formées sur une des surfaces de rupture. Sur la surface opposée, la résine présente des petites zones concaves correspondant aux languettes de la première surface (***Fig. II. 23***). Plusieurs termes ont été utilisés pour décrire ces faciès de rupture. Les termes les plus usités sont les « hackles », qui décrivent les languettes, et les « scallops », qui décrivent les zones concaves.

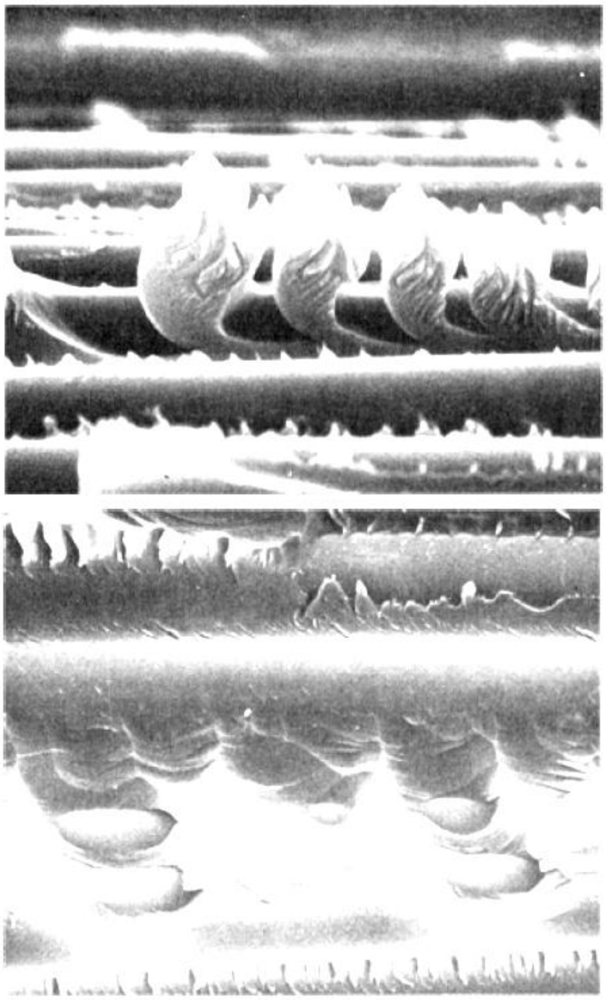


Fig. II. 23 : Faciès de rupture en mode II (a) Hackles, (b) Scallops.

II. 14. 4. Matrice thermoplastique

Les faciès de rupture des composites à matrice thermoplastique sont notablement différentes de ceux des composite à matrice thermodurcissable discutés précédemment. Les surfaces des deux modes présentent des « pointes » causées par la déformation plastique importante de la matrice (***Fig. II. 24***). La différence principale entre les deux modes est l'orientation des « pointes ». Pour le mode I, elles pointent aléatoirement dans différentes directions. Les crêtes et vallées sont dues à l'arrachage de fibres. Pour la rupture en mode II, les pointes sont orientées parallèlement à la direction de propagation. Il n'y a pas d'indication de la présence des hackles et des scallops comme dans les matrices thermodurcissables.

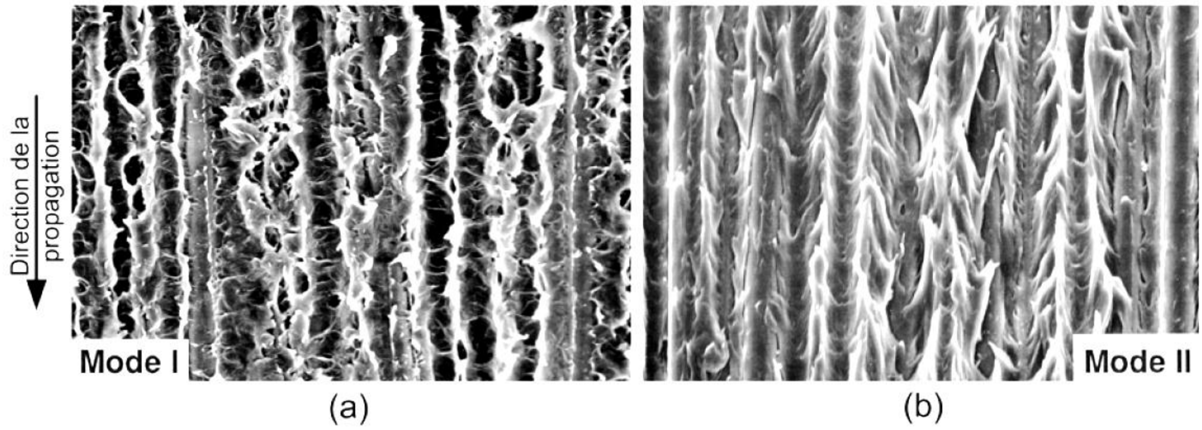


Fig. II. 24 : Faciès de rupture d'un composite à matrice thermoplastique (a) Mode I, (b) Mode II.

II. 14. 5. Rupture translaminaire

La rupture translaminaire concerne la rupture de fibres. Les surfaces de rupture sont donc généralement marquées par la morphologie rugueuse des bouts de fibres. En effet, la contrainte à rupture des fibres est plus importante que celle de tous les autres constituants d'un stratifié composite. Par conséquent, ce mécanisme de rupture entraîne souvent la rupture totale du stratifié. La rupture translaminaire peut être séparée en deux modes selon les chargements : la rupture par traction et le micro-flambage par compression. La rupture peut être provoquée par un mode individuel ou une combinaison des deux modes.

***Rupture translaminaire en traction**

La rupture fragile des fibres est le mécanisme principal, avec la rupture de la matrice environnante considérée comme secondaire. Les fibres se cassent typiquement par paquets ; les fibres dans chaque paquet ont un plan de rupture commun (***Fig. II. 25***). Différents plans de rupture sont ensuite joints par la décohésion fibres/matrice et par la rupture en cisaillement de la matrice.

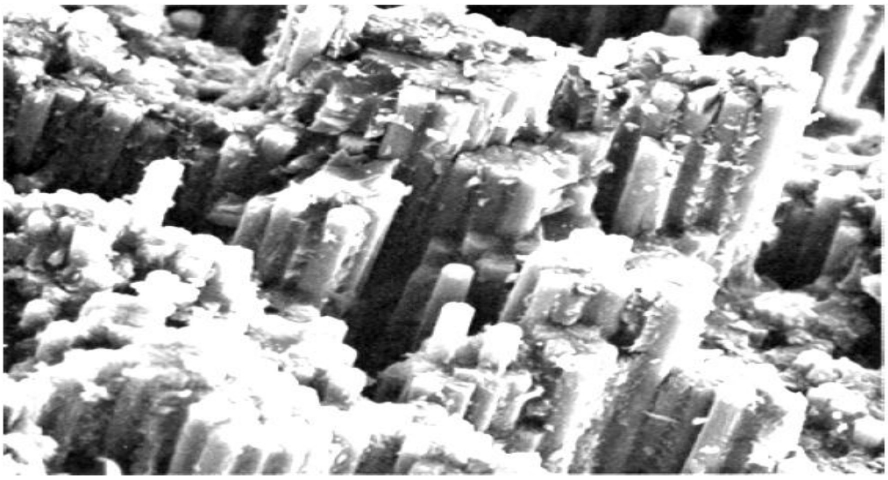


Fig. II. 25: Rupture translaminaire en traction d'un graphite/époxy.

***Rupture translaminaire en compression**

Le micro-flambage par compression est le mécanisme principal de ce type de rupture. Les fibres individuelles flambent localement au point où l'instabilité est maximum. Le coude de chaque fibre provoque deux ruptures séparées par une distance de 5 à 10 fois le diamètre de la fibre (***Fig. II. 26***) .

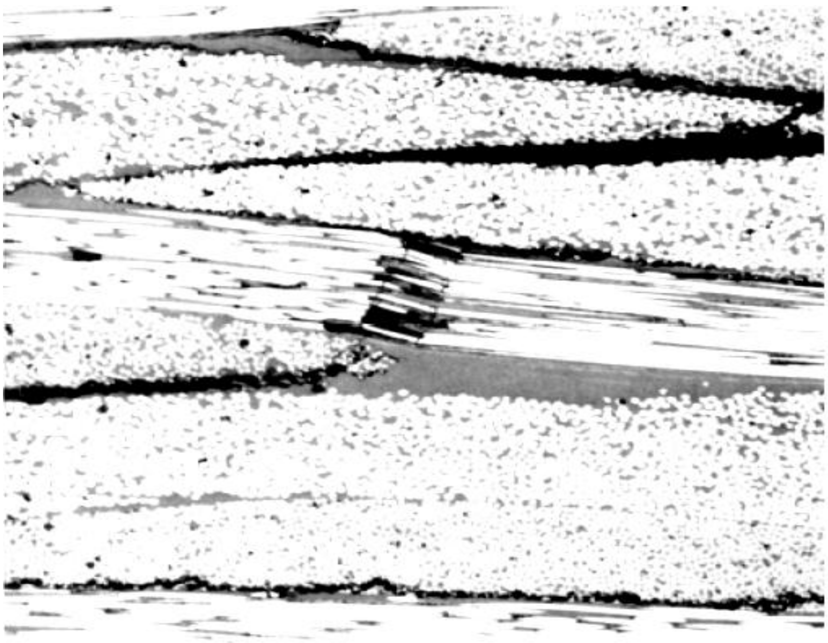


Fig. II. 26 : Rupture translaminaire en compression par micro-flambage.

La surface de rupture est beaucoup plus plate que celle de la rupture par traction.

L'endommagement considérable après rupture est dû au mouvement relatif entre les deux surfaces de rupture en contact (***Fig. II. 27***).

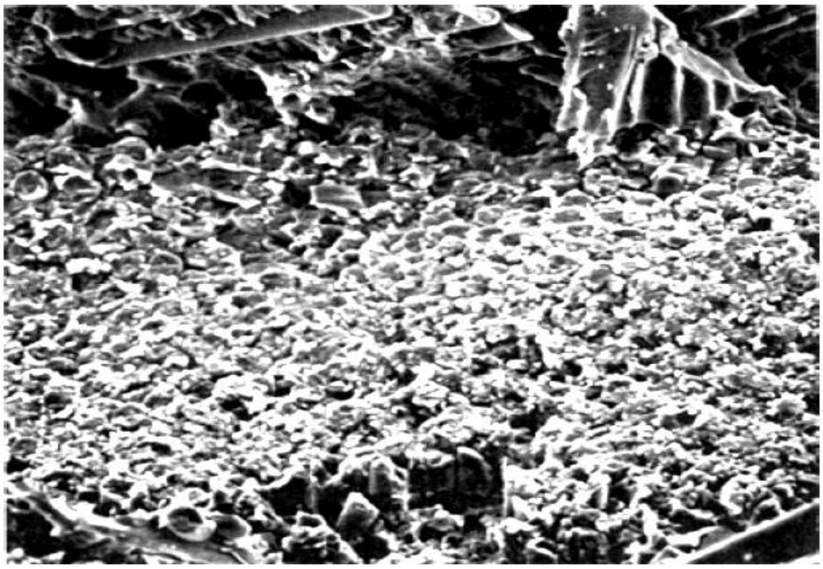


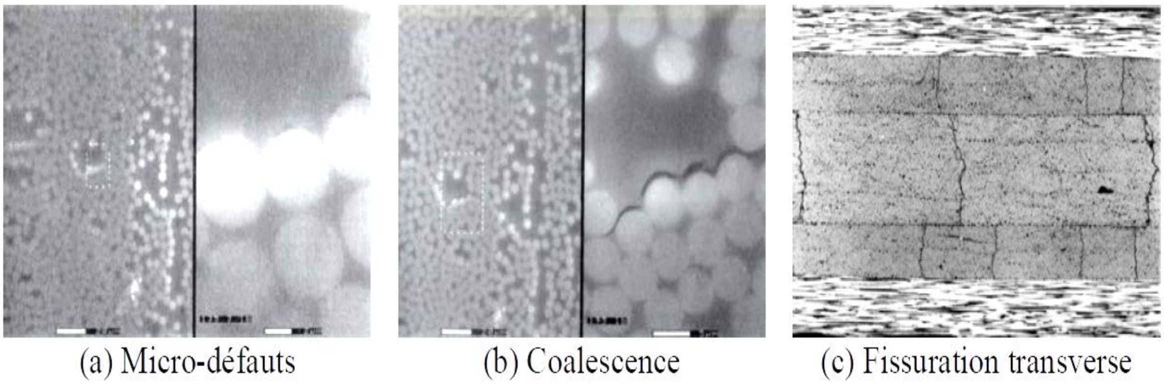
Fig. II. 27 : Faciès de rupture par micro-flambage.

II. 15. LE DELAMINAGE :

L'un des avantages majeurs des stratifiés composites à renforts de fibres est la capacité d'orienter les fibres de chaque pli afin d'avoir les propriétés, souvent la résistance et la rigidité, appropriées aux chargements dans les directions prévues. Par exemple, une plaque stratifiée peut avoir une rigidité en traction dans une direction deux fois supérieure à celle dans une autre direction. Malgré d'excellentes propriétés dans le plan, les stratifiés présentent un problème propre aux matériaux réalisés par stratification : la rupture interlaminaire. Ce mécanisme de rupture se caractérise par un décollement ou une décohésion entre les plis du stratifié. Il est couramment appelé le « délaminage ».

II. 15. 1. Phénomènes physiques du délaminage et d'instabilité :

Un stratifié soumis à un chargement, présente différentes étapes de dégradation. Dans le scénario d'évolution des défauts le plus « classique », la matrice et l'interface fibre/matrice sont les premières à se détériorer (***Fig. II. 28-a***). Les premiers défauts sont donc la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique. Ensuite, ces défauts s'agrandissent de façon stable à l'échelle du pli par coalescence (***Fig. II. 28-b***), les micro-défauts se rejoignent pour former des fissurations transverses. Les fissures transverses peuvent parvenir à l'interface des plis et provoquer le délaminage sous l'effet des contraintes interlaminaires (***Fig. II. 28-c***). Ces défauts et leur évolution dépendent de l'empilement, du nombre de plis, du chargement, et de la taille et de la forme de la structure considérée.



(a) Micro-défauts (b) Coalescence (c) Fissuration transverse

Fig. II. 28: Evolution de défauts

Les micro-mécanismes principaux de l'endommagement qui accompagnent un délaminage sont présentés schématiquement dans la Figure (***Fig. II. 29*)**, Ils incluent :

• Zone endommagée : La forte concentration de contraintes autour de la pointe de fissure provoque une zone endommagée où se trouvent la déformation plastique et/ou des microfissures de la matrice.

• Fissures latérales : Après le passage de la fissure, les microfissures dans la zone endommagée peuvent se transformer en des fissures latérales de la matrice autour du plan de délaminage

• Pontage de fibres : La présence de fissures au dessus ou en dessous du plan de délaminage facilite la création de ponts de fibres reliant les deux surfaces délaminées. Certains ponts de fibres se rompent pendant l'avancée du délaminage.

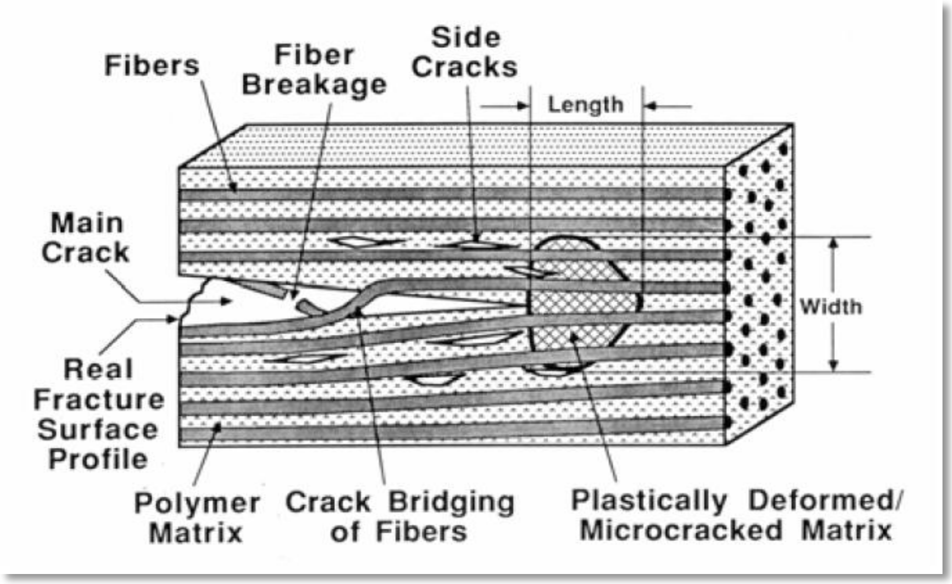


Fig. II. 29 : Mécanismes de l'endommagement des plaques composites.

II. 15. 2. Origines du délaminage

La cause de délaminage peut être attribuée, en termes généraux, à l'existence des contraintes interlaminaires. Ces contraintes entre plis peuvent être critiques dans les zones suivantes :

***Défaut de fabrication**

Des défauts internes au sein de stratifié tels que des micro-vides ou des impuretés peuvent survenir lors de sa fabrication. Même sous des chargements dans le plan, les contraintes interlaminaires se développent dans les champs de contraintes à ces sites à cause des discontinuités locales.

***Bord libre**

En ce qui concerne les stratifiés composites multidirectionnelles, les contraintes interlaminaires se développent à cause de la discontinuité de comportement mécanique entre les plis individuels. Par exemple, un stratifié [45/-45/-45/45] sous un chargement de traction simple présente une contrainte interlaminaire au voisinage des bords de l'éprouvette qui devient singulière aux bords libres (***Fig. II. 30***). Par conséquent, ce phénomène est nommé « l'effet de bord libre ». L'intensité de cet effet dépend fortement de la séquence d'empilement des stratifiés.

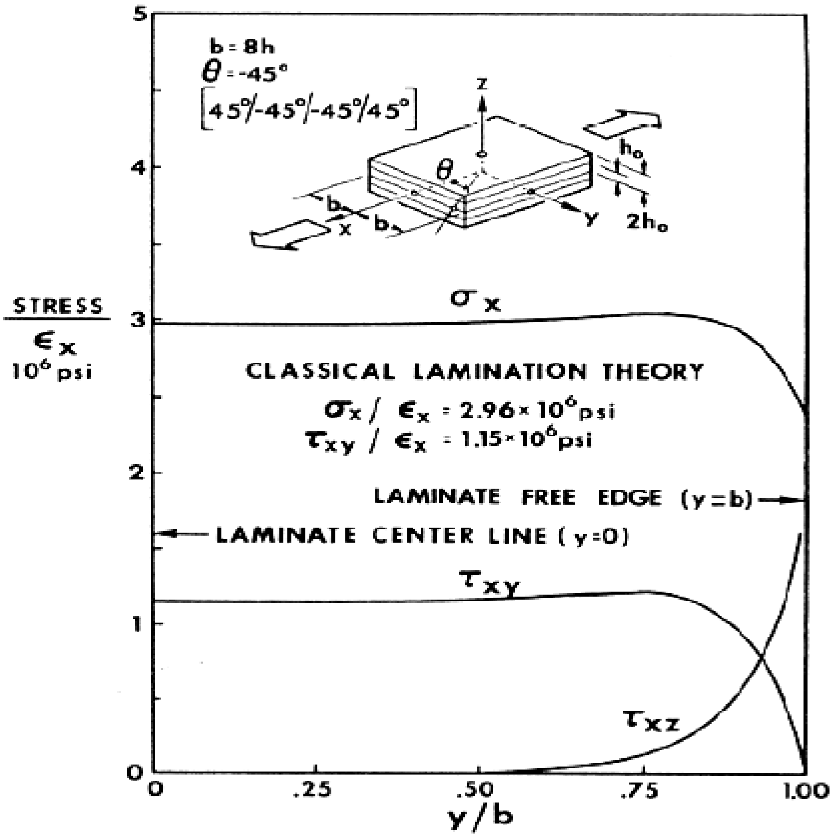


Fig. II. 30 : Evolution des contraintes dans la largeur de l'éprouvette [45/-45/-45/45]

*Application structurale

L'utilisation des pièces composites dans une structure nécessite des formes spécifiques et des moyens de les assembler avec les autres éléments. La Figure (***Fig. II. 31)*** présente cinq zones assez courantes des pièces structurales qui présentent une discontinuité locale.

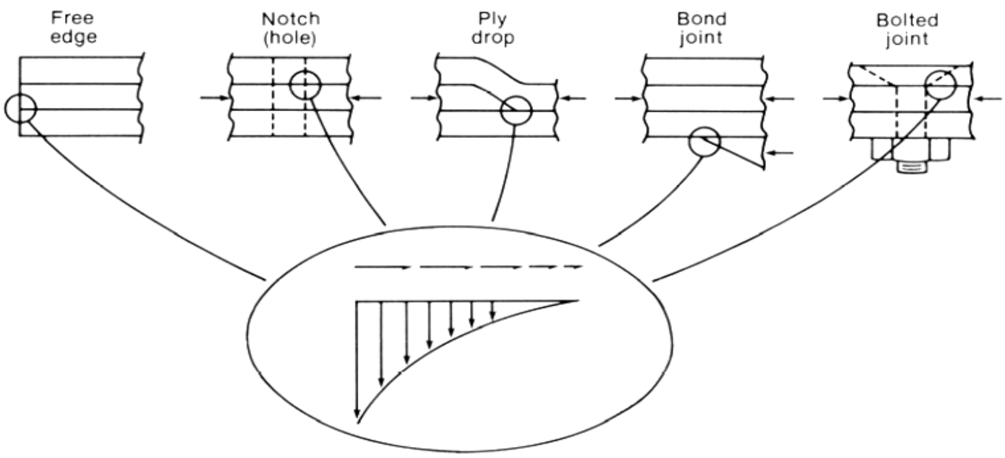


Fig. II. 31: Sources des contraintes interlaminaires dans les pièces structurales

*Impact

Une structure peut subir des impacts d'objets en service ou pendant la maintenance (une chute d'outil par exemple). En général, un choc à basse vitesse sur un stratifié composite ne laisse pas de traces apparentes dans la surface, mais entraîne des ruptures importantes de la matrice à l'intérieur de celui-ci. Lors de l'impact, les contraintes de cisaillement entre les plis provoquent également des délaminages. L'enveloppe de dommages qui en résulte est typiquement de forme conique (Figure ***Fig. II. 32).***

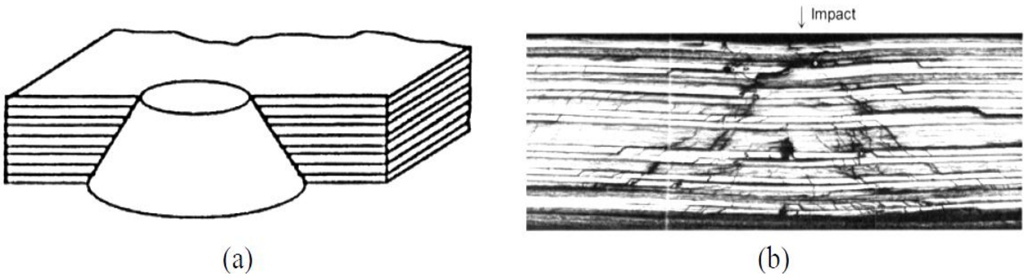


Fig. II. 32 : (a) Enveloppe conique de dommage par impact, (b) Section transversal d'un stratifié après impact.

A l'exception de l'impact balistique, la majorité de l'endommagement se produit dans la matrice. La résistance en traction dans le plan du stratifié ne serait donc pas dégradée considérablement. Cependant, les délaminages diminuent significativement la stabilité en compression du stratifié. *Il peut donc subir des flambages locaux qui entraînent la propagation des délaminages ou le flambage global qui conduit à la rupture finale*.

II. 15. 3. Tolérance aux dommages et délaminage

L'utilisation des matériaux composites dans des structures primaires d'avion nécessite des procédures de certification afin d'assurer l'intégrité des structures. La certification consiste à démontrer la résistance en statique, la tenue en fatigue, et la tolérance aux dommages par des analyses et des essais. Tandis que la résistance en statique et la durée de vie en fatigue s'adressent aux structures saines, la tolérance aux dommages concerne ***la capacité de supporter le chargement*** ou de maintenir le fonctionnement de la structure avec la présence des défauts ou des endommagements.

La tolérance aux dommages peut être définie comme la capacité d'une structure de résister à la rupture en présence de défauts, fissures, ou autres dommages pour un temps spécifié. La structure doit être conçue de telle façon qu'un dommage créé pendant une opération normale soit détectable avant que la résistance ou la rigidité de la structure chute à un niveau qui ne soit pas admissible.

D'un point de vue de la sécurité, il y a trois aspects de la tolérance aux dommages.
Premièrement, une structure contenant des défauts non-détectables doit pouvoir servir pendant toute sa durée de vie. Deuxièmement, les défauts détectables doivent être tolérés pendant un certain délai, jusqu'à leur détection. Enfin, dans le cas de l'endommagement accidentel en vol, l'avion doit pouvoir compléter sa mission en sécurité.
La distinction entre la fatigue et la tolérance aux dommages est présentée dans la Figure (***Fig. II. 33)***.

La notion de la tolérance aux dommages inclut la détectabilité des défauts. Une fois détectable, l'analyse de la propagation des défauts est donc dans le domaine de la tolérance aux dommages.

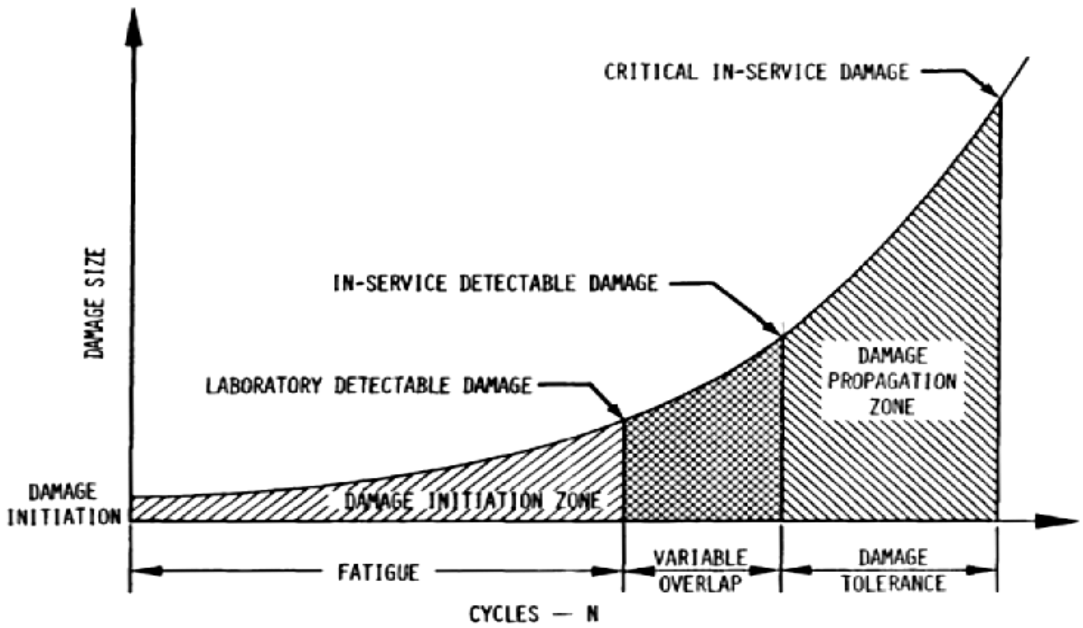


Fig. II. 33: Domaines de l'analyse en fatigue et de l'analyse en tolérance aux dommages

Des études concernant les mécanismes de rupture des stratifiés composites indiquent que la propagation des défauts de délaminage est le mode de rupture le plus dominant pour la durée de vie de la structure *La propagation de délaminage sous un chargement de compression peut être induite par le flambage des sous stratifiés.*

Ce mode de rupture est considéré comme le plus menaçant pour les structures composites. Des structures dynamiques telles que des pales en composite peuvent nécessiter encore plus d'analyses des contraintes interlaminaires que les structures statiques comme les ailes ou les fuselages.

II. 16. LES MATERIAUX COMPOSITES HYBRIDES:

Les spécialistes des matériaux ont l'habitude de séparer leur domaine entre matériaux organiques et matériaux inorganiques ou minéraux. Les hybrides font le pont entre ses domaines, En associant les propriétés des matériaux organiques et inorganiques donc ouvrent des nouvelles possibilités dans le domaine des revêtements, des membranes et de l'optique.

Un matériau hybride est définit comme un matériau constitué d'au moins deux phases « organique-inorganique » .Au-delà de cette définition toute scientifique se profilent de nombreuses applications industrielles. Ce que l'on cherche à faire avec les matériaux hybrides, c'est d'obtenir des associations de propriétés inédites. D'une manière générale, en effet, la composante minérale apporte des propriétés mécaniques, thermiques, magnétiques, électriques... Tandis que la composante organique apporte une facilité de mise en œuvre (notamment sous forme de couche mince) et des propriétés élastiques, optiques, électrochimiques, biologiques... Grâce au choix quasi infini de leurs formulations, le potentiel des matériaux hybrides est immense. Mais la plupart d'entre eux en sont encore au stade du laboratoire, et les applications industrielles encore peu nombreuses.

L'un des avantages majeurs des stratifiés hybrides est la capacité de faire un mélange de deux fibres ou matrices dans la même structure et d'orienter les fibres de chaque pli afin d'avoir d'excellentes propriétés.

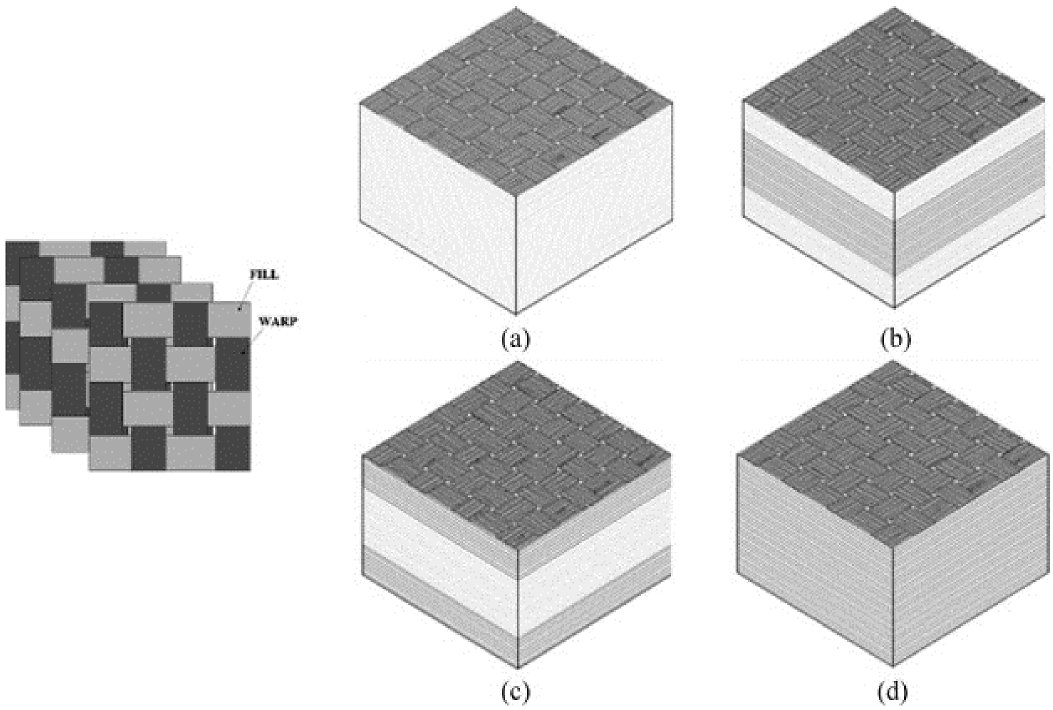


Fig. II. 34 : Verre seul (non-hybride GL), (b) verre /graphite/ verre (hybride GL/GR/GL), (c) graphite/verre/graphite (hybride GR/GL/GR) et (d) graphite seul (non-hybride GR).

Dans ce qui suit les essais faits sur le graphite et le verre sont montrés sous forme de graphes :

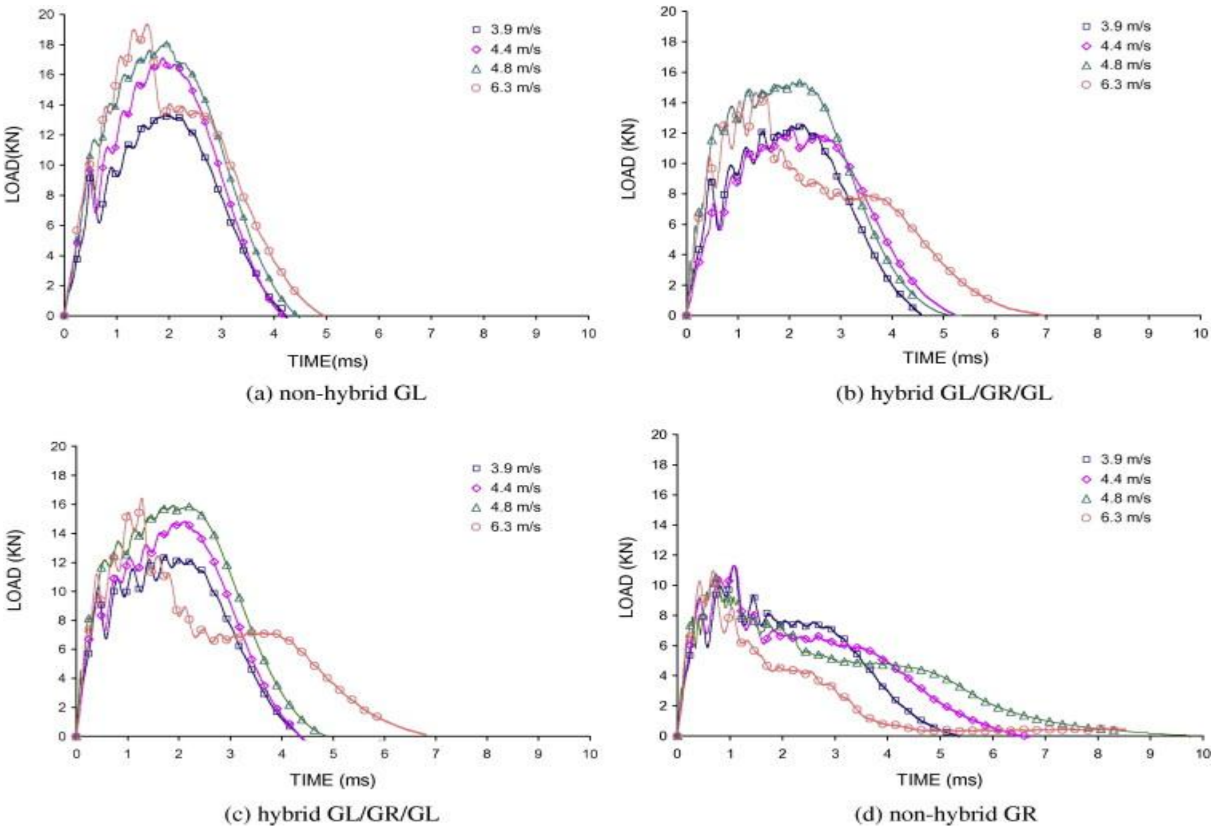


Fig. II. 35 : les fréquences des plaques composites

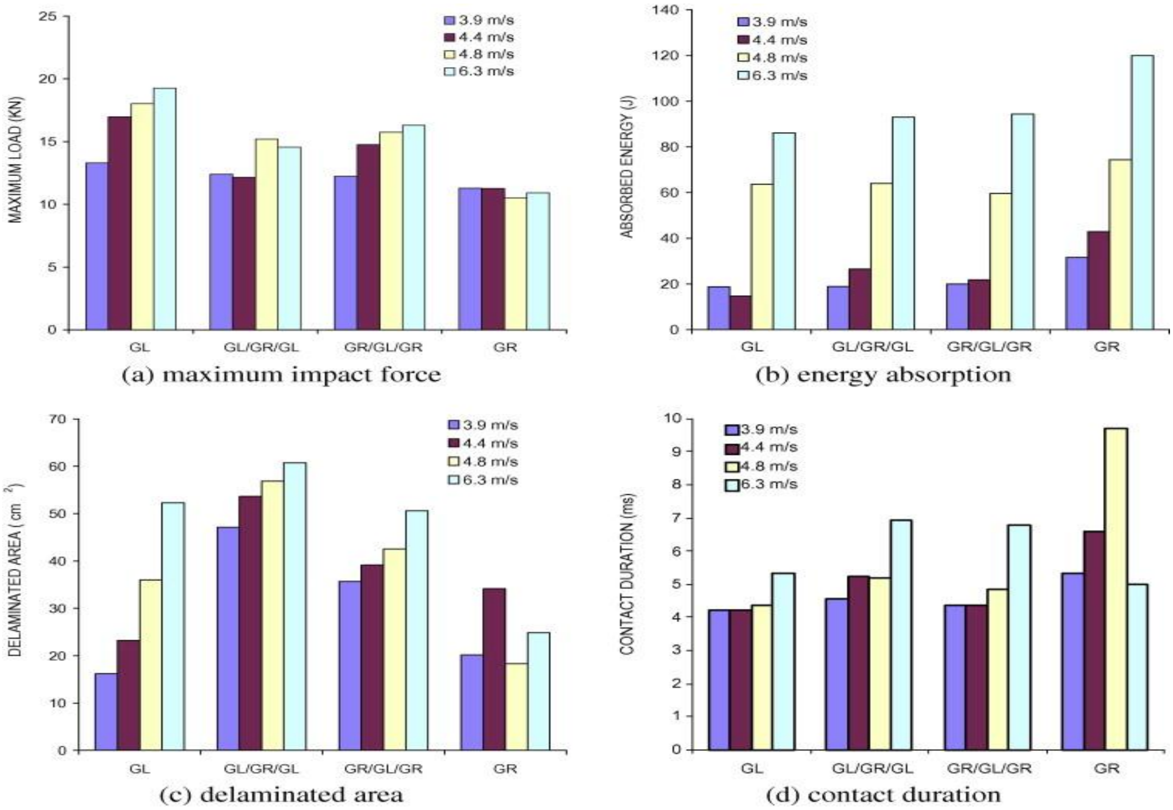


Fig. II. 36 : comparaison des caractéristiques des plaques composites soumises à des forces d'impact

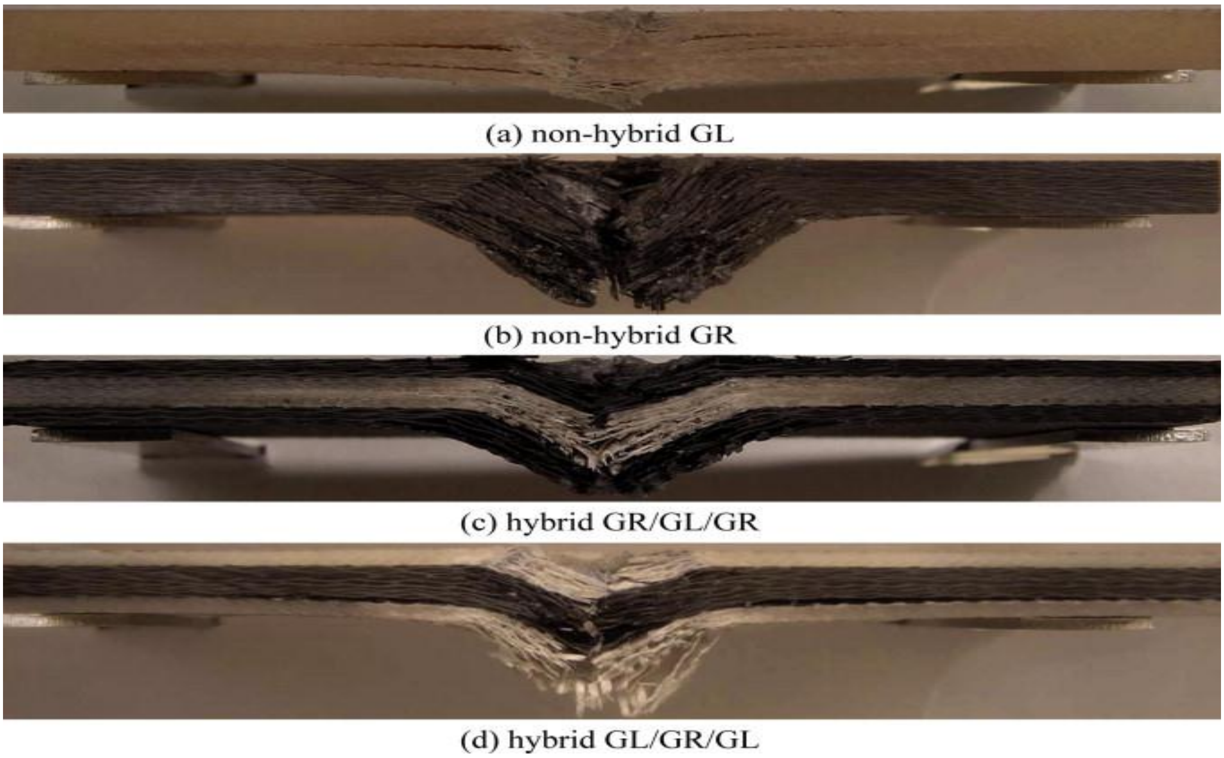


Fig. II. 37 : Fractographies des sections du composite après une force d'impact dynamique d'une vitesse de 6,3 m/s (a) non-hybrid GL, (b) non-hybrid GR, (c) hybrid GR/GL/GR et (d) hybrid GL/GR/GL.

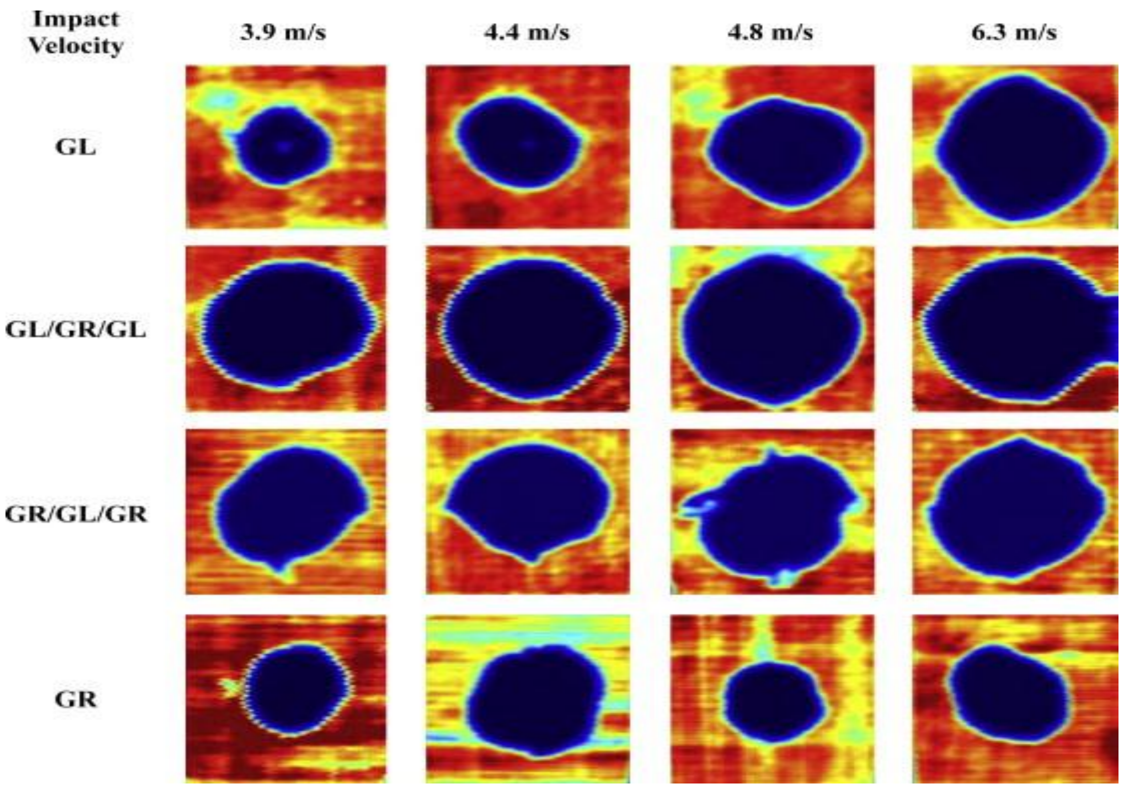


Fig. II. 38 : images ultrasonique C-scan de quatre types de composites testés par une variation de vitesses

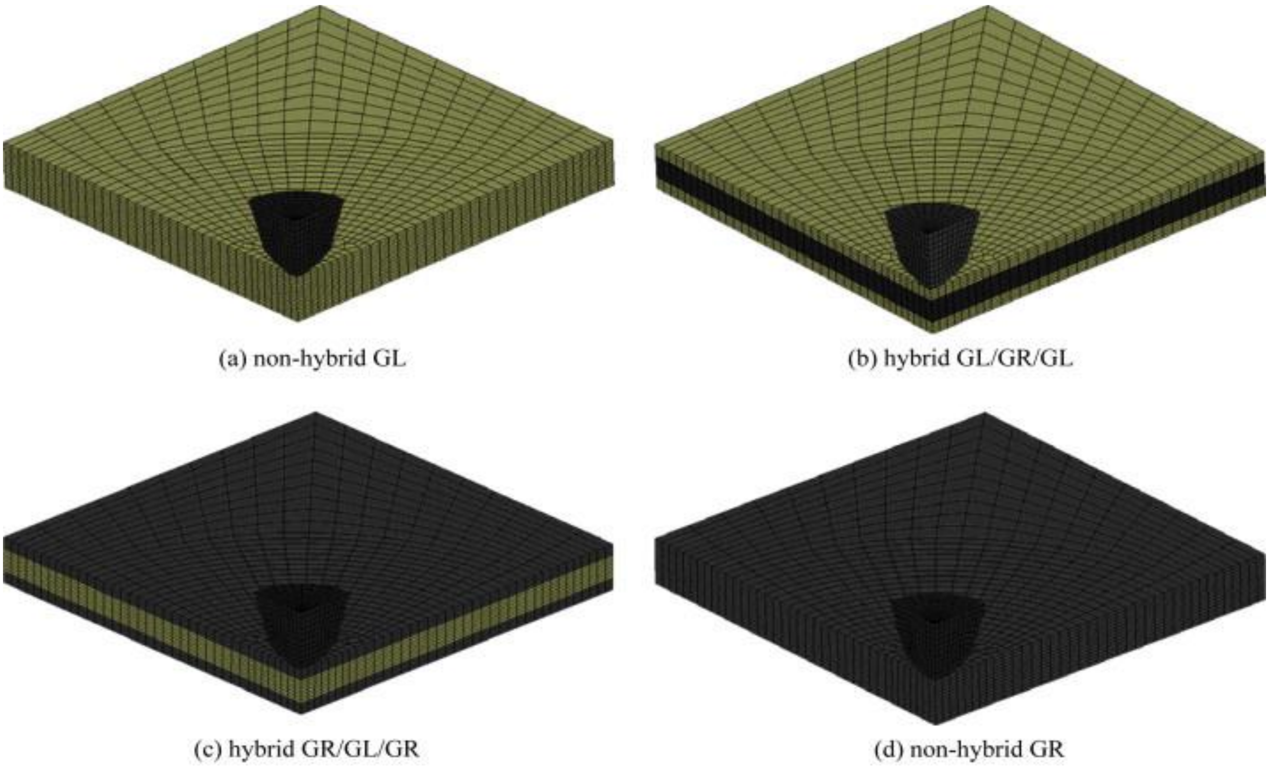


Fig. II. 39 : Simulation par elements finis de plusieurs specimens de composite.

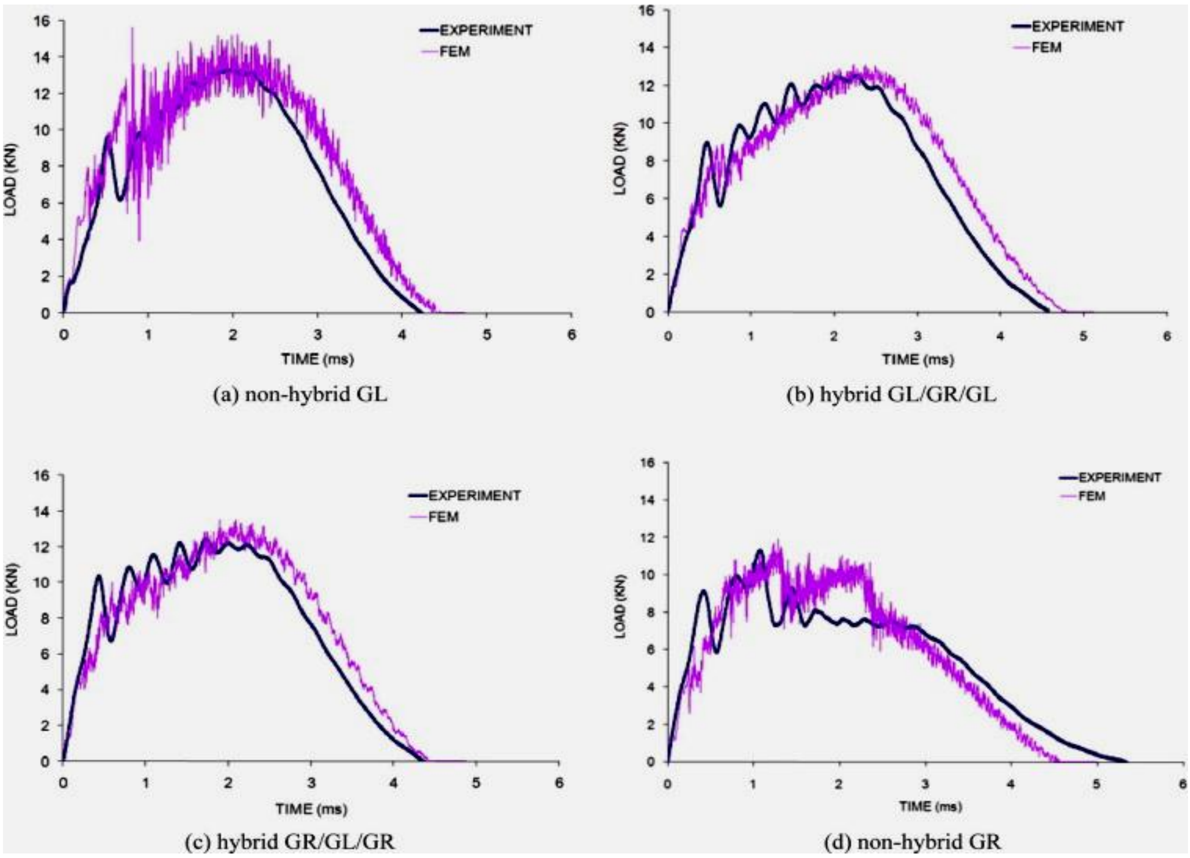


Fig. II. 40 : Comparaison des fréquances determines par les elements finis et la methode expérimentale de différentes plaques composites

(a) non-hybride GL, (b) hybride GL/GR/GL, (c) hybride GR/GL/GR ,(d) non-hybride GR.

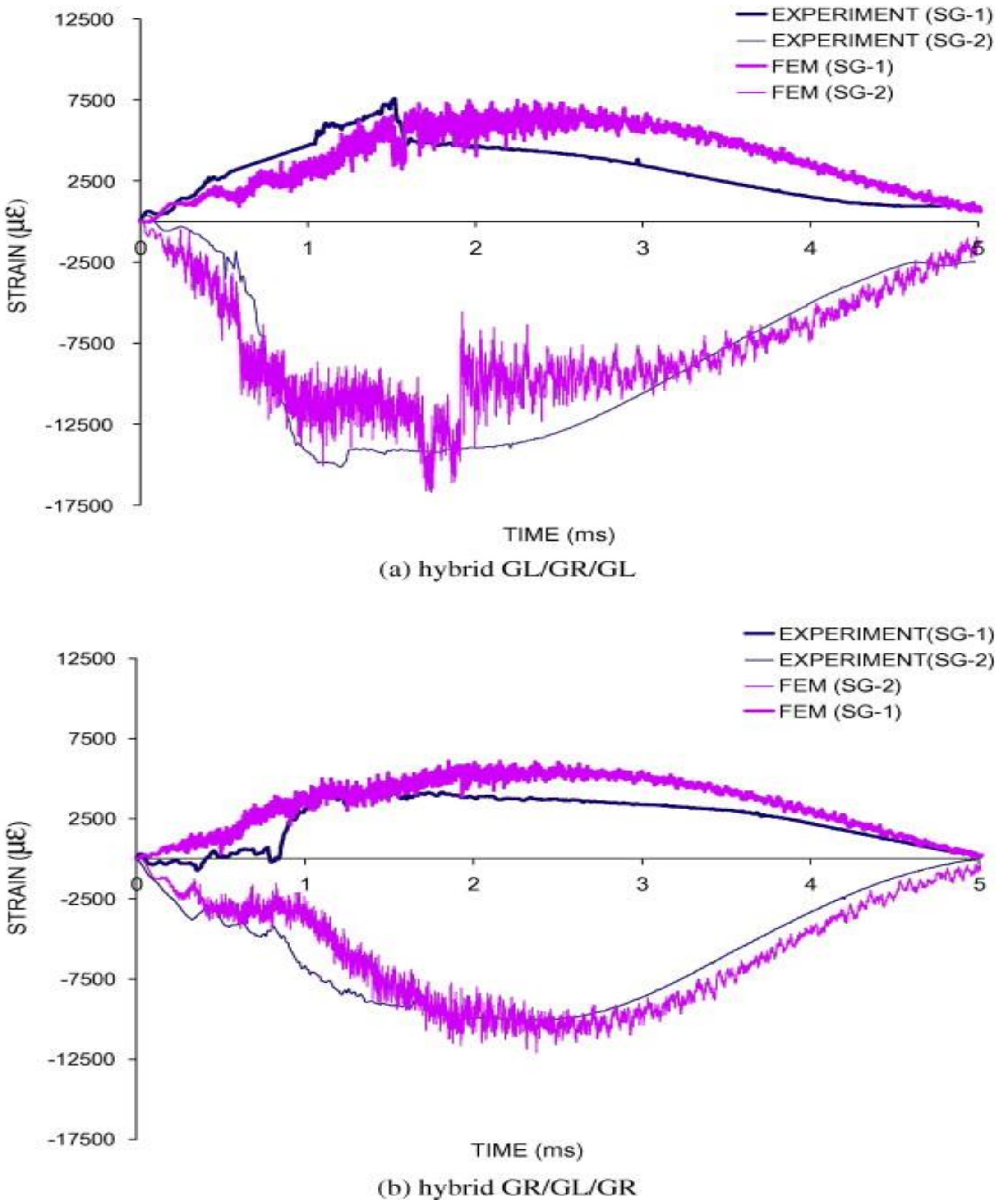


Fig. II. 41: Comparaison de contraintes sous chargement dynamique

De deux plaques: (a) GR/GL/GR et (b) GL/GR/GL.

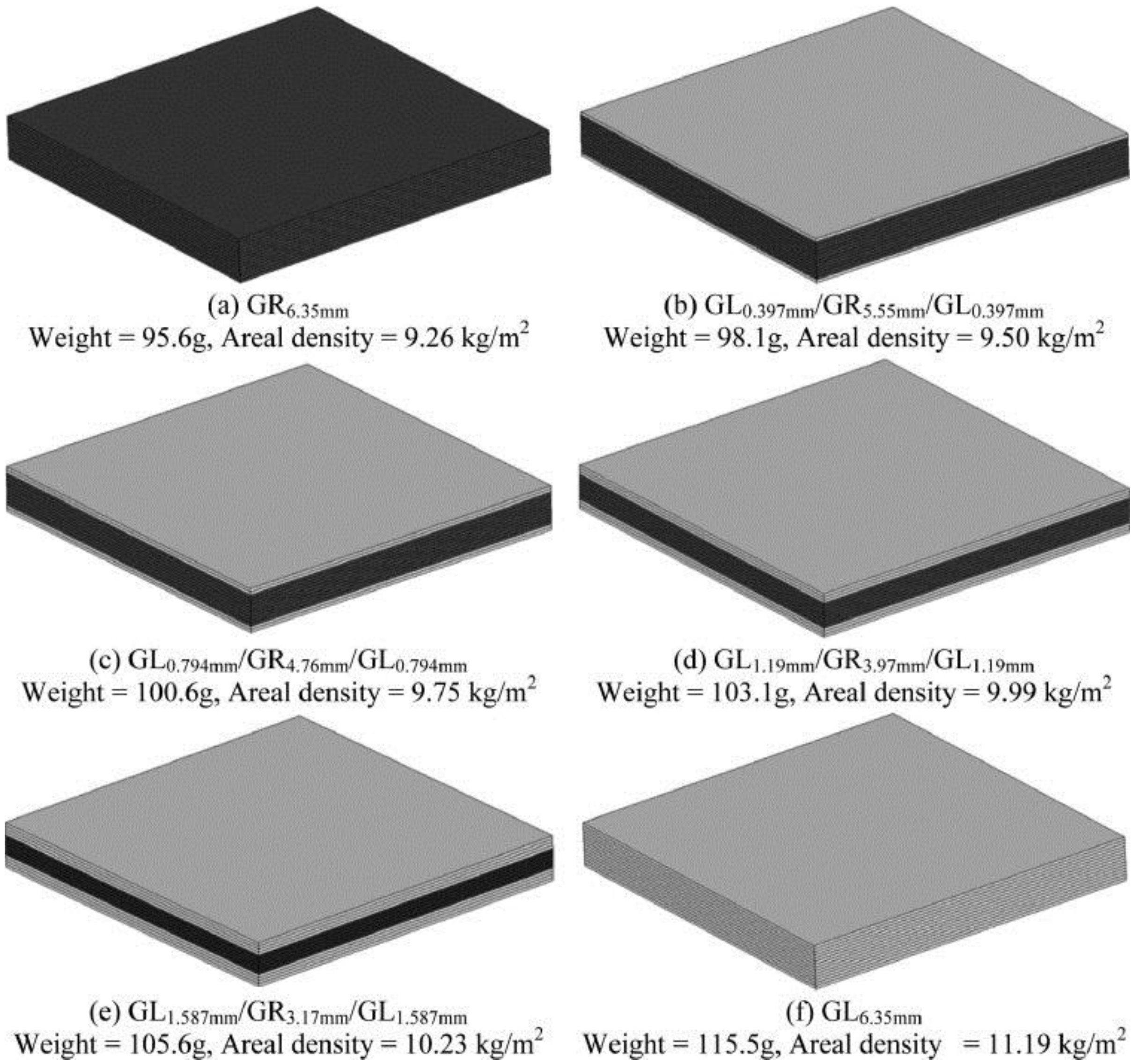


Fig. II. 42. Modèles de matériaux hybrides avec leurs épaisseurs et densités

II. 17 CONCLUSION

Nous avons acquis dans ce chapitre des connaissances sur les matériaux composites conventionnels ainsi que ses domaines d'application et la diffusion de son utilisation à travers le monde. Nous avons fait une synthèse sur l'endommagement et la rupture des composites par les différents phénomènes qui les subissent tout au long de leurs durée de service.

Les matériaux composites hybrides alors l'unanimité parce qu'ils peuvent être façonnés en ajustant leurs propriétés aux exigences spécifiques d'une application, ils constituent des solutions de choix dans des secteurs aussi variés que les transports, bâtiments, la mécaniques et l'aérospatiales.

<u>CHAPITRE III</u>:

« ANALYSE DE L'INSTABILITE PAR FLAMBEMENT DES PLAQUES STRATIFIEES SUR FONDATIONS ELASTIQUES »

III.1. INTRODUCTION

Ce chapitre aborde les principaux aspects théoriques sur les plaques en matériaux composites utilisés dans ce mémoire de thèse, en ce qui concerne leurs fondements théoriques, particulièrement sur les théories utilisés dans l'approximation numérique du champ de déplacement mécanique des structures composites.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques composites dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque qui engendrent souvent des erreurs inacceptables pour le calcul des déflexions, des contraintes et des charges critiques du flambement des plaques épaisses ou modérément épaisses. Ceci est principalement dû à une description inadéquate du cisaillement en jeu.

Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

Développer des théories d'ordre supérieur pour mieux décrire les phénomènes d'instabilité et des approches numériques plus efficaces pour le calculer est devenu tout récemment un domaine très actif de la recherche. Dans cette étude, un modèle de déplacement d'ordre élevé à quatre variables est développé pour l'analyse du flambement des plaques stratifiées composites sur fondations élastiques .L'utilisation du principe des travaux virtuels tire les équations d'équilibre et les solutions analytiques pour la stabilité des stratifiés simplement appuyés sont présentés en utilisant la méthode de Navier.

Les plaques sur les fondations élastiques sont courantes dans les structures civiles. Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs modèles de fondation ont été proposés. La plus simple d'entre eux, c'est le modèle à un seul paramètre ou appelé encore modèle de WINKLER (1867) ; cependant ce modèle est incapable de prendre en compte la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qui stipule qu'il n'y pas d'interaction entre les ressorts adjacents résulte de la négligence de l'influence du sol sur les bords de la plaque. Pour surmonter cet handicap, plusieurs modèles à deux paramètres ont été proposé. Le plus connu est le modèle PASTERNAK (1954) qui a ajouté une couche de cisaillement pour prendre en compte l'interaction entre les ressorts de WINKLER et le sol.

III.2. LES DIFFERENTS MODELES DANS L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLE

III.2.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT) :

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur Reissner (1961), Yang (1966). L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (1950) de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée (***Fig.III. 1)***. Dans ce cas la structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitue d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions.

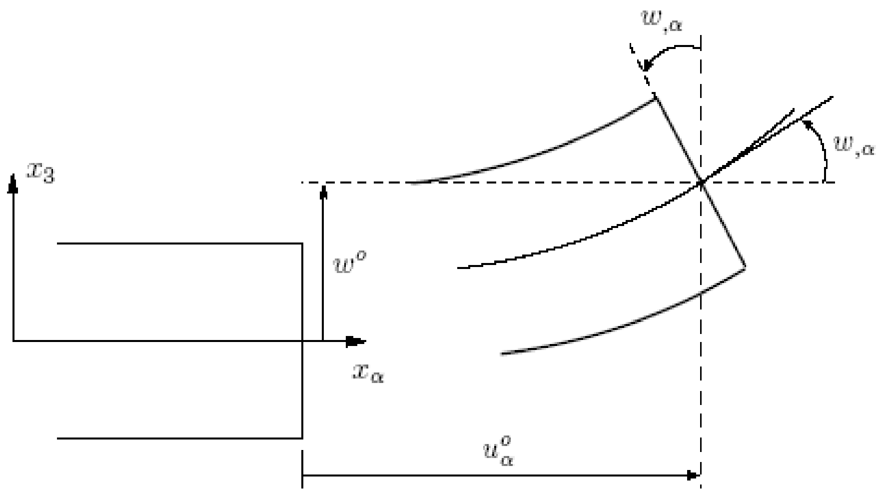


Fig.III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) & ,\alpha = 1,2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}$$

Avec,

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

III.2.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) :

Pour introduire l'effet du cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique [Mindlin] est adoptée :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (***Fig. III.2)***. Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}$$

Avec

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

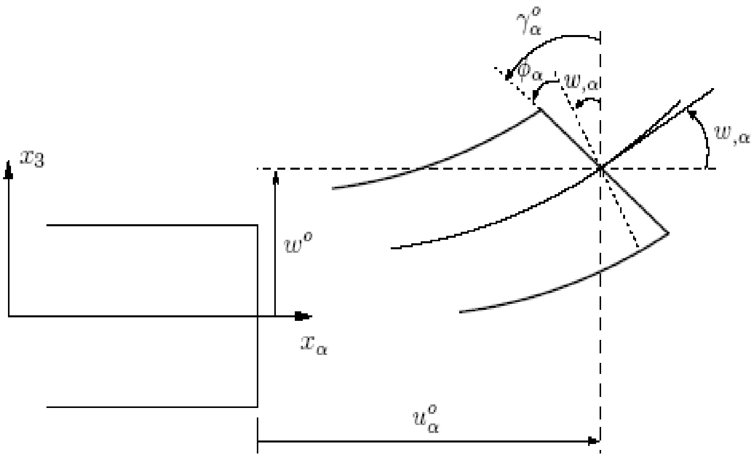


Fig. III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des cœfficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal Whitney (1969). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des cœfficients correcteurs et l'étude des composites épais restes aléatoires par ce type d'approche cinématique. Ce modèle et aussi la Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First order shear deformation theory FSDT).

III.2.3. Les Théories D'ordre Elevé :

Les facteurs de correction du CT dépendent du nombre de couches ou de stratifications présentes dans une plaque ou une coque composite. Pour éviter l'utilisation de ces facteurs de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par Reddy (1984), Reddy et Phan (1985), Reddy (1999) et(2000), Iyengar, Chadrashekhara et al. (1974), Iyengar et Pandya (1982), Kuznetsov et Kartashov (1981), Vlasov (1957), Krishna Murty (1977) et (1986) , Krishna Murtyet Vellaichamy (1987) .Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur (selon Reddy (1990) ,Mallikarjuna et Kant (1993)).

Certains auteurs ont adopté des théories dites d'ordre supérieur où le champ de déplacements est en général défini par une série de Taylor de la forme :

$$u_i(x_1,x_2,x_3)=u_i^0(x_1,x_2)+z\phi_i^{0(1)}(x_1,x_2)+z^2\phi_i^{0(2)}(x_1,x_2)+z^3\phi_i^{0(3)}(x_1,x_2)+z^4\phi_i^{0(4)}(x_1,x_2)+...$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{o(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{o(i)}=0$ pour j= 2, 3,4 …

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement on série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)}=\phi_i^{o(2)}=\phi_i^{o(3)}=\phi_i^{o(1)}=0,\phi_i^{o(3)},\alpha=\{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1,x_2,x_3=z)=u_\alpha^0(x_1,x_2)-zw_{,\alpha}+f(z)\gamma_\alpha^0(x_1,x_2) \\ u_3(x_1,x_2,x_3=z)=w(x_1,x_2) \end{cases}$$

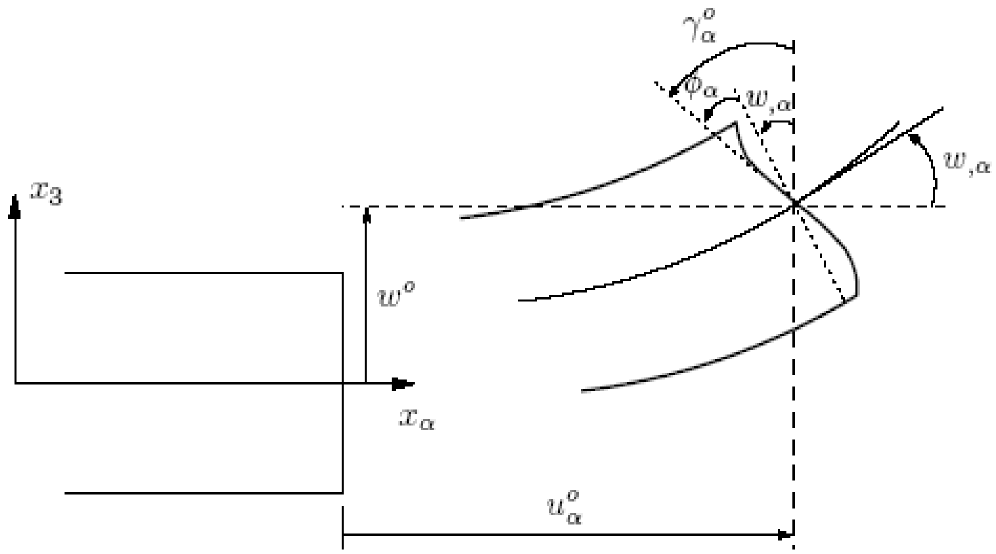


Fig.III.3 : ***Cinématique de la théorie d'ordre supérieur***.

Selon l'expression de la frontière de cisaillement f(z), quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec ;

$$f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)$$

- L'approche de Reissner, Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z)=\frac{5}{4}z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)$$

- L'approche de Levinson , Murthy (1981) et Reddy avec ;

$$f(z)=z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)$$

Dans le modèle de [Reddy], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier avec ;

$$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{z}{h}\right)$$

Touratier (1991) propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{z}{h}\right)=\frac{h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1}$$
$$=z\left(1-\frac{\pi^2}{3!}\frac{z^2}{h^2}+\frac{\pi^4}{5!}\frac{z^4}{h^4}-\frac{\pi^6}{7!}\frac{z^6}{h^6}+...\right)$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cites précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux cœfficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy].

Récemment, Afaq et al. (2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z)=ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse *locale à l'interface* des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).

L'approche de Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z)=z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \qquad \alpha>0$$

z: étant l'épaisseur du multicouche.

III .3. COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UNE COUCHE DE MATERIAU ORTHOTROPE

III .3.1. Comportement dans les axes du matériau :

Le comportement élastique d'un matériau orthotrope, rapporte à ses axes principaux (***Fig. III-4)***, peut être décrit soit par sa matrice de rigidité C ,

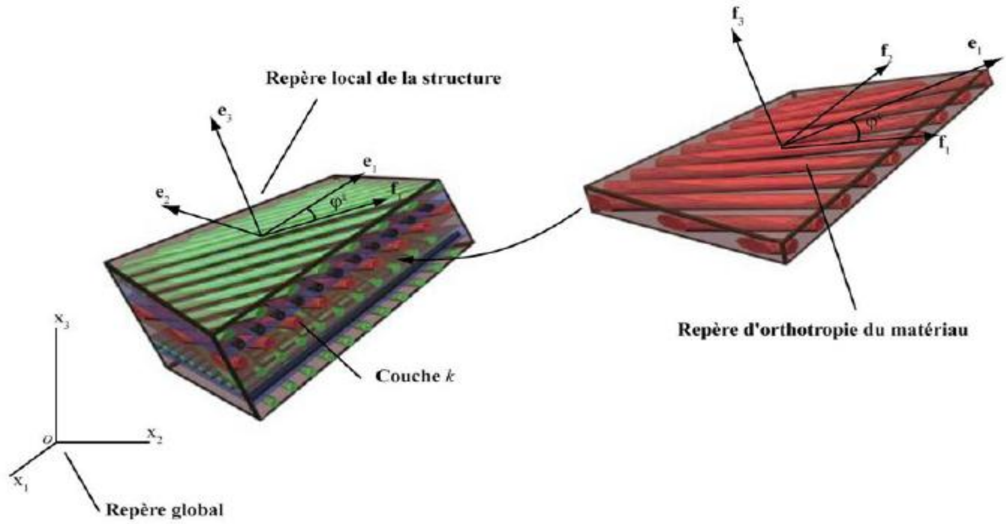


Fig. III. 4 : Orientation des couches d'un stratifié orthotrope [Cugn 2004]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{III.1}$$

Soit par la matrice de souplesse en définie par S :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{III.2}$$

III.3.2. Etat de contraintes planes :

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.3}$$

La déformation normale « ε_z » peut être exprimée en fonction des composantes des contraintes planes en utilisant le faite que $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{36}\tau_{xy} \tag{III.4}$$

Dans le plan matériau principal, les termes des coefficients de rigidité C 16 (i ≠ 6) sont nuls, par conséquent, $Q_{16} = Q_{26} = 0$. .Ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.5}$$

En inversant cette dernière équation, nous aurons :

Les éléments de cette matrice en contrainte plane sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.6}$$

Où : $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{12} = \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

Etant donné que la matrice de souplesse est symétrique S_{21}= S_{21} donc nous aurons :

$$\frac{\upsilon_{12}}{E_1} = \frac{\upsilon_{21}}{E_2}$$

Les constantes qui peuvent être mesurées dans le laboratoire d'une façon exacte sont $E_1, E_2, \upsilon_{21}, G_{21}$. Une mesure exacte du coefficient de poisson υ_{21} est souvent très difficile car, il est très petit pour plusieurs matériaux composites.

Les expressions explicites des termes Q_{ij} en fonction des constantes de l'ingénieur :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\upsilon_{12}\,\upsilon_{21}} \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\upsilon_{12}\,\upsilon_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\upsilon_{12}\,E_2}{1-\upsilon_{12}\,\upsilon_{21}} = \frac{\upsilon_{21}\,E_1}{1-\upsilon_{12}\,\upsilon_{21}} \qquad Q_{66} = G_{12}$$

III .3.3. Constantes de rigidités réduites d'un composite orthotrope en dehors de ces axes principaux :

On considère la rotation à travers un angle θ autour d'un axe « z » comme est indiqué dans la ***Fig. III-5***:

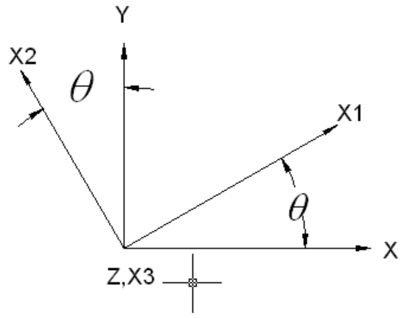


Fig. III. 5*: *Transformation par rapport à un axe

Les cosinus directeurs pour ces transformations sont exprimés en fonctions de l'angle θ.

$m = \cos\theta$ Et $n = \sin\theta$

L'équation constitutive de contrainte plane dans un repère arbitraire x-y est alors écrite comme Suit :

$$\{\sigma\}_x = \left[\overline{Q}\right]\{\varepsilon\}_x \tag{III.7}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.8}$$

Ou les termes $\overline{Q}_{ij}$ sont définis comme suit :

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11} m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{22} n^4 \quad \text{(III-9a)}$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{12}(n^4 + m^4) \quad \text{(III-9b)}$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11} n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{22} m^4 \quad \text{(III-9c)}$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) m^3 n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) n^3 m \quad \text{(III-9d)}$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) m n^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) n m^3 \quad \text{(III-9e)}$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{66}(n^4 + m^4) \quad \text{(III-9f)}$$

III .4. THEORIE DES STRATIFIES

III .4.1. Champ de déplacements :

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Henkey-Mindlin, schéma de Kirchhoff) se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y,0) + \varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y,0) + \varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y,0) \end{cases} \quad \text{(III.10)}$$

(u_0, v_0, w_0) est le déplacement du plan moyen.

III .4.2. Champ de déformations :

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements soit

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + z\dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + z\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right) + z\left(\dfrac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \end{cases} \quad \text{(III.11)}$$

Pour un schéma ou les déformations en cisaillement transverse sont nulles :

$$\gamma_{xz} = 0 \text{ et } \gamma_{yz} = 0 \tag{III.12}$$

Cette hypothèse implique :

$$\begin{cases} \varphi_x(x,y) = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x,y) = -\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases} \tag{III.13}$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v_0}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \end{cases} \tag{III.14}$$

La matrice de la déformation se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{III.15}$$

Le champ des déformations est la superposition :

- des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{III.16}$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{III.17}$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M. Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

En posant :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{(III.18)}$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion :

Ou plus simplement : $\{\varepsilon\}_x = \{\varepsilon^0\}_x + z\{k\}_x$

C'est *l'équation fondamentale* de la théorie des stratifiés.

III .4.3. Champ de contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment de la façon suivante :

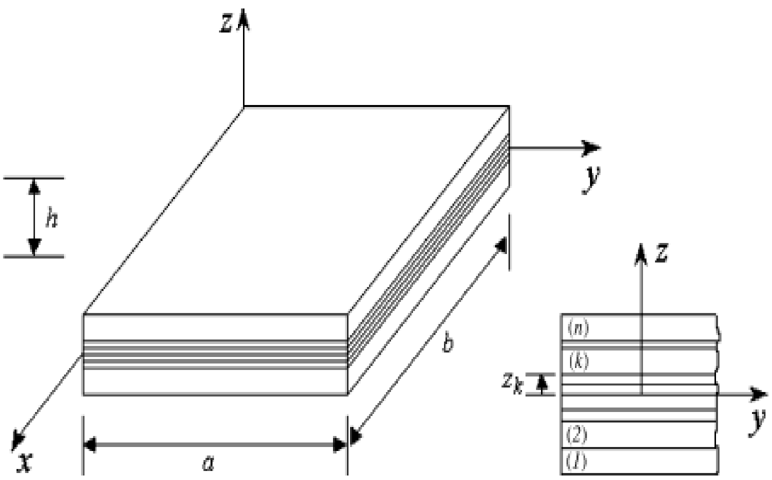


Fig. III. 6: Les couches d'un stratifié [Loli 2000]

L'expression des contraintes peut être maintenant déterminée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.19)}$$

Soit :

$$\{\sigma\}_x = \left[\overline{Q}\right]^k \{\varepsilon\}_x \qquad \text{(III.20)}$$

Ou $\left[\overline{Q}\right]^k$ matrice de rigidité réduite transformée du k^{ieme} correspondant à la cote z.

À partir d'équation (III.20) nous pouvons obtenir :

$$\{\sigma\}^k = \left[\overline{Q}\right]^k \{\varepsilon^0\} + \left[\overline{Q}\right]^k z\{k\}_x \qquad \text{(III.21)}$$

III .4.4. Expression des résultantes et moments :

III .4.4.1. Résultantes en membrane :

Les forces par unité de longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ (voir Figure ci-dessous) sont définies

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \; dz \qquad \text{(III.22)}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \; dz \qquad \text{(III.23)}$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \; dz \qquad \text{(III.24)}$$

Comme suit :

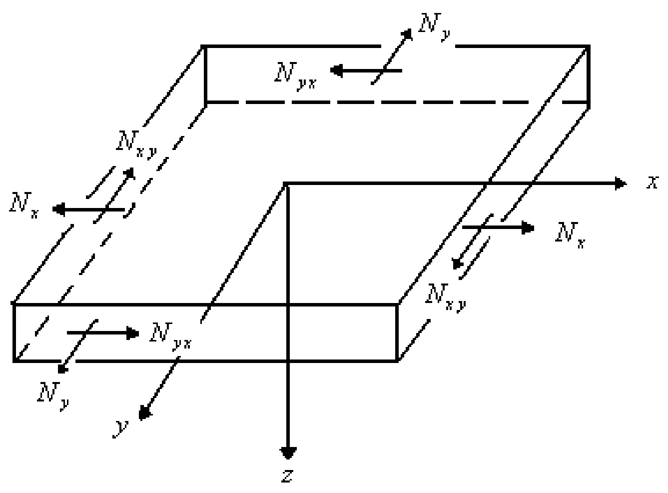


***Fig. III. 7*: Forces par unités de longueur**

Les trois équations peuvent être sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} \, dz \tag{III.25}$$

Nous aurons :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\overline{Q}\right]^k \{\varepsilon^0\} \, dz + \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\overline{Q}\right]^k \{k\} z dz \tag{III.26}$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\overline{Q}\right] \, dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\overline{Q}\right]^k z \, dz \right) \{k\} \tag{III.27}$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\}$$

Ou :

$$[A] = \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q}\right]^k (z_k - z_{k-1})$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q}\right]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

La matrice $\left[\overline{Q}\right]^k$ est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (III-27) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\varepsilon^0\}$, et les courbures du stratifié {k} par les matrices [A] et [B]. La matrice [A] représente « la membrane » et la matrice [B] représente « la matrice de couplage membrane – flexion ».

III .4.4.2. Moments par unité de longueur :

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ comme l'intégrale des forces « $\sigma_i zdz$ », ainsi :

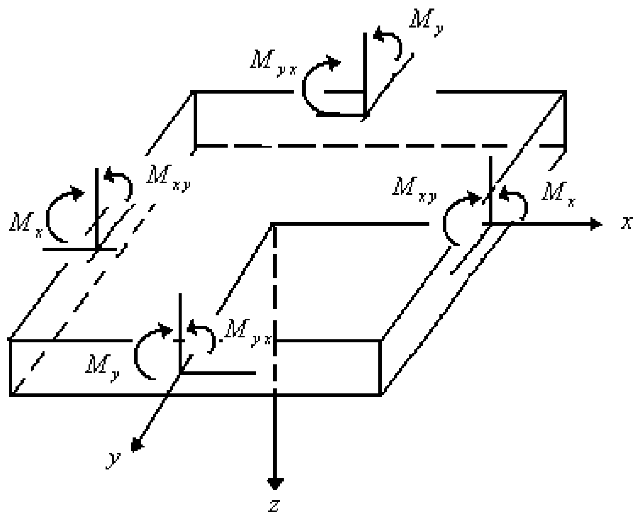


Fig. III. 8 : Moments par unités de longueur

M_x : Moment fléchissant d'axe y, dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y.

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x\} z dz \qquad \text{(III.28)}$$

M_y : Moment fléchissant d'axe x, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x.

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_y\} z dz \qquad \text{(III.29)}$$

M_{xy} : Moment de torsion d'axe x, dû aux contraintes τ_{xy}

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau_{xy}\} z dz \qquad \text{(III.30)}$$

Ou bien sous une forme condensée : $\{M\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} z dz$

Substituant l'équation (III-20) dans les équations (III-28), (III-29) et (III-30), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \qquad \text{(III.31)}$$

Ou la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{Q}\right]^{k}\left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right) \qquad \text{(III.32)}$$

III.4.5. Equation constitutive d'un stratifié :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les forces et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures, Elle s'obtient en regroupant les expressions des résultantes et moments suivant une seule écriture matricielle sous la forme.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \mathrm{k} \end{Bmatrix} \tag{III.33}$$

Les termes de la matrice introduite sont donnés par les expressions suivantes :

$$[\mathrm{A}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \overline{\mathrm{Q}}\,\mathrm{dz} \tag{III.34}$$

$$[\mathrm{B}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \overline{\mathrm{Q}}\,\mathrm{zdz} \tag{III.35}$$

$$[\mathrm{D}] = \int_{-h/2}^{-h/2} \overline{\mathrm{Q}}\,\mathrm{z}^2\mathrm{dz} \tag{III.36}$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et la matrice de couplage membrane- flexion- torsion. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristique mécanique différente. Le couplage est nul (B=0), seulement dans le cas ou le stratifié est symétrique. La symétrie implique une propriété des couches, de leurs cotes et de leurs orientations.

III .5. LA FORMULATION DE LA PRESENTE METHODE DE CALCUL DES CHARGES CRI TIQUES DE FLAMBEMENT

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues impliqués dans la présente théorie de déformation trigonométrique de cisaillement n'est que de quatre, contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement. La théorie présentée ne nécessite pas l'introduction de coefficients correcteurs pour le calcul des contraintes de cisaillement transverse et prend en compte leur distribution parabolique à travers l'épaisseur de la plaque et satisfaire les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. L'exactitude de la théorie est démontrée pour la flexion et la vibration libre des plaques par Shimpi et Patel (2006). Elle était utilisée pour le flambement des plaques composites par Kim et al. (2009) et beaucoup d'autres chercheurs.

III.5.1.Les hypothèses de la présente théorie des plaques :

Considérons une plaque rectangulaire d'épaisseur total h composé de n couches orthotropes avec le système de coordonnées comme le montre la (***Fig. III-9*****).**

Hypothèses de la nouvelle théorie sont comme suit:

1. Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations causées sont infinitésimales.
2. Le déplacement transversal *w* comprend deux composantes à la flexion w_b et au cisaillement w_s .Ces composantes sont des fonctions de coordonnées x, y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \tag{III.37}$$

3. La contrainte transversale normale σ_z est négligeable en comparaison avec les autres contraintes normales σ_x et σ_y .

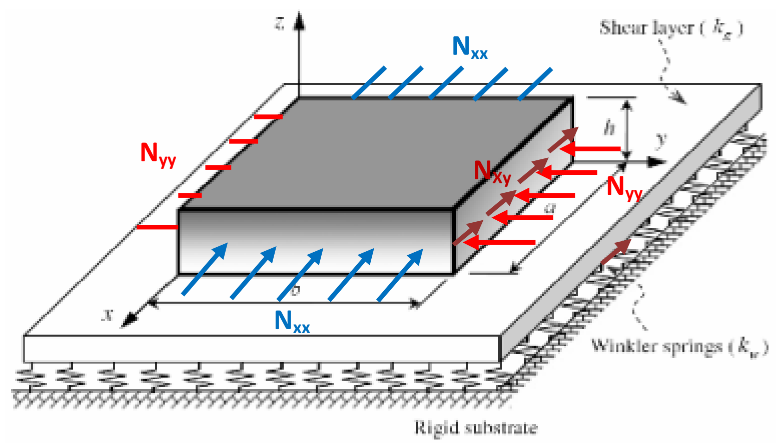


Fig. III. 9 : Plaque stratifiée avec un système de coordonnées (x, y, z) soumise à des charges uniformes de flambement :($N_{xx} = \gamma_1 \overline{N}_{xx}, N_{yy} = \gamma_2 \overline{N}_{yy}, N_{xy} = 0$ ***)***

4. Les déplacements u dans la direction *x* et *v* dans la direction y sont les composantes d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \tag{III.38}$$

Les composants de flexion u_b et v_b peuvent être donnée comme suit :

$$u_b = -z\frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z\frac{\partial w_b}{\partial y} \tag{III.39}$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donner lieu, en collaboration avec w_s , aux variations parabolique de déformations de cisaillement γ_{xz}, γ_{yz}, et donc aux contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz}, à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement, sont nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, l'expression u_s and v_s peut être donnée par :

$$u_s = -f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \tag{III.40}$$

III.5.2. Cinématique et équations constitutives :

Sur la base des hypothèses formulées dans le paragraphe précédent, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III.37) - (III.40),

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\
v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \\
w(x,y,z) &= w_b(x,y) + w_s(x,y)
\end{aligned}
\tag{III.41.a}
$$

$$
f(z) = \frac{3\pi}{2} hTanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} zSech^2\left(\frac{1}{2}\right) \tag{III.41.b}
$$

Les déformations sont calculées en dérivant l'éq. (III.41.a) :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
\gamma_{xz} &= (1 - f'(z))\frac{\partial w_s}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= (1 - f'(z))\frac{\partial w_s}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{III.42}
$$

$$
f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
$$

Les relations constitutives d'une plaque peuvent être écrites en fonction de la matrice de rigidité **Q**, comme:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\
Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}
$$

où (σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz}) et (ε_x , ε_y , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{yx}) sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. En utilisant les propriétés des matériaux, les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur :

$$
\begin{aligned}
&Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}}, Q_{12} = \frac{\upsilon_{12}E_2}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}} \\
&Q_{66} = G_{12} \qquad , Q_{44} = G_{23} \qquad , Q_{55} = G_{13}
\end{aligned}
$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13}\\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23}\\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45}\\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}$$

Coefficients de rigidités réduites $\overline{Q}_{ij}$ d'un composite orthotrope, en dehors de ses axes principaux sont définis comme suit :

$$m = cos\theta \qquad \text{et} \qquad n = sin\,\theta$$

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2\,Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \tag{III.43.a}$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4\,Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(n^4 + m^4) \tag{III.43.b}$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2\,(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \tag{III.43.c}$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2\,Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^3m \tag{III.43.d}$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m\,n^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n\,m^3 \tag{III.43.e}$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(n^4 + m^4) \tag{III.43.f}$$

$$\overline{Q}_{44} = Q_{44}m^4 + Q_{55}n^4 \tag{III.43.g}$$

$$\overline{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})m\;n \tag{III.43.h}$$

$$\overline{Q}_{55} = Q_{55}m^4 + Q_{44}n^4 \tag{III.43.i}$$

III.5.3. Détermination des équations d'équilibre:

Le principe des travaux virtuels est utilisé afin d'accéder aux équations d'équilibre, Cette méthode est donné par Reddy (1981) pour l'analyse du flambement des systèmes de structure.

$$\delta\int (U + U_f - W) = 0 \tag{III.44}$$

U est l'énergie de déformation, U_f est l'énergie de déformation de la fondation.

W est la force des travaux extérieurs. Utilisant le principe de minimum d'énergie totale et intégrant par partie:

$$\begin{aligned}&\int_{-h/2}^{h/2}\int_{\Omega}[\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}]d\Omega d\Omega\\ &+\int_{\Omega}[F_e\delta w + \overline{N}_x w_{,xx}\delta w + \overline{N}_y w_{,yy}\delta w]d\Omega = 0\end{aligned} \tag{III.45}$$

Ou $\overline{N}_x$ et $\overline{N}_y$ sont les charges de compression appliquées dans le plan.

F_e est la densité de la fondation de type *Pasternak* avec deux paramètres :

$$F_e = K_0 w - K_1 \nabla^2 w \tag{III.46}$$

$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ le Laplacien.

K_0 et K_1 Sont la rigidité normale et la rigidité du cisaillement de la fondation élastique, respectivement.

Si la fondation est de type linéaire *Winkler*, le coefficient $K_1 = 0$ dans l'équation (III.46) Aiello (1999).

En utilisant les équations (III.41) à (III.45), on obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [\delta u \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \delta u \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \delta v \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \delta v \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \delta w_b \frac{\partial^2 M^b_{xx}}{\partial x^2} + 2\delta w_b \frac{\partial^2 M^b_{xy}}{\partial x \partial y} + \delta w_b \frac{\partial^2 M^b_{yy}}{\partial y^2} \\
&+ \delta w_s \frac{\partial^2 M^s_{xx}}{\partial x^2} + 2\delta w_s \frac{\partial^2 M^s_{xy}}{\partial x \partial y} + \delta w_s \frac{\partial^2 M^s_{yy}}{\partial y^2} + \delta w_s \frac{\partial R_x}{\partial x} + \delta w_s \frac{\partial R_y}{\partial y}] d\Omega \\
&- \int_\Omega [F_e(\delta w_s + \delta w_b) + \delta w_b \overline{N}_x (\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}) + \delta w_b \overline{N}_y (\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}) + \\
&\delta w_s \overline{N}_x (\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}) + \delta w_s \overline{N}_y (\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2})] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{III.47}$$

Ou les efforts et les moments sont définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
(N_i, M_i^b, M_i^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z)) \sigma_i dz (i = xx, yy, xy), \\
R_i &= \int_{-h/2}^{h/2} (1 - f'(z)) \sigma_i dz (i = xx, yy)
\end{aligned} \tag{III.48}$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'équation (III.47) en intégrant par parties les gradients de déplacement et recueillir les coefficients δu_0, δv_0, δw_b et δw_s. On obtient les quatre équations d'équilibre associée à la présente théorie :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{III.49 .a}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \tag{III.49 .b}$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^b}{\partial y^2} - Fe - \overline{N}_x\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) - \overline{N}_y\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{(III.49.c)}$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \delta w_s \frac{\partial^2 M_{yy}^s}{\partial y^2} - Fe - \overline{N}_x\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) - \overline{N}_y\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} = 0$$

(III.49 .d)

Dans les équations précédentes, les résultantes des efforts sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & B_{ij}^s \\ A_{ij} & D_{ij} & D_{ij}^s \\ B_{ij}^s & D_{ij}^s & C_{ij}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^b \\ \varepsilon^s \end{Bmatrix} \quad (i,j = 1,2,6), \quad \{R\} = [F_{ij}]\{\gamma\} \quad (i,j = 4,5) \qquad \text{(III.50)}$$

$$\text{Où} \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \; \varepsilon^b = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \; \varepsilon^s = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \; \gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.51)}$$

Les constantes de rigidité sont données comme:

$$\{A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, C_{ij}\} = \int_{-h:2}^{h:2} \{1, z, f(z), z^2, zf(z), [f(z)]^2\} \overline{Q_{ij}} dz \quad i,j = 1,2,6$$

$$\{F_{ij}\} = \int_{-h:2}^{h:2} [f'(z)]^2 \overline{Q_{ij}} dz \quad i,j = 4,5 \qquad \text{(III.52)}$$

III.5.4. Les solutions analytiques du problème :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en conformité avec l'appui type utilisé. Nous sommes concernés ici par les solutions analytiques pour la plaque en composite simplement appuyée sur les quatre cotés. On a donc les conditions aux limites suivantes qui ont été tirés par le principe des travaux virtuel précédemment :

$$v_0(0,y) = w_b(0,y) = w_s(0,y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0,y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0,y) = 0 \qquad \text{(III.53.a)}$$

$$v_0(a,y) = w_b(a,y) = w_s(a,y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a,y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a,y) = 0 \qquad \text{(III.53.b)}$$

$$N_x(0,y) = M_x^b(0y) = M_x^s(0,y) = N_x(a,y) = M_x^b(a,y) = M_x^s(a,y) = 0 \qquad \text{(III.53.c)}$$

$$u_0(x,\ 0)=w_b(x{,}0)=w_s(x{,}0)=\frac{\partial w_b}{\partial x}(x{,}0)=\frac{\partial w_s}{\partial x}(x{,}0)=0 \qquad \text{(III.53.d)}$$

$$u_0(x,b)=w_b(x,b)=w_s(x,b)=\frac{\partial w_b}{\partial x}(x,b)=\frac{\partial w_s}{\partial x}(x,b)=0 \qquad \text{(III.53.e)}$$

$$N_y(x{,}0)=M_y^b(x{,}0)=M_y^s(x{,}0)=N_y(x,b)=M_y^b(x,b)=M_y^s(x,b)=0 \qquad \text{(III.53 .f)}$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté la force extérieure sous la forme d'une double série trigonométrique Fourrier pour les plaques simplement appuyées comme suit :

$$u_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}cos(\lambda\ x)sin(\mu\ y)$$

$$v_0(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}sin(\lambda\ x)cos(\mu\ y)$$

$$w_b(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn}sin(\lambda\ x)sin(\mu\ y) \qquad \text{(III.54)}$$

$$w_s(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{smn}sin(\lambda\ x)sin(\mu\ y)$$

Où $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$, et m et n sont les nombres de modes.

Nous supposons que la forme de solution pour la suite (u_0, v_0, w_b, w_s) qui satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}\cos(\lambda\ x)\sin(\mu\ y) \\ V_{mn}\sin(\lambda\ x)\cos(\mu\ y) \\ W_{bmn}\sin(\lambda\ x)\sin(\mu\ y) \\ W_{smn}\sin(\lambda\ x)\sin(\mu\ y) \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.54)}$$

Où U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, et W_{smn} et sont des paramètres arbitraires à déterminer.

III.5.5. Flambement d'une plaque composite stratifiée sous une charge axiale :

Pour résoudre le problème du flambement :

$$([K]-[N])\{\Delta\}=\{0\} \tag{III.56}$$

Tel que

$$[N]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2\overline{N}_x+\beta^2\overline{N}_y & \alpha^2\overline{N}_x+\beta^2\overline{N}_y \\ 0 & 0 & \alpha^2\overline{N}_x+\beta^2\overline{N}_y & \alpha^2\overline{N}_x+\beta^2\overline{N}_y \end{bmatrix}, \quad \{\Delta\}=\begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Les constantes de la matrice de rigidité [K] s'écrivent comme suit :

$$a_{11}=-\left(A_{11}\lambda^2+A_{66}\mu^2\right) \tag{III.57.a}$$

$$a_{12}=-\lambda\,\mu\left(A_{12}+A_{66}\right) \tag{III.57.b}$$

$$a_{13}=\lambda[B_{11}\lambda^2+(B_{12}+2B_{66})\,\mu^2] \tag{III.57.c}$$

$$a_{14}=-\lambda[B^s_{11}\lambda^2+(B^s_{12}+2B^s_{66})\,\mu^2] \tag{III.57.d}$$

$$a_{22}=-\left(A_{66}\lambda^2+A_{22}\mu^2\right) \tag{III.57.e}$$

$$a_{23}=\mu[(B_{12}+2B_{66})\,\lambda^2+B_{22}\mu^2] \tag{III.57.f}$$

$$a_{24}=-\mu[(B^s_{12}+2B^s_{66})\,\lambda^2+B^s_{22}\mu^2] \tag{III.57.g}$$

$$a_{33}=k1(-\lambda^2-\mu^2)-k0-\left(D_{11}\lambda^4+2(D_{12}+2D_{66})\lambda^2\mu^2+D_{22}\mu^4\right) \tag{III.57.h}$$

$$a_{34}=k1(\lambda^2-\mu^2)-k0+\left(D^s_{11}\lambda^4+2(D^s_{12}+2D^s_{66})\lambda^2\,\mu^2+D^s_{22}\,\mu^4\right) \tag{III.57.i}$$

$$a_{44}=k1(\lambda^2-\mu^2)-k0-\left(H^s_{11}\lambda^4+2(H^s_{11}+2H^s_{66})\lambda^2\mu^2+H^s_{22}\mu^4+A^s_{55}\lambda^2+A^s_{44}\mu^2\right) \tag{III.57.j}$$

(III.57.k)

Les solutions de l'équation (III.56) sont déterminées par la nullité suivante:

$$\left|[K]-[N]\right|=0 \tag{III.58}$$

Le déterminant de l'équation (III.58) donne les charges critiques du flambement qui seront cal culées dans le chapitre suivant pour différents cas de stratifiés composites hybrides.

III.6. CONCLUSION

Nous vérifions dans la littérature scientifique qu'il existe plusieurs théories employées pour la formulation analytique ou numérique de structures composites. Parmi elles, on trouve la théorie des déformations de cisaillement de premier ordre (FSDT), la théorie des déformations de cisaillement de troisième ordre (HSDT) et la théorie en couches équivalentes partielles dépendantes (TCE-PD), appelée théorie Layer-Wise et la théorie d'ordre élevé à cinq variables.

Dans ce chapitre , nous avons développé la théorie d'ordre élevé à quatre variables avec une fonction f(z).Afin de tirer les équations d'équilibre , le principe des travaux virtuels a été utilisé et la solution de Navier a mené aux solutions analytique du problème du flambement.

Dans le quatrième chapitre, Nous allons valider la présente approche par des exemples numériques la mettant en valeur pour la détermination des charges critiques de flambement pour différents cas de stratifiés et matériaux soumises à plusieurs cas de chargement.

***CHAPITRE IV*:**

DETERMINATION DES CHARGES CRITIQUES DE FLAMBEMENT :

« RESULTATS, VALIDATION ET INTERPRETATIONS »

IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul que nous avons élaboré. Nous présenterons d'abord les résultats concernant une plaque soumise à des charges uni-axiales et reposant sur des fondation élastiques de type Winkler-Pasternak en commençant en premier lieu par la validation de la méthode analytique de résolution des équations d'équilibre, développée dans le cadre de ce travail, en confrontant nos résultats avec ceux d'articles publiés. Nous exposerons par la suite des tableaux de valeurs et des courbes concernant des plaques de différents cas de géométrie et chargement. Nous prendrons en considération plusieurs théories de déformation en cisaillement, plusieurs fonctions de distribution de cisaillement à travers l'épaisseur.

Le même travail sera ensuite réalisé sur les plaques composites hybrides. Nous analyserons les effets de l'hybridation des plaques soumises à des variations uniformes des efforts et d'autre conditions seront pris en considération. La résolution des équations d'équilibre et de la stabilité de la plaque sera concrétisée grâce à la méthode de Navier. La nouvelle théorie raffinée développée dans le cadre de ce travail sera introduite dans chacune des études suscitées. Il est également à noter que dans toute cette étude et pour tous les éléments structuraux étudiés, on a essayé de varier les différents facteurs et observer l'influence de ces derniers sur le comportement en flambement de la plaque stratifiée , d'où on va voir l'effet sur les charges critiques du flambement qui seront analysées et interprétées.

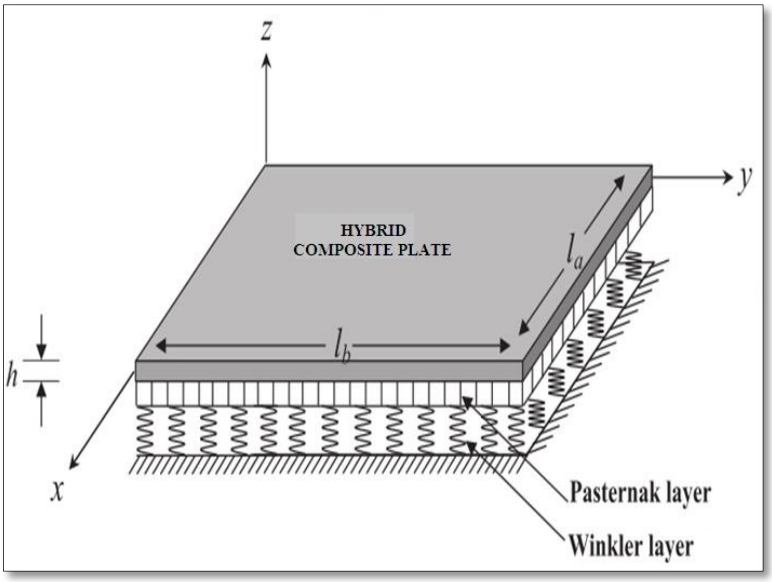


Fig. IV. 1 Plaque stratifiée reposant sur des fondations élastiques

IV .2 ETUDE COMPARATIVE ET VALIDATION DES RESULTATS

Dans cette étape, notre objectif est de vérifier l'exactitude et la bonne convergence du présent travail grâce aux résultats numériques acquis.

Le choix du matériau est mentionné dans le tableau suivant:

Propriétés adimensionnelles	E_{11}/E_{22}	G_{23}/E_{22}	G_{13}/E_{22}	G_{12}/E_{22}	ν_{12}
	20, 30 , 40	0.5	0.6	0.6	0.25

Tab IV.1 : Propriétés du matériau utilisé

La charge critique adimensionnelle du flambement utilisée dans l'analyse suivante s'écrit **:**

$$\lambda_{cr} = N_{cr} \frac{a^2}{E_{22}\, h^3}$$

Afin de valider la présente étude, Le tableau (***Tab IV.1)*** montre les charges critiques adimensionnelles pour une plaque carrée « ***a=b*** » d'empilement croisé **[0°/90°]** avec un rapport d'élancement « ***a/h =10*** ». Les résultats sont ensuite comparés avec ceux effectués par d'autres chercheurs (***Tab IV.2)*** : la théorie d'ordre élevé HSDT, la théorie du premier ordre FSDT, la théorie d'élasticité tridimensionnelle par *Setoodeh* (2004), la théorie d'ordre élevé avec cinq variables par *Akavci* (2007) et la théorie de *Noor* (1975).

Fondation élastique				E_{11}/E_{22}	
k_0	k_1	Théories	20	30	40
0	0	Noor (1975)	7.8196	9.3746	10.8170
		HSDT[a] (1989)	8.1151	9.8695	11.5630
		FSDT[b] (1989)	8.0423	9.7347	11.3530
		Setoodeh (2004)	8.0455	9.6995	11.2382
		Akavci (2007)	8.1223	9.8826	11.5828
		Présente étude	8.1173	9.8549	11.5258
100	0	Setoodeh (2004)	15.3245	17.5249	19.3401
		Akavci (2007)	15.5347	18.2844	20.7765
		Présente étude	15.5484	18.2501	20.6802
100	10	Setoodeh (2004)	27.5347	29.7616	31.5981
		Akavci (2007)	28.0347	30.7844	33.2765
		Présente étude	28.0484	30.7501	33.1802

Tab IV.2 : Comparaison de la charge critique de flambement avec les différentes théories pour une plaque carrée de type [0°/90°] Soumise à une charge de compression avec (a/h= 10).

Après l'étude comparative menée montre que les résultats numériques de la présente théorie sont en bonne concordance avec les autres théories existantes dans la littérature ce qui valide la précision de cette présente méthode.

IV .3 EFFET DU RAPPORT D'ORTHOTROPIE E_{11}/E_{22}

Les tableaux ***IV.3*** et ***IV.4*** montrent l'influence du degré de l'orthotropie sur les charges critiques du flambement, ce dernier est considéré variable en fonction du rapport des modules d'Young suivant les deux directions différentes du matériau E_{11}/E_{22} et comme prévu, il a indiqué très clairement qu'avec l'augmentation de ce rapport, la rigidité de la plaque est augmenté et par conséquent augmentent les charges critiques de flambement.

On voit que les résultats obtenus par la théorie de déformation en cisaillement avec et sans facteur de correction de cisaillement et la théorie raffinée de *Kim et all* (2009) donnent une bonne concordance à la présente théorie trigonométrique quatre variables en variant le rapport d'orthotropie E_{11}/E_{22} et l'élancement transversale de la plaque « ***a/h*** » pour deux cas de chargement uniaxial et biaxial comme il est présenté dans les tableaux ***IV.3*** et

IV.4 suivants.

a/h	Théories	Orthotropie		
		E_{11}/E_{22} =10	E_{11}/E_{22} =25	E_{11}/E_{22}=40
	Présente étude	2.9442[a]	3.4433[a]	3.7976[a]
5	RPT Kim *et al*. (2009)	2.8549[a]	3.3309[a]	3.4800[a]
	FSDT (k=2/3)	2.5042[a]	2.7332[a]	2.8303[a]
	FSDT (k=5/6)	2.8319[a]	3.1422[a]	3.2822[a]
	FSDT (k=1)	3.1027[a]	3.4933[a]	3.6793[a]
10	Présente étude	4.7392[a]	6.1766[a]	7.4115[a]
	RPT Kim *et al*. (2009)	4.6718[a]	6.0646[a]	7.2536[a]
	FSDT (k=2/3)	4.4259	5.4351[a]	6.0797[a]
	FSDT (k=5/6)	4.6367	5.8370[a]	6.6325[a]
	FSDT (k=1)	4.7708	6.1425[a]	7.0690[a]
20	Présente étude	5.3433	7.7105[a]	9.7346[a]
	RPT Kim *et al*. (2009)	5.3267	7.6643[a]	9.6614[a]
	FSDT (k=2/3)	5.2463	7.3701[a]	8.9895[a]
	FSDT (k=5/6)	5.3100	7.5546[a]	9.3049[a]
	FSDT (k=1)	5.3533	7.6834[a]	9.5297[a]
50	Présente étude	5.5418	8.2871[a]	10.6720[a]
	RPT Kim *et al*. (2009)	5.5390	8.2784[a]	10.6576[a]
	FSDT (k=2/3)	5.5249	8.2199[a]	10.5111[a]
	FSDT (k=5/6)	5.5361	8.2566[a]	10.5810[a]
	FSDT (k=1)	5.5436	8.2812[a]	10.6282[a]
100	Présente étude	5.5714	8.3766[a]	10.8209[a]
	RPT Kim *et al*. (2009)	5.5707	8.3744[a]	10.8172[a]
	FSDT (k=2/3)	5.5672	8.3593[a]	10.7788[a]
	FSDT (k=5/6)	5.5700	8.3657[a]	10.7972[a]
	FSDT (k=1)	5.5719	8.3751[a]	10.8095[a]
	CLPT	5.5814	8.4069	10.8715[a]

[a] Mode de la plaque est (m, n=1,2)

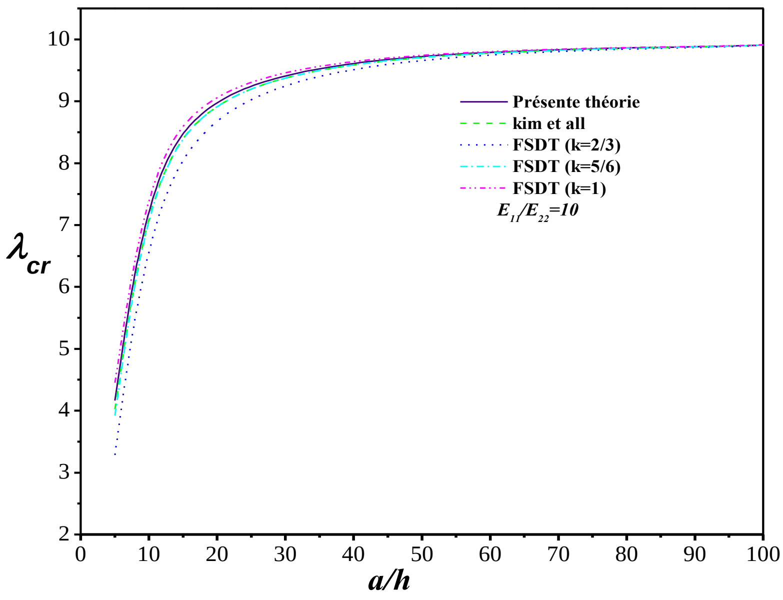
Tab IV.3 : comparaison des charges critiques de flambement d'une plaque carrée [0°/90°] soumise à des efforts biaxials

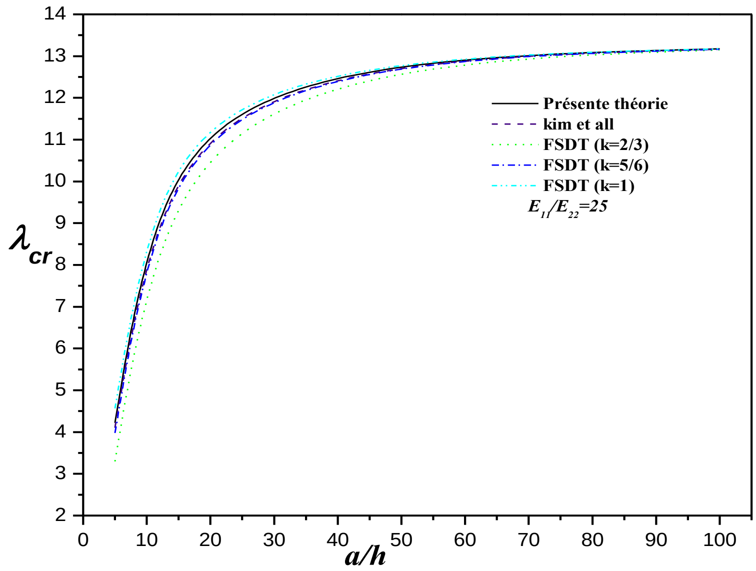
a/h	**Théories**	**Orthotropie**		
		E_{11}/E_{22} =10	E_{11}/E_{22} =25	E_{11}/E_{22} =40
5	Présente étude	4.1630[b]	4.2219[c]	4.2675[c]
	RPT Kim *et al*. (2009)	4.0258[b]	4.1044[c]	4.1525[c]
	FSDT (k=2/3)	3.2849[d]	3.3001[e]	3.3053[e]
	FSDT (k=5/6)	3.9241[c]	3.9794[c]	4.0075[d]
	FSDT (k=1)	4.4488[b]	4.5691[c]	4.6073[c]
10	Présente étude	7.8987[a]	8.7441[b]	9.3882[b]
	RPT Kim *et al*. (2009)	7.7863[a]	8.5471[b]	9.1638[b]
	FSDT (k=2/3)	7.2656[a]	7.7820[b]	8.1208[b]
	FSDT (k=5/6)	7.7748[a]	8.4774[b]	8.9039[b]
	FSDT (k=1)	8.0651[a]	9.0153[b]	9.5197[b]
20	Présente étude	9.3219[a]	11.7306[b]	12.9192[b]
	RPT Kim *et al*. (2009)	9.2811[a]	11.6347[b]	12.8031[b]
	FSDT (k=2/3)	9.1310[a]	11.2544[b]	12.1990[b]
	FSDT (k=5/6)	9.2782[a]	11.6015[b]	12.6339[b]
	FSDT (k=1)	9.3790[a]	11.8453[b]	12.9428[b]
50	Présente étude	9.8174[a]	12.9723[b]	14.4415[b]
	RPT Kim *et al*. (2009)	9.8101[a]	12.9531[b]	14.4177[b]
	FSDT (k=2/3)	9.7830[a]	12.8751[b]	14.2839[b]
	FSDT (k=5/6)	9.8097[a]	12.9463[b]	14.3789[b]
	FSDT (k=1)	9.8275[a]	12.9942[b]	14.4430[b]
100	Présente étude	9.8925[a]	13.1715[b]	14.6888[b]
	RPT Kim *et al*. (2009)	9.8907[a]	13.1666[b]	14.6827[b]
	FSDT (k=2/3)	9.8838[a]	13.1463[b]	14.6474[b]
	FSDT (k=5/6)	9.8906[a]	13.1648[b]	14.6724[b]
	FSDT (k=1)	9.8951[a]	13.1772[b]	14.6891[b]
	CLPT	9.9179[a]	13.2393[b]	14.7732[b]

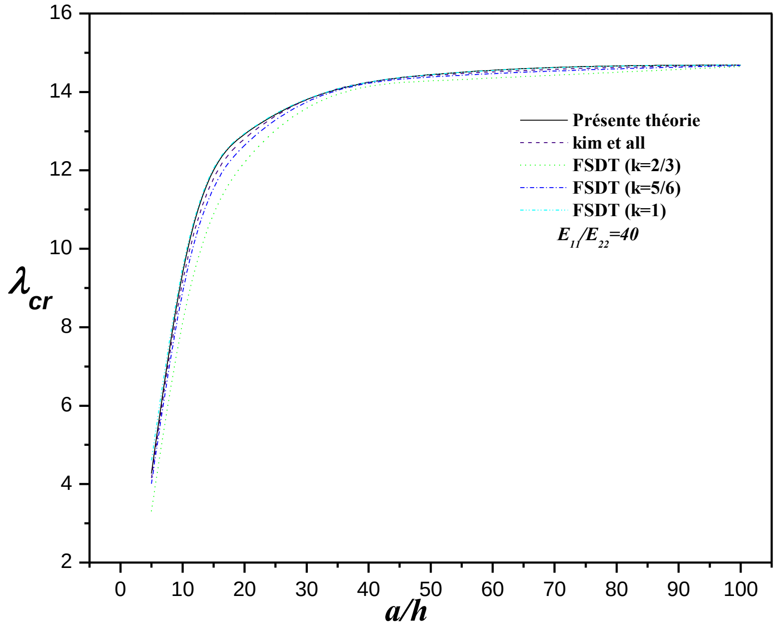
[a] Mode de la plaque est (m,n=1,2)
[b] Mode de la plaque est (m,n=1,3)
[c] Mode de la plaque est (m,n=1,4)
[d] Mode de la plaque est (m,n=1,5)
[e] Mode de la plaque est (m,n=1,6)

Tab IV.4 : comparaison des charges critiques de flambement d'une plaque carrée soumise à des efforts uniaxials

Les résultats obtenus dans le tableau ***Tab IV.4*** sont interprétés sous forme graphique suivante :


Présente théorie
kim et all
FSDT (k=2/3)
FSDT (k=5/6)
FSDT (k=1)
$E_{11}/E_{22}=10$
λ_{cr}
a/h
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Présente théorie
kim et all
FSDT (k=2/3)
FSDT (k=5/6)
FSDT (k=1)
$E_{11}/E_{22}=25$
λ_{cr}
a/h
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14



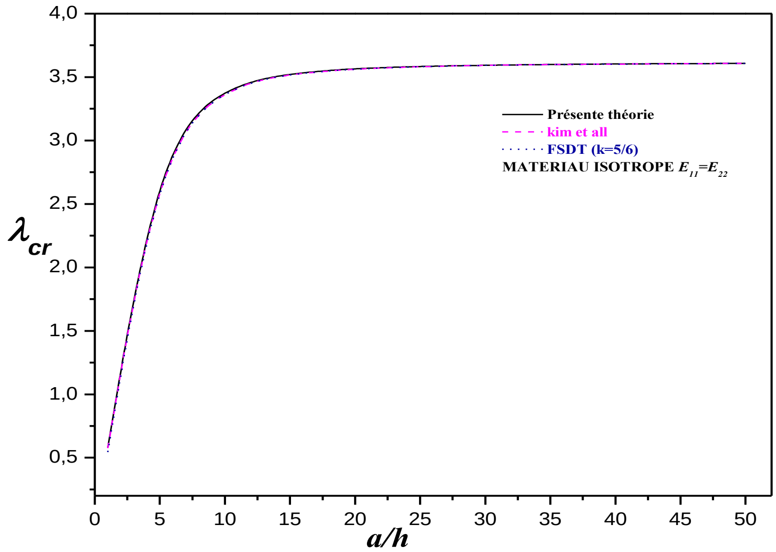


Fig. IV. 2 : Variation de la charge critique de flambement λ_{cr} en fonction du rapport a /h pour les différentes théories

IV .4 EFFET DE L'HYBRIDATION

Afin de montrer l'effet de l'hybridation sur le comportement de différentes plaques stratifiées sous chargement axial ; l'analyse de ces éléments est faite en considérant la configuration mentionnée dans le tableau ***IV.5.***

Plis	Designation du modèles			
	H1	H2	H3	H4
1 (0°)	Gr	Gl	Gr	Gl
2 (90°)	Gr	Gl	Gl	Gr
3 (0°)	Gr	Gl	Gr	Gl

Gr: Graphite; Gl: Glass

Tab IV.5 : configuration des stratifiés hybrides.

Les résultats obtenus de cette configuration de modèle hybride et non-hybride sont présentés sous formes graphique (***figures IV. 3 et IV. 4***) ;

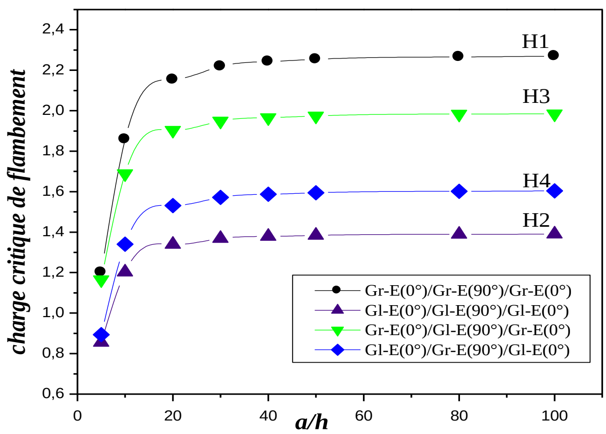


Fig. IV. 3 : Comparaison de différent modèle de stratifies en variant le rapport a/h sans fondation élastique (K_0=0, K_1=0)

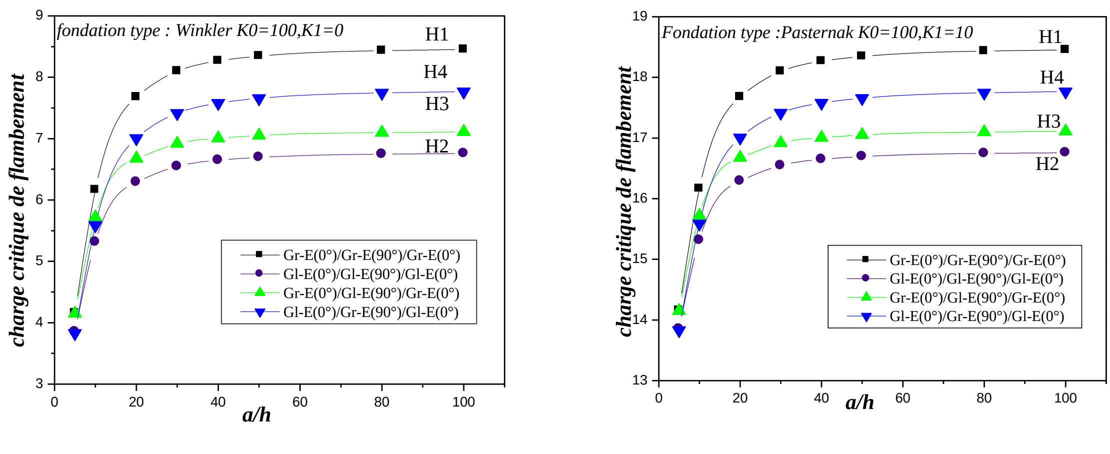


Fig. IV. 4 : Comparaison de différent modèles de stratifies reposant sur fondation élastique en variant le rapport a/h

IV .5 EFFET DE LA GEOMETRIE DE LA PLAQUE ET LA PRESENCE DE LA FONDATION ELASTIQUE POUR UN MATERIAU HYBRIDE

Une étude paramétrique nous permet de trouver l'influence de la fondation élastique en variant les propriétés mécaniques et géométriques de la plaque avec un matériau hybride dont ses propriétés sont mentionnées dans le tableau suivant.

PROPRIETES DU MATE RIAU	**Graphite/Epoxy Groves *et al.* (1987)**	**Glass/Epoxy Joffe *et al.* (2001)**
E_L (GPa)	144.8	44.73
E_T (GPa)	9.58	12.76
G_{LT} (GPa)	4.79	5.8
$G_{TT'}$ (GPa)	4.2	4.49
ν_{LT}	0.31	0.297
ν_{TL}	0.4	0.42
Ply thickness (mm)	0.127	0.144

Tab IV.6 : Propriétés mécaniques du matériau

Afin de mieux interpréter l'effet de la géométrie de la plaque composite et de l'orientation des fibres ainsi que le nombre de pli en considérant le cas d'une plaque stratifiée à 2 , 3 et 4 couches avec matériau hybride composé de ***Graphite*** et ***Glass*** avec la même nature de la matrice ***Epoxy***.

On analyse alors les effets des rapports longueur/épaisseur « ***a/h*** », longueur /largeur « ***a/b*** » sur le comportement en flambement des plaques composites rectangulaires.

Les charges critiques adimensionnelles obtenues par la présente théorie sont calculés pour différents cas de stratifiés hybrides en absence et en présence de la fondation élastique de type *Winkler –Pasternak* et sont reportés dans les tableaux suivants (Tableaux ***IV.7 et IV.8***);

Orientation des Plaques Hybrides	*a/b*	k_0	k_1	*a/h*=5	*a/h*=10	*a/h*=20	*a/h*=50	*a/h*=100
$0^\circ/90^\circ$ graphite/epoxy (0°) glass/epoxy (90°)	1	0	0	1,0038	1,1012	1,1286	1,1365	1,1377
		100	0	3,9355	4,3335	4,4605	4,4986	4,5041
		100	10	13,9355	14,3335	14,4605	14,4986	14,5041
	2	0	0	0,4772	0,5767	0,6085	0,6180	0,6194
		100	0	3,4543	4,1285	4,4557	4,5706	4,5880
		100	10	13,4543	14,1285	14,4557	14 ,5706	14,5880
$0^\circ/90^\circ/0^\circ$ graphite/epoxy (0°) glass/epoxy (90°)	1	0	0	4.8372	7.1524	8.1258	8.4479	8.4960
		100	0	6.6860	8.7836	9.6418	9.9227	9.9646
		100	10	16.6860	18.7836	19.6418	19.9227	19.9646
	2	0	0	1.1648	1.6893	1.9038	1.9740	1.9845
		100	0	4.1493	5.7183	6.6752	7.0505	7.1095
		100	10	14.1493	15.7183	16.6752	17.0505	17.1095
90°/0°/90°/0° graphite/epoxy (90°) glass/epoxy (0°)	1	0	0	3.7627	5.1002	5.5970	5 .7540	5.7771
		100	0	9.4571	17.4186	23.0015	25.3700	25.7505
		100	10	19.4571	27.4186	33.0015	35.3700	35.7505
	2	0	0	1.8576	3.8480	5.2437	5.8354	5.9310
		100	0	4.7850	10.0244	18.6133	25.9852	27.6196
		100	10	14.7850	20.0244	28.6133	35.9852	37.6196
0°/90°/90°/0° graphite/epoxy (0°) glass/epoxy (90°)	1	0	0	4.7704	6.9050	7.7758	8.0605	8.1028
		100	0	7.0206	9.3802	10.3668	10.6925	10.7411
		100	10	17.0206	19.3802	20.3668	20.6925	20.7411
	2	0	0	1.2485	1.8384	2.0851	2.1665	2.1786
		100	0	4.3322	6.2882	7.6039	8.1485	8.2357
		100	10	14.3322	16.2882	17.6039	18.1485	18.2357

Tab IV.7 : Variation de la charge critique de flambement pour les différents cas de stratifiés hybrides soumise à des efforts biaxials

Orientation des Plaques Hybrides	*a/b*	k_0	k_1	*a/h*=5	*a/h*=10	*a/h*=20	*a/h*=50	*a/h*=100
$0^{\circ}/90^{\circ}$ graphite/epoxy (0°) glass/epoxy (90°)	1	0	0	2,0077	2,2025	2,2573	2,2731	2,2754
		100	0	19,6778	21,6677	22,3026	22,4031	22,5208
		100	10	69,6778	71,6677	72,3026	72,4031	72,5208
	2	0	0	2,3864	2,8839	3,0426	3,0903	3,0972
		100	0	58,7233	70,1858	75,7470	77,7000	77,9969
		100	10	228,7233	240,1858	245,7470	247,7000	247,9969
$0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$ graphite/epoxy (0°) glass/epoxy (90°)	1	0	0	9,6745	14,3048	16,2518	16,8958	16,9920
		100	0	33,4300	43,9184	48,2094	49,6139	49,8231
		100	10	83,4300	93,9184	98,2094	99,6139	99,8231
	2	0	0	5,8245	8,4465	9,5193	9,8704	9 ,9227
		100	0	70,5391	97,2127	113,4791	119,859	120,8629
		100	10	270,5391	267,2127	283,4791	289,859	290,8629
90°/0°/90°/0° graphite/epoxy (90°) glass/epoxy (0°)	1	0	0	7,5255	10,2004	11,1942	11,5080	11,5543
		100	0	47,2856	87,0933	115,0078	126,8415	128,7528
		100	10	97,2856	137,0933	165,0078	176,8415	178,7528
	2	0	0	9,2884	19,2403	26,2189	29,1773	29,6552
		100	0	81,3461	170,4160	316,4267	441,7482	469,5332
		100	10	251,3461	340,4160	486,4267	611,7482	639,5332
0°/90°/90°/0° graphite/epoxy (0°) glass/epoxy (90°)	1	0	0	9,5408	13,8101	15,5516	16,1210	16,2058
		100	0	35,1030	46,9013	51,8344	53,4627	53,7058
		100	10	85,1030	96,9013	101,8344	103,4627	103,7058
	2	0	0	6,2427	9,1923	10,4256	10,8326	10,8934
		100	0	73,6489	106,9003	129,2676	138,5246	140,0074
		100	10	243,6489	276,9003	299,2676	308,5246	310,0074

Tab IV.8 : Variation de la charge critique de flambement pour les différents cas de stratifiés hybrides soumise à des efforts uniaxials

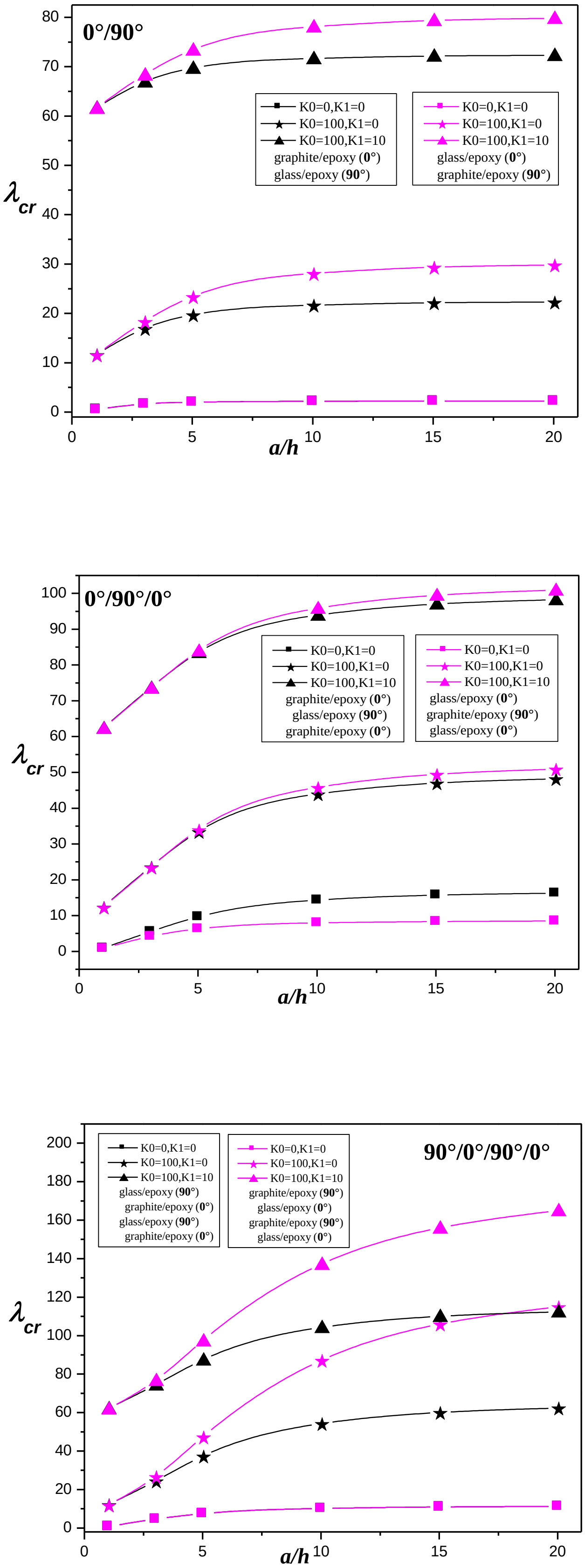


Fig. IV. 5 : Variation de la charge critique de flambement λ_{cr} d'une plaque hybride (a=b) soumise à des efforts uniaxials en fonction du rapport a/h

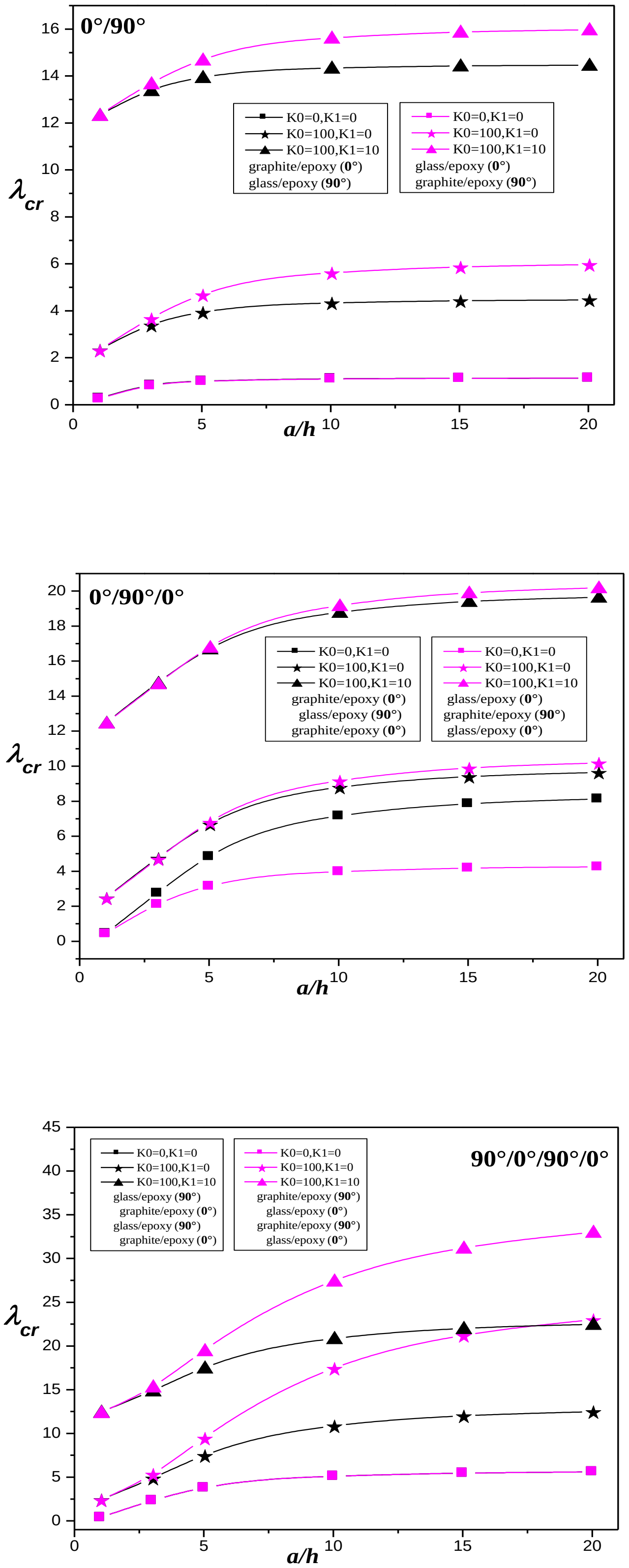
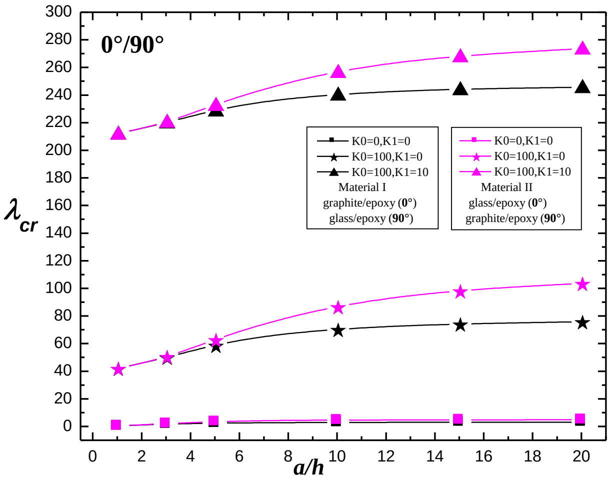
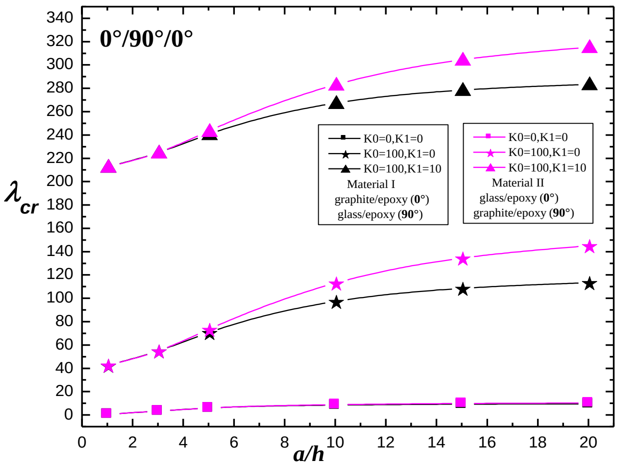


Fig. IV. 6 : Variation de la charge critique de flambement λ_{cr} d'une plaque hybride (a=b) soumise à des efforts biaxials en fonction du rapport a/h





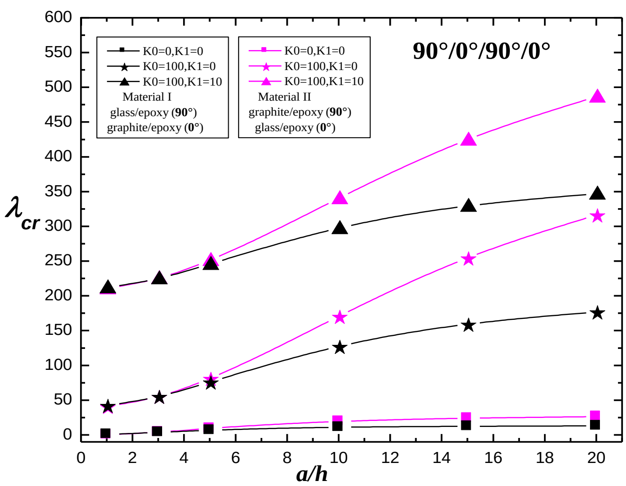


Fig. IV. 7 : Variation de la charge critique de flambement λ_{cr} d'une plaque hybride (a=2 b) soumise à des efforts uniaxials en fonction du rapport a/h

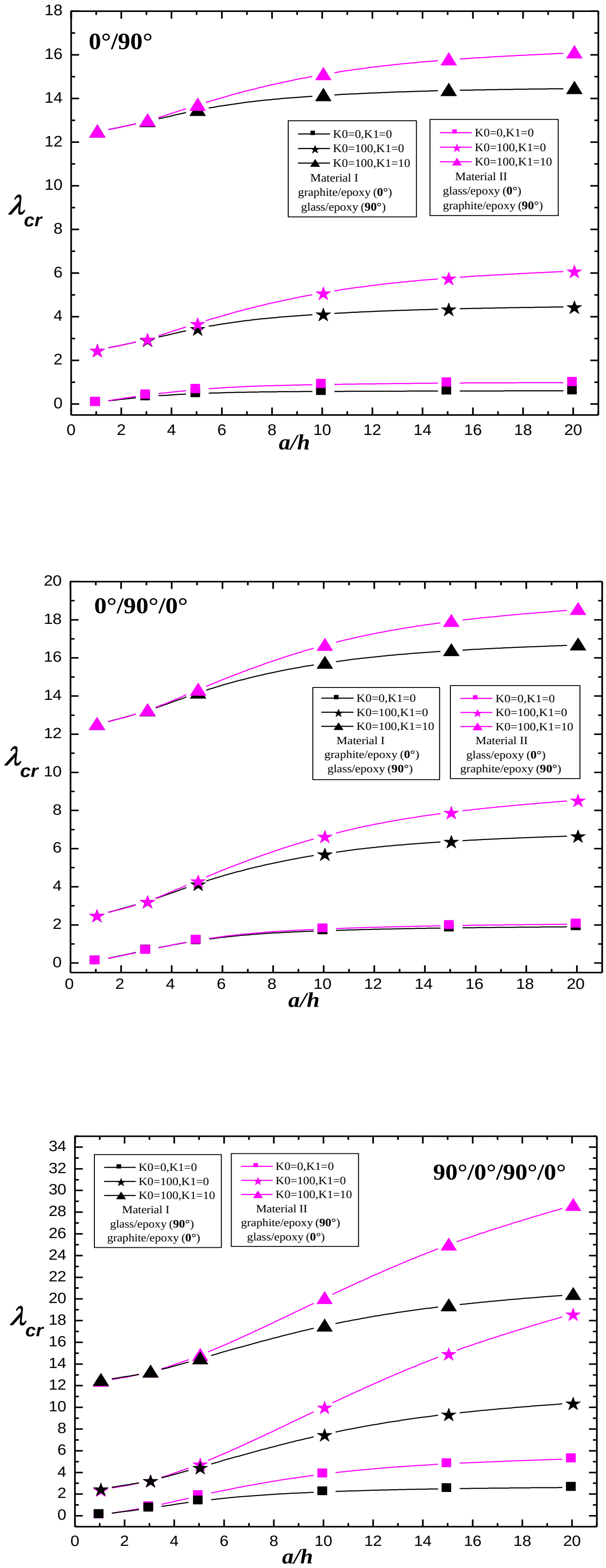


Fig. IV. 8 : Variation de la charge critique de flambement λ_{cr} d'une plaque hybride (a=2 b) soumise à des efforts biaxials en fonction du rapport a/h

Les figures ***IV. 7 et IV. 8*** montrent la variation de la charge critique de flambement pour plusieurs types de plaques stratifiés hybrides en fonction des rapports géométriques « ***a/h*** » et « ***a/b*** » qui ont été étudiés à l'aide de la présente théorie d'ordre élevé basé sur un champ de déplacement transverse.

Les résultats indiquent que les charges critiques de flambement augmentent avec le nombre d'empilement plus la plaque est épaisse plus elle est rigide envers l'instabilité.

La fondation élastique aussi influence sur la charge critique de flambement ; Il est observé qu'un accroissement des paramètres de la fondation élastique $\mathbf{K_0}$, $\mathbf{K_1}$ mène à l'accroissement des valeurs des charges critiques du flambement donc la fondation élastique augmente la stabilité de plaque vis-à-vis le flambement pour les deux modes de chargement (uniaxial et biaxial).

IV .6 COMPARAISON DE DIFFERENTES PLAQUES HYBRIDES

Dans cette partie, et afin d'examiner la variation des charges critiques de flambement sous l'effet de l'hybridation du matériau et la nature de constituants des différents matériaux, on considère trois cas de stratifiés symétriques et asymétriques en quatre couches dont la première plaque est composée de [**Kevlar-epoxy/graphite-epoxy**] , la deuxième plaque est constituée de [**Glass-epoxy/Graphite-epoxy]** tandis que la troisième en [**Boron-epoxy/Graphite-epoxy**] , Les propriétés mécaniques de ces trois matériaux sont regroupées dans le tableau ***Tab IV.9*** .

Une étude paramétrique a été faite pour mettre en évidence l'influence de la charge critique de flambement en fonction du rapport géométrique et des propriétés mécaniques pour les différents matériaux hybrides avec et sans fondations élastiques.

PROPRIETES DE MATERIAUX	GRAPHITE-EPOXY	KEVLAR-EPOXY	GLASS-EPOXY	BORON-EPOXY
E_{11}(GPA)	128,00	76,00	38,60	204,00
E_{22} (GPA)	11,00	5,50	8,27	18,50
ν_{12}	0,25	0,34	0,26	0,23
G_{12}(GPA)	4,48	2,30	4,14	5,59
G_{13}(GPA)	4,48	2,30	4,14	5,59
G_{23}(GPA)	1,53	2,30	4,14	5,59
ρ (kg/m^3)	1500,00	1460,00	1800,00	2000,00

Tab IV.9 : Propriétés des matériaux [*Aiello et Omres* (1996)]

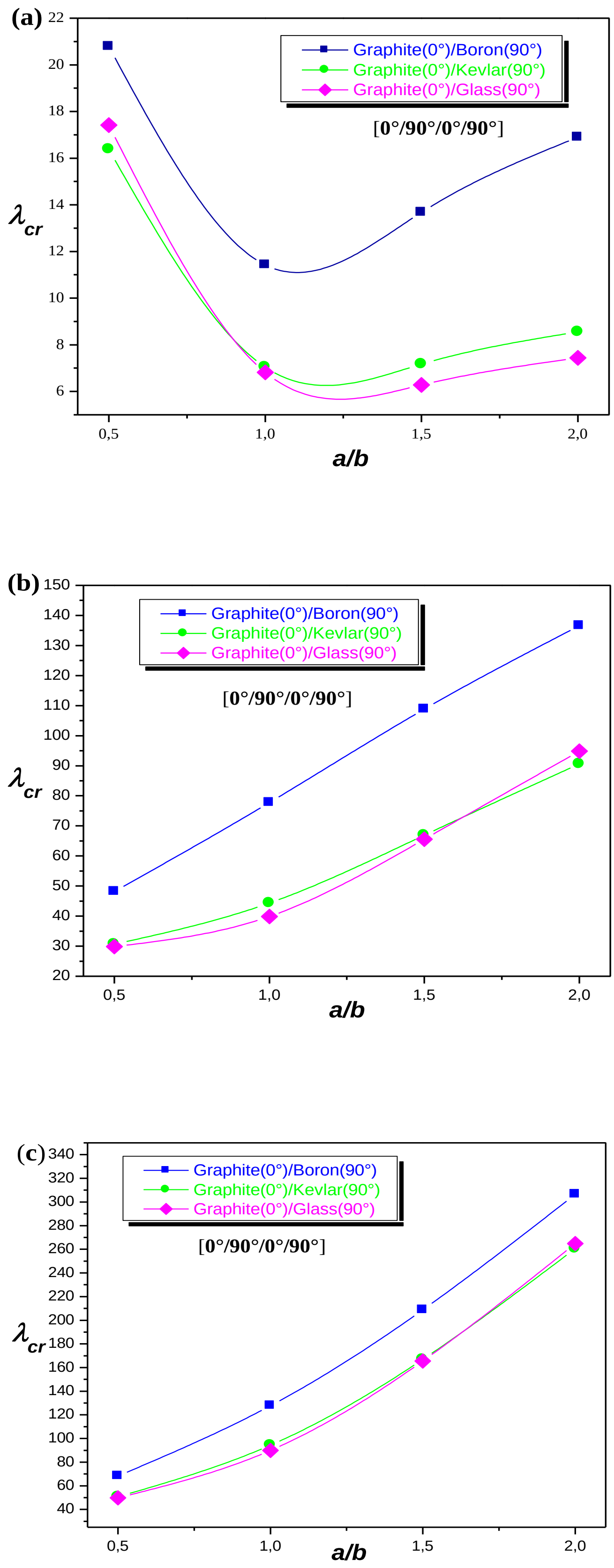


Fig. IV. 9 : Variation des charges critiques de flambement λ_{cr} de plaques hybrides asymétrique avec (a)K_0=0 K_1=0 (b) K_0=100 K_1=0, (c) K_0=100 K_1=10 sous chargement uniaxial

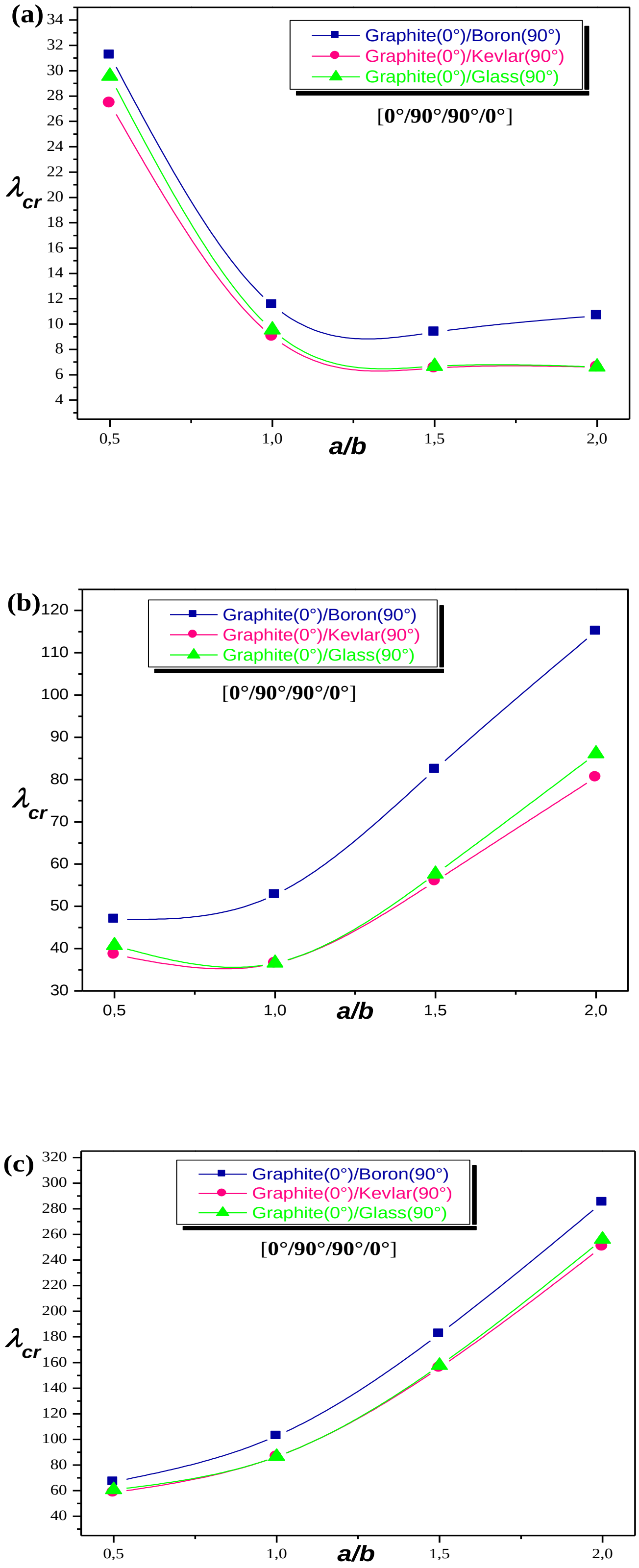


Fig. IV. 10 : Variation des charges critiques de flambement λ_{cr} des plaques hybrides symétrique avec (a)K_0=0 K_1=0 (b) K_0=100 K_1=0, (c) K_0=100 K_1=10 sous chargement uniaxial

Il est remarqué à partir de la figure ***Fig. IV. 9 .10*** pour les deux plaques hybrides symétrique et asymétrique que les charges critiques de flambement enregistrent des valeurs importantes dans les plaques construites en matériaux de type « **Boron/graphite** » et des valeurs presque identiques pour les plaques en matériaux de type « **Glass/graphite** » et « **Kevlar/graphite** », cela dû aux caractéristiques physique du matériau et sa rigidité. Ce qui justifié par la formule λ_{cr} qui suppose qu'elle dépend des modules de Young du matériau.

On observe aussi dans les résultats ou le chargement est uniaxial et en présence de la fondation élastique *Winkler* avec un seul paramètre K_0 et la fondation *Pasternak* avec deux paramètres K_0 et K_1 que plus l'élancement est élevé, plus sera la valeur de λ_{cr} .

IV .7 CONCLUSION

Dans le paragraphe précédant, nous avons obtenus des solutions exactes pour la détermination des charges critiques du flambement dans le cas d'une plaque composite stratifiée en appui simple sur ses quatre côtés en se basant sur la théorie des plaques à quatre variables.

Ce chapitre a proposé quelques applications numériques du flambement des plaques stratifiées symétriques et antisymétriques à plis croisés en absence et en présence d'une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Durant cette étude , on a discuté l'effet de degrés d'orthotropie (qui est défini par le rapport des modules d'Young de deux directions différentes $\mathbf{E_{11}/E_{22}}$) , de la séquence d'empilement et de l'épaisseur de la plaque , du nombre et l'angle d'orientation des couches constitutives qui contribuent à l'amélioration de la résistance et de la rigidité d la plaque stratifiée.

En général, on a essayé de varier différents facteurs et observer l'influence de ces derniers sur le comportement au flambement de la plaque stratifiée, d'où on a vu les résultats obtenus des valeurs de la charge critique. La précision et l'efficacité de la présente théorie nous permettent d'analyser aussi l'instabilité en flambement des plaques stratifiées hybrides (différents matériaux) reposant sur une fondation élastique.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

La méthode analytique développée dans le cadre de ce travail a été validée par comparaison avec des résultats publiés et a elle-même fait l'objet d'une publication internationale. Le comportement d'instabilité des structures est intimement lié à la forme géométrique, aux propriétés du ou des matériaux constituants, aux conditions aux limites, aux multiples effets. En plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce phénomène d'instabilité. Au terme de ce travail, nous pouvons affirmer avoir apporté une contribution pour le calcul des charges critiques du flambement.

Des résultats concernant plusieurs cas de plaques composites sont soumises à un chargement dans les deux directions x et y (uniaxial et bi axial) ont ensuite été analysées par la théorie d'ordre élevé à quatre variables avec une fonction de cisaillement f(z). L'étude a été menée en tenant compte des différentes théories de déformation en cisaillement de la plaque, y compris la nouvelle théorie développée. Les résultats obtenus et les comparaisons faites ont encore une fois montré la validité de la présente théorie, ainsi que celle du code de calcul développé.

A partir des résultats exposés, il a été clairement constaté que les charges critiques adimensionnelles du flambement des plaques stratifiées sont influencés par une panoplie de paramètres notamment la géométrie de la plaque, le mode de chargement, la séquence d'empilement, la nature du matériau et l'introduction de la fondation élastique. L'effet de l'hybridation sur les valeurs des charges critiques de flambement des plaques également été mis en évidence puisque pour la même géométrie et le même chargement, les charges critiques changent et ca du aux propriétés du constituants.

Enfin, nous concluons que toutes ces évolutions des charges critiques sont une conséquence directe de la variation de la rigidité de la plaque et des conditions générales de l'élément structural étudié en fonction des paramètres considérés dans notre analyse.

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse de doctorat peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, de réaliser l'étude du flambage des poutres et des plaques stratifiées hybrides soumises à des contraintes thermiques avec des vibrations sous des conditions aux limites générales. Il est également envisageable d'étendre l'analyse à des éléments structuraux à sections variables et d'élargir l'étude aux coques qui sont des éléments très utilisées et très présents dans les structures spatiales, terrestres et marines. Il sera aussi très intéressant d'étudier des poutres et des plaques sandwiches et de combiner des matériaux composites stratifiés avec des matériaux à gradient fonctionnel.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ait Atmane H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). ― Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory‖. Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121.

Afaq K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou (2003). Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March.

Aiello, M.A. and Ombres, L. (1999), "Buckling and vibration of unsymmetric laminated resting on elastic foundation under in-plane and shear forces" .Compos Struct, 44, 31-41.

Aiello M. A. & Ombres L. (1996). Maximum buckling loads for unsymmetric thin hybrid laminates under in-plane and shear forces. Composite Structures Journal.

Akavci, S.S. (2007), "Buckling and Free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation". Journal of reinforced plastics and composites.

Ambartsumyan S.A (1969). Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co.

Ashton, J.E. and Waddoups, M.E., (1969), "Analysis of Anisotropic Plates", Journal of Composite Materials, Vol. 3, pp. 148-165.

Ashton, J.E. and Whitney, J.M., (1970), Theory of Laminated Plates, Technomic, Stamford, Conn.

Aydogdu, Metin (2005) . Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, International Journal of Mechanical Sciences 47 1740–1755.

Bao, G., Jiang, W. and Roberts, J.C. (1997), "Analytic and finite element solutions for bending and buckling of orthotropic rectangular plates". Int J Solids Struct, 34, 1797-822.

Benyoucef. S, Mechab. I, Tounsi. A, Fekrar. A, Ait Atmane. H, and El Abbas Adda Bedia (2010) ―Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler– Pasternak elastic foundations‖. Mechanics of Composite Materials, Vol. 46, No. 4, 425 – 434.

Berthelot J.-M (1999). Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures, 4e ´édition. Technique & Documentation 2005.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), ―A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates‖, J. Sandwich Struct. Mater. 14(1), 5-33.

Das, Y. (1963),"Buckling of rectangular orthotropic plates". Apll Sci Res, 11(1), 97-103.

Dubois, T. (2005).« Boeing 787 : Les belles promesses de la légèreté. » Science & vie, hors-série N° 231, p. 22-29.

El meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate". International Journal of Mechanical Sciences, 53, 237-247.

Fekrar A, Houari M. SA , Tounsi A , Mahmoud S.R (2014)."Anew five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates ",Meccanica , ,Volume 15,pp 795-810, ISSN 0025-6455

Gupta, U.S., Ansari, A.H. and Sharma, L. (2006), "Buckling and vibration of polar orthotropic circular plate resting Winkler foundation". J Sound Vib, 297, 457-76.

Hui-Shen, S., Zheng, J.J. and Huang, X.L. (2003), "Dynamic response of shear deformable laminates plates under thermomechanical loading and resting on elastic foundation", Composite Structures, 60, 57-66.

Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K., "On the analysis of thick rectangular plates", Z Angew Math Mech, (1974), 589–591.

Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", Int J Solids Struct, (1982), 149–156.

Khdeir, A.A., (1989), "Stability of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 5, pp.952-963.

Kim, S.E., Thai, H.T. and Lee, J. (2009), "Buckling analysis of plate using the two variables refined plate theory". Thin-Walled Structures, 47, 455-462.

Kirchhoff.G (1950).Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, pages 51, 88.

Koiter W. T. (1974) An consistent first approximation in general theory of buckling of structures. IUTAM Symposium, Harvard University, p. 133-147

Koiter W. T. (1982) The application of the initial post-buckling analysis to the shells.
Buckling of shells, A state of the art Colloquium, Institute fûr Baustatik, Univ. Stuttgart, Stuttgart, Vol. 1, p. 1-15

Krishna Murty, A.V., (1977). "Higher-order theory for vibrations of thick plates", AIAA Journal, , 1823–1824.

Krishna Murty, A.V., (1986). "Toward of consistent plate theory", AIAA Journal, , 1047–1048.

Krishna Murty, A.V., (1987). "Flexural of composite plates", Composite Structures, 161–177.

Krishna Murty, A.V. et Vellaichamy, S., (1987). "On higher-order shear deformation theory of laminated composite panels", Composite Structures, 247–270.

Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G., "Natural vibrational modes of laminated anisotropic plates and flat shells", Soviet Appl Mech, (1981), 334–339.

Lee, H.P. (1998), “Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass”. Appl Acoust, 55(3), 203-15.

MAHI Amale (2012). « Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres » ; thèse de doctorat, ‘Universite Saad Dahleb De Blida’.

Malekzadeh, P. and Karami, G. (2004), “Vibration of non-uniform thick plates on elastic foundation by differential quadrature method”. Eng Strut, 26, 1473-82.

NASA. (2007). Dryden Flight Research Center. « Fact sheets : X-29. » Californie., USA. Disponible.

Nedri K , El Meiche N ,and A.Tounsi (2014) ”free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundation by using a refined hyperbolic shear deformation theory ”,Mechanics of Composite Materials, vol 49,N°6,pp 629-640,ISSN 0191-5665

Noor, A.K. (1975). “Stability of multilayered composite plates”. Fibre Sci. Technology, 8(2), 81-89.

Omurtag, M. H. and Kadioglu, F. (1998), “Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation”, Computers and Structures, 67, 253-265.

Pasternak PL (1954) ―On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants‖. Gosuedarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu i Arkhitekture 1:1–56.

Phan, N.D. and Reddy, J.N. (1985), “Analysis of laminated composite plates using a Higher–order Shear Deformation Theory”, Int J.for Numerical Methods in Engineering, 21, 2201-2219.

Pignataro M., Rizzi N., Luongo A. (1991) Stability, Bifurcation and post-critical behavior of elastic structures. Amsterdam : editions Elsevier, 358 p.

Reddy, J.N. (1981), “Energy and variational methods in applied mechanics”. New York: John Willy and Sons.

Reddy, J.N. , (1984) "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Ccomposite Plates", ASME Journal of Applied Mechanics, 745–752.

Reddy, J.N. et Phan, N.D., (1985) "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory", International Journal for Numerical Methods in Engineering, , 2201–2219.

Reddy, J.N. and Khdeir, A.A. (1989), “Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories”, AIAA J.27 (12), 1808-1817.

Reddy, J.N. (1999) "Theory and analysis of elastic plates", Philadelphia: Taylor & Francis,.

Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", Int J Numer Method Eng, 47(41–43):663–684.

Reissner E (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J Appl Mech, Trans ASME; 12(2):69–77.

Reissner E& Y. Stavsky (1961). Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402,408.

Saha, K.N., Kart, R.C. and Dattal, P.K. (1997), “Dynamic stability of a rectangular plate on non-homogeneous Winkler foundation”. Comput Struct, 63(6), 1213-1222.

Setoodeh, A.R. and Karami, G. (2004), “Static, free vibration and buckling analysis of anisotropic thick laminated plates on distributed and point elastic supports using a 3-D layer wise FEM”. Engineering Structures, 26, 211-220.

Shimpi, R. and Patel, H.G. (2006), “A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis”. Int J solids Struct, 43 (22-23), 6783-99.

Touratier M. (1991). An efficient standard plate theory. Engng Sci, vol. 29, no. 8, pages 901,916.

Tounsi, A., Houari Mohammed, S. A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013), ―A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates‖, Aerosp. Sci. Technol., 24, 209–220.

Timoshenko, S.P., (1961), Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York.

Utku, M., Citipitioglu, E. and Inceleme, I. (2000), "Circular plates on Elastic Foundations Modelled with Annular Plates ".Computers and Structures,78 ,365-374.

Vakiener, A.R., Zureick, A., and Will, K.M., (1991), "Prediction of Local FlangeBuckling in Pultruded Shapes by Finite Element Analysis", Advanced Composite Materials in Civil Engineering Structures, S. L. Iyer Ed., ASCE, N. Y., pp. 303-312.

Veres, I.A. and Kollar, L.P., (2001), "Buckling of Rectangular Orthotropic Plates Subjected to Biaxial Normal Forces", Journal of Composite Materials, Vol. 35, No. 7, pp. 625-635.

Vlasov, V.Z., "The method of initial function in problems of theory of thick plates and shells.", In: Ninth congress of international mechanical applications, (1957), 321–330.

Whitney, J.M. (1969), "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates", Journal of Composite Materials, 3, 534–547.

Whitney JM, Pagano NJ. (1970). Shear deformation in heterogeneous anisotropic plate. Journal of Applied Mechanics; 37:1031–6.

Winkler E. (1867), ―Die lehre von der elasticitaet und festigkeit‖. Prag Dominicus

Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Liew, K.M. (1996), "Buckling and vibration of thick laminates on Pasternak foundation". J. Eng Mech. ASCE, 122 (1), 54 -63.

ANNEXE (Bertholot 2005)

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\rho_s\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=\rho_s\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=\rho_s\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0.$$

éq (1)

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0.$$

éq (2)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right).$$

éq (3)

Le cas de stratifiés orthotrope l'équation de flambement s'écris :

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\,N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q.$$

éq (4)