



RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DJILLALI LIABÉS DE SIDI BEL ABBÉS



FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

## THESE

Pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique des structures

Présenté par : M<sup>r</sup> ZAHY Rachid

## Thème

*Comportement dynamique des rotors à arbre conique  
en matériaux composites*

**Soutenue devant la commission du Jury:**

**Encadreur :**

Mr. REFASSI Kaddour

Professeur à l'U.D. L de Sidi Bel Abbès

**Président :**

Mr MAKHLOUF Mohamed

Professeur à l'U.D. L de Sidi Bel Abbès

**Examineurs :**

Mr. MEGUENNI Abdelkader

Professeur à l'U.D. L de Sidi Bel Abbès

Mr. AID Abdelkrim

Professeur à l'U Mascara

Mr. BOURDIM Mokhtar

MCA au C. U. de Relizane

Mr. MAHMOUDI Nouredine

MCA au C. U. de Relizane

2017/2018

## **RESUME**

Le travail de cette thèse est consacré à l'étude du comportement dynamique et stabilité des rotors en matériaux composites à arbre conique, une version  $h-p$  de la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser la structure. Un élément fini de type poutre avec six degrés de liberté par nœud est développé. Une étude théorique est faite pour l'établissement de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation du système (arbre, disque) nécessaires à la détermination des équations du mouvement. Dans cette étude la déformation transversale de cisaillement, l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et l'effet de couplage dû à la stratification des couches de l'arbre en matériaux composites sont pris en considération. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences propres et des vitesses critiques du système. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de la méthode utilisée. Plusieurs exemples sont traités, et une discussion est établie pour déterminer l'influence des différents paramètres étudiés.

**Mots clés:** Rotors ; Disque; Matériaux composites; Arbre conique; Version  $p$ ; MEF.

## **ABSTRACT**

The work of this thesis is devoted to the study of the dynamic behavior and stability of rotors in cone-shaped composite materials, an  $h-p$  version of the finite element method is used to model the structure. A beam-type finite element with six degrees of freedom per node is developed. A theoretical study is made for the establishment of the kinetic energy and the energy of deformation of the system (tree, disk) necessary for the determination of the equations of the movement. In this study transverse shear deformation, rotational inertia, gyroscopic effect and coupling effect due to the stratification of composite tree layers are taken into consideration. A program is developed for calculating eigenfrequencies and critical speeds of the system. The results obtained compared with those available in the literature show the speed of convergence, accuracy and efficiency of the method used. Several examples are treated, and a discussion is established to determine the influence of the different parameters studied.

**Keywords:** Rotors; Disk; Composite materials; Conical tree;  $p$  version; MEF.

---

ويكرس عمل هذه الأطروحة لدراسة السلوك الديناميكي واستقرار الدورات في المواد المركبة على شكل مخروط، ويتم h-p من طريقة العناصر المحدودة لنمذجة الهيكل. تم تطوير عنصر محدود من نوع الحزمة ذو ست درجات من الحرية لكل عقدة. يتم إجراء دراسة نظرية ء الطاقة الحركية وطاقة تشوه النظام ( ) اللازمة لتحديد . في هذه الدراسة، يتم عرض تشوه القص عرضية، الجمود التناوب، وتأثير جيروسكوبيك وتأثير اقتران . تم تطوير برنامج لحساب الترددات الذاتية والسرعات ا . النتائج التي تم الحصول عليها مقارنة مع تلك المتاحة في الأدب تظهر سرعة التقارب والدقة وكفاءة الطريقة المستخدمة. وتعالج عدة أمثلة، وتجري مناقشة لتحديد تأثير مختلف المعلمات المدروسة.

.MEF p

الكلمات الرئيسية:

## **Dédicace**

*Je dédie ce modeste travail aux êtres qui me sont les plus chers  
au monde:*

*A mes parents*

*A toute la famille ZAHY HASNI ET RAHALI.*

*M<sup>r</sup> : ZAHY RACHID*

---

## Remerciements

*Le remerciement avant tous est à Dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'islam et de science.*

*Je remercie Mr. Refassi Kadour pour l'encadrement, ses précieux conseils et toute la confiance qu'il m'a accordée tout au long de cette thèse.*

*Mes remerciements s'adressent à Mr. MAKHLOUF Mohamed qui a accepté de présider mon jury, puis Mr. BOURDIM Mokhtar, Mr MEGUENNI Abdelkader, Mr. AID Abdelkrim et Mr. MAHMOUDI Noureddine qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon travail.*

*Je tiens à remercier également toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. En particulier l'équipe de Chajra et Sahli Abderrahman*

---

# **SOMMAIRE**

INTRODUCTION GENERALE.....	01
----------------------------	----

## **Chapitre 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUES**

Introduction.....	03
I.1. historique de la dynamique des rotors.....	04
1.1.1. Définition du rotor .....	05
1.1.2. Définition d'un arbre.....	05
1.1.3. Définition d'un palier.....	06
1.2. Matériaux Composites.....	06
1.2.1. Généralités .....	06
1.2.2. Constituants des matériaux composites .....	07
1.2.3. Fibres.....	08
1.2.4. Matrices.....	09
I.3. Classification des matériaux composites .....	11
I.4. Avantages des matériaux composites .....	13
I.5. Inconvénients des matériaux composites.....	13
I.6. Comportement mécanique des matériaux composites.....	13
1.6.1. Loi de Hooke généralisée.....	14
1.6.2. Relations d'élasticité dans un système d'axe quelconque.....	15
1.6.3. Dynamique des rotors en matériaux composites .....	16

---

## Chapitre II: DYNAMIQUE DES ROTORS

INTRODUCTION .....	19
II. 2. Détermination des expressions d'énergie cinétique et potentielle des éléments constitutifs du système rotor.....	19
II. 2.1. Système des axes.....	19
II. 2.2. Énergie cinétique du disque.....	20
II. 2.3. Énergie cinétique de l'arbre.....	22
II. 2.4. Énergie potentielle due à la déflexion de l'arbre.....	23
II. 2.5. Forces généralisées des paliers.....	25
II. 2.6. Énergie cinétique due au balourd .....	26
II. 3. utilisation des équations de Lagrange.....	28
II. 3.1. Disque.....	28
II. 3.2. Arbre.....	29
II. 3.3. Paliers.....	34
II. 3.4. Masses non équilibrées.....	35
I. 3.5. Équations de mouvement.....	38

## Chapitre III: DYNAMIQUE DES ROTORS COMPOSITES

INTROUCTION.....	40
III.1. Equations cinématiques.....	40
III.1.1. Relation déformation –déplacement .....	42
III.1.2. Relation contraintes –déformations .....	44
III.2. Energie de déformation de l'arbre.....	48
III.3. Energie cinétique de l'arbre.....	49
III.3.1. Systèmes des coordonnées.....	49
III.3.3. Expression de l'énergie cinétique de l'arbre.....	51
III.4. Energie cinétique du disque.....	52

**Chapitre IV: DYNAMIQUE DES ROTORS COMPOSITES A ARBRE  
CONIQUE**

INTRODUCTION..... 53  
IV.1 Equations cinématiques..... 54  
IV.2.1. Energie de déformation et cinétique de l'arbre..... 56  
IV.2.2 Définition de l'élément finis hiérarchique..... 59  
IV.2.3 Polynômes de Legendre..... 59  
IV.2.4 Élément conique hiérarchique..... 59  
IV- 3- Coordonnées et fonction de forme..... 60

**Chapitre V: *RESULTATS ET INTERPRETATIONS***

INTRODUCTION..... 70  
V.1 Validation et convergence..... 70  
V.2 Comparaison entre l'utilisation des fonctions de forme hiérarchiques  
trigonométriques et polynômiales dans un arbre cylindrique..... 73  
V.3 Comparaison entre l'utilisation des fonctions de forme hiérarchiques  
trigonométriques et polynômiales dans un arbre conique ..... 77  
Conclusion..... 85  
  
**Conclusion générale..... 86**

---

# Introduction générale

# **Introduction générale**

L'industrie mécanique est toujours en perpétuelles mutations soumise à des innovations en continu. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesses de rotation de plus en plus élevées. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent souvent trop élevées pour que la structure puisse les supporter. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter qu'une trop grande vibration engendre un rendement moindre, un bruit trop important,... ; et cette vibration peut même aboutir à l'instabilité et à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

La conception actuelle procède à la fabrication de structures de plus en plus minces et légères basée sur des matériaux composites de natures multiples et variées. La plus grande utilisation des poutres stratifiées multicouches dans l'industrie, en tant qu'éléments mobiles dans des machines exigent la connaissance de leurs fréquences normales quand les conditions dynamiques externes induisent un comportement non linéaire géométrique de la structure. L'application de diverses théories évoluées pour les vibrations à haute fréquence de poutres a récemment attiré l'attention de plusieurs investigateurs. Ces théories sont utilisées pour évaluer les caractéristiques du comportement vibratoire non linéaire de poutres composites stratifiées dans diverses conditions.

La maîtrise de comportement vibratoire nécessite une connaissance des caractéristiques des arbres tournants en matériaux composites, la prédiction de cette connaissance est fondamentale dans la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages " sécurisées " en terme de vitesses de rotation.

La thématique de recherche abordée dans le cadre de cette thèse de doctorat concerne l'étude du comportement vibratoire des arbres coniques tournants en matériaux composites, et plus précisément, leur comportement en rotation à partir de la prise en compte des effets de

cisaillement, d'inertie rotatoire, de l'effet de couplage dû à la stratification des couches de l'arbre en matériaux composites.

La présente thèse s'organise autour de cinq chapitres :

A partir d'une étude bibliographique, le premier chapitre présente des généralités sur les matériaux composites et leurs interventions dans le domaine de la dynamique des rotors.

Le deuxième chapitre présenter la dynamique des rotors. Dans ce chapitre les déplacements, les déformations et les expressions des énergies de déformation et cinétique de l'arbre tournant sont déterminés, ainsi que l'énergie cinétique du disque rigide embarqué sur l'arbre ainsi que le travail virtuel des paliers.

Le chapitre trois présente la dynamique des rotors en composites, les expressions des énergies de déformation et cinétique du rotor tournant en matériaux composites sont déterminés, ainsi qu'une formulation par la version  $p$  de la méthode des éléments finis pour l'obtention des matrices de rigidité, matrice masse, matrice de l'effet gyroscopique pour aboutir à l'équation du mouvement.

Le quatrième chapitre détaille dynamique des rotors en composites à arbre conique. Dans ce chapitre la section varie, une modélisation analytique et numérique est développée pour déterminer les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et les vitesses critiques.

Le cinquième chapitre décrit les résultats obtenus des fréquences propres et des vitesses critiques du système comparés avec ceux disponibles dans la littérature.

La présente thèse se termine par une conclusion recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les futurs développements.

# Chapitre I

*Etude Bibliographique*

**INTRODUCTION :**

Les arbres ou les rotors sont définis comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe. Ils constituent les pièces maîtresses des machines tournantes dont le domaine d'applications industrielles est très vaste (machines-outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire, l'industrie pétrolière, etc.). Parmi leurs fonctions on peut citer la transmission de puissance ou la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique.

L'arbre d'un rotor peut être considéré comme un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse répartie tout le long de sa longueur surtout dans le domaine de grandes vitesses. L'analyse dynamique des corps continus en rotation s'impose donc car la connaissance précise du comportement vibratoire est indispensable pour assurer un bon fonctionnement.

L'arrivée des matériaux composites a ouvert de nouvelles voies en augmentant la performance des machines industrielles (secteurs automobile, aéronautique et spatial) grâce à leurs qualités intrinsèques telles que la légèreté (associée à des caractéristiques de résistance élevée) et la bonne tenue à la corrosion. Le domaine d'utilisation des machines s'est élargi grâce au développement de matériaux nouveaux, élaborés à partir de nouvelles méthodes de conception et de fabrication.

### **I.1. historique de la dynamique des rotors :**

Plusieurs auteurs ont concentré leur attention sur le développement des rotors à arbres coniques.

Les premiers travaux utilisant ce type de modélisation ont été publiés par Ruhl et Booker [1], Nelson et McVaughont [2] ont employé les éléments finis cylindriques de type  $C^1$  compatibles avec quatre degrés de liberté par point nodal, c.-à-d. deux déplacements transversaux et deux rotations par nœud. Ils prennent en compte les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'efforts gyroscopiques.

Cette modélisation a été complétée par Gash [3], Zorzi et Nelson [4] pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes. Nelson [5] a développé un élément fini de section uniforme dérivé de la théorie de poutre de Timoshenko. Plus tard, cet élément a été amélioré par Özgtuven et Ozkan [6] en synthétisant les contributions précédentes.

Plusieurs travaux ont suivi (Ku.D.M [7], Hashish et Sankar [8], Rouch et kao [9]), confirmant la maturité et la fiabilité de cette technique.

Les travaux d'Archer [10] et de Thomas et al [11], ont présenté un élément linéairement conique basé sur la théorie de poutre de Timoshenko.

Ils ont incorporé les effets de cisaillement dans la formulation en définissant l'angle de cisaillement comme variable nodale additionnelle, qui mène à douze degrés de liberté par élément.

Greenhill et al [12], ont prolongé l'approche en incluant tous les effets intrinsèques au système de rotation dans un élément conique, et ont développé des expressions de forme fermée pour les matrices structurales élémentaires.

Plus récemment, Edney et al [13], ont proposé un élément conique de type  $C^1$  compatible d'arbre basé sur la formulation proposée par Archer. En assumant la distribution constante de cisaillement sur la longueur d'élément, ils ont maintenu seulement quatre degrés de liberté par nœud, la pente étant incorporée à toute la rotation de la section.

Le travail de Gmur et Rodrigues [14] se relie au développement de l'ensemble d'élément linéairement conique de type  $C^0$  avec un nombre variable de points nodaux. Semblables aux travaux d'Edney et al [15] les éléments proposés ont seulement quatre degrés de liberté par nœud. Ceux-ci étant le déplacement transversal et la rotation totale de la section dans les deux plans orthogonaux. Ils incluent les effets de l'inertie de translation et de rotation, des moments gyroscopiques, l'amortissement interne visqueux et hystérétique, la déformation de cisaillement, et l'excentricité de masse.

Un modèle pour l'analyse des vibrations linéaires de rotor développé par Genta et Gugliotta a été décrit dans des travaux [16]. Ce modèle est basé sur la méthode d'éléments finis (M.E.F) et inclut une formulation cohérente des matrices, pour les éléments constants axisymétriques de poutre.

### **I.1.1. Définition du rotor**

Un rotor est composé d'un arbre sur lequel sont montées les parties actives (disques, Bobinage, etc.). Il est maintenu dans le stator par des liaisons tournantes (des paliers radiaux, une butée axiale...). L'arbre se déforme sous l'effet de ces forces et chacun de ces tronçons tourne autour d'une position d'équilibre statique constituant la ligne de rotation. Cette ligne change avec les conditions de fonctionnement (fatigue de l'arbre, la modification des charges des paliers).

### **I.1.2. Définition d'un arbre**

Il est bien évident que le mouvement le plus facile à transmettre est le mouvement circulaire. L'organe transmettant ce mouvement en tournant autour de son axe est un arbre de transmission.

Un grand nombre de raisons concourent au choix de la forme cylindrique pour les arbres (forme des surfaces de guidage et d'assemblage, résistances, prix de revient).

La désignation d'un arbre indique sa fonction ou des détails de sa forme c'est ainsi qu'on parle couramment de :

- Arbre lisse (cylindrique de même diamètre sur toute la longueur)
- Arbre à échelons (cylindrique de diamètres différents successifs)
- Arbre cannelé et arbre dentèle
- Arbre manivelle
- Arbre plein ou creux
- Arbre moteur
- Arbre récepteur
- Arbre intermédiaire

Les principaux efforts s'exerçant sur un arbre peuvent être des efforts radiaux ou des efforts axiaux, les contraintes qui en résultent peuvent être :

- du cisaillement, dû aux efforts radiaux.

- de l'extension de la compression, dues aux efforts axiaux, ils ne sont considérés que dans les études précises.
- de la flexion et de la torsion dues aux efforts s'exerçant à une certaine distance de l'axe.

### **I.1.3. Définition d'un palier :**

Les paliers sont des éléments de réalisation qui doivent remplir des conditions :

- Le guidage des arbres : réalisation de l'alésage, réduction de résistance passive.
- Immobilisation relative de la partie démontable : permettant la mise en place facile de l'arbre.
- Diminution des frottements.

Les paliers portent différents noms, on distingue :

- a) palier de brouette : le guide de l'arbre le plus simple.
- b) palier en deux pièces.
- c) palier à bague ou à coussinet.

### **Palier pour forte charge :**

- a) palier **MITCHELL** : ce type de palier permet une augmentation de la pression
- b) Palier fluide **GERARD** : aucun frottement n'est possible, possibilité de régler la position de l'arbre avec précision, possibilité d'employer n'importe quel fluide.

## **I.2. MATERIAUX COMPOSITES**

### **I.2.1. GENERALITES**

Les matériaux composites ont une longue histoire. Leurs origines sont inconnues mais tous les écrits historiques contiennent des références à certaines formes des matériaux composites. Par exemple, la paille a été utilisée par les Babyloniens pour renforcer les briques, le contreplaqué a été utilisé par les anciens Egyptiens afin d'obtenir une meilleure résistance tant aux chargements mécaniques qu'à l'environnement, les épées et les armures médiévales ont été fabriquées par des couches des différents matériaux [17]. Aujourd'hui, les matériaux composites font partie courante de notre vie que cela soit des objets très excitants et à la mode

comme la canne de golf et le kayak, ou beaucoup plus usuels tels que le contreplaqué et le béton.

Un matériau composite peut être défini comme une combinaison d'au moins deux matériaux différents à l'échelle macroscopique. Les composites utilisés pour leurs propriétés structurales se limitent à ceux qui contiennent des renforts réunis en une seule masse par une matrice. Typiquement, un matériau composite contient une phase discontinue de renfort plus rigide et plus résistante que la phase continue de la matrice.

### I.2.2. Constituants des matériaux composites

Les propriétés mécaniques des composites sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la fibre, la matrice, ainsi que l'interphase (Fig.1-1). La résistance et la rigidité d'un composite sont assurées principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice. Cette dernière, quant à elle, réunit les fibres et donne la forme géométrique de la structure. La matrice sert également à transférer les efforts mécaniques entre les fibres et les protéger contre les environnements.

L'interphase est la zone créée par l'adhérence et la réaction entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice [18].

La disponibilité d'un grand choix de fibres et de matrices permet de réaliser des composites ayant diverses propriétés. Nous présenterons rapidement quelques-uns des constituants les plus couramment utilisés.

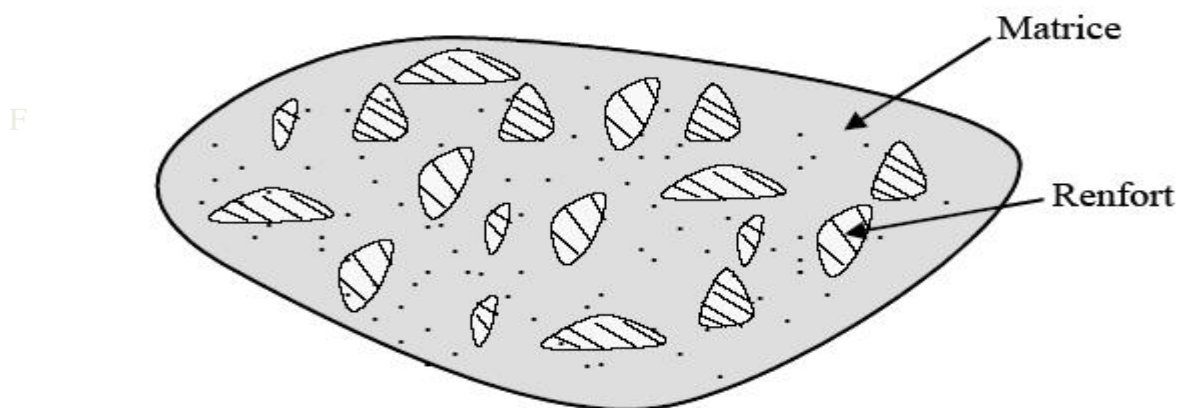


Figure I.1 : Représentation schématique d'un matériau composite

### **I.2.3. Fibres**

La rupture des matériaux à hautes résistances ou à hauts modules est généralement provoquée par la propagation des défauts. Les matériaux en forme de fibre sont intrinsèquement plus résistants à la rupture qu'en forme massive car la taille des défauts est limitée par le diamètre faible [19]. Dans un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée principalement par les fibres. Par sa nature filamenteuse, la rupture de quelques fibres a pour résultat la redistribution du chargement sur les autres fibres, ce qui empêche la rupture catastrophique de la structure. Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes (Fig.1-2) :

#### **• Fibres de verre**

La connaissance des matériaux composites fibreux à matrice de polymères est initialement basée sur des études des composites à fibres de verre. Ces fibres sont très répandues dans des applications à basses performances ainsi que des applications à hautes performances telle que les réservoirs de propulseurs de fusée. Leurs avantages incluent un prix compétitif, la disponibilité, et la résistance élevée. Cependant, à cause de leur rigidité relativement faible, les fibres de verre sont progressivement remplacées par les fibres aramides ou les fibres de carbone dans les applications à hautes performances.

#### **• Fibres de carbone**

Actuellement, les fibres de carbone sont le renfort le plus répandu pour les matériaux composites à hautes performances [19]. Deux avantages principaux de ces fibres sont leur fabrication plus adaptée à la production à grande échelle que d'autres fibres plus performants et leurs excellentes propriétés mécaniques plus facilement transférables aux matériaux composites. Leur prix reste toutefois prohibitif pour les produits grand public.

#### **• Fibres aramides**

Ces fibres appartiennent à la famille des fibres polyamides aromatiques. Les versions commerciales disponibles incluent le Kevlar (nom déposé) et le Nomex (nom déposé). Elles possèdent une résistance élevée et une rigidité considérablement supérieure à celle des fibres de verre. La tolérance aux dommages est très bonne également. Leurs désavantages incluent une résistance en compression inférieure à celle des fibres de carbone et une adhésion relativement faible aux matrices [19].

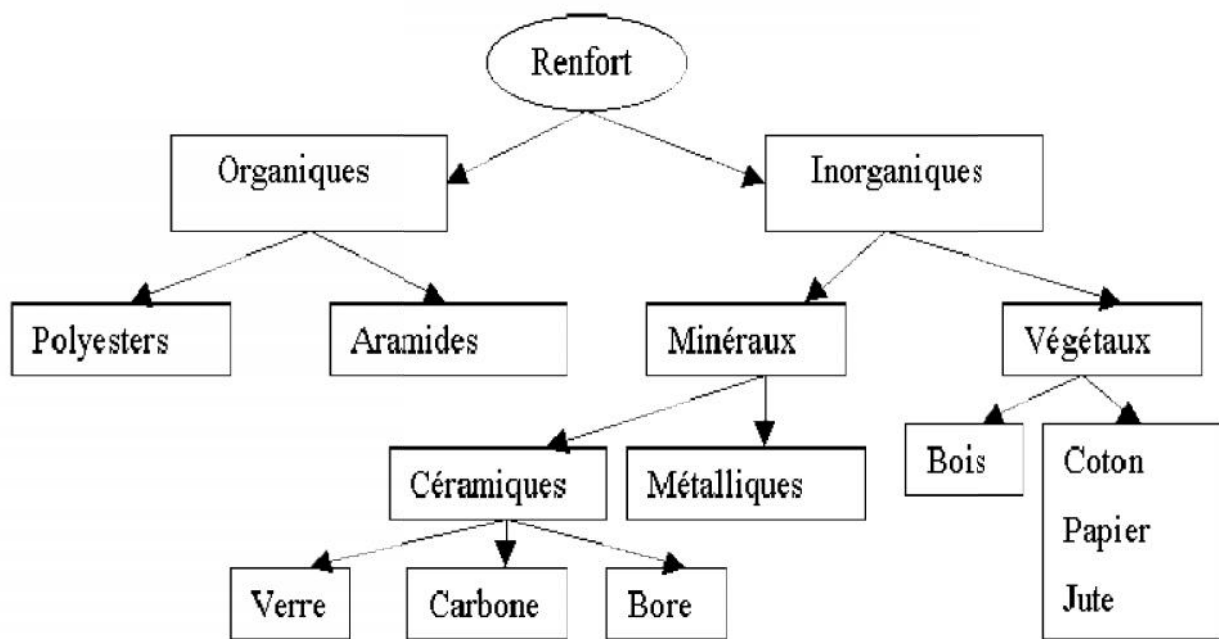


Figure I.2 : Principaux matériaux de renfort [20]

#### I.2.4. Matrices

La matrice réunit les fibres par ses caractéristiques cohésive et adhésive (Fig1-3). Elle maintient les fibres dans leur orientation et leur position prévues pour les charges appliquées. Elle sert aussi à distribuer les efforts entre les fibres, fournir une résistance à la propagation de fissure, et cède toutes les résistances en cisaillement du composite [19]. La matrice détermine en général la limite de la température d'utilisation et l'environnement de service du matériau. Il existe un grand nombre de polymères pouvant servir de matrice aux matériaux composites. Ceux parmi les plus utilisés sont les suivants :

- **Résines de polyester et de vinylester**

Ce sont les résines les plus utilisées de toutes les matrices, pour des applications commerciales, industrielles, et de transport. L'adhésion avec les fibres de verre est excellente. Les résines de polyester et de vinylester sont en majeure partie limitées aux applications à basses performances à cause d'un problème d'adhésion avec les fibres à hautes performances telles que les fibres de carbone et les fibres aramides [19].

- **Résines thermodurcissables**

Lorsqu'une résine thermodurcissable est soumise à une élévation de température, il se crée des réactions chimiques au cours desquelles des liaisons covalentes sont formées entre les chaînes de molécules résultant en un réseau tridimensionnel. Le polymère final se présente

sous la forme d'un corps solide et infusible. La polymérisation étant irréversible, ce matériau ne peut être mis en forme qu'une seule fois au moment de sa fabrication.

En règle générale, les matrices thermodurcissables possèdent une faible résistance à l'impact et une faible tenue en température. Les quatre types de résines couramment utilisées dans l'industrie aérospatiale sont les époxydes, les bismaléimides, les polyimides, et les phénoliques.

Les époxydes sont les plus utilisés pour la fabrication de structures aéronautiques. Ils possèdent une combinaison d'avantage quasiment imbattable : facilité de manipulation, flexibilité de traitement, de bonnes propriétés mécaniques, et un prix acceptable [19].

Leur application est cependant limitée à une température maximale comprise entre 80°C et 120°C.

#### • Résines thermoplastiques

Les matrices thermoplastiques peuvent être divisées en deux classes selon leurs structures moléculaires : la structure semi-cristalline et la structure amorphe [21]. Ces matrices sont caractérisées par la capacité d'être alternativement ramollies par chauffage au-dessus de la température de fusion ou de ramollissement et durcies par refroidissement. Dans ce cas, la modification de forme et le recyclage du composite sont envisageables. Ces résines possèdent des avantages sur les résines thermodurcissables telles qu'une ténacité améliorée, une déformation à rupture élevée, et une faible absorption d'humidité. De plus, elles ont une durée de stockage illimitée. Cependant, les thermoplastiques amorphes présentent des problèmes de résistance aux solvants organiques [19].

Parmi les résines thermoplastiques, on peut citer la résine polyéther éthercétone (PEEK), la polysulfure de phénylène (PPS), la polyétherimide (PEI), et la polyamide (PA).

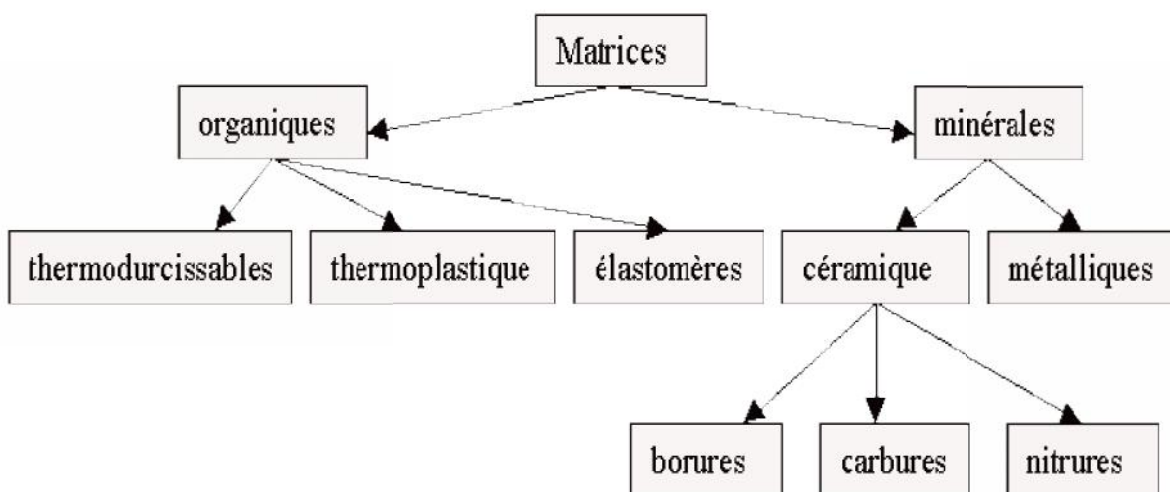


Figure I.3 : Les différentes familles de matrice[20]

### I.3. Classification des matériaux composites

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts [22]. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (Fig.1-4):

- **Composites à renforts de particules**

Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

- **Composites à renforts de paillettes**

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l’une à l’autre afin d’avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

- **Composites à renforts de fibres**

Une fibre a une longueur bien supérieure aux dimensions de la section transversale. Ce type de composites peut être divisé selon les renforts : en fibres discontinues (courtes) ou en fibres continues (longues).

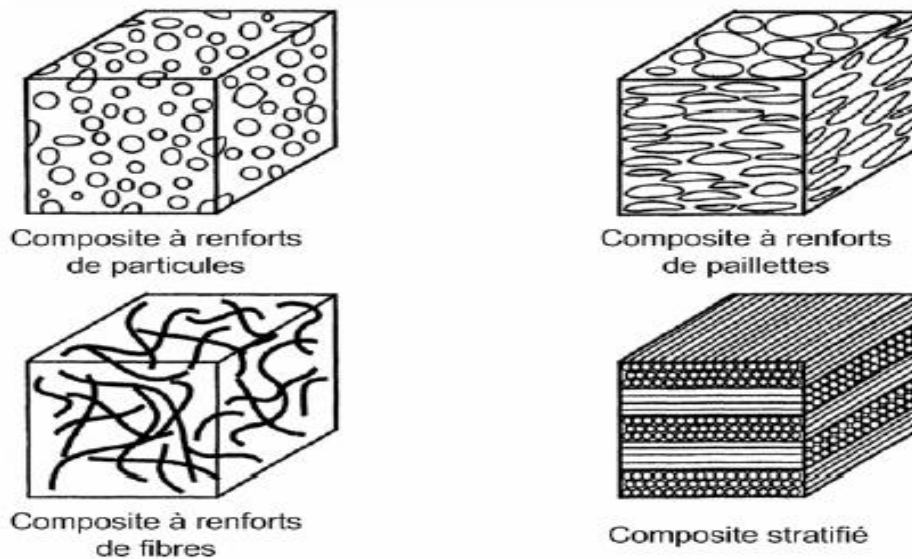


Figure I.4 : Classification des matériaux composites.[23]

- **Composites stratifiés**

Un stratifié se compose d’au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés

composites à renforts de fibres longues (Fig.1-5). Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification. Ces couches possèdent trois plans de symétries orthogonaux deux à deux, et se comportent d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite. En l'adaptant au mieux au champ de contraintes imposé, les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres.

Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropique dans le plan de stratifié.

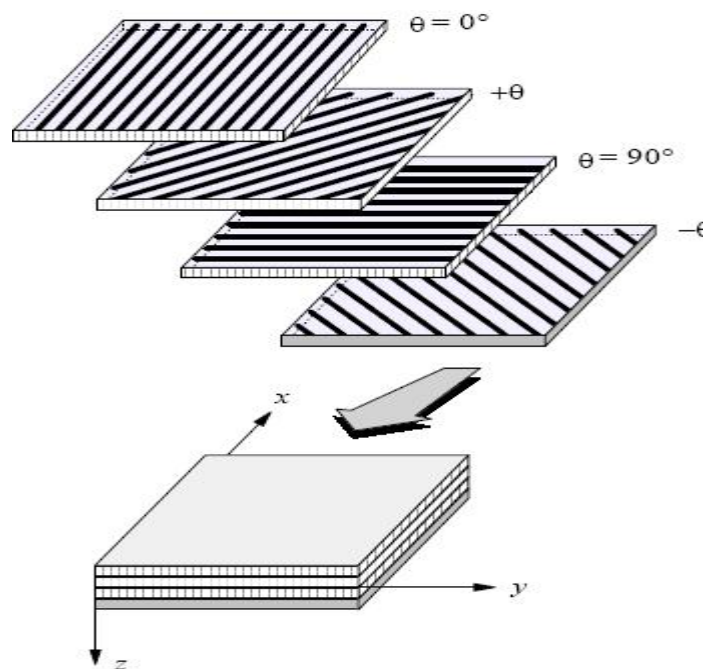


Figure I-5 : Matériaux composites stratifié avec plusieurs orientations [24]

Les matériaux composites peuvent également être classés par la nature de la matrice comme suit :

- **Composites à matrice polymérique**

Les polymères sont caractérisés par une faible densité, une résistance mécanique relativement faible, et une grande déformation à la rupture. Les avantages principaux sont le procédé de fabrication relativement mature et le poids faible. Ce type de composites a été développé surtout pour les applications aéronautiques où la réduction de poids est essentielle.

**• Composites à matrice métallique**

Dans ces composites, des matériaux métalliques comme l'aluminium et le titane sont renforcés par des renforts généralement non-métalliques, souvent des céramiques, les composites à matrice métallique ont des propriétés mécaniques meilleures ou plus adaptables au chargement que leurs matrices monolithiques. Leurs applications dans les moteurs d'automobile sont bien établies.

**• Composites à matrice céramique**

Des matrices céramiques telles que le verre et le carbure de silicium (SiC) peuvent être associées aux renforts comme des métaux, le carbone, et des céramiques. Leur développement a pour but d'améliorer les propriétés mécaniques telles que ténacité et résistance au choc thermique des céramiques monolithiques. Ces composites sont utilisés dans des environnements sévères, par exemple les moteurs de fusées, les boucliers thermiques, ou les turbines à gaz.

**I.4. Avantages des matériaux composites :**

- Gain de masse
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques)
- Grande résistance à la fatigue
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone)
- Insensibles aux produits chimiques "mécaniques" comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.

**I.5. Inconvénients des matériaux composites :**

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- Meilleure tenue au feu (classement M) que les alliages légers mais émission de fumées (classement F) parfois toxiques pour certaines matrices.
- Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

**I.6. Comportement mécanique des matériaux composites :**

Les matériaux composites possèdent un plus grand nombre de caractéristiques que les matériaux classiques. L'origine de ce fait se trouve dans l'anisotropie et dans une moindre mesure de l'hétérogénéité de ces matériaux. En conséquence, la mécanique des matériaux

composites, pour prendre en compte de façon complète ce nombre important de paramètres, doit faire appel à des notions et des techniques assez complexes. Les mesures expérimentales confirment que les propriétés mécaniques des matériaux composites varient suivant la direction des fibres, donc ils se comportent comme des matériaux anisotropes [25]. L'étude du comportement d'un tel matériau devient alors plus complexe que si l'on fait certaines hypothèses sur la géométrie de la répartition du renforcement.

### I.6.1. Loi de Hooke généralisée

Dans le cas des matériaux composites, la plupart des fibres présentent un comportement élastique fragile linéaire ; les résines par contre ont un comportement élastique visqueux. Des méthodes analytiques utilisées pour déterminer les différentes propriétés des composites, sont détaillées par Hashin, Z., [26] et Christensen, R [27]. On peut admettre pour les applications les plus fréquentes que le comportement des matériaux composites est pratiquement élastique linéaire.

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dagger_{11} \\ \dagger_{22} \\ \dagger_{33} \\ \dagger_{23} \\ \dagger_{13} \\ \dagger_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dagger_1 \\ \dagger_2 \\ \dagger_3 \\ \dagger_4 \\ \dagger_5 \\ \dagger_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & \dagger_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Ou sous forme condensée :

$$\dagger = C.V$$

: étant la matrice de contrainte.

: étant la matrice de déformation.

C : étant la matrice de rigidité.

Cette relation peut être écrite sous la forme inverse suivante :  $v = S.\dagger$

$S = C^{-1}$  : étant la matrice de souplesse.

La loi de Hooke généralisée introduit la matrice de rigidité C symétrique  $C_{ij}=C_{ji}$ . Cette hypothèse conduit à décrire la loi de comportement d'un matériau avec constante de rigidité dans le cas le plus général d'anisotropie, dans le cas de l'orthotropie, se présentent trois (03)

plans de symétrie perpendiculaire. Neuf (9) constantes d'élasticité sont à définir trois (3) modules de Young, trois (3) coefficients de poisson et trois (03) modules de Cisaillement. La matrice de rigidité d'un matériau orthotrope dans les directions principales est donnée par :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Dans le cas de l'isotropie transverse (unidirectionnel). 5 constantes seulement sont nécessaires. Enfin rappelons qu'un matériau isotrope se caractérise par deux constantes (Un module de Young et un module de cisaillement).

### I.6.2. Relations d'élasticité dans un système d'axe quelconque

La matrice de rigidité d'une couche rapportée à ses axes principaux est donnée par (1.2). Dans un système d'axe quelconque la relation d'élasticité est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dagger_1 \\ \dagger_2 \\ \dagger_3 \\ \dagger_4 \\ \dagger_5 \\ \dagger_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{62} \\ C_{13} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{63} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & \dagger_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Remarque :

- La matrice de rigidité [C] est obtenue en appliquant à la matrice de rigidité exprimée dans la base principale des relations de changement de base.
- Les coefficients de rigidité  $C_{ij}$  sont déterminés en fonction de modules de l'ingénieur par des essais mécaniques simples.

### 1.6.3. Dynamique des rotors en matériaux composites :

L'intérêt des composites pour des applications au rotor dynamique a été démontré à la fois numériquement et expérimentalement, accompagné par le développement de beaucoup de nouveaux matériaux composites avancés. Les arbres composites cylindriques ont également été mis au point par des chercheurs.

Kim et Bert (Kim & Bert, 1993) utilisaient meilleure théorie pour déterminer les vitesses critiques d'un arbre rotatif contenant des couches stratifiées en matériaux composites, l'arbre a été modélisé comme une poutre de Bresse-Timoshenko [28]. En 1995 Bert et Kim examinaient l'instabilité dynamique d'un arbre de transmission en matériaux composites sous l'effet de couplage flexion torsion et les forces de Coriolis [29]. M Y. Chang et al [30] ont publié une étude sur le comportement vibratoire d'un arbre tournant en matériaux composites. Dans leur modèle la déformation transversale de cisaillement, l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et l'effet de couplage dû à la stratification des couches du composite sont incorporés. Le modèle est basé sur la théorie des poutres et la déformation de cisaillement du premier ordre (Théorie des poutres de Timoshenko).

M Y. Chang et al [31] ont édité un article sur l'analyse de vibration des arbres tournants en matériaux composites contenant des renforts aléatoirement orientés. La théorie de Signifier-Champ de Mori-Tanaka est adoptée pour expliquer l'interaction aux concentrations finies des renforts dans le matériau composite.

Des travaux récents supplémentaires sur les arbres en matériaux composites traitant les aspects théoriques et expérimentaux, ont été rapportés par Singh [32], Gupta et Singh [33] et par Singh et Gupta [34]. La formulation de la dynamique des rotors basée sur la théorie des poutres du module équivalent a été développée pour un rotor en matériaux composites avec un nombre de balourds, et supporté par des roulements. Une théorie des poutres de stratifié a été dérivée par Singh et Gupta [33] d'une théorie disponible des coques, avec un champ de déplacement de stratifié. Elle a permis de résoudre un problème général de la dynamique des rotors en matériaux composites. Les paramètres dynamiques de rotor conventionnel aussi bien que les vitesses critiques, fréquences naturelles, facteurs d'amortissement, déséquilibre de la réponse et seuil de stabilité ont été analysés en détail et les résultats des formulations basées sur les deux théories, à savoir, la théorie des poutres du module équivalent (EMBT) et la théorie des poutres de stratifiés (LBT) ont été comparés [34].

Les études de la dynamique des rotors expérimentales portées par Singh et Gupta [35-36] ont été entreprises sur deux arbres en carbone-époxyde avec des orientations des fibres

constantes ( $45^\circ$  et  $60^\circ$ ). L'équilibrage progressif a été effectué pour permettre à l'arbre de traverser la première vitesse critique. Le concept hiérarchique pour des fonctions forme de l'élément fini a été étudié pendant les 25 dernières années. Babuška et al [37] ont établi une base théorique pour des éléments-  $p$ , où l'élément est conservé sans changement et le degré du polynôme des fonctions de formes augmente; cependant, dans la version-  $h$  standard, de la méthode des éléments finis le maillage est raffiné pour réaliser la convergence et le degré du polynôme des fonctions de forme demeure sans changement. Des formes standard des fonctions de forme hiérarchiques ont été présentées dans la littérature; comme par exemple [38-39]. Meirovitch et Baruh [40] et Zhu [41] ont prouvé que la méthode des éléments finis hiérarchiques donne une meilleure exactitude par rapport à la version-  $h$  pour les problèmes de valeurs propres. Les fonctions de forme hiérarchiques employées par Bardell [42] sont basées sur des polynômes de Legendre orthogonaux intégrés; le calcul symbolique est employé pour calculer les matrices de la masse et de la rigidité des poutres et des plaques. Côté et Charron [43] donnent un choix des fonctions de forme de la version-  $p$  pour l'analyse vibratoire des plaques.



a) Tube en verre- époxyde b) Arbre de transmission en carbone- époxyde (domaine maritime) Figure I-6 : arbre en Matériaux composite. [44-45]

Les projets de la recherche sur l'analyse des vibrations continuent en appliquant la méthode des éléments finis hiérarchiques Meirovitch et Baruh [46] ont prouvé que cette méthode donne une meilleure exactitude pour déterminer les valeurs propres d'un arbre composite à section constante. Les études qui concernent la non-uniforme de rotation des structures composites, un travail disponible de Bauchau [47] sur des arbres creux dans lequel l'optimisation de l'épaisseur de paroi effilée est traitée à l'aide de Rayleigh. Un modèle mécanique été développé par w.Kim et al sur les arbres coniques en matériaux composites

qui tournent à une vitesse constante autour de son axe, qui ont utilisés la méthode générale de Galerkin .

Dans le présent travail, on adopte la théorie Timoshenko pour un arbre en matériau composite qui tourne à une vitesse constante autour de son axe. Les solutions spatiales sont obtenues en utilisant la méthode des éléments finis version P. Les résultats numériques sont présentés pour un arbre conique en acier et arbre conique creux en matériaux composite module graphite / époxy.

Le travail est consacré pour déterminer les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et les vitesses critiques.

# Chapitre II

*Dynamiques des rotors*

## II. 1. INTRODUCTION

Les machines tournantes sont le siège de phénomènes vibratoires particuliers liés aux sources d'excitation dues à l'effet de rotation, au couplage vibrations/mouvements de rotation/écoulements tournants, à la symétrie périodique ou quasi-périodique des structures, à l'amortissement interne et externe. Ce sont des systèmes mécaniques très complexes qui, du fait de leur forte sensibilité aux vibrations, imposent de lourdes contraintes de fiabilité et de sécurité qui nécessitent des modélisations complexes.

Une machine tournante est composée de trois types d'éléments de base :

L'arbre, les disques (rigides, flexibles) et les paliers. Chacun de ces éléments a une modélisation spécifique qui est ensuite intégrée dans la modélisation complète du rotor.

Les balourds sont des défauts de symétrie qui peuvent être d'origine mécanique (défaut de fabrication) ou thermique. Ils sont inévitables, et doivent être pris en compte dans la modélisation.

L'expression de l'énergie cinétique est nécessaire pour caractériser les disques, l'arbre et les balourds. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre dans le cas où les disques sont rigides.

## II. 2. Détermination des expressions d'énergie cinétique et potentielle des éléments constitutifs du système rotor

### II.2.1. Système des axes

Le système des axes utilisé est présenté dans la figure. II.1.

$u_x, u_y, \alpha_x, \alpha_y$  : représentent les déplacements et les rotations respectivement correspondant aux axes OX et OY.

On obtient les équations de mouvement en utilisant les deux étapes suivantes :

La détermination de l'expression de l'énergie cinétique  $E_C$ , de l'énergie de déformation  $E_D$  et du travail virtuel des forces extérieures pour les éléments qui composent le système.

L'application des équations de Lagrange sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (\text{II. 1})$$

Où :  $1 < i < n$ , avec  $n$  est le nombre de degrés de libertés du système,  $q_i$  est la coordonnée généralisée de l'ordre  $i$ , et  $F_{q_i}$  représente la force généralisée.

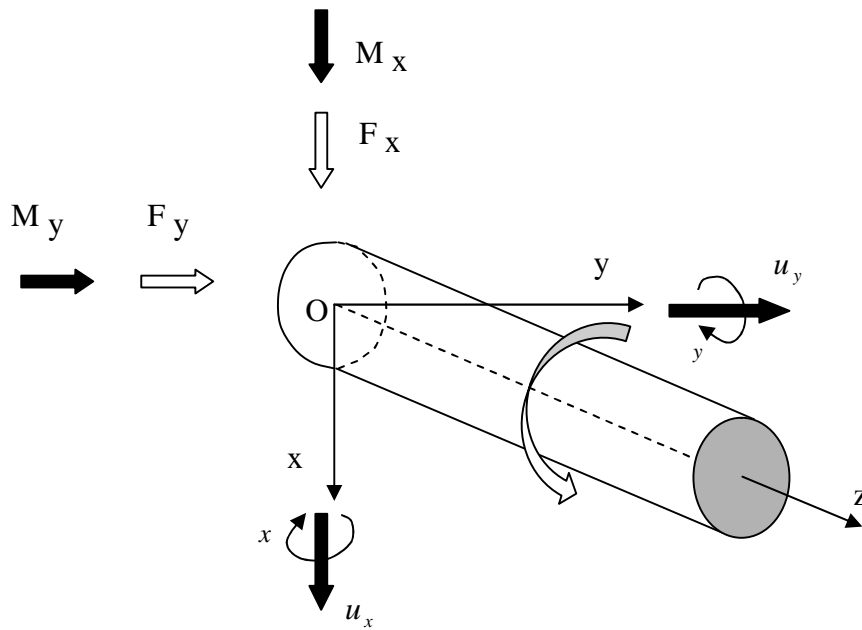


Figure. II. 1 : Système d'axes

Les équations de mouvement ainsi obtenues peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \{\ddot{\Gamma}\} + [Y] \{\dot{\Gamma}\} + [G] \{\Gamma\} = \{F\} \quad (\text{II. 2})$$

Où :  $[M]$ ,  $[Y]$  et  $[G]$  sont les matrices d'inertie, d'amortissement et d'effet gyroscopique d'ordre  $n \times n$  du système,  $\{\Gamma\}$  est le vecteur des déplacements qui correspondent à tous les  $n$  degrés de liberté du système, et  $\{F\}$  est le vecteur des forces appliquées dans les nœuds de la structure discrétisée.

## II. 2.2. Énergie cinétique du disque

Dans l'hypothèse d'un disque rigide, celui-ci sera caractérisé seulement par l'énergie cinétique  $E_c$ . Pour la détermination de celle-ci, on considère le système de repère fixe  $(O, X, Y, Z)$  comme système global. Le repère  $(o, x, y, z)$  est lié au disque, de manière que l'axe  $z$  coïncide avec la perpendiculaire rapportée sur le plan médian du disque par son centre géométrique, les deux axes  $x$  et  $y$  sont contenus dans son plan médian. Si l'arbre n'est pas

déformé, l'axe  $z$  coïncide avec l'axe  $Z$  et les axes  $(x, y)$  sont parallèles deux à deux avec les axes  $X, Y$  respectivement. Mais, si l'arbre est déformé dans une position quelconque, la nouvelle position du système d'axes lié au disque est obtenue par des rotations successives avec les angles  $\alpha_x, \alpha_y$  autour de chaque axe (Figure. II. 2).

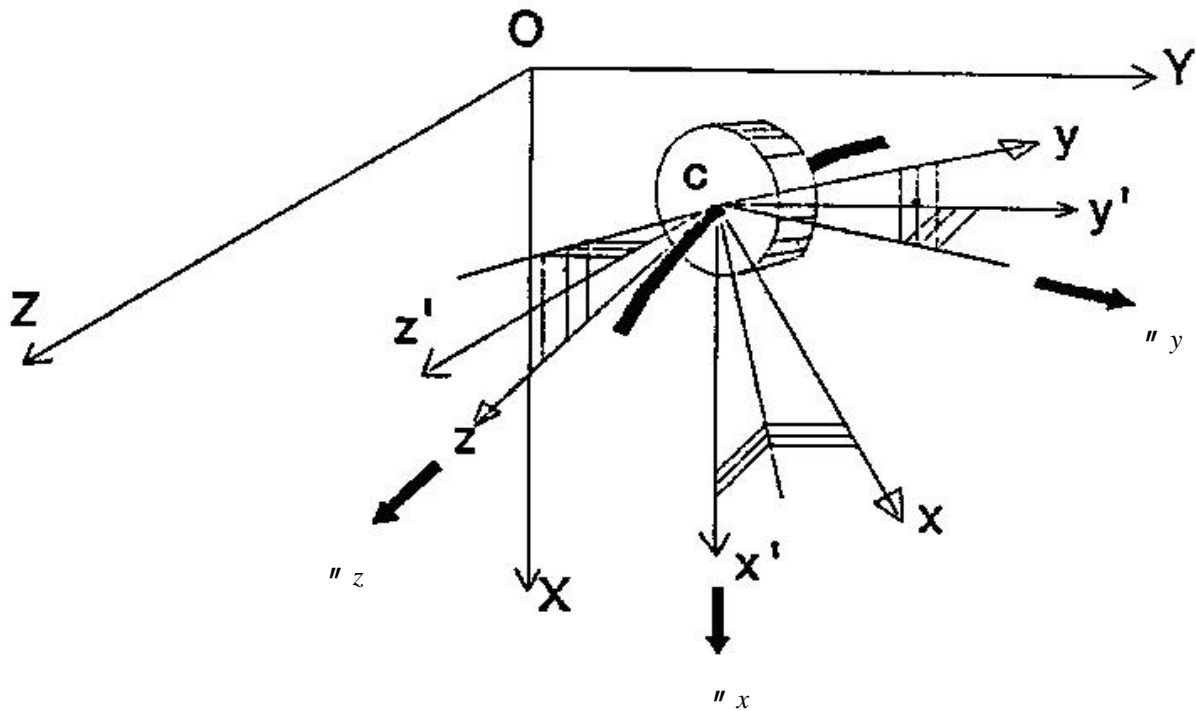


Figure. II. 2 : Position de système d'axes lié au disque.

Pour calculer l'énergie cinétique du disque par rapport à son centre, il faut tout d'abord connaître la vitesse angulaire  $\check{S}_c$  dans le système de référence  $(o,x,y,z)$ , lié au disque. Elle peut être écrite, en tenant compte des rotations effectuées de la manière suivante:

$$\check{S}_c = \begin{Bmatrix} \check{S}_x \\ \check{S}_y \\ \check{S}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \cos \alpha_y \cdot \cos \alpha_z + \alpha_y \sin \alpha_z \\ -\alpha_x \cos \alpha_y \cdot \sin \alpha_z + \alpha_y \cos \alpha_z \\ \alpha_x \sin \alpha_y + \Omega \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 3})$$

Soit  $(x, y)$  les coordonnées instantanées du centre de disque dans le système de repère fixe  $(O,X,Y,Z)$ , correspondant aux axes  $X$  et  $Y$ . On considère que le disque est fixé sur l'arbre et les déplacements axiaux sont nuls. On note que :  $I_{D_x}, I_{D_y}$  et  $I_{D_z}$  les moments d'inertie du disque par rapport aux trois axes. Si le disque est circulaire, il en résulte:

$$I_{Dx} = I_{Dy} = I_D \quad (\text{II. 4})$$

En notant  $M_D$  la masse du disque, son énergie cinétique est dans ce cas :

$$E_{CD} = \frac{1}{2} M_D \left( \dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) + \frac{1}{2} I_D \left( \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 \right) + \frac{1}{2} I_{Dz} \left( \Omega^2 + 2 \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \cdot \Omega \right) \quad (\text{II. 5})$$

Dans la relation (II. 5), les premiers quatre éléments représentent l'énergie cinétique du disque due aux déplacements et rotations sur les deux axes X et Y, le cinquième terme signifie l'énergie cinétique du disque due à la rotation autour de l'axe z, et le dernier terme, est l'effet gyroscopique (effet Coriolis).

### II. 2.3. Énergie cinétique de l'arbre

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque (équation II.5). Pour un élément de longueur  $L$ , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_{CA} = \frac{\dots A}{2} \int_0^l \left( \dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) dz + \frac{\dots I}{2} \int_0^l \left( \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 \right) dz + \dots I \cdot l \cdot \Omega^2 + 2 \dots I \cdot \Omega \int_0^l \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \cdot dz \quad (\text{II. 6})$$

Où :

$\dots$  : La densité de la masse de l'arbre,

$A$  : l'aire de la section transversale de l'arbre, considérée constante,

$I$  : le moment d'inertie de la section circulaire, annulaire, transversale de l'arbre par rapport au diamètre.

$l$  : la longueur de l'arbre.

La première intégrale de la relation (II. 6) constitue l'expression classique de l'énergie cinétique d'une barre soumise à la flexion. La deuxième intégrale correspond à l'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko), et la dernière intégrale correspond à l'effet gyroscopique de l'arbre.

En régime stationnaire, quand  $\Omega = \text{constante}$ , le terme  $\dots / l \Omega$  constant n'interviendra pas dans les équations du mouvement après l'application des équations de Lagrange.

## II. 2.4. Énergie potentielle due à la déflexion de l'arbre

On considère un arbre de section circulaire, constante sur toute la longueur. Soit C le centre géométrique de la section transversale de l'arbre, et P un point quelconque de la section (Figure. II. 3).

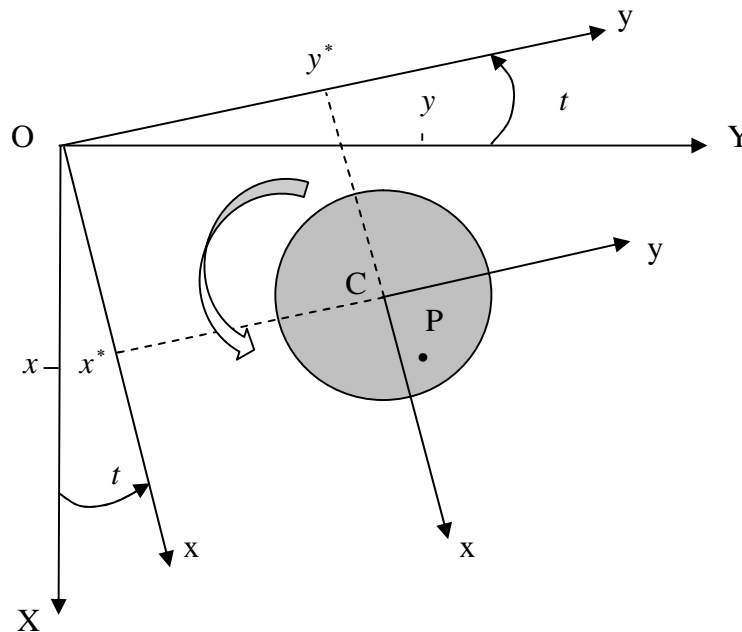


Figure. II. 3 : La déformation spécifique d'un point de la section circulaire de l'arbre.

Le repère  $xOy$  tourne à la même vitesse angulaire avec le repère  $xCy$  lié à l'arbre.

On note que :

$E$  : le module d'élasticité longitudinal de l'arbre;

$v$  : L'allongement spécifique;

$\dagger$  : La tension normale de la section transversale;

$x, y$ : les coordonnées du point P dans le repère XOY;

$x^*, y^*$  : Les coordonnées du point C dans le repère xOy ;

La déformation spécifique du point P le long de l'axe Z est :

$$v_P = v_l + v_{nl} \quad (\text{II. 7})$$

où le premier terme contient les termes linéaires et le deuxième termes non linéaires.

L'énergie spécifique de déformation de l'arbre en flexion est :

$$E_{DA} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\dagger^2}{E} \cdot dV \quad (\text{II. 8})$$

Tenant compte de la symétrie de la section transversale de l'arbre par rapport aux axes x et y et du fait que le système est considéré linéaire élastique :

$$\dagger = E \cdot v_p \quad (\text{II. 9})$$

Après avoir remplacé la relation (II. 7) et (II. 9) dans (II. 8) et en négligeant les termes qui représentent un petit infinitésimale du deuxième ordre, l'énergie spécifique de déformation devient :

$$E_{DA} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 x^*}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 y^*}{\partial z^2} \right)^2 \right] \cdot dz \quad (\text{II.10})$$

Si l'arbre est sollicité non seulement à la flexion mais aussi à la traction ou compression par une force  $F_a$ , l'énergie potentielle de déformation de l'arbre contient encore un élément. Si, de plus, l'on tient compte du fait que la somme des carrés des dérivées partielles, tant du premier que du deuxième ordre, constitue un invariant par rapport aux deux systèmes de repère, xOy, XOY, l'énergie spécifique de déformation à la flexion de l'arbre, qui prend en considération le terme qui correspond à la force axiale, mais elle néglige l'effet de force tranchant, il en résulte la forme:

$$E_{DA} = \frac{E \cdot I}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 x^*}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 y^*}{\partial z^2} \right)^2 \right] \cdot dz + \frac{F_a}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot dz \quad (\text{II. 11})$$

### II.2.5. Forces généralisées des paliers

Dans le fonctionnement des rotors à haute vitesse de rotation, les paliers à glissement sont supérieurs aux paliers à roulements, ceux-ci offre de grandes possibilités de chargement et réalise en même temps de petits frottements dans l'ensemble essieu-palier.

C'est pour cela que les paliers à glissement sont utilisés dans des machines dont les rotors ont de grandes vitesses de rotation, telles : des turbines, des pompes, des compresseurs, en leur accroissant la durée de vie et leur assurant un fonctionnement silencieux. Ces avantages sont attribués aux caractéristiques dynamiques du film de lubrifiant formé entre les deux surfaces, celle de l'essieu et du palier.

Dans les paliers, ils apparaissent des forces non-linéaires de raideur et d'amortissement visqueux, qui agissent sur l'essieu de l'arbre et connues par l'intermédiaire des huit coefficients dynamiques  $k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}, c_{xx}, c_{xy}, c_{yx}, c_{yy}$  (Figure. II. 4). Ces huit coefficients sont en fonction des caractéristiques géométriques du palier, du chargement sur le palier, due à la viscosité de l'huile et de la vitesse de rotation de l'essieu dans le palier. La négligence de leur variation en fonction de ces paramètres peut conduire à de grandes erreurs dans l'étude dynamique du système rotor-palier.

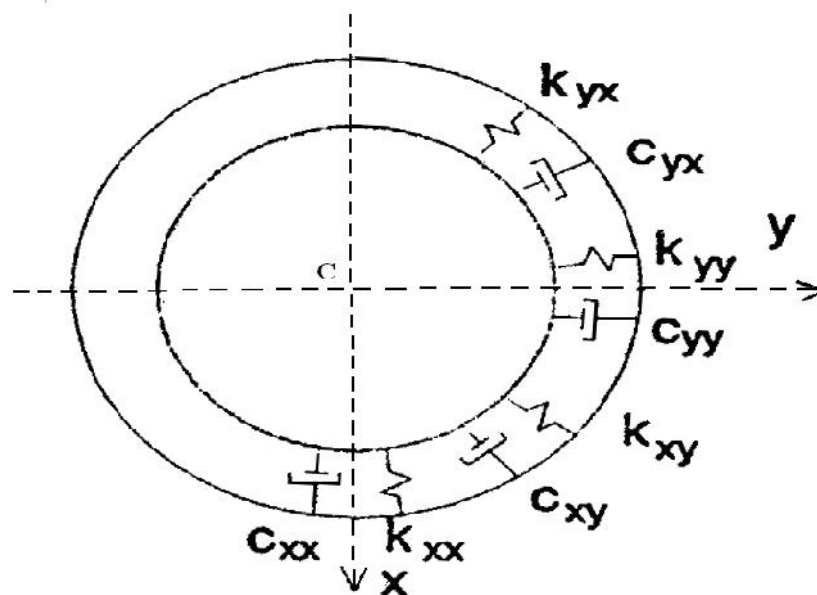


Figure. II. 4 : Disposition des coefficients dynamiques des paliers.

Le travail virtuel des forces qui agissent sur l'arbre est :

$$\begin{aligned} \partial W = & -k_{xx} x \cdot \partial x - k_{xy} y \cdot \partial x - k_{yy} y \cdot \partial y - k_{yx} x \cdot \partial y - c_{xx} \dot{x} \cdot \partial x \\ & - c_{xy} \dot{y} \cdot \partial x - c_{yy} \dot{y} \cdot \partial y - c_{yx} \dot{x} \cdot \partial y \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

De l'identification des membres droits des deux équations ci-dessus, on obtient les forces  $F_x$  et  $F_y$ , les composantes des forces généralisées, qui peuvent être écrites ainsi :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 13})$$

Dans l'équation (II. 13),  $x$  et  $y$  représentent les déplacements sur les directions X et Y du centre de l'essieu du palier, donc par rapport au repère fixe. L'expression des coordonnées du mouvement dans le repère qui tourne en même temps que l'arbre conduisait à l'apparition des termes qui sont explicitement en fonction du temps et donc, la solution des équations deviendrait extrêmement difficile. Enfin, les équations de mouvement pour le système rotor-palier seront écrites dans le système initial du repère XYZ, appelé aussi système global. Etant donné le fait que dans les paliers de glissement la direction de la force extérieure de chargement et la direction du mouvement du centre de l'essieu ne coïncident pas, dans certaines conditions, l'état d'équilibre de l'arbre peut devenir instable. Pendant la vibration de l'essieu dans le palier, dans le film de lubrifiant, ils apparaissent des pressions supplémentaires, qui modifient les forces dans le palier et donc le mouvement de rotor.

## II. 2.6. Énergie cinétique due au balourd

Le principal facteur de perturbation du système est constitué par le déséquilibre massique, celui-ci étant dû aux masses non-équilibrées, qui sont en mouvement de rotation.

Soit la masse  $m_n$ , la masse non-équilibrée qui se trouve à la distance  $e$  (excentricité) de centre géométrique de l'arbre (Figure. II. 5).

Pendant le mouvement de rotation, la masse reste tout le temps dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'arbre, les coordonnées dans le repère global sont :

$$\begin{pmatrix} x + e \cos \Omega t \\ y + e \sin \Omega t \\ z = \text{const} \end{pmatrix} \quad (\text{II. 14})$$

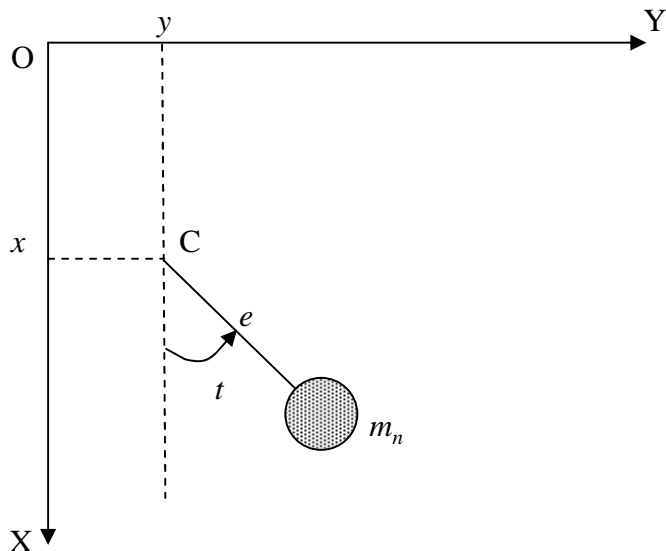


Figure. II. 5 : Le déséquilibre de la masse non-équilibrée par rapport au centre géométrique.

Les composantes de la vitesse de masse  $m_n$  dans le système de repère global sont obtenus par la dérivation par rapport au temps, de la relation (II. 14), il en résulte finalement l'expression de l'énergie cinétique  $E_{C_n}$  de la masse non-équilibrée  $m_n$ , ayant la forme :

$$E_{C_n} = \frac{m_n}{2} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\Omega e \sin \Omega t + 2\dot{y}\Omega e \cos \Omega t + \Omega^2 e^2 \right) \quad (\text{II. 15})$$

Les deux premiers termes entre les parenthèses de la relation (II.15) représentent l'énergie cinétique de la masse  $m_n$  placé au centre C de la section transversale de l'arbre et peut être négligeable, sa contribution à l'énergie cinétique totale de l'arbre étant insignifiante ( $m_n \ll$  la masse de l'arbre).

Le dernier terme  $\Omega^2 e^2$  est constant et donc, par l'application des équations de Lagrange, il n'interviendra pas dans les équations du mouvement, de sorte que l'énergie cinétique peut être considérée comme suit :

$$E_{C_n} = m_n \cdot \Omega \cdot e \cdot \left( \dot{y} \cos \Omega t - \dot{x} \sin \Omega t \right) \quad (\text{II. 16})$$

Les équations de Lagrange sur la relation (II. 16) donneront le vecteur de la force centrifuge.

## II. 3. Utilisation des équations de Lagrange

L'utilisation de la méthode des éléments finis cylindriques dans la dynamique des rotors consiste pratiquement, dans une première étape, à discrétiser l'arbre dans des éléments de type poutre à quatre degrés de liberté pour chaque nœud, et huit degrés de liberté à chaque élément.

### II.3.1. Disque

Dans l'opération de discrétisation du rotor, il faut obligatoirement placer un nœud là où il y a un disque sur l'arbre, le vecteur de déplacements nodaux étant :

$$\Gamma_n = \left\{ u_x \quad u_y \quad \theta_x \quad \theta_y \right\}^T \quad (\text{II. 17})$$

Là où :  $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$  sont respectivement les déplacements et les rotations autour des axes X et Y (Figure. II.1). Si on considère les coordonnées généralisées  $q_i$  comme les déplacements nodaux même que :

$$q_1 = u_x, \quad q_2 = u_y, \quad q_3 = \theta_x, \quad q_4 = \theta_y \quad (\text{II. 18})$$

Et on tient compte de l'expression de l'énergie cinétique du disque, la relation (II.5) et en utilisant les équations de Lagrange sous la forme (II. 1), on aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{CD}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{CD}}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ u_x \\ \dots \\ u_y \\ \dots \\ "x \\ \dots \\ "y \end{Bmatrix} + \Omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \\ 0 & 0 & -I_D & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ u_x \\ \dots \\ u_y \\ \dots \\ "x \\ \dots \\ "y \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 19})$$

Dans la relation ci-dessus, la première matrice sera notée avec  $[M_D]$ , en représentant la matrice classique d'inertie, et la deuxième avec  $[I_D]$ , en représentant la matrice d'effet gyroscopique.

### II. 3.2. Arbre

L'élément utilisé dans le modelage de l'arbre et du type poutre à deux nœuds est présenté dans (Figure. II. 6). Chaque nœud ayant quatre degrés de liberté, il en résulte que les matrices caractéristiques à cet élément seront de l'ordre huit. Entre les flèches et les rotations d'un nœud il y a les relations de liaison (II. 20).

$$"x = -\frac{\partial y}{\partial z}, \quad "y = \frac{\partial x}{\partial z} \quad (\text{II. 20})$$

Le vecteur des déplacements nodaux pour l'élément borné par les nœuds  $j$  et  $k$  est :

$$\{\Gamma\} = \{u_{xj}, u_{yj}, "xj, "yj, u_{xj+1}, u_{yj+1}, "xj+1, "yj+1\}^T. \quad (\text{II. 21})$$

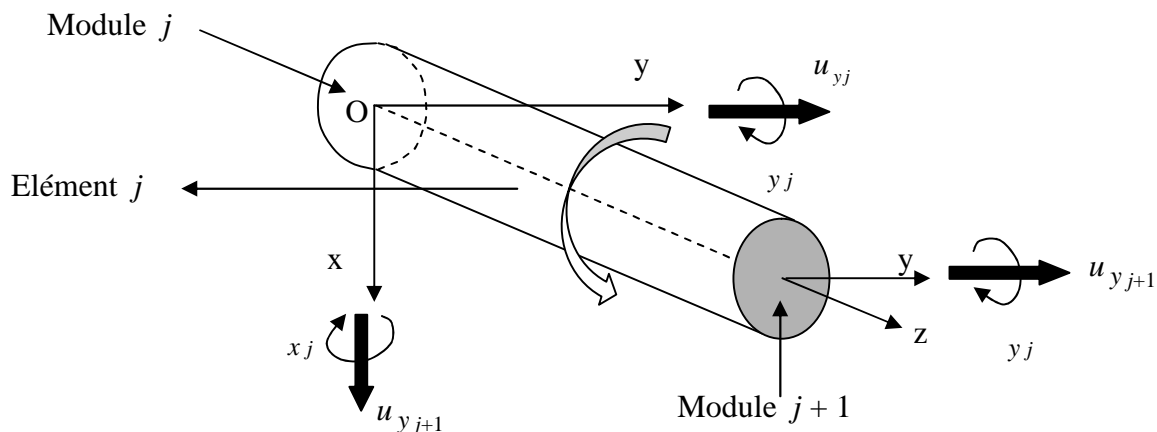


Figure. II. 6 : Modélisation d'un élément de poutre à deux nœuds.

On considère que l'arbre de section circulaire ou annulaire est constant par portion. Les déplacements sur les directions  $x$  et  $y$  d'une section comprise entre les nœuds  $j$  et  $j+1$ , notés de  $x(z)$  et  $y(z)$ , peuvent être exprimés en fonction des déformations (déplacements et rotations) des sections  $j$  et  $j+1$  (respectivement par le vecteur  $\{ \}$ ), à l'aide des fonctions d'interpolations du type Hermite, en résultant les fonctions de forme présentées dans la relation (II. 22).

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 + 3 \frac{z^2}{l^2} + 2 \frac{z^3}{l^3}, & N_2 &= z - 2 \frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \\
 N_3 &= 3 \frac{z^2}{l^2} - 2 \frac{z^3}{l^3}, & N_4 &= -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2}
 \end{aligned}
 \tag{II. 22}$$

En résultant :

$$\begin{Bmatrix} x(z) \\ y(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & N_3 & -N_4 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{II.23}$$

Le choix des fonctions d'interpolation du type Hermite n'est pas par hasard, parce que l'utilisation des autres fonctions d'interpolation, à plusieurs nœuds, ou même des fonctions

exactes, n'est pas justifiée, d'autant plus que dans la dynamique des machines à rotor, ce sont seulement les premiers modes propres de précession qui nous intéressent.

En dérivant en fonction du temps la relation (II. 23), les intégrales de la relation (II. 6) auront la forme :

$$I_1 = \frac{\dots \cdot A}{2} \int_0^l \left( \dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) \cdot dz = \frac{1}{2} \{u\}^T [M_1] \cdot \{u\} \quad (\text{II. 24})$$

$$I_2 = \frac{\dots \cdot I}{2} \int_0^l \left( \ddot{u}_x^2 + \ddot{u}_y^2 \right) \cdot dz = \frac{1}{2} \{u\}^T [M_2] \cdot \{u\} \quad (\text{II. 25})$$

$$I_3 = 2 \cdot \dots \cdot I \Omega \int_0^l \ddot{u}_x \cdot \ddot{u}_y \cdot dz = \Omega \cdot \{\Gamma_{,x}\}^T [M_3] \cdot \{\Gamma_{,y}\} \quad (\text{II. 26})$$

Où :

$$\{\Gamma_{,x}\}^T = \left\{ 0 \quad \dot{u}_{y_j} \quad \ddot{u}_{x_j} \quad 0 \quad 0 \quad \dot{u}_{y_{j+1}} \quad \ddot{u}_{x_{j+1}} \quad 0 \right\} \quad (\text{II. 27})$$

$$\{\Gamma_{,y}\} = \left\{ u_{x_j} \quad 0 \quad 0 \quad \ddot{u}_{y_j} \quad u_{x_{j+1}} \quad 0 \quad 0 \quad \ddot{u}_{y_{j+1}} \right\}^T$$

Donc, la relation (II. 6) devient :

$$E_{CA} = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \cdot I \cdot l \cdot \Omega^2 \quad (\text{II. 28})$$

A la suite de l'utilisation des équations de Lagrange, le dernier terme de l'équation (II.28) disparaît, en obtenant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{CA}}{\partial \dot{u}} \right) - \left( \frac{\partial E_{CA}}{\partial u} \right) = ([M] + [M_A]) \cdot \{\Gamma\} - [G_A] \cdot \{\Gamma\} \quad (\text{II. 29})$$

Où :

$$[M] = \frac{\dots \cdot A \cdot l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22l & 54 & 0 & 0 & -13l \\ 156 & -22l & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 0 \\ & 4l^2 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & \\ & & 4l^2 & 13l & 0 & 0 & 0 & -3l^2 \\ & & & 156 & 0 & 0 & 0 & -22l \\ & & & & 156 & 22l & 0 & \\ & & & & & 4l^2 & 0 & \\ \text{sym} & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 30})$$

$[M]$  représente la matrice classique d'inertie.

$$[M_A] = \frac{\dots \cdot I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3l & -36 & 0 & 0 & 3l \\ 36 & -3l & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 & \\ & 4l^2 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & \\ & & 4l^2 & -3l & 0 & 0 & 0 & -l^2 \\ & & & 36 & 0 & 0 & -3l & \\ & & & & 36 & 3l & 0 & \\ & & & & & 4l^2 & 0 & \\ \text{sym} & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 31})$$

$[M_A]$  : est la matrice de l'influence de l'effet secondaire de l'inertie à la rotation de l'arbre en mouvement avec la vitesse angulaire  $\Omega = \text{const.}$

La matrice  $[G_A]$  est axisymétrique et représente l'effet gyroscopique de l'arbre.

$$[G_A] = \frac{\dots \cdot I \cdot \Omega}{15l} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 36 & 3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3l & -36 & 0 & 0 & 3l \\ -3l & 0 & 0 & -4l^2 & 3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & 0 & 0 & -3l \\ -3l & 0 & 0 & l^2 & 3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 32})$$

En remplaçant (II. 32) dans la relation (II. 11), qui représente l'énergie potentielle d'un tronçon d'arbre de longueur  $l$ , et en effectuant les intégrales, on obtient :

$$E_{PA} = \frac{1}{2} \{\Gamma\}^T [K] \cdot \{\Gamma\} + \frac{1}{2} \{\Gamma\}^T [K_F] \cdot \{\Gamma\} \quad (\text{II. 33})$$

Avec  $[K]$  qui représente la matrice de rigidité, et  $[K_F]$  la matrice de rigidité due à la force axiale représentée dans la relation (II. 36). En notant que:

$$\Phi = \frac{12 \cdot E \cdot I \cdot t}{J \cdot A \cdot l^2} \quad (\text{II.34})$$

Où :

$J$  est le module d'élasticité transversal de l'arbre, et  $t = 1,33$  pour une section circulaire,  $t$  représente le facteur de cisaillement.

La matrice  $[K]$  peut être complétée avec l'effet tranchant de la force, en résultant :

$$[K] = \frac{E \cdot I}{(1 + \Phi) l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ & & (4 + \Phi)l^2 & 0 & 0 & 6l & (2 - \Phi)l^2 & 0 \\ & & & (4 + \Phi)l^2 & -6l & 0 & 0 & (2 - \Phi)l^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & -6l \\ & & & & & 12 & 6l & 0 \\ & & & & & & (4 + \Phi)l^2 & 0 \\ & & & & & & & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 35})$$

*sym*

Si dans la matrice  $[K]$  on considère  $\Phi = 0$ , on obtient la matrice de rigidité d'une barre sollicitée au courbement, où on a négligé l'effet tranchant de la force.

La matrice de rigidité qui tient compte des tentions initiales est :

$$[K_F] = \frac{F_a}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3l & -36 & 0 & 0 & 3l \\ & 36 & -3l & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 \\ & & 4l^2 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 \\ & & & 4l^2 & -3l & 0 & 0 & -l^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & -3l \\ & & & & & 36 & 3l & 0 \\ & & & & & & 4l^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 36})$$

*sym*

### II. 3.3. Paliers

L'effet des forces élastiques et d'amortissement qui apparaissent dans les paliers et agissent sur l'essieu de l'arbre, est pris en considération par les deux matrices de l'équation (II. 36), l'équation obtenue directement de la relation (II. 14).

Dans la relation (II. 37), le vecteur des déplacements est celui qui correspond aux quatre degrés de liberté du nœud de la section où se trouve le palier respectif. Les deux matrices, de rigidité et d'amortissement, sont en général asymétriques ( $k_{xy}$   $k_{yx}$ ,  $c_{xy}$   $c_{yx}$ ), en fonction non seulement du type du palier, de la température de lubrifiant, mais aussi du tourillage d'arbre et la charge sur les paliers.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 37})$$

La relation (II. 37) peut être écrite aussi sous la forme:

$$\{F_L\} = -[K_L] \cdot \{\Gamma\} - [Y_L] \cdot \{\dot{\Gamma}\} \quad (\text{II. 38})$$

Le vecteur  $[F_L]$  est une fonction des coordonnées généralisées et bien qu'il apparaisse au début dans le membre droit des équations de Lagrange et ensuite il est passé dans le membre

gauche des équations de mouvement. Dans ce qui suit, on a négligé l'effet de la carcasse et du support des paliers, considérés rigides et fixes.

### II. 3.4. Masses non équilibrées

L'énergie cinétique d'une masse non équilibrée en mouvement de rotation a été exprimée dans la relation (II. 17). En appliquant l'équation de Lagrange à cette relation, on obtient:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{Cn}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{Cn}}{\partial q_i} = -m_n \cdot e \cdot \Omega^2 (\cos \Omega t \quad \sin \Omega t \quad 0 \quad 0)^T = -f_1(t) \quad (\text{II. 39})$$

Où  $f_1(t)$  représente le vecteur de la force centrifuge de l'inertie, et  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) représente les déplacements qui correspondent aux quatre degrés de liberté dans la section où se trouve la masse non équilibrée  $m_n$  la relation (II. 19). À la suite de l'opération d'équilibrage des rotors de haute complexité, le déséquilibre résiduel ne peut plus être modélisé par une seule masse non équilibrée. Dans cette situation, on choisit plusieurs sections dans lesquelles les masses non équilibrées ont des valeurs et occupent des positions déphasées. Soit deux sections consécutives  $j$  et  $k$  (Figure. II. 7), dans lesquelles il y a les masses non équilibrées  $m_j$  et  $m_k$ . Les excentricités  $e_j$  et  $e_k$  forment les angles  $\alpha_{xj}$  et  $\alpha_{xk}$  avec l'axe  $x$ . Pour ces deux sections, le membre droit de la relation (II. 39) devient la relation (II. 40).

Dans la majorité des cas, les efforts de déséquilibre apparaissent pendant le fonctionnement (par exemple, la perte d'une palette) dans les sections où les disques sont montés sur l'arbre.

Comme on le voit dans la relation (II. 39), l'application des équations de Lagrange a conduit à l'apparition d'un terme indépendant des coordonnées généralisées,  $-f_1(t)$  est un terme qui passe dans le membre droit des équations de mouvement, en changeant son signe ce terme constitue le vecteur des forces perturbatrices grâce au balourd.

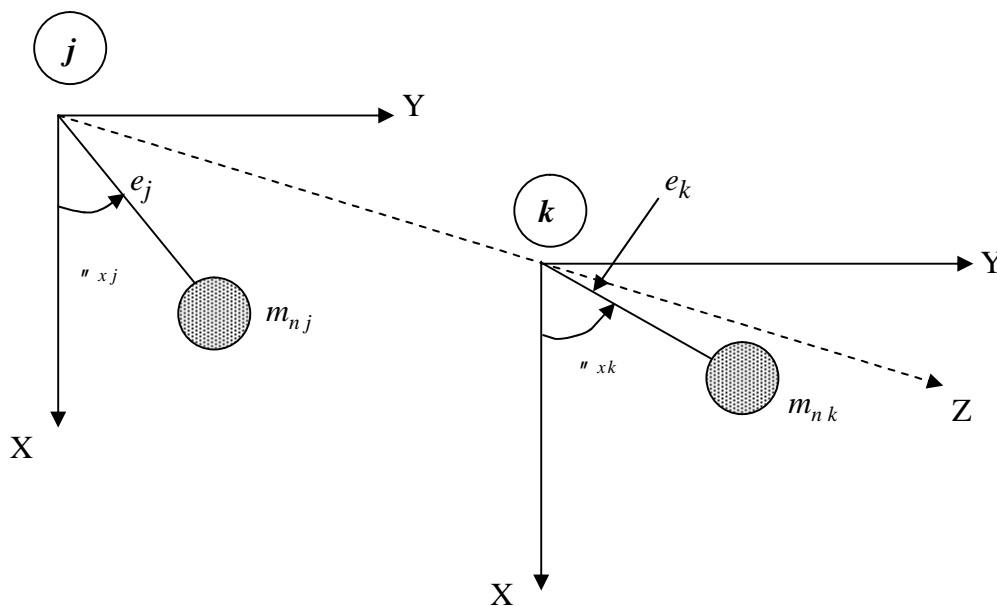


Figure. II. 7 : Déphasage des angles de rotations pour les masses non équilibrées.

$$f_1(t) = \Omega^2 \left\{ \begin{array}{l} m_{nj} e_j \cos(\Omega t + \nu_{xj}) \\ m_{nj} e_j \sin(\Omega t + \nu_{xj}) \\ 0 \\ 0 \\ m_{nk} e_k \cos(\Omega t + \nu_{xk}) \\ m_{nk} e_k \sin(\Omega t + \nu_{xk}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{l} m_{nj} e_j \cos(\Omega t + \nu_{xj}) \\ m_{nj} e_j \sin(\Omega t + \nu_{xj}) \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right\} \text{Nœud } j \\ \left. \vphantom{\begin{array}{l} m_{nk} e_k \cos(\Omega t + \nu_{xk}) \\ m_{nk} e_k \sin(\Omega t + \nu_{xk}) \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right\} \text{Nœud } k \end{array} \quad (\text{II. 40})$$

En cas des disques montés clavetés sur l'arbre, sauf le vecteur  $f_1(t)$ , il apparaît aussi le vecteur  $f_2(t)$  :

$$f_2(t) = \Omega^2 \left\{ 0 \quad 0 \quad x^* (I_p - I) \cos \Omega t \quad x^* (I_p - I) \sin \Omega t \right\}^T \quad (\text{II. 41})$$

Là où  $\alpha^*$  représente l'angle entre l'inclinaison de l'axe de l'arbre et l'inclinaison de l'axe de rotation du disque, et il peut apparaître suite à une erreur de montage, ou pendant le fonctionnement. Cet effet n'a pas été pris en considération par la suite.

Si on note que  $f_3(t)$  le vecteur de forces d'une autre nature que  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ , par exemple, les forces fixes ou qui décrivent des cercles dans l'espace, synchrones ou asynchrones, etc., qui excitent le système dans une ou plusieurs sections. Et alors  $F(t)$ , qui représente le vecteur de forces excitatrices et il constitue le membre droit des équations de mouvement:

$$F(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \quad (\text{II. 42})$$

### II.3.5. Équations de mouvement

Après la discrétisation de la structure et le choix d'une valeur du touraillage de l'arbre, et après avoir calculé les forces de charge statique de chaque palier, on établit les coefficients dynamiques de chaque palier et on construit les matrices globales d'inertie  $[M]$ , d'amortissement  $[Y]$ , et de rigidité  $[K]$ , par la totalisation des matrices élémentaires correspondantes. La totalisation des matrices élémentaires se fait en additionnant les termes qui correspondent à chaque degré de liberté, séparément. Il en résulte les équations de mouvement, écrites de manière matricielle, ayant la forme:

$$[M] \cdot \{\Gamma\} + [Y] \cdot \{\Gamma\} + [K] \cdot \{\Gamma\} = \{F(t)\} \quad (\text{II. 43})$$

Dans l'équation ci-dessus les trois matrices globales ont été obtenues ainsi :

$$[M] = \sum_{i=1}^{ND} [M_D]_i + \sum_{j=1}^{NE} ([M] + [M_A])_j \quad (\text{II. 44})$$

$$[Y] = \sum_{i=1}^{ND} [Y_D]_i + \sum_{j=1}^{NE} [Y_A]_j + \sum_{k=1}^{NL} [Y_L]_k \quad (\text{II. 45})$$

$$[\mathbf{K}] = \sum_{j=1}^{NE} ([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_F])_j + \sum_{k=1}^{NL} [\mathbf{K}_L]_k \quad (\text{II. 46})$$

Dans lesquelles  $[M_D]$ ,  $[M]$  et  $[M_A]$  sont les matrices définies dans les relations (II. 20), (II. 30), et (II. 31);  $[y_D]$ ,  $[y_A]$ ,  $[y_L]$  dans les relations (II. 20), (II. 32) et (II. 38), et  $[K]$ ,  $[K_F]$  et  $[K_L]$  dans les relations (II. 35), (II.36) et (II. 38) ;  $ND$ ,  $NE$  et  $NL$  : représentent respectivement le nombre de disques, d'éléments d'arbres et de paliers. Les matrices  $[M_D]$ ,  $[M]$  et  $[M_A]$ ,  $[K]$  et  $[K_F]$  sont symétriques et les matrices  $[y_D]$  et  $[y_A]$  sont antisymétriques, par contre les matrices  $[y_L]$  et  $[K_L]$  sont non symétriques. Par conséquent, la matrice  $[M]$  est symétrique, et les matrices  $[y]$  et  $[K]$  sont non symétriques.

Puisque la discrétisation du rotor dans des éléments est faite de manière que le nœud  $j+1$  d'un élément soit le même avec le nœud  $j$  de l'élément suivant, les trois matrices globales qui correspondent au rotor appuyé sur des paliers, sont des matrices de type bande, avec une longueur constante du bande égale à huit.

Mais si les matrices globales ont été obtenues à la suite de la discrétisation de toute la structure du rotor, palier, carcasse, fondation, elles agrandissent la longueur de la bande et bien sûr les dimensions, en arrivant à de grandes matrices, qui correspondent à des milliers de nœuds (Figure. II. 8).

Dans la matrice représentée dans (Figure. II. 8), les espaces non hachurés correspondent aux zones pleines de zéros. Même dans les matrices hachurées il y a de nombreux éléments égaux à zéro. Pour un tel système, auxquels l'ordre des matrices est très grand, on a la sous-structuration.

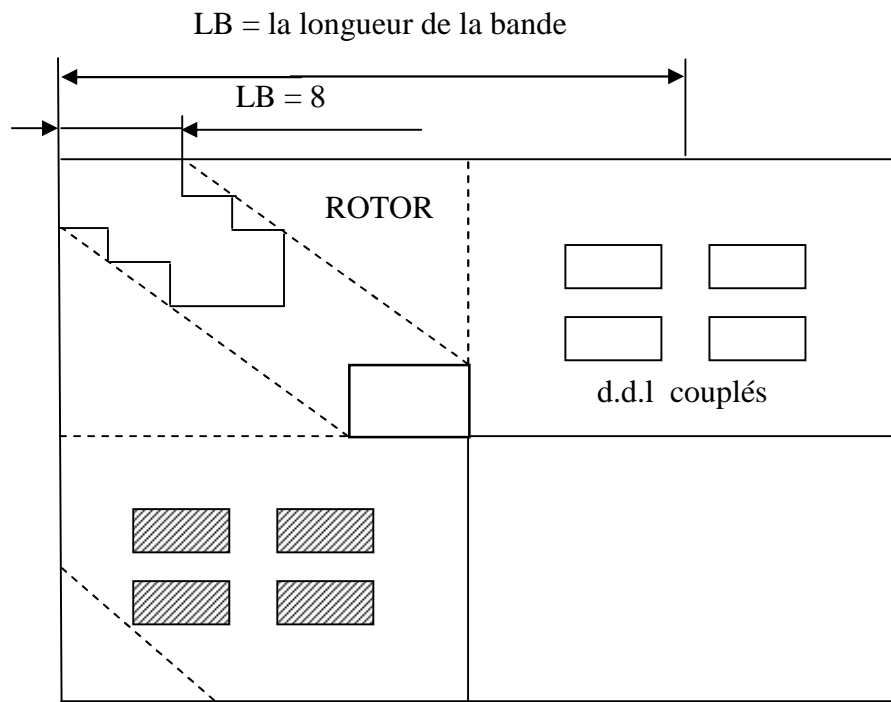


Figure. II. 8 : Configuration de la bande.

# Chapitre III

*Dynamique des rotors composites a arbre  
conique*

## INTRODUCTION

Grâce à leurs performances mécaniques alliées à leur légèreté, les matériaux composites peuvent remplacer avantageusement les matériaux conventionnels pour la fabrication des composants aéronautiques, aérospatiaux (avions de tourisme, réservoirs, tuyères, centrifugeuse, arbre de transmission, etc). Dans notre étude on utilise le modèle de Timoshenko considérant l'arbre tournant en matériaux composites comme poutre en appliquant la théorie des stratifiés qui consiste à étudier le matériau composite par couches successives comportant matrice et renfort.

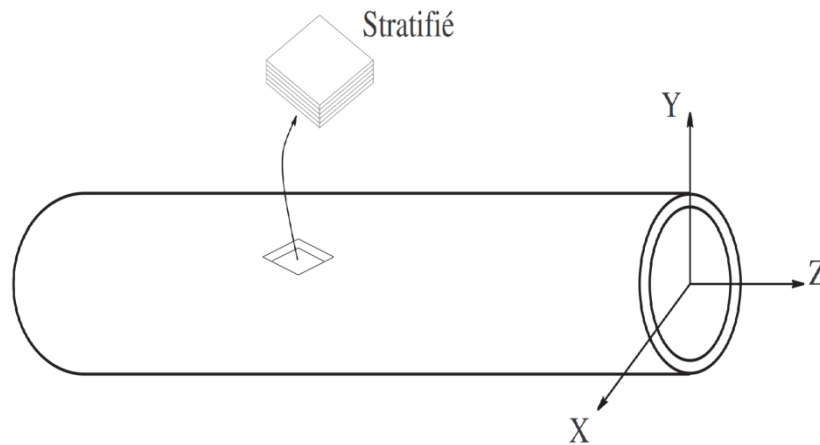


Figure III.1: Rotor en Composite.[48]

Pour cette approche, les caractéristiques mécaniques équivalentes d'un élément de poutre telles que la rigidité en flexion et en cisaillement sont évaluées à partir d'une formulation énergétique, qui considère le module d'Young, le module de cisaillement, la capacité d'amortissement spécifique et la distance à la fibre neutre de chaque pli.

### III.1. Equations cinématiques

Soit le champ de déplacement  $(U, V, W)$  dans la couche  $n$  de la section droite de l'élément poutre (**Figure III.2**) en fonction du temps est :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y, z, t) = U_z(z, t) + x\psi_y(z, t) - y\psi_x(z, t) \\ V(x, y, z, t) = U_x(z, t) - x\phi(z, t) \\ W(x, y, z, t) = U_y(z, t) + y\phi(z, t) \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_z(z, t) = U(z, 0, 0, t) \\ U_x(z, t) = V(z, 0, 0, t) \\ U_y(z, t) = W(z, 0, 0, t) \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

Par hypothèse les fonctions inconnues sont :

$$\{U_x(z, t), U_y(z, t), U_z(z, t), (\psi_x(z, t), \psi_y(z, t), \phi(z, t))\}$$

Où :

- $U_z(z, t)$  : Déplacement longitudinal.
- $U_x(z, t)$  : Déplacement transversal horizontal.
- $U_y(z, t)$  : Déplacement transversal vertical.
- $x \psi_y(z, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe x.
- $-y \psi_x(z, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe y.
- $\psi_y(z, t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe x.
- $\psi_x(z, t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe y.
- $-x \phi(z, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe x.
- $y \phi(z, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe y.
- $\phi(z, t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe z.

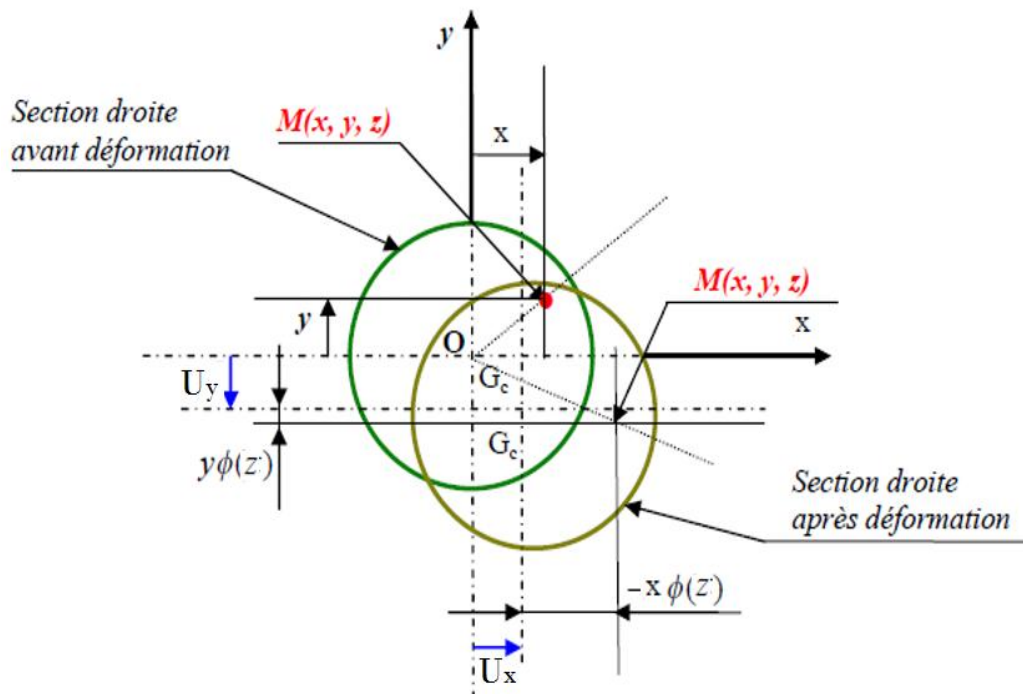


Figure III.2: Champ de déplacement dans un élément de structure en forme de poutre.[49]

### III.1.1. Relation déformation-déplacement

Dans le cas des petits déplacements, les relations déformation -déplacement sont les suivantes:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial z_j} + \frac{\partial U_j}{\partial z_i} \right) \quad (\text{III.3})$$

Avec:  $(i, j = 1, 2, 3)$ ;  $(z_1 = z, z_2 = y, z_3 = x)$ ;  $(U_1=U, U_2=V, U_3=W)$

La relation (III.3) sous forme développée est :

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U}{\partial z} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_{xx} = \frac{\partial W}{\partial x} \\ \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \right] \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

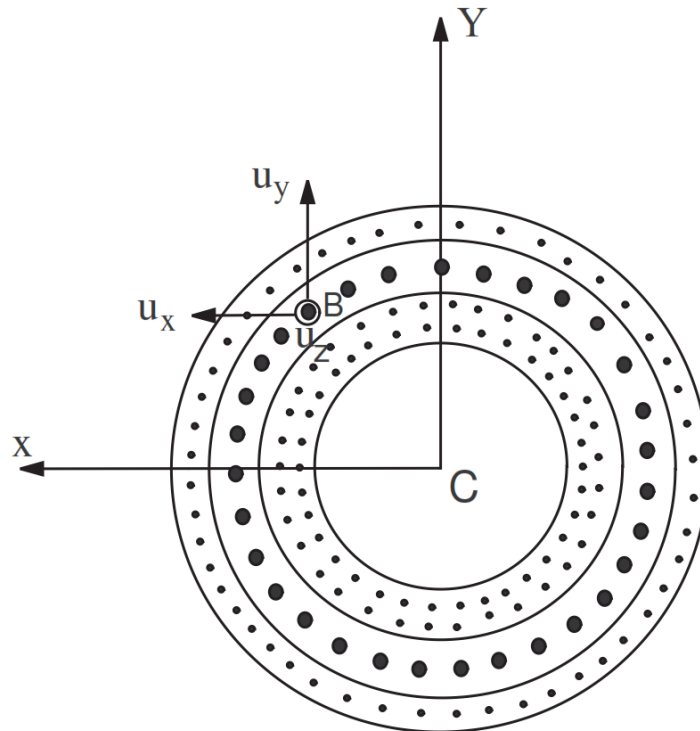


Figure III.3: Plan de la section. [48]

Le champ des déformations réduit du champ des déplacements s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + x \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - y \frac{\partial \beta_y}{\partial z} \\ \varepsilon_{yy} = 0 \\ \varepsilon_{xx} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( -\psi_x + \frac{\partial U_x}{\partial z} - x \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( -\psi_y + \frac{\partial U_y}{\partial z} + y \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.5})$$

On a :

$$\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$$

Le tenseur de déformation dans le système des coordonnées cylindriques  $(k, r, \theta)$  illustré dans la figure (III.3) [29]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{z\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{zr} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{array} \right\} \quad (\text{III.6})$$

La relation (III.6) sous forme développée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + r \sin \theta \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - r \cos \theta \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \psi_x \sin \theta + \psi_y \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial U_x}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left( \psi_y \sin \theta - \psi_x \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

On a :

$$\varepsilon_{zr} = \varepsilon_{rz} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z}$$

Donc le tenseur des déformations dans la couche  $n$  en un point  $M$  du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} \\ \varepsilon_{rz} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\theta z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

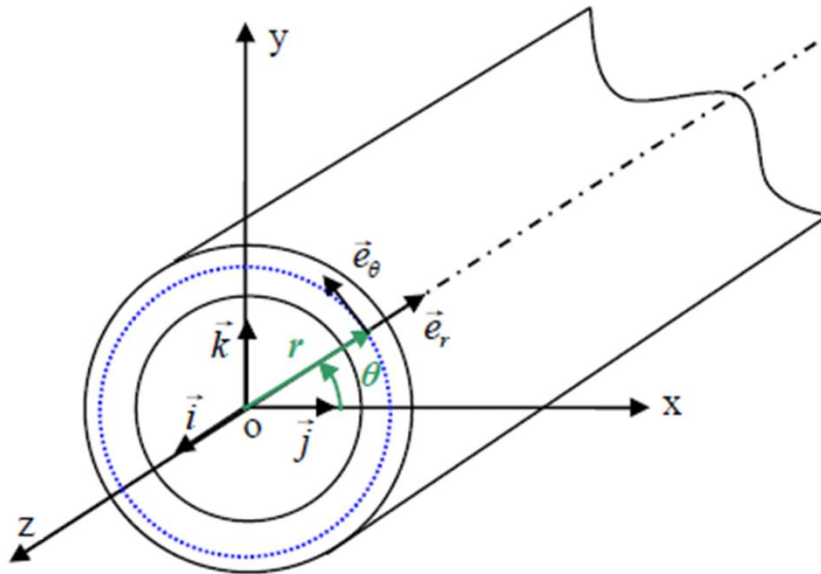


Figure III.4: Système de coordonnées cylindriques.

### III.1.2. Relation contraintes –déformations

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$[\sigma] = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{III.9})$$

Cette loi, généralement appelée la loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité  $[C]$ , symétrique. Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit en introduisant les constantes de rigidité  $C_{ij}$ , la loi de Hooke s'écrit suivant la forme matricielle dans la base principale (1, 2, 3) illustrée dans la figure (III.4) [24].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

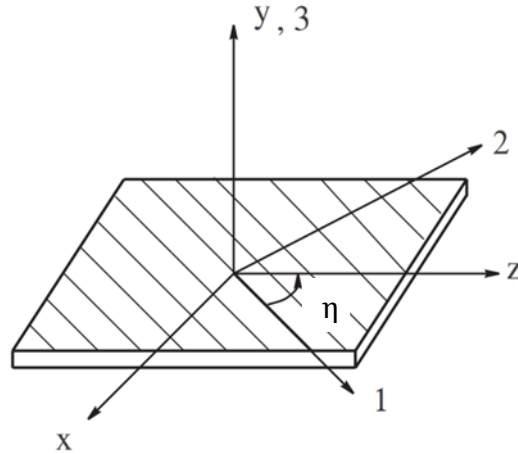


Figure III.5 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié [48].

Les contraintes dans la base de référence  $(\vec{k}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  montrée dans la figure 2.5 sont :

$$[\sigma] = [Q]\{\varepsilon\} = [R]^{-1}[C][R]^T\{\varepsilon\} \quad (\text{III.11})$$

Où  $[Q]$  est la matrice des coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié  $(\vec{k}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , et  $[R]$  c'est la matrice de changement de base des contraintes exprimée en fonction de l'angle  $\eta$  appelé l'orientation des fibres [29]:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2 \eta & \sin^2 \eta & 0 & 0 & 0 & 2\cos \eta \sin \eta \\ \sin^2 \eta & \cos^2 \eta & 0 & 0 & 0 & -2\cos \eta \sin \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ -2\cos \eta \sin \eta & 2\cos \eta \sin \eta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \eta - \sin^2 \eta \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Les contraintes dans le système des coordonnées cylindriques  $(z, r, \theta)$  dans la couche  $n$  illustrées dans la figure (III.6) s'expriment suivant la relation suivante [58]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

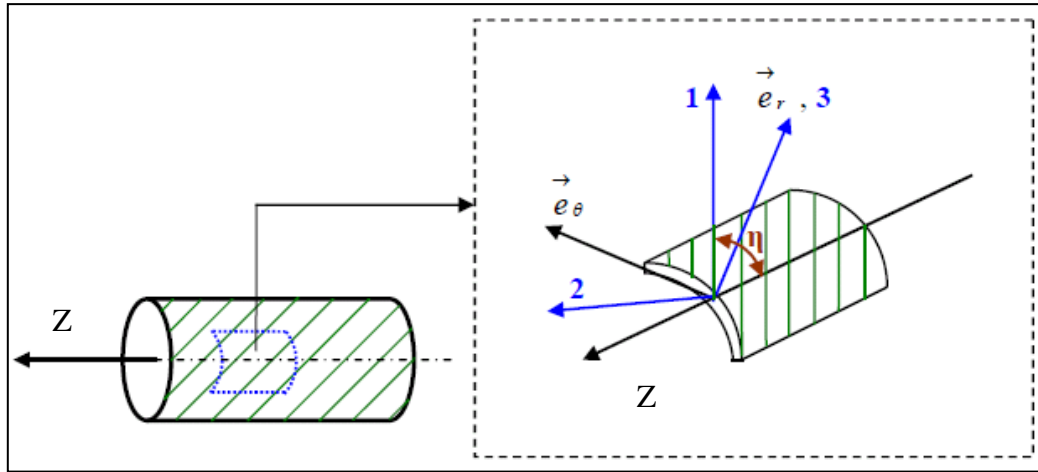


Figure III.6 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence ( $k, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ) du stratifié.[30]

Donc les contraintes exprimées dans la relation (III.13) sous forme simplifiée sont :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} \\ \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{16} \\ 0 & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{z\theta} \end{cases} \quad \text{(III.14)}$$

Et qu'on peut les écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = Q_{11}\varepsilon_{zz} + k_s Q_{16}\gamma_{z\theta} \\ \tau_{zr} = k_s Q_{55}\gamma_{zr} \\ \tau_{z\theta} = Q_{16}\varepsilon_{zz} + k_s Q_{66}\gamma_{z\theta} \end{cases} \quad \text{(III.15)}$$

Où  $k_s$  est le facteur de correction de cisaillement.

On a :  $\tau_{zr} = \tau_{rz}$  et  $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}$

Le tenseur des contraintes dans la couche  $n$  en un point  $M$  du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{zz} & \tau_{zr} & \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} & 0 & 0 \\ \tau_{\theta z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.16)}$$

Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux [24].

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\ C_{22} = \frac{E_T}{E_L} C_{11} \\ C_{12} = \nu_{LT} C_{22} \\ C_{66} = G_{LT} \\ C_{44} = G_{TT'} \\ C_{55} = G_{LT'} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Avec :

$$\begin{cases} (E_L ; E_T ; E_{T'}) = (E_1 ; E_2 ; E_3) \\ (\nu_{LT} ; \nu_{LT'} ; \nu_{TT'}) = (\nu_{12} ; \nu_{13} ; \nu_{23}) \\ (G_{LT} ; G_{LT'} ; G_{TT'}) = (G_{12} ; G_{13} ; G_{23}) \\ E_T = E_{T'} \\ \nu_{LT} = \nu_{LT'} \\ G_{LT} = G_{LT'} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Le plan transverse repéré par les directions 2 et 3 notées également  $T$  et  $T'$ , ces directions étant équivalentes.

$E_L ; \nu_{LT}$  : Module de Young et coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale.

$E_T ; \nu_{TL} ; \nu_{TT'}$  : Module de Young et coefficient de Poisson mesurés dans un essai de traction transversale.

$G_{LT} ; G_{TT'}$  : Modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transversal.

Les coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches sont exprimés en fonction de l'angle  $\eta$  fait par la direction principale 1 (ou L) avec la direction  $x$  de référence [24].

$$q_{11} = c_{11} \cdot cb^4 + 2 \cdot (c_{12} + 2 \cdot c_{66}) \cdot sb^2 \cdot cb^2 + c_{22} \cdot sb^4$$

$$q_{12} = (c_{11} + c_{22} - 4 \cdot c_{66}) \cdot sb^2 \cdot cb^2 + c_{12} \cdot (sb^4 + cb^4)$$

$$q_{13} = c_{13} \cdot cb^2 + c_{23} \cdot sb^2$$

$$q_{16} = (c_{11} - c_{12} - 2 \cdot c_{66}) \cdot sb \cdot cb^3 + (c_{12} - c_{22} + 2 \cdot c_{66}) \cdot sb^3 \cdot cb$$

$$q_{22} = c_{11} \cdot sb^4 + 2 \cdot (c_{12} + 2 \cdot c_{66}) \cdot sb^2 \cdot cb^2 + c_{22} \cdot cb^4$$

$$\begin{aligned}
q_{23} &= c_{13} * s_b^2 + c_{23} * c_b^2 & (III.19) \\
q_{26} &= (c_{11} - c_{12} - 2 * c_{66}) * s_b^3 * c_b + (c_{12} - c_{22} + 2 * c_{66}) * s_b * c_b^3 \\
q_{33} &= c_{33} \\
q_{36} &= (c_{13} - c_{23}) * s_b * c_b \\
q_{44} &= c_{44} * c_b^2 + c_{55} * s_b^2 \\
q_{45} &= (c_{55} - c_{44}) * s_b * c_b \\
q_{55} &= c_{44} * s_b^2 + c_{55} * c_b^2 \\
q_{66} &= (c_{11} + c_{22} - 2 * c_{12} - 2 * c_{66}) * s_b^2 * c_b^2 + c_{66} * (s_b^4 + c_b^4)
\end{aligned}$$

### III.2. Energie de déformation de l'arbre

La formule de l'énergie de déformation de l'arbre est :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int \{ \sigma_{ij} \}^T \{ \varepsilon_{ij} \} dV \quad (III.20)$$

En remplaçant (III.8) et (III.16) dans (III.20) on trouve :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int (\sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2 \tau_{zr} \varepsilon_{zr} + 2 \tau_{\theta z} \varepsilon_{\theta z}) dV \quad (III.21)$$

Qu'on peut l'écrire de la façon suivante :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_k} \begin{bmatrix} Q_{11} \varepsilon_{zz} + k_s Q_{16} \gamma_{z\theta} \\ k_s Q_{55} \gamma_{zr} \\ Q_{16} \varepsilon_{zz} + k_s Q_{66} \gamma_{z\theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial z} + r \sin \theta \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - r \cos \theta \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \\ (\psi_x \sin \theta + \psi_y \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial U_x}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + r \frac{\partial \phi}{\partial z}) \\ (\psi_y \sin \theta - \psi_x \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial U_x}{\partial z}) \end{bmatrix} r dr d\theta dz \quad (III.22)$$

L'équation (III.22) sous forme développée prend la forme:

$$\begin{aligned}
E_{da} &= \frac{1}{2} A_{11} \int_0^L \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} B_{11} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^L \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right)^2 dz \right] + \frac{1}{2} K_s B_{66} \int_0^L \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz \\
&\quad + \frac{1}{2} K_s A_{16} \left[ 2 \int_0^L \frac{\partial U_z}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \int_0^L \psi_x \frac{\partial \psi_y}{\partial z} dz - \int_0^L \psi_y \frac{\partial \psi_x}{\partial z} dz - \int_0^L \frac{\partial U_x}{\partial z} \frac{\partial \psi_y}{\partial z} dz - \int_0^L \frac{\partial U_y}{\partial z} \frac{\partial \psi_x}{\partial z} dz \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} K_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^L \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^L \psi_y^2 dz + \int_0^L \psi_x^2 dz + 2 \int_0^L \psi_y \frac{\partial U_y}{\partial z} dz - 2 \int_0^L \psi_x \frac{\partial U_x}{\partial z} dz \right] \quad (III.23)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} A_{11} = \pi \sum_{n=1}^k Q_{11} (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ A_{55} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k Q_{55} (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ A_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k Q_{66} (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ A_{16} = \frac{2\pi}{3} \sum_{n=1}^k Q_{16} (R_n^3 - R_{n-1}^3) \\ B_{11} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^k Q_{11} (R_n^4 - R_{n-1}^4) \\ B_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k Q_{66} (R_n^4 - R_{n-1}^4) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Où  $k$  est le nombre des couches et  $n$  c'est l'indice des couches.

Où  $R_0$  est le rayon intérieur de l'arbre,  $R_k$  est le rayon extérieur de l'arbre et  $e$  est l'épaisseur de l'arbre (Figure III.7),  $L$  est la longueur de l'arbre en matériaux composites.

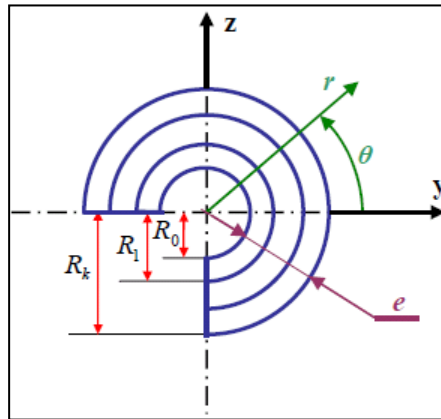


Figure III.7 : k-couches de l'arbre en matériaux composites.

### III.3. Energie cinétique de l'arbre

#### III.3.1. Systèmes des coordonnées

La figure (III.8) schématise le déplacement d'un point arbitraire P de la section droite de l'arbre flexible tournant (un seul élément poutre), cette nouvelle position de P est le résultat d'une déformation : longitudinale, de flexion et de torsion de l'arbre tournant en matériaux composites.

$x, y, z$  dénotent les coordonnées fixes et  $x_1, y_1, z_1$  dénotent les coordonnées mobiles fixées à l'arbre tournant et la section droite. Le centre  $G_c$  de la section droite coïncide avec le centre O avant déformation de l'arbre.

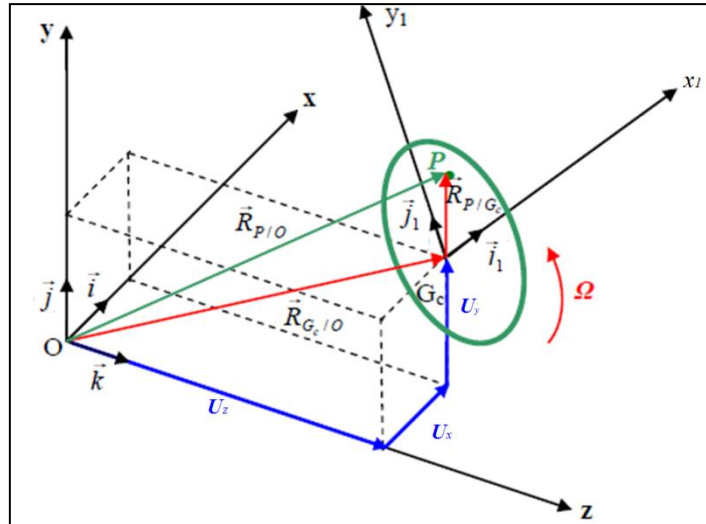


Figure III.8 : Déplacement d'un point arbitraire P de la section droite de l'arbre tournant.

- (O, x, y, z) : Repère fixe (RF).
- (Gc, x1, y1, z1) : Repère mobile (RM) lié à l'arbre en mouvement.
- $\Omega$  : Vitesse de rotation de l'arbre.
- $\vec{R}_{P/O}$  : Vecteur déplacement de P dans (RF).
- $\vec{R}_{P/Gc}$  : Vecteur déplacement de P dans (RM).
- $\vec{R}_{Gc/O}$  : Vecteur déplacement de Gc dans (RF).

**III.3.2. Position et vitesse d'un point de l'arbre**

Le vecteur de position est donné par:

$$\vec{R}_{P/O} = \vec{R}_{Gc/O} + \vec{R}_{P/Gc} = (U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}) + (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) \tag{III.25}$$

Qu'on peut écrire en fonction des rotations de la section droite montrée dans la figure (III.9) qui représentent les angles d'Euler de cette section, sont classés respectivement  $(\psi_y, \psi_x, \varphi)$ , avec  $\varphi = \phi + \Omega t$  :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{P/O} = & (U_z - y_1 \cos \varphi + y_1 \psi_y \sin \varphi + x_1 \psi_x \sin \varphi + x_1 \psi_y \cos \varphi) \vec{k} + \\ & (U_x - y_1 \cos \varphi + y_1 \psi_x \psi_y \sin \varphi - x_1 \sin \varphi + x_1 \psi_x \psi_y \cos \varphi) \vec{i} + (U_y + y_1 \sin \varphi + x_1 \cos \varphi) \vec{j} \end{aligned} \tag{III.26}$$

Le vecteur de vitesse est:  $\frac{d\vec{R}_{P/O}}{dt} = \vec{R}'_{P/O}$

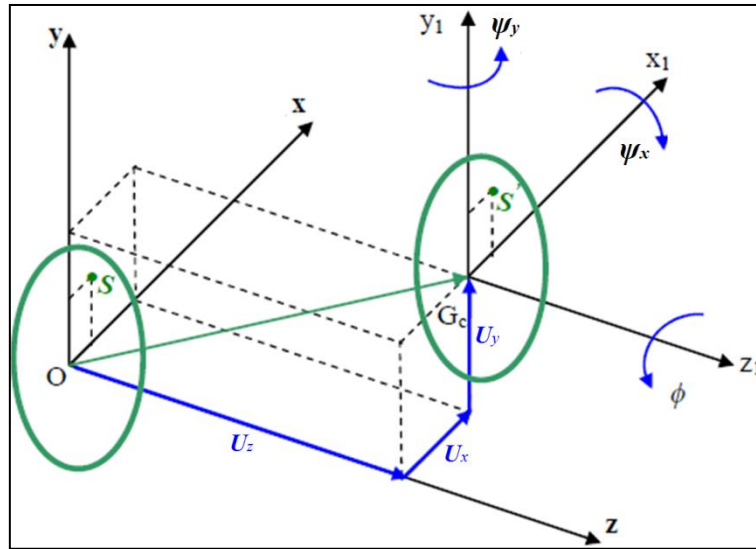


Figure III.9 : Déplacement de la section droite de l'arbre tournant.

**III.3.3. Expression de l'énergie cinétique de l'arbre.**

L'expression de l'énergie cinétique de l'arbre est donnée par l'équation suivante:

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int \rho \left( \vec{R}_{P/0} \cdot \vec{R}_{P/0} \right) dV \tag{III.27}$$

L'énergie cinétique sous forme développée est :

$$E_{ca} = \frac{1}{2} \int_0^L [I_m(\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) + I_d(\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) - 2\Omega I_p \psi_x \dot{\psi}_y + 2\Omega I_p \dot{\phi} + I_p \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p + \Omega^2 I_d(\psi_x^2 + \psi_y^2)] dz \tag{III.28}$$

Avec :

$$\begin{cases} I_m = \pi \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ I_d = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^4 - R_{n-1}^4) \\ I_p = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^4 - R_{n-1}^4) \end{cases} \tag{III.29}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de l'arbre en composite.

Le moment d'inertie massique  $I_m$ , Le moment d'inertie diamétral  $I_d$  et le moment d'inertie polaire  $I_p$  de l'arbre tournant par unité de longueur.

Le terme  $2\Omega I_p \psi_x \dot{\psi}_y$  représente l'effet gyroscopique, et  $I_d (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2)$  représente l'effet de l'inertie rotatoire. Le terme  $\Omega^2 I_d (\psi_x^2 + \psi_y^2)$  est très petit devant le  $\Omega^2 I_p$ , il sera négligé.

#### III.4. Energie cinétique du disque

Le disque fixé à l'arbre en matériaux composites est supposé rigide et en matériaux isotropes. Selon l'équation (III.28) et de façon semblable, l'énergie cinétique du disque s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{cD} = \frac{1}{2} [I_m (\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) + I_d^D (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) - 2\Omega I_p^D \psi_x \dot{\psi}_y + 2\Omega I_p^D \dot{\phi} + I_p^D \dot{\phi}^2 + I_p^D \Omega^2 + \Omega^2 I_p^D (\psi_x^2 + \psi_y^2)] \quad (\text{III.30})$$

Où  $I_m^D$  ;  $I_d^D$  ;  $I_p^D$  sont respectivement le moment d'inertie massique (la masse), Le moment d'inertie diamétral et le moment d'inertie polaire du disque. Le terme  $\Omega^2 I_p^D (\psi_x^2 + \psi_y^2)$  est très petit devant  $\Omega^2 I_p^D$ , il sera négligé par la suite de l'analyse.

L'équation de mouvement de vibration libre est donnée par Euler- Lagrange

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (\text{III.31})$$

Avec :

[M] : la matrice masse

[G] : la matrice gyroscopique

[K] : la matrice de rigidité

# Chapitre IV

*Dynamique des rotors composites a arbre  
conique*

**INTRODUCTION :**

Dans le présent travail, on adopte la théorie Timoshenko pour un arbre en matériau composite qui tourne à une vitesse constante autour de son axe. Les solutions spatiales sont obtenues en utilisant la méthode des éléments finis version P. Les résultats numériques sont présentés pour un arbre conique en acier et arbre conique creux en matériaux composite module graphite / époxy avec les conditions au limites encastrent libre et comparés avec ceux trouvés dans la littérature. Une autre étude en utilisant les fonctions de formes trigonométriques et polynomiales pour déterminer les vitesses critiques d'un arbre conique en matériaux composite module bore / époxy avec la condition aux limites bi-appuyée.

Le travail est réalisée dans le but de pour déterminer les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et les vitesses critiques et une comparaison entre un arbre conique et les résultats trouvés pour un système dynamique à un arbre cylindrique.

## IV.1 Equations cinématiques

$$[\sigma] = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{IV.1})$$

Cette loi, généralement appelée la loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité  $[C]$ , symétrique. Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope sous forme matricielle est donné par [24]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Les contraintes dans la base de référence  $(1', 2', 3')$  montrée dans la Figure. IV 1 sont :

$$[\sigma] = [Q]\{\varepsilon\} \quad (\text{IV.3})$$

Où  $[Q]$  est la matrice des coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié  $(1', 2', 3')$ , et calculer à l'aide de la matrice de changement de base des contraintes  $[T_\eta]$  exprimée en fonction de l'angle  $\eta$  appelé l'orientation des fibres [30]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

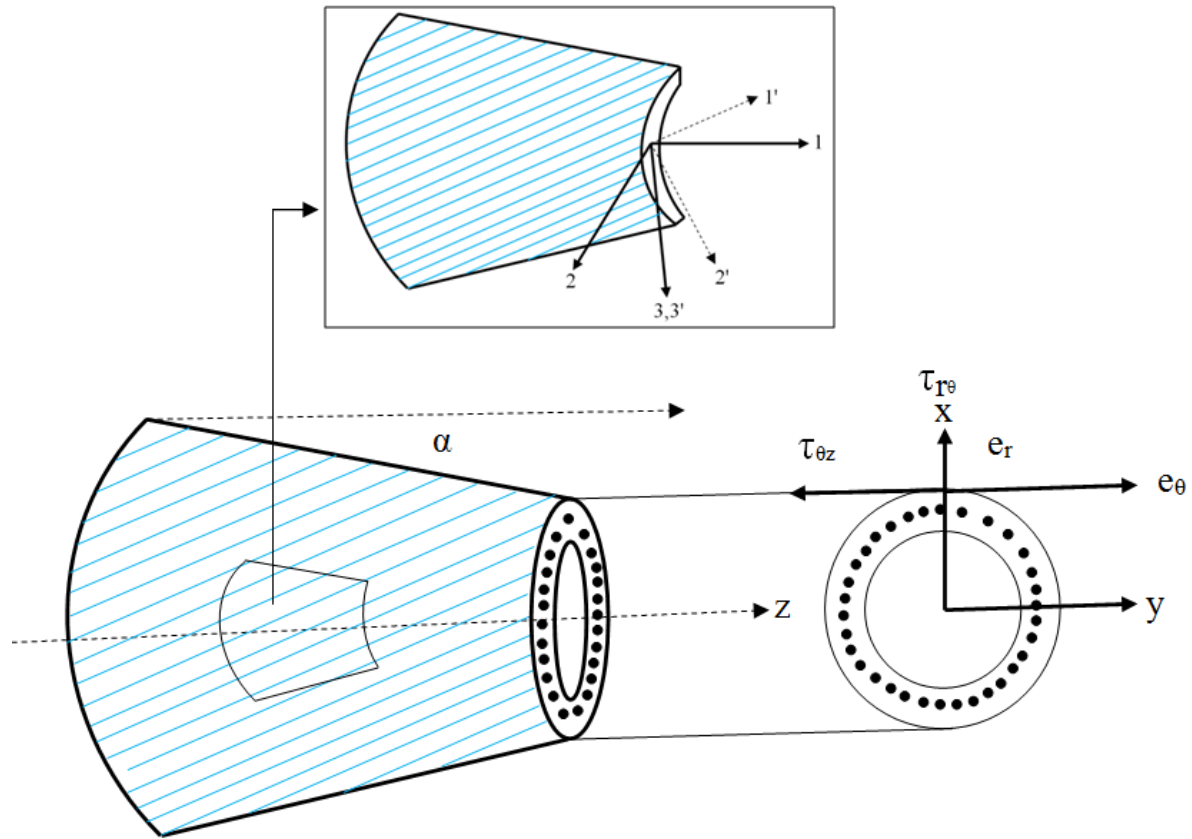


Figure. IV 1 : transfert suivant l'orientation des fibres et l'angle  $\alpha$  .

Le deuxième transfert se fait à l'aide de la matrice  $[R_d]$  exprimée en fonction de l'angle  $\alpha$  du conique dans le repère,  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$  Figure. IV 1 cela nous donnent la matrice des coefficients de rigidité  $[K_{ij}]$  exprimée en fonction des angles  $\eta$  et  $\alpha$

$$[\sigma] = [K_{ij}]\{\varepsilon\} \tag{IV.5}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} \tag{IV.6}$$

On remarque dans le cas d'un arbre conique composite stratifié KIM [59] :

$$\tau_{r\theta} = -\tau_{z\theta} \operatorname{tg}\alpha . \quad (\text{IV.7})$$

Le but de ce travail est de déterminer l'équation de mouvement à partir de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ainsi que la matrice de rigidité de système notre calcul est basé sur le développement de l'article de Kim [49]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{33} & f \cdot K'_{34} & f \cdot K'_{35} \\ K'_{43} & f \cdot K'_{44} & f \cdot K'_{45} \\ K'_{53} & f \cdot K'_{54} & f \cdot K'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \\ C'_{31} & C'_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_r \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

#### IV.2-1. Energies de déformation et cinétique de l'arbre :

Le modèle de Timoshenko est adopté pour les vibrations transversales. On suppose que la totalité de la section perpendiculaire à l'axe z reste plane après déformation.

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + r \sin \theta \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - r \cos \theta \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \\ \gamma_{z\theta} = \psi_x \sin \theta + \psi_y \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial U_x}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + r \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \gamma_{zr} = \psi_y \sin \theta - \psi_x \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial U_x}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

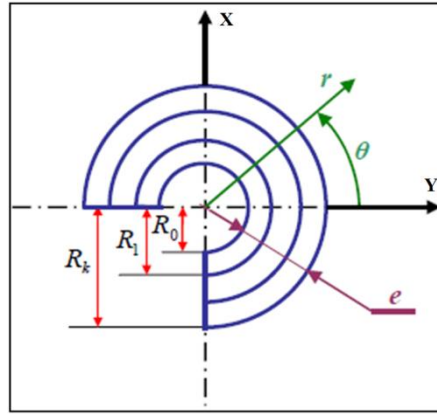


Figure. IV 2 : k –couches de l’arbre en matériaux composites.

La formule de l'énergie de déformation de l'arbre (un seul élément poutre) est :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int \{\sigma_{ij}\}^T \{\varepsilon_{ij}\} dV \quad (IV.10)$$

Qu'on peut l'écrire de la façon suivante :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_k} \begin{bmatrix} K'_{33} & f \cdot K'_{34} & f \cdot K'_{35} \\ K'_{43} & f \cdot K'_{44} & f \cdot K'_{45} \\ K'_{53} & f \cdot K'_{54} & f \cdot K'_{55} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial z} + r \sin \theta \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - r \cos \theta \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \\ (\psi_x \sin \theta + \psi_y \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial U_x}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + r \frac{\partial \phi}{\partial z}) \\ (\psi_y \sin \theta - \psi_x \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial U_y}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial U_x}{\partial z}) \end{bmatrix} r dr d\theta dz \quad (IV.11)$$

L'équation (IV.11) sous forme développée prend la forme:

$$\begin{aligned}
E_{da} = & \frac{1}{2} \int_0^L A_{11} \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \left[ \int_0^L B_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^L B_{11} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right)^2 dz \right] \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L f \cdot B_{22} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \left[ 2 \int_0^L (1+f) B_{12} \frac{\partial U_z}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right. \\
& + \int_0^L (1+f) B_{12} \psi_x \frac{\partial \psi_y}{\partial z} dz - \int_0^L (1+f) B_{12} \psi_y \frac{\partial \psi_x}{\partial z} dz \\
& \left. - \int_0^L (1+f) B_{12} \frac{\partial U_x}{\partial z} \frac{\partial \psi_y}{\partial z} dz - \int_0^L (1+f) B_{12} \frac{\partial U_y}{\partial z} \frac{\partial \psi_x}{\partial z} dz \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ \int_0^L f \cdot (A_{22} + A_{33}) \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 dz \right. \\
& + \int_0^L f \cdot (A_{22} + A_{33}) \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^L f \cdot (A_{22} + A_{33}) \psi_x^2 dz \\
& + \int_0^L f \cdot (A_{22} + A_{33}) \psi_y^2 dz \\
& \left. + 2 \int_0^L f \cdot (A_{22} + A_{33}) \psi_y \frac{\partial U_y}{\partial z} dz - 2 \int_0^L f \cdot (A_{22} + A_{33}) \psi_x \frac{\partial U_x}{\partial z} dz \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ - \int_0^L (1+f) B_{13} \frac{\partial U_y}{\partial z} \frac{\partial \psi_x}{\partial z} dz + \int_0^L (1+f) B_{13} \frac{\partial U_x}{\partial z} \frac{\partial \psi_y}{\partial z} dz \right] \\
& - \frac{1}{2} \left[ \int_0^L B_{13} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^L B_{13} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right)^2 dz \right]
\end{aligned}$$

L'expression de l'énergie cinétique de l'arbre est donnée par l'équation suivante:

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int \rho \left( \vec{R}_{P/0} \cdot \vec{R}_{P/0} \right) dV \quad (\text{IV.12})$$

L'énergie cinétique sous forme développée est :

$$\begin{aligned}
E_{ca} = & \frac{1}{2} \int_0^L [I_m (\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) + I_d (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) - 2\Omega I_p \psi_x \dot{\psi}_y + 2\Omega I_p \dot{\phi} + I_p \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p + \\
& \Omega^2 I_d (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2)] dz \quad (\text{IV.13})
\end{aligned}$$

### IV.2-2 Définition de l'élément finis hiérarchique

Dans la méthode des éléments finis hiérarchiques ou polynomiale, l'erreur peut être contrôlée et consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant la taille des éléments et leurs degrés d'interpolation. Le passage de  $n$  à  $n+1$  n'altère pas des fonctions de forme  $N_i$  ( $i=1 \dots n$ ).

### IV.2-3 Polynômes de Legendre :

Les polynômes de Legendre  $P_i(z)$  définis entre  $[-1 \ 1]$  sont donnés par :

$$\begin{cases} P_0(z) = 1 \\ P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n] \end{cases} \quad n = 1, 2, 3 \dots \dots \dots \quad (\text{IV.14})$$

Ils sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - z^2)\ddot{y} - 2z\dot{y} + n(n + 1)y = 0 \quad n = 1, 2, 3 \dots \dots \quad (\text{IV.15})$$

On peut définir un ensemble des modes

$$N_j(z) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^x P_{j-1}(t) dt \quad n = 1, 2, 3 \dots \dots \dots \quad (\text{IV.16})$$

Dans notre calcul on a fait un changement de variable  $\xi$  de telle sorte que  $\xi$  varie entre  $[0 \ 1]$

### IV.2-4 Élément conique hiérarchique :

Dans notre étude, on utilise la méthode des éléments finis hiérarchiques avec des fonctions de forme polynomiales qui possède une certaine orthogonalité tel que le polynôme de Legendre [50]. L'arbre de section variable en rotation est modélisé par des éléments poutres 3D hiérarchiques. Chaque élément représenté sur la Figure. IV 3 à deux nœuds 1 et 2. Le rayon vari entre  $r$  et  $R$

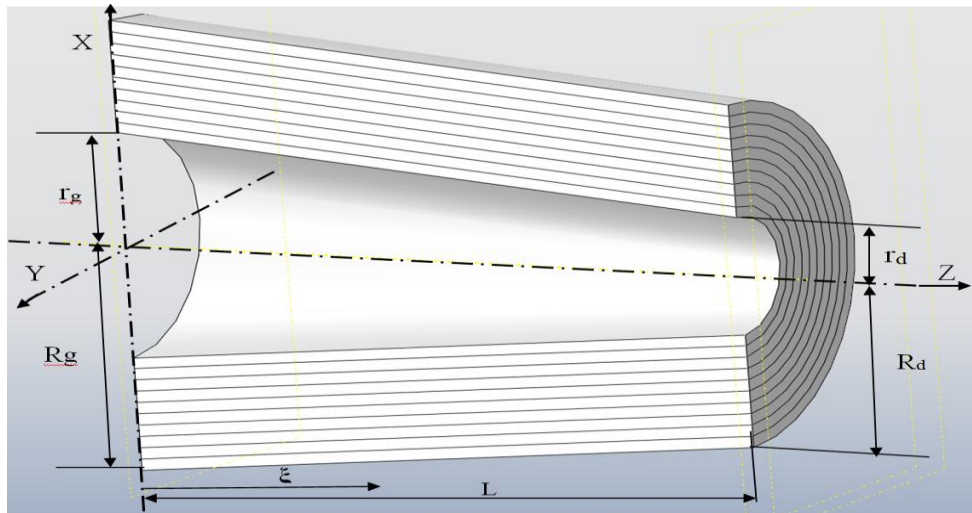


Figure. IV 3 : transfert suivant l'orientation des fibres et l'angle  $\alpha$  .

$$\xi = z/L \quad \text{avec } (0 \leq \xi \leq 1)$$

#### IV- 3- Coordonnées et fonction de forme

Un type de section axiale d'un élément fini linéairement conique est montré dans Fig. IV.3. Chaque extrémité de l'élément est associée à un rayon intérieur et extérieur, noté par  $r$  et  $R$ , avec les indices inférieurs  $g$  et  $d$  se rapportant respectivement aux extrémités gauches ( $z = 0$ ) et droites ( $z = l$ ) de l'élément. Définissant une coordonnée non dimensionnelle de position  $\xi$ , égale au rapport  $z / l$ , les rayons intérieurs et extérieurs peuvent être exprimés comme :

$$r = r_g(1 - \xi) + r_d \xi \quad (\text{IV.17})$$

$$R = R_g(1 - \xi) + R_d \xi \quad (\text{IV.18})$$

La représentation des rapports des rayons intérieurs et extérieurs sur chaque extrémité comme  $\omega$  et  $\tau$ , qui sont égaux à  $r_d / r_g$  et à  $R_d / R_g$  respectivement, permet aux équations (17 et 18) d'être réécrites :

$$r = r_g(1 + (\omega - 1) \xi) \quad (\text{IV.19})$$

$$R = R_g(1 + (\tau - 1) \xi) \quad (\text{IV.20})$$

Le champ déplacement d'un point de la poutre est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = [N_{U_x}] \{q_{U_x}\} = \sum_{n=1}^{p_{U_x}} x_n(t) \cdot N_n(\xi) \\ U_y = [N_{U_y}] \{q_{U_y}\} = \sum_{n=1}^{p_{U_y}} y_n(t) \cdot N_n(\xi) \\ U_z = [N_{U_z}] \{q_{U_z}\} = \sum_{n=1}^{p_{U_z}} Z_n(t) \cdot N_n(\xi) \\ \psi_x = [N_{\psi_x}] \{q_{\psi_x}\} = \sum_{n=1}^{p_{\psi_x}} \psi_{xn}(t) \cdot N_n(\xi) \\ \psi_y = [N_{\psi_y}] \{q_{\psi_y}\} = \sum_{n=1}^{p_{\psi_y}} \psi_{yn}(t) \cdot N_n(\xi) \\ \phi = [N_{\phi}] \{q_{\phi}\} = \sum_{n=1}^{p_{\phi}} \phi_n(t) \cdot N_n(\xi) \end{array} \right. \quad (IV.21)$$

$$[N'_k] = \frac{\partial [N_k]}{\partial \xi}, \text{ Avec } (k = U_x, U_y, U_z, \psi_x; \psi_y; \phi) \quad (IV.22)$$

De la formule (IV.11), on trouve la forme de la matrice de rigidité élémentaire  $[K_a^e]$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{aa}}{\partial \{q_{U_z}\}} &= \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 A_{11} [N'_{U_z}]^T [N'_{U_z}] d\xi \right] \{q_{U_z}\} + \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N'_{\phi}]^T [N'_{U_z}] d\xi \right] \{q_{\phi}\} \\ &= [KU_z] \{q_{U_z}\} + [K_1] \{q_{\phi}\} \end{aligned} \quad (IV.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{aa}}{\partial \{q_{U_x}\}} &= \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N'_{U_x}]^T [N'_{U_x}] d\xi \right] \{q_{U_x}\} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N'_{U_x}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right] \{q_{\psi_x}\} \\ &\quad + \left[ \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N'_{\psi_y}]^T [N'_{U_x}] d\xi \right] \{q_{\psi_y}\} + \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 (1+f) B_{13} [N'_{U_x}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \{q_{\psi_y}\} \end{aligned}$$

$$= [KU_x]\{q_{U_x}\} - [K_2]\{q_{\psi_x}\} + [K_3 + K_4]\{q_{\psi_y}\} \quad (\text{IV.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_{U_y}\}} &= \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N'_{U_y}]^T [N'_{U_y}] d\xi \right] \{q_{U_y}\} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2L} \int_0^1 (1 + f) B_{12} [N'_{U_y}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \{q_{\psi_y}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[ \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N'_{\psi_x}]^T [N'_{U_y}] d\xi \right] \{q_{\psi_x}\} + \\ &\left[ \frac{1}{L} \int_0^1 (1 + f) B_{13} [N'_{U_y}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right] \{q_{\psi_x}\} \end{aligned}$$

$$= [KU_y]\{q_{U_y}\} - [K_2]\{q_{\psi_y}\} + [K_3 + K_4]\{q_{\psi_x}\} \quad (\text{IV.25})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_{\psi_x}\}} &= \left( \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 B_{11} [N'_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right] + \left[ L \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N_{\psi_x}]^T [N_{\psi_x}] d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 (1+f) B_{13} [N'_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right) \{q_{\psi_x}\} \\
&\quad - \left[ \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N'_{U_y}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \{q_{U_x}\} \\
&\quad + \left[ \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N'_{U_y}]^T [N_{\psi_x}] d\xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{13} [N'_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right] \{q_{U_y}\} \\
&\quad + \left[ \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N'_{U_y}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \{q_{U_x}\} \\
&\quad + \left[ \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N'_{U_y}]^T [N_{\psi_x}] d\xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{13} [N'_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right] \{q_{U_y}\} \\
&\quad + \left( \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N_{\psi_y}]^T [N'_{\psi_x}] d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \right) \{q_{\psi_y}\} \\
&= [K_{\psi_x}] \{q_{\psi_x}\} - [K_2]^T \{q_{U_x}\} + [K_3 + K_4]^T \{q_{U_y}\} - [K_5] \{q_{\psi_y}\} \tag{IV.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_{\psi_y}\}} &= \left( \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 B_{11} [N'_{\psi_y}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] + \left[ L \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N_{\psi_y}]^T [N_{\psi_y}] d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 (1+f) B_{13} [N_{\psi'_y}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right) \{q_{\psi_y}\} \\
&\quad - \left[ \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N_{U'_y}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \{q_{U_y}\} \\
&\quad + \left[ \int_0^1 f \cdot (A_{22} + A_{33}) [N_{U'_y}]^T [N_{\psi_y}] d\xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2L} \int_0^1 (1+f) B_{13} [N_{\psi'_y}]^T [N'_y] d\xi \right] \{q_{U_x}\} \\
&\quad + \left( \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N_{\psi_x}]^T [N'_{\psi_y}] d\xi \right] \right) \{q_{\psi_x}\}
\end{aligned}$$

$$= [K_{\psi_y}] \{q_{\psi_y}\} - [K_2]^T \{q_{U_y}\} + [K_3 + K_4]^T \{q_{U_x}\} - [K_5]^T \{q_{\psi_x}\} \quad (\text{IV.27})$$

$$\frac{\partial E_{da}}{\partial \{q_{\emptyset}\}} = \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 B_{22} [N'_{\emptyset}]^T [N'_{\emptyset}] d\xi \right] \{q_{\emptyset}\} + \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 (1+f) B_{12} [N'_U]^T [N'_{\emptyset}] d\xi \right] \{q_{U_z}\}$$

$$= [K_{\emptyset}] \{q_{\emptyset}\} + [K_1]^T \{q_{U_z}\} \quad (\text{IV.28})$$

Où  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont calculés par les intégrales suivantes :

$$A_{11} = 2\pi \sum_{n=1}^k K_{11} \int_{R1Z}^{R2Z} r dr$$

$$A_{12} = \pi \sum_{n=1}^k K_{12} \int_{R1Z}^{R2Z} r^2 dr$$

$$A_{22} = \pi \sum_{n=1}^k K_{22} \int_{R1Z}^{R2Z} r dr$$

$$A_{33} = \pi \sum_{n=1}^k K_{33} \int_{R1Z}^{R2Z} r dr$$

$$B_{11} = \pi \sum_{n=1}^k K_{11} \int_{R1Z}^{R2Z} r^3 dr$$

$$B_{12} = 2\pi \sum_{n=1}^k K_{12} \int_{R1Z}^{R2Z} r^2 dr$$

$$B_{22} = 2\pi \sum_{n=1}^k K_{22} \int_{R1Z}^{R2Z} r^3 dr$$

$$B_{13} = \pi \sum_{n=1}^k K_{13} \int_{R1Z}^{R2Z} r^2 dr$$

L'énergie cinétique sous forme développée est :

$$\begin{aligned} E_{ca} = & \frac{1}{2} I_m L \int_0^1 \{ \dot{q}u_x \}^T [NU_x]^T [NU_x] \{ \dot{q}u_x \} d\xi + \int_0^1 \{ \dot{q}u_y \}^T [NU_y]^T [NU_y] \{ \dot{q}u_y \} d\xi \\ & + \int_0^1 \{ \dot{q}u_y \}^T [NU_y]^T [NU_y] \{ \dot{q}u_y \} d\xi \\ & + \frac{1}{2} I_d L \left[ \int_0^1 \{ \dot{q}_{\psi_x} \}^T [N_{\psi_x}]^T [N_{\psi_x}] \{ \dot{q}_{\psi_x} \} d\xi + \int_0^1 \{ \dot{q}_{\psi_y} \}^T [N_{\psi_y}]^T [N_{\psi_y}] \{ \dot{q}_{\psi_y} \} d\xi \right] + \Omega I_p L \left[ \int_0^1 [N_\emptyset] \{ \dot{q}_\emptyset \} d\xi \right] \\ & + \frac{1}{2} I_p L \left[ \int_0^1 \{ \dot{q}_\emptyset \}^T [N_\emptyset]^T [N_\emptyset] \{ \dot{q}_\emptyset \} d\xi \right] - \Omega I_p L \left[ \int_0^1 \{ q_{\psi_x} \}^T [N_{\psi_x}]^T [N_{\psi_y}] \{ \dot{q}_{\psi_y} \} d\xi \right] + \frac{L}{2} \Omega^2 I_p \end{aligned} \quad (IV.29)$$

A partir de l'équation de Lagrange, on trouve les formes des matrices  
taires  $[M_a^e]$  et  $[G_a^e]$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}u_x\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{qu_x\}} = \left[ I_m L \int_0^1 [Nu_x]^T [Nu_x] d\xi \right] \{\ddot{q}u_x\} = [Mu_x] \{\ddot{q}u_x\} \quad (IV.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}u_y\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{qu_y\}} = \left[ I_m L \int_0^1 [Nu_y]^T [Nu_y] d\xi \right] \{\ddot{q}u_y\} = [Mu_x] \{\ddot{q}u_x\} \quad (IV.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}u_z\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{qu_z\}} = \left[ I_m L \int_0^1 [Nu_z]^T [Nu_z] d\xi \right] \{\ddot{q}u_z\} = [Mu_z] \{\ddot{q}u_z\} \quad (IV.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}\psi_x\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q\psi_x\}} &= \left[ I_d L \int_0^1 [N\psi_x]^T [N\psi_x] d\xi \right] \{\ddot{q}\psi_x\} + \left[ \Omega I_p L \int_0^1 [N\psi_x]^T [N\psi_y] d\xi \right] \{\dot{q}\psi_x\} \\ &= [M\psi_x] \{\ddot{q}\psi_x\} + [G_1]^T \{\dot{q}\psi_y\} \end{aligned} \quad (IV.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}\psi_y\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q\psi_y\}} &= \left[ I_d L \int_0^1 [N\psi_y]^T [N\psi_y] d\xi \right] \{\ddot{q}\psi_y\} + \left[ \Omega I_p L \int_0^1 [N\psi_y]^T [N\psi_x] d\xi \right] \{\dot{q}\psi_y\} \\ &= [M\psi_y] \{\ddot{q}\psi_y\} + [G_1]^T \{\dot{q}\psi_x\} \end{aligned} \quad (IV.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{\dot{q}\phi\}} \right) - \frac{\partial E_{ca}}{\partial \{q\phi\}} = \left[ I_d L \int_0^1 [N\phi]^T [N\phi] d\xi \right] \{\ddot{q}\phi\} = [M\phi] \{\ddot{q}\phi\} \quad (IV.35)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de l'arbre composite.

Le moment d'inertie massique  $I_m$ , Le moment d'inertie diamétral  $I_d$  et le moment d'inertie polaire  $I_p$  de l'arbre tournant par unité de longueur.

Le terme  $2\Omega I_p \psi_x \dot{\psi}_y$  représente l'effet gyroscopique, et  $I_d (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2)$  représente l'effet de l'inertie rotatoire. Le terme  $\Omega^2 I_d (\psi_x^2 + \psi_y^2)$  est très petit devant  $\Omega^2 I_p$ , représente l'effet de la rigidification centrifuge, il sera négligé par la suite de l'analyse.

Avec  $I_m, I_d, I_p$  sont définis par :

$$\begin{aligned} I_m &= 2\pi\rho \sum_{n=1}^{n=k} \int_{R1z}^{R2z} r dr \\ I_d &= \pi\rho \sum_{n=1}^{n=k} \int_{R1z}^{R2z} r^3 dr \end{aligned}$$

$$I_p = 2\pi\rho \sum_{n=1}^{n=k} \int_{R1z}^{R2z} r^3 dr$$

L'équation de mouvement de vibration libre est donnees par Euler- Lagrange

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (\text{IV.36})$$

Avec :

Les matrices globales du système  $[M]$  .  $[G]$  et  $[K]$  sont calculées

$$[K'] = \begin{bmatrix} [K_{U_Y}] & 0 & [K_2 + K_3] & [K_4] \\ 0 & [K_{U_X}] & [K_5] & [K_6 + K_7] \\ [K_2 + K_3]^T & [K_4]^T & [K_{\psi_Y}] & [K_8] \\ [K_4]^T & [K_6 + K_7]^T & [K_8]^T & [K_{\psi_x}] \end{bmatrix}$$

$$[K''] = \begin{bmatrix} [K_{U_Z}] & [K_1] \\ [K_1]^T & [K_\emptyset] \end{bmatrix}$$

$$[M'] = \begin{bmatrix} [M_{U_Y}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_{U_X}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{\psi_Y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_{\psi_x}] \end{bmatrix}$$

$$[M''] = \begin{bmatrix} [M_{U_Z}] & 0 \\ 0 & [M_\emptyset] \end{bmatrix}$$

$$[G'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [G_1] \\ 0 & 0 & -[G_1]^T & 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de matrice,  $K_{ij}$

$$k_{11} = q_{11} \cdot sa^4 + 2 \cdot (q_{13} + 2 \cdot q_{55}) \cdot sa^2 \cdot ca^2 + q_{33} \cdot ca^4$$

$$k_{12} = q_{12} \cdot sa^2 + q_{23} \cdot ca^2$$

$$k_{13} = q_{13} \cdot (sa^4 + ca^4) + (q_{11} + q_{33} - 4 \cdot q_{55}) \cdot sa^2 \cdot ca^2$$

$$k_{14} = q_{36} \cdot ca^3 + (q_{16} - 2 \cdot q_{45}) \cdot sa^2 \cdot ca$$

$$k_{15} = -(q_{13} - q_{33} + 2 \cdot q_{55}) \cdot sa \cdot ca^3 - (q_{11} - q_{13} - 2 \cdot q_{55}) \cdot sa^3 \cdot ca$$

$$k16=-q16*sa^3-(q36+2*q45)*sa*ca^2$$

$$k22=q22$$

$$k23=q12*ca^2+q23*sa^2$$

$$k24=q26*ca$$

$$k25=(q23-q12)*sa*ca$$

$$k26=-q26*sa$$

$$k33=q11*ca^4+2*(q13+2*q55)*sa^2*ca^2+q33*sa^4$$

$$k34=q16*ca^3+(q36+2*q45)*sa^2*ca$$

$$k35=-(q13-q33+2*q55)*sa^3*ca-(q11-q13-2*q55)*sa*ca^3$$

$$k36=-q36*sa^3-(q16-2*q45)*sa*ca^2$$

$$k44=q44*sa^2+q66*ca^2$$

$$k45=-q45*sa^3-(q16-q36-q45)*sa*ca^2$$

$$k46=(q44-q66)*sa*ca$$

$$k55=(q11+q33-2*q13-2*q55)*sa^2*ca^2+q55*(sa^4+ca^4)$$

$$k56=q45*ca^3+(q16-q36-q45)*sa^2*ca$$

$$k66=q44*ca^2+q66*sa^2$$

ou:

$$q11=c11*cb^4+2*(c12+2*c66)*sb^2*cb^2+c22*sb^2$$

$$q12=(c11+c22-4*c66)*sb^2*cb^2+c12*(sb^4+cb^4)$$

$$q13=c13*cb^2+c23*sb^2$$

$$q16=(c11-c12-2*c66)*sb*cb^3+(c12-c22+2*c66)*sb^3*cb$$

$$q22=c11*sb^4+2*(c12+2*c66)*sb^2*cb^2+c22*cb^2$$

$$q23=c13*sb^2+c23*cb^2$$

$$q26=(c11-c12-2*c66)*sb^3*cb+(c12-c22+2*c66)*sb*cb^3$$

$$q33=c33$$

$$q36=(c13-c23)*sb*cb$$

$$q44=c44*cb^2+c55*sb^2$$

$$q45=(c55-c44)*sb*cb$$

$$q55=c44*sb^2+c55*cb^2$$

$$q66=(c11+c22-2*c12-2*c66)*sb^2*cb^2+c66*(sb^4+cb^4)$$

Si  $\alpha=0$

- la matrices de rigidité devein:

$$[K] = [K'] + [K'']$$

avec

$$[K'] = \begin{bmatrix} [K_{U_Y}] & 0 & [K_2] & [K_3] \\ 0 & [K_{U_X}] & [K_4] & [K_5] \\ [K_2]^T & [K_4]^T & [K_{\psi_Y}] & [K_6] \\ [K_3]^T & [K_5]^T & [K_6]^T & [K_{\psi_X}] \end{bmatrix}$$

$$[K''] = \begin{bmatrix} [K_{U_Z}] & [K_1] \\ [K_1]^T & [K_\emptyset] \end{bmatrix}$$

- la matrices de masse devein:

$$[M] = [M'] + [M'']$$

avec

$$[M'] = \begin{bmatrix} [M_{U_Y}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_{U_X}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{\psi_Y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_{\psi_X}] \end{bmatrix}$$

$$[M''] = \begin{bmatrix} [M_{U_Z}] & 0 \\ 0 & [M_\emptyset] \end{bmatrix}$$

- la matrices de rigidité gyroscopique devein:

$$[G] = [G']$$

avec

$$[G'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [G_1] \\ 0 & 0 & -[G_1]^T & 0 \end{bmatrix}$$

# Chapitre V

*Résultats et interprétations*

## INTRODUCTION

Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences propres et des vitesses critiques du système. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence en augmentant le nombre des fonctions de forme hiérarchiques. Puis on a traité un arbre conique en bore époxyde avec les conditions aux limites appui-appui, et une discussion est établie pour déterminer l'influence des différents paramètres (la conicité; nombre des fonctions de forme trigonométriques; le nombre des fonctions de forme polynomiales et le nombre d'éléments).

### V.1 Validation et convergence

Dans notre travail, on a modélisé l'arbre cylindrique et conique de longueur  $L$  par 1, 2 et 3 éléments à deux nœuds et par la version  $h$  et  $p$ .

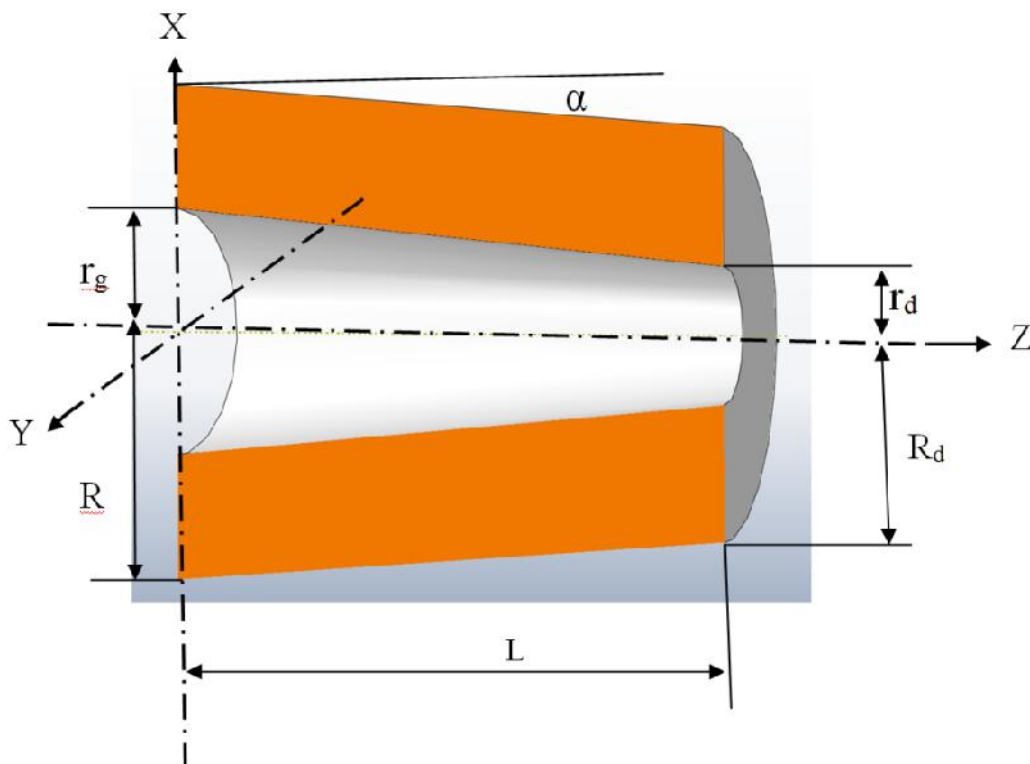


Figure V.1. Élément d'un arbre conique

A ce stade, on va se baser sur les travaux de Kim [57] et ceux de Dharmarajan et Mc Cutchen [52] qui, en généralisant la méthode de Cowper [53], pour déterminer le coefficient de cisaillement de Timoshenko  $f$  quel que soit la section avec  $\bar{m}=r/R$ .

$$f = \frac{6E_{zz}(1 - \bar{m}^4)(1 + \bar{m}^2)}{G_{zx}v_{zx}(2\bar{m}^6 + 18\bar{m}^4 - 18\bar{m}^2 - 2) - E_{zz}(7\bar{m}^6 + 27\bar{m}^4 - 27\bar{m}^2 - 7)}$$

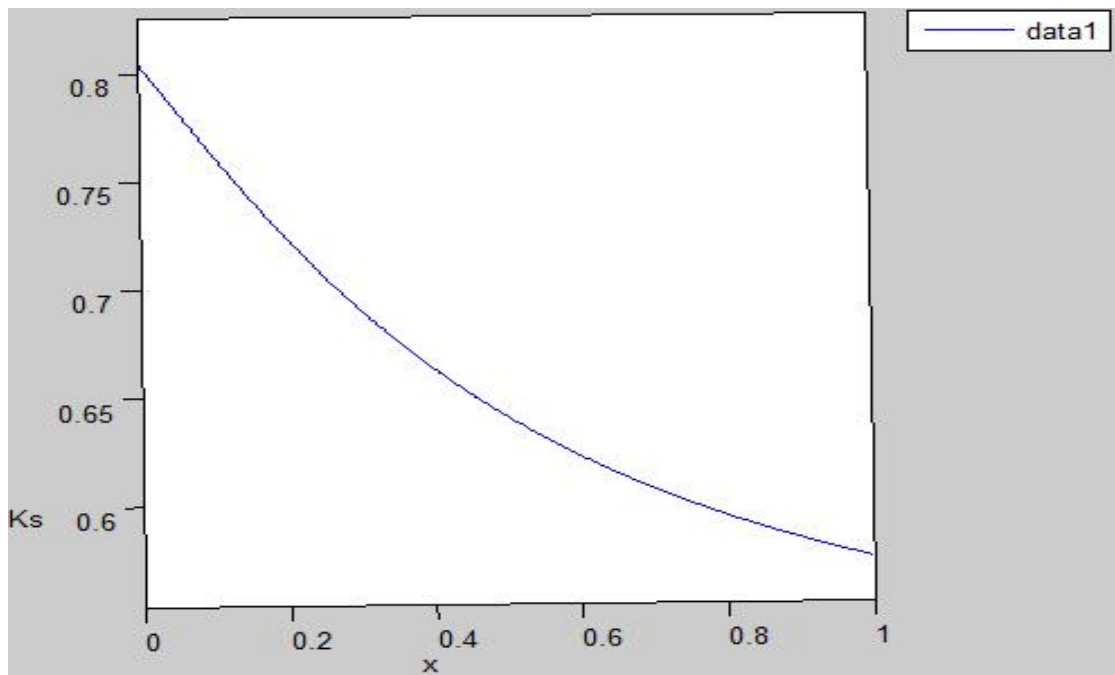


Figure V.2. Coefficients de cisaillement de Timoshenko en fonction de r/R

Si  $r=R$  ( $=0$ )

Les propriétés physiques de l'arbre en Bore- époxyde sont définies dans le Tableau V.1, les paramètres géométriques sont :  $L = 2.56$  m,  $D = 12.8$  cm,  $e = 5.4$  mm, 10 couches de même épaisseur avec,  $(90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$  angle de l'orientation des fibres. Dans cet exemple l'arbre tournant en Bore - époxyde est modélisé par un seul élément de longueur  $L$  puis par deux éléments ensuite par trois éléments de mêmes longueurs pour une vitesse de rotation de 400 rd/s.

Tableau V.1 : Propriétés de matériau composite [54].

Propriété de matériau	Bore-époxyde
$E_{zz}$ (GPa)	211.0
$E_{22}$ (GPa)	24.1
$G_{12}$ (GPa)	6.9
$G_{32}$ (GPa)	6.9
$\nu_{31}$	0.36
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	1967.0

Tableau V. 2 : Vitesse critique de l'arbre composite bore-époxyde

	Vitesse critique $c_{r1}$ (tr/mn)	Théories ou Méthodes
Kim et Bert [55]	5872	Coque de Sanders.
M.-Y. Chang et al [56]	5919	Poutre de Bernoulli–Euler.
Bert et Kim [57]	5762	Poutre de Timoshenko.
Rimo sino [58]	5767	SHBT (simplified Homogenized Beam Theory) sans effet de cisaillement.
Présent	5790.4	Poutre de Timoshenko avec la version $p$ de la méthode des éléments finis.

Dans cet exemple, les propriétés de l'arbre en bore-époxyde sont données dans le tableau V.1. Les résultats obtenus sont validés dans le tableau V.2 avec les résultats trouvés dans la littérature pour différentes théories et méthodes.

La première vitesse critique obtenue par notre modèle donné dans le tableau V.2 est compatible à celle de la théorie des coques de Sanders [56], de la théorie de des poutres de Timoshenko de M.Y. Chang et al [56], et celle trouvée par Bert et Kim [57].

Si  $r \neq R$  ( $\alpha \neq 0$ )

Tableau V.3 : Vitesse critique de l'arbre conique en matériaux composite

Rapport L/D <sub>2</sub>	Vitesse critique pour arbre composite avec orientation des fibres( $0^0$ )			Vitesse critique pour arbre en acier	
	Ref kim	Présent travail En fonction du nombre de fonctions		Ref kim	Présent travail
		2 fonctions	3 fonctions		
20	822.5	824.01	823.71	423.5	424
10	1976.3	2706	1979	1094	1094
5	4870.6	5937	4911	3201.5	3200

Le tableau V.3 représente la fréquence critique de plusieurs fonctions de formes pour un arbre encasté dans l'extrémité gauche et libre dans l'autre extrémité. On a validé les résultats trouvés par Kim[57] pour les différents rapports des longueurs sur diamètres dans les deux cas arbre en matériaux composite graphite- époxyde avec orientation des fibres ( $0^0$ ) et arbre homogène en acier . On a pris les propriétés du matériau composite donner par Kim :  $\alpha = 1.7^\circ$   $R_g-r_g=5.4\text{mm}$ ,  $r_d=1\text{mm}$   $R_d=d_2/2=6.4\text{mm}$ , la vitesse de rotation 400rad/s,  $E_{zz}=192\text{GPa}$ ,  $G_{zx}=4.07\text{GPa}$ ,  $\nu_{zx}=0.24$ ,  $G_{xy}=3\text{GPa}$ ,  $\rho=1610\text{kg/m}^3$ .

## V.2 Comparaison entre l'utilisation des fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques et polynômiales dans un arbre cylindrique

Le tableau V.4 : Vitesse critique de l'arbre cylindrique pour un seul élément et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.

C.L : A-A Nombre d'élément avec ( $\neq 0$ )	Nombre de fonctions trigonométriques	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0 tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
1	4	5821.68	5760
1	6	5796.6	5734.8
1	8	5792.4	5730.4
1	10	5791.2	5729.7

Tableau V.5 : Vitesse critique de l'arbre cylindrique pour deux éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques

CL : A-A Nombre d'élément avec ( $\neq 0$ )	Nombre de fonctions trigonométriques	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
2	4	6420	6360
2	6	5910	5848.2
2	8	5829	5760
2	10	5808	5745

Tableau V.6 : Vitesse critique de l'arbre cylindrique pour trois éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.

CL : A-A Nombre d'élément avec ( $\neq 0$ )	Nombre de fonctions trigonométriques	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
3	4	6420	6360
3	6	5910	5848.2
3	8	5829	5760
3	10	5808	5745

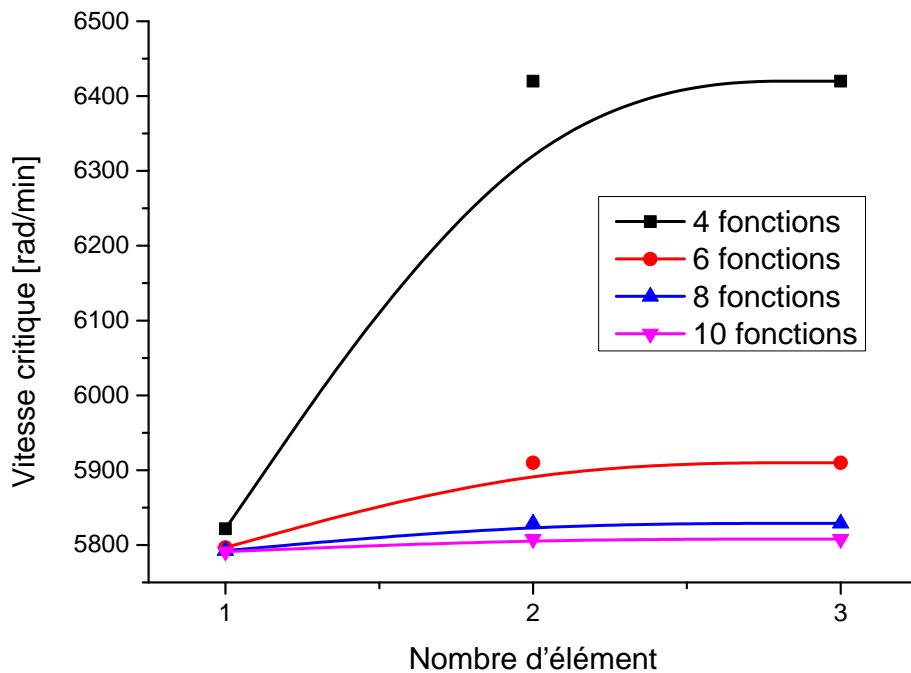


Figure. V 3 : Variation de la vitesse critique en fonction du nombre d'éléments pour différentes fonctions de forme trigonométriques d'un arbre cylindrique bi- appuyé (A-A).

On remarque d'après la figure V.3 que la vitesse critique augmente avec le nombre d'élément et ceci pour différentes fonctions de forme.

On remarque clairement qu'en augmentant le nombre des fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques les résultats convergent vers la solution exacte sans augmenter le nombre d'éléments version h, et ceci en utilisant la version p des éléments finis.

Si on augmente le nombre d'éléments en gardant le même nombre des fonctions de forme, les résultats sont légèrement éloignés de la solution exacte. Mais, si on augmente simultanément les fonctions de forme ainsi que le nombre d'éléments (version h-p) les résultats convergent mieux vers la solution exacte.

Tableau V.7 : Vitesse critique de l'arbre cylindrique pour un seul élément et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques polynomiales

CL : A-A Nombre d'élément avec ( $\neq 0$ )	Nombre des fonctions polynomiales	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
1	4	6030	5967.6
1	6	5790.6	5728.8
1	8	5790.4	5728.4
1	10	5790.4	5728.4

Tableau V.8 : Vitesse critique de l'arbre cylindrique pour deux éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques polynomiales

CL : A-A Nombre d'élément avec ( $\neq 0$ )	Nombre des fonctions polynomiales	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
2	4	5794.2	5732
2	6	5790.6	5728.8
2	8	5790.6	5728.8
2	10	5790.6	5728.8

Tableau V.9 : Vitesse critique de l'arbre cylindrique pour trois éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques polynomiales

CL : A-A Nombre d'élément avec ( $\neq 0$ )	Nombre des fonctions polynomiales	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
3	4	5794.2	5732
3	6	5790.6	5728.8
3	8	5790.6	5728.8
3	10	5790.6	5728.8

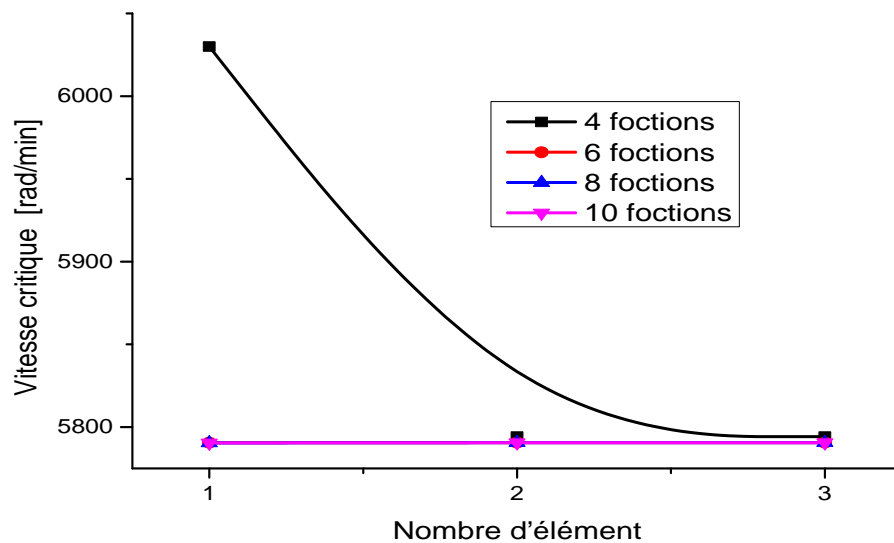


Figure. V.4: Variation de la vitesse critique en fonction du nombre d'élément pour différentes fonctions de forme polynomiales d'un arbre cylindrique bi- appuyé (A-A).

On remarque d'après la figure V.4 que la vitesse critique n'augmente pas avec le nombre d'élément et ceci pour différentes fonctions de forme.

On remarque aussi que les résultats restent stables quelque soit la version utilisée et un peu éloignés de la solution exacte.

On remarque aussi que la solution converge vers la solution exacte en augmentant soit le nombre des éléments (version h des éléments finis) soit les nombres des fonctions de formes polynomiales (version p des éléments finis) ou les deux à la fois (version h-p).

### V.3 Comparaison entre l'utilisation des fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques et polynômiales dans un arbre conique :

Tableau V.10 : Vitesse critique de l'arbre conique pour un élément et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques

CL : A-A Nombre d'élément avec ( $\alpha = 1.7\text{rad}$ )	Nombre des fonctions trigonométriques	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
1	4	9360	9180
1	6	9013.8	8866.2
1	8	8992.6	8655.4

Tableau V.11 : Vitesse critique de l'arbre conique pour deux éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.

CL : A-A Nombre d'élément avec ( =1.7rad)	Nombre des fonctions trigonométriques	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
2	4	9208.2	9013.8
2	6	9107.8	8951.2
2	8	9046.4	8822.4

Tableau V.12 : Vitesse critique de l'arbre conique pour trois éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques trigonométriques.

CL : A-A Nombre d'élément avec ( =1.7rad)	Nombre des fonctions trigonométriques	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
3	4	12490.8	12343.8
3	6	9617.4	8866.2
3	8	9102.4	8942.4

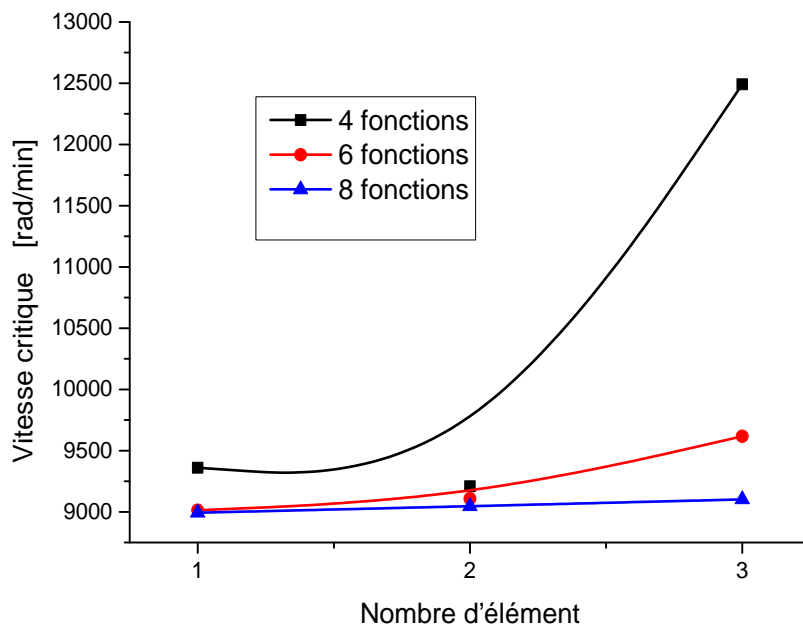


Figure V.5 : Vitesses citriques en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique trigonométrique d'un arbre conique bi- appuyé (A-A).

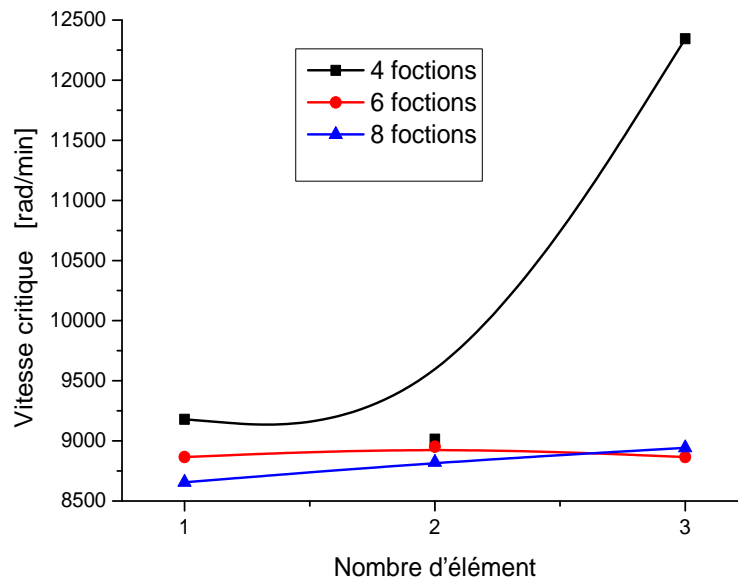


Figure V6 : Vitesses citriques en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique trigonométrique d'un arbre conique bi- appuyé (A-A).

La figure V.6 montre la convergence des quatre vitesses critiques en fonction du nombre de fonctions de forme trigonométrique d'un arbre bi- appuyé (A-A) pour une vitesse de rotation égale à 0 tr/min et 400 tr/min. les résultats convergent vers la solution exacte sans augmenter le nombre des éléments.

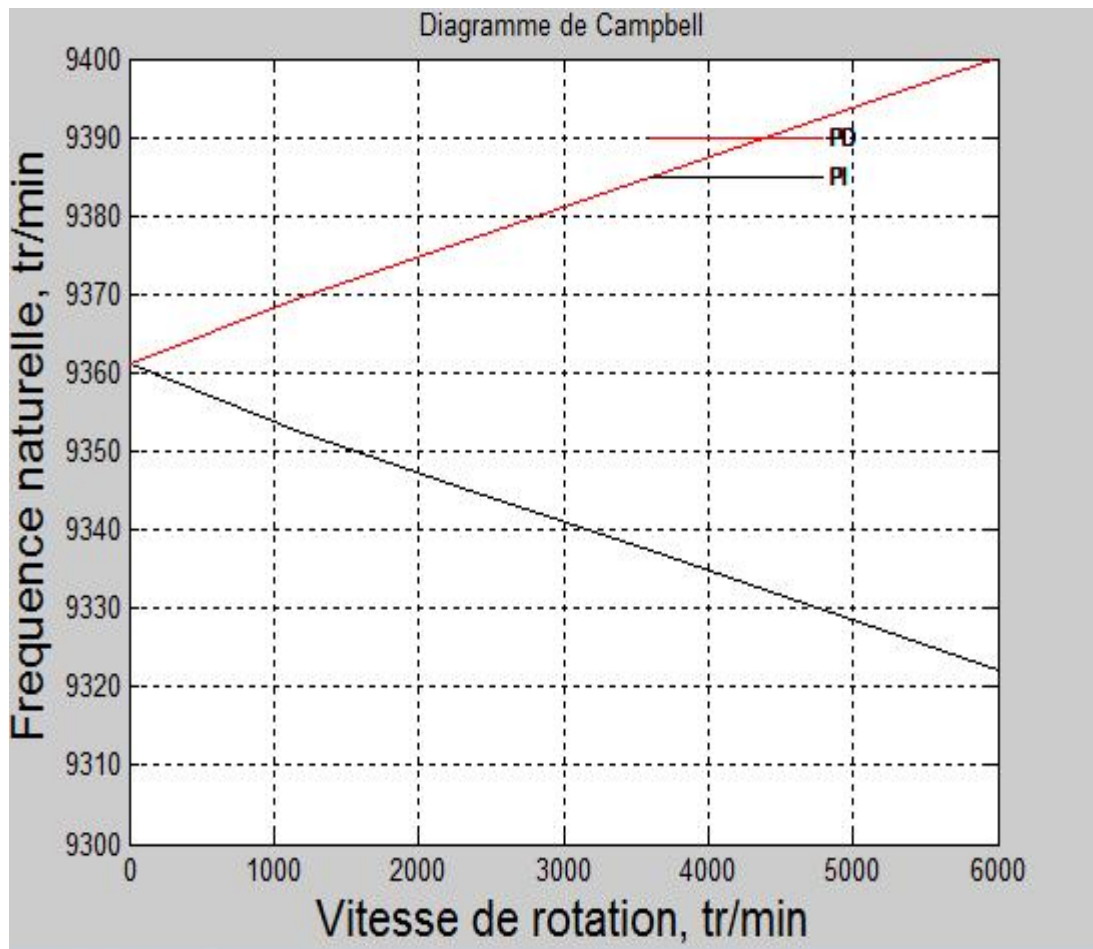


Figure V.7 : Diagramme de Campbell des cinq modes de flexion de l'arbre tournant en graphite- époxyde.

Le diagramme de Campbell pour les deux premiers modes de flexion de l'arbre tournant est montré dans la figure V.7. On sait que le point d'intersection de la ligne ( $\omega = \Omega$ ) avec les courbes de fréquence de flexion indique la vitesse critique  $\Omega_{cr}$  de l'arbre conique. Les deux premières valeurs correspondent à un mode direct et un mode inverse.

Tableau V.13 : Vitesse critique de l'arbre conique pour un seul élément et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques polynomiales.

CL : A-A Nombre d'élément avec ( =1.7rad)	Nombre des fonctions Polynomiales	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
1	4	9373.8	9222.6
1	6	8950.2	8827.8
1	8	8844.8	8796

Tableau V.14 : Vitesse critique de l'arbre conique pour deux éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques polynomiales

CL : A-A Nombre d'élément avec ( =1.7rad)	Nombre des fonctions Polynomiales	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
2	4	8980.2	8830.8
2	6	8844.8	8796
2	8	8844.8	8796

Tableau V.15 : Vitesse critique de l'arbre conique pour trois éléments et plusieurs fonctions de forme hiérarchiques polynomiales

CL : A-A Nombre d'élément avec ( =1.7rad)	Nombre des fonctions Polynomiales	Vitesse critique avec vitesse de rotation 0tr/min	Vitesse critique avec vitesse de rotation 400HZ
3	4	8949.6	8816.8
3	6	8945.4	8799.2
3	8	8844.8	8796

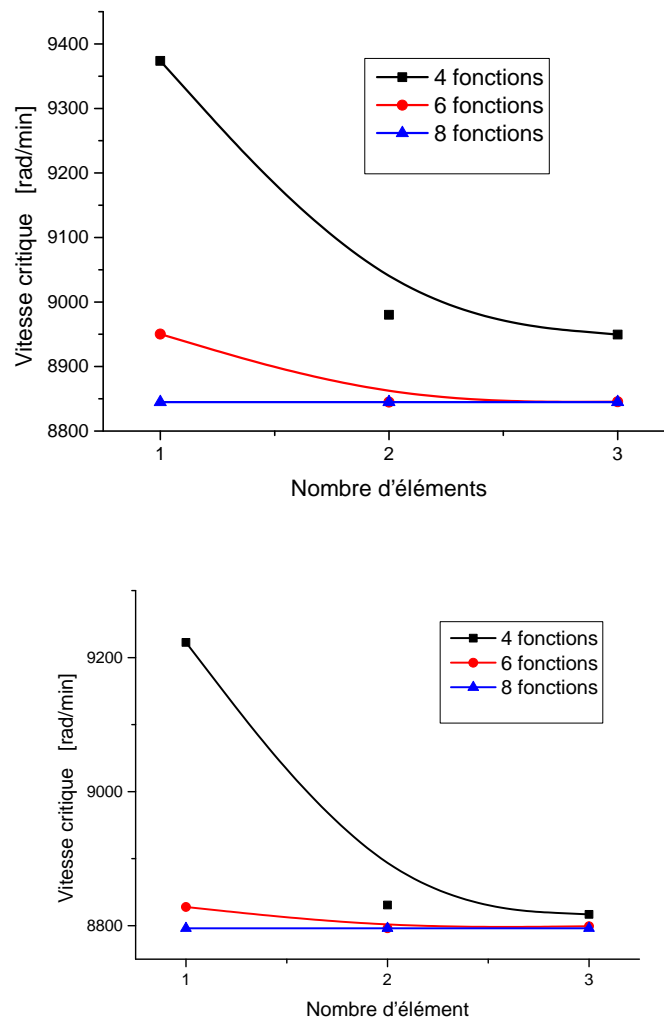


Figure V.7 : Vitesses citriques en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique polynomiale d'un arbre conique bi- appuyé (A-A).

La figure V.9 montre la convergence des quatre vitesses critiques en fonction du nombre de fonctions de forme d'un arbre bi- appuyé (A-A) pour une vitesse de rotation égale à 0 tr/min et 400 tr/min. les résultats convergent vers la solution exacte si on augmente le nombre de fonction de forme hiérarchique polynomiale .

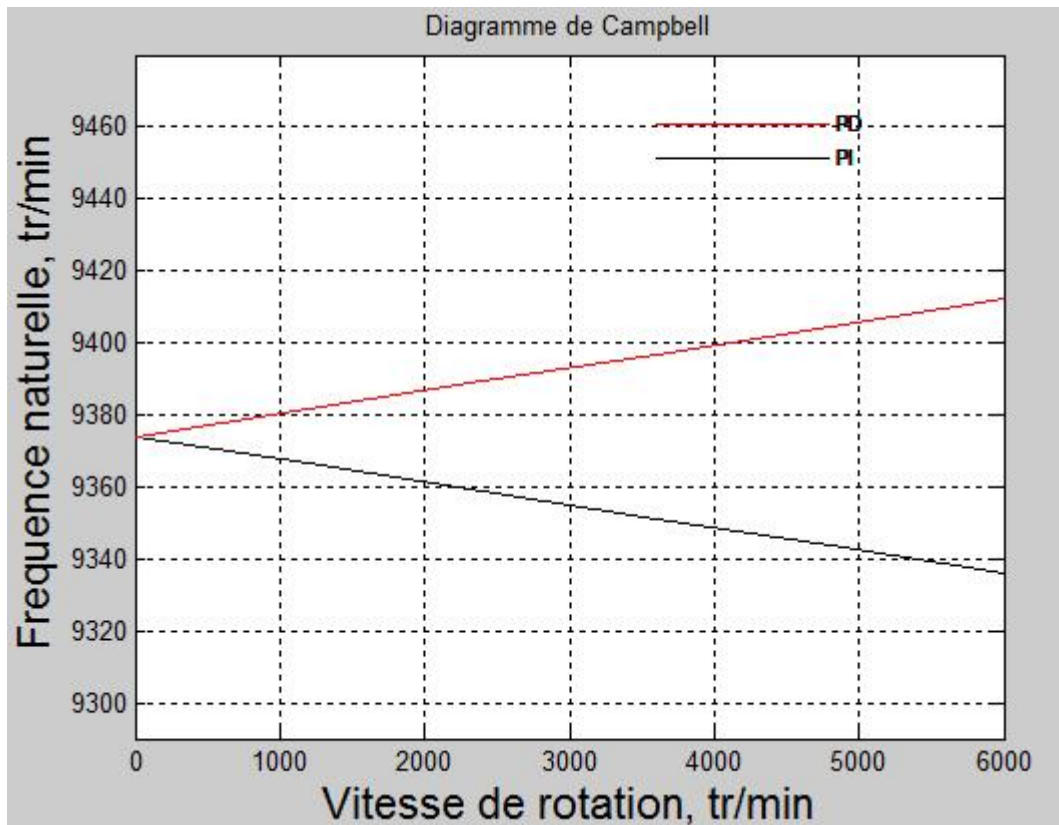


Figure V.8: Diagramme de Campbell des cinq modes de flexion de l'arbre tournant en graphite-époxyde

Le diagramme de Campbell pour les deux premiers modes de flexion de l'arbre tournant est montré dans la figure V.5. On sait que le point d'intersection de la ligne ( $\omega = \Omega$ ) avec les courbes de fréquence de flexion indique la vitesse critique  $\Omega_{cr}$  de l'arbre conique. Les deux premières valeurs correspondent à un mode direct et un mode inverse.

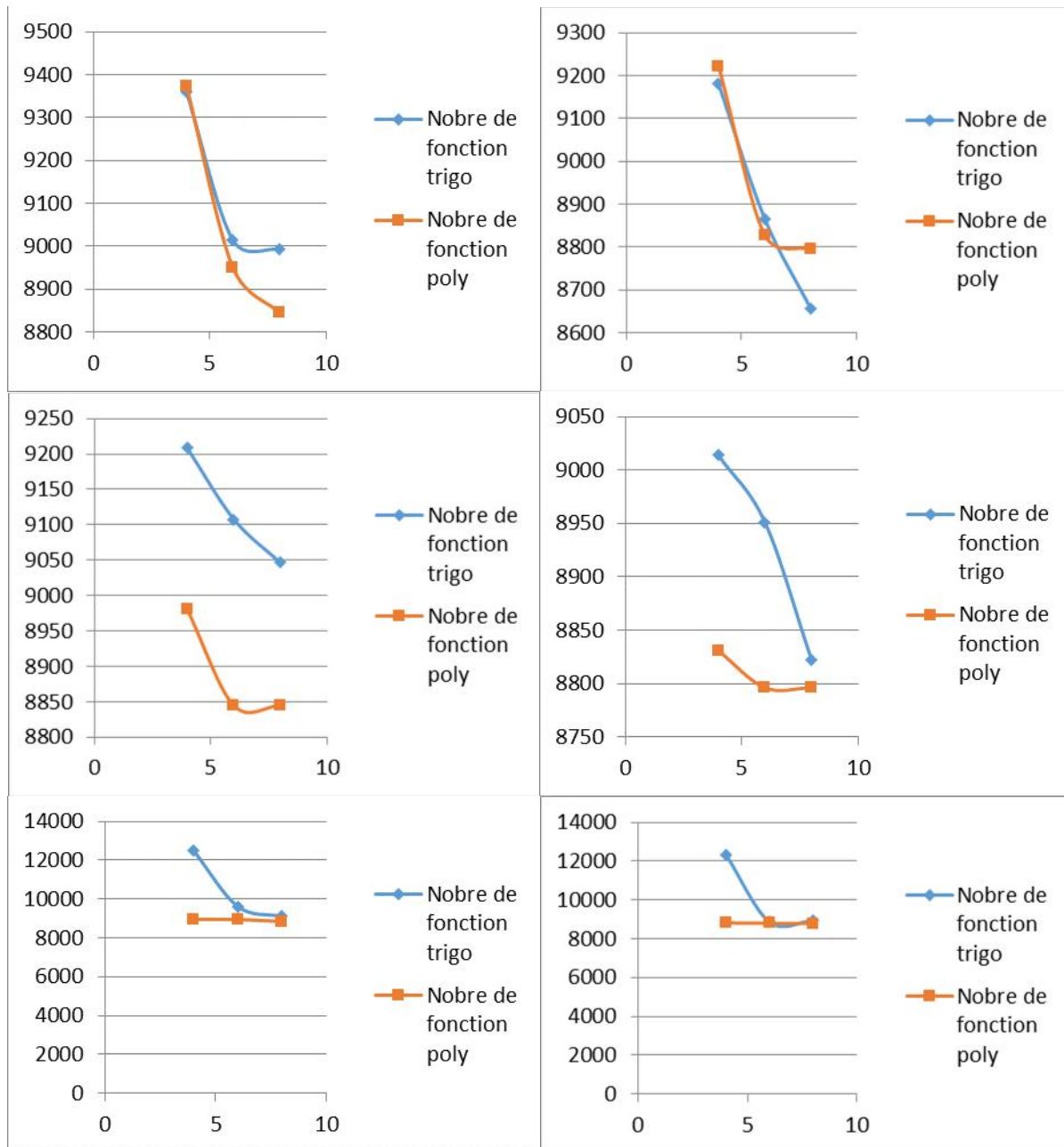


Figure V.9 : Convergence des quatre fréquences en fonction du nombre de fonction de forme hiérarchique d'un arbre bi- appuyé (A-A).

La figure V.9 représente la variation de la vitesse critique pour les deux cas, nombre de fonction de forme trigonométriques et nombre de fonctions de forme polynomiales. On remarque d'après les résultats obtenus que les fonctions de forme polynomiales utilisées convergent vers la solution mieux que les fonctions de forme trigonométriques.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons analysé les vibrations libres des arbres coniques tournants en matériaux composites. La version p et les versions conventionnelle de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments ont été utilisées.

On a présenté aussi une étude comparative de deux modélisations par éléments finis de fonctions de forme polynômiales et trigonométriques de rotors. D'après les résultats de simulations numériques on a tiré les conclusions suivantes :

- \* la version p des éléments finis conique polynômiales permet d'obtenir de très bonnes prédictions sur le comportement dynamique des rotors à arbre conique en matériaux composites par rapport aux fonctions de forme trigonométriques.
- \* L'avantage de la modélisation par éléments conique trigonométriques réside dans la précision des résultats.
- \* L'augmentation des valeurs des fréquences propres et les vitesses critiques de l'arbre conique impliquent la rigidité de l'arbre conique par apport à l'arbre cylindrique dans les mêmes conditions.

# Conclusion générale



## **Conclusion générale**

Dans cette étude, nous avons analysé les vibrations libres des arbres coniques en matériaux composites. Nous avons utilisé la version p et la version conventionnelle h de la méthode des éléments finis. Plusieurs paramètres ont été mis en évidence, à savoir, le nombre d'élément, le nombre des fonctions de forme et les conditions aux limites.

Ce travail présente aussi une étude comparative de deux modélisations par la méthode des éléments finis de fonction forme polynômiale et trigonométrique de rotor et celles relatives à l'approche conventionnelle cylindrique.

Les résultats obtenus, nous ont permis de déduire les conclusions suivantes :

- 1- L'avantage de la modélisation par de la version p des éléments finis réside dans la précision des résultats par rapport à la version h et la version h-p.
- 2- Les résultats de simulations numériques sont présentés pour montrer les besoins et les avantages des développements des arbres coniques par éléments finis.
- 3- l'utilisation des fonctions de forme polynomiales permet d'obtenir de très bonnes prédictions sur le comportement dynamique des rotors par rapport aux fonctions de forme trigonométriques.
- 4- L'augmentation des valeurs des fréquences propres et les vitesses critiques de l'arbre conique impliquent la rigidité de l'arbre conique par apport à l'arbre cylindrique et celle de l'arbre tournant en acier.
- 5- Les caractéristiques dynamiques et notamment les fréquences propres, les vitesses critiques et la rigidité de flexion et de cisaillement de l'arbre tournant en matériaux composites sont influencées sensiblement en changeant l'orientation des fibres, la longueur, le diamètre moyen, la vitesse de rotation.

Les perspectives d'étude qui peuvent être menées à la suite de ce travail : une étude qui prend un rotor à arbre conique en FGM (Functionally Graded Materials) pour vérifier la caractérisation de l'amortissement interne sur les fréquences propres du système en rotation dans le repère fixe et identifier la fréquence associé au matériau.

## **Références bibliographiques**

- [1] Ruhl.L.and Booker.J.L. ‘A Finite Element Model for Distributed parameter Turborotor Systems’, ASME Journal of Engineering for Industry, 1972, pp.126-132.
  - [2] Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., ‘The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements’, Journal of Engineering for Industry, 1976, pp.593-600.
  - [3] Gash R., ‘Vibrations of large turbo-Rotors in fluid film bearings on an Elastic Foundation’, Journal of Sound and Vibration, 1976, pp 53-73.
  - [4] Zorzi , E.S., and Nelson, H. D. ‘A finite element simulation of Rotor-Bearing Systems with internal damping’, Journal of Engineering for Industry, vol.99,No.1,jan.1977, pp.71-76.
  - [5] Nelson, H. D., ‘A finite rotating shaft element using !bean theory’, journal of mechanical design vol.4 oct.1980 , pp.793-803.
  - [6] Ozguven,H.N, and Ozkan,Z.L. ,‘whirl speeds and Unbalance Responses of multibearing Rotor using Finite Element ’, Design and production technical conference, sept 1983.pp 83-89 .
  - [7] Ku. D. M. Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. Mechanical Systems and Signal Processing,1998, 12(5) :599— 610.
  - [8] Hashish E. and Sankar T.S., ‘A finite element and Modal Analyses of Rotor-Bearing Systems Under Stochastic Loading Conditions’, ASME Journal of Vibration, Acoustics, stress, and Reliability in Design .1984, pp.80-89.
  - [9] K. E. Rouch and J.S.Kao . ‘A tapered beam finite element for rotor dynamic analysis’, journal of sound and vibration 1979,pp.66-119-140 .
  - [10] Archer,J.S., ‘consistent matrix formulation for Structural Analysis Using Finite Elemen Techniques’, Journal of the structural division , 1965, pp. 1910-1918.
  - [11] D.L.Thomas, J.M. Wilson journal of sound and vibration 1973,pp.31-315-330 .
  - [12] Greenhill .L.M., Bickford .W.B. and Nelson, H.D. ‘A conical beam finite element for rotor dynamics analysis ’ Journal of Sound and Vibration, 1985, pp. 421.430
  - [13] Edney,S.L., FOX C.H.J and Williams,E.J., ‘Finite Element Analyses of tapered Rotors ’, proc .seventh International Modal Analysis conference, Las vegas,2,1989,pp 1402-1407
  - [14] Gmür T.C. and Rodrigues J.F ‘A Shaft Finite Element for Rotors Dynamics Analysis ’ Journal of Sound and Vibration,
  - [15] Edney,S.L., FOX C.H.J and Williams,E.J., ‘Finite Element Analyses of tapered Rotors ’, Journal of Sound and Vibration 1990,pp 463-481
  - [16] G.Genta and A.Gugliotta , ‘ un modello per studio dinamico dei VII congres naz AIMETA 1984
-

- [17] Jones, R.M. « Mechanics of composite materials. » Washington D.C., USA : Scripta Book Company, 1975, 355 p. ISBN 0070327904.
  - [18] Kim, J.K. & Mai, Y.W. « Engineered interfaces in fiber reinforced composites.» Pays-Bas : Elsevier Science Ltd., 1998, 416 p. ISBN 0080426956.
  - [19] Reinhart, T.J. & Clements, L.L. « Introduction to composites. » Dans : Engineered materials handbook - Volume 1 : Composites. Ohio, USA : ASM International, 1993, p. 27-34. ISBN 0871702797 (v.1).
  - [20] M. Reyne, Les composites, Presses Universitaires de France (PUF), Novembre 2007.
  - [21] Hashin, Z., Rosen, B.W., Humphreys, E.A., Newton, C. & Chatterjee, S. « Fiber composite analysis and design : Composite materials and laminates, Volume I. » Washington D.C., USA : Federal Aviation Administration, 1997, N° DOT/FAA/AR-95/29-I, 339 p.
  - [22] Gürdal, Z., Haftka, R.T., & Hajela, P. « Design and optimization of laminated composite materials. » Canada : Wiley-Interscience Publication, 1999, 352 p. ISBN 047125276X.
  - [23] G.P.Sendeckyj. « Elastic Behaviour of composites, Mechanics of Composite Materials » Vol II, Ed.sendeckyj,G.P , Academic Press,1974.
  - [24] I.M. Berthelot, « Matériaux Composites Tec&doc, 3<sup>eme</sup> édition Paris.
  - [25] Slimani Mohande "Thèse de Doctorat en Sciences "Optimisation des structures mécaniques composites en vibrations" octobre 2008.
  - [26] Z.Hashin, « Theory of Fiber Reinforced Materials » NASA CR-1974,1972
  - [27] R.M. Christensen , « Mechanics of Composite Materials » Wiley- interscience ,1979 .
  - [28] C. D. Kim, C. W. Bert, Critical Speed Analysis of Laminated Composite, Hollow Drive Shafts, Composites Engineering, 3 (1993) 633–643.
  - [29] C. W. Bert, C. D. Kim, Dynamic Instability of Composite-Material Drive Shaft Subjected to Fluctuating Torque and/or Rotational Speed, Dynamics and Stability of Systems, 2(1995) 125-147.
  - [30] M. Y. Chang et al, A Simple Spinning Laminated Composite Shaft Model, International Journal of Solids and Structures. 41(2004) 637–662.
  - [31] C. Y Chang et al, Vibration Analysis of Rotating Composite Shafts Containing Randomly Oriented Reinforcements, Composite structures, 63 (2004) 21-32.
  - [32] S. P. Singh, Some Studies on Dynamics of Composite Shafts, Ph. D Thesis, Mechanical Engineering Department, IIT, Delhi, India, 1992.
  - [33] K. Gupta, S. E. Singh, Dynamics of Composite Rotors, Proceedings of Indo-US symposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering, New Delhi, India. (1996) 59-70.
-

- [34] S.P. Singh, K. Gupta, Dynamic Analysis of Composite Rotors, 5th International Symposium on Rotating Machinery (ISROMAC-5), also International Journal of Rotating Machinery, 2 (1994)179-186.
  - [35] S. E. Singh, K. Gupta, Experimental Studies on Composite Shafts, Proceedings of the International Conference on Advances in Mechanical Engineering, Bangalore, India. (1995)1205-1221.
  - [36] S. P. Singh, K. Gupta, Composite Shaft Rotordynamic Analysis Using a Layerwise Theory, Journal of Sound and Vibration, 191, 5 (1996) 739–756.
  - [37] I. Babuška, B. A Szab , I. N. Katz, The p- Version of The Finite Element Method,
  - [38] Siam Journal on Numerical Analysis, 18 (1981) 515-545.
  - [39] B. A. Szab , G. J. Sahrman, Hierarchical Plate and Shells Models Based On p-
  - [40] Extension, Int. J. Num. Meth, Eng. 26 (1988) 1855-1881.
  - [41] B. A. Szab , I. Babuška, Finite Element Analysis, John Wiley & Sons. Inc, New York.1991.
  - [42] L. Meirovitch, H. Baruh, On the Inclusion Principle for the Hierarchical Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng, 19 (1983) 281-291.
  - [43] D. C. Zhu, Development of Hierarchical Finite Element Method at BIAA, Proc. of the International Conference on Computational Mechanics, Tokyo, I (1986) 123-128.
  - [44] N. S. Bardell, The Application Of Symbolic Computing To Hierarchical Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng, 28 (1989) 1181-1204.
  - [45] A. Coté, F. Charron, On the Selection of p- Version Shape Functions for Plate Vibration Problems, Computers and Structures, 79 (2001) 119-130.
  - [46] <http://www.cpl-composites.com>.
  - [47] <http://www.compositesworld.com>
  - [48] R.sino thèse de doctorat Comportement dynamique et stabilité des rotors: application aux rotors composites 04 octobre 2007.
  - [49] Boukhalfa abdelkrim thèse de doctorat Comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites 12 mai 2009 .
  - [50] L. Meirovitch, H. Baruh, On the Inclusion Principle for the Hierarchical Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng, 19 (1983) 281-291.
  - [51] O. A. Bauchau 1983 Journal of Composite Materials 17, 170}181. Optimal design of high speed rotating graphite/epoxy shafts .
  - [52] J.M. Berthelot, Matériaux Composites, Comportement Mécanique et Analyse des Structures, Masson, Paris, Deuxième édition, 1996.
  - [53] Houmat, A Sector Fourier p- element Applied to Free Vibration Analysis of Sector
-

- Plates, Journal of Sound and Vibration, 243 (2001) 269-282.
- [54] S. Dharmarajan And H. Mccutchen, JR. 1973 Journal of Composite Materials 7,530}535. Shear coefficients for orthotropic beams.
- [55] G. R. Cowper 1966 Journal of Applied Mechanics 33, 335}340. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory
- [56] C.W. Bert, C.D. Kim, Whirling of Composite-Material Driveshafts Including Bending, Twisting Coupling and Transverse Shear Deformation, Journal of Vibration and Acoustics, 117 (1995) 17-21.
- [57] C. D. Kim, C. W. Bert, Critical Speed Analysis of Laminated Composite, Hollow Drive Shafts, Composites Engineering, 3 (1993) 633–643.
- [58] C. Y Chang et al, Vibration Analysis of Rotating Composite Shafts Containing Randomly Oriented Reinforcements, Composite structures, 63 (2004) 21-32.
- [59] C.W. Bert, C.D. Kim, Whirling of Composite-Material Driveshafts Including Bending, Twisting Coupling and Transverse Shear Deformation, Journal of Vibration and Acoustics, 117 (1999) 17-21.
-