

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABESSIDI BEL ABBES

FACULTE DES TECHNOLOGIES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
& TRAVAUX PUBLICS

THESE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : GENIE CIVIL

Option : STRUCTURES ET MATERIAUX

Soutenue par
Mr BELAROUCI ABDELGHANI

Sujet de thèse :

**ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT DES PLAQUES
EPAISSES P-FGM ET S-FGM**

Soutenu le : 23 / 09/ 2021, Devant le Jury composé de :

Mr BELLIFA Hichem	MCA	UDL SBA	Président
Mr FEKRAR ABDELKADER	Professeur	UDL SBA	Directeur de la thèse
Mr ZIDOUR MOHAMED	Professeur	U. De Tiaret	Co-directeur de la thèse
Mr BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	MCA	UDL SBA	Examineur
Mr HADJ MOSTEFA Adda	MCA	U. De Relizane	Examineur
Mr ZINE Abdallah	MCA	U. De Relizane	Examineur

Année universitaire : 2020-2021

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement à DIEU tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance qu'il m'a donnée durant toutes ces années d'études.

*Je suis très heureux de témoigner ma profonde estime à mon encadreur le **Professeur Fekrar Abdelkader** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordée tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utiles pour mener à terme ce travail.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à mon co-directeur de thèse **Professeur Zidour Mohamed** qui a apporté un grand soutien scientifique à mon travail de recherche.*

*Je remercie chaleureusement le **professeur Bellifa Hicham** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.*

*Je tiens à remercier également les membres de jury Messieurs les Professeurs : **Boussahla abdelmoumen, Hadj Mostafa Adda et Zine abdellah** pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail. Je les en remercie sincèrement.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements au **Professeur Abdelwahed TOUNSI** du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie « LMH » de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès pour son aide précieuse, sa compétence et sa rigueur scientifique qui m'ont beaucoup appris.*

Mes remerciements à tous les professeurs et cadres qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'université de Sidi Bel Abbès.

*Mes remerciements s'adressent également à la direction générale de la recherche scientifique et du développement technologique (**DGRSDT**) pour son soutien*

Merci à Abderrahim M.A., Berkani B., Belmahi S., Ouahiani. N., Refoufi S., Bouarfa N., Dr Brahim A., Salah F., Torchi B., Zair T. Boudis Z., Damani B., et les défunts Benhmed M. et Boucif A. (رحمة الله عليهم), qui furent souvent à mes côtés pour me soutenir, quand je perdais la motivation ou la bonne humeur.

Enfin, je dédie ce modeste travail à la mémoire de mes parents et à toute ma famille qui de près ou de loin m'ont encouragé et ont contribué à leur façon à la réalisation de ce travail.

Résumé :

Dans ce travail, une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement quasi 3D est présentée pour analyser la flexion des plaques épaisses en FGM (matériaux fonctionnellement gradués), dont le nombre de variables est limité à cinq. Le modèle mathématique utilisé présente une nouvelle gamme de déplacement basée sur des variables intégrales indéterminées où l'étirement de l'épaisseur est pris en compte selon les lois de puissance P-FGM, E-FGM et S-FGM. Les compositions et les fractions volumiques des constituants du FGM sont censées changer en fonction de l'épaisseur. Le principe du travail virtuel, ainsi que la méthode de Navier sont utilisées dans cette étude pour résoudre les équations de mouvement qui régissent l'étude de ces types de plaques. Les équations d'équilibre selon la plaque FGM reposant sur les fondations de Pasternak sont présentées. Pour souligner l'influence des différentes propriétés matérielles des plaques sur la flexion, des études paramétriques seront présentées et comparées avec les solutions existantes.

Mots-clés : FGM plaques orthotropes, flexion plaques épaisses, théorie quasi-3-D, L'effet d'étirement, Pasternak.

ملخص:

في هذا العمل، تم تقديم نظرية جديدة لتشوه القص شبه ثلاثي الأبعاد لتحليل انحناء الصفائح السمكية في (المواد المتدرجة وظيفياً)، والتي يقتصر عدد المتغيرات منها على خمسة. يقدم النموذج الرياضي المستخدم مجموعة جديدة من الإزاحة استناداً إلى متغيرات متكاملة غير محددة حيث يتم أخذ تمدد السماكة في الاعتبار وفقاً لقوانين الطاقة P-FGM و E-FGM و S-FGM. من المتوقع أن تتغير التركيبات والكسور الحجمية لمكونات FGM اعتماداً على السمك. يتم استخدام مبدأ العمل الافتراضي، بالإضافة إلى طريقة نافيري (NAVIER)، في هذه الدراسة لحل معادلات الحركة التي تحكم دراسة هذه الأنواع من الألواح.

للتأكيد على تأثير الخصائص المادية المختلفة للألواح على الانحناء، سيتم تقديم دراسات بارامترية ومقارنتها بالحلول الحالية

كلمات البحث: صفائح المواد المتدرجة وظيفياً، الصفائح السمكية، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد، تأثير التمدد، باستورناك.

Abstract :

In this work, a new theory quasi-3D shear deformation is presented to analyze the bending of thick FGM (functionally graded materials) plates, whose number of variables is limited to five. The mathematical model used presents a new range of displacement based on indeterminate integral variables where the stretching of thickness is taken into account according to the power laws P-FGM, E-FGM and S-FGM. The compositions and volume fractions of the constituents in the FGM are supposed to change through the thickness. The principle of virtual work, as well as the Naiver method, is used in this study to solve the governing equations of motion to study these types of plates. The equilibrium equations according to the FGM plate resting on Pasternak foundations are presented. To highlight the influence of different material properties of the plates on bending, parametric studies will be presented and compared with existing solutions.

Keywords: FGM orthotropic plates, bending Thick plates, Quasi 3-D theory, The stretching effect, Pasternak.

Sommaire

Remerciements	i
ملخص	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
Liste des notations et symboles	x
Introduction générale	1
 CHAPITRE I : Généralités sur les structures en matériaux fonctionnellement gradues FGM	
I.1 Introduction	8
I.2 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM :	9
I.2.1 Coulage en bande (Tape casting)	10
I.2.2 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)	11
I.2.3 Dépôt par électrophorèse	12
I.2.4 Compaction sèche des poudres :	13
I.2.5 Projection plasma	12
I-2-6 C.V.D et P.V.D	13
I.2.7 Frittage en infiltration	13
I.2.8 Frittage Laser Différentiel	14
I.2.8 Implantation ionique	15
I.3 Conclusion	15
 CHAPITRE II : Propriétés matérielles des plaques FGM	
II-1 Introduction	17
II-2 Définition des matériaux FGM	17
II-3 Orientation vers des nouveaux matériaux les FGM	18
II-4 Historique sur le développement des matériaux FGM :	20
II-5 Propriétés effectives des FGM :	21
II-6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	23
II. 6 .1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	22
II. 6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	24
II. 6. 3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	25
II.7 Conclusion	26
 CHAPITRE III : Les différentes théories des plaques	
III.1 Introduction	28
III.2 Différent Types De Plaques	28
III.3 Différent Types De Théorie	28
III.3.1 Théorie classique de Kirchhoff-Love (CPT : Classical Plate Theory)	29
III.3.2 Théorie de déformation de cisaillement de Reissner-Mindlin (FSDT : First Shear Deformation Theory)	30
III.3.3 Théorie de déformation de cisaillement troisième ordre de Reddy (HSDT: High Shear Deformation Theory)	31
III.3.4 Théorie quasi-3D de déformation des plaques	36

III.3.5 Théorie raffinée de déformation des plaques de Shimpi (RPT: Refined Plate Theory)	38
III.4 : Conclusion	39
<i>CHAPITRE IV : Formulation théorique des plaques FGM reposantes sur fondation élastique</i>	
IV.1 Introduction	41
IV. 2. Cinématique et équations constitutives	41
IV. 2.1 Champ des déplacements	41
IV. 2.2 Relations constitutives des structures de FGM	44
IV. 2.2.1 loi de mélange exponentielle (E-FGM)	45
IV. 2.2.2 Loi de mélange en Puissance (P-FGM)	45
IV. 2.2.3 loi de mélange sigmoïde (S-FGM)	45
IV. 3. Modèles élastiques de milieu	46
IV.3.1 Modèle de Winkler	46
IV. 3.2 Le modèle Pasternak	47
IV.4. Équations d'équilibre	47
IV. 4. 1 Le principe de Hamilton	47
IV. 5. Solutions analytiques	49
IV.6 Conclusion	50
<i>CHAPITRE V : Comparaison et validation des résultats</i>	
V.1 Introduction	52
V.2 Résultats numériques et discussion	52
V.2.1 Propriétés des matériaux	52
V.2..2 Validation de la théorie proposée	53
V.2.3 Études de paramètres	57
V.3 Conclusion	64
Conclusion Générale et perspectives	
Références bibliographiques	
	67 70

Liste des figures

Figure I.1: Les principaux domaines d'application des FGM.	9
Figure I.2: Principe de la méthode coulage en bande	11
Figure I.3: Principe du coulage par barbotine	12
Figure I.4: Schéma du procédé dépôt par centrifugation	12
Figure I.5 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux	12
Figure I.6 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma	13
Figure I.7 : Disposition du procédé frittage laser différentiel	14
Figure II.1 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal	18
Figure II.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM	19
Figure II.3 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM	21
Figure II.4 : Géométrie d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés	23
Figure II.5 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM	24
Figure II.6 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.	25
Figure II.7 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.	25
Figure III.1: Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT)	30
Figure III.2: Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin	31
Figure III.3 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CLPT) et (FSDT)	32
Figure III.4 : Variation de la fonction de forme et sa dérivée $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	36
Figure III.5 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.	38
Figure IV.1. Plaque FGM sur fondation élastique a) une fondation Winkler et b) une fondation Pasternak	46
Figure V.1. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($p = \ln(E_1/E_2)$, ($b=a$, $\bar{k}_w = 0$, $\bar{k}_p = 0$).	57
Figure V.2. La comparaison de la flèche des E-FGM, P-FGM et S-FGM tôles épaisses ($b=a$, $a/h=10$, $\bar{k}_w = 0$, $\bar{k}_p = 0$).	58
Figure V.3. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de MGF ($b=a$, $\bar{k}_w = 1000$, $\bar{k}_p = 0$).	58
Figure V.4. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($b=a$, $\bar{k}_w = 0$, $\bar{k}_p = 100$).	59
Figure V.5. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($p = \ln(E_1/E_2)$, ($b=a$, $\bar{k}_w = 1000$, $\bar{k}_p = 100$).	59
Figure V.6. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques FGM épaisses ($b=2a$, $\bar{k}_w = 1000$, $\bar{k}_p = 0$).	60
Figure V.7 : Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques FGM épaisses ($b=2a$, $\bar{k}_w = 0$, $\bar{k}_p = 100$).	60
Figure V.8. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle	62

des plaques épaisses de FGM($b=2a$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=100$).

Figure V.9. Effet du paramètre \bar{k}_w de fondation élastique sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de S-FGM ($a/h= 10$, $\bar{k}_p=0,50,100$) 62

Figure V.10. Effet du paramètre \bar{k}_p de fondation élastique sur la flèche non dimensionnelle d'une plaque épaisse de S-FGM($a/h= 10$, $\bar{k}_w=0,500,1000$). 63

Figure V.11. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de S-FGM avec l'indice de loi de puissance (p) ($p = 1,2,5,10$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=100$) 63

Figure V.12. Effet de l'indice de loi de puissance sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de S-FGM ($a/h= 10$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=0,50,100$) 64

Liste des tableaux

Tableau II.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon	20
Tableau II.2: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	22
Tableau III.1. Récapitulation des différentes fonctions de cisaillement	35
Tableau V.1: Propriétés des matériaux de la plaque FGM.	52
Tableau V.2 : Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque carrée en Al/AL2O3 P-FGM	54
Tableau V.3 : Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque E-FGM (a/h = 2).	55
Tableau V.4: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque E-FGM (a/h=4)	55
Tableau V.5: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque E-FGM. (a/h=10)	56
Tableau V.6: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque avec charge uniforme (a/h=10, b/a=3).	56
Tableau V.7 : Effet du rapport côté/épaisseur (a/h= 5 et 20) sur la flèche non dimensionnelle des plaques FGM(a=b ,a=2b , p = ln(E1/E2(τ_{kw}) =0 and 1000 (τ_{kp}) =0 and 100)	61

Liste des notations et symboles

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
l	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement
S_{xz}, S_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i, j, l et n	Sont des nombres naturels
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δU_m	l'énergie de déformation supplémentaire
δV	La charge verticale
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
P -FGM	Loi de mélange en puissance
E -FGM	Loi de mélange exponentielle
S -FGM	Loi de mélange sigmoïde

INTRODUCTION

GENERALE

Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une classe de composites qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'un point à un autre. Un FGM est constitué d'un mélange de deux phases de matériaux, par exemple une céramique et un métal, dont les propriétés mécaniques et thermiques varient de manière continue à travers l'épaisseur du matériau.

Face aux problèmes liés à la durabilité des matériaux classiques tels que la dégradation due au vieillissement, à la corrosion, à l'exposition à des températures élevées et à d'autres phénomènes de dégradation, le FGM reste le matériau optimal dans l'environnement où il est exposé. Les plaques de FGM qui font l'objet de cette étude sont fabriquées à partir d'un mélange de métal et de céramique. Actuellement, ces matériaux FGM sont largement utilisés dans l'aérospatiale, l'automobile, les structures de génie civil et mécanique et leurs propriétés matérielles peuvent être adaptées à différentes applications et environnements de travail. Au cours des dernières décennies, les plaques reposantes sur des fondations élastiques font partie des préoccupations des chercheurs pour modéliser divers problèmes d'ingénierie. Il est aussi noté que, les laminés ont présenté un problème spécifique aux matériaux composites produits par laminage : Il s'agit de la rupture inter-laminaire, connue sous le nom technique de "délaminage".

Par la méthode des éléments finis, Hirwani et al (2018a) ont étudié les réponses de flèche de panneaux de coque peu profonds à double courbure endommagés sous une charge thermomécanique combinée, où ils ont pu obtenir, avec quelques nouveaux exemples résolus, les réponses de flèche sous l'influence d'une charge thermomécanique.

Le comportement transitoire d'une plaque composite laminée et d'une structure de coque endommagée intérieurement sous l'influence de différents types de charges mécaniques et de conditions de contrainte a été analysé numériquement par Hirwani et al. (2017), où la délamination interne est modélisée en utilisant deux approches sous-stratifiées incluant la condition de continuité intermittente pour obtenir les solutions nécessaires.

L'analyse de la flexion non linéaire des panneaux plats en matériaux composites laminés sous charge hygro-thermo-mécanique a été étudié par Kar et al. (2015). Les structures de panneaux courbes utilisant la théorie d'ordre supérieur ont été analysées par (Katariya et al. 2019, Hirwani et Panda 2019). Les effets hygrothermiques sur la réponse

post-flambage des poutres composites ont été analysés par Bouazza et al. (2014a) (Bouazza et al. 2015, Benahmed et al. 2019).

Abdelmalek et al. (2017) étudient les effets hygrothermiques sur le comportement en vibration libre des plaques composites en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé.

La nouvelle génération de matériaux composites introduite dans les nanotechnologies, qui sont des fonctionnellement gradée de nanotubes de carbone (FG-NTC) distributions fonctionnellement graduées de nanotubes de carbone dans le sens de l'épaisseur, a apporté des solutions à de nombreux problèmes techniques (Guessas et al. 2018, Boulal et al. 2020, Tayeb et al. 2020, Zerrouki et al. 2020, Gafour et al. 2020, Bensattalah et al. 2018a,b, 2019a Hamidi et al. 2018, Dihaj et al. 2018, Belmahi et al. 2018, Belmahi et al. 2019). En raison de l'importance des nanotubes de carbone (NTC) dans les nanocomposites, plusieurs approches théoriques ont été développées pour étudier leur comportement mécanique (Bouazza et al. 2014b, Bensattalah et al. 2019b,c).

La tentative de produire des matériaux à gradient fonctionnel est née du mélange de deux matériaux de manière à ce que les deux matériaux conservent le plus efficacement possible leurs propriétés physiques, mécaniques et thermiques. Le matériau FGM qui en résulte présente une gradation sur toute l'épaisseur de la structure, d'un matériau typiquement métallique comme l'acier ou l'aluminium d'un côté de la hauteur, à un autre matériau comme la céramique de l'autre côté. Par conséquent, le matériau à gradient fonctionnel ou à gradation fonctionnelle est une nouvelle gamme de matériaux composites présentant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, le métal et la céramique) à travers l'épaisseur, donnent des changements, en conséquence des propriétés thermo-mécaniques globales de l'élément qu'il constitue. Le comportement en flexion non linéaire d'un panneau courbe à gradation fonctionnelle (cylindrique, hyperbolique et elliptique) sous une charge thermomécanique combinée est étudié par Kar et Panda (2016). Dans cette étude, deux champs de température (uniforme et linéaire) sur l'épaisseur du panneau de la coque sont considérés. Le modèle du panneau est mathématiquement développé en utilisant une cinématique de cisaillement d'ordre supérieur dans le plan médian avec des déformations non linéaires de type Green - Lagrange. Kar et Panda (2015) ont également étudié numériquement le

comportement en flexion de grande amplitude d'un panneau de coque à double courbure à gradation fonctionnelle sous charge thermomécanique.

La fonction de loi de puissance (P-FGM) et la fonction exponentielle (E-FGM) sont couramment utilisées pour décrire les variations des propriétés matérielles des FGM. Par conséquent, d'autres auteurs ont proposé une théorie raffinée du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale pour les plaques E-, P- et S-FGM sur une fondation élastique de Pasternak (Lee et al. 2015).

Le comportement en flexion et en vibration des plaques FGM a été étudié par de nombreux chercheurs au cours des dix dernières années. Neves et al. (2012) ont présenté les équations d'une théorie de déformation sinusoïdale en cisaillement quasi 3D pour les plaques FGM. Elle traite de l'analyse des vibrations libres et de la flexion et tient compte des déformations à travers l'épaisseur. Pour analyser la flexion, des solutions analytiques sont obtenues pour les plaques simplement supportées en utilisant les équations de mouvement selon le principe de la minimisation de l'énergie potentielle totale.

Il est admis que le milieu élastique est démontré comme une fondation élastique Winkler-Pasternak. Zenkour (2009) a étudié plusieurs cas pour démontrer les résultats numériques concernant la réponse à la flexion de plaques rectangulaires reposant sur des fondations élastiques de Winkler. Panda & Singh (2013) ont étudié le comportement thermique après flambage des panneaux à coque sphérique en composite laminé.

Shokravi (2017) a présenté l'analyse des vibrations des poutres en béton renforcé de nanoparticules de silice en tenant compte des effets d'agglomération. Wu & Liu (2014) ont analysé le flambage 3D de plaques sandwich en FGM sous des charges de compression bi-axiales. Chen (2018) a étudié la méthode de la matrice de transfert pour la solution de cylindres à paroi épaisse de FGM avec une réponse élastique inhomogène arbitraire. Arefi (2015) a étudié l'analyse de la vibration libre de plaques circulaires solides et annulaires fonctionnellement graduées avec deux couches piézoélectriques fonctionnellement graduées en haut et en bas soumises à un champ électrique. Ebrahimi & Barati (2016) ont analysé une théorie de déformation des poutres par cisaillement d'ordre élevé non locale pour étudier les vibrations des nano poutres fonctionnellement graduées. Panda & Chandran (2003) ont analysé les matériaux à gradient fonctionnel en titane et borure de titane (Ti-TiB) par frittage réactif. Avcar et Mohammed (2018) ont étudié la vibration libre

de poutres fonctionnellement graduées reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak.

Une théorie raffinée du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale pour les plaques E-, P- et S-FGM sur les bases élastiques Pasternak proposée par Lee et al. (2015), où elle pourrait présenter de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects tels que les conditions aux limites, l'équation du mouvement et les expressions résultantes des contraintes.

Radwan & Zenkour (2018) ont étudié une théorie trigonométrique quasi 3D, les effets des paramètres de Winkler et de Pasternak, le rapport (dimension / épaisseur), le paramètre d'inhomogénéité et le rapport d'aspect sur les réponses en flexion des plaques FG. Ils ont également étudié la compression en flexion et en vibration libre des plaques à gradation fonctionnelle et des plaques sandwich composites multicouches à noyau flexible sur des fondations Winkler-Pasternak.

Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D pour la flexion et la vibration libre des plaques FG est présentée par Khiloun et al. (2019) où ils démontrent que la théorie présentée est précise et efficace pour prédire les déplacements, les contraintes et la fréquence naturelle des plaques homogènes et des FG. Thai & Kim (2013) ont présenté une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale quasi 3D avec seulement cinq inconnues pour étudier le comportement des plaques en flexion FGM.

Deux types de théories cinématiques d'ordre supérieur sont adoptées par Hirwani et al. (2018b) pour évaluer la flexion non linéaire et les valeurs de contrainte de la structure de panneau plat composite stratifié endommagé intérieurement, y compris l'effet d'étirement de l'épaisseur. Les résultats de cette étude ont été validés à l'aide des résultats théoriques et expérimentaux disponibles et publiés.

Baferani & Saidi (2013) proposent une solution précise pour l'analyse des vibrations libres des plaques rectangulaires épaisses FG reposant sur une fondation élastique. Dorduncu (2019) réfléchit à l'analyse de la flexion des plaques FG en utilisant la théorie du zigzag raffiné, où il a été observé que la variation du matériau à travers l'épaisseur jouait un rôle majeur dans les niveaux de contrainte et de déplacement alors que l'influence de la variation du matériau était mineure sur les profils de contrainte et de déplacement. Vel et Batra (2003) ont présenté la solution exacte de la thermoélasticité pour les déformations par flexion cylindrique des plaques à gradient fonctionnel. Ebrahimi et Daman (2017) ont

présenté une analyse thermo-électromécanique non locale des vibrations d'une piézo-poutre Timoshenko intelligente courbée FG.

Nguyen et al. (2019) ont présenté une analyse simple et raffinée (FSDT) des vibrations libres, de la statique et de la flexion des plaques composites avancées que cette théorie peut être appliquée aux autres structures étudiées telles que les poutres et les coques des plaques composites avancées.

Amir et al. (2019) ont étudié l'analyse des vibrations magnéto-électro-élastiques dépendantes de la taille des plaques micro-sandwich annulaires/circulaires poreuses saturées FG, encastrées dans des feuilles de surface en nanocomposite soumises à des précharges multi-physiques. Beldjelili et al. (2016) ont étudié la flexion hygro-thermo-mécanique de plaques S-FGM reposant sur une base élastique variable en utilisant une théorie de plaque trigonométrique à quatre variables. Ils ont pu démontrer que la flèche et les contraintes obtenues par la théorie proposée avec quatre inconnues sont presque identiques à celles données par d'autres théories de déformation en cisaillement contenant cinq inconnues.

L'analyse statique de plaques épaisses fonctionnellement graduées avec différentes fonctions de distribution de propriétés est présentée par Ghazzawi & Abdelrahman (2020), le but du modèle utilisé par ces auteurs est d'étudier l'effet de la déformation en cisaillement sur le comportement en flexion de la plaque pour différentes valeurs du rapport d'aspect de la plaque, du rapport d'épaisseur et du rapport de module d'élasticité des constituants.

Dans toute la littérature, il est noté que les méthodes actuelles sont développées en tenant particulièrement compte des hypothèses suivantes : les matériaux sont élastiques et linéaires. En outre, la poutre ou la plaque FGM est orthotrope en tout point de la structure.

Comme il n'existe pas de méthodes expérimentales pour prédire la flexion des structures de FGM sous l'effet de l'étirement, les méthodes de mécanique continue sont souvent utilisées pour étudier certains problèmes physiques des matériaux. L'objectif du présent article est d'étudier le comportement mécanique des plaques à gradients fonctionnels en utilisant une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement quasi 3D qui prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur. Les résultats numériques présentés dans cette étude serviront de référence pour l'utilisation et le développement des matériaux FGM.

La présente thèse s'articule sur 05 chapitres répartis comme suit :

Après une introduction générale où nous évoquons une synthèse bibliographique sur des différents travaux qui ont été effectués pour étude et analyse des matériaux à gradient de propriétés FGM (en anglais :Functionally Graded Materials) nous présentons dans un **premier chapitre**, un ensemble de généralités sur les matériaux FGM qui ont prouvés leurs utilisations dans plusieurs domaines industriels, leurs principales caractéristiques, leurs principaux domaines d'application, ainsi que leurs méthodes de fabrication

Le **deuxième chapitre** nous présentons un aperçu sur les propriétés effectives des matériaux FGMs ainsi que les différentes lois qui gèrent la variation des propriétés matérielles de ces produits.

Le **troisième chapitre**, nous exposons une synthèse bibliographique sur différentes théories existantes, qui permettent la modélisation des stratifiées à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation RPT et la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D

Le **quatrième chapitre**, on présente les étapes de formulation d'un modèle analytique basé sur une théorie quasi-3D de déformation de cisaillement pour étudier la flexion des plaques FGM, définies par la variation des fractions de volume à savoir P-FGM, E-FGM et S-FGM, reposantes sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak en tenant compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur (effet de stretching).

Le **cinquième chapitre** est consacré à la validation numérique des résultats du modèle proposé tout en les comparants avec les résultats obtenus à l'aide des théories conventionnelles disponibles dans la littérature pour vérifier l'exactitude de la présente solution puis la discussion de ces résultats.

Enfin, une **conclusion générale** est proposée pour mettre l'accent sur les différents résultats obtenus dans cette étude et qui concernent le comportement des structures FGM sous divers variation des fractions de volume et on termine par des perspectives envisagées pour des futurs travaux.

Chapitre I :

Généralités sur les structures en matériaux fonctionnellement gradues

FGM

I.1 Introduction

Les matériaux FGM par référence à leur nomination anglaise (Functional Gradient Materials), ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie de pointe sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes. Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures. Ces matériaux avancés avec des gradients de composition de la structure et des propriétés spécifiques dans la direction préférée ou de l'orientation, sont meilleurs que les matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Ces matériaux acquièrent de nombreuses applications dans divers domaines d'ingénierie en vue d'utiliser leurs propriétés potentielles de manière optimale. Il existe de nombreux domaines d'application pour les pièces FGM (Mahamood,2012). Les deux principaux sont les domaines aérospatial et biomédical. Dans le domaine aérospatial, où le concept de FGM fit son apparition, les pièces multi-matériaux sont en majorité développées dans le but de résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques. Le centre de recherche de la NASA propose, par exemple, de développer des pièces FGM pour des navettes spatiales.

Le mode de conception et la production des produits en matériaux FGM évoluent et prouvent leurs existences dans plusieurs domaines à savoir : l'électronique (Müller,2003), l'énergie nucléaire (Yadroitsev ,2007), la défense (Lu,2011) ou de la production d'outillage (Jiang,2005).

Cette évolution va transformer considérablement le monde de la conception et permet de créer des structures innovantes avec une large possibilité de choix et d'adaptation des matériaux.

Afin de concevoir des matériaux intelligents qui répondent aux exigences industrielles actuelles à base des FGM, il est impératif qu'il y est une synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Ces produits initialement conçu pour l'industrie de mécanique et d'aéronautique, sont plus vulgarisés dans de nombreux domaines et leurs utilisations sont devenues très multiples.

Notre pays doit prendre en charge les recherches scientifiques par la création des laboratoires spécialisés dans le domaine des FGM et encourager efficacement les équipes de recherches déjà existantes, afin de permettre aux chercheurs de développer des techniques

nouvelles pour produire de multiples outils et matériaux FGM en valorisant les richesses naturelles au profit de l'industrie notamment en matières de fabrications de fibres optiques, panneaux solaires, composantes électroniques et d'autres produits. Cette réflexion de développement peut contribuer à ouvrir des nouvelles portes vers la richesse du pays et promouvoir la création de l'emploi et limiter les frais liés à l'importation de ce type de matériaux.

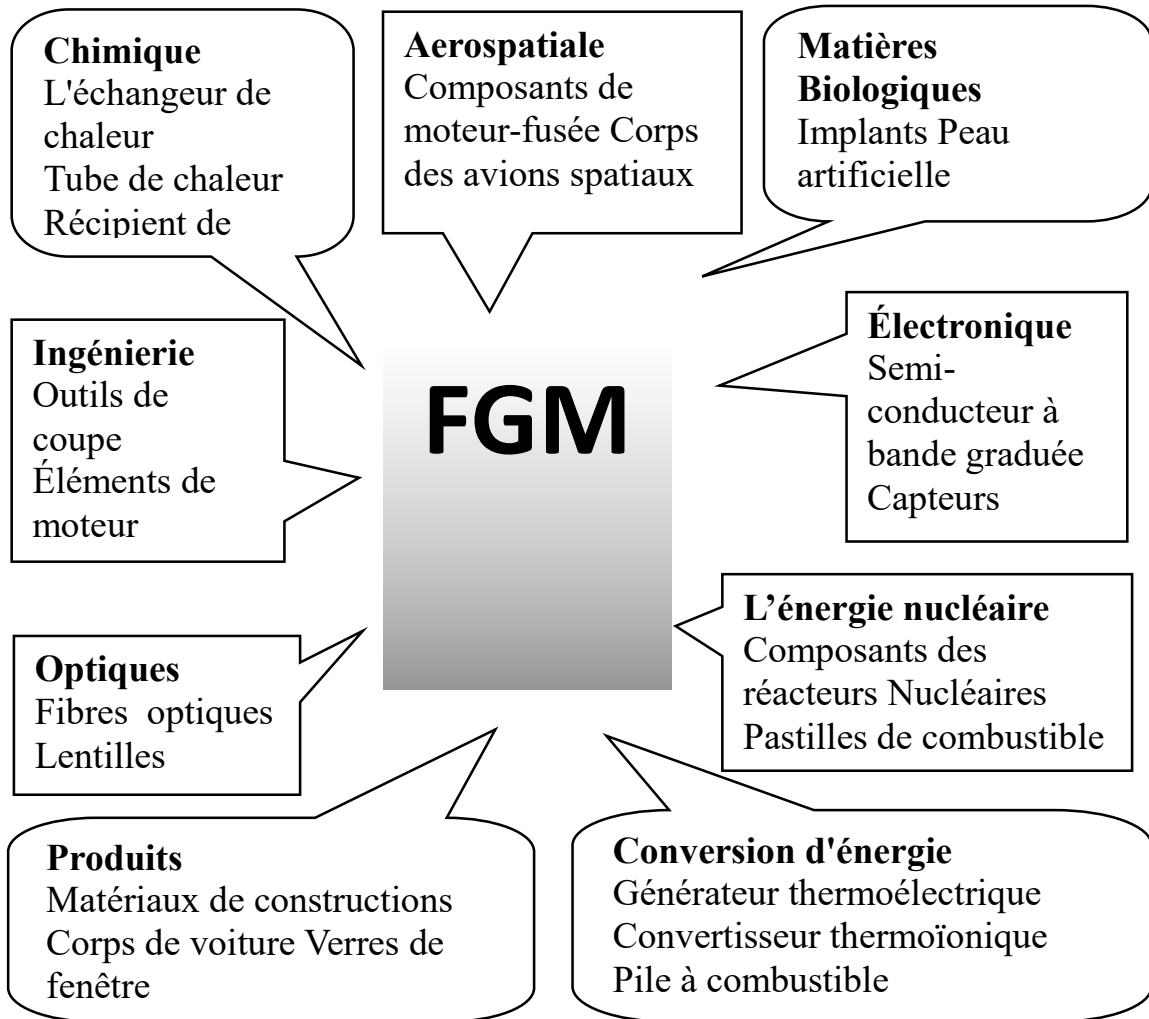


Figure I.1 : Les principaux domaines d'application des FGM (Miyamoto, 2013).

I-2 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM :

La fabrication des matériaux à gradient de propriété s'effectue en première étape par l'établissement de la structure dans l'espace non homogène « gradation » puis en deuxième étape une transformation en bloc de la structure du matériau « consolidation ». Les procédés

de fabrication des produits FGM sont multiples et leurs choix dépendent des paramètres suivants :

- De la combinaison de matière,
- Du type de la loi de mélange requise
- De la géométrie de la composante souhaitée

Dans les paragraphes suivantes nous présentons les procédés industriels les plus utilisés dans la fabrication des produits FGM à savoir: coulage en bande (tape casting), coulage séquentiel en barbotine (slip casting), dépôt par électrophorèse, compaction sèche des poudres, projection plasma, frittage en infiltration, implantation ionique.

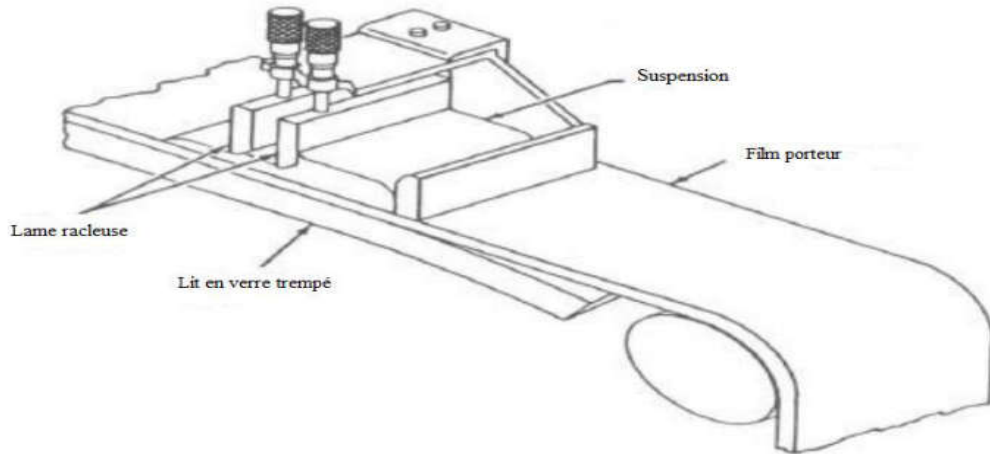
I-2-1 Coulage en bande (tape casting) :

Le coulage en bande est une technique qui consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse sur un support plan sous forme de plusieurs couches minces et régulières pour fabriquer des feuillets dont les épaisseurs sont contrôlées et qui varient de 25 à 1000 μm . Après un raffermissement de la pâte, ces feuillets sont démoulés puis découpés.

Pour que le procédé réussisse, il faut que le solvant utilisé ait un point d'ébullition très bas et une viscosité faible mais il ne doit pas être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique mais soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts. Le liant est utilisé pour offrir une grande résistance mécanique au produit cru et facilite sa manipulation. Alors que le plastifiant est ajouté au liant pour réduire sa viscosité. Ces dits produits (Le liant, le plastifiant et le défloculant) doivent être totalement dégagés pendant le démoulage.

Ce procédé de coulage en bande est souvent utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant les deux méthodes suivantes :

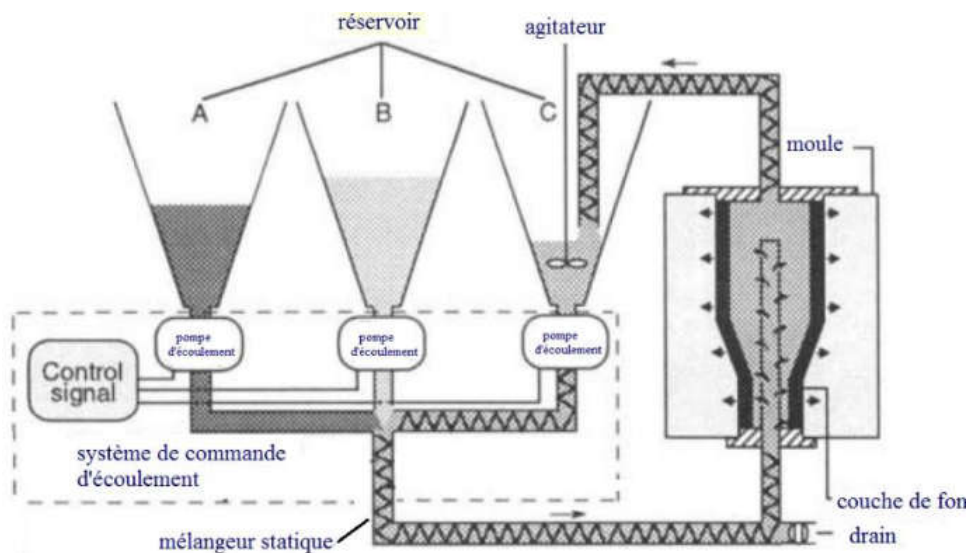
- Soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (MIST) ;
- Soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Boch, 1986),



Figurel.2 Principe de la méthode coulage en bande[Lostec, 1997].

I-2-2 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting) :

Le principe consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, en laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Ce coulage s'effectue en deux étapes essentielles qui sont, la formation du tesson ou « prise » dans une première phase puis une consolidation du tesson ou « raffermissement ».



Figurel.3: Principe du coulage par barbotine (Moya, 1992).

I.2-3 Dépôt par Centrifugation :

La coulée centrifuge a été principalement utilisé pour obtenir des pièces cylindriques, qui consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons

cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure. I-10) (Lucc .,1995), (Hill .,1996), (Sbai., 1996).

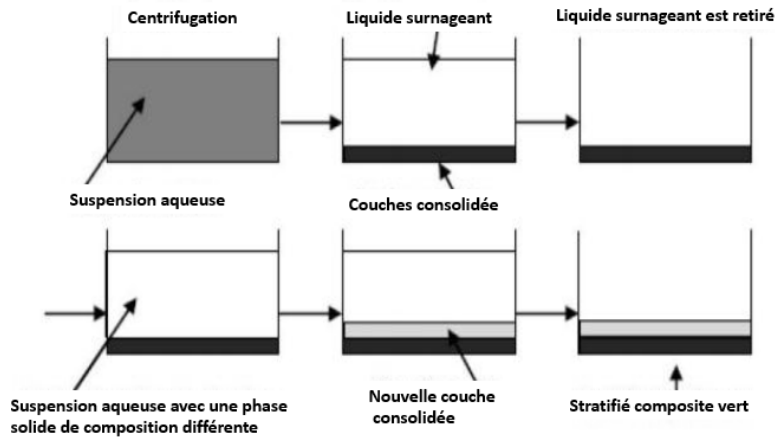


Figure 1.4: Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Koteswara et al,2013)

I-2-4 Dépôt par électrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique (Sarkar, 1996).

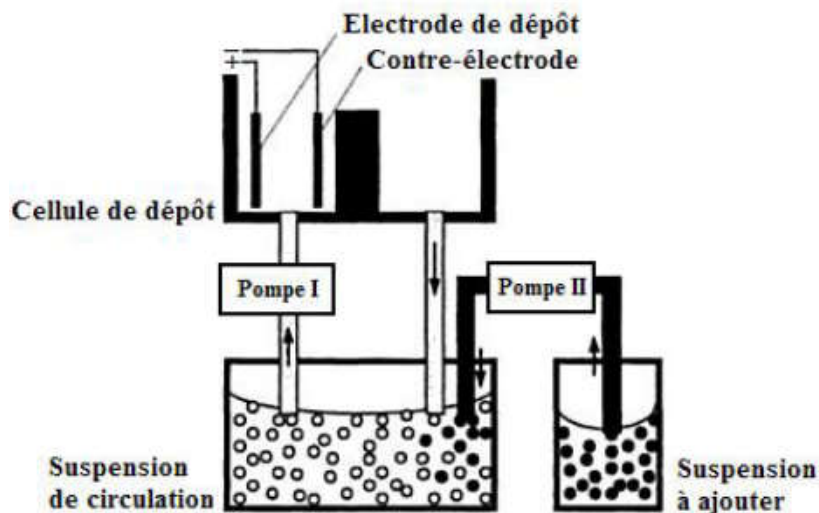


Figure I.5 Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux (Sarkar, 1996).

I-2-5 Compaction sèche des poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Généralement, par une pression isostatique et un délaitage. La densification sera enfin l'étape finale (Bish,1993).

I-2-6 Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens,1990).

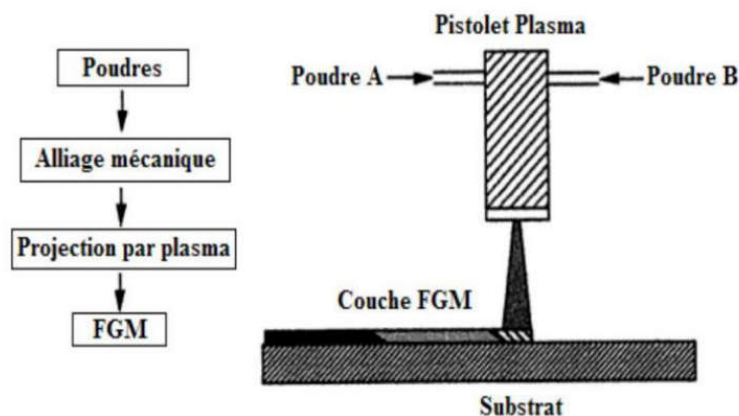


Figure I.6: Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma (Steffens, 1990).

I-2-7 C.V.D et P.V.D

Les dépôts chimique (C.V.D) ou physique (P.V.D) en phase vapeur sont des procédés de fabrication des FGM dont lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la

surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de FGM sur des substrats de formes compliquées (Kawai et al, Uemura ,1990)

I-2-7 Frittage en infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Taka,1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.2.8 Frittage Laser Différentiel :

L'utilisation du laser dans ce procédé permet de contrôler la température et focaliser avec précision le point à chauffer. Le frittage différentiel le long de la pièce est obtenu grâce à la différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

(Yuki et al.,1990) ont fabriqué une pièce F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.7 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

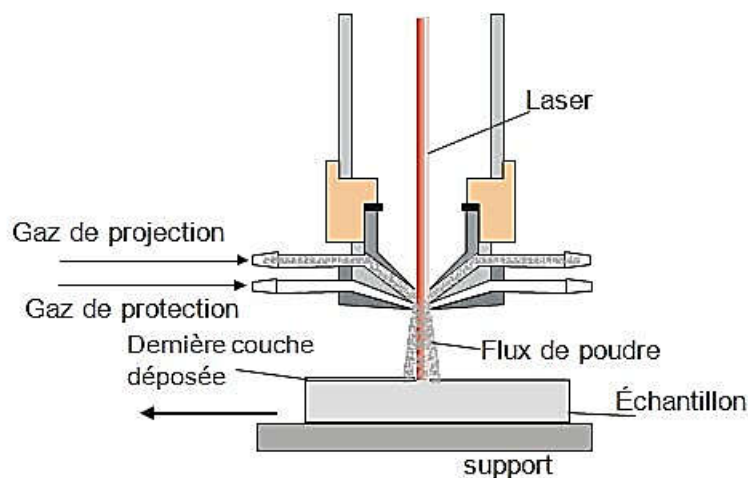


Figure I.7.. Disposition du procédé frittage laser différentiel (YUKI et al.1990).

I-2-10 Implantation ionique :

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Chigasaki ,1990).

1.3 Conclusion

Les matériaux FGM sont le résultat de combinaison de produits d'ingénierie développés sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes pour aboutir à des excellents matériaux de pointe qui demeurent une source de fabrication d'élément de structures dans plusieurs domaines industriels. Ces matériaux permettent de réduire les coûts de fabrication en optant pour des alliages moins couteux, tout en préservant les caractéristiques techniques de la pièce.

Dans ce chapitre, nous avons défini les différentes méthodes de fabrication des matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs domaines d'utilisation ainsi que leurs principales méthodes de fabrication.

CHAPITRE II :
Propriétés matérielles
des plaques FGM

II-1 Introduction

Dans le but de vulgariser ces produits FGMs dans le domaine de l'industrie, beaucoup de recherches à travers le monde sont activement menées pour résoudre des problèmes liés à son mode de fabrication et à son comportement mécanique et thermique.

L'évolution de l'industrie à travers le monde oblige les chercheurs scientifiques à fournir plus d'effort pour s'attaquer aux entraves liés à la qualité des matériaux et régler les problèmes d'ordre technologiques et précisions conceptuelles. Cette avancée de la science cherche toujours à minimiser la consommation de la matière première dans le but d'atteindre les objectifs du développement durable. Dans cette perspective, les matériaux deviennent un axe de recherche en vue de produire des matériaux plus performants et innovants tels que les FGM matériaux à gradient fonctionnel (Functionnally Graded Materials) .

Ce matériau développé en premier temps par un groupe scientifique japonais en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai, s'inscrit dans une tendance relativement nouvelle, répond aux exigences techniques et certaines caractéristiques spécifiques, est conçu pour éliminer les discontinuités au niveau des interfaces et le délaminage, rencontrés dans les matériaux composites classiques. Il a des propriétés physiques qui varient graduellement et continuellement à travers l'épaisseur et aussi pour éviter le problème de la concentration des contraintes aux interfaces. Son utilisation est en progression croissante et envahit plusieurs domaines telles que la mécanique, l'aérospatiale, le génie civil, le biomédical et autre domaine. Il servira aussi comme barrières thermiques grâce à sa composition riche en céramique.

II-2 Définition des matériaux FGM:

Les matériaux composites sont connus par leurs défauts de conception en raison de leur faible résistance mécanique et au choc ainsi qu'aux propriétés matérielles à travers l'interface qui peut subir un décollement ou une rupture pendant un chargement mécanique ou thermique. Ces anomalies d'usage demeurent inapte d'être employé dans des environnements à haute température, d'où l'idée de chercher d'autres matériaux plus performants tel que les Matériaux à Gradient fonctionnel (MGF) (FGM en langue anglaise), qui sont des composite non homogène fabriqué à partir de différents composants de matériaux généralement de deux phase céramique et métallique séparées par un mélange

intermédiaire constitué de ces deux phases, selon une fraction volumique ou il y'a variation graduelle et continûment du module de Young et la masse volumique à travers l'épaisseur. Cette technique est conçue pour optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Les FGM connus par leurs meilleures rigidités et leurs bonnes résistances à la fatigue et grâce à leurs performances dominantes, sont classés parmi les matériaux intelligents, largement utilisés dans divers domaines et structures d'ingénierie.

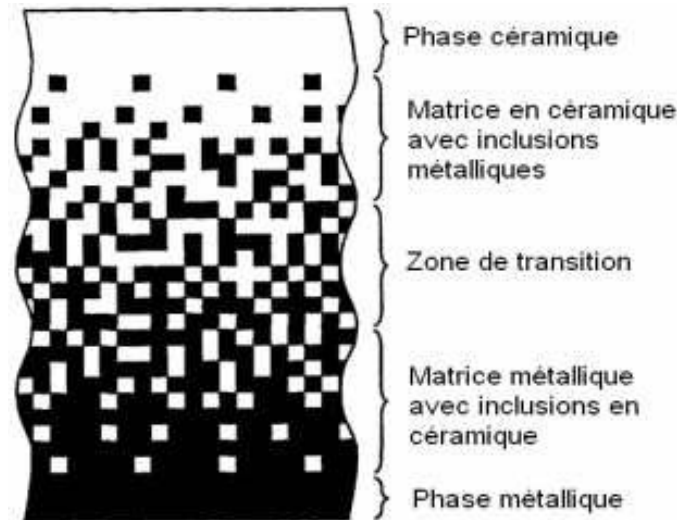


Figure II.1 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal (Yin et al ,2004)

II-3 Orientation vers des nouveaux matériaux les FGM

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al. 1986).

Le concept FGM peut être utilisé dans divers domaines dans le but d'augmenter leurs capacités structurelles et usages fonctionnels. A cet effet divers programmes ont été élaborés par les chercheurs japonais au cours des années 80 et 90 dans le but de développer l'architecture des FGM, en inventant de nouveaux procédés afin que ces types de matériaux qui constituent un revêtement pour les navettes spatiales hypersoniques, résistent bien à

des hautes températures et aussi aux applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes développés continuent à contribuer à l'évolution de la conception architecturale du FGM et de ses perspectives.

Les FGM ont d'excellentes caractéristiques, conçus pour éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et qui diffèrent des matériaux à base de composite. Les FGM sont aussi connus par leurs doubles propriétés (résistances mécaniques et thermiques), incitent les chercheurs à les appliquer dans le domaine industriel vue la distribution de leurs composantes qui sont graduées sans interruption.

Les FGM à base de métal et de céramique par exemple, ont d'excellentes caractéristiques à savoir l'absence d'interface franche entre les deux matériaux avec une bonne résistance à des températures élevées par les matériaux céramiques, tandis que le coté métal a les capacités mécaniques nécessaires pour supporter la partie en céramique (voir Figure II.2)

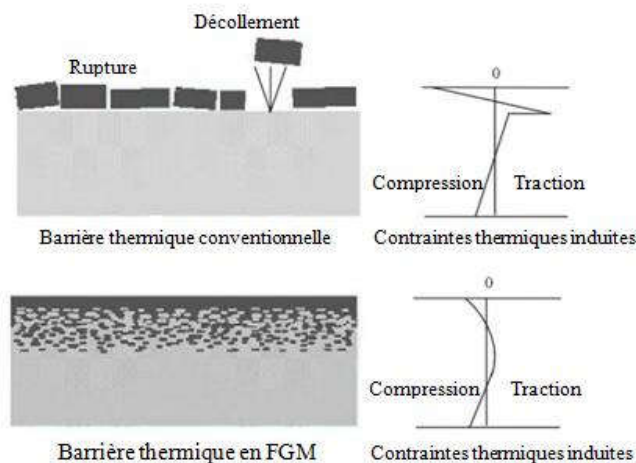


Figure II.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Krishnan et al,2017)

II-4 Historique sur le développement des matériaux FGM :

Le FGM est un matériau constitué de plusieurs couches avec des composants différents tels que les céramiques et les métaux ayant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

Les matériaux FGM peuvent également être conçus de telle sorte que le matériau est sélectivement renforcé dans les régions qui doivent avoir des propriétés particulières. La composition et la microstructure comprenant la composition chimique, l'état physique et la

configuration géométrique peuvent être modifiées progressivement sur l'ensemble du volume dans les matériaux composites. Cela entraînerait une modification correspondante des propriétés du matériau dans ce volume (Atai, A.A et al., 2012).

Pour la conception de ce nouveau matériau, beaucoup de recherches ont été menées initialement au Japon qui sont résumés dans le tableau II.1 :

Tableau II.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon

ANNÉE	PROGRES DE RECHERCHE SUR LES FGM
1984	Idée pour la conception des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion initiée par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon).
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous le patronage de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) à Köln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	Etude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA . 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM , FGM partie II- phase(1).
1994	3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

II-5 Propriétés effectives des FGM :

Généralement les FGM sont produits à partir de deux phases (types) de matériaux ayant des propriétés distinctes avec des fractions volumiques de chaque phase qui varient et évoluent graduellement dans la direction de gradation où on constate un changement des propriétés effectives des FGM. Par conséquent, on distingue deux approches possibles pour les modèles des FGM (Figure II.3) :

- Dans le graphe (a), on constate une variation en escalier de la fraction volumique (céramique et/ou du métal) qui est conservée pour chacune des sections. Les compositions et / ou les microstructures changent par étapes, généralement avec la présence d'une interface.
- Dans le graphe (b), la fraction volumique des deux composants (céramique et métal) change semblablement à une fonction dépendant de la coordonnée (z), et continuellement l'une à l'inverse de l'autre,

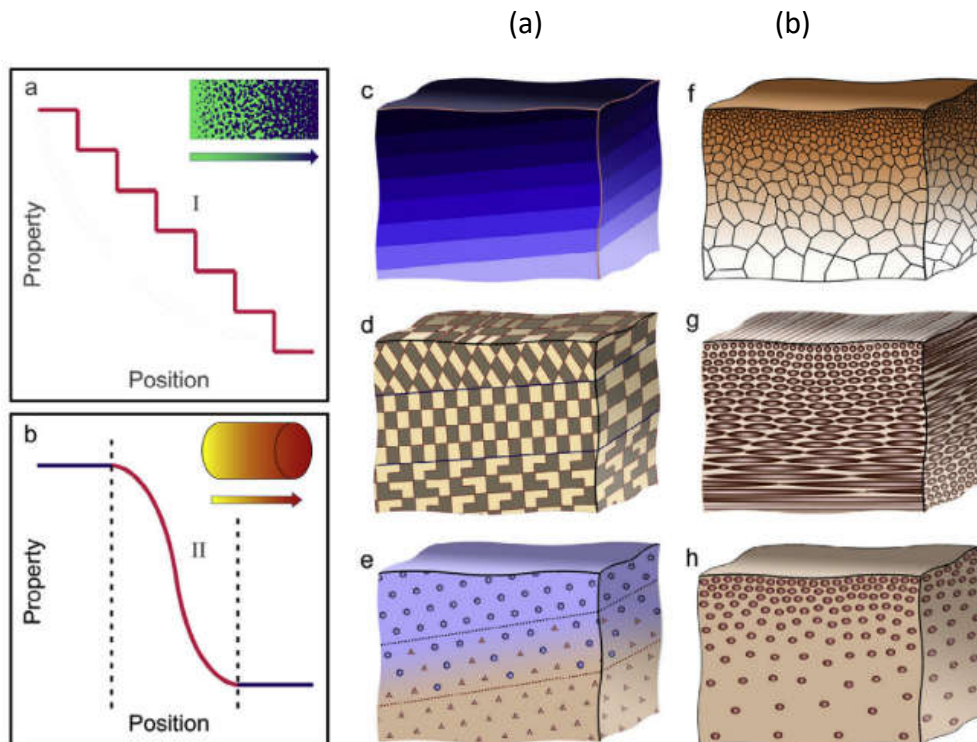


Figure II.3 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM (ZHANG et al. 2019)

Les matériaux FGM à base de céramique et métal sont les plus répandus dans les domaines de l'industrie. Ils sont conçus dans le but de résister à des températures élevées d'un côté mais sans qu'il y est de transfert de chaleur vers l'autre côté. Cette conception a

donné naissance à des plaques FGM dont la face supérieur est 100% céramique et une face inférieure 100% métal avec une couche qui varie graduellement à travers l'épaisseur limitée par les deux faces précitées.

Le choix de ces matériaux est fait sur la base de leurs caractéristiques exceptionnelles suivantes

Les caractéristiques de la céramique sont :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Il est à noter que les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité (voir tableau II.2)

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau II.1.

Tableau II.2: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (MSA. Houari, 2011)

La face à haute température	CÉRAMIQUE	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance thermique ; • Bonne résistance à l'oxydation ; • Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre (couches intermédiaires)	CÉRAMIQUE-MÉTAL	
La face à basse température	MÉTAL	<ul style="list-style-type: none"> • Elimination des problèmes de l'interface • Relaxer les contraintes thermiques. <ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance mécanique ; • Conductivité thermique élevée, • Très bonne ténacité

II-6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont fabriqués en changeant les constituants des matériaux avec une microstructure non uniforme qui varie graduellement sans interruption ceci peut être assimilé à un empilement d'un nombre infini de couches liées entre elles, et chacune possède ses propres propriétés. Ces liaisons assurent une meilleure résistance à la rupture, et également une excellente dureté à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Pour décrire cette variation des fractions de volume, les chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour les appliquer dans la méthode de synthèse utilisée.

II-6-1 Propriétés matérielles des plaques P-FGM :

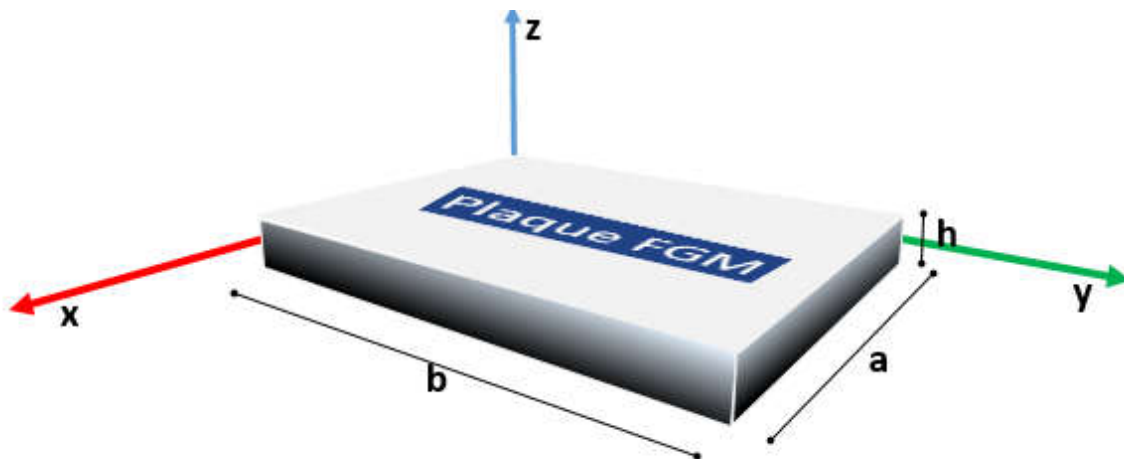


Figure II.4 : Géométrie d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés.

La fraction volumique des plaques P-FGM est assurée par la loi de puissance :

$$V_1(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{II- 1})$$

P : représente l'indice matériel, h : l'épaisseur de la plaque et z : la coordonnée suivant l'épaisseur. Ainsi, le module de Young de ces plaques est exprimé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad (\text{II- 2})$$

E1 et E2 sont respectivement les modules de Young des matériaux constituant la plaque P-FGM.

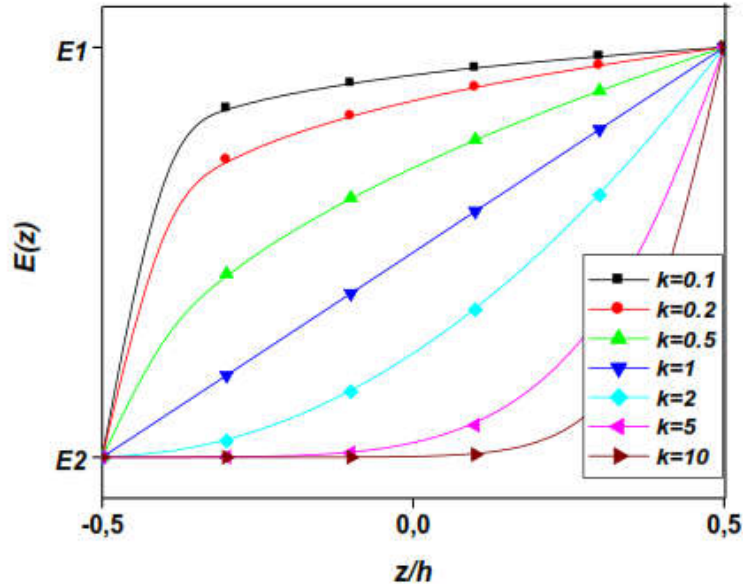


Figure II.5 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM.

On remarque que lorsque le module de Young augmente, la plaque devient très résistante et ce grâce à la teneur en céramique qui est très importante, mais la résistance de la plaque devient faible lorsque on se rapproche de la zone où il y'a réduction de cette teneur et l'augmentation de celle du métal. Il apparait clairement que le module de Young change rapidement près de la surface inférieure pour $k > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k < 1$. Avec ($k = 1$), la variation du module de Young devient linéaire.

II-6-2 Propriétés matérielles des plaques S-FGM :

Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p, V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad (II-3)$$

En utilisant la loi de mélange, le module de YOUNG de la plaque S-FGM est calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad \text{for } 0 < z < h/2$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + (1 - V_2(z))E_2 \quad \text{for } -h/2 < z < 0 \quad (II-4)$$

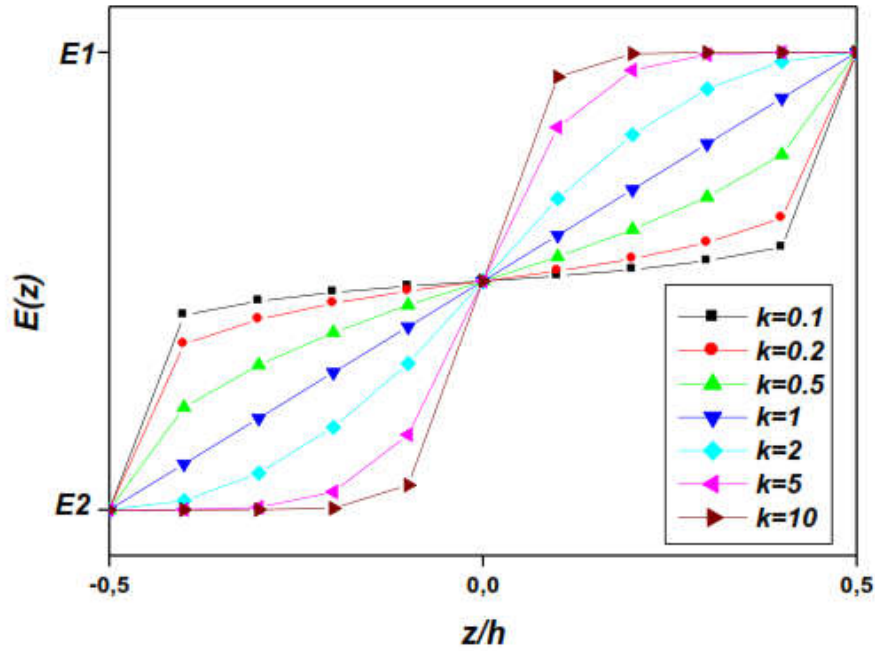


Figure II.6 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.

La Figure II.6 montre que la variation du module de Young définie par l'équation (II-4) représente les distributions sigmoïdes. On remarque que cette distribution est antisymétrique par rapport au plan moyen.

II-6-3 Propriétés matérielles des plaques E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par :

$$E(z) = A e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (II-5-a)$$

Avec

$$A = E_2 \quad , \quad B = \frac{1}{h} \ln(E_1 / E_2) \quad (II-5-b)$$

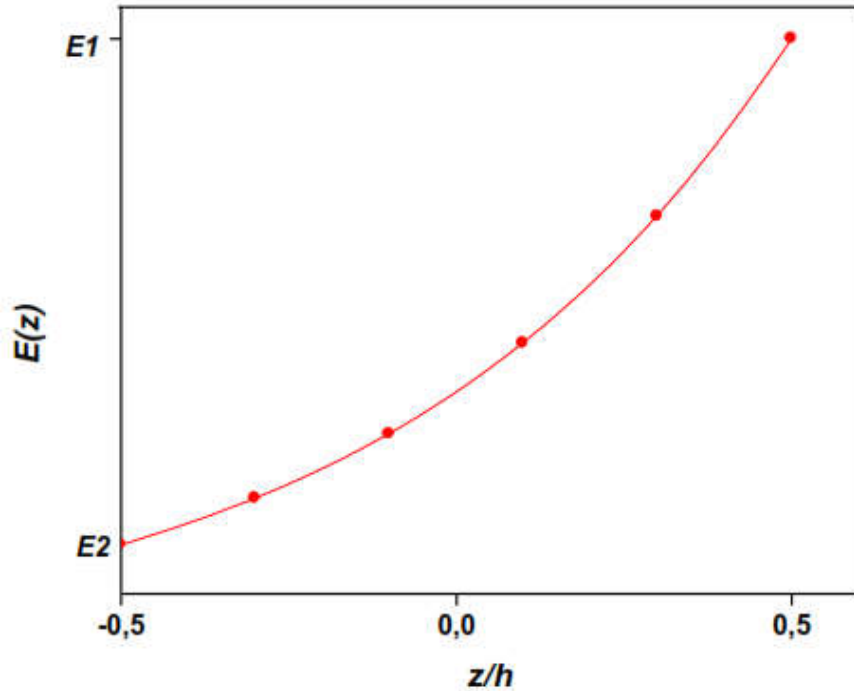


Figure II.7 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

D'après la **Figure II.7**, on remarque que l'augmentation du module de Young est proportionnelle à l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal tout en allant vers l'extrémité supérieure de la plaque.

II.7 Conclusion

Cette revue de la littérature nous a permis de définir les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », et donner un aperçu sur leurs propriétés effectives qui varient graduellement et continuellement d'une face à l'autre à travers l'épaisseur, Nous avons pu aussi présenter les différentes lois qui gèrent la variation des propriétés matérielles des dits matériaux à savoir : la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (EFGM) et la fonction sigmoïde (S-FGM). Ces lois sont utilisées pour décrire la variation des fractions de volume.

CHAPITRE III :
LES DIFFERENTES THEORIES DES
PLAQUES

III.1 Introduction

Les stratifiés sont des éléments bidimensionnels, de formes planes avec des dimensions importantes par rapport à leurs épaisseur notée (h)., on peut les rencontrer dans divers domaines de l'industrie. A cet effet, le concepteur doit bien étudier leurs comportements et états limites dans divers conditions d'utilisation et environnementales afin d'éviter des défaillances ou accidents qui peuvent surgir. Dans le but d'obtenir des résultats exacts relatifs à l'étude du comportement statique et dynamique des plaques, Il est important de choisir les méthodes de résolution fiables, connaître les théories qui gèrent ces types de plaques et faire un bon choix de la théorie selon le cas à étudier.

III.2 Diffèrent types de plaques

Dans un premier temps, il est évident de définir les plaques afin de mieux connaître les théories qui les gèrent. Elles peuvent être classées en trois catégories :

Les plaques isotropes : sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson) et elles sont constituées d'un matériau isotrope exemple (acier, béton). Si un matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope.

Les plaques orthotropes : sont des plaques avec des propriétés élastiques qui sont différentes dans deux directions perpendiculaires. Cet aspect on peut le trouver soit naturelle (bois) ou techniques (dalles rédies). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques sont souvent utilisées dans : les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art

Les plaques anisotropes : sont des plaques dont les propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie

III.3 Diffèrent types de théorie :

L'application des théories des plaques est devenue très importante avec le développement de la science. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de

travaux depuis plus d'un siècle. Nous présentons dans ce chapitre les différentes théories utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques à savoir :

- Théorie classique des plaques (CPT),
- Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT)
- Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)
- Théorie HSDT quasi-3D
- Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

III.3.1 Théorie classique de Kirchhoff-Love (CPT : Classical Plate Theory)

Dans cette théorie on présente un modèle plus simple est le plus général qui se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, dite aussi théorie des plaques minces avec une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur ou il y'a conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse due à la faible épaisseur de la plaque. On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Il est noté que cette théorie n'est pas appliquée dans le cas des plaques modérément épaisses ou fortement épaisses. Elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- La contrainte normale dans le plan de la plaque est négligeable. (hypothèses des contraintes planes).
- Les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et normales. Donc les effets de déformation en cisaillement transverse sont négligeables ($\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)
- L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

Ces hypothèses correspondent à la théorie des plaques minces dans le domaine des petites déformations (modèle de Love-Kirchhoff).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, on peut écrire le champ de déplacement sous la forme suivante :

$$u(x, y, z, t) = u^0(x, y, t) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad \text{(III- 1)}$$

$$v(x, y, z, t) = v^0(x, y, t) - z \frac{\partial w^0}{\partial y} \quad \text{(III-2)}$$

$$w(x, y, z, t) = w^0(x, y, t) \quad \text{(III- 3)}$$

avec :

u_0, v_0 : Le déplacement du plan neutre.

w_0 : La flèche de la plaque,

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$: Représentent la rotation de la fibre normale (fig III.1) autour des axes (x) et (y)

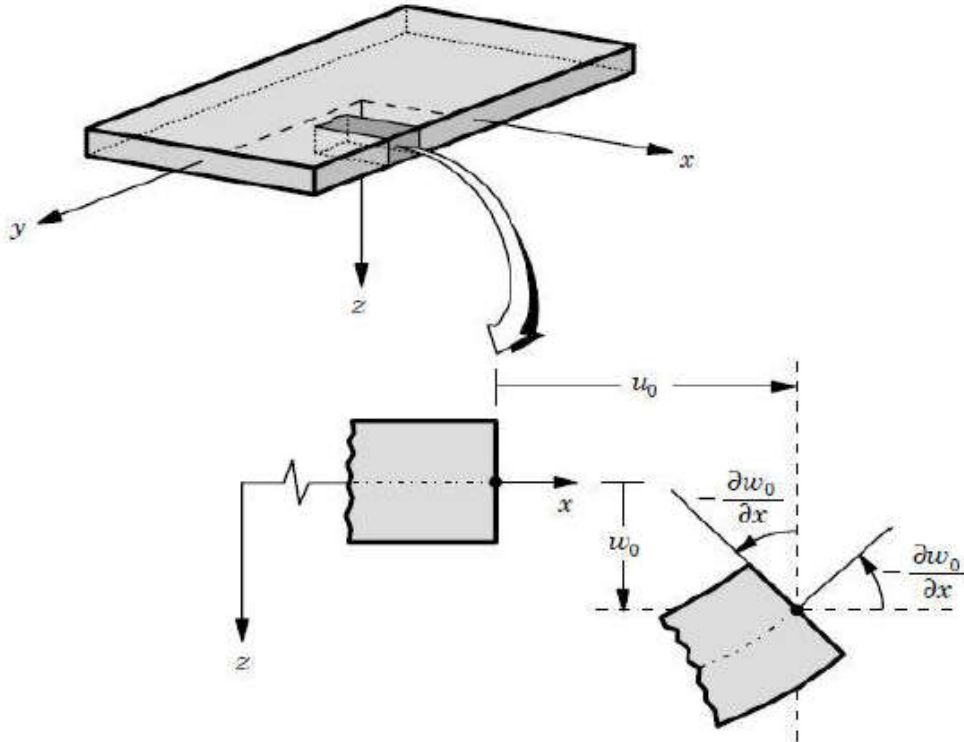


Figure III.1: Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy, 1997).

III.3.2 Théorie de déformation de cisaillement de Reissner-Mindlin (FSDT : First Shear Deformation Theory)

Cette théorie est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff) en tenant compte de l'effet de cisaillement transversal dans les hypothèses cinématiques. Elle donne une valeur constante de déformation de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque et aussi une fausse description du champ de contraintes tangentielles, donc il est nécessaire d'introduire des facteurs de correction de cisaillement sous forme de quantités adimensionnelles.

Dans cette théorie la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse).

Plusieurs auteurs ont analysé le comportement mécanique des plaques en utilisant la théorie de cisaillement de premier ordre dans les littératures (Yan, 2005), (Thai, 2013a) (Belabed et al. 2014), (Minwo, 2018), (Nguyen et al. 2019),

Le champ de déplacement dans cette théorie est:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \quad \text{(III- 4)}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \quad \text{(III- 5)}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad \text{(III- 6)}$$

Avec

(u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

ϕ_x, ϕ_y La rotation normale au plan moyen autour des axes et respectivement.

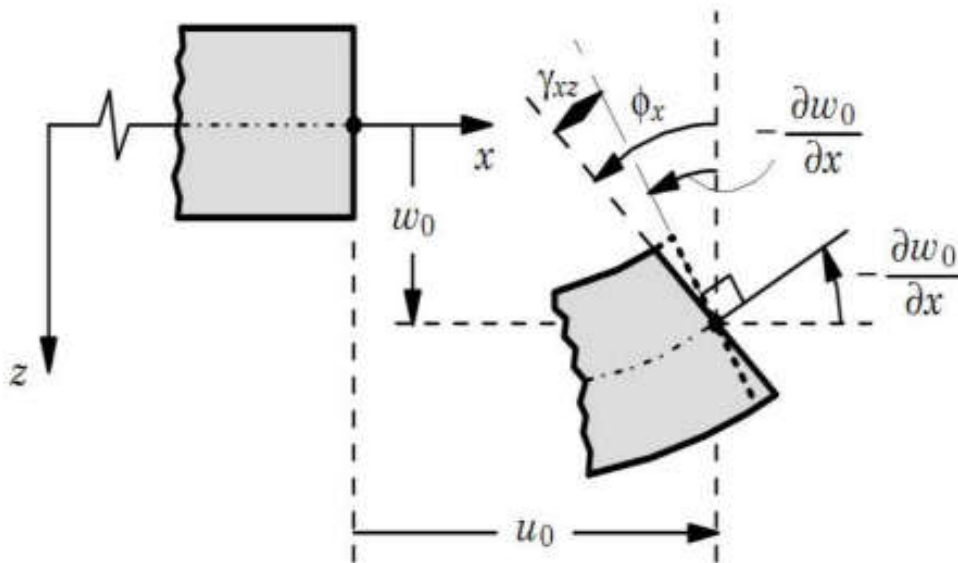


Figure III.2: Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin

III.3.3 Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé de Reddy (HSDT: High Shear deformation Theory)

Cette théorie est une évolution de la théorie classique des plaques (CPT) et celle du premier ordre (FSDT). Elle est basée sur une distribution non linéaire de champ de déplacement à travers l'épaisseur. (Figure III.2), les effets de la déformation transversale de cisaillement

et/ou de la déformation normale transversale sont pris en compte. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. En analysant des études élaborées par plusieurs auteurs on constate que ces théories d'ordre supérieur sont plus précises que les theories CPT et FSDT cette précision est le résultat d'introduction de plusieurs inconnus supplémentaires .Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al 1949), (Naghdi ,1957),(Kant et Swaminathan ,2002), (Hildebrand et al. 1949), (Reissner E., 1975), (Reddy J.N., 1984), Liberscu L., 1967), (Whitney J.M., 1973) , (Touratier M., 1991) et (Fekrar A. et al, 2014) .Le champ de déplacement est généralement s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + f(z) \Theta_x(x, y, t) \quad \text{(III- 7)}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + f(z) \Theta_y(x, y, t) \quad \text{(III- 8)}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad \text{(III- 9)}$$

u_0 et v_0 : les déplacements de membrane dans les direction x et y respectivement, et w_0 : la flèche de la plaque , (Θ_x, Θ_y) : et les rotations autour des (shi) axes x et y ,

$$\text{respectivement, } (\Theta_x = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \varphi_x, \Theta_y = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \varphi_y)$$

$f(z)$ est une fonction d forme ou appelée aussi fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. On peut obtenir les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) avec $f(z) = 0$, tandis que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue par une fonction $f(z) = z$.

Nous avons introduit ici un modèle de plaque pour analyser le comportement :

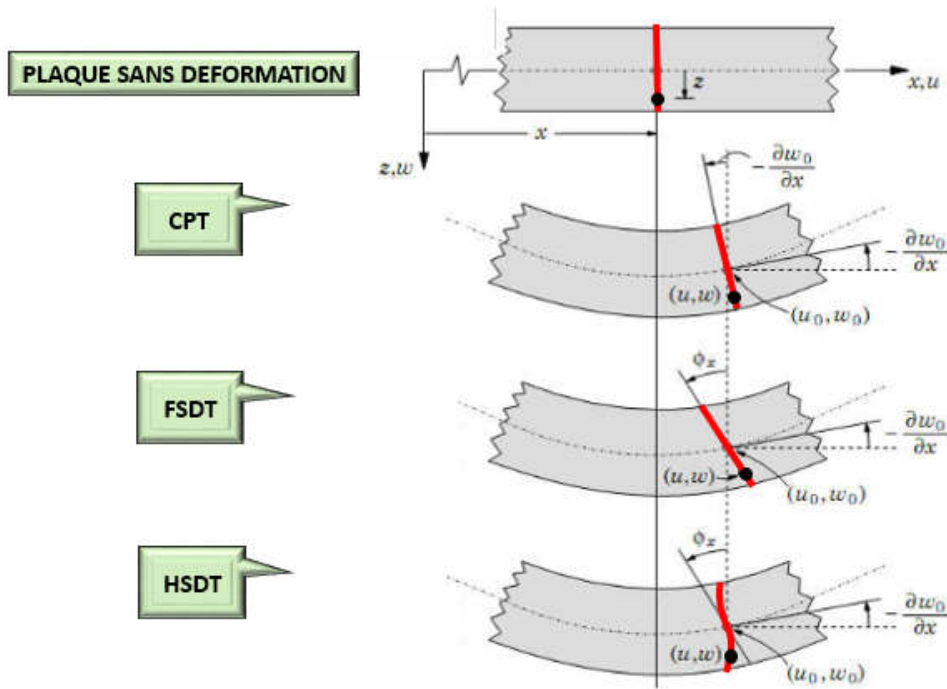


Figure III.3 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (FSDT) et (CLPT)

Ci-dessous quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$ citées par :

- L'approche d'(Ambartsumian,1969)

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad \text{(III- 10)}$$

- L'approche de (Reissner ., 1975),

$$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{(III- 11)}$$

- L'approche de (Reddy 1984) avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{(III- 12)}$$

Dans ce modèle de Reddy, on constate qu'il y' a une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transversal et parabolique dans l'épaisseur avec un champ de déplacement membranaire qui est cubique.

- L'approche de (Touratier 1991) :

Dite de déformation de cisaillement sinusoïdal (Sinusoidal Shear Déformation Theory SSdT), a pour objet de modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{(III- 13)}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (Fekrar,2010)

➤ L'approche de (Karama, Afaq, and Mistou 2003) (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{(III- 14)}$$

Elle est développée par (Karama, Afaq, and Mistou 2003), elle propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche et permet aussi un développement en puissance pair et impair de la variable z, alors que la fonction (sinus) de (Touratier,1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

➤ La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par (Ait Atmane et al.,2003) est obtenue en prenant:

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad \text{(III- 15)}$$

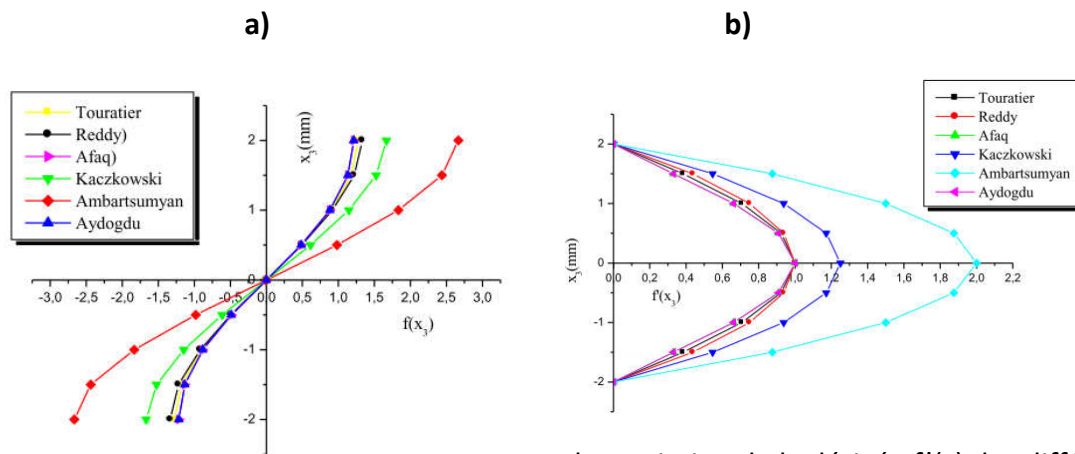
La modèle d' Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad \text{(III- 16)}$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en utilisant des différentes fonctions de cisaillement transverse. Le Tableau III.1 montre les différentes fonctions caractérisant chaque théorie.

Tableau III.1. Récapitulation des différentes fonctions de cisaillement

AUTEURS	FONCTIONS DE CISAILLEMENT
Ambartsumian,1969	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Reissner, Panc et Kaczkowski , 1945	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Reddy 1984	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Touratier 1991	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Soldatos,1992	$f(z) = h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Karama, Afaq, and Mistou 2003	$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Ait Atmane et al.,2003	$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)}$
Aydogdu (2005)	$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0$
Nguyen 2007	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z \left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$
El Meiche et al,2011	$f(z) = \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} - z$
Benachour 2011	$f(z) = z_{ns} + C - \sin\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right)$
Mantari 2012	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cosh(\pi z/h)}$
Mantari and Okten &soares 2012	$f(z) = \tan(mz)$
Mantari and Soares 2013	$f(z) = \sin\left(\frac{z}{h}\right) e^{m \cosh(z/h)}$
Grover et al ,2013	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rh}{z}\right) - z \frac{2r}{h\sqrt{r^2 + 4}} \quad r=3$
Sahoo and singh, 2013	$f(z) = \cot^{-1}\left(\frac{rh}{z}\right) - \frac{4r}{h(4r^2 + 1)} \quad r=0.46$
Chikh et al 2016	$f(z) = \frac{1}{10} \left(\frac{(h \cdot \sinh\left(\frac{10z}{h}\right))}{\cosh(5)} \right) + \frac{h}{100}$
Chikh et al 2017	$f(z) = \frac{2z \sinh\left(\frac{z^2}{h^2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{1}{4}\right) + \cosh\left(\frac{1}{4}\right)}$



a :Variation $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

b : Variation de la dérivée $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

Fig III.4 : Variation de la fonction de forme et sa dérivée $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

A travers ces deux figures (tableau III,2) on constate que les deux approches d'Ambartsumian et de Reissner & Kaczkowski ont des valeurs plus élevées que les autres.

III.3.4 Théorie de déformation des plaques quasi-3D

Dans cette théorie, on divise le déplacement transversal en trois constituants qui sont la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque,(Benahmed M. et al.,2017) ont proposé une théorie de déformation hyperbolique en cisaillement quasi 3D pour la flexion et la vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak ou le nombre d'inconnues à déterminer est de cinq déplacements et satisfait aux conditions aux limites de traction qui doit être nulle à la surface des plaques sans exiger de facteur de correction de cisaillement. (Khiloun, M.et al, 2019) ont proposé une théorie quasi-3D ,avec un nombre d'inconnues qui est réduit à quatre, ce qui permet d'obtenir un effort de calcul nettement inférieur. (Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., & Karami, B. (2018)). (La théorie hyperbolique quasi-3D elle n'utilise que cinq variables inconnues pour déterminer les réponses aux vibrations quadruples couplées (cisaillement axial-flexion-étirement))

(Thai, H. T., & Kim, S. E. (2013)) une simple théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale quasi-3D a été proposée pour les plaques FG. En simplifiant davantage les hypothèses de la théorie de (Zenkour A. et al, 2018) sur la quasi-3D, le nombre d'inconnues de la nouvelle quasi-3D est réduit à un, et rend donc la nouvelle théorie simple et efficace à utiliser. (Belkacem Adim1,2 and Tahar Hassaine Daouadji, 2016) La théorie tient compte des effets d'étirement et de déformation par cisaillement sans exiger de facteur de correction du cisaillement] (Boutaleb et al. 2019), la cinématique de la théorie actuelle est modifiée en considérant des termes intégraux indéterminés dans les déplacements dans le plan, ce qui se traduit par un nombre réduit de variables par rapport à d'autres HSDT du même ordre.

(Belkhodja et al. 2020) ont présenté une étude qui analyse les plaques de matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Le principe de Hamilton est exploité pour développer des équations de mouvement basé sur un champ de déplacement de seulement cinq inconnues, dont trois distinguent les membranes de déplacement transversal à travers l'épaisseur de la plaque (déplacements en flexion, cisaillement et étirement).

(Boukhelif Z. ET AL. ,2019) dans ce travail, ils présentent une étude dynamique de plaques à gradation fonctionnelle (FG). Le point culminant de cette théorie est qu'en plus de prendre en compte l'effet de l'extension de l'épaisseur ($\epsilon z \neq 0$), la cinématique est définie avec seulement 4 inconnues.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x} \quad \text{(III- 17)}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial y} \quad \text{(III- 18)}$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z)\varphi(x, y, t) \quad \text{(III- 19)}$$

Où

- (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.
- (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal,
- φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement
- $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse .

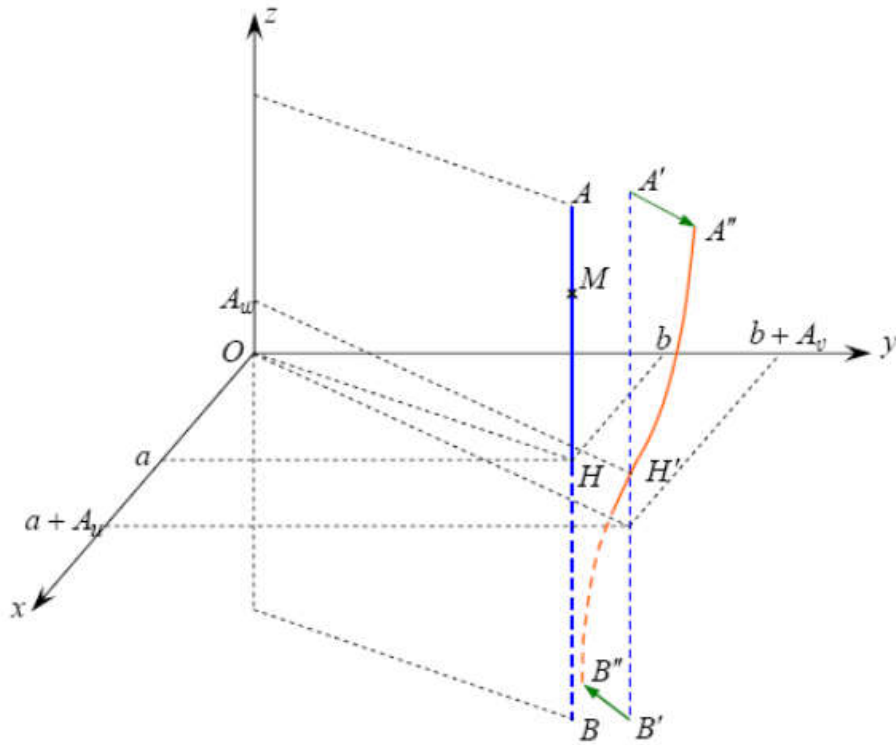


Figure III.5 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.

III.3.5 Théorie raffinée de déformation des plaques de Shimpi (RPT : Refined Plate Theory)

La théorie des plaques raffinée (RPT) a été développée par Shimpi (2002) pour l'analyse de la flexion et des vibrations des plaques isotropes FG avec une réduction de nombre d'inconnues. Elle est basée à la fois sur les effets de déformation par cisaillement et d'étirement de l'épaisseur sans exiger de facteur de correction du cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Le nombre d'inconnues est de quatre (u_0, v_0, w_b et w_s) contrairement aux théories classiques qui en comptent cinq (u_0, v_0, w_b, θ_x et θ_y). Elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à déterminer au lieu de cinq dans le cas classique. Plusieurs chercheurs ont démontré la fiabilité de cette théorie tels que (Fekrar et al. 2014), (Lee, Han, and Park ,2015),(Nguyen et al. 2019)(Zenkour ,2009) et (Rouzegar and Sharifpoor, 2015), Avec cette théorie, les auteurs précités ont analysé la flexion des plaques FGM dans le cas statique.

Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit donc :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{III- 20})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial y} \quad (\text{III- 21})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III- 22})$$

Avec (u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y. (w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est la fonction de cisaillement transverse.

III.5. Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre, une synthèse bibliographique sur les différentes théories existantes pour les études des plaques en matériaux fonctionnellement gradués FGM parmi on trouve : la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour étudier les plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation RPT, en ce qui concerne la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D elle fera l'objet de la présente étude qui prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur pour analyser la flexion de différentes plaques (P-FGM, E-FGM, S-FGM) épaisses reposant sur des fondations élastiques de Pasternak. La précision et l'efficacité de la présente théorie sont établies à travers des exemples numériques.

Chapitre IV :

Formulation théorique des plaques

FGM reposantes sur fondation

élastique

IV.1 Introduction

Dans le but de résoudre les problèmes des poutres et des plaques dans le domaine élastique, beaucoup d'auteurs ont développé diverses théories qui permettent une bonne description du comportement statique et dynamique de ces structures à base de FGM.

Dans cette perspective, le présent travail se focalisera sur l'étude analytique du comportement en flexion des plaques fonctionnellement graduées (FGM) carrées et rectangulaires épaisses posées sur des fondations élastiques de Pasternak, définies par la variation des fractions de volume à savoir P-FGM, E-FGM et S-FGM, , et ce en utilisant une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement quasi 3D qui prend en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur (Stretching effect) de la plaque FGM où le nombre de variables est limité à cinq. Dans cette théorie les termes d'intégrale indéfini sont introduits dans le champ de déplacement proposé, et contrairement aux théories conventionnelles HSDT. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton et comparées aux résultats existants développés par les autres auteurs dans le but de vérifier la validité de la théorie développée

IV. 2. Cinématique et équations constitutives

IV. 2.1 Champ des déplacements

Sur la base des hypothèses formulées dans l'introduction, le champ déplacement peut être obtenu en utilisant les équations suivantes.

$$u_1(x,y,z,t) = u(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x,y) \quad (IV.1a)$$

$$u_2(x,y,z,t) = v(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x,y) \quad (IV.1b)$$

$$u_3(x,y,z,t) = w_0(x,y) + g(z)\theta_2(x,y) \quad (IV.1c)$$

Où

$$\phi_x(x,y,t) = k_1 \int \theta(x,y,t) dx \quad (IV.2a)$$

$$\phi_y(x,y,t) = k_2 \int \theta(x,y,t) dy \quad (IV.2b)$$

En substituant les expressions ϕ_x , et ϕ_y de l'équation (IV.2) à l'équation (IV.1), on obtient les équations suivantes.

$$u_1(x,y,z,t) = u(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x,y) dx \quad (IV.3a)$$

$$u_2(x,y,z,t) = v(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x,y) dy \quad (IV.3b)$$

$$u_3(x,y,z,t) = w_0(x,y) + g(z)\theta_2(x,y) \quad (IV.3c)$$

Où

- (u_1, u_2, u_3) sont les déplacements dans les directions des coordonnées (x,y,z) respectivement.
- u et v sont les déplacements dans les directions des coordonnées x et y en un point de la surface médiane de la plaque.
- w_0 et θ sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal respectivement.
- h est l'épaisseur de la plaque.
- En outre $\theta_2(x, y)$ est une fonction de déplacement inconnue qui tient compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur.

Les fonctions de forme $f(z)$ et $g(z)$ sont choisies sur la base d'une théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre et des conditions limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque respectivement comme.

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.4)$$

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.5)$$

Les déformations associées au champ de déplacement dans l'équation (3) sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (IV.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (IV.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.9)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (IV.10)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (IV.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.12)$$

$$\varepsilon_z^0 = \theta_3 \quad (IV.13)$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dx = B_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (IV.14)$$

$$\int \theta dx = A_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.15)$$

Où les coefficients A_1 , et B_1 sont déterminés selon une solution de type Navier. A_1 , B_1 , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit :

$$A_1 = -\frac{1}{\xi^2}, \quad B_1 = -\frac{1}{\eta^2}, \quad k_1 = \xi^2, \quad k_2 = \eta^2 \quad (IV.16)$$

où ξ et η sont définis dans les équations :

$$\xi = \frac{m \pi}{a}, \quad \eta = \frac{n \pi}{b} \quad (IV.17)$$

Les relations constitutives d'une plaque FG peuvent s'écrire comme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (IV.18)$$

Où Q_{ij} sont les constants élastiques tridimensionnels :

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= E(z)(1-\nu)/(1-2\nu)(1+\nu) \\ Q_{12}(z) &= E(z)\nu/(1-2\nu)(1+\nu) \end{aligned} \quad (IV.19)$$

$$Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (IV.20)$$

$$Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = Q_{66}(z)$$

IV. 2.2 Relations constitutives des structures de FGM

La production de matériaux à gradation fonctionnelle est réalisée en faisant varier les constituants des matériaux pour qu'ils aient des propriétés mécaniques qui changent

Chapitre IV : Formulation théorique des plaques FGM reposantes sur fondation élastique

continuellement sur l'épaisseur des structures. Chaque produit FGM peut être défini par la variation des fractions volumiques. Souvent, nous utilisons la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

IV. 2.2.1 loi de mélange exponentielle (E-FGM)

Dans cette méthode, la fraction de volume est donnée comme une fonction exponentielle à travers l'épaisseur.

$$E(z) = A e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (IV.21)$$

Avec

$$A = E_2 \quad , \quad B = \frac{1}{h} \ln(E_1 / E_2) \quad (IV.22)$$

Où h est l'épaisseur de la plaque et E_2 présente le module d'Young de la face homogène de la plaque. B est l'indice de variation de la matière sur l'épaisseur de la plaque.

IV.2.2.2 Loi de de mélange en Puissance (P-FGM)

La fraction volumique $V_1(z)$ du constituant céramique de la plaque FG est censée être donnée par :

$$V_1(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (IV.23)$$

Où p est le paramètre du matériau qui indique le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur.

Les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la règle de mélange.

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad (IV.24)$$

IV. 2.2.3 loi de mélange sigmoïde (S-FGM)

La fraction de volume est définie à l'aide de deux fonctions de loi de puissance qui assurent une répartition régulière des contraintes.

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p, \quad V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad (IV.25)$$

La règle de mélange nous permet de calculer les propriétés matérielles du S-FGM qui est :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad \text{pour } 0 < z < h/2$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + (1 - V_2(z))E_2 \quad \text{pour } -h/2 < z < 0 \quad (IV.26)$$

IV. 3. Modèles de milieu élastique

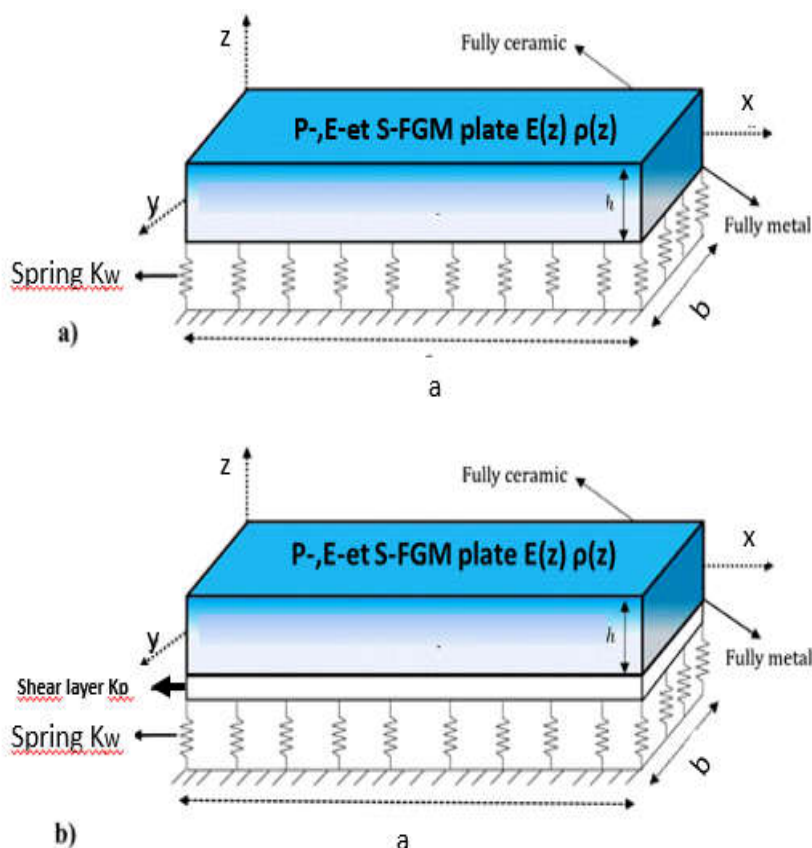


Figure IV.1. *Plaque FGM sur fondation élastique a) une fondation Winkler et b) une fondation Pasternak*

La plaque de FGM est placée dans un milieu élastique, qui devrait impliquer un déplacement vertical mais pas de déplacement horizontal. La densité de la force de réaction au fond de la plaque de FGM peut être transmise par deux modèles :

IV.3.1 Modèle de Winkler

Dans ce modèle, le sol est considéré comme « infinité » de ressorts élastiques juxtaposés et de même constante de raideur. La charge répartie peut être définie par :

$$q_{winkler} = k_w u_3 = k_w (w_0 + g(z)\theta_2) \quad (IV.27)$$

Où k_w est la constante de proportionnalité que l'on appelle le module de réaction du milieu (appelée constante de ressort).

IV.3.2 Le modèle Pasternak

La base du modèle Pasternak est un modèle élastique à deux paramètres, qui consiste en un paramètre de couche de cisaillement avec une rigidité k_p (physiquement, ce paramètre représente l'interaction due à l'action de cisaillement entre les parties du ressort) et un ressort supérieur indépendant avec une rigidité k_w (modèle de Winkler). Ainsi, la réaction répartie entre le modèle de fondation de Pasternak et la surface inférieure de la plaque de FGM peut être définie par (Shahsavari et al., 2018).

$$\begin{aligned} q_{Pasternak} &= k_w (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \\ &\quad + k_p \nabla^2 (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \\ q_{Pasternak} &= k_w (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \\ &\quad + k_{px} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \\ &\quad + k_{py} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \end{aligned} \quad (IV.28)$$

Où $(\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ exprime l'opérateur différentiel de Laplace en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

IV.4. Équations d'équilibre

IV. 4. 1 Le principe de Hamilton

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être formulé sous forme analytique comme suit :

$$\delta\Pi = \delta[(U + U_m) + V] = 0 \quad (\text{IV.29})$$

La variation de l'énergie de déformation de la plaque s'exprime par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} \\ &\quad + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dA \\ &= \int_A (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 \\ &\quad + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\ &\quad + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0) dA \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Où

δu , $\delta \varepsilon$ et A sont respectivement la variation de l'énergie de déformation, un opérateur variationnel et la surface supérieure. Les résultantes de stress N, M et S sont exprimées par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz \quad (i=x, y, xy) \quad (\text{IV.31a})$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (\text{IV.31b})$$

$$(S_{yz}^s, S_{xz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{IV.31c})$$

La première variation de l'énergie de déformation supplémentaire induite par le milieu élastique peut être exprimée comme suit

$$\delta U_m = \int_A \left[k_w u_3 \delta u_3 + k_p \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \right) \right) \right] dx dy \quad (\text{IV.32})$$

La charge verticale peut être exprimée en utilisant :

$$\delta V = \int_A q_z \delta u_3 dx dy \quad (\text{IV.33})$$

Où, la charge verticale q_z uniquement à la surface supérieure est prise en compte.

Le principe de l'énergie potentielle totale a été appliqué pour dériver l'équation d'équilibre (Khiloun et al. 2019).

Remplacement des expressions δU , δV , et δU_m des équations IV.30, IV.32 et IV.33 par l'équation (IV.29) et intégration par parties, et collecte des coefficients des équations de mouvement suivantes.

$$\delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (IV.34a)$$

$$\delta v : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (IV.34b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x^b}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y^b}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial x} \right) + q_z \\ & + k_w (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \\ & + k_p \nabla^2 (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) = 0 \end{aligned} \quad (IV.34c)$$

$$\delta \theta : k_1 M_x^s + k_1 M_y^s + (k_1 A_1 + k_2 B_1) \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \quad (IV.34d)$$

$$- k_1 A_1 \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - k_2 B_1 \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \delta \theta_3 : & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - g(z)q_z \\ & + k_w g(z)(w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) \\ & + k_p g(z)\nabla^2 (w_0(x, y) + g(z)\theta_2(x, y)) = 0 \end{aligned} \quad (IV.34e)$$

IV. 5. Solutions analytiques

Dans cette étude, on a considéré une plaque rectangulaire à support simple. La longueur, la largeur et la hauteur de la plaque étaient respectivement a, b et h. La plaque est soumise à une charge transversale répartie q. En utilisant la solution Navier, les solutions de la plaque ont été supposées être :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_0 \\ \theta \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\xi x) \sin(\eta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\xi x) \cos(\eta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \\ Y_{mn} e^{i\omega t} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \end{Bmatrix} \quad (IV.35)$$

Où ω est la fréquence de vibration.

La charge transversale répartie $q_z(x,y)$ a également été étendue sous la forme suivante :

$$q_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \quad (IV.36)$$

Pour le cas d'une charge répartie sinusoïdale, on a :

$$Q_{mn} = q_0, \quad m=n=1 \quad (IV.37)$$

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, les coefficients Q_{mn} sont définis comme suit.

$$Q_{mn} = 16q_0 / mn\pi^2 \quad (IV.38)$$

En substituant les équations (V.34) et (V.35) aux équations de mouvement. Les équations (V.34a)-(V.34e), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de l'équation suivante.

$$\{K\} \{\Delta\} = \{Q\} \quad (IV.39a)$$

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}^T \quad (IV.39b)$$

$$\{Q\} = \{0, 0, Q_{mn}, 0, g(z)Q_{mn}\}^T \quad (IV.39c)$$

Où K , $\{Q\}$ et $\{\Delta\}$ sont respectivement la matrice de rigidité, le vecteur de force et le vecteur de coefficients inconnus à déterminer.

IV. 6. Conclusion

Dans ce chapitre, on présente une étude analytique du comportement statique des structures FGM. Un nouveau modèle de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées avec l'effet de l'étirement de l'épaisseur, pris en considération dans l'analyse des plaques FGM. Les équations gouvernantes dans la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton, qui prend en compte les effets de déformation par cisaillement et la rotation de l'inertie. Les solutions et relations analytiques sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

Chapitre V :
COMPARAISON ET VALIDATION DES
RESULTATS

V.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente et on discute les résultats de l'analyse analytique des plaques FGM soumises à la flexion, définies par la variation des fractions de volume à savoir P-FGM, E-FGM et S-FGM, reposantes sur des fondations élastiques Wenkler-Pasternak en tenant compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur (effet de stretching).

On suppose que le module de Young de la plaque varie sans interruption à travers l'épaisseur selon la variation des fractions de volume des constituants précités. Le coefficient de poisson est constant sur toute l'épaisseur de la plaque Les résultats numériques sont effectués en utilisant le programme Maple et qui seront affichés sous forme de tableaux et graphes. Ils sont présentés puis comparés avec ceux déterminés par les autres auteurs pour vérifier l'exactitude de cette théorie.

V.2. Résultats numériques et discussion

V.2.1 Propriétés des matériaux

Dans ce tableau, les déplacements calculés des plaques de MGF, qui sont gradués de la surface inférieure à la surface supérieure selon l'équation (20), sont fournis et comparés aux résultats de différentes théories présentées par les auteurs. Les propriétés des matériaux des plaques FG sont données dans le tableau 01.

Tableau V.1: Propriétés des matériaux de la plaque FGM.

Propriétés	Metal	Ceramic
	Aluminum (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)
Module d'élasticité :	E2=70 Gpa	E1=380 Gpa
Coefficient de Poisson: ν	0.3	0.3
Masse volumique: ρ (kg/m ³)	2702	3800

Les composantes de déplacement non dimensionnelles de ces tableaux sont :

$$\bar{W} = \frac{10E_1 h^3}{q_0 a^4} W \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad (V.1)$$

$$D_0 = \frac{E_1 h^3}{12}, E_0 = 1.0Gpa \quad (V.2)$$

$$\hat{W} = \frac{100D_0}{q_0 a^4} W \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad (V.3)$$

$$k_w = \frac{k_0 E_0 h^3}{a^4}, k_{px} = \frac{j_0 E_0 h^3 \nu}{a^2}, k_{py} = \frac{j_0 E_0 h^3 \nu}{b^2} \quad (V.4)$$

$$D_m = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (V.5)$$

$$K_w = \frac{\bar{k}_w D_m}{a^4}, K_p = \frac{\bar{k}_p D_m}{a^2} \quad (V.6)$$

V.2.2 Validation de la théorie proposée

Pour nous permettre de démontrer l'exactitude de la théorie proposée pour l'étude des réponses en flexion des plaques FG à support simple, des exemples numériques sont présentés pour les comparer aux résultats de différentes théories de déformation en cisaillement en 3D, quasi-3D et 2D. Le **TableauV.2** montre la flèche maximale non dimensionnelle \bar{W} d'une plaque carrée en P-FGM soumise à une charge sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h . Trois valeurs différentes de l'indice de loi de puissance $p = 1, p = 4$ et $p = 10$ ont été utilisées dans cet exemple.

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats déterminés par les auteurs (Lee et al. 2015, Yi et al. 2017, Zenkour & Alghanmi 2018, Zenkour & Radwan 2018b, Khiloun et al. 2019 et Nguyen et al. 2019). Lorsque le rapport entre les côtés et l'épaisseur est de 100, les valeurs des déplacements transversaux sont presque les mêmes que les valeurs présentées par les auteurs cités ci-dessus. En analysant le **TableauV.2**, on peut remarquer que les résultats obtenus sous l'effet de l'étirement de l'épaisseur sont en bonne accord avec les résultats publiés dans le référence pour les plaques minces et épaisses de FGM. En continu, une plaque exponentielle de E-FGM avec un rapport d'épaisseur $a/h = 2, 4$ et 10 soumise à des charges sinusoïdales est analysée. Le module de Young a été évalué en utilisant la distribution exponentielle.

Les déplacements non dimensionnels sont donnés dans le **TableauV.3-5** pour différentes valeurs du rapport d'aspect b/a , du rapport d'épaisseur a/h et le paramètre du matériau p . Les résultats de la présente théorie ont été comparés à ceux de la solution FSDT (Nguyen et al. 2019), des théories quasi-3D (Thai & Kim 2013, Adim & Daouadji 2016), de la HSDT (Lee et al. 2015, Mantari & Soares 2013, Fekrar et al. 2014).

Tableau V.2 : Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{W}) d'une plaque carrée P-FGM en Al/AL2O3

P	Théorie	a/h		
		4	10	100
1	Lee et al. (2015)	0,6916	0,5696	0,5462
	Yi et al. (2017)	0,7318	0,5891	0,5625
	Zenkour & Alghanmi (2018)	0,6828	0,5592	0,5459
	Zenkour & Radwan (2018)	0.7284	0.5889	0.5625
	Khiloun et al. (2019)	0,7289	0,5890	0,5625
	Nguyen et al. (2019)	0.7177	0.5872	0.5625
	Présente	0,6916	0,5696	0,5462
4	Lee et al. (2015)	1,0984	0,8424	0,7934
	Yi et al. (2017)	1,1732	0,8831	0,8287
	Zenkour & Alghanmi (2018)	1,1001	0,8404	0,7933
	Zenkour & Radwan (2018)	1.1573	0.8810	0.8287
	Khiloun et al. (2019)	1,0964	0,8413	0,7926
	Nguyen et al. (2019)	1.1028	0.8721	0.8286
	Présente	1,0984	0,8424	0,7934
10	Lee et al. (2015)	1,3357	0,9817	0,9140
	Yi et al. (2017)	1,3333	0,9791	0,9114
	Zenkour & Alghanmi (2018)	1,3391	0,9806	0,9139
	Zenkour & Radwan (2018)	1.3889	1.0083	0.9362
	Khiloun et al. (2019)	1,4026	1,0094	0,9362
	Nguyen et al. (2019)	1.3796	1.0065	0.9362
	Présente	1,3357	0,9817	0,9140

Les modèles présentés et d'autres modèles quasi-3D introduisant l'influence de l'épaisseur, les résultats sont proches les uns des autres. En revanche, les modèles HSDT 2D qui n'introduisent pas l'influence de l'étirement de l'épaisseur surestiment les résultats. Au vu de ce qui précède, on peut conclure que l'introduction de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque rend la plaque de FGM plus rigide et conduit à une réduction de la flèche totale maximale.

Tableau V.3: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque E-FGM ($a/h=2$).

b/a	Théorie	Indices de puissance (p)					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
1	Mantari & Soares (2013)	0,5779	0,5224	0,4717	0,4256	0,3648	0,2793
	Fekrar et al. (2014)	0.5730	0.5180	0.4678	0.4221	0.3611	0.2771
	Nguyen (2015)	0,6211	0,5615	0,5073	0,4579	0,3921	0,3014
	Lee et al. (2015)	0.5777	0.5222	0.4716	0.4255	0.3640	0,2793
	Adim & Daouadji (2016)	0,5780	0,5225	0,4719	0,4258	0,3642	0,2794
	Nguyen et al. (2019)	0.6692	0.6062	0.5460	0.4879	0.4003	0.2786
	Présente	0,5303	0,5222	0,4716	0,4255	0,3640	0,2792
2	Mantari & Soares (2013)	1,1941	1,0795	0,9750	0,8799	0,7538	0,5786
	Fekrar et al. (2014)	1.1879	1.0739	0.9701	0.8754	0.7493	0.5757
	Lee et al. (2015)	1,1939	1.0792	0.9748	0.8797	0.7529	0.5784
	Nguyen (2015)	1,2569	1,1367	1,0275	0,9284	0,7965	0,6153
	Adim & Daouadji (2016)	1,1942	1,0796	0,9751	0,8800	0,7532	0,5786
	Nguyen et al. (2019)	1.3239	1.1928	1.0674	0.9454	0.7578	0.5958
	Présente	1,1427	1.0792	0.9748	0.8797	0.7529	0.5784
3	Mantari & Soares (2013)	1,4421	1,3037	1,1776	1,0628	0,9104	0,6993
	Fekrar et al. (2014)	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9056	0.6961
	Lee et al. (2015)	1,4419	1,3035	1,1774	1,0626	0,9096	0,6991
	Nguyen (2015)	1,5115	1,3671	1,2360	1,1169	0,9587	0,7414
	Adim & Daouadji (2016)	1,4422	1,3038	1,1777	1,0629	0,9098	0,6993
	Nguyen et al. (2019)	1,5843	1,4255	1,2734	1,1253	0,8965	0,6766
	Présente	1,3892	1,3035	1,1774	1,0626	0,9096	0,6991

Tableau V.4: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque E-FGM ($a/h=4$)

b/a	Théorie	Indices de puissance (p)					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
1	Mantari & Soares (2013)	0,3111	0,2814	0,2546	0,2302	0,1980	0,1537
	Fekrar et al. (2014)	0.3474	0.3141	0.2838	0.2563	0.2196	0.1692
	Lee et al. (2015)	0,3486	0,3151	0,2847	0,2571	0,2202	0,1697
	Nguyen (2015)	0,3575	0,3235	0,2927	0,2649	0,2280	0,1775
	Nguyen et al. (2019)	0,3651	0,3257	0,2879	0,2507	0,1917	0,1088
	Présente	0,3453	0,3152	0,2847	0,2571	0,2202	0,1697
2	Mantari & Soares (2013)	0,8144	0,7364	0,6654	0,6009	0,5150	0,3973
	Fekrar et al. (2014)	0.8120	0.7342	0.6635	0.5991	0.5136	0.3962
	Lee et al. (2015)	0,8145	0,7365	0,6655	0,6009	0,5151	0,3973
	Nguyen (2015)	0,8285	0,7498	0,6787	0,6145	0,5296	0,4135
	Nguyen et al. (2019)	0,8374	0,7440	0,6543	0,5659	0,5239	0,4240
	Présente	0,8110	0,7364	0,6654	0,6009	0,5150	0,3973
3	Mantari & Soares (2013)	1,0124	0,9154	0,8272	0,7470	0,6403	0,4940
	Fekrar et al. (2014)	1.0093	0.9127	0.8247	0.7448	0.6385	0.4927
	Nguyen (2015)	1,0281	0,9305	0,8424	0,7628	0,6576	0,5137
	Lee et al. (2015)	1,0136	0,9154	0,8272	0,7470	0,6403	0,4940
	Nguyen et al. (2019)	1,0370	0,9205	0,8088	0,7985	0,6209	0,5708
	Présente	1,0090	0,9154	0,8272	0,7470	0,6403	0,4940

Tableau V.5: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque E-FGM. ($a/h=10$)

b/a	Théorie	Indices de puissance (p)					
		0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
1	Thai & Kim (2013)	0.2790	0.2523	0.2280	0.2060	0.1767	0.1366
	Mantari & Soares (2013)	0,2799	0,2531	0,2287	0,2066	0,1772	0,137
	Lee et al. (2015)	0,2797	0,2531	0,2287	0,2066	0,1772	0,1369
	Adim & Daouadji (2016)	0,2799	0,2531	0,2287	0,2066	0,1772	0,137
	Présente	0,2797	0,2531	0,2287	0,2066	0,1772	0,1369
2	Thai & Kim (2013)	0.7015	0.6344	0.5734	0.5180	0.4444	0.3435
	Mantari & Soares (2013)	0,7037	0,6364	0,5752	0,5196	0,4457	0,3445
	Lee et al. (2015)	0,7036	0,6364	0,5752	0,5196	0,4457	0,3445
	Adim & Daouadji (2016)	0,7037	0,6364	0,5752	0,5196	0,4457	0,3445
	Présente	0,7036	0,6364	0,5751	0,5195	0,4457	0,3445
3	Thai & Kim (2013)	0.8849	0.8002	0.7233	0.6534	0.5605	0.4333
	Mantari & Soares (2013)	0,8877	0,8027	0,7255	0,6554	0,5622	0,4346
	Lee et al. (2015)	0,8877	0,8027	0,7255	0,6554	0,5622	0,4346
	Adim & Daouadji (2016)	0,8877	0,8027	0,7255	0,6554	0,5622	0,4346
	Présente	0,8875	0,8027	0,7255	0,6554	0,5622	0,4346

Dans le **TableauV.6**, des plaques rectangulaires modérément épaisses de P-FGM sont étudiées sur une fondation élastique à deux paramètres. Le rapport d'épaisseur $a/h=10$ et $b/a = 3$.

TableauV.6: Comparaison de la flèche non dimensionnelle (\hat{w}) d'une plaque avec charge uniforme ($a/h=10, b/a=3$).

k0	j0	Théorie	p				
			0	0,5	1	2	5
0	0	Zenkour (2009)	1,2582	1,9344	2,5133	3,2267	3,8517
		Lee et al. (2015)	1,2544	1,9045	2,4354	3,0816	3,6972
		Benahmed et al. (2017)	—	1.9021	—	3.0756	3.6937
		Présente	1,2537	1,9036	2,4353	3,0834	3,7021
100	0	Zenkour (2009)	1,2582	1,9344	2,5133	3,2267	3,8517
		Lee et al. (2015)	1,2224	1,8317	2,3176	2,8951	3,4315
		Benahmed et al. (2017)	—	1.9021	—	3.0756	3.6937
		Présente	1.2238	1.8355	2.3249	2.9086	3.4531
0	100	Zenkour (2009)	1,1661	1,7247	2,1701	2,6814	3,0979
		Lee et al. (2015)	1,1633	1,7019	2,1133	2,5825	2,9999
		Présente	1,1682	1,7131	2,1321	2,6129	3,0441
100	100	Zenkour (2009)	1,1381	1,6639	2,0745	2,5364	2,9051
		Lee et al. (2015)	1,1136	1,6430	2,0230	2,4484	2,8197
		Benahmed et al. (2017)	—	1.6413	—	2.4446	2.8178
		Présente	1,1422	1,6578	2,0470	2,4864	2,8737

Dans cette section, les déformations non dimensionnelles des plaques rectangulaires de P-FGM sous des charges uniformes sont étudiées.

Les déformations sont présentées pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p et les paramètres de fondation k_0, j_0 qui varient de 0 à 100. Les résultats présentés dans cette section montrent que les études réalisées par Zenkour (2009) surestiment les déformations en raison de l'effet d'éirement de l'épaisseur, qui n'est pas pris en compte dans leurs théories.

V.2.3 Études de paramètres

Dans l'exemple de la **Figure V.1**, une plaque carrée en Al / Al₂O₃ a été considérée comme étant soumise à une charge sinusoïdale. Le module de Young pour Al était de 70 GPa et de 380 GPa pour Al₂O₃, les rapports de Poisson étaient constants pour les deux et égales à 0,3, l'indice de loi de puissance $p = \ln(E_1 / E_2)$ et $\bar{k}_w = 0, \bar{k}_p = 0$ (paramètres de Winkler et de Pasternak). Les résultats obtenus avec cette théorie coïncident avec ceux présentés avec les solutions données par Lee et al. (2015).

Si nous analysons également le graphe de la **Figure V.1**, nous pouvons voir que la flèche diminue avec la croissance du rapport a/h et devient constante pour $a/h > 20$, elle n'est pas très différente pour les deux plaques P et E-FGM mais plus importante que la S-FGM parce que cette dernière est plus rigide (loi de mélange différente) que les autres plaques.

Dans cette partie, l'effet des fondations élastiques n'est pas pris en compte, ce qui explique la valeur élevée de la flèche

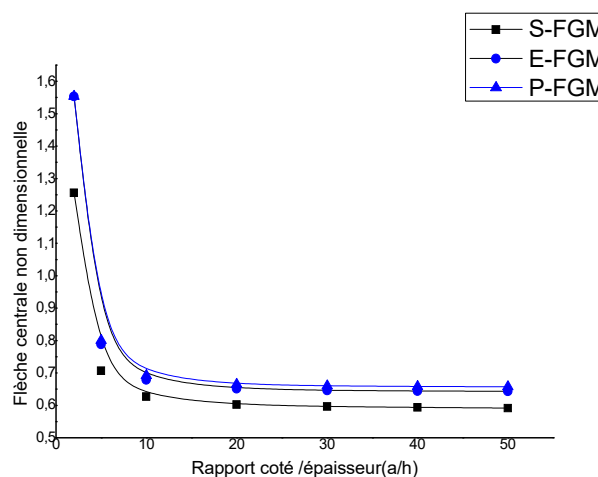


Figure V.1. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($p = \ln(E_1/E_2)$, $(b=a, \bar{k}_w = 0, \bar{k}_p = 0)$).

La **Figure V.2** concerne l'étendue des flèches au centre des différentes plaques P-FGM, E-FGM et S-FGM, de forme carrée, soumises à des charges sinusoïdales pour $p=\ln(E1/E2)$, et $\overline{k_w}=0, \overline{k_p}=0$. Après analyse, on peut voir que les flèches au centre des plaques P-FGM sont plus grandes que celles des plaques E-FGM et S-FGM. On peut également remarquer que les valeurs des flèches déterminées pour toutes les plaques sont moins importantes que celles calculées par Lee et al. (2015).

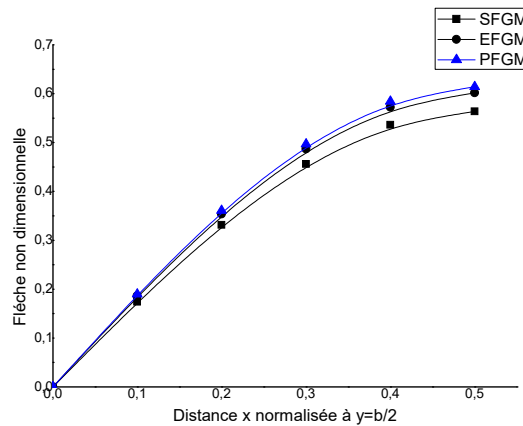


Figure V.2. La comparaison de la flèche des E-FGM,P-FGM et S-FGM plaques épaisses ($b=a, a/h=10, \overline{k_w}=0, \overline{k_p}=0$).

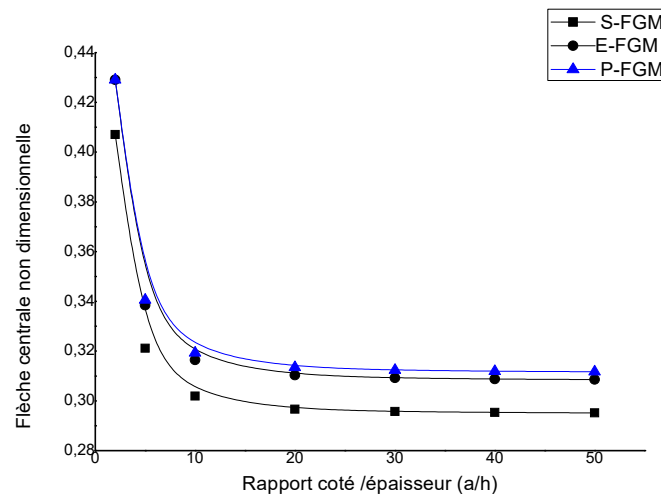


Figure V.3. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de MGF ($b=a, \overline{k_w}=1000, \overline{k_p}=0$).

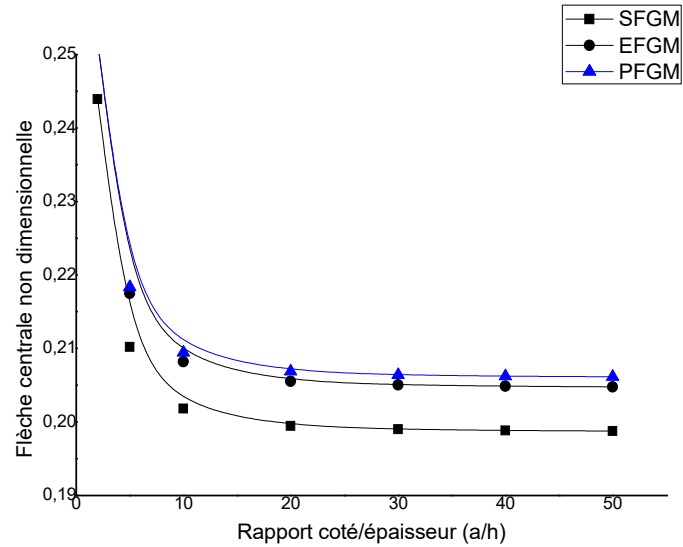


Figure V.4. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($b=a$, $\bar{k}_w = 0$, $\bar{k}_p = 100$).

Dans l'exemple des **Figure V.3-5**, une plaque carrée en Al / Al₂O₃ a été considérée comme étant soumise à une charge sinusoïdale. Le module de Young pour Al était de 70 GPa et de 380 GPa pour Al₂O₃, les rapports de Poisson étaient constants pour les deux et égaux à 0,3, l'indice de loi de puissance $p = \ln(E_1 / E_2)$ et $\bar{k}_w = 0$ et 1000 $\bar{k}_p = 0$ et 100).

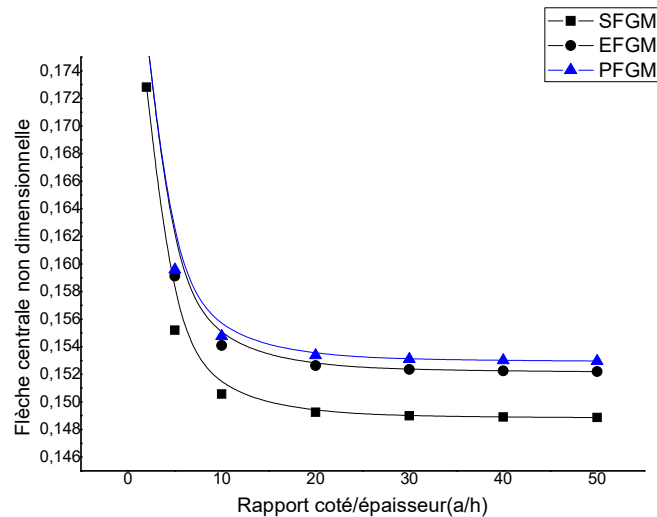


Figure V.5. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($p = \ln(E_1/E_2)$, ($b=a$, $\bar{k}_w = 1000$, $\bar{k}_p = 100$).

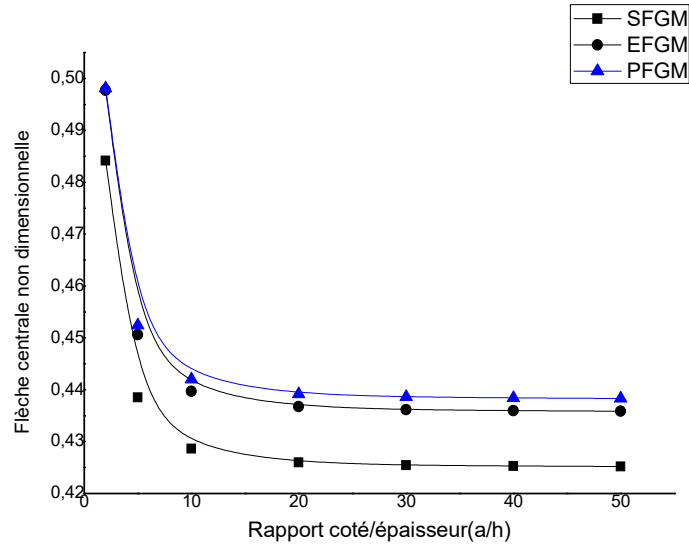


Figure V.6. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques FGM épaisses ($b=2a$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=0$).

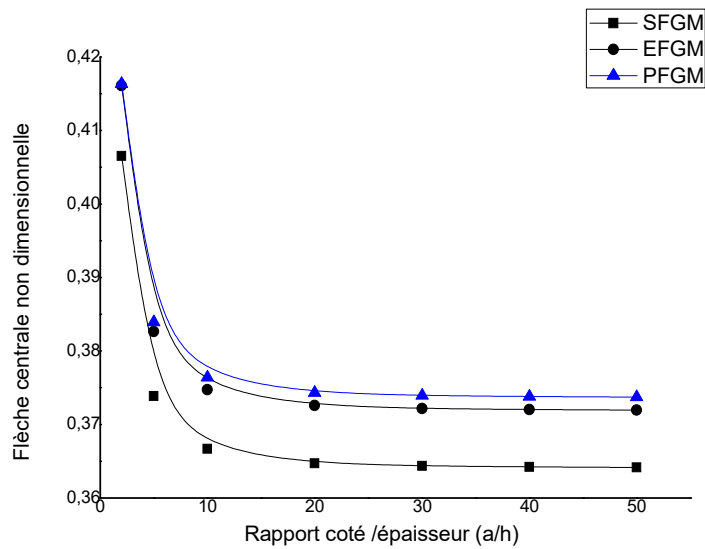


Figure V.7 :. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques FGM épaisses ($b=2a$, $\bar{k}_w=0$, $\bar{k}_p=100$).

Nous pouvons voir que la déformation est importante lorsque le rapport a/h est faible, mais qu'elle est négligeable lorsque le rapport côté/épaisseur devient plus important. Il est à noter que la déformation non dimensionnelle, quelle que soit la nature de la plaque (P-, E- et S-FGM), diminue avec les paramètres du milieu élastique de Winkler et Pasternak.

Cette diminution varie pour $a/h=20$ de la moitié au quart par rapport à la plaque sans fondation élastique. Ces résultats sont en accord avec ceux de Lee et al. (2015).

Tableau 7 : Effet du rapport côté/épaisseur ($a/h= 5$ et 20) sur la flèche non dimensionnelle des plaques FGM($a=b, a=2b, p = \ln(E1/E2), \bar{k}_w = 0$ et $1000, \bar{k}_p = 0$ et 100)

b/a	\bar{k}_w	\bar{k}_p	a/h=5			a/h=20		
			S-FGM	E- FGM	P-FGM	S-FGM	E-FGM	P-PGM
1	0	0	0.7066	0.7886	0.8003	0.6023	0.6514	0.6652
	1000	0	0.3212	0.3384	0.3405	0.2967	0.3104	0.3135
	0	100	0.2102	0.2175	0.2184	0.1995	0.2056	0.2069
	1000	100	0.1552	0.1591	0.1596	0.1492	0.1526	0.1534
2	0	0	1.6848	1.8785	1.9105	1.5137	1.6588	1.6942
	1000	0	0.4385	0.4506	0.4524	0.4260	0.4367	0.4391
	0	100	0.3739	0.3826	0.3839	0.3647	0.3726	0.3743
	1000	100	0.2293	0.2325	0.2330	0.2258	0.2288	0.2294

Après analyse des différents graphiques (voir synthèse dans le **tableau. 7**) relatifs à l'étude de la flexion non dimensionnelle des plaques P-, E-, et S-FGM en fonction du rapport a/h , a/b et des paramètres \bar{k}_w et \bar{k}_p , nous avons observé que les déplacements transversaux sont réduits en présence des fondations élastiques. Les chiffres montrent clairement que la rigidité de la couche de cisaillement de la fondation (paramètre de Pasternak \bar{k}_p est plus efficace que le paramètre de Winkler \bar{k}_w pour réduire les déplacements. Il a également été constaté que :

- $\bar{w}(\bar{k}_w = 1000, \bar{k}_p = 100) \approx 20\%$ à 25% $\bar{w}(\bar{k}_w = 0, \bar{k}_p = 0)$ pour $b = a$, $a/h = 5$, $a/h = 20$.
- $\bar{w}(\bar{k}_w = 1000, \bar{k}_p = 100) \approx 12\%$ à 14% $\bar{w}(\bar{k}_w = 0, \bar{k}_p = 0)$ pour $b = 2a$, $a/h = 5$, $a/h = 20$

Pour analyser l'effet du milieu de fondation élastique sur la flèche, nous avons pris comme exemple une plaque en S-FGM avec les paramètres élastiques \bar{k}_w et \bar{k}_p , $p=\ln(E1/E2)$ et $a/h=10$. Les **Figure V.9** et **10** montrent l'effet des paramètres élastiques Winkler et Pasternak sur la flèche d'une plaque en S-FGM. Cet exemple confirme que le paramètre du milieu élastique de Pasternak a plus d'effet sur la diminution de la flèche non dimensionnelle que le paramètre du milieu élastique de Winkler.

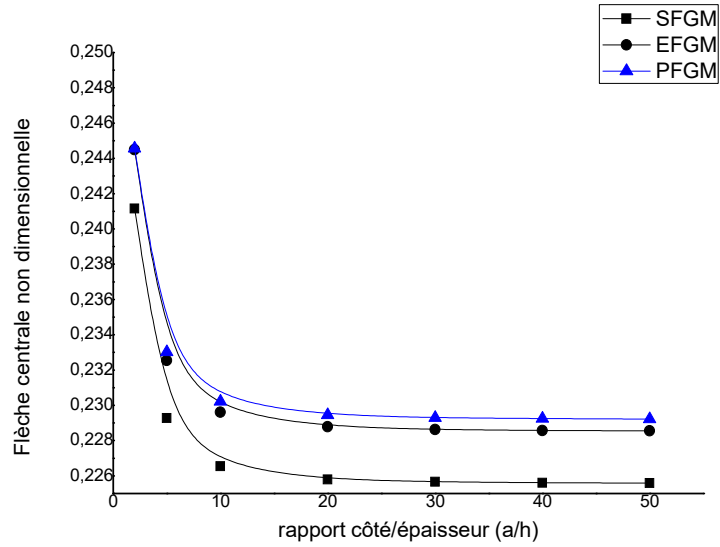


Figure V.8. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de FGM ($b=2a$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=100$).

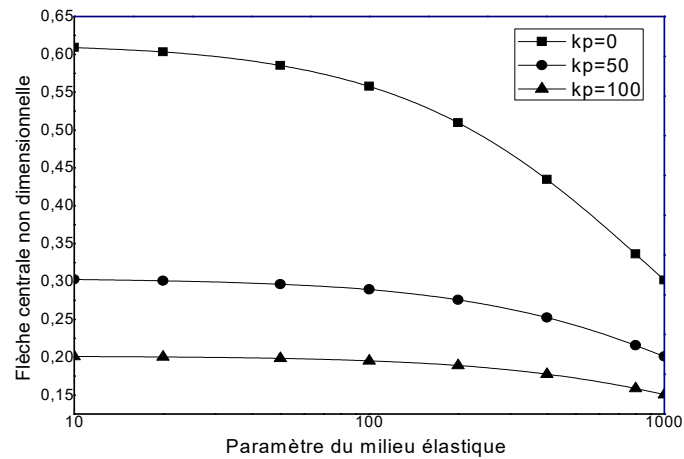


Figure V.9. Effet du paramètre \bar{k}_w de fondation élastique sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de S-FGM ($a/h=10$, $\bar{k}_p=0,50,100$)

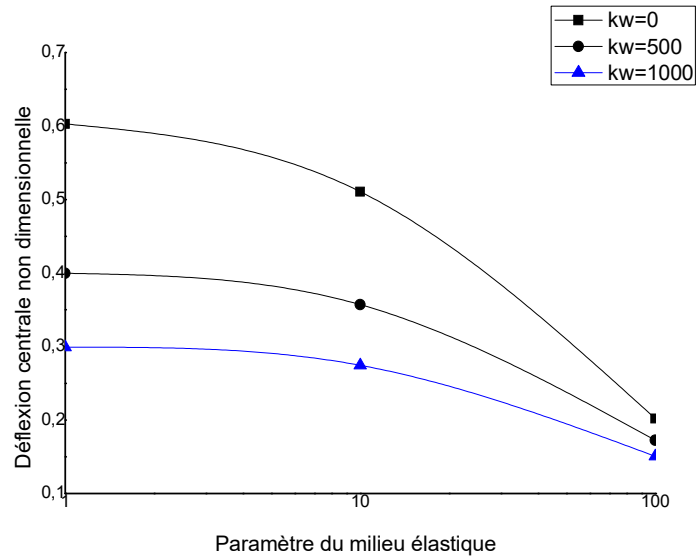


Figure V.10. Effet du paramètre \bar{k}_p de fondation élastique sur la flèche non dimensionnelle d'une plaque épaisse de S-FGM ($a/h = 10$, $\bar{k}_w = 0, 500, 1000$).

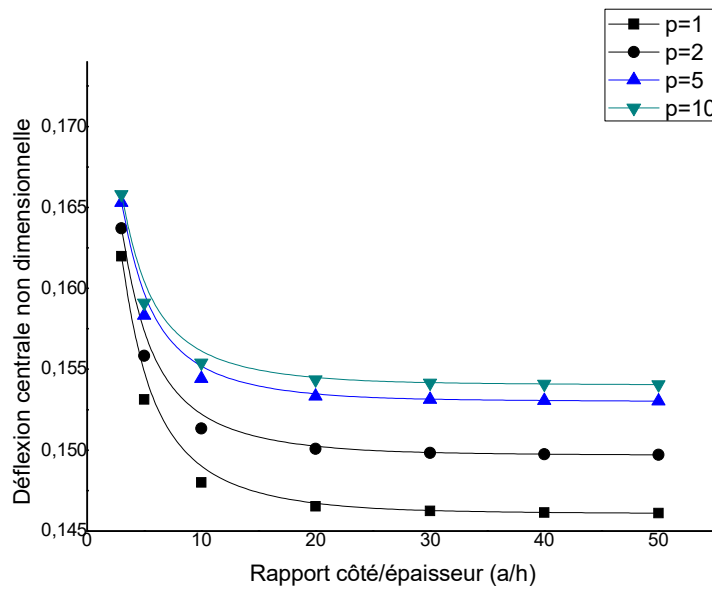


Figure V.11. Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de S-FGM avec l'indice de loi de puissance (p) ($p = 1, 2, 5, 10$, $\bar{k}_w = 1000$, $\bar{k}_p = 100$)

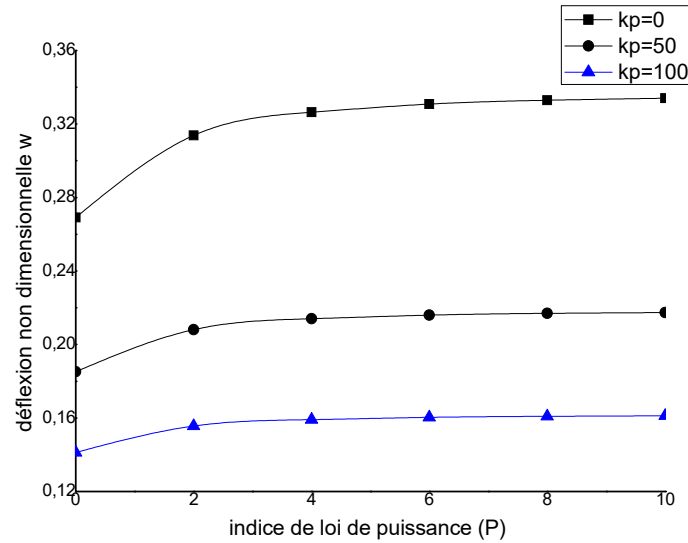


Figure V.12. Effet de l'indice de loi de puissance sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses de S-FGM ($a/h= 10$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=0,50,100$)

L'effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur la flèche non dimensionnelle des plaques épaisses en S-FGM avec un indice de loi de puissance (p) ($p = 1,2,5$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=100$) est étudié dans la **Figure V.11** où l'on peut voir que la flèche non dimensionnelle d'une plaque en S-FGM reposant sur un élastique Winkler-Pasternak moyen, est presque constante pour un rapport ($a/h > 20$). De plus, il a été constaté que lorsque l'indice de la loi de puissance $p > 5$, la variation de la flèche non dimensionnelle devient très faible.

Dans la **Figure V.12**, l'effet de l'indice de loi de puissance sur la flèche non dimensionnelle des plaques S-FGM est étudié ($a/h= 10$, $\bar{k}_w=1000$, $\bar{k}_p=0,50,100$) et il est bien confirmé que lorsque l'indice de loi de puissance $p > 5$, la variation de la flèche est négligeable ou même constante.

V. Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie quasi-3D pour l'étude de la flexion des plaques fonctionnellement graduées pour les plaques épaisses E-, P- et S-FGM sur une base élastique Pasternak a été développée. Des solutions analytiques de plaques à support simple sont présentées.

Les résultats numériques montrent que la théorie actuelle donne une très bonne prédiction de la flexion. Pour tester la commodité et la précision de cette théorie proposée, des exemples numériques analytiques ont été étudiés. D'après ces exemples, les informations suivantes ont été observées.

- ✚ Les études comparatives ont montré que les théories quasi-3D qui prennent en compte les effets de l'étirement de l'épaisseur peuvent prédire le comportement en flexion avec plus de précision que les autres théories HSDT.
- ✚ La cinématique de la théorie actuelle est modifiée en considérant des termes intégraux indéterminés dans les domaines des déplacements, ce qui se traduit par un nombre réduit de variables
- ✚ Le HSDT quasi-3D proposé contient cinq inconnues, mais donne des résultats comparables à ceux prévus par les théories quasi-3D existantes qui ont plus d'inconnues.
- ✚ Après analyse, on peut voir que les flèches au centre des plaques P- FGM sont plus grandes que celles des plaques E-FGM et S-FGM
- ✚ Il est à noter que la déformation non dimensionnelle, quelle que soit la nature de la plaque (P-, E- et S-FGM), diminue avec les paramètres du milieu élastique de Winkler et Pasternak.
- ✚ Les chiffres montrent clairement que la rigidité de la couche de cisaillement de la fondation de Pasternak est plus efficace que celle de Winkler.
- ✚ La flèche diminue avec la croissance du rapport a/h et devient constante pour $a/h > 20$, elle n'est pas très différente pour les deux plaques P et E-FGM mais plus importante que la S-FGM parce que cette dernière est plus rigide (loi de mélange différente) que les autres plaques
- ✚ Les résultats numériques présentés dans ce document peuvent être utilisés comme référence pour l'étude et l'analyse de la réponse mécanique en flexion des plaques épaisses de MGF reposant sur des fondations élastiques.

***Conclusion Générale &
Perspectives***

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse on présente l'étude de la flexion des plaques FGM fabriquées à partir d'un mélange de métal et de céramique, reposantes sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak. L'étude de ces plaques est basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec un champ de déplacement développée par l'utilisation d'un terme intégral indéterminé avec seulement cinq inconnues. Les équations du mouvement ont été déterminées par le principe d'Hamilton.

Des solutions de Navier ont été employées pour résoudre les équations aux dérivées partielles. La précision de la présente théorie proposée a été démontrée par les résultats calculés par le modèle actuel par rapport aux résultats des autres théories. Les résultats déterminés par la théorie proposée peuvent être résumés comme suit:

- ✚ A travers une synthèse comparative avec les résultats développés par plusieurs auteurs en utilisant d'autres théories de déformation de cisaillement, on a constaté que la théorie proposée est en excellent accord avec les solutions déterminées par ces auteurs.
- ✚ Les études comparatives ont montré que les théories quasi-3D qui prennent en compte les effets de l'étirement de l'épaisseur peuvent prédire le comportement en flexion avec plus de précision que les autres théories HSDT.
- ✚ On a remarqué que les résultats obtenus sous l'effet de l'étirement de l'épaisseur sont en bonne accord avec les résultats publiés dans la référence pour les plaques minces et épaisses de FGM
- ✚ La cinématique de la théorie actuelle est modifiée en considérant des termes intégraux indéterminés dans les domaines des déplacements, ce qui se traduit par un nombre réduit de variables
- ✚ Le HSDT quasi-3D proposé contient cinq inconnues, mais donne des résultats comparables à ceux prévus par les théories quasi-3D existantes qui ont plus d'inconnues.
- ✚ Après analyse, on peut voir que les flèches au centre des plaques P- FGM sont plus grandes que celles des plaques E-FGM et S-FGM
- ✚ Il est à noter que la déformation non dimensionnelle, quelle que soit la nature de la plaque (P-, E- et S-FGM), diminue avec les paramètres du milieu élastique de Winkler et Pasternak.

- ✚ Le paramètre du milieu élastique de Pasternak a plus d'effet sur la diminution de la flèche non dimensionnelle que le paramètre du milieu élastique de Winkler.
- ✚ Les chiffres montrent clairement que la rigidité de la couche de cisaillement de la fondation de Pasternak est plus efficace que celle de Winkler.
- ✚ La flèche diminue avec la croissance du rapport a/h et devient constante pour $a/h > 20$, elle n'est pas très différente pour les deux plaques P et E-FGM mais plus importante que la S-FGM parce que cette dernière est plus rigide (loi de mélange différente) que les autres plaques
- ✚ Les résultats numériques présentés dans ce document peuvent être utilisés comme référence pour l'étude et l'analyse de la réponse mécanique en flexion des plaques épaisses de FGM reposant sur des fondations élastiques.

En perspective, il est souhaitable de proposer de nouveaux champs de déplacement pour l'étude de la réponse globale des plaques FGM sous l'effet de la porosité et différentes conditions d'appuis, sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique).

***Références
bibliographiques***

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

Abdelmalek, A., Bouazza, M., Zidour, M. and Benseddiq, N. (2017), "Hygrothermal Effects on the Free Vibration Behavior of Composite Plate Using nth-Order Shear Deformation Theory: a Micromechanical Approach", *Iran. J. Sci. Technol. Transact. Mech. Eng.*, 43(1), 61-73. <https://doi.org/10.1007/s40997-017-0140-y>

Adim, B. and Hassaine Daouadji, T. (2016), "Effects of thickness stretching in FGM plates using a quasi-3D higher order shear deformation theory", *Adv. Mater. Res., Int. J.*, 5(4), 223-244. <https://doi.org/10.12989/amr.2016.5.4.223>

Amir, S., Arshid, E. and Arani, M.R.G. (2019), "Size-dependent magneto-electro-elastic vibration analysis of FG saturated porous annular/circular micro sandwich plates embedded with nano-composite face sheets subjected to multi-physical preloads", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 23(5), 429-447. <https://doi.org/10.12989/sss.2019.23.5.429>

Ambartsumyan S.A (1969)., *Theory of anisotropic plate.*, Tech Publishing Co, 1969.

Arefi, M. (2015), "The effect of different functionalities of FG Mand FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 15(5), 1345-1362. <https://doi.org/10.12989/sss.2015.15.5.1345>

Atai, A.A., Nikranjbar, A., Kasiri, R (2012), " Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches": a theoretical study. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607– 614

Avcar, M. and Mohammed, W.K.M. (2018), "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation", *Arab. J. Geosci.*, 11(10), 232. <https://doi.org/10.1007/s12517-018-3579-2>

B

Baferani, A.H. and Saidi, A.R. (2013), "Effects of in-plane loadson vibration of laminated thick rectangular plates resting on elastic foundation: An exact analytical approach", *Eur. J. Mech.-A/Solids*, 42, 299-314. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.07.001>

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, 60, 274–283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygrothermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(4), 755-786. <https://doi.org/10.12989/sss.2016.18.4.755>

- Belkhouja Y. , Ouinas D., Fekirini H.,...,OlayV.J.and M Touahmia (2020), “Three new hybrid quasi-3D and 2D higher-order shear deformation theories for free vibration analysis of functionally graded material monolayer and sandwich plates with stretching effect”, *Advanced Composites Letters* Volume 29: 1–22,doi: 10.1177/0963693520941865
- Belmahi, S., Zidour, M., Meradjah, M., Bensattalah, T. and Dihaj,A. (2018), “Analysis of boundary conditions effects on vibration of nanobeam in a polymeric matrix”, *Struct. Eng.Mech., Int. J.*, 67(5), 517-525.<https://doi.org/10.12989/sem.2018.67.5.517>
- Belmahi, S., Zidour, M. and Meradjah, M. (2019), “Small-scale effect on the forced vibration of a nano beam embedded an elastic medium using nonlocal elasticity theory”, *Adv. Aircr. Spacecr. Sci., Int. J.*, 6(1), 1-18. <https://doi.org/10.12989/aas.2019.6.1.001>
- Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K. andTounsi, A. (2017), “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Geomech. Eng., Int. J.*, 12(1), 9-34. <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.1.009>
- Benahmed, A., Fahsi, B., Benzair, A., Zidour, M., Bourada, F. and Tounsi, A. (2019), Critical buckling of functionally graded nanoscale beam with porosities using nonlocal higher-order shear deformation”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 69(4), 457-466.<https://doi.org/10.12989/sem.2019.69.4.457>
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- Bensattalah, T., Bouakkaz, K., Zidour, M. and Hassaine Daouadji,T. (2018a), “Critical buckling loads of carbon nanotubebeam bedded in Kerr’s medium”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, 6(4),339-356.<https://doi.org/10.12989/anr.2018.6.4.339>
- Bensattalah, T., Zidour, M. and Hassaine Daouadji, T. (2018b),“Analytical analysis for the forced vibration of CNT surrounding elastic medium including thermal effect using nonlocal Euler-Bernoulli theory”, *Adv. Mater. Res., Int. J.*, 7(3),163-174. <https://doi.org/10.12989/amr.2018.7.3.163>
- Bensattalah, T., Zidour, M., Hassaine Daouadji, T. and Bouakaz,K. (2019a), “Theoretical analysis of chirality and scale effects on critical buckling load of zigzag triple walled carbon nanotubes under axial compression embedded in polymeric matrix”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 70(3), 269-277.<https://doi.org/10.12989/sem.2019.70.3.269>
- Bensattalah, T., Zidour, M. and Hassaine Daouadji, T. (2019b), “Anew nonlocal beam model for free vibration analysis of chiral single-walled carbon nanotubes”, *Compos. Mater. Eng., Int.J.*, 1(1), 21-31. <https://doi.org/10.12989/cme.2019.1.1.021>
- Bensattalah, T., Hassaine Daouadji, T. and Zidour, M. (2019c),“Influences the Shape of the Floor on the Behavior of Buildings Under Seismic Effect”, *Proceedings of the 4th*

- International Symposium on Materials and Sustainable Development, Benmounah A., Abadlia M.T., Saidi M., ZerizerA. (eds), Springer, Cham, pp. 26-42. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43268-3_3
- Bishop A., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, (1993) , “A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process”, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- Boch P., Chartier T., Huttepain M; (1986), Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192, 1986.
- Bouazza, M., Amara, K., Zidour, M., Tounsi, A. and Adda-Bedia,E.A. (2014a), Hygrothermal effects on the post buckling response of composite beams”, *Am. J. Mater. Res.*, 1(2), 35-43.
- Bouazza, M., Amara, K., Zidour, M., Tounsi, A. and El Addas,A.B. (2014b), “Thermal effect on buckling of multi walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories”,*Nanosci. Nanotechnol.*, 4(2), 27-33.
- Bouazza, M., Amara, K., Zidour, M., Tounsi, A. and Adda-Bedia,E.A. (2015), “Post buckling analysis of functionally graded beams using hyperbolic shear deformation theory”, *Rev. Inform.Eng. Applicat.*, 2(1), 1-14. <https://doi.org/10.18488/journal.79/2015.2.1/79.1.1.14>
- Boukhelif, Z., Bouremana, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Tounsi, A. and Al-Osta, M.A. (2019), “A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, Int. J.
- Boutaleb S.Benrahou K. H. , Bakora A., Algarni A., Bousahla A.A, Tounsi A., Tounsi A. and S.R. Mahmoud 7. (2019) Dynamic analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT Vol. 7 No. 3 (2019) 189-206 DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2019.7.3.189>
- Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H.and Bedia, E.A. (2020), “Buckling of carbon nanotubereinforced composite plates supported by Kerr foundation using Hamilton’s energy principle”, *Struct. Eng. Mech.*, Int. J., 73(2),209-223. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.73.2.209>
- Chen, Y.Z. (2018), “Transfer matrix method for solution of FGM sthick-walled cylinder with arbitrary inhomogeneous elastic response”, *Smart Struct. Syst.*, Int. J., 21(4), 469-477. <https://doi.org/10.12989/sss.2018.21.4.469>

C

- Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Bedia, E. A. A. (2016). “Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory.” *Structural Engineering and Mechanics*, 57(4), 617–639.

Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., and Mahmoud, S. R. (2017). "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT." *Smart Structures and Systems*, 19(3), 289–297.

Chigasaki, M., Kojima, Y., Nakashima, S. & Fukaya, Y., (1990), "Partially Stabilized ZrO₂ and Cu FGM Prepared by Dynamic Ion Mixing Process", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, p.269-72.

D

Dihaj, A., Zidour, M., Meradjah, M., Rakrak, K., Heireche, H. and Chemi, A. (2018), "Free vibration analysis of chiral double walled carbon nanotube embedded in an elastic medium using non-local elasticity theory and Euler Bernoulli beam model", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 65(3), 335-342. <https://doi.org/10.12989/sem.2018.65.3.335>

Dorduncu, M. (2019), "Flexure Analysis of Functionally Graded Plates Using {2, 2}-Refined Zigzag Theory", *J. Aeronaut. Space Technol.*, 12(1), 19-30.

E

Ebrahimi, F. and Barati, M.R. (2016), "A nonlocal higher-order shear deformation beam theory for vibration analysis of size dependent functionally graded nanobeams", *Arab. J. Sci. Eng.*, 41(5), 1679-1690. <https://doi.org/10.1007/s13369-015-1930-4>

Ebrahimi, F. and Daman, M. (2017), "Nonlocal thermos electromechanical vibration analysis of smart curved FG piezoelectric Timoshenko nanobeam", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 20(3), 351-368. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.20.3.351>

El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Int. J. Mech. Sci.*, 53(4), 237-247.

Fekrar A., (2010), « Analyse du flambement des plaques composites en utilisant la théorie à ordre élevé » thèse de doctorat en science université Djillali Liabes Sidi Bel Abbas

F

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", *Meccanica*, 49(4), 795-810. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9827-3>

G

Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M. and Bensattalah, T. (2020), "Porosity-dependent free vibration analysis of FG nano beam using non-local shear deformation and energy principle", *Adv. Nano Res., Int. J.*, 8(1), 37-47. <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.037>

Ghazzawi, S.M. and Abdelrahman, W.G. (2020), "Static Analysis of Thick Functionally Graded Plates with Different Property Distribution Functions", Arab. J. Sci. Eng., 45, 5099-5108. <https://doi.org/10.1007/s13369-020-04344-6>

Grover N, Maiti DK and Singh BN. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. Compos Struct 2013; 95(1): 667–675.

Guessas, H., Zidour, M., Meradjah, M. and Tounsi, A. (2018), "The critical buckling load of reinforced nanocomposite porous plates", Struct. Eng. Mech., Int. J., 67(2), 115-123. <https://doi.org/10.12989/sem.2018.67.2.115>

H

Hamidi, A., Zidour, M., Bouakkaz, K. and Bensattalah, T. (2018), "Thermal and small-scale effects on vibration of embedded armchair single-walled carbon nanotubes", J. Nano Res., 51, 24- 38. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/JNanoR.51.24>

Hildebrand F.B., E. Reissner., G.G. Thomas, "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". NACA T. N. N°:1833, 1949.

Hillman, C., Suo, Z. & Lange, F.F.(1996), "Cracking of Laminates Subjected to Biaxial Tensile Stresses," *J. Am. Ceram. Soc.*, 1996, Vol. 79, N° . 8, p. 2127-33.

Hirwani, C.K. and Panda, S.K. (2019), "Nonlinear finite element solutions of thermos elastic deflection and stress responses of internally damaged curved panel structure", Appl. Mathe.Modell., 65, 303-317.<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.014>

Hirwani, C.K., Panda, S.K., Mahapatra, T.R. and Mahapatra, S.S.(2017), "Numerical study and experimental validation of dynamic characteristics of delaminated composite flat and curved shallow shell structure", J. Aerosp. Eng., 30(5), 04017045.[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000756](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000756)

Hirwani, C.K., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R. (2018a), "Thermomechanical deflection and stress responses of delaminated shallow shell structure using higher-order theories", Compos. Struct., 184, 135-145.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.071>

Hirwani, C.K., Panda, S.K. and Patle, B.K. (2018b), "Theoretical and experimental validation of nonlinear deflection and stress responses of an internally debonded layer structure using different higher-order theories", Acta Mechanica, 229(8), 3453-3473. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2173-8>

Houari M.SA., Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A., Adda Bedia EA., "Deux variables de la théorie de la plaque raffinée pour l'analyse de flexion thermoélastique des plaques sandwich à gradient fonctionnel". J. Therm. Stress., 2011, 34: 315-334.

I

Issad M. (2019). Investigation sur le comportement mécanique des plaques épaisse isotropes et orthotropes thèse de doctorat en science université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes

J

Jiang W., Nair R., Molian P.(2005) „ Functionally graded mold inserts by laser-based flexible fabrication : processing modeling, structural analysis, and performance evaluation.““ Journal of Materials Processing Technology, 166(2):286–293, 2005

K

Kant T., K. Swaminathan, “Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory”. Composite. Structure; 56 (4): 329- 344, 2002.

Karama M., Afaq K.S., Mistou S., (2003). Mechanical behavior of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, International Journal of Solids and Structures 40, 1525–1546

Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), “Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method”, Compos. Struct., 129, 202-212. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.006>

Kar, V.R. and Panda, S.K. (2016), “Nonlinear thermomechanical behavior of functionally graded material cylindrical / hyperbolic/elliptical shell panel with dependent and independent temperature properties”, J. Press. Vessel Technol., 138(6). <https://doi.org/10.1115/1.4033701>

Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K. (2015), “Non linear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygrothermo-mechanical loading”, Steel Compos. Struct., Int. J., 19(4),1011-1033. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.19.4.1011>

Katariya, P.V., Hirwani, C.K. and Panda, S.K. (2019), “Geometrically nonlinear deflection and stress analysis of skew sandwich shell panel using higher-order theory”, Eng. Comput., 35(2), 467-485. <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0609-3>

Khiloun, M., Bousahla, A.A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a fourvariable quasi 3D HSDT”, Eng. Comput., 1-15. <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00732-1>

Koteswara D. R., Tarapada R., Debabrata G., Prasad k. (2013), “namdar, Finite Element Analysis Of Functionally Graded Rotor Shaft Using Timoshenko Beam Theory” International Journal Of Mechanical And Production Engineering, Issn: 2320-2092,.

Krishnan Hari. K P, Shashi Dharan (2017), “ Recent Development in Modelling and Analysis of Functionally Graded Materials”. Engineering and Technology (IRJET); 04(03):1739-1744

Kawai C., Wakamatsu S., Sakagami S., Igarashi T., (1990). “Oxidation Resistant Coating with

TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced composite by CVD”, Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 77–82

L

Lee, W.H., Han, S.C. and Park, W.T. (2015), “A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and SFGM plates on Pasternak elastic foundation”, *Compos. Struct.*, 122, 330-342. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.11.047>

Liberscu L. (1967) ,”On the theory of anisotropic elastic shell and plates”, *Int J Solids Structures*. 1967, Vol. 3, pp. 53-68

Lostec L., (1997),« Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L » , Thèse de l’université de Limoges, 1997.

Lu L., Chekroun M., Abraham O., Maupin V., Villain G.(2011) „” Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer““. *NDT&E International*, 44(2):169–177, 2011

Lucchini, E. & Sbaizero, O. (1995)., Alumina/Zirconia Multilayer Composites Obtained by Centrifugal Consolidation, *J. European Ceram. Soc.*, Vol. 15, p. 975-81.

M

Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos Struct* 2012;94:714–23

Mantari, J.L. and Soares, C.G. (2013), “A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates”, *Compos. Part B: Eng.*, 45(1), 268-281. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.036>

Mahamood R.M., Member E.T.A., Shukla M., Pityana S. (2012) „” Functionally Graded Material : An Overview ““. In *Proceedings of the World Congress on Engineering*, London, U.K., 2012.

Minwo Park, Dong-Ho Choi (2018), “A two-variable first-order shear deformation theory considering in-plane rotation for bending, buckling and free vibration analyses of isotropic plates”,*Applied Mathematical Modelling* 61 (2018) 49–71.

Miyamoto Y., KaysserW.A., RabinB.H., Kawasaki, A., R.G.,(2013), “*Functionally Graded Materials*”: Design, Processing and Applications, Springer Science & Business Media;2013, p 4-5.

Moya J.S., A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO (1992), “Functionally gradient ceramics by sequential slip casting”, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992

Müller, E., Drašar, C., Schilz, J. and Kaysser, W.A., "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30, (2003).

N

Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells||. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. (2012), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos. Part B: Eng.*, 43(2), 711-725. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>

Nguyen, T.K. (2015), "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 11(2), 203-219. <https://doi.org/10.1007/s10999-014-9260-3>

Nguyen, H.N., Hong, T.T., Vinh, P.V., Quang, N.D. and Thom, D.V. (2019), "A refined simple first-order shear deformation theory for static bending and free vibration analysis of advanced composite plates", *Materials*, 12(15), 2385. <https://doi.org/10.3390/ma12152385>

P

Panda, K.B. and Chandran, K.R. (2003), "Titanium-titanium boride (Ti-TiB) functionally graded materials through reaction sintering: Synthesis, microstructure, and properties", *Metallurg. Mater. Transact. A*, 34(9), 1993-2003. <https://doi.org/10.1007/s11661-003-0164-3>

Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013), "Thermal Post buckling Behavior of Laminated Composite Spherical Shell Panel Using NFEM#", *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 41(4), 468-488. <https://doi.org/10.1080/15397734.2013.797330>

R

Radwan, A.F. and Zenkour, A.M. (2018), "Quasi 3-D trigonometric plate theory for bending analysis of EG plates resting on Pasternak foundations", *Curv. Layer. Struct.*, 5(1), 146-155. <https://doi.org/10.1515/cls-2018-0011>

Reddy JN. A (1984). simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984;51:745–52.

Reddy J.N., (1997) *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

Reissner E.(1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *Int J Solids Struct* 1975;11:569–73.

Rouzegar J., Sharifpoor R. (2015). flexure of thick plates resting on elastic foundation using two-variable refined plate theory.archive of mechanical engineering vol. LXII 2015 number 2 10.1515/meceng-2015-0011

S

Sahoo R., Singh BN. (2013), "A new shear deformation theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates", *International Journal of Mechanical Sciences* v.75 p.324-336

Sarkar, P., Nicholson, P. S. (1996), "Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 79, N°. 8, p. 1987-2002.

Sbaizero, O. & Lucchini, E. Influence of Residual Stresses on the Mechanical Properties of a Layered Ceramic Composite, *J. European Ceram. Soc.*, 1996, Vol. 16, p. 813-18.

Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L. and Karami, B. (2018), "Anovel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plateswith porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Aerosp. Sci. Technol.*, 72, 134-149<https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>

Shokravi, M. (2017), "Vibration analysis of silica nano particles reinforced concrete beams considering agglomeration effects", *Comput. Concrete, Int. J.*, 19(3), 333-338.<https://doi.org/10.12989/cac.2017.19.3.333>

Steffens H.D., M. Dvorak., M. Wewel,(1990), "Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials*"-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, 1990.

T

Takahashi M., Y. Itoh., H. Kashiwaya(1990), Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.

Tayeb, T.S., Zidour, M., Bensattalah, T., Heireche, H., Benahmed,A. and Bedia, E.A. (2020), "Mechanical buckling of FG-CNTsreinforced composite plate with parabolic distribution using Hamilton's energy principle", *Adv. Nano Res., Int. J.*, 8(2), 135-148. <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.2.135>

Thai, H.T. and Kim, S.E. (2013), "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos. Struct., Int. J.*, 99, 172-180.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.030>

Thai HT, Choi DH. (2013 a) "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;101:332–40.

Touratier, (1991). An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering*

Science 29 (8) 901–916.

U

Uemura S., Sohda Y., Kude Y., (1990). SiC/C Functionally Gradient Material Prepared by Chemical Vapor Deposition, Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 237–242.

V

Vel, S.S. and Batra, R.C. (2003), “Exact thermoelasticity solution for cylindrical bending deformations of functionally graded plates”, In: IUTAM Symposium on Dynamics of Advanced Materials and Smart Structures, Watanabe K., Ziegler F. (eds), pp. 429-438. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0371-0_42

W

Whitney J.M., Sun C.T.: A higher order theory for extensional motion of laminated composites, Journal of Sound and Vibration, 1973, 30: 85-97.

Wu, C.P. and Liu, W.L. (2014), “3D buckling analysis of FGM sandwich plates under bi-axial compressive loads”, Smart Struct. Syst., Int. J., 13(1), 111-135. <https://doi.org/10.12989/sss.2014.13.1.111>

Y

Yadroitsev I., Bertrand P., Laget B., Smurov I. (2007) „Application of laser assisted technologies for fabrication of functionally graded coatings and objects for the international thermonuclear experimental reactor components” . Journal of Nuclear Materials, 362(2-3): 189–196, 2007.

YanJ. Yang, K.M.Liew, S. Kitipornchai. (2005)” Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading”. Int. J. Mech. Sci. 47 (2005) 1519-1541.

Yi, S.C., Yao, L.Q. and Tang, B.J. (2017), “A novel higher-order shear and normal deformable plate theory for the static, free vibration and buckling analysis of functionally graded plates”, Mathe. Problems Eng., Article ID 6879508, 20 p. <https://doi.org/10.1155/2017/6879508>

Yin, H.M., Sun, L.Z., Paulino, G.H., (2004). „Micromechanics based elastic model for functionally graded materials with particle interactions.” Acta Materialia 52, 3535–3543.

Yuki. M., Murayama, T., Irisawa, T., Kawasaki, A. &Watanabe. R., (1990), “In Proc., 1st Int. Sump. On FGM », Sendai, ed. M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai & I. Shiota. FGM Forum. Society for Non-traditional Technology, Tokyo, , p. 203

Z

Zenkour, A.M. (2009), “The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations”, Int. J. Mech. Sci., 51(11-12), 869- 880. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.09.026>

- Zenkour, A.M. and Alghanmi, R.A. (2018), "Bending of functionally graded plates via a refined quasi-3D shear and normal deformation theory", *Curv. Layer. Struct.*, 5(1), 190-200. <https://doi.org/10.1515/cls-2018-0014>
- Zenkour, A.M. and Radwan, A.F. (2018), "Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory", *Arch. Civil Mech. Eng.*, 18(2), 645- 658. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2017.10.003>
- Zerrouki, R., Karas, A. and Zidour, M. (2020), "Critical buckling analyses of nonlinear FG-CNT reinforced nano-compositebeam", *Adv. Nano Res., Int. J.*, 9(3), 211-220. <https://doi.org/10.12989/anr.2020.9.3.211>
- Zhanga C., Chena F., Huang Z., Jiaa M., Chena G., Yea Y., Lina Y., Liub W., Chenb B., Shena Q., Zhanga L., Lavernia E. J., (2019), "Additive manufacturing of functionally graded materials: A review" *Materials Science & Engineering A* 764 (2019) 138209