REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & Matériaux**

Présentée par

DRAICHE Kada

Intitulée de la thèse

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE LA VIBRATION DES PLAQUES COMPOSITES COMPORTANT DES PATCHS

Soutenu le 26 Novembre 2014 devant le jury composé de :

M^{r}. **E. ADDA BEDIA**	Pr	UDL SBA	**Président**
M^{r}. **A. TOUNSI**	Pr	UDL SBA	**Rapporteur**
M^{r}. **M. BACHIR BOUIADJRA**	MCA	UDL SBA	**Examinateur**
M^{r}. **T.H. DAOUADJI**	MCA	U DE TIARET	**Examinateur**
M^{r}. **M.S.A. HOUARI**	MCA	U DE MASCARA	**Examinateur**
M^{r}. **R. YEGHNEM**	MCA	U DE SAIDA	**Examinateur**

Année universitaire 2014-2015

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédicaces

À la mémoire de ma chère mère et sœur,

À mon cher père,

À ma femme et mes enfants,

À ma famille,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

Ce travail est le fruit de quatre années de recherche passées au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l’Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes, où j’ai eu la chance de pouvoir travailler et vivre dans une ambiance exceptionnelle entourée par une équipe aussi sympathique que motivée.

Je tiens tout d’abord à souligner la qualité de l’encadrement remarquable qui m’a permis d’effectuer mes premiers pas de chercheur dans d’excellentes conditions. Professeur **Abdelouahed Tounsi** a proposé un sujet de recherche passionnant et original. Sa pédagogie et sa rigueur scientifique ont rendu très constructives les années passées ensemble. Je tiens en particulier à le remercier pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son expérience et ses projets.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Monsieur **El Abbes ADDA BEDIA**, professeur et directeur de laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de m’avoir fait l’honneur et le plaisir de présider mon jury de thèse, pour m’avoir accueilli dans leur laboratoire et les moyens donnés pour réaliser ce travail. Je ne sais comment le remercier pour sa disponibilité, sa patience, ses conseils et tout ce qu’il a pu m’apprendre au cours de ces quatre années.

Mes sincères remerciements s’adressent également à Messieurs, Mohamed **BACHIR BOUIADJRA,** Tahar **HASSAINE DAOUADJI,** Mohamed Sid Ahmed **HOUARI** et Redha **YEGHNEM,** pour l’intérêt qu’ils ont porté à ce travail en acceptant de l’examiner. Qu’il me soit permis de leurs exprimer ma profonde gratitude.

Enfin, je ne saurais terminer sans adresser mes chaleureux remerciements à mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, mes parents, tous mes amis, pour les nombreuses discussions, pour leur participation à la mise en forme de ce document et à la préparation de la soutenance de Thèse.

ملخص

الجديد من هذا العمل هو استخدام نظرية الصفائح ذات أربع متغيرات مثلثية لأجل تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المستطيلة المتكونة من عدة طبقات و مدعمة بكتلة الباتش المحددة. بقسمة الحركة العرضية إلى جزئين، الأول ناتج عن الانحناء و الثاني عن القص، يخفض عدد المجاهيل و معادلات التوازن لهذه النظرية الحالية، و ذلك ما يجعل هذه النظرية بسيطة للاستخدام. يتم تطبيق مبدأ هاملتون باستخدام نظرية تشوه القص المثلثي للصفائح المستطيلة المدعومة ببساطة. يتم عرض أمثلة عددية لإظهار آثار المعايير الهندسية مثل طول الصحيفة، أبعاد و موقع كتلة الباتش على الترددات الطبيعية لل صفائح المتكونة من مواد مركبة ذات طبقات. يمكن الاستنتاج أن النظرية المقترحة هي دقيقة وبسيطة في حل سلوك الاهتزاز الحر للصحيفة المستطيلة المركبة من عدة طبقات و مدعمة بكتلة الباتش المحددة.

الكلمات المفتاحية : صفائح ذات طبقات، الاهتزاز الحر، نظرية ذات أربع متغيرات، كتلة الباتش.

Abstract

The novelty of this work is the use of trigonometric four variable plate theory for free vibration analysis of laminated rectangular plate supporting a localized patch mass. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use. The Hamilton's Principle, using trigonometric shear deformation theory, is applied to simply supported rectangular plates. Numerical examples are presented to show the effects of geometrical parameters such as aspect ratio of the plate, size and location of the patch mass on natural frequencies of laminated composite plates. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the free vibration behavior of laminated rectangular plate supporting a localized patch mass.

Keywords: Laminated plates; Free vibration; Four variable plate theory; Patch mass.

Résumé

La nouveauté de ce travail est l'utilisation de la théorie des plaques à quatre variables trigonométriques pour analyser la vibration libre des plaques stratifiées rectangulaires soutenues par une masse de patch localisée. En divisant le déplacement transversal en deux parties « due à la flexion et au cisaillement », le nombre d'inconnues et les équations d'équilibre de la présente théorie est réduit et par conséquent, rend cette théorie simple à utiliser. Le principe d'Hamilton est appliqué en utilisant la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à des plaques rectangulaires avec appui simple. Des exemples numériques sont présentés pour montrer les effets des paramètres géométriques tels que l'allongement de la plaque, la dimension et l'emplacement de la masse du patch sur les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées. On peut conclure que la théorie proposée est précis et simple à résoudre le comportement de vibration libre des plaques stratifiées rectangulaires soutenues avec une masse de patch localisée.

Mots clés: Plaques stratifiées; Vibration libre; Théorie à quatre variables; masse du Patch.

Liste des notations

Liste des notations

Notations	
γ_s	Enthalpie libre de surface de la fibre
γ_l	Enthalpie libre de la résine polymère
γ_{sl}	Enthalpie de l'interface fibre-matrice
W_{adh}	L'énergie d'adhésion
$\overline{C}_{ij}$	Les constantes de la matrice de rigidité réduite
ν_{ji}	Coefficient de poisson
$E_1 = E_L$	Module d'élasticité longitudinal
$E_2 = E_T$	Module d'élasticité transversal
G_{LT}	Module de cisaillement dans le plan (*L*, *T*)
G_{TT}	Module de cisaillement dans le plan (*T*, *T*)
σ_{ii}	Contraintes normales
σ_{ij}	Contraintes de cisaillement
ε_{ii}	Déformations normales
ε_{ij}	Déformations de cisaillement
γ_{ij}	Déformations angulaires (distorsions)
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
θ_k	Angles des strates
h_k	Cotes algébriques de la face supérieure de la couche (k)
h_{k-1}	Cotes algébriques de la face inférieure de la couche (k)
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	Les composantes de déplacement sur le plan moyen de la plaque

A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
B_{ij}^{s}	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^{s}	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^{s}	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^{s}	Termes de rigidité de la matrice
$w_{0,x}$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement)
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes *x, y*
ϕ_x, ϕ_y	Rotations totales de la normale au plan moyen autour des axes *x, y*
θ_x, θ_y	Rotations autour des axes *x, y* (les termes du second ordre)
ψ_x, ψ_y	Rotations autour des axes *x, y* (les termes du troisième ordre)
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse (gauchissement)
$[K]$	Matrice rigidité globale
$[\overline{M}]$	Matrice masse globale
δ	l'opérateur variationnel
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
M	Masse du patch
M_p	Masse de la plaque
c, d	Dimensions de patch
ρ	Densité du matériau
γ_M	Masse du patch par unité de surface
A_P	Surface de la plaque
A_M	Surface du patch
ω	Fréquence propre
Ω	Fréquence fondamentale adimensionnelle
U_P	Energie de déformation de la plaque
T_P	Energie cinétique de la plaque
T_M	Energie cinétique de la masse du patch

Liste des abréviations

Liste des abréviations

Abréviations	
ESLM	Equivalent Single Layer models
LW	Layer-Wise
CLPT	Classical Laminated Plate Theory
FSDT	First Order Shear Deformation Theory
TSDT	Third Order Shear Deformation Theory
HSDT	Higher Order Shear Deformation Theory
SSDT	Sinusoïdal Shear Deformation Theory
ESDPT	Exponential Shear Deformation Plate Theory
RPT	Refined Plate Theory
GD	Composites à Grande Diffusion
HP	Composites à Hautes Performances
CMO	Composites à matrice organique
CMM	Composites à matrice métallique
CMC	Composites à matrice céramique
TD	Matrices thermodurcissables
TP	Matrices thermoplastiques
PP	Polypropylène
PPS	Polysulfure de phénylène
PA	Polyamide
PES	Polyéther-sulfone
PEI	Polyéther-imide
PEEK	Polyéther-éther-cétone
HR	Fibres à haute résistance classique
HM	Fibres à haut module
PP	Polypropylène
PA	Polyamides
PE	Polyéthylène
ABS	Acrylonitrile butadiène styrène
PEEK	Polyéther-éther-cétone
RAAF	Royal Australian Air Force
AMRL	Aeronautical and Maritime Research Laboratory

Liste des figures

Liste des figures

Chapitre I		
Figure I.1	Les différents types de composites	9
Figure I.2	Constituants d'un matériau composite	9
Figure I.3	Pli à Renforcement unidirectionnel	19
Figure I.4	Matériau composite stratifié	19
Figure I.5	Structure composite sandwich	20
Figure I.6	Structure composite sandwiche	27
Chapitre II		
Figure II.1	Mécanismes de rupture observés dans un stratifié	27
Figure II.2	Différents types de fissuration de la matrice	28
Figure II.3	Décohésion fibre-matrice	28
Figure II.4	Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice	29
Figure II.5	Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice	29
Figure II.6	Rupture de fibre	30
Figure II.7	Flambement local des fibres	30
Figure II.8	Délaminages observés par photographie d'une tranche d'éprouvette stratifiée verre-époxy	31
Figure II.9	Nature des dommages sur les aéronefs civils (source Airbus)	32
Figure II.10	Différents types de dommages rencontrés sur pièces composites	33
Figure II.11	Exemples de patchs rivetés et collés d'après Baker	35
Figure II.12	Schéma de réparation par patch externe	35
Figure II.13	Réparation par patch riveté sur fuselage de Boeing	36
Figure II.14	Opération de ponçage de la zone endommagée pour réparation	37
Figure II.15	Schéma de la réparation biseautée par patch	38
Figure II.16	Schéma de réparation en escalier par patch interne	38
Figure II.17	Préparation de surface pour collage des patchs internes	38
Figure II.18	Dommage présent sur l'Alphajet	39

Chapitre III		
Figure III.1	Nomenclature des stratifiés composites	43
Figure III.2	Modélisation géométrique de stratifié	46
Figure III.3	Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée	51
Figure III.4	Moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée	52
Figure III.5	Directions principales d'un matériau unidirectionnel/ à renfort tissu	54
Figure III.6	Stratifié hors axes	56
Figure III.7	Cinématique de Love-Kirchhoff	59
Figure III.8	Cinématique de Reissner-Mindlin	60
Figure III.9	Cinématique de la théorie d'ordre élevé	61
Figure III.10	Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche	64
Chapitre IV		
Figure IV.1	Plaque avec masse de patch distribuée	67
Chapitre V		
Figure V.1	Influence d'orthotropie sur la fréquence fondamentale adimensionnelle (Ω) pour une plaque carrée avec $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$, $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}_p=0.5$, $\boldsymbol{c}/\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d}/\boldsymbol{b}=0.4$, Matériau 3	83
Figure V.2	Influence du rapport longueur/épaisseur sur la fréquence fondamentale adimensionnelle (Ω) pour une plaque carrée avec $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}_p=0.5$, $\boldsymbol{c}/\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d}/\boldsymbol{b}=0.4$, Matériau 3	84
Figure V.3	Effet du rapport de masse sur la fréquence fondamentale adimensionnelle (Ω) pour une plaque carrée, $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$, Matériau 3	85

Liste des tableaux

Liste des tableaux

Chapitre I		
Tableau I.1	Caractéristiques des matrices thermodurcissables	11
Tableau I.2	Caractéristiques des matrices thermoplastiques	12
Tableau I.3	Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort	16
Tableau I.4	Caractéristiques mécaniques des fibres de bore	16
Tableau I.5	Liaisons interatomiques	18
Chapitre II		
Tableau II.1	Exemples de réparations par patchs composites effectuées par la RAAF	40
Chapitre V		
Tableau V.1	propriétés matérielles sans dimension des matériaux utilisés	78
Tableau V.2	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée antisymétrique (Matériau 2) pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie avec $a/h=5$	79
Tableau V.3	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque rectangulaire $[45/-45]_2$, (Matériau 3) avec différents rapports a/b et a/h	80
Tableau V.4	Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée [0/90] avec le rapport $a/h=10$	81
Tableau V.5	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré $[45/-45]_2$ (Matériau 3)	82
Tableau V.6	Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré $[30/-30]_2$ (Matériau 3)	82

Table des matières

Table des matières

ملخص i
Abstract ii
Résumé iii
Liste des notations iv
Liste des abréviations vi
Liste des figures vii
Liste des tableaux ix

Introduction générale 1

Chapitre I Généralités sur les matériaux composites 6

I.1 Introduction 6
I.2 Classification des matériaux composites 7
I.2.1 Composites à renforts de particules 8
I.2.2 Composites à renforts de fibres 8
I.2.3 Composites à renforts de paillettes.. 8
I.2.4 Composites stratifiés.. 8
I.3 Les constituants de base d'un matériau composite 9
I.3.1 La matrice 10
I.3.1.1 Matrices organiques ou résineuses 10
I.3.1.2 Matrices métalliques 12
I.3.1.3 Matrices céramiques 13
I.3.2 Les renforts 13
I.3.2.1 Les fibres de verre 13
I.3.2.2 Les fibres de carbone 14
I.3.2.3 Les fibres d'aramides (Kevlar) 15
I.3.2.4 Les fibres de bore 16
I.3.3 Charges et additifs 16
I.3.4 L'interface fibre-matrice 17
I.4 Les matériaux composites structuraux 18
I.4.1 Les monocouches 19
I.4.2 Les stratifiés 19
I.4.3 Les Sandwichs 20

I.5 Domaines d'Application des matériaux composites 21
I.5.1 Produits aéronautiques 21
I.5.2 Produits militaires 22
I.5.3 Produits spatiaux (satellites).................................... 22
I.5.4 Construction navale 22
I.5.5 Construction civile 23
I.6 Qualités générales des matériaux composites 24
I.7 Conclusion 24

Chapitre II Endommagements et réparations des composites 25

II.1 Introduction 25
II.2 Définition d'endommagement 25
II.3 Endommagement des composites stratifiés 26
II.4 Mécanismes d'endommagement et de rupture 26
II.4.1 Fissuration de la matrice 27
II.4.2 Décohésion fibre-matrice 28
II.4.3 Rupture des fibres 30
II.4.4 Délaminage 30
II.5 Source des dommages rencontrés en aéronautique 31
II.6 Les différents types de dommages en aéronautiques 32
II.7 Renforcement et réparations des composites aéronautiques 33
II.7.1 Réparation 34
II.7.1.1 Réparation par collage des patchs externes 35
II.7.1.2 Réparation par collage des patchs internes 37
II.7.2 Renforcement 39
II.7.3 Exemples d'applications 40
II.8 Conclusion 41

Chapitre III Théories des plaques composites stratifiées 42

III.1 Introduction 42
III.2 Définition d'un stratifié 43
III.3 Modélisation géométrique 45
III.4 Comportement mécanique des matériaux stratifiés 46
III.4.1 Champ des déplacements 47
III.4.2 Champ des déformations 47
III.4.3 Champs de contraintes 49
III.4.4 Comportement en membrane-flexion-torsion 50
III.4.4.1 Comportement en Membrane 50
III.4.4.2 Comportement en flexion et torsion 52

III.4.5 Equation constitutive de la théorie classique ………...………………...….. 53
III.5 Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope ………..……………..…………… 54
III.5.1 Équations de mouvement des stratifiés orthotropes ………...…………… 55
III.5.1.1 Stratifié orthotrope dans ses axes ………..………………...…. 55
III.5.1.2 Stratifié orthotrope hors axes ………...……………...………. 56
III.6 Modèles de structures multicouches ………...……………...…………..…………. 57
III.6.1 Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente ………...…..…… 57
III.6.1.1 Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) ……...…….. 58
III.6.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ………...……………...…………...………………...…. 59
III.6.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ………...……………...…………...………………...…. 60
III.6.2 Approche par couche ………...……………...…………...………………… 63
III.6.3 Approche développement asymptotique ………...……………...……….. 64
III.7 Conclusion ………...……………...…………...……………...…………...………… 65

Chapitre IV Etude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée renforcée par patch 66

IV.1 Introduction ………...……………...…………...……………...…………...………… 66
IV.2 Théorie d'ordre élevé à quatre variables ………...……………...…………...…….. 67
IV.2.1 Configuration géométrique ………...……………...…………...…………. 67
IV.2.2 Hypothèses et Champ de déplacement de la nouvelle théorie ………... 68
IV.2.3 Champs des déformations ………...……………...…………...…………… 69
IV.2.4 Champs des contraintes ………...……………...…………...……………… 69
IV.2.5 Energie de déformation ………...……………...…………...……………… 71
IV.2.6 Energie cinétique ………...……………...…………...……………...…….. 73
IV.2.7 Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée … 74
IV.3 Conclusion ………...……………...…………...……………...…………...………… 76

Chapitre V Résultats et discussions 77

V.1 Introduction ………...……………...…………...……………...…………...………… 77
V.2 Choix des matériaux composites ………...……………...…………...……………… 78
V.3 Effet du rapport d'orthotropie E1/E2 (cas d'un stratifié croisé) ………...………… 79
V.4 Effet de la géométrie de la plaque (cas d'un stratifié équilibré) ………...……….. 80
V.5 Effet de la présence de la masse du patch ………...……………...………………….. 81
V.6 Conclusion ………...……………...…………...……………...…………...………… 85

Conclusion générale et perspectives 87

Références bibliographiques ………...……………...…………...……………...………… 90

Introduction générale

Introduction générale

Les performances des matériaux composites présentent de nombreux intérêts pour la conception des structures mécaniques. On peut citer notamment un rapport résistance/poids élevé, l'absence de corrosion, l'amortissement des vibrations ou encore la résistance au choc. L'utilisation de ces matériaux, dont les atouts sont particulièrement intéressants dans des secteurs industriels de pointe tels que l'aéronautique, se heurtent encore toutefois à certains freins liés à des mécanismes d'endommagement et de rupture relativement complexes. Actuellement les composites stratifiés sous forme de plaques ou de poutres constituent un sujet de recherche important, suite à leurs utilisation croissante en construction, et la tendance permanente vers une meilleure optimisation de résistance et de rigidité, ils sont des éléments structuraux qui couvrent un large éventail de besoins industriels. Leurs utilisations nécessitent la mise en œuvre d'outils performants indispensables à la modélisation de leur comportement mécanique et au dimensionnement de structures pour lesquelles ils sont utilisés [1].

L'analyse vibratoire est une question d'actualité importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire. Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations importants. D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire de plaque devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement. L'étude et l'analyse des vibrations ont pris au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement du comportement dynamique du matériau isotrope, orthotrope ou composite. Le contrôle des vibrations dans ces structures plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur qu'à l'ingénieur. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure est indispensable.

L'analyse de vibration libre des plaques rectangulaires qui font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés a été un sujet de recherche actif en raison de leur grande importance à être employées pour les différents secteurs de l'industrie mécanique, aéronautique et pour le génie civil, à cet effet de nombreux travaux de recherches approfondies ont été accumulés au cours des 50 dernières années (Timoshenko [2], Mishal [3], Szilard [4], Reddy [5]). Ces composants structuraux avec une masse de patch localisée sont souvent rencontrés dans les pratiques d'ingénierie telles que la technologie aéronautique et spatiale, les dalles et panneaux de revêtement dans les structures de construction d'ouvrages d'art, les ponts et la construction des navires, ou encore les équipements électroniques sont souvent placés à proximité des dispositifs pyrotechniques. Ils subissent donc un environnement vibratoire très sévère pouvant les endommager.

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées dans l'industrie et les nouveaux domaines de la technologie aérospatiale, automobile, marine, civil et autres applications structurelles en raison des caractéristiques avantageuses comme le rapport rigidité/poids élevé, un gain important de masse, une bonne résistance aux conditions extrêmes de température et de pression, ainsi qu'une grande longévité nécessaire lors de missions spatiales de longue durée et même le coût d'entretien qui est faible. En vue de l'augmentation de la demande de stratifiés en ouvrages d'art, une variété de théories des stratifiés a été développée.

La théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) qui se base sur les fameuses hypothèses de kirchhoff, selon laquelle une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse, l'approche de cette étude fournit des résultats raisonnables uniquement pour les plaques minces et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotropes. Cependant, la CLPT sous-estime les flèches et surestime les fréquences naturelles ainsi que les charges de flambement des plaques moyennement épaisses. De nombreuses théories de déformation en cisaillement ont été développées sur la base d'expliquer les effets de cisaillement transverse pour surmonter les insuffisances de la théorie CLPT. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) basée sur Reissner [6] et Mindlin [7] qui exige la prise en compte des déformations du cisaillement transverse au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan médian à travers l'épaisseur. Puisque la FSDT viole les conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieures des plaques, les facteurs de correction de cisaillement sont nécessaires afin de rectifier la variation irréaliste de la déformation en cisaillement et la contrainte à travers l'épaisseur. Par la suite, différentes théories d'ordre supérieur plus précises que les modèles du premier ordre ont été proposées afin de satisfaire les conditions aux limites sur les bords libres de la plaque. Ambartsumian [8] a proposé une fonction de la contrainte de cisaillement transverse afin d'expliquer la déformation de la plaque. Une méthode similaire a été utilisée plus tard par Soldatos et Timarci [9], pour une analyse dynamique de coques stratifiées. Ensuite, quelques nouvelles fonctions ont été proposées par Reddy [10], Touratier [11], Karama et al. [12] et Soldatos [13]. La théorie des plaques raffinée à deux variables (RPT) en utilisant seulement deux fonctions inconnues a été développée par Shimpi [14] pour des plaques isotropes et a été prolongée par Shimpi et Patel [15, 16] pour des plaques orthotropes. Alibeigloo et al. [17] ont étudié la réponse vibratoire des plaques stratifiées antisymétriques de forme géométrique rectangulaire avec une série de patch distribuée en utilisant la théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre (TSDT) et ont obtenu la première fréquence naturelle de la plaque compte tenu de la dimension et l'emplacement de la masse distribuée sur la surface supérieure de la plaque. Alibeigloo et Kari [18] ont également étudié le comportement de vibration forcée des plaques rectangulaires stratifiées antisymétriques avec une série de patch distribuée. Seung- Eock et al. [19] ont utilisé la théorie de plaque raffinée à quatre variables pour les plaques composites stratifiées qui sont sous l'action de la contrainte transversale au plan moyen et ils ont obtenu les deux matrices, l'une de rigidité et l'autre de masse en utilisant le principe d'Hamilton. Alibakhshi [20] a utilisé la théorie raffinée à deux variables avec seulement quatre fonctions inconnues développée pour analyser la vibration libre d'une plaque rectangulaire stratifiée réparée par une masse de patch localisée. Tounsi et al. [21] ont étudié la réponse des plaques sandwichs en matériaux à gradient de propriétés soumises à la flexion en utilisant une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables dans les deux conditions de chargement thermiques et thermomécaniques. Bouderba et al. [22] ont utilisé la nouvelle théorie d'ordre élevé pour l'étude la réponse en flexion du comportement mécanique et thermomécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Récemment, Nedri et al. [23] ont développé une théorie de plaque raffinée à quatre variables pour analyser la réponse de vibration libre des plaques composites stratifiées reposant sur des fondations élastiques. La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects n'exige pas un facteur de correction de cisaillement, et donne une description trigonométrique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque.

L'objectif principal de ce travail de thèse a été s'inscrit dans le cadre d'une étude développée sur un modèle de calcul analytique de la vibration libre d'une plaque composite stratifiée antisymétrique simplement appuyée et renforcée avec une masse de patch distribuée en utilisant une théorie d'ordre élevé des plaques à quatre variables trigonométriques. La présente théorie ne possède que quatre inconnues et quatre équations de mouvements, mais elle satisfait aux conditions aux limites de nullité des contraintes de cisaillement transverse sur les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sans avoir besoin de facteurs de correction de cisaillement. Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en fonction d'un déplacement transversal constant et une variation sinusoïdale de déplacements membranaires à travers l'épaisseur. La superposition du déplacement transversal en deux parties (due à la flexion et au cisaillement) conduit à une réduction dans le nombre d'inconnues et des équations d'équilibre, par conséquent, rend la théorie simple à utiliser par rapport aux autres théories de déformation de cisaillement proposées dans la littérature qui emploient cinq inconnues ou plus. L'effet de différents paramètres tels que la position de la masse du patch et le rapport géométrique des dimensions de la plaque sur la vibration libre sont également étudiés dans le présent travail.

La thèse débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de cinq chapitres et s'achève par une conclusion et des perspectives. Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites en donnant une vision assez large des principaux constituants, à savoir les résines, les renforts et leurs propriétés mécaniques, en particulier les matériaux composites structuraux, en parlant sur le domaine d'application et la diffusion de ces matériaux dans les différents secteurs de construction.

L'objectif de deuxième chapitre est de présenter les principaux mécanismes d'endommagement qui se produisent au sein d'un matériau composite stratifié. Après définition de ce phénomène qui est irréversible et peut conduire à terme à la ruine totale du composite, nous essayons de présenter quelques notions sur la réparation par des patchs afin de cerner les applications et l'utilisation de cette technique. Ces derniers sont le plus souvent utilisés en réparation et commencent à voir des applications dans le domaine du renforcement. Ils sont généralement collés dans les zones soumises à de fortes concentrations de contrainte.

Ils permettent alors soit de ponter les fissures qui apparaissent sur les plaques ou les coques composites telles que le fuselage des avions dans le cas de la réparation, soit d'affaiblir les vibrations afin de retarder l'apparition des fissures dans le cas du renforcement préventif des structures aéronautiques.

Dans le troisième chapitre, également à forte dominante bibliographique, nous présenterons la théorie classique des plaques stratifiées, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques composites correspondantes. L'étude repose sur les travaux réalisés durant la dernière décennie, faisant chaque fois le recours à leurs descriptions authentiques fondées sur des théories antérieures. L'évaluation de la performance et l'efficacité numériques de ces contributions demeurent dans un cadre général de comparaison et qui ne dépasse pas ce qu'ont été signalé par les auteurs eux-mêmes.

Le quatrième chapitre est consacré à une étude analytique très importante pour le domaine de la conception des structures composites, il s'agit du comportement vibratoire des plaques stratifiées simplement appuyées et renforcées à sa surface supérieure par une série de patchs en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur à quatre variables.

Le cinquième chapitre est réservé pour commenter les résultats numériques obtenus par la validation du présent modèle sur deux types de plaques stratifiées antisymétriques, à plis croisés et à plis équilibrés en absence et en présence de la masse du patch, afin d'étudier l'influence de ce dernier sur les fréquences propres. Plusieurs facteurs ont été pris en considération au profit de cette recherche (les propriétés matérielles, la séquence d'empilement, la géométrie de la plaque,…etc.) pour observer leurs effets sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées.

Enfin, ce manuscrit se termine par une conclusion générale permettant de mettre l'accent sur les différents résultats originaux de ce travail et des perspectives décrivant des voies d'amélioration à poursuivre.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes.

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leurs constituants, de leur distribution et de leur répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique. A la différence des matériaux classiques, les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit. Le produit est réalisé en même temps que le matériau. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des singularités fondamentale des composites. Il est possible de contrôler les propriétés souhaitées par un arrangement des renforts lors de la conception de la pièce.

Les matériaux composites sont généralement scindés en deux catégories :

– les composites à Grande Diffusion (GD) allient des coûts faibles à des caractéristiques moyennes et s'emploient principalement pour des applications de grandes séries [24]. Ils possèdent des caractéristiques mécaniques spécifiques souvent inférieures à celles des matériaux de référence telle que l'acier. Ils conviennent aux grandes séries et sont généralement à base de fibres de verre. Ils sont employés essentiellement dans les applications non travaillantes pour l'industrie des transports ou pour les biens d'équipement.

– les composites à Hautes Performances (HP) dont les propriétés de la structure autorisent leur emploi dans des structures travaillantes. Ils se caractérisent par des propriétés mécaniques plus élevées que celles des composites GD en contrepartie d'un coût global plus important en raison du prix des matériaux utilisés et des moyens de fabrication associés (autoclave, RTM). Ces matériaux sont utilisés dans des applications de pointe telle que le secteur de l'aéronautique [24].

Les nouvelles technologies nécessitent des matériaux nouveaux à hautes performances, capables de remplacer les matériaux classiques. En effet, les matériaux composites permettent de concevoir et de réaliser des structures améliorées possédant de bonnes propriétés mécaniques alliées à un poids minimal. Ces matériaux ont suscité un intérêt particulier dans de nombreux secteurs tel que, l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, etc.…En développant les matériaux composites, les atouts visés sont :

- la légèreté,
- l'amélioration de propriétés mécaniques,
- une mise en œuvre plus simple et des finitions simplifiées par rapport aux matériaux métalliques (fonderie, chaudronnerie et usinage lourd),
- les gains de coût de production, même si pour le moment cela constitue le principal frein,
- l'intégration d'insert pour augmenter la fonctionnalité.

I.2. Classification des matériaux composites

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts [25, 26]. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (figure I.1) :

- composites à renforts de particules,
- composites à renforts de fibres,
- composites à renforts de paillettes,
- composites stratifiés.

I.2.1. Composites à renforts de particules

Les matériaux composites de particules consistent à mettre des particules d'un ou plusieurs matériaux en suspension dans une matrice. En fait, le meilleur exemple est sûrement le béton. Le béton est composé de particules de sable et de gravier et elles sont liées ensemble par la réaction chimique du ciment et de l'eau qui donne la pâte (matrice). Le béton est donc un composite de particules très complexes puisqu'une multitude de paramètres influence ses propriétés. Plusieurs ouvrages de référence traitent de ces paramètres [27, 28].

I.2.2. Composites à renforts de fibres

Les composites de fibres sont des matériaux composés d'une matrice dans laquelle divers types de fibres sont ajoutés. Le comportement des composites de fibres est beaucoup influencé par le type de fibres et leur nature. Il existe deux grands types de fibres ; les macros-fibres et les microfibres. Les macros-fibres (≈10 mm de longueur et plus) qui sont ajoutées à la structure afin d'augmenter sa ténacité et les microfibres (≈10 mm de longueur et moins) qui sont ajoutées afin d'améliorer principalement la résistance à la traction. La longueur qui caractérise les fibres comme microfibres ou macro-fibres peut varier en fonction de la composition de la matrice.

Le rôle des fibres dans la structure est le même que celui des armatures, c'est-à-dire reprendre les efforts de traction. Les composites à renforts de fibres limitent la formation, la propagation et la coalescence des microfissures au sein de la matrice. Les fibres cousent à la fois les fissures existantes en empêchant leur développement et, limitent la formation d'autres fissures en renforçant la matrice d'acier [29, 30, 31, 32].

I.2.3. Composites à renforts de paillettes

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

I.2.4. Composites stratifiés

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

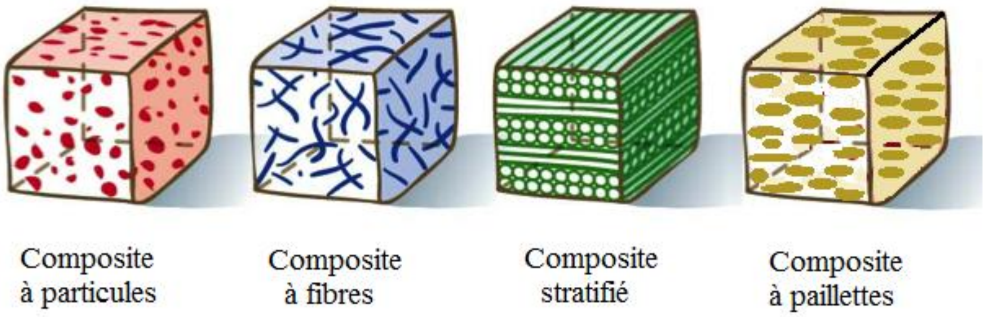


Figure I.1 : *Les différents types de composites.*

I.3. Les constituants de base d'un matériau composite

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont : la matrice, le renfort et l'interface (figure I.2). Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

Le renfort est une sorte de squelette ou armature, qui assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité), souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). La matrice est composée d'une résine thermodurcissable ou thermoplastique, qui lie les renforts, les protège contre les agressions extérieures et donne la forme au produit réalisé. L'interface assure la compatibilité renfort-matrice, transfère les efforts de la matrice au renfort et doit être adaptée aux propriétés visées à l'aide d'un ensimage.

Les « charges » qui sont des ajouts appropriés servent à diminuer les coûts, elles confèrent aussi aux matériaux des propriétés particulières ou complémentaires. Les additifs spécifiques peuvent être soit catalyseur, soit accélérateur de polymérisation, soit colorant ou encore agent de décollage.

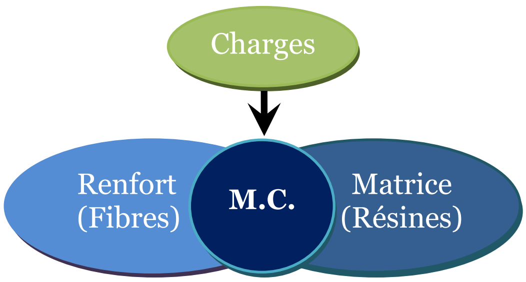


Figure I.2 : *Constituants d'un matériau composite.*

I.3.1. La matrice

La matrice maintient les fibres entre elles en jouant le rôle de liant dans le composite. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final. Pour obtenir des caractéristiques d'imprégnation plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la viscosité de la résine est diminuée avec un apport thermique.

En fonction de leur nature, les matériaux composites sont classés en trois grandes classes : les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être utilisés à des températures supérieurs à 300°C, les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilises jusqu'à 600°C, et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de 1000°C. Dans le cadre de ce chapitre nous intéressons à la caractérisation d'un matériau composite à matrice organique dont les caractéristiques structurelles et mécanique seront détaillées.

I.3.1.1. Matrices organiques ou résineuses

La conception et la réalisation de pièces composites à matrice organique (CMO), en particulier de pièces structurales ou de grandes dimensions, sont un enjeu majeur dans de nombreux secteurs industriels : transports, génie civil, bâtiment, aéronautique, construction navale, etc. Les gains potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc. Or, ils doivent également répondre à des critères de durabilité sur du long terme et leur utilisation optimale, dans des conditions extrêmes d'environnement (température, humidité, pollutions éventuelles) et de sollicitations (chargements statique et dynamique), nécessite de se doter d'une méthodologie validée de caractérisation et de prévision des comportements en utilisation. Le comportement à long terme des CMO dépend de leur composition (matrice, renfort), des additifs (stabilisants, anti-UV, charges minérales), de la pureté, de la masse moléculaire des monomères ainsi que de la nature des renforts et de l'orientation des fibres. La fabrication des CMO emploie deux types de matrices: les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des CMO actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées, mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclabilité (réutilisation après broyage).

- Matrices thermodurcissables

Ce sont les polymères les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux". Ces résines, sous forme liquide à l'état initial, subissent une transformation irréversible (elles ont la particularité de n'être mises en forme qu'une seule fois) en passant à l'état solide après polymérisation. Leurs caractéristiques thermomécaniques élevées font qu'elles sont les plus employées actuellement. On distingue trois familles de résines thermodurcissables principalement utilisées [33]:

- Les résines phénoliques (résines de condensation) sont utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue au feu imposées par les normes dans les transports civils. Elles présentent l'inconvénient d'être peu résistant aux sollicitations.
- Les résines polyimides présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température par contre elles sont très sensibles aux chocs. Afin de remédier à cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant à des résines thermoplastiques avant polymérisation.
- Les résines époxydes possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Elles sont généralement renforcées par des fibres de carbone ou de verre (longerons, dérives, nacelles, voilure, bateaux et automobiles de compétition, etc.).

Le tableau I.1 ci-dessous regroupe quelques caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.

Matrice TD	Masse volumique Kg/cm3	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
Polyester	1,2	50-65	3000	2,5%
Epoxyde	1,1-1,4	50-90	3000	2%
Polyimide	1,3-1,4	30-40	4000	1%
Phénolique	1,2	40-50	3000	2,5%
Vinylester	1,15	70-80	3500	4%
Polyuréthanne	1,1-1,5	20-50	1000	100%
Silicone	1,1	35	2200	/

Tableau I.1 : *Caractéristiques des matrices thermodurcissables [34].*

- Matrices thermoplastiques

Les matrices thermoplastiques sont constituées de polymères à chaîne linéaire ou ramifiées, c'est-à-dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. A l'inverse des thermodurcissables, c'est la matière première déjà polymérisée qui subit un échauffement, la pièce conservant sa forme après refroidissement. Cette transformation est réversible. Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Les principales résines thermoplastiques sont à base de polyamide, polyéthylène, polycarbonate et polychlorure de vinyle (PVC). Les caractéristiques mécaniques de quelques résines thermoplastiques sont présentées dans le tableau I.2.

Matrice TP	Masse volumique Kg/cm3	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
PP	0,9	30	1200	20-400%
PPS	1,3	65	4000	100%
PA	1,1	70	2000	200%
PES	1,35	85	3000	60%
PEI	1,15	105	3300	60%
PEEK	1,3	90	4000	50%

Tableau I.2 : *Caractéristiques des matrices thermoplastiques [35].*

I.3.1.2. Matrices métalliques

Les matériaux composites à matrice métallique ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

I.3.1.3. Matrices céramiques

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

I.3.2. Les renforts

Les renforts (fibres) présentent une configuration particulièrement intéressante pour profiter au mieux des propriétés mécaniques des matériaux. Sous cette forme, le module et surtout la contrainte de rupture peuvent être très supérieurs à ceux des matériaux massifs.

Pour les renforts, sont employés des bobines de fils de longueurs variées (longs, broyés ou courts) ou encore des structures de fibres comme des tissus (taffetas, satins, serges), des nappes de fibres unidirectionnelles (en abrégé UD) ou encore des tresses, des tricots ou enfin des tissus 3D. En résumé, le domaine des renforts s'appuie sur les productions de l'industrie textile. Par définition, les fibres se distinguent des fils par leur aspect discontinu.

Les fibres de renforts les plus courantes :

- Les fibres de Verre ;
- Les fibres de Carbone ;
- Les fibres d'aramides « Kevlar » ;
- Les Fibre de Bore ;
- Les Fibre de silice (ou de quartz) ;
- Les Fibre de polyéthylène de haut module.

I.3.2.1. Les fibres de verre

Les fibres de verre sont fabriquées à partir d'un mélange à base de silice. En faisant varier la composition de ce mélange, différents types de verre peuvent être obtenus : le verre E, les verres S ou R pour des applications mécaniques plus sévères, le verre C pour des applications chimiques et le verre D pour des applications diélectriques. Rappelons que les fibres de verre E constituent le principal renfort des produits composites de grande diffusion et sont utilisés dans plus de 95 % des matériaux composites.

Le mélange est porté à fusion à 1200°C puis est transféré dans un four filière à 1000°C. En sortie de filière, le verre est étiré à grande vitesse pour former des fibres continues dont le diamètre varie de 10 à 50 µm. Les fibres ainsi produites ne peuvent pas être utilisées sous cette forme en raison de plusieurs points faibles: manque de cohésion inter-filamentaire, forte sensibilité à l'abrasion, présence de charges électrostatiques et mauvaise compatibilité avec la résine (imprégnation, adhérence verre/résine). Pour toutes ces raisons et dans le but d'être tissées, les fibres sont ensuite ensimées. Il existe trois principaux types d'ensimages :

- L'ensimage textile pour permettre le tissage. Il fait intervenir des agents collants, lubrifiants, adoucissants ou encore antistatiques.
- L'ensimage plastique ou « finish » qui consiste à déposer un agent de pontage rendant possible la liaison fibre/résine.
- L'ensimage textilo-plastique qui confère aux fibres les propriétés nécessaires au tissage et à la liaison fibre/résine en une seule étape.

Les fibres de verre offrent plus particulièrement pour les produits de grande diffusion les qualités suivantes:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

I.3.2.2. Les fibres de carbone

La fibre de carbone est un matériau se composant de fibres extrêmement fines, entre cinq et quinze microns de diamètres et composé principalement d'atomes de carbone. Les atomes de carbone sont agglomérés dans des cristaux microscopiques qui sont alignés plus au moins parallèlement à l'axe long de la fibre. L'alignement des cristaux rend la fibre incroyablement résistante pour sa taille. Plusieurs milliers de fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil qui peut être employé tel que ou être tissé.

Les fibres de carbone sont traditionnellement considérées comme les renforts « phares » de composites « High-tech » couramment employés dans l'aéronautique et la voile de compétition. Ces fibres restent chères par rapport aux fibres de verre E mais sont très attractives pour produire des structures dont la rigidité est le principal critère de choix. Si on considère le coût spécifique (coût/densité) des fibres de carbone, il tombe à sept fois celui des fibres de verre. La rigidité d'une fibre peut aussi être rapportée à son coût spécifique. Dans ce cas, le rapport entre fibre de verre et fibre de carbone n'est plus que de deux. Cela veut dire que, si le prix du carbone continue de baisser, son utilisation risque de pénétrer des marchés de grande diffusion occupés à l'heure actuelle par les fibres de verre.

Il existe deux grandes sortes de fibres de carbone : les fibres HR (Haute Résistance) qui sont les plus utilisées et les fibres HM (Haut Module). Les fibres HM ont des modules d'Young très élevés qui peuvent être jusqu'à deux fois supérieur à ceux des fibres HR. Mais, elles comportent un allongement à rupture en traction 2 fois moins élevé ce qui a tendance à rendre les composites plus « fragiles ». Par ailleurs, les fibres de carbone sont anisotropes et peuvent présenter des structures très différentes suivant la nature du précurseur utilisé pour leur fabrication. Les fibres de carbones possèdent les qualités générales suivantes :

- très forte raideur axiale,
- très bonne résistance aux attaques chimiques (corrosion sous contrainte),
- meilleure durée de vie en fatigue que les fibres de verre,
- Bonne conductibilité électrique et thermique.

I.3.2.3. Les fibres d'aramides (Kevlar)

Ces fibres sont des polyamides aromatisés obtenus par synthèse à basse température (environ -10°C). Ils sont ensuite filés et étirés pour obtenir un module d'élasticité élevé. Ces fibres sont produites et commercialisée par la société Dupont de Nemours sous la marque Kevlar. En comparaison avec les fibres de verre, le prix des fibres d'aramide est élevé ce qui a été un frein pour leur développement. Néanmoins, le Kevlar possède une résistance spécifique en traction (résistance/densité) très importante et supérieure à la plupart des autres fibres pour ce type de sollicitation. Notons que le Kevlar 49 est essentiellement utilisé pour des applications en matériaux composites. Les principales limites d'utilisation de ces fibres sont :

- La reprise d'humidité. La structure des fibres d'aramides renferme des microporosités qui ont tendance à retenir l'eau en présence d'humidité. Les tissus de Kevlar doivent être séchés avant leur imprégnation par la résine.
- La sensibilité aux rayonnements ultra-violets.
- La faible tenue en compression par rapport à la traction. La contrainte de compression d'une fibre d'aramide est cinq fois inférieure à sa contrainte de traction. C'est une limitation importante pour l'utilisation de composites sollicités en flexion

(combinaison traction/ compression) qui seront dimensionnés avec la condition la plus défavorable à savoir la résistance en compression.

Les caractéristiques mécaniques des trois types de fibres les plus répandus dans le domaine des composites hautes performances sont synthétisées dans le (tableau I.3). Ces caractéristiques varient d'un fabricant à l'autre.

Caractéristiques Mécaniques	Fibre de carbone				Fibre de verre		Aramide
	HR		HM		E	R	
Résistance à la rupture (GPa)	3,5	4,5	2,5	4,2	2,5	3,2	3,6
Module de Young (GPa)	240	250	500	500	74	86	125
Allongement à la rupture (%)	1,5	1,8	0,5	0,5	3,5	4	2,9
Masse volumique (g/cm^3)	1,4	1,8	1,95	1,95	2,6	2,5	1,44

Tableau I.3 : *Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort [36].*

I.3.2.4. Les fibres de bore

Ce sont des filaments de tungstène avec un diamètre de 12 µm, sert de catalyseur à la réaction de chlorure de bore et d'hydrogène 1200 °C. Les fibres de bore obtenues ont un diamètre d'environ 100 µm (la vitesse de croissance est de 1 micron par seconde).

Caractéristiques mécaniques	Bore
Résistance à la rupture (GPa)	3,5
Module de Young (GPa)	400
Allongement à la rupture (%)	0,8
Masse volumique (g/cm^3)	2,63

Tableau I.4 : *Caractéristiques mécaniques des fibres de bore.*

I.3.3. Charges et additifs

Les additifs permettent de modifier l'aspect, les caractéristiques du matériau, l'adhérence entre les renforts et la matrice, la coloration, les propriétés anti-UV, les charges ignifugeantes, ou les agents améliorant l'isolation thermique ou acoustique. Ce sont des éléments ajoutés aux matières plastiques au cours de leur élaboration ou de leur transformation et qui visent à leur conférer des caractéristiques particulières utiles lors de la transformation ou des fonctionnalités pour leur usage final.

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leurs constituants, de leur distribution et répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique. A la différence des matériaux classiques, les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit. Le produit est réalisé en même temps que le matériau. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des singularités fondamentale des composites. Il est possible de contrôler les propriétés souhaitées par un arrangement des renforts lors de la conception de la pièce.

I.3.4. L'interface fibre-matrice

Il est naturel de penser que les performances des matériaux composites sont fonction des propriétés des constituants de base rentrant dans leur composition. Cependant, ceux-ci n'existeraient pas si les fibres et la matrice ne pouvaient s'associer. L'interface est le siège de cette association et constitue une véritable région stratégique capable d'assurer notamment le transfert des charges de la matrice aux renforts. Les caractéristiques de l'interface dépendent quant à elles de la qualité de la liaison fibre-matrice ce qui fait appel à la notion d'adhésion.

Pour comprendre les phénomènes d'adhésion il faut tout d'abord s'intéresser à la notion de surface. Une surface peut être définie comme un lieu de discontinuité d'au moins une propriété physique (discontinuité d'ordre, d'indice de réfraction, de composition chimique) et constitue une séparation entre deux milieux. Une surface est aussi un lieu thermodynamiquement instable privilégié pour des contacts et des réactions chimiques. Notons que les solides ne peuvent réagir qu'au travers de leur surface. En simplifiant, l'adhésion entre deux matériaux, ou l'affinité entre deux surfaces, peut résulter de différents facteurs :

- L'ancrage mécanique; une rugosité ou une porosité importante sont des éléments favorables à l'adhésion car ils permettent d'accroître la surface de contact entre deux matériaux.
- L'interdiffusion dans le cas de deux polymères.
- La création de liaisons physico-chimiques à l'interface; il existe des liaisons interatomiques de faible et de forte énergie (tableau I.5).

Type de liaison	Energie de liaison (KJ/mol)	Distance interatomique (A)
Ionique	600-1000	5
Covalente	130-820	4
Métallique	100-150	5
Van der Waals / Hydrogène	4-20	3-5

Tableau I.5 : *Liaisons interatomiques [37]*

Lors de la fabrication du composite. L'adhésion de la phase polymère sur le renfort résulte d'un phénomène de mouillage de la fibre par la résine liquide. Dans ce cas on décrira le phénomène d'adhésion par l'équation thermodynamique suivant le principe de l'énergie d'adhésion de Dupré définie par la relation suivante:

$$W_{adh} = \gamma_s + \gamma_l - \gamma_{sl} \tag{I.1}$$

Où γ_s, γ_l et γ_{sl} sont respectivement les enthalpies libres de surface de la fibre, de la résine polymère et l'énergie nécessaire pour créer une interface entre la fibre et la résine liquide. En utilisant l'angle de mouillage (θ) des fibres par la matrice, l'énergie d'adhésion s'exprime aussi par la relation d'Young-Dupré :

$$W_{adh} = \gamma_l (1 + \cos\theta) \tag{I.2}$$

Cette relation illustre le fait qu'un bon mouillage se caractérise par des angles de contacts fibre-matrice faibles et permet d'accroître l'énergie d'adhésion. Par exemple, la mouillabilité peut être améliorée à l'aide de traitements de surface des fibres (agents de couplage, ensimage).

I.4. Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwichs.

I.4.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite (figure I.3), et sont formées d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). Les divers types de monocouches sont définis par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement), à fibres tissées, ou à fibres courtes. La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir une structure composite stratifiée.

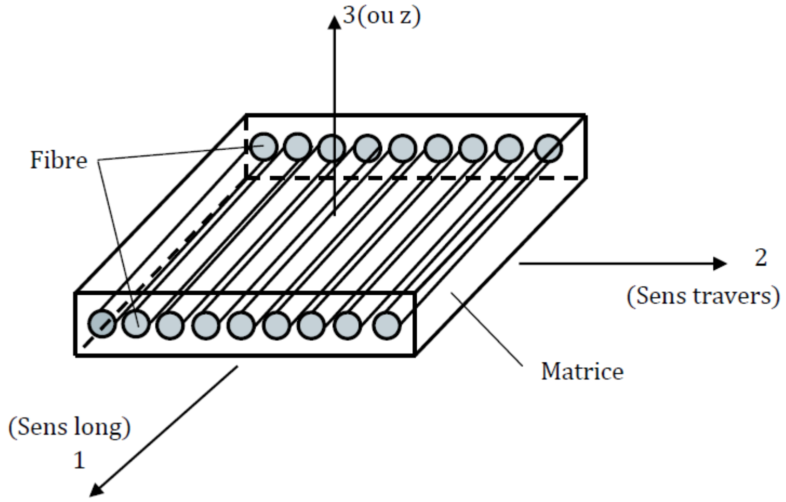


Figure I.3 : *Pli à Renforcement unidirectionnel.*

I.4.2. Les stratifiés

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines (figure I.4). Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques.

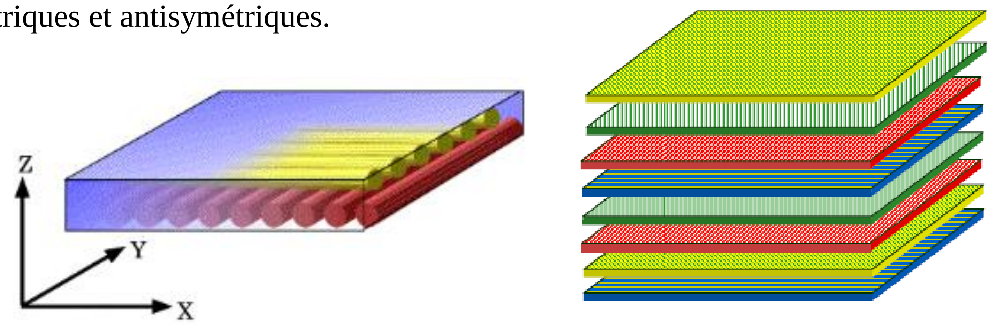


Figure I.4 : *Matériau composite stratifié.*

I.4.3. Les sandwichs

Les matériaux composites à structure sandwich sont constitués de deux peaux en matériaux composites entre lesquelles est collé un noyau à faible densité permettant d'augmenter les propriétés du matériau en flexion tout en conservant un poids très faible (figure I.5). Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau en forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées collées ensemble. Ces feuilles sont fabriquées en imprégnant des fibres d'aramide dans une résine phénolique ayant des propriétés ignifuges. Lors de la mise en forme de ce type de panneaux sandwichs, il est souvent nécessaire d'utiliser plusieurs morceaux de noyau afin de fabriquer de grandes pièces. La jonction entre deux noyaux pose un problème de discontinuité qui est réglé dans l'industrie en injectant une mousse dans l'interstice. L'injection de cette mousse ajoute une étape à la fabrication de grandes pièces et constitue un ajout de masse à la structure.

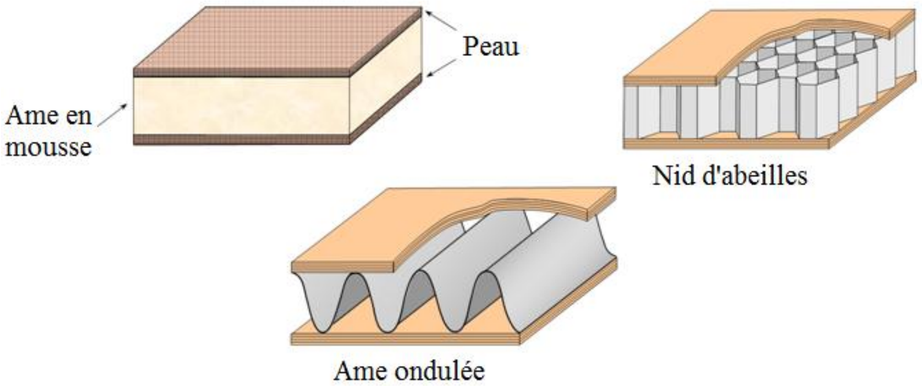


Figure I.5 : *Structure composite sandwich.*

Les panneaux sandwichs intégrés dans les structures aéronautiques sont légers et rigides ce qui en fait d'excellents transmetteurs de vibration mécaniques et sonores. Ces vibrations vont à l'encontre du confort des passagers et peuvent même causer des bris mécaniques si elles ne sont pas amorties. Généralement les matériaux composites ont un amortissement plus élevé que les métaux, mais celui-ci demeure insuffisant et il est nécessaire de trouver des solutions pour l'améliorer. L'amortissement peut être assuré par des systèmes dit « actifs », c'est-à-dire des systèmes nécessitant une boucle d'asservissement permettant d'obtenir un bon amortissement en réponse à une vibration donnée. Cependant, un tel système est consommateur d'énergie et ajoute une masse non négligeable à la structure. C'est pourquoi l'industrie aéronautique s'est tournée vers des systèmes « passifs » permettant d'amortir les vibrations pour un ajout de masse plus faible.

I.5. Domaines d'Application des matériaux composites

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques élevées associés à un faible poids (besoins de l'industrie aérospatiale). Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (aéronautique, automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,…etc.), ces performances remarquables sont à l'origine des solutions technologiques innovantes.

I.5.1. Produits aéronautiques

Dans la construction aéronautique, la compétition est rude entre les matériaux classiques, l'aluminium principalement et les matériaux composites à haute performance, essentiellement ceux à base de fibres de carbone. Les premiers disposent d'une avance considérable en termes d'expérience et d'industrialisation; les seconds ont longtemps été confinés à des pièces de structure secondaire peu sollicitées (aérofreins, volets, aménagements de cabine,…etc.), du fait de leur coût élevé par rapport à l'aluminium, mais aussi de leur médiocre résistance aux chocs et de leur difficulté d'assemblage.

Toutefois, les composites ne cessent de gagner du terrain, car ils offrent de nombreux avantages. Ils facilitent et réduisent la maintenance des appareils grâce à leur résistance à la corrosion, ainsi qu'à leur excellente tenue à la fatigue. Ils allègent la structure d'un avion et améliorent ainsi sa rentabilité : un gain de 450 kg permet d'embarquer 6 passagers supplémentaires. Ils résistent bien au feu et limitent les émissions toxiques. Ils permettent aussi de réaliser des pièces multifonctions, ce qui évite la pose d'une multitude de rivets constituant autant de points faibles. Tous ces avantages font que l'utilisation des composites s'étend progressivement des pièces de structures secondaires vers des fonctions aux fortes exigences mécaniques. Aujourd'hui, ils constituent certains des sous-ensembles de la structure : parties centrales et arrières du fuselage de l'A380; voilure extrême de l'ATR 72; voilure complète de l'A400M.

I.5.2. Produits militaires

Pour les missiles, le principal avantage pour le constructeur d'utiliser des matériaux composites est de pouvoir proposer à ces clients des produits associant performance et légèreté. Par contre l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage des missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale. A cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de l'air sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle, ce qui entraîne une perte de précision du tir. L'utilisation de matériaux composites sur les ailettes de part leur faible conductivité thermique fait qu'en fin de mission, les ailettes conservent une certaine intégrité de forme, ce qui permet de maintenir la trajectoire du missile sans perte de précision.

I.5.3. Produits spatiaux (satellites)

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions à la température pouvant varier entre –180°C lorsque le satellite est dans l'ombre et +160°C lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique, de part la valeur négative du coefficient de dilatation thermique des fibres de carbone et d'autre part la valeur positive du coefficient de dilatation thermique de la matrice, peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure. La stabilité géométrique de la structure est apportée par sa raideur globale. L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement [38].

I.5.4. Construction navale :

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY (la marine de guerre des États-Unis) réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications navales. A partir de 1955, l'apparition des tissés de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement ...etc. [39].

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l’eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification [40].

I.5.5. Construction civile

Depuis une dizaine d’année, une alternative est proposée : il s’agit de renforcer ou de réparer les ouvrages en béton par des matériaux composites à matrice organique collés extérieurement sur des structures dégradées. Les matériaux composites, en particulier à base de fibres de carbone, de part leur rigidité spécifique, présentent un grand intérêt pour la réparation. De plus, malgré leur prix élevé, ils présentent un avantage économique car ils peuvent être mis en œuvre directement sur les structures par moulage au contact, procédé appelé aussi polymérisation in-situ ou stratification directe. Ceci permet de réduire considérablement les coûts liés à la manipulation des matériaux ainsi que les problèmes liés aux interruptions des activités des ouvrages réparés.

Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites sont utilisés pour le renforcement et la réhabilitation d’éléments structuraux en béton armé, tels que les poutres, les dalles, les colonnes et les murs. Les premières recherches sur l’application de ce nouveau matériau destinées aux ouvrages de génie civil datent de 1980, bien que ce soit plutôt vers 1990 que le matériau est utilisé, d’abord sur une base expérimentale, puis progressivement sur une base commerciale. Le confinement des colonnes en béton se réalise à l’aide d’enveloppes en matériaux composites à base de fibres de verre, de carbone ou d’aramide. Ces enveloppes appliquées aux colonnes améliorent le confinement du béton, ainsi que sa ductilité et sa résistance en compression. Les différents composites offrent des modules d'élasticité et des rigidités variés pouvant modifier le comportement axial et radial du béton confiné.

I.6. Qualités générales des matériaux composites

Les qualités principales les plus cités des matériaux composites sont :

- Légèreté (gain de masse) ;
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,…) ;
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Bon comportement à la corrosion ;
- Résistance chimique, tenue électrique et une meilleure isolation thermique ;
- Amélioration de la tenue au feu ;
- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.

Ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs).

I.7. Conclusion

Pour beaucoup d'applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion saline, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique. Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Nous avons aussi discuté sur les matériaux composites structuraux et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux pour le renforcement des structures à hautes performances.

Chapitre II

Endommagements et réparations des composites

Chapitre II: Endommagements et réparations des composites

II.1. Introduction

Le développement des matériaux composites dans les industries de pointe au cours de ces dernières décennies touche désormais des domaines de plus en plus nombreux : aéronautique, spatial, automobile, ferroviaire, construction civile, électronique, sport et loisirs, médical, etc. Comme toutes structures mécaniques, les structures composites peuvent être soumises à des chocs et des impacts à basses vitesses qui sont souvent de nature accidentelle. Les endommagements engendrés peuvent se propager jusqu'à une rupture prématurée de la structure; ce qui peut s'avérer très dangereux. Cependant, dans de nombreuses applications, le cout élevé des structures stratifiées complexes ne permet pas l'échange systématique des éléments endommagés. On peut alors envisager la réparation partielle comme une bonne alternative économique et mécanique de ces structures, d'une manière ou autres à les renforcer préventivement, avant que la fissure ne soit apparue. Le contexte de ce paragraphe s'inscrit donc dans le cadre du renforcement préventif de structures composites par patchs afin de retarder l'apparition de fissures de fatigue.

Parmi les méthodes de réparation partielle, nous avons choisi la méthode de la réparation par collage de patchs externes. Ici le transfert des efforts mécaniques est assuré par les joints collés entre composites. Cette technique peut aussi intéresser des structures métalliques. Actuellement les industries aéronautiques s'intéressent beaucoup à cette solution mais son application se limite seulement aux structures secondaires à cause du manque de confiance accorde à cette technologie. Les avantages de cette méthode sont liés à la nature des stratifiés, où les effets de bords crées par le perçage du composite dans l'assemblage boulonné ou riveté s'avèrent très néfastes à sa tenue mécanique. Cependant, l'assurance de la performance d'un tel système nécessite encore une meilleure connaissance non seulement sur du comportement à long terme de l'assemblage collé à long terme, mais aussi sur le processus d'endommagement des composites stratifiés.

II.2. Définition d'endommagement

L'endommagement est l'apparition de dommages dans un matériau caractérisé par une extension de surface libre à l'intérieur du matériau, accompagnée d'une augmentation de

fraction volumique de vide. Cette apparition est causée par une attaque physique ou chimique. Il conduit à une dégradation de ses capacités physiques pouvant conduire à la rupture.
Un niveau d'endommagement peut être relié directement à des propriétés physiques parce que l'endommagement est caractérisé par des modifications en principe observables. Les phénomènes d'endommagement tels que les microdéformations, la dégradation des surfaces, les microfissures, les microcavités, la corrosion et le vieillissement. Sont tous observables, mais parfois ils sont difficiles à mettre en évidence.

II.3. Endommagement des composites stratifiés

Les matériaux composites à renfort en fibres longues sont réputés pour leurs bonnes rigidités et résistances spécifiques. L'utilisation de ces matériaux sous forme de stratifiés permet non seulement de concevoir une structure selon une rigidité et une résistance voulues, mais également de réduire la masse de la structure de façon significative. En revanche, les composites stratifiés sont constitués de couches « plis » superposées faisant apparaître une première particularité que l'on appelle la liaison interlaminaire. Cette liaison est bien souvent l'aspect défaillant de ces matériaux, d'autant qu'elle est le siège de défauts de toutes sortes (mauvaise polymérisation, porosités, fissures, micro vides,…etc.). En plus, les propriétés mécaniques de la matrice et des fibres sont tellement différentes que les contraintes induites à l'interface fibre-matrice peuvent y provoquer des endommagements prématurés.

II.4. Mécanismes d'endommagement et de rupture

Le but de cette partie est de présenter les différents types d'endommagement pouvant se développer dans une structure composite stratifiée (figure II.1). Comme pour la plupart des matériaux, l'endommagement dans les matériaux composites est dû aux hétérogénéités qui engendrent des concentrations de contrainte. Les expériences montrent que la rupture d'une structure stratifiée sous un chargement donné résulte d'un processus souvent très complexe. Il commence par l'amorçage de différents endommagements comme la microfissuration de la matrice, intralaminaire ou interlaminaire, la décohésion de l'interface fibre-matrice, le flambement local des fibres, etc. Ces endommagements interagissent mutuellement en fonction du chargement appliqué. Leur propagation provoquent une baisse progressive de la rigidité globale de la structure et conduisent à la rupture finale. De plus, tout cela est fortement influencé par l'existence de défauts dans le matériau provenant de la mise en œuvre souvent inévitables dans une structure en composite. La prévision par un critère capable d'intégrer l'ensemble de ces mécanismes, nécessaire en conception, est un grand défi pour les chercheurs. Il faut passer d'abord par la compréhension des mécanismes d'endommagement des composites, puis savoir comment peut élaborer des méthodes fiables pour les réparés ou trouver d'autres moyens de renforcement préventif.

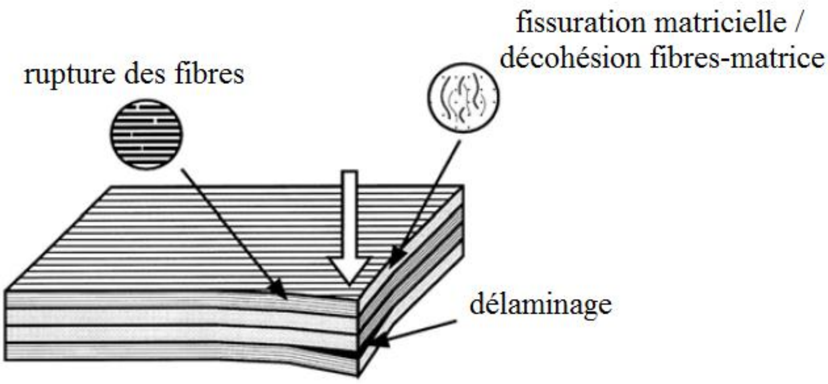


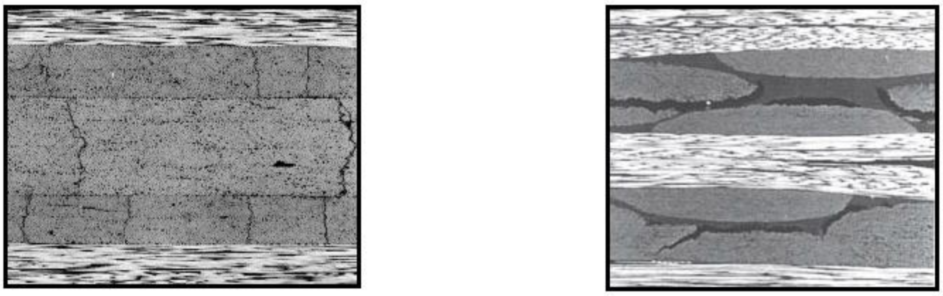
Figure II.1 : *Mécanismes de rupture observés dans un stratifié.*

Le processus de rupture d'un composite stratifié se décompose en trois étapes : l'amorçage des endommagements, la propagation de la zone endommagée et la rupture finale. Les principaux mécanismes d'endommagements au sein d'un composite stratifié de plis unidirectionnels (empilement de plis de fibres dans une même direction) qui permettent d'avoir les meilleures performances mécaniques pour les structures aéronautiques, se résume comme suit :

- Fissuration de la matrice (rupture transverse et longitudinale de la matrice) ;
- Décohésion entre fibre et matrice ;
- Rupture des fibres ;
- Délaminage inter plis.

II.4.1. Fissuration de la matrice

Pour un stratifié composite à fibres continues et à matrice organique soumis à des sollicitations statiques ou cycliques, mécaniques ou thermiques, la fissuration matricielle est en général le premier endommagement observé. Celle-ci ne mène pas à une rupture catastrophique, mais sa présence réduit la rigidité du stratifié et affecte sa résistance mécanique. La fissuration de la matrice peut être classée en deux catégories: fissuration transverse et fissuration longitudinale (figure II.2). La première se produit lorsque la contrainte en traction dans la matrice atteint la contrainte de rupture de la matrice, alors que la seconde a lieu lorsque la contrainte de cisaillement dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture généralement au voisinage d'une fibre. Ce dernier mode de rupture appelé « splitting » par les anglo-saxons se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte de cisaillement à la rupture de la matrice [33].



a) **b)**

Figure II.2 : Différents types de fissuration de la matrice : a) Fissuration transverse [41], b) Fissuration longitudinale [42].

II.4.2. Décohésion fibre-matrice

Suite à la fissuration matricielle, les microfissures arrivent au niveau de l'interphase, où elles peuvent être arrêtées ou réorientes. C'est la zone de l'interface où s'effectue le transfert de charge de la matrice vers le renfort. On constate donc une perte d'énergie, liée à la nécessité de création de nouvelles microfissures dans l'interphase.

Parallèlement, des fissures longitudinales apparaissent le long des axes du renfort (Dans ce cas, il intervient le phénomène de décohésion fibre-matrice observé dans la figure II.3). L'intensité de la liaison matrice-fibre, en relation intime avec les propriétés de l'interphase et la compatibilité fibre-matrice, est le paramètre qui influe sur la longueur de décohésion selon le chargement appliqué.

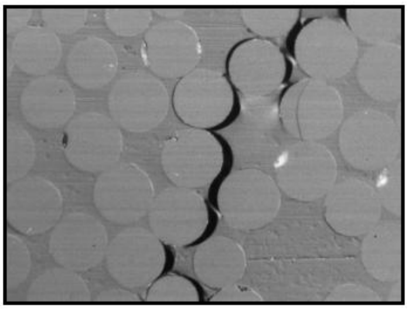


Figure II.3 : *Décohésion fibres-matrice :*

Coupe perpendiculaire à l'axe des fibres [43]

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis a une traction longitudinale, la propagation de la rupture diffère suivant la nature de l'interface fibre-matrice, a cet effet on peut observer deux cas :

- Dans le cas d'une adhérence fibre-matrice élevée, la rupture est amorcée, soit par la rupture des fibres, soit par la rupture de la matrice. Figure II.4 montre un pontage, par rupture longitudinale de la matrice et par décohésion fibre-matrice, de deux fissures initiées dans des zones différentes.
- Dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice, la propagation transverse de la fissuration peut être schématisée de la manière suivante. En tête de fissure, la rupture de la matrice traverse les fibres, sans qu'il y ait rupture de celles-ci, mais avec décohésion de l'interface fibre-matrice. Dans certains cas, les concentrations de contraintes en tête de fissure peuvent conduire à une décohésion avant rupture transverse de la matrice. En arrière, l'ouverture de la fissure induit des contraintes élevées dans les fibres pontant la fissure. Ces contraintes provoquent la rupture des fibres à une distance plus ou moins proche de la surface de rupture. Le pontage des fissures transversales peut se faire par propagation de la rupture à l'interface, conduisant à un profil plus ou moins en escalier du facies de rupture (figure II.5) [44].

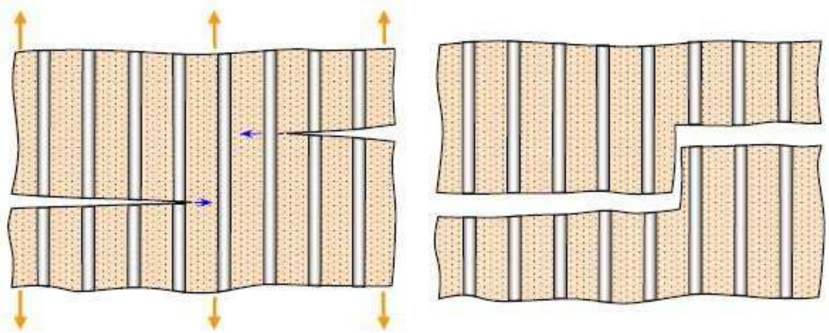


Figure II.4 : *Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice [44]*

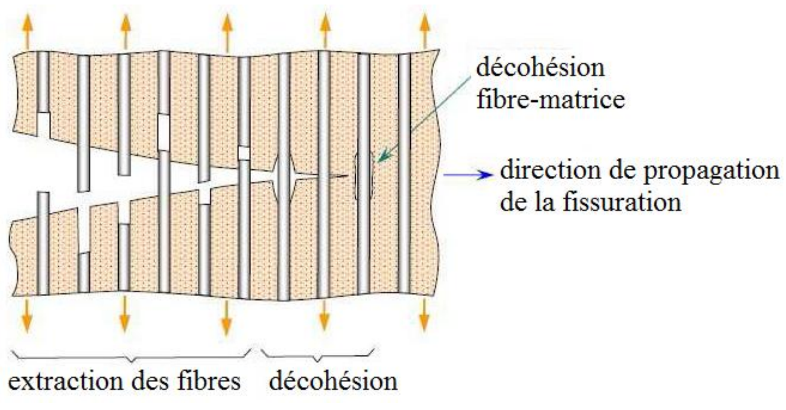


Figure II.5 : *Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre-matrice [44]*

II.4.3. Rupture des fibres

Si des cassures de fibres peuvent survenir dans le prolongement des décohésions fibres-matrice (figure II.3), la rupture des fibres intervient souvent, par définition du renfort, à un stade avancé de l'endommagement de la structure et de manière brutale (comportement fragile). Elles interviennent essentiellement au sein des plis les moins désorientés par rapport à la direction de la sollicitation pour lesquels les fibres reprennent le plus d'efforts. La cassure de la fibre de plus faible résistance entraîne un transfert des efforts sur les fibres voisines qui surchargées vont rompre à leur tour (figure II.6) [45]. Si le chargement est en compression autour des fibres partiellement déchaussées, le flambement local de ces fibres peut se produire (figure II.7).

Figure II.6 : Rupture de fibre [45]

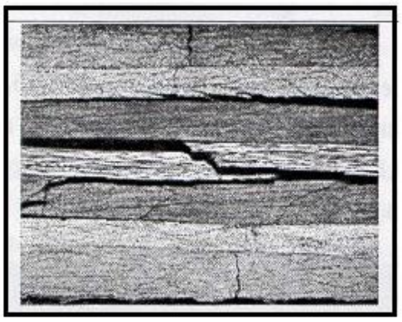


Figure II.7 : Flambement local des fibres

(Pour des contraintes de compression)

II.4.4. Délaminage

Si les trois mécanismes présentés ci-avant peuvent être considérés comme diffus au sein du pli, le délaminage ou décohésion inter-plis correspond en revanche à une dégradation d'ordre macroscopique dans la mesure où il est visible à l'œil nu (figure II.8). Ce décollement s'amorce généralement dans les zones de forts gradients de contraintes comme les bords libres de la structure ou près des défauts macroscopiques pour progresser ensuite en séparant les couches [46], [47]. Les porosités générées au sein de la préforme par l'empilement des couches constituent évidemment des facteurs aggravants pour ce phénomène. Notons que dans le cas de structures impactées, le délaminage est fortement couplé avec la fissuration matricielle.

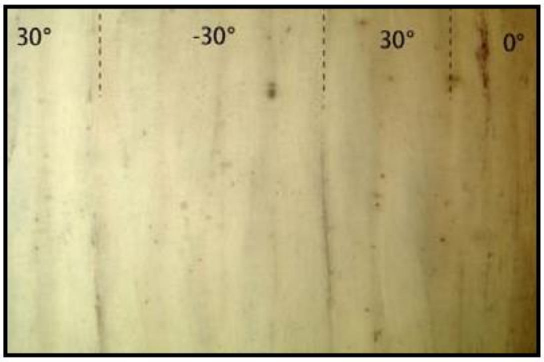


Figure II.8 : Délaminages observés par photographie d'une tranche d'éprouvette stratifiée verre-époxy [47].

Les études sur le délaminage sont réalisées le plus souvent par la théorie de la mécanique de la rupture. Des méthodes d’essais normalisées permettent de déterminer le critère de propagation du délaminage en mode mixte I+II du stratifiés unidirectionnels (UD) avec confiance. Pourtant, la plupart des structures en composites sont de type multidirectionnel (MD) et le délaminage se produit généralement entre deux plis de différentes orientations.

II.5. Source des dommages rencontrés en aéronautique

Nous le voyons au quotidien, les matériaux composites sont présents dans beaucoup de domaines d'activités. Cependant l'aéronautique a été un secteur précurseur pour ces matériaux et a ouvert beaucoup de voies dans le domaine des réparations notamment. Ces avancées expliquent l'utilisation de statistiques et de résultats, essentiellement issus de l'industrie aéronautique et plus particulièrement de la phase d'exploitation des appareils, dans ces travaux. Les exigences de certification des aéronefs, ont permis d'étudier avec une grande rigueur les origines des dommages, leur fréquence d'occurrence, le suivi de ces dommages et la mise au point de moyens de réparations. Grâce aux spécialistes de l’industrie aéronautique « Airbus », il apparaît que la plus grande partie des dommages survient lors des phases de maintenance ou d'escale au sol (figure II.9) [48].

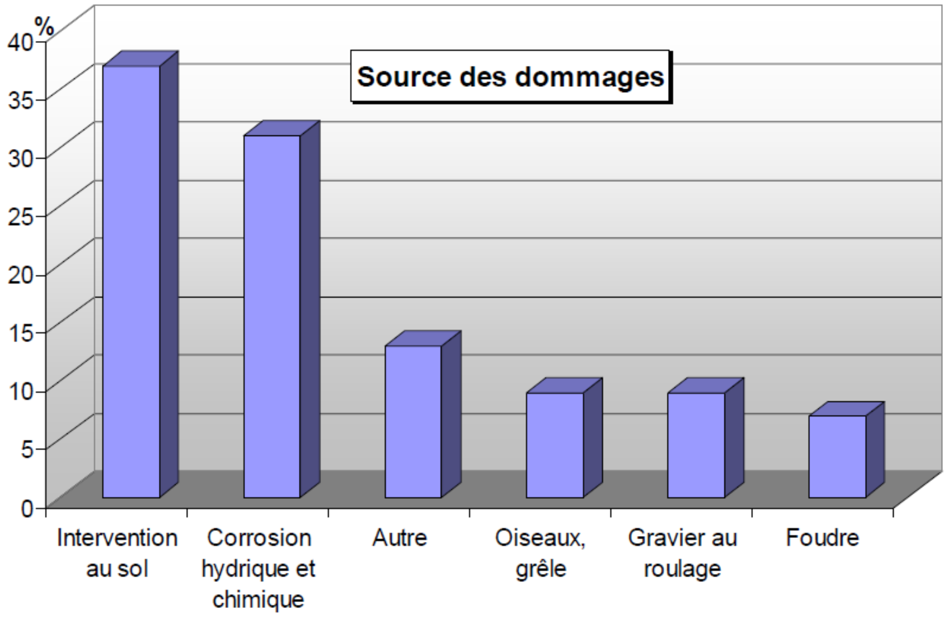


Figure II.9 : *Nature des dommages sur les aéronefs civils (source Airbus) [48]*

Il est raisonnable de penser que dans le domaine militaire, où les matériaux composites sont utilisés depuis plus longtemps, ces proportions restent similaires. Cependant, ces structures possédant plus de matériaux composites, et les aéronefs étant poussés à leurs limites, les réparations sont plus fréquentes. Ces considérations expliquent qu'historiquement, un grand nombre d'études soit financé par des agences militaires.

Savoir pendant quelle phase de la vie de l'avion les dommages sont les plus rencontrés est intéressant afin de réduire leur occurrence, mais il faut également savoir quelle est la nature de ces dommages pour proposer des structures plus résistantes ou bien adapter les réparations composites.

II.6. Les différents types de dommages en aéronautiques

D'après les partenaires industriels, fabricants et utilisateurs de composites, les étapes de fabrication et d'assemblage sont des étapes critiques de la vie des pièces composites. Malheureusement, en général pour des raisons de confidentialité, les statistiques concernant les dommages rencontrés pendant ces phases ne sont pas disponibles. Ce qui est généralement admis, en revanche, c'est la sensibilité des composites aux délaminages pendant les phases d'usinage ou lors de chocs avec des outils ou d'autres pièces des assemblages.

Si l'on s'intéresse plus largement aux endommagements que l'on retrouve sur pièces composites, on retrouve plusieurs scénarios d'endommagements liés à la complexité de ces matériaux (figure II.10). Ces différentes situations, sont très variées comparées aux dommages que l'on peut trouver sur les matériaux métalliques. En revanche, selon les statistiques présentées par les chercheurs d'Airbus (figure II.9), on observe que plus de 50 % des dommages sont liés à des sollicitations d'impacts.

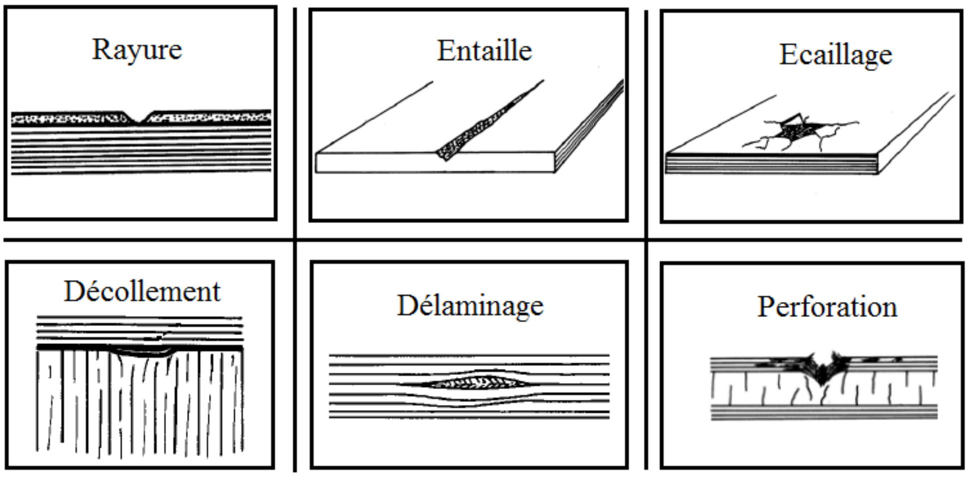


Figure II.10: *Différents types de dommages rencontrés sur pièces composites [49].*

Maintenant puisque nous savons que le dommage le plus fréquemment rencontré sur aéronef est un impact de faible énergie, il est nécessaire de connaître quelle est la forme que prend cet endommagement sur un matériau composite. Pour cela et comme les composites forment une microstructure à eux seuls, il falloir de décrire correctement les mécanismes d'endommagement des composites afin de comprendre ce qu'il est nécessaire de réparer.

II.7. Renforcement et réparations des composites aéronautiques

Dans un premier temps, quelques rappels bibliographiques sur la réparation et sur les patchs composites sont présentés afin de cerner les applications et l'utilisation de cette technique. Les patchs composites sont le plus souvent utilisés en réparation et commencent à voir des applications dans le domaine du renforcement. Ils sont généralement collés dans les zones soumises à de fortes concentrations de contrainte. Ils permettent alors soit de ponter les fissures qui apparaissent sur les plaques ou les coques métalliques peu épaisses telles que le fuselage des avions dans le cas de la réparation, soit de retarder l'apparition des fissures dans le cas du renforcement préventif.

II.7.1. Réparation

Les premiers travaux connus concernant les réparations des composites sont dus à R. Jones & al. En 1979 [50], qui proposent une réparation grâce au collage d'un patch composite sur les fissures observées sur structures métalliques. D'après Baker & al. [51], la DSTO (Defence Science and Technology Organisation) australienne a mené des recherches sur ces réparations depuis le début des années 70 [51, 52]. Ils soulèvent un certain nombre de problèmes que pose ce type de réparation comme la taille des patchs, la forme des patchs, l'épaisseur de la colle, la qualité de la colle, du collage, la préparation des surfaces, etc. Ces études pointues et onéreuses n'auraient pu être menées sans le concours des institutions gouvernementales et ainsi, les premiers domaines d'utilisations des composites ont surtout été développés pour des applications militaires. De nombreux travaux de recherche ont également été effectués par la NASA, les armées américaines, australiennes et françaises.

Aujourd'hui, pour un dommage de type impact sur matériau composite, deux solutions sont envisageables : le patch riveté et le patch collé (figure II.11). Ces deux réparations sont très coûteuses en temps de mise en œuvre avec le carottage du dommage nécessaire pour éviter toute propagation de dommage non maîtrisée. Une autre difficulté est liée à cette étape de carottage et à la complexité de la mise en œuvre de la réparation (perçage pour la solution rivetée et collage pour la solution collée). Des techniciens hautement qualifiés sont en effet nécessaires pour réaliser de telles opérations. De plus, un désavantage de la solution rivetée est le surpoids engendré par le patch et les rivets. La réparation par patch collé nécessite quant à elle, une grande surface de collage nécessaire pour le transfert de charge vers le patch sans sur-contrainte trop élevée [53]. Des solutions alternatives ont vu le jour ces dernières années, mais sont souvent anecdotiques ou applicables sous des conditions très particulières et souvent hors tenue structurale. Parmi ces réparations, on peut citer la réparation par injection [54], la réparation par saignement [55, 56] ou encore des combinaisons de rivetage/collage en même temps.

De plus on admettre que les patchs utilisés pour réparer une structure composite endommagée sont classés en deux catégories : patchs externes et patchs internes.

- Les patchs externes : sont collés sur la surface des zones endommagées. Différentes formes géométriques sont utilisées afin de couvrir au mieux la zone endommagée.

- Les patchs internes : servent à remplacer la zone endommagée soustraite à la structure, en reprenant la forme de celle-ci [57].

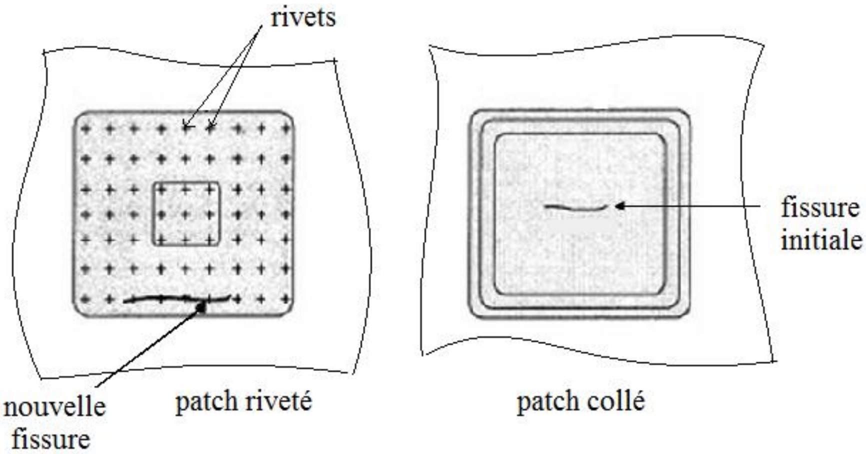


Figure II.11: Exemples de patchs rivetés et collés d'après Baker *[52]*.

II.7.1.1. Réparation par collage des patchs externes

La réparation par patch externe consiste à insérer un bouchon dans la zone nettoyée, puis à appliquer une couche de colle et un patch externe (figure II.12). Cette méthode est relativement rapide et facile à réaliser, puisque le nettoyage de la zone endommagée est très localisé. La transmission des charges passe essentiellement par le joint collé entre la pièce à réparer et les patchs externes. Actuellement les industries aéronautiques s'intéressent beaucoup à cette solution. La performance et la fiabilité de ce type de réparation dépendent non seulement des paramètres des patchs, mais aussi du comportement mécanique de l'adhésif utilisé. La conception et l'optimisation de ce type de réparation reposent sur une meilleure compréhension du comportement de ce type d'assemblage.

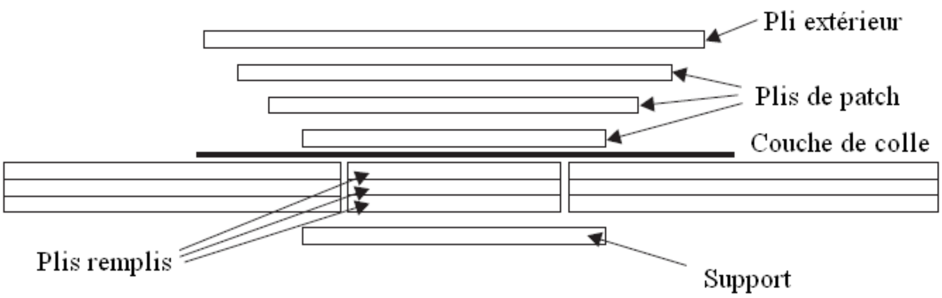


Figure II.12: *Schéma de réparation par patch externe.*

Néanmoins, les solutions rivetées sont très utilisées, pour des raisons essentiellement historiques et interviennent sur tous types de pièces. La solution de réparation par patchs rivetés peut être employée sur les structures métalliques et composites. En revanche il est à noter que ces réparations représentent un surpoids important et leur réalisation est fastidieuse. La figure II.13 ci-dessous montre une réparation sur un panneau de fuselage qui contenait une fissure [48]. Le nombre de rivets est très important, mais a permis d'aboutir à des réparations fiables et opérationnelles.

Figure II.13: *Réparation par patch riveté sur fuselage de Boeing [48].*

D'après les travaux de recherches exécutés au sujet des réparations, le patch collé présente de nombreux avantages par rapport aux patchs rivetés [52] :

- les patchs collés n'entraînent pas de concentrations de contraintes, contrairement aux patchs rivetés ;
- il est plus facile de contrôler les propagations de fissures avec un patch collé qu'avec un patch riveté ;
- il existe moins de risque de corrosion avec des patchs collés ;
- la propagation des fissures est plus importante près des bords avec des patchs rivetés ;
- le renforcement créé est plus efficace avec un patch collé.

Au vu de ces résultats, l'utilisation de patchs collés a été préférée à l'utilisation de patchs rivetés. Toutefois, les réparations structurales, par définition, visent à rétablir les propriétés mécaniques des structures. Par mesure de sécurité, le principe de ces réparations consiste pour les matériaux composites, à retirer la zone endommagée (figure II.14) et à placer des plis de substitution. Cette configuration de réparation par patch présente également, l'avantage de s'adapter aux structures sandwichs. Il est possible de remplacer l'âme endommagée par un nouveau corps de même nature ou pour des endommagements moins importants, d'injecter une résine de densification dans l'âme du sandwich.

a) **b)**

Figure II.14: *Opération de ponçage de la zone endommagée pour réparation: a) pièce composite, b) fuselage [58]*

Dans la littérature, l'influence de divers paramètres de patchs a été étudiée. Différentes formes géométriques sont utilisables afin de couvrir au mieux la zone endommagée. Nous rencontrons des patchs circulaires, carres, rectangulaires, elliptiques, hexagonaux, etc. Soutis et al [59, 60] ont analysé la performance en compression d'un système réparé par collage de patchs externes en variant sa forme géométrique et son épaisseur. L'épaisseur du joint collé a été aussi considérée. Dans le travail de Liu et Wang [61], la performance en traction a été étudiée expérimentalement en fonction de la séquence d'empilement du patch. En ce qui concerne la modélisation numérique, on peut citer le travail de Campilho et al [62] ou le joint entre le substrat et les patchs est simulé en deux dimensions par simple recouvrement et double recouvrement.

II.7.1.2. Réparation par collage des patchs internes

La réparation par patch biseauté intérieur demande dans un premier temps de nettoyer la partie endommagée avec un angle biseauté de 2 à 3° (figure II.15 et figure II.17) ou une surface en escalier sur le pourtour (figure II.16) afin d'obtenir une surface de collage importante. Ensuite, le remplissage se fait par des préimprégnés déposés couche par couche. Les charges sont transmises essentiellement par l'interface entre le patch et la plaque composite. Cette méthode, couramment utilisée dans l'industrie, est réputée du fait des bonnes performances mécaniques finales obtenues. En plus, la géométrie du système réparé est peu modifiée. En revanche, il est relativement difficile d'obtenir un petit angle biseauté. Certains équipements sont nécessaires et le temps de réalisation est conséquent. Enfin, la réparation demande une bonne technique de réalisation.

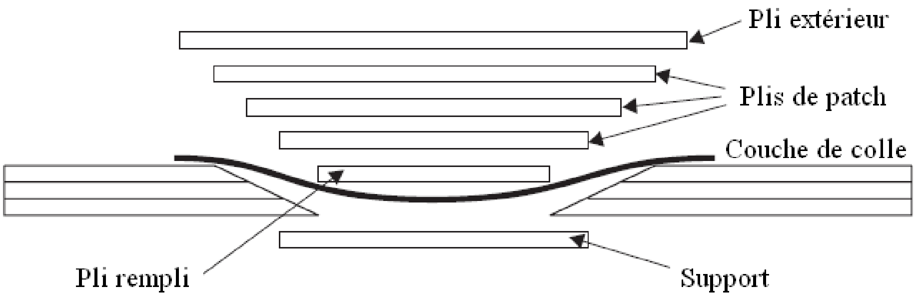


Figure II.15: *Schéma de la réparation biseautée par patch interne.*

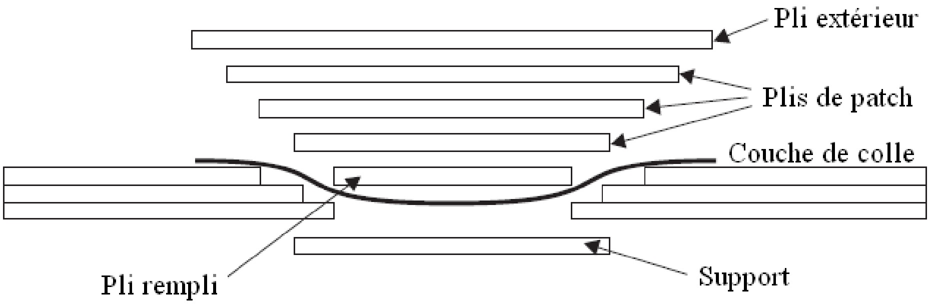


Figure II.16 : *Schéma de réparation en escalier par patch interne.*

Grabovac. I et Whittaker D. [63] ont utilisé cette méthode pour réparer des grands bateaux métalliques. Ils ont préparé la zone endommagée en escalier et reconstruit la partie éliminée par des composites pli par pli. On peut citer aussi les travaux de Breitzman T. et al. [64] et ceux de Ridha M. et al. [65]. Les premiers ont étudie le comportement mécanique en traction d'un composite réparé par des patchs biseautés (figure II.15) dans l'objectif d'optimiser les paramètres de réparation. Les deuxièmes se sont intéressés à la modélisation numérique d'un stratifié $[45/0/-45/90]_s$ réparé par un patch en escalier (figure II.16).

Figure II.17 : *Préparation de surface pour collage des patchs internes [66].*

II.7.2. Renforcement

Dans le cas du renforcement de structures métalliques ou composites, la fissure n'est pas encore apparue dans le substrat et l'objectif est de coller un patch fabriqué par un matériau composite de façon préventive afin d'´eliminer ou tout au moins de retarder l'amorçage de la fissure. Le patch composite peut être collé plus ou moins loin de la zone où la fissure doit apparaître. Dans ce cas, le flux initial de contrainte est dévié par le patch composite et la zone critique est soulagée. Une telle approche est obligatoire quand le patch composite ne peut pas être collé sur la zone fissurée, comme, par exemple, dans le cas où la fissure apparaît dans une zone très épaisse telle qu'un point d'ancrage entre le fuselage et la voilure. C'est le cas pour l'Alphajet qui présente des fissures au niveau de l'assemblage boulonné entre le fuselage et la voilure d'avion (figure II.18). La zone étant peu accessible, il est prévu que le patch composite soit collé un peu à l'écart comme un renfort extérieur afin de soulager au maximum cette zone critique, et d'augmenter par conséquent la durée de vie de l'avion. Le renforcement préventif de l'Alphajet reste encore à l'étude. La technique consistant à renforcer les structures loin de la zone fortement sollicitée a récemment été étudiée dans plusieurs documents et sa viabilité a été mise en évidence [67, 68, 69].

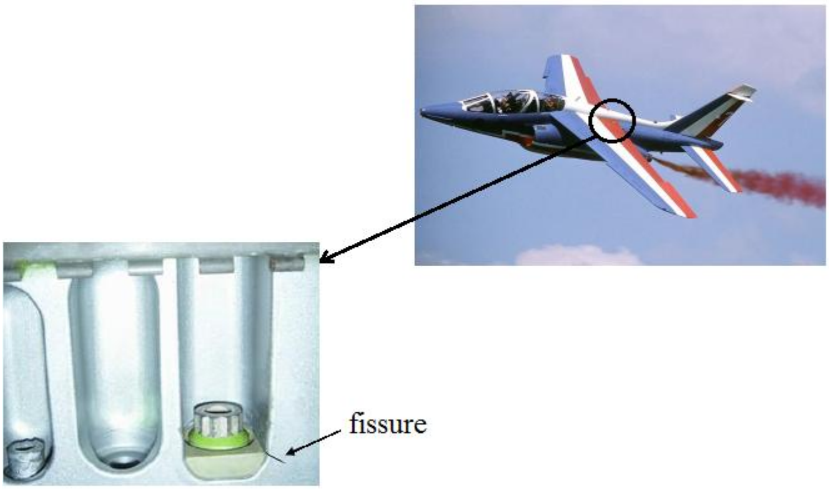


Figure II.18 : *Dommage présent sur l'Alphajet.*

Il est clair que l'efficacité du renforcement par patchs composites dépend fortement de la réponse mécanique du collage entre le substrat « plaque » et le patch composite, particulièrement sous chargement de fatigue. C'est pourquoi des études expérimentales sur les propriétés mécaniques de la colle et plus particulièrement sur sa tenue au cisaillement, ont été conduites. Il apparaît très clairement que la colle est le point faible du renforcement pour des niveaux de contrainte élevés. Cette étude permet à la fois de comprendre et de justifier l'aspect bénéfique du renforcement par patchs composites mais également de percevoir ses limites.

II.7.3. Exemples d'applications

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques exemples d'application de patchs composites visant à réparer des structures aéronautiques. Dans les années 70, la RAAF (Royal Australian Air Force) a décidé de développer l'utilisation des matériaux composites afin de renforcer des structures aéronautiques. L'AMRL (Aeronautical and Maritime Research Laboratory) a utilisé avec succès des renforts composites bore/époxyde afin de parer des problèmes de corrosion et de fatigue. Le tableau II.1 résume les principaux travaux effectués [70, 71].

Avion	Type de dommages	Commentaires
Hercules	Corrosion	Plus de 400 réparations depuis 1975
Macchi	Fatigue	Durée de vie au moins doublée
Mirage	Fatigue	Plus de 180 réparations depuis 1979
Nomad	Corrosion	Plus de 105 000 heures de vols simulées
F 111	Corrosion	En service depuis 1980

Tableau II.1 : *Exemples de réparations par patchs composites effectuées par la RAAF d'après J. Avram [70] et AA. Baker [71].*

En Australie, les patchs composites sont couramment utilisés pour réparer les zones endommagées par fatigue ou par corrosion. Par exemple, l'avion F111 présente généralement un dommage localisé sur un panneau situé sous l'une de ses ailes. Au lieu de remplacer ce panneau, la réparation consiste à coller un patch composite sur la partie fissurée afin de retarder la propagation de fissure. De même, le Mirage III voit des fissures apparaître au niveau de son réservoir. L'Armée de l'Air Australienne a donc réparé cette partie de l'avion en pontant ces fissures avec des patchs composites. Ces derniers permettent de diminuer fortement la vitesse de propagation des fissures en question.

En outre, la technique de réparation par des patchs rivetés ou collés fait l'objet à d'autres chercheurs pour étudier et analyser la concentration des contraintes sur la structure endommagée afin de remédier le problème par un mode de réparation convenable, en assurant un meilleur renforcement et augmenter par la suite la durée de vie de la structure.

II.8. Conclusion

Les structures en composites stratifiés en service peuvent subir des endommagements provoqués par l'application de charges fonctionnelles et/ou accidentelles. La propagation des zones endommagées, difficile à contrôler, peut conduire à une défaillance prématurée du système. Dans le cas où la structure endommagée ne peut pas être remplacée systématiquement à cause du manque de temps ou de moyens, la réparation est considérée comme une bonne alternative économique et mécanique.

La performance de la réparation dépend fortement de la méthode d'assemblage entre la structure à réparer et les patchs. Les méthodes d'assemblage classiques développées pour les pièces métalliques ou composites, tel que le boulonnage et le rivetage, ne sont plus forcement adaptées pour assembler les structures en composites stratifiés à cause de leurs propriétés anisotropes et leur hétérogénéité. La réparation des composites à renfort par fibres longues par collage des patchs externes semble donc un compromis intéressant entre le temps de réparation et les performances mécaniques.

Les principaux résultats des travaux menés sur la réparation par patchs composites ont été rappelés très brièvement. Ces travaux permettent d'appréhender les mécanismes qui entrent en jeu lorsqu'une structure composite est réparée par un patch. Ils ont servi de point de départ pour développer des modèles et des méthodes existantes qu'ils soient théoriques, numériques ou expérimentaux. Le but de ce travail de thèse n'est donc pas de réparer des structures fissurées mais de retarder l'apparition de ces fissures en renforçant préventivement la structure (prolongation de leur durée de vie). C'est ce qui distingue le présent travail de la plupart des études sur les patchs publiées dans la littérature.

Chapitre III

Théories des plaques composites stratifiées

Chapitre III : Théories des plaques composites stratifiées

III.1. Introduction

Puisque les matériaux composites stratifiés se composent de deux matériaux ou plus, ils posent beaucoup de problèmes au niveau des interfaces notamment le délaminage et la propagation des fissures entre les couches. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs caractéristiques structurales telles que les déplacements, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur, les fréquences naturelles, la force de flambement et l'effet des états de frontière et de chargements externes. Les plaques stratifiées sont employées souvent dans l'industrie aérospatiale. Du fait de l'importance de l'aspect sécuritaire dans la conception et le développement des avions civils ou militaires, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales de ces plaques. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques composites stratifiées.

La théorie classique des plaques stratifiées est celle basée sur la plus ancienne hypothèse de Kirchhoff qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin [72] qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de part l'hypothèse (des sections droites restent droites) à un vecteur des contraintes de cisaillement transversal constant dans l'épaisseur, ce qui oblige l'introduction des facteurs de corrections. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transversal, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluation dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney [73], qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

III.2. Définition d'un stratifié

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux (figure III.1). Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate. Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type $[90°, 0°]_{2s}$ est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à 90° et 0°, puis par symétrie de deux groupes de plis à 0° et 90°. L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

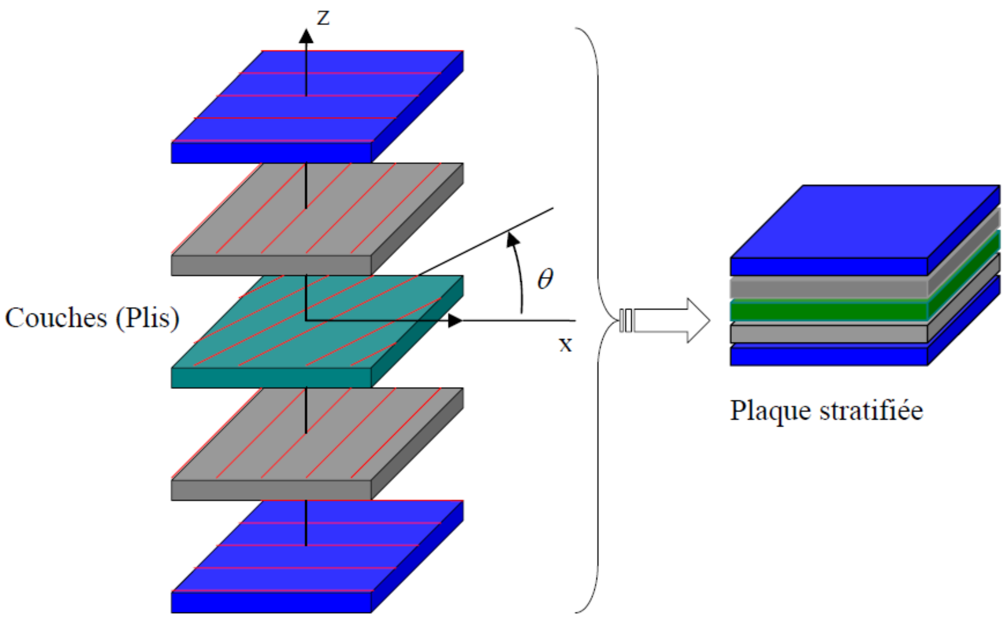


Figure III.1: *Nomenclature des stratifiés composites.*

Une des propriétés essentielles des matériaux composites est le caractère directionnel de leurs propriétés mécaniques. En effet, ces matériaux ne possèdent pas du tout les mêmes propriétés dans le sens des renforts que dans la direction perpendiculaire aux renforts. Ce type de propriétés est souvent modélisé par une loi de comportement élastique orthotrope, loi qui permet de représenter un matériau dont les propriétés mécaniques élastiques possèdent trois directions principales orthogonales (soit trois plans de symétrie). Ce type de loi permet à la fois de modéliser des composites fibreux unidirectionnels et des composites à fibres tissées, comme aussi des matériaux plus isotropes comme par exemple les plastiques renforcés de fibres courtes ou même des matériaux isotropes standard. La loi de comportement d'un matériau orthotrope élastique en déformations infinitésimales, exprimée dans le repère d'orthotropie du matériau, s'écrit [74]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.1a}$$

Où les constantes de rigidités sont exprimées par :

$$\overline{C}_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta},\quad \overline{C}_{12} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta},\quad \overline{C}_{13} = \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta},$$

$$\overline{C}_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta},\quad \overline{C}_{23} = \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta},\quad \overline{C}_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta},$$

$$\overline{C}_{44} = G_{23},\quad \overline{C}_{55} = G_{13},\quad \overline{C}_{66} = G_{12} \tag{III.1b}$$

Avec : $\Delta = \dfrac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$

Et le lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de poisson est exprimé par :

$$\nu_{ji} = \frac{E_j}{E_i}\nu_{ij} \quad \text{pour } i, j = 1,2,3 \tag{III.1c}$$

Où les différentes variables sont définies ainsi :

σ_{ij} : Tenseur des contraintes nominales représenté sous forme vectorisée ;

ε_{ij} : Tenseur des déformations infinitésimales représenté sous forme vectorisée ;

$\overline{C}_{ij}$: Tenseur d'élasticité linéaire orthotrope exprimé sous forme matricielle dans le repère des directions principales du matériau ;

E_i : Module d'élasticité dans la direction principale *i* ;

ν_{ij} : Coefficient de Poisson dans la direction *j* pour une traction en *i* ;

G_{ij} : Module de cisaillement dans le plan *i j*.

Nous remarquons que pour définir un matériau avec ce modèle, dix paramètres constitutifs doivent être déterminés, soit trois modules d'élasticité, trois coefficients de Poisson, trois modules de cisaillement, ainsi que la masse volumique du matériau. Dans ce modèle, les directions principales forment un trièdre orthogonal droit. Il faut également noter que le modèle d'élasticité orthotrope est plus général qu'un modèle de composite unidirectionnel, souvent considéré comme isotrope transverse. On obtient un modèle de matériau composite fibreux isotrope transverse en imposant que :

- E_2 et E_3 sont égaux au module d'élasticité transverse E_T, E_1 étant alors égal au module d'élasticité E_L dans la direction principale (des fibres).
- G_{12} et G_{13} sont égaux au module de cisaillement G_{LT} entre la direction principale et le plan transverse, G_{23} étant alors égal au module de cisaillement G_{TT} dans le plan transverse.
- ν_{12} et ν_{13} sont égaux au coefficient de Poisson ν_{LT} entre les directions principale et transverse, ν_{23} étant alors égal au coefficient de Poisson ν_{TT} dans le plan transverse.

On peut ainsi décrire un matériau composite unidirectionnel isotrope transverse par six constantes de matériau : E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT}, ν_{LT} et ν_{TT}. Cependant, en raison des procédés de mise en œuvre des matériaux composites, on remarque souvent qu'un matériau composite unidirectionnel réel ne peut pas être considéré comme parfaitement isotrope transverse. Ainsi, en toute généralité, pour des structures plaques ou coques, les constantes nécessaires à la caractérisation d'un matériau orthotrope sont E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, G_{13} et finalement ν_{12}.

III.3. Modélisation géométrique

Les coordonnées du stratifié sont définies avec un axe *z* perpendiculaire au plan de stratifié. L'origine de l'axe *z* est au centre géométrique (plan médian) du stratifié et les coordonnées dans le plan *xy* sont arbitraire. Il est cependant habituel d'assigner l'axe des *x* à une direction spécifique de changement ou une direction principale de la structure. Une fois que le système de coordonnées est établi, les angles des strates θ_k sont définis comme indiqué à la (figure III.1) c'est-à-dire que θ_k est l'angle entre la direction des fibres et l'axe *x*. Pour des raisons d'analyse et de conception du stratifié, il est pratique de définir les coordonnées de la couche (*k*), comme montré sur la (figure III.2) suivante :

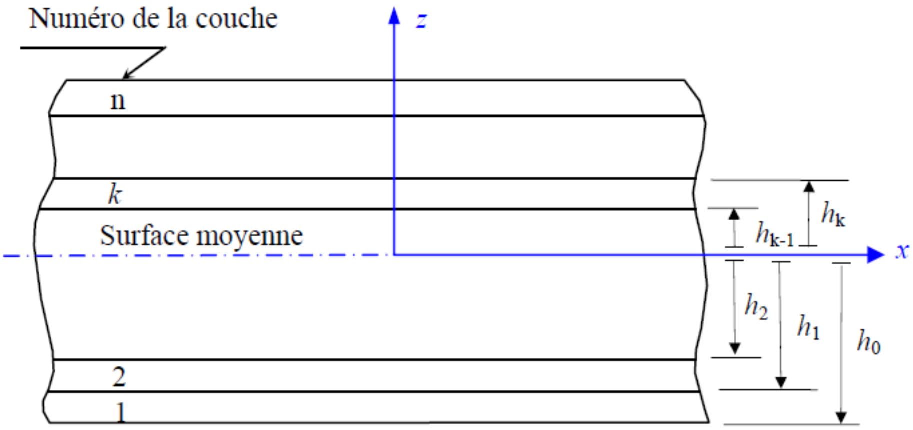


Figure III.2: *Modélisation géométrique de stratifié*

Les notations utilisées sont reportées sur la (figure III.2). L'élément stratifié est constitué de *n* couches numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme un plan de référence *Oxy* (plan moyen) et l'axe *Oz* est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche (*k*) est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

III.4. Comportement mécanique des matériaux stratifiés

L'étude du comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysée par la théorie des plaques stratifiées, basé sur une évaluation du champ des contraintes et champs des déplacements en tout point de la structure. Cette étude comportera deux phases:

1. L'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est souvent désignée par microanalyse du matériau composite;
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

Nous développerons donc de manière assez détaillée les éléments de cette théorie en considérant les hypothèses suivantes :

- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes;
- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de « Kirchhoff - Love » pour la flexion et la traction des plaque minces : La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation ; Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.

III.4.1. Champ des déplacements

La théorie classique des stratifiés se situe dans le cadre général des schémas du premier degré de la théorie des plaques qui ne prend pas en compte le cisaillement transverse. Ces schémas expriment les déplacements *u*, *v* et *w* en un point de la plaque, de coordonnées (*x, y, z*) rapportées au plan moyen de la plaque, sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}\boldsymbol{\varphi}_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}\boldsymbol{\varphi}_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{III.2}$$

Sachant que $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{w}_0$ sont les déplacements d'un point $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}=0)$ du plan moyen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0), \\ \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0), \\ \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0) \end{aligned} \tag{III.3}$$

III.4.2. Champ des déformations

A partir du champ de déplacement de la relation (III.2), on peut déduire le champ de déformation qui peut être exprimé en coordonnées cartésiennes par les relations de la théorie d'élasticité linéaire suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x},\\
&\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_y}{\partial y},\\
&\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,\\
&\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right),\\
&\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x,\\
&\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
\end{aligned}
\qquad \text{(III.4)}
$$

La théorie classique simplifiée des stratifiés fait l'hypothèse que la déformation est continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche (afin d'éviter le délaminage) mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.

Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation de la plaque, donc la théorie classique des stratifiés néglige le cisaillement transverse: $\gamma_{xz} = 0$ et $\gamma_{yz} = 0$ ce qui conduit d'après les relations (III.4) à définir les rotations dues à la flexion (sans cisaillement):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_x(x,y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x},\\
&\varphi_y(x,y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}
\end{aligned}
\qquad \text{(III.5)}
$$

En tenant compte de ces deux relations, Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après les expressions (III.2) par :

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}(x,y),\\
&v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y}(x,y),\\
&w(x,y,z) = w_0(x,y)
\end{aligned}
\qquad \text{(III.6)}
$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.7}$$

En introduisant les déformations en membrane :

$$\varepsilon^0_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y), \quad \varepsilon^0_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x,y), \quad \gamma^0_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \tag{III.8}$$

Et les déformations en flexion et torsion dépendent de la matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x,y), \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x,y), \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x,y) \tag{III.9}$$

L'état de déformation $\{\varepsilon\}$, en tout point du stratifié, peut être calculé à partir de la déformation plane $\{\varepsilon^0\}$ et de la courbure $\{k\}$ du plan moyen en utilisant l'expression finale qui emploie l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \tag{III.10}$$

III.4.3. Champs de contraintes

Le champ de contraintes dans la couche *k* s'exprime par la relation générale sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \tag{III.11}$$

L'utilisation des relations (III.7) et (III.11), nous aide à récrire cette dernière expression sous une forme plus explicite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.12}$$

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z[\bar{Q}]^k \{k\} \tag{III.13}$$

La matrice $\{\sigma\}^k$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$.

La matrice de rigidité réduite $\left[\overline{Q}_{ij}\right]^k$ varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

III.4.4. Comportement en membrane-flexion-torsion

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli.

Dans ce paragraphe, on va étudier le comportement du stratifié lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles.

III.4.4.1. Comportement en Membrane

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est noté h. il est constitué de n plis. Le pli numéro k a une épaisseur notée e_k . Le plan (x-y) est le plan de symétrie (ou plan moyen).

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notées $\left(N_x, N_y, N_{xy}\right)$ par unité de longueur suivant la direction y ou la direction x (figure III.3). Il s'agit là d'efforts dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié. Les efforts de membrane sont obtenus par intégration des contraintes par unité de longueur de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{N_x} \\ \boldsymbol{N_y} \\ \boldsymbol{N_{xy}} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma_{xx}} \\ \boldsymbol{\sigma_{yy}} \\ \boldsymbol{\sigma_{xy}} \end{Bmatrix} \boldsymbol{dz} \tag{III.14}$$

$\boldsymbol{N_x}$: Effort résultant dans la direction x par unité de longueur suivant y.

$\boldsymbol{N_y}$: Effort résultant dans la direction y par unité de longueur suivant x.

$\boldsymbol{N_{xy}}$: Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y.

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une couche à une autre.

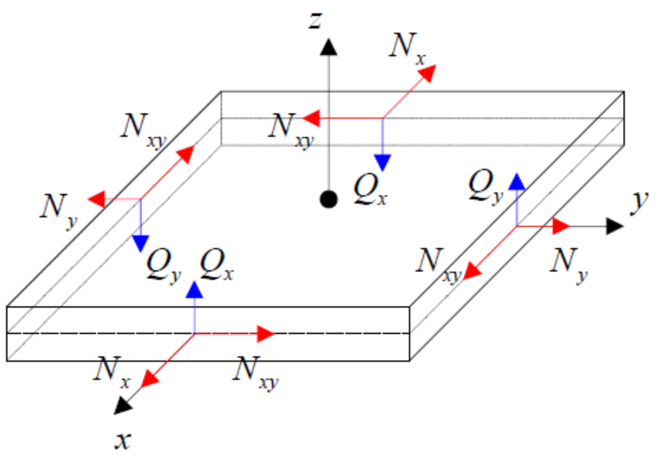


Figure III.3 : *Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée.*

Les efforts en membranes seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \qquad \text{(III.15)}$$

Où h_{k-1} et h_k sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre k et k-1 dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la figure III.2.

La substitution de l'équation (III.12) dans l'équation (III.15) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \qquad \text{(III.16)}$$

Puisque la matrice $\left[\bar{Q}_{ij}\right]^k$ n'étant pas en fonction de la distance z, $\{\varepsilon^0\}$ et $\{k\}$ sont indépendantes de z et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (III.16) peut alors être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.17)}$$

Dont les coefficients A_{ij} sont appelés les rigidités de membrane :

$$[A] = \sum_{k=1}^{n} [\overline{Q}]^k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\overline{Q}_{ij})^k e_k \qquad \text{(III.18)}$$

Et Les coefficients B_{ij} sont appelés les rigidités de couplage membrane-flexion :

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [\overline{Q}]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^{n} (\overline{Q}_{ij})^k e_k z_k \qquad \text{(III.19)}$$

III.4.4.2. Comportement en flexion et torsion

- **Résultantes en flexion**

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \qquad \text{(III.20)}$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y, respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la (figure III.4).

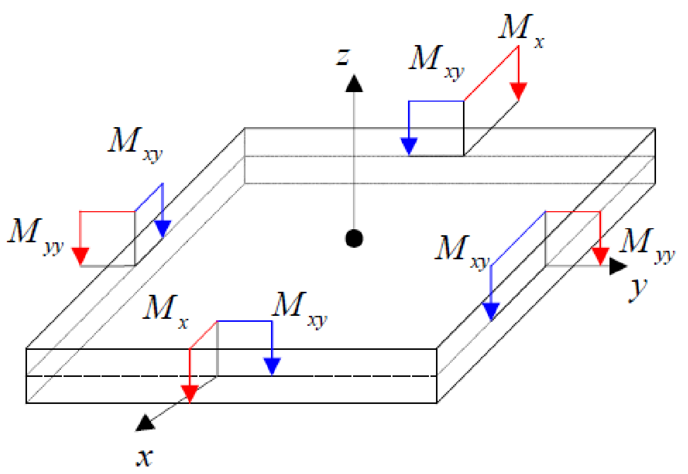


Figure III.4 : *Moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée.*

Substituant l'équation (III.12) dans l'équation (III.20), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.21)}$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme contractée suivante :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \qquad \text{(III.22)}$$

Dont les coefficients D_{ij} sont appelés les rigidités de flexion :

$$[D] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{Q}\right]^k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\overline{Q}_{ij}\right)^k \left(e_k z_k^2 + \frac{z_k^3}{12}\right) \qquad \text{(III.23)}$$

- **Résultantes en cisaillement**

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié (figure III.3) :

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^k dz \qquad \text{(III.24)}$$

III.4.5. Equation constitutive de la théorie classique

L’équation constitutive d’une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures dans le cadre de la théorie classique. Elle s’obtient en regroupant les expressions (III.17) et (III.21) suivent une seule écriture matricielle sous la forme [75] :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.25)}$$

Sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.26)}$$

III.5. Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope

Un matériau orthotrope, soumis à un état de contraintes planes est caractérisé par ses modules de l'ingénieur $E_L, E_T, \nu_{LT}\ et\ G_{LT}$ rapportés à ses axes principaux$(L, T, T^{'})$. La direction L est la direction des fibres pour un composite unidirectionnel ou la direction chaîne pour un composite à renfort tissu. Les directions T et $T^{'}$ sont les directions transverses aux fibres pour le composite unidirectionnel (figure III.5a). Pour un matériau à renfort tissu, la direction T est celle de la trame et la direction T' est orthogonale au plan du tissu (figure III.5b).

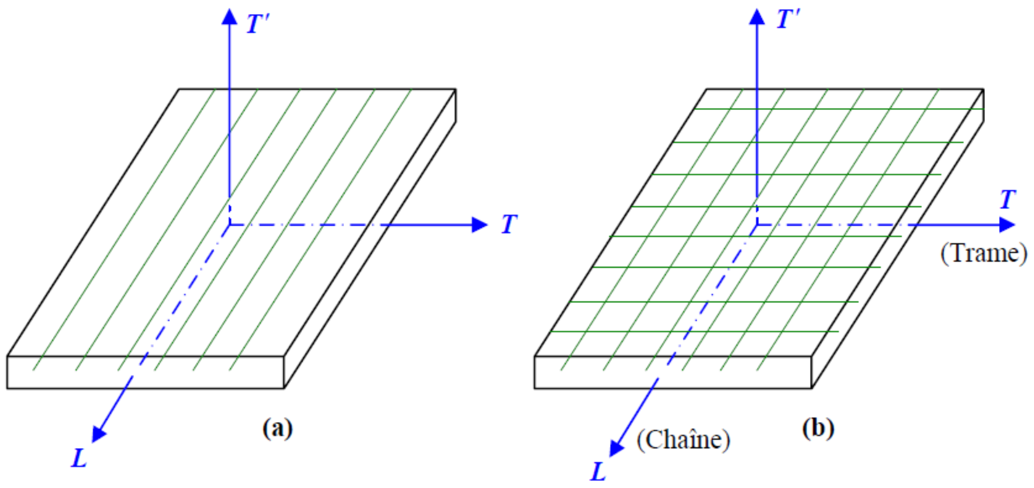


Figure III.5 : *Directions principales : a) d'un matériau unidirectionnel, b) d'un matériau à renfort tissu*

Pour un état de contraintes planes, les relations contraintes déformations s'écrivent dans les axes des matériaux suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_T \\ \sigma_L \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} \tag{III.27}$$

Où les constantes de la matrice de rigidité Q_{ij} sont exprimées par :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \qquad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}},$$
$$Q_{22} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \qquad Q_{66} = G_{LT} \tag{III.28}$$

En fonction des modules de l'ingénieur : E_L et E_T les modules d'Young longitudinal et transversal, ν_{LT} le coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction longitudinale et G_{LT} le module de cisaillement mesuré dans le plan de la couche.

III.5.1. Équations de mouvement des stratifiés orthotropes

III.5.1.1. Stratifié orthotrope dans ses axes

Dans le cas d'une couche orthotrope d'épaisseur h, et dans le cas où les axes (L, T, T') du stratifié orthotrope coïncident avec les axes (x, y, z) de référence de la plaque, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_x \\ \boldsymbol{N}_y \\ \boldsymbol{N}_{xy} \\ \boldsymbol{M}_x \\ \boldsymbol{M}_y \\ \boldsymbol{M}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_{12} & \boldsymbol{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \\ \boldsymbol{k}_x \\ \boldsymbol{k}_y \\ \boldsymbol{k}_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.29)}$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{Q}_{11}\boldsymbol{h}, && \boldsymbol{D}_{11} = \boldsymbol{Q}_{11}\frac{\boldsymbol{h}^3}{12}, \\ &\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{h}, && \boldsymbol{D}_{12} = \boldsymbol{Q}_{12}\frac{\boldsymbol{h}^3}{12}, \\ &\boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{Q}_{22}\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{B}_{ij} = 0, && \boldsymbol{D}_{22} = \boldsymbol{Q}_{22}\frac{\boldsymbol{h}^3}{12}, \\ &\boldsymbol{A}_{16} = \boldsymbol{A}_{26} = 0, && \boldsymbol{D}_{16} = \boldsymbol{D}_{26} = 0, \\ &\boldsymbol{A}_{66} = \boldsymbol{Q}_{66}\boldsymbol{h}, && \boldsymbol{D}_{66} = \boldsymbol{Q}_{66}\frac{\boldsymbol{h}^3}{12} \end{aligned} \qquad \text{(III.30)}$$

Dans le cas d'un stratifié orthotrope rapporté à ses axes, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations en membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

Les équations de mouvement sont ensuite obtenues en reportant l'équation constitutive (III.29) du stratifié dans les relations fondamentales des plaques. Ces équations de mouvement s'écrivent :

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}=\rho_s\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \qquad \text{(III.31)}$$

$$\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}=\rho_s\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \qquad \text{(III.32)}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}=q-\rho_s\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \qquad \text{(III.33)}$$

Où q est la charge de pression exercée sur le stratifié.

III.5.1.2. Stratifié orthotrope hors axes

Dans le cas où les axes (L,T) du matériau orthotrope font un angle θ avec les axes de référence (x, y), (figure III.6), l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.34)}$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$A_{ij}=\overline{Q}_{ij}h, \quad B_{ij}=0, \quad D_{ij}=\overline{Q}_{ij}\frac{h^{13}}{12} \qquad \text{(III.35)}$$

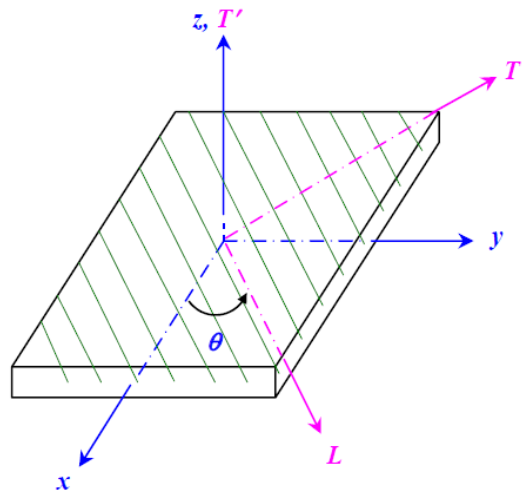


Figure III.6 : *Stratifié hors axes.*

Ces relations introduisent les coefficients de rigidité réduite hors axes exprimés en fonction des coefficients rapportés aux axes du stratifié. A nouveau, il y a l'absence de couplage membrane flexion-torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une couche orthotrope dont les axes coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons un couplage traction-cisaillement, au niveau du comportement en membrane, ainsi qu'un couplage flexion-torsion. Les équations de mouvement (III.31) à (III.33) sont alors modifiées suivant :

$$\boldsymbol{A}_{11}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{x}^2}+2\boldsymbol{A}_{16}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{A}_{66}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{y}^2}+\boldsymbol{A}_{16}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{x}^2}+\left(\boldsymbol{A}_{16}+\boldsymbol{A}_{66}\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{A}_{26}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{y}^2}=\boldsymbol{\rho}_s\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{t}^2}, \quad \text{(III.36)}$$

$$\boldsymbol{A}_{16}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{x}^2}+\left(\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{66}\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{A}_{26}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{y}^2}+\boldsymbol{A}_{66}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{x}^2}+2\boldsymbol{A}_{26}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{A}_{22}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{y}^2}=\boldsymbol{\rho}_s\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{t}^2}, \quad \text{(III.37)}$$

$$\boldsymbol{D}_{11}\frac{\partial^4 \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{x}^4}+4\boldsymbol{D}_{16}\frac{\partial^4 \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{x}^3\partial \boldsymbol{y}}+2\left(\boldsymbol{D}_{12}+2\boldsymbol{D}_{66}\right)\frac{\partial^4 \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{x}^2\partial \boldsymbol{y}^2}+\boldsymbol{D}_{22}\frac{\partial^4 \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{y}^4}+4\boldsymbol{D}_{26}\frac{\partial^4 \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}^3}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{\rho}_s\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{t}^2} \quad \text{(III.38)}$$

III.6. Modèles de structures multicouches

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes caractérisées par une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models)
- Approche par couche LW (Layer-wise)
- Approche développement asymptotique

III.6.1. Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente

Parmi les différentes classes de théories, l'approche de monocouche équivalente est la plus fréquemment utilisée. Celle-ci se base sur l'idée de représenter un stratifié hétérogène complexe par un seul lamina statiquement équivalent (homogénéisation), ce qui permet de réduire le problème d'élasticité 3D complexe à un problème 2D bien plus simple. Cette approche pose donc l'hypothèse que le champ de déplacement dans l'épaisseur peut être considéré comme continu à travers l'épaisseur de la structure multicouche. Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère bidimensionnel de la structure. Cependant, en considérant une approximation du déplacement unique dans toute l'épaisseur du stratifié, cette classe de théories assure la continuité des déformations entre les diverses strates, mais ne permet pas de modéliser la continuité des contraintes aux interfaces des couches. Ainsi, les contraintes inter-laminaires ne peuvent généralement pas être déterminées avec précision à l'aide de ces seules méthodes, ce qui implique donc souvent l'utilisation d'autres théories pour effectuer une correction a posteriori des contraintes. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche dans ce qui suit.

III.6.1.1. Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT)

La théorie CLPT, qui est une généralisation aux stratifiés composites de la théorie classique des plaques, se présente comme la plus simple des approches ESL. Cette théorie se base sur les hypothèses de Kirchhoff-Love, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation et gardera la même longueur (figure III.7), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ainsi, la réponse d'une plaque stratifiée ne peut être précisément déterminée avec cette méthode que si la structure est très mince et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotropes, cela veut dire que les couches sont composées de matériaux assez peu différents, et possèdent des modules de cisaillement transverse du même ordre de grandeur que les autres modules. Une autre condition pour que cette approche donne de bons résultats est que le chargement et les conditions aux limites n'occasionnent que peu de flexion dans le stratifié. Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z w_{0,x}(x,y), \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z w_{0,y}(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{III.39}$$

Où (u, v, w) représente le vecteur des déplacements, d'un point matériel de coordonnées nominales (x, y, z), de même (u_0, v_0, w_0) ce sont les déplacements du feuillet moyen. Le plan principal de la plaque est le plan x-y et l'épaisseur h de cette dernière est orientée selon l'axe z (avec $z \in [-h/2, h/2]$).

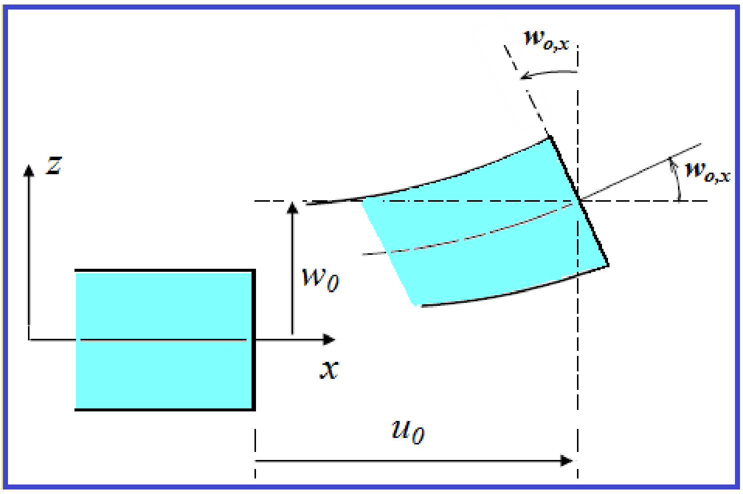


Figure III.7 : *Cinématique de Love-Kirchhoff.*

III.6.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la section précédente, nous avons montré que la théorie élémentaire permettait uniquement d'analyser la dispersion des ondes à basses fréquences. Nous devons donc employer une autre théorie si l'on veut pouvoir caractériser les ondes principales et secondaires à des fréquences plus élevées. On peut donc utiliser la théorie FSDT proposée par Whitney et al. [76] qui est une extension de la théorie du premier ordre proposée dans Mindlin [7] pour étudier les ondes transversales et qui revoit l'hypothèse (La section droite de la plaque reste perpendiculaire au feuillet moyen) de la théorie élémentaire de Kirchhoff-Love en tenant compte des déformations liées au cisaillement transverse, ainsi que des inerties de rotation de section. Pour chacune de ces théories approchées, le matériau composite stratifié est homogénéisé complètement ; c'est pourquoi elles sont souvent désignées par le terme de couche unique équivalente. Du fait de ces nouvelles hypothèses, le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_x(x,y), \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_y(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{III.40}$$

Avec: ϕ_x, ϕ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes *x* et *y*, respectivement (figure III.8), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + w_{0,x}, \ \phi_y = \gamma_{yz}^0 + w_{0,y} \tag{III.41}$$

Où γ_{xz}^{0} , γ_{yz}^{0} les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

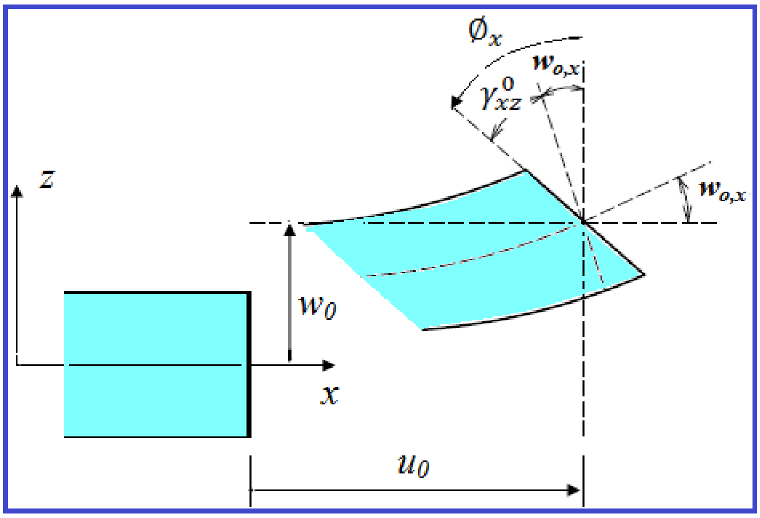


Figure III.8 : *Cinématique de Reissner-Mindlin.*

III.6.1.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou coques épaisses, où la déformation en cisaillement transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des déformations en cisaillement transverse quadratiques dans l'épaisseur. Le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_x(x,y) + z^2\theta_x(x,y) + z^3\psi_x(x,y), \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_y(x,y) + z^2\theta_y(x,y) + z^3\psi_y(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{III.42}$$

Où les variables ϕ_x, ϕ_y représentent les rotations des sections déformées autour des axes *x* et *y* respectivement (termes du premier ordre), tandis que θ_x, θ_y symbolisent les termes du second ordre (courbure) et ψ_x, ψ_y les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées [77, 78]. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la plaque ou la coque est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les peaux du stratifié [74] (figure III.9). La première hypothèse entraîne alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique à celui du terme linéaire, ce qui réduit finalement le problème à un même niveau de complexité que le modèle FSDT (seulement cinq inconnues u_0, v_0, w_0, ϕ_x, ϕ_y). La précision des rigidités de stratifié ainsi obtenues avec les méthodes HSDT est nettement supérieure à celle trouvée à l'aide des théories d'ordre inférieur et le recours au facteur de correction de cisaillement n'est généralement pas nécessaire. Par contre, comme toutes les théories ESLM basées sur une approximation du déplacement uniquement, les contraintes inter-laminaires ne sont toujours pas continues à l'interface entre les stratifiés, même si ces dernières se rapprochent des contraintes réelles. Si d'un point de vue de la précision en fonction de l'effort de calcul, les théories du troisième ordre simplifiées semblent optimales, des modèles HSDT d'ordre plus élevé restent bien plus précis dans le cas de coques épaisses fortement orthotropes. Le développement de l'équation (III.42) est utilisé avec l'annulation des termes du second ordre (θ_x, θ_y), l'expression du champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z w_{0,x}(x,y) + f(z)\gamma_{xz}^0(x,y), \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z w_{0,y}(x,y) + f(z)\gamma_{yz}^0(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{III.43}$$

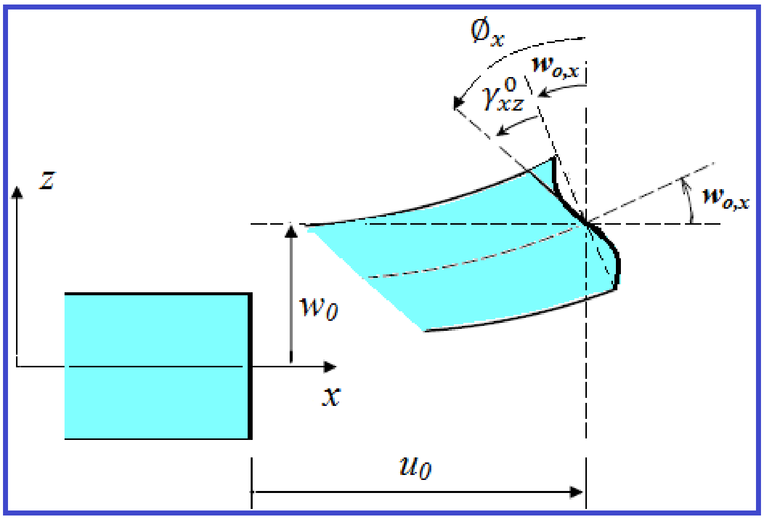


Figure III.9 : *Cinématique de la théorie d'ordre élevé.*

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérise l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque stratifié, Il faut également noter que l'expression de cette fonction est variable selon les différentes théories existantes dans la littérature. A savoir que $f(z)=0$ pour le cas de la théorie classique des plaques stratifiées, par contre $f(z)=z$ au titre de la théorie du premier ordre en cisaillement transverse.

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur:

- L'approche d'Ambartsumyan [79] donnée sous forme :

$$f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right) \qquad \text{(III.44)}$$

- L'approche de Reissner [6] exprimée par :

$$f(z)=\frac{5}{4}z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right) \qquad \text{(III.45)}$$

- L'approche de Reddy [10], La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z)=z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right) \qquad \text{(III.46)}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal *w* est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier [80] avec :

$$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{z}{h}\right) \qquad \text{(III.47)}$$

Touratier [80] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

- Un modèle exponentiel de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [12] est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \tag{III.48}$$

- L'approche de Aydogdu [81] avec :

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}}, \quad \alpha \succ 0 \tag{III.49}$$

III.6.2. Approche par couche

Contrairement aux théories ESLM, les théories par-couche supposent des champs de déplacement développés séparément d'une couche matérielle à l'autre (figure III.10). Elles consistent donc à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes stratifiées, et permettre la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis.

En dépit du succès des modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse [82], ces modèles ne sont pas capables de déterminer correctement les contraintes inter-laminaires tout près de discontinuités tels que les trous, bords libres en traction ...etc.
Dans la modélisation de ces effets locaux, l'inclusion de la déformation normale transverse est importante pour deux raisons: premièrement, la contrainte normale transverse est une contrainte généralement significative dans ces régions, si ce n'est pas la dominante. Deuxièmement, comme rapporté par Robbins et Reddy [83], les modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse ne satisfont pas les conditions aux limites en traction concernant les contraintes du cisaillement transverse au niveau des bords libres du composite stratifié. Un examen des conditions aux limites naturelles pour les équations différentielles de mouvement développées dans les références [84, 85] (pour le cas des théories par-couche qui négligent la déformation normale transverse) révèle que les contraintes en cisaillement transverse satisfont les conditions aux limites en traction au bord libre de la structure, dans le sens intégral uniquement et non pas dans le sens local (malgré le niveau de raffinement suivant l'épaisseur).

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

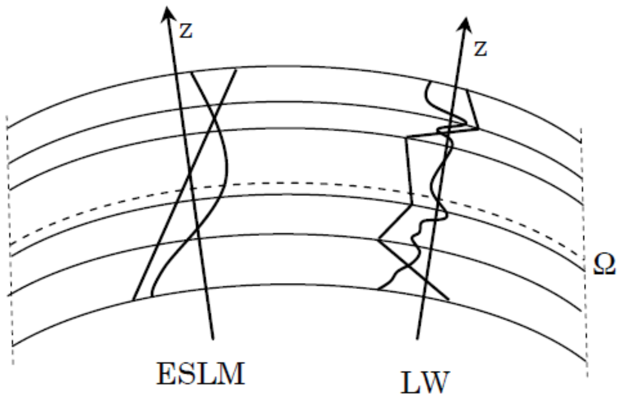


***Figure III.10 :** Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche [86].*

III.6.3. Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures à priori peu épaisses où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit [87, 88, 89]. Le travail le plus complet et intéressant semble celui de Ladeveze et Allix [90, 91]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contraintes et déplacements) correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte [92].

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [92].

III.7. Conclusion

Dans ce travail de thèse, on s'intéresse tout particulièrement aux pièces structurales réalisées en composites stratifiés. Ces matériaux résultent de la mise en place de couches successives de plis composites à base d'une matrice et de fibres longues. Typiquement, le recours à ce type de conception se fait dans le domaine de l'aéronautique pour des éléments de fuselage des aérostructures. A cet effet nous avons exposé dans ce chapitre les relations qui existent entre les composantes de déformation et celles de déplacement qui nous ont permis l’obtention de l’équation fondamentale de la théorie des stratifiés. Cette théorie qui a pour but de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'un stratifié en trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y). La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur du stratifié. Cette intégration conduite à introduire les résultantes et moments. Par suite un rapide survol des théories des stratifiés composites existantes, on peut constater que les modèles analytiques des plaques stratifiées à savoir la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d’ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d’élasticité suivie par les équations cinématiques d’un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

Chapitre IV

Etude analytique de la vibration libre d’une plaque stratifiée renforcée par patch

Chapitre IV : Etude analytique de la vibration libre d'une plaque stratifiée renforcée par patch

IV.1. Introduction

Les problèmes des vibrations des structures sont devenus l'une des préoccupations actuelles dans plusieurs domaines (aéronautique, construction navale, automobile et le génie civil). L'amortissement des vibrations est un facteur essentiel dans de nombreuses applications structurales. Dans le cas de structures composites, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques pouvant conduire à la ruine de la structure, tels que la résonance et la fatigue, à une limitation d'exploitation en raison d'un niveau de bruit élevé ou d'une perturbation des performances de la structure par la présence de vibrations indésirables. Basant sur la littérature décrite précédemment, il est clair que le comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites soumises à des vibrations libres mérite bien d'être étudié puisque aucune des solutions approximatives ou exactes obtenues n'est couverte pas tous les états de frontières possibles, les facteurs géométriques, les propriétés mécaniques de différents types des matériaux et les effets de déformation de cisaillement sur les fréquences de vibrations. On conséquent, cette insuffisance des informations nous a permis d'investir dans ce domaine.

Les plaques rectangulaires font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérative de l'étude de leur comportement vibratoire et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est, depuis plus de cent ans, le sujet de recherches exhaustives.

L'objectif de notre étude est l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences et modes propres) d'une plaque stratifiée simplement appuyée et renforcée à son surface supérieure par une masse de patch en vibration libre, en utilisant une nouvelle théorie d'ordre supérieur à deux variables. Dans le cas de la présente analyse libre, on s'intéresse aux paramètres dynamiques naturels, afin de caractériser le comportement propre inhérent à la structure d'intérêt indépendamment des sollicitations extérieures (l'énergie potentielle des forces extérieures est nulle).

IV.2. Théorie d'ordre élevé à quatre variables

La vibration libre des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables est un travail de recherche très intéressant. La présente théorie identifiée la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Les équations du mouvement sont dérivées de principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques exactes des structures en plaques composites stratifiées antisymétriques à empilements croisés et à empilements équilibrés attachées à une masse de patch. Des résultats numériques obtenus à l'aide de la théorie actuelle sont comparés aux solutions d'élasticité en trois dimensions et celles qui sont calculés à l'aide du premier ordre et les autres théories d'ordre supérieur. On peut en conclure que la théorie proposée est non seulement précise mais également efficace pour analyser les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées [93].

IV.2.1. Configuration géométrique

Considérons à titre d'exemple numérique une plaque rectangulaire en matériau composite stratifié d'une longueur, largeur et épaisseur égales à $(a, b\ et\ h)$, respectivement. La plaque est renforcée avec une série de patch distribuée de masse (M) avec des dimensions égales à $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ suivant les directions des axes x et y, respectivement, qui est situé dans une position arbitraire $(X_m\ et\ Y_m)$ selon la figure IV.1 indiquée ci-dessous. La masse du patch est considérée comme être placé sur la surface supérieure de la plaque et l'on suppose que cette masse n'empêche pas toute flexion du segment de la plaque sur laquelle elle est collée. Le système global de coordonnées cartésiennes est choisi avec l'origine dans le coin et sur le plan médian de la plaque $(\boldsymbol{z}=0)$. Par conséquent, le domaine de la plaque est défini comme : $0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a}$, $0 \le \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}$ et $-\boldsymbol{h}/2 \le \boldsymbol{z} \le \boldsymbol{h}/2$.

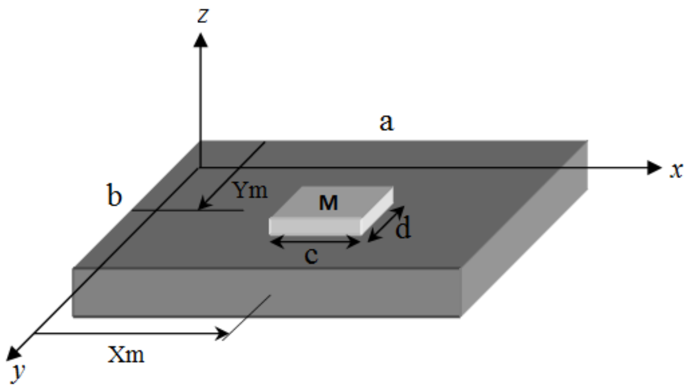


Figure IV.1 *: Plaque avec masse de patch distribuée.*

IV.2.2. Hypothèses et Champ de déplacement de la nouvelle théorie

Le champ de déplacement de la présente théorie raffinée est choisi selon les hypothèses suivantes:

1) Le déplacement transversale est divisé en deux composantes : la première est celle de la flexion (w_b) et la deuxième est de cisaillement (w_s) ;

2) Les composantes de flexion des déplacements dans le plan sont similaires à celles données par la théorie classique CLPT dans certains aspects tels que les conditions aux limites et les expressions de moments ;

3) La contrainte normale dans la direction transversale (σ_z) est négligeable devant les autres contraintes normales (σ_x) et (σ_y) ;

4) Les composantes de cisaillement des déplacements dans le plan donnent lieu à des variations trigonométriques des contraintes de cisaillement et par conséquent à des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que ces contraintes disparaissent sur la surface supérieure et inférieure de la plaque.

Sur la base de ces hypothèses, le champ de déplacement peut être obtenu sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\
v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \qquad \text{(IV.1)} \\
w(x,y,z) &= w_b(x,y) + w_s(x,y)
\end{aligned}
$$

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse suivant l'épaisseur de la plaque exprimée par:

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \qquad \text{(IV.2)}$$

Où u_0 et v_0 désignent les déplacements le long des directions de coordonnées x et y d'un point matériel situé sur le plan médian de la plaque; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées *x* et *y*.

IV.2.3. Champs des déformations

Selon le champ proposé, la déformation transverse normale est encore nulle (ε_z). Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (IV.1) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit [94]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.3)}$$

Où les termes qui groupent le champ de déformation ont pour expressions :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.4a)}$$

Et $g(z) = 1 - \dfrac{df(z)}{dz} = \cos\left(\dfrac{\pi z}{h}\right)$ (IV.4b)

IV.2.4. Champs des contraintes

En considérant l'hypothèse que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan (*x*, *y*), les équations constitutives pour des déformations non nulles peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.5a)}$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités Q_{ij} peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur comme :

$$\boldsymbol{Q}_{11} = \frac{\boldsymbol{E}_{11}}{1-\boldsymbol{\nu}_{12}\boldsymbol{\nu}_{21}}, \quad \boldsymbol{Q}_{22} = \frac{\boldsymbol{E}_{22}}{1-\boldsymbol{\nu}_{12}\boldsymbol{\nu}_{21}}, \quad \boldsymbol{Q}_{12} = \frac{\boldsymbol{\nu}_{12}\boldsymbol{E}_{11}}{1-\boldsymbol{\nu}_{12}\boldsymbol{\nu}_{21}}, \tag{IV.5b}$$

$$\boldsymbol{Q}_{66} = \boldsymbol{G}_{12}, \quad \boldsymbol{Q}_{44} = \boldsymbol{G}_{23}, \quad \boldsymbol{Q}_{55} = \boldsymbol{G}_{13}$$

Etant donné que le matériau stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes avec leurs axes orientés arbitrairement en ce qui concerne les coordonnées de stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans le repère global du stratifié (x, y, z). Les relations constitutives pour n'importe quelle couche k d'un matériau stratifié dans le système de coordonnées (x, y), correspondent à un état de contraintes planes, elles s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité réduite $\overline{\boldsymbol{Q}}_{ij}$ sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}}_{11} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{12} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{16} \\ \overline{\boldsymbol{Q}}_{12} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{22} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{26} \\ \overline{\boldsymbol{Q}}_{16} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{26} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{IV.6a}$$

De même, les contraintes de cisaillement transverse s'écrivent dans la couche k par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{yz} \\ \boldsymbol{\tau}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}}_{44} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{45} \\ \overline{\boldsymbol{Q}}_{45} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \tag{IV.6b}$$

Où Les coefficients de rigidité réduite $\overline{\boldsymbol{Q}}_{ij}$ sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{Q}}_{11} &= \boldsymbol{Q}_{11}\cos^4\boldsymbol{\theta} + 2(\boldsymbol{Q}_{12} + 2\boldsymbol{Q}_{66})\sin^2\boldsymbol{\theta}\cos^2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Q}_{22}\sin^4\boldsymbol{\theta} \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{12} &= (\boldsymbol{Q}_{11} + \boldsymbol{Q}_{22} - 4\boldsymbol{Q}_{66})\sin^2\boldsymbol{\theta}\cos^2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Q}_{12}(\sin^4\boldsymbol{\theta} + \cos^4\boldsymbol{\theta}) \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{22} &= \boldsymbol{Q}_{11}\sin^4\boldsymbol{\theta} + 2(\boldsymbol{Q}_{12} + 2\boldsymbol{Q}_{66})\sin^2\boldsymbol{\theta}\cos^2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Q}_{22}\cos^4\boldsymbol{\theta} \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{16} &= (\boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12} - 2\boldsymbol{Q}_{66})\sin\boldsymbol{\theta}\cos^3\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{Q}_{12} - \boldsymbol{Q}_{22} + 2\boldsymbol{Q}_{66})\sin^3\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\theta} \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{26} &= (\boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12} - 2\boldsymbol{Q}_{66})\sin\boldsymbol{\theta}\cos^3\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{Q}_{12} - \boldsymbol{Q}_{22} + 2\boldsymbol{Q}_{66})\cos\boldsymbol{\theta} + \sin^3\boldsymbol{\theta} \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{66} &= (\boldsymbol{Q}_{11} + \boldsymbol{Q}_{22} - 2\boldsymbol{Q}_{12} - 2\boldsymbol{Q}_{66})\sin^2\boldsymbol{\theta}\cos^2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Q}_{66}(\sin^4\boldsymbol{\theta} + \cos^4\boldsymbol{\theta}) \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{44} &= \boldsymbol{Q}_{44}\cos^2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Q}_{55}\sin^2\boldsymbol{\theta} \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{45} &= (\boldsymbol{Q}_{55} - \boldsymbol{Q}_{44})\cos\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\theta} \\
\overline{\boldsymbol{Q}}_{55} &= \boldsymbol{Q}_{55}\cos^2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Q}_{44}\sin^2\boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \tag{IV.7}$$

La théorie des plaques a pour objectif de simplifier le problème à trois dimensions (*x*, *y*, *z*) en un problème à deux dimensions (*x*, *y*). La réduction du problème est obtenue par intégration suivant l'épaisseur. Cette intégration conduite à introduire les résultants qui seront définis prochainement.

IV.2.5. Energie de déformation

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche de solutions approchées du comportement mécanique ou vibratoire des stratifiés. Dans tous les cas les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque.

L'énergie de déformation due au mouvement de flexion de la plaque, donc elle est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. Cette énergie peut être exprimée en fonction des tenseurs de contraintes $[\boldsymbol{\sigma}]$ et de déformations $[\boldsymbol{\varepsilon}]$:

$$\boldsymbol{U_P} = \frac{1}{2}\int_0^{\boldsymbol{a}}\int_0^{\boldsymbol{b}}\int_{-\boldsymbol{h}/2}^{\boldsymbol{h}/2} \boldsymbol{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dxdydz} \tag{IV.8}$$

En substituant les équations, (IV.3), (IV.6a) et (IV.6b) dans l'équation (IV.8) et en intégrant ensuite à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée, l'énergie de déformation totale de la plaque peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U_P} = \frac{1}{2}\int_0^{\boldsymbol{a}}\int_0^{\boldsymbol{b}} \Big[& \boldsymbol{N_x}\delta\,\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 + \boldsymbol{N_y}\delta\,\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 + \boldsymbol{N_{xy}}\delta\,\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^0 + \boldsymbol{M_x^b}\delta\,\boldsymbol{k_x^b} + \boldsymbol{M_y^b}\delta\,\boldsymbol{k_y^b} + \boldsymbol{M_{xy}^b}\delta\,\boldsymbol{k_{xy}^b} + \boldsymbol{M_x^s}\delta\,\boldsymbol{k_x^s} \\ & + \boldsymbol{M_y^s}\delta\,\boldsymbol{k_y^s} + \boldsymbol{M_{xy}^s}\delta\,\boldsymbol{k_{xy}^s} + \boldsymbol{S_{yz}^s}\delta\,\boldsymbol{\gamma_{yz}^s} + \boldsymbol{S_{xz}^s}\delta\,\boldsymbol{\gamma_{xz}^s}\Big]\boldsymbol{dxdy}\end{aligned} \tag{IV.9}$$

Les résultantes des contraintes par unité de longueur $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{S}$ des couches totales de la plaque sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{N_x}, & \boldsymbol{N_y}, & \boldsymbol{N_{xy}} \\ \boldsymbol{M_x^b}, & \boldsymbol{M_y^b}, & \boldsymbol{M_{xy}^b} \\ \boldsymbol{M_x^s}, & \boldsymbol{M_y^s}, & \boldsymbol{M_{xy}^s} \end{Bmatrix} = \int_{-\boldsymbol{h}/2}^{\boldsymbol{h}/2} \left(\boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{\sigma_y}, \boldsymbol{\tau_{xy}}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{f(z)} \end{Bmatrix} \boldsymbol{dz}, \tag{IV.10a}$$

$$\left(S_{xz}^{s},S_{yz}^{s}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\tau_{xz},\tau_{yz}\right)g(z)dz \qquad \text{(IV.10b)}$$

En utilisant l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.10), la résultante des contraintes d'une plaque laminée peut être liée au nombre total des couches par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^{b} \\ M^{s} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B & B^{s} \\ B & D & D^{s} \\ B^{s} & D^{s} & H^{s} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^{b} \\ k^{s} \end{Bmatrix}, \qquad S = A^{s}\gamma \qquad \text{(IV.11)}$$

Où :

$$N=\left\{N_x,N_y,N_{xy}\right\}^{Tr},\;\; M^{b}=\left\{M_x^{b},M_y^{b},M_{xy}^{b}\right\}^{Tr},\;\; M^{s}=\left\{M_x^{s},M_y^{s},M_{xy}^{s}\right\}^{Tr}, \qquad \text{(IV.12a)}$$

$$\varepsilon=\left\{\varepsilon_x^{0},\varepsilon_y^{0},\gamma_{xy}^{0}\right\}^{Tr},\qquad k^{b}=\left\{k_x^{b},k_y^{b},k_{xy}^{b}\right\}^{Tr},\qquad k^{s}=\left\{k_x^{s},k_y^{s},k_{xy}^{s}\right\}^{Tr}, \qquad \text{(IV.12b)}$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \qquad \text{(IV.12c)}$$

$$B^{s}=\begin{bmatrix} B_{11}^{s} & B_{12}^{s} & B_{16}^{s} \\ B_{12}^{s} & B_{22}^{s} & B_{26}^{s} \\ B_{16}^{s} & B_{26}^{s} & B_{66}^{s} \end{bmatrix},\quad D^{s}=\begin{bmatrix} D_{11}^{s} & D_{12}^{s} & D_{16}^{s} \\ D_{12}^{s} & D_{22}^{s} & D_{26}^{s} \\ D_{16}^{s} & D_{26}^{s} & D_{66}^{s} \end{bmatrix},\quad H^{s}=\begin{bmatrix} H_{11}^{s} & H_{12}^{s} & H_{16}^{s} \\ H_{12}^{s} & H_{22}^{s} & H_{26}^{s} \\ H_{16}^{s} & H_{26}^{s} & H_{66}^{s} \end{bmatrix}, \qquad \text{(IV.12d)}$$

$$S=\left\{S_{yz}^{s},S_{xz}^{s}\right\}^{Tr},\qquad \gamma=\left\{\gamma_{yz},\gamma_{xz}\right\}^{Tr},\qquad A^{s}=\begin{bmatrix} A_{44}^{s} & A_{45}^{s} \\ A_{45}^{s} & A_{55}^{s} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.12e)}$$

Où A_{ij}, B_{ij}, etc. représentent les coefficients de rigidité de la plaque, sont définis comme :

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij},B_{ij}^{s},D_{ij}^{s},H_{ij}^{s}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\overline{Q}_{ij}\left(1,z,z^{2},f(z),z\,f(z),\left[f(z)\right]^{2}\right)dz,\;\; i,j=1,2,6, \qquad \text{(IV.13a)}$$

Et

$$A_{ij}^{s}=\int_{-h/2}^{h/2}\overline{Q}_{ij}\left[g(z)\right]^{2}dz,\quad i,j=4,5 \qquad \text{(IV.13b)}$$

IV.2.6. Energie cinétique

L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. Au profit de notre étude, il s'agit d'une énergie cinétique totale qui résulte généralement à la somme de l'énergie cinétique de la plaque et l'énergie cinétique de la masse du patch avec ces dimensions ***c*** et ***d*** uniformément répartie et agissant sur la surface supérieure de la plaque.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_P} + \boldsymbol{T_M} \tag{IV.14}$$

L'énergie cinétique de la plaque est définie comme :

$$\boldsymbol{T_P} = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{A_p} \rho\left[(\dot{u}_0)^2 + (\dot{v}_0)^2 + (\dot{w})^2\right] dA_p dz, \tag{IV.15}$$

Où le symbole exposant (.) indique la différenciation par rapport à la variable de temps (t), par contre ρ et A_P signifiants la densité du matériau et la surface de la plaque, respectivement. En substituant l'équation (IV.1) dans l'équation (IV.15) et en tenant compte des limites d'intégration dans l'épaisseur de la plaque, l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_P} = \int_{A_P} \{ & \delta u_0\left(I_1\ddot{u}_0 - I_2\ddot{w}_{b,x} - I_4\ddot{w}_{s,x}\right) + \delta v_0\left(I_1\ddot{v}_0 - I_2\ddot{w}_{b,y} - I_4\ddot{w}_{s,y}\right) \\ & + \delta w_b\left(I_1\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + I_2\left(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}\right) - I_3\left(\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}\right) - I_5\left(\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy}\right)\right) \\ & + \delta w_s\left(I_1\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + I_4\left(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}\right) - I_5\left(\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}\right) - I_6\left(\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy}\right)\right)\} dA_P \end{aligned} \tag{IV.16}$$

Avec $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$, sont les inerties de masse définies comme suit:

$$\left(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\left(1, z, z^2, f(z), z\, f(z), \left[f(z)\right]^2\right) dz \tag{IV.17}$$

En utilisant la même procédure que celle décrite par Alibeigloo et al. [17], l'énergie cinétique de la masse du patch distribuée et située sur la surface supérieure (*z=h/2*) de la plaque est définie après avoir examiné le champ de déplacement de l'équation (IV.1) comme suit :

$$\boldsymbol{T_M} = \int_{A_M} \gamma_M \left[\left(\dot{u}_0 + \frac{h}{2}\dot{w}_{b,x} + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\right)\dot{w}_{s,x}\right)^2 + \left(\dot{v}_0 + \frac{h}{2}\dot{w}_{b,y} + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\right)\dot{w}_{s,y}\right)^2 + \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s\right)^2\right] dxdy \tag{IV.18}$$

Où A_M et γ_M sont la surface et la masse du patch distribuée par unité de surface, respectivement.

IV.2.7. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée

L'équation du mouvement de la plaque en vibration libre peut être obtenue du principe d'Hamilton, lequel est une généralisation à partir du principe des déplacements dans la dynamique des corps déformables. L'équation différentielle d'équilibre du mouvement est obtenue en utilisant le principe d'Hamilton comme suit :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{dt} = \delta\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{T}-\boldsymbol{V})\boldsymbol{dt} = 0 \tag{IV.19}$$

Où δ est l'opérateur variationnel, $\boldsymbol{L}$ est la fonction de Lagrange de la plaque, t_1 et t_2 sont les bornes particulières du temps. $\boldsymbol{T}$ est l'énergie cinétique, $\boldsymbol{V}$ est l'énergie potentielle.

On peut vérifier que la première variation du Lagrangien, $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{V}$ (c'est-à-dire, le principe d'Hamilton) conduit à l'équation de mouvement. Dans ce cas $\boldsymbol{V}$ désigne l'énergie potentielle totale (c'est-à-dire, la somme de l'énergie de déformation et l'énergie due aux charges appliquées) de la plaque. Depuis, l'intérêt principal ici est pour l'analyse de la vibration libre, l'énergie potentielle due aux charges appliquées est nulle [95]. Deux types de plaques stratifiées différentes sont considérés, à plis croisés $[0/90]_n$, et à plis équilibré [θ/-θ]. Pour le premier type à plis croisés, les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée (SS-1) [94] peuvent être exprimées comme:

$$\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{w_b},\ \boldsymbol{w}_s,\ \frac{\partial \boldsymbol{w_b}}{\partial \boldsymbol{x}},\ \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial \boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{N}_y,\ \boldsymbol{M}_y^b,\ \boldsymbol{M}_y^s \quad \text{Sont égaux à zéro à } (y=0,\ b) \tag{IV.20.a}$$

$$\boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{w_b},\ \boldsymbol{w}_s,\ \frac{\partial \boldsymbol{w_b}}{\partial \boldsymbol{y}},\ \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial \boldsymbol{y}},\ \boldsymbol{N}_x,\ \boldsymbol{M}_x^b,\ \boldsymbol{M}_x^s \quad \text{Sont égaux à zéro à } (x=0,\ a) \tag{IV.20.b}$$

Pour résoudre ce problème du comportement vibratoire de la flexion des plaques en matériaux composites stratifiés, on emploie les solutions de Navier qui sont développées sous la forme d'une double série trigonométrique de Fourrier et qui satisfaisant les conditions aux limites de l'équation (IV.20) par les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}\cos(\lambda\, x)\sin(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \\ V_{mn}\sin(\lambda\, x)\cos(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \\ W_{bmn}\sin(\lambda\, x)\sin(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \\ W_{smn}\sin(\lambda\, x)\sin(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{IV.21}$$

U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée avec (*m*, *n*) le mode propre et les constantes $\lambda = m\pi / a,\ \mu = n\pi / b$.

Et pour le cas d'un stratifié à plis équilibré, les conditions aux limites reliées aux déplacements pour un bord simplement appuyé (SS-2) [94] sont:

$$v_0,\ w_b,\ w_s,\ \frac{\partial w_b}{\partial x},\ \frac{\partial w_s}{\partial x},\ N_{xy},\ M_y^b,\ M_y^s \quad \text{Sont égaux à zéro à } (y=0,\ b) \tag{IV.22.a}$$

$$u_0,\ w_b,\ w_s,\ \frac{\partial w_b}{\partial y},\ \frac{\partial w_s}{\partial y},\ N_{xy},\ M_x^b,\ M_x^s \quad \text{Sont égaux à zéro à } (x=0,\ a) \tag{IV.22.b}$$

Les conditions aux limites de l'équation (IV.22) sont satisfaites par les formes suivantes:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}\sin(\lambda\, x)\cos(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \\ V_{mn}\cos(\lambda\, x)\sin(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \\ W_{bmn}\sin(\lambda\, x)\sin(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \\ W_{smn}\sin(\lambda\, x)\sin(\mu\, y)\, e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{IV.23}$$

Après la substitution de déplacements dans la première variante du lagrangien, cela nous conduit à un problème aux valeurs propres dont les solutions peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left([K] - \omega^2 [\overline{M}]\right)\{\Delta\} = \{0\}, \tag{IV.24}$$

Où $[K]$, $[\overline{M}]$, ω et $\{\Delta\}$ sont la matrice de rigidité globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires, la matrice masse, la fréquence propre de vibration et le vecteur global des déplacements inconnus, respectivement.

IV.3. Conclusion

Le développement des matériaux composites dans les domaines où ils sont soumis à des vibrations permanentes nous a conduits à mettre en place une étude sur le comportement dynamique de ces matériaux. C'est dans ce contexte que nous avons développé une solution analytique de la vibration libre des plaques rectangulaires en matériaux composites stratifiés antisymétriques renforcées par une série de patch en utilisant la théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables trigonométriques dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires et pour mieux expliquer les effets de déformation de cisaillement sans nécessiter d'un facteur de correction de cisaillement.

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale pour résoudre le comportement de vibration libre des plaques en matériaux composites stratifiés en utilisant une simple théorie dite parfois à deux variables. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie proposée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description trigonométrique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre V

Résultats et discussions

Chapitre V Résultats et discussions

V.1. Introduction

Les plaques stratifiées sont des structures largement utilisées dans la technologie de l'espace, navale, aéronautique ainsi dans divers domaines civil et industriel. Leur première mission est de résister à l'environnement. Si l'environnement dépend du temps, c'est le comportement dynamique. Une plaque est soumise à un environnement dynamique constitué de forces de diverses natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) s'appliquant sur elle et provoquant un mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations en tous ses points. Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction opposées à z, ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par *w*. Les théories des plaques dépendent énormément de l'élancement : les plaques minces (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée et les plaques modérées (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée. Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendent des rigidités du matériau constitutif. Toutefois, la recherche systématique des modes n'est pas aisée, car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différentes modes. Bien que les travaux sur l'analyse vibratoire en flexion des plaques orthotropes ont été étudiés, seulement des solutions approximatives sont disponibles à l'exception des plaques simplement appuyées [96].

Dans le paragraphe précédent, nous avons obtenus des solutions exactes du comportement vibratoire dans le cas d'une plaque composite stratifié rectangulaire en appuis simples sur ses quatre cotés. Dans le cas où d'autres conditions d'appuis seraient proposées, il est possible de résoudre le problème en utilisant d'autres formes de solutions pour déterminer les fréquences propres. Ce chapitre propose quelques simulations numériques des vibrations libres des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés et équilibrés en absence et en présence de la masse du patch à la fois, afin d'étudier l'influence de ce dernier sur les fréquences propres à l'aide de l'application de la présente nouvelle théorie d'ordre élevé à quatre variables. Durant cette étude, on discute l'effet du degré d'orthotropie (qui est défini par le rapport des modules d'Young de deux directions différentes E1/E2), de la séquence d'empilement, de l'épaisseur des plaques, du nombre et de l'angle d'orientation des couches constitutives qui contribuent à l'amélioration de la résistance et de la rigidité de la plaque stratifiée. En général, on a essayé de varier différents facteurs et observer l'influence de ces derniers sur le comportement vibratoire de la plaque stratifiée, d'où on va voir les résultats obtenus dans ce qui suit.

V.2. Choix des matériaux composites

Le choix des matériaux est une étape importante, qui doit être soigneusement argumentée sur le plan technique et économique. Les matériaux composites structurels sont réalisés à partir d'empilement de plis constitués de fibres unidirectionnelles continues, qui apportent les caractéristiques mécaniques, enrobées dans une matrice de résine, qui assure la cohésion et la protection de l'ensemble. Sauf le cas très particulier, les fibres sont associées à une matrice afin de former le matériau composite, la proportion de fibres variant de 40 à 70 % suivant les méthodes de fabrication ou les applications. Dans les applications courantes, ces matrices sont organiques, généralement thermodurcissables et parfois thermoplastiques. Les plus utilisées dans les composites structuraux sont les résines époxydes.

A travers cette étude, trois types de matériaux ont été utilisés dont les différentes propriétés matérielles sans dimension sont rapportées au tableau V.1 suivant:

Propriétés adimensionnelles	E_1/E_2	G_{23}/E_2	G_{13}/E_2	G_{12}/E_2	ν_{12}
Matériau 1	25	0.2	0.5	0.5	0.5
Matériau 2	40	0.5	0.6	0.6	0.5
Matériau 3	40	0.6	0.5	0.5	0.5

Tableau V.1 : *propriétés matérielles sans dimension des matériaux utilisés.*

Pour plus de commodité, La fréquence naturelle fondamentale est représentée en tant que terme adimensionnel (Ω) pour décrire les résultats numériques obtenus sous formes graphiques et tabulaires. Cette fréquence est définie comme :

$$\Omega = \omega \frac{a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \tag{V.1}$$

V.3. Effet du rapport d'orthotropie E1/E2 (cas d'un stratifié croisé)

En définissant la masse du patch distribuée par unité de surface $\gamma_M = 0$ dans l'équation (IV.24) le problème se réduit à une vibration libre d'une plaque composite stratifiée à fibres unidirectionnelles, orthotrope et sous chargement nul. Il consiste à examiner le comportement vibratoire des plaques stratifiées, constituées de plusieurs couches à empilements croisés, à travers l'épaisseur. Notre objectif est de vérifier l'exactitude et la bonne convergence du présent travail grâce aux résultats numériques obtenus**.** Le tableau V.2 montre la fréquence naturelle adimensionnelle obtenue pour le premier mode de vibration d'une plaque carrée antisymétrique d'empilement croisé avec un nombre différent de couches d'épaisseurs égales, les résultats sont ensuite comparés avec ceux effectués par d'autres chercheurs ; Noor [97], Kant et Swaminathan [98] et par Reddy [94]. On voit que les résultats obtenus par la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) [94] sont presque identiques et donnent une excellente concordance à la présente théorie.

Nombre des couches	**Source**	***E_1/E_2***				
		3	**10**	**20**	**30**	**40**
$[0/90]_1$	Noor [97]	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	Kant Model-1 [98]	6.2336	6.9741	7.7140	8.2775	8.7272
	Kant Model-2 [98]	6.1566	6.9363	7.6883	8.2570	8.7097
	Reddy [94]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	Présente	6.2188	6.9964	7.8379	8.5316	9.1236
$[0/90]_2$	Noor [97]	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6798
	Kant Model-1 [98]	6.5146	8.1482	9.4675	10.2733	10.8221
	Kant Model-2 [98]	6.4319	8.1010	9.4338	10.2463	10.7993
	Reddy [94]	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	Présente	6.5012	8.1929	9.6205	10.5268	11.1628
$[0/90]_3$	Noor [97]	6.6100	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728
	Kant Model-1 [98]	6.5711	8.3852	9.8346	10.7113	11.3051
	Kant Model-2 [98]	6.4873	8.3372	9.8012	10.6853	11.2838
	Reddy [94]	6.5552	8.4041	9.9175	10.8542	11.5007
	Présente	6.5567	8.4065	9.9210	10.8603	11.5102
$[0/90]_5$	Noor [97]	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	Kant Model-1 [98]	6.6458	8.5163	10.0438	10.9699	11.5993
	Kant Model-2 [98]	6.5177	8.4680	10.0107	10.9445	11.5789
	Reddy [94]	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	Présente	6.5854	8.5156	10.0740	11.0309	11.6893

Tableau V.2: *Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée antisymétrique (Matériau 2) pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie avec* $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h} = 5$.

Ce tableau montre l'influence du degré de l'orthotropie sur les fréquences naturelles, ce dernier est considéré variable en fonction du rapport des modules d'Young suivant les deux directions différentes du matériau E1/E2 et comme prévu, il a indiqué très clairement qu'avec l'augmentation du nombre de couches, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent augmentent les fréquences propres.

V.4. Effet de la géométrie de la plaque (cas d'un stratifié équilibré)

Afin de mieux interpréter l'effet de la géométrie de la plaque composite et de l'orientation des fibres, on a pris en considération le cas d'une plaque stratifiée antisymétrique à séquence d'empilement équilibré, à quatre couches $[45/-45]_2$. On analyse alors les effets des rapports longueur/épaisseur (a/h), longueur/largeur (a/b) et l'orientation des fibres des couches composantes sur le comportement vibratoire libre des plaques composites rectangulaires (tableau V.3). Les fréquences propres fondamentales adimensionnelles obtenues par la présente théorie sont comparées à ceux qui sont estimées à l'aide de divers modèles existant dans la littérature comme Bert et Chen [99] ainsi que Shankara [100].

a/h	Source	a/b						
		0.2	**0.6**	**0.8**	**1**	**1.2**	**1.6**	**2**
10	Reddy [94]	8.7240	12.9650	15.7120	18.6090	21.5670	27.7360	34.2470
	Bert et Chen [99]	8.6640	12.8200	15.5400	18.4600	21.5100	27.9500	34.8700
	Shankara [100]	8.5557	12.5588	15.1802	17.9735	20.8797	26.9916	33.5534
	Présente	8.6036	12.6364	15.2016	17.9670	20.9070	27.2616	34.1652
20	Reddy [94]	9.4750	14.8960	18.5570	22.5840	26.8570	36.2490	46.7890
	Bert et Chen [99]	9.3000	14.4500	17.9700	21.8700	26.1200	35.5600	46.2600
	Shankara [100]	9.3011	14.3856	17.8458	21.6808	25.8363	35.0421	45.4096
	Présente	9.2817	14.3865	17.8267	21.6501	25.8207	35.1650	45.7985
30	Reddy [94]	9.6670	15.3850	19.3040	23.6760	28.3810	38.9400	51.1320
	Bert et Chen [99]	9.4360	14.8400	18.5600	22.7400	27.3500	37.8200	49.9800
	Shankara [100]	9.4880	14.8427	18.5390	22.6911	27.2555	37.5907	49.5474
	Présente	9.4270	14.8027	18.4890	22.6326	27.2010	37.6046	49.7155
40	Reddy [94]	9.7590	15.8530	19.6040	24.1180	29.0030	40.0710	53.0120
	Bert et Chen [99]	9.4850	14.9800	18.7800	23.0800	27.8300	38.7200	51.5200
	Shankara [100]	9.5724	15.0248	18.8134	23.0940	27.8286	38.6523	51.3324
	Présente	9.4796	14.9576	18.7398	23.0110	27.7417	38.5929	51.3575
50	Reddy [94]	9.8160	15.6890	19.7590	24.3430	29.3210	40.6530	53.9890
	Bert et Chen [99]	9.5070	15.0400	18.8900	23.2400	28.0600	39.1700	52.2900
	Shankara [100]	9.6216	15.1177	18.9510	23.2956	28.1168	39.1932	52.2539
	Présente	9.5043	15.0311	18.8595	23.1930	28.0036	39.0788	52.1777

Tableau V.3: *Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque rectangulaire* *$[45/-45]_2$, (Matériau 3) avec différents rapports a/b et a/h.*

D'après les résultats reportés dans le tableau V.3, on peut observer que l'augmentation du rapport longueur sur largueur peut provoquer la diminution de la rigidité de la plaque et par conséquent, augmente les fréquences naturelles adimensionnelles, ainsi que la diminution du rapport longueur sur épaisseur peut diminuer les fréquences. De plus on peut ajouter sur la base des études antérieures enregistrées au profit de la théorie CLPT, que les résultats de calculs des fréquences de vibration obtenus par la théorie classique des plaques stratifiées CLPT sont très supérieures par rapport à ceux qui sont calculés à partir des théories de déformation de cisaillement, cela implique que le cisaillement transversal a pour effet d'assouplir la structure et par conséquent, de baisser les fréquences propres.

Dans le tableau V.4 deux types de matériaux différents ont été étudiés avec une plaque carrée en fonction du rapport géométrique $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$, afin d'obtenir les cinq premiers paramètres de fréquence naturelle adimensionnelle selon le mode de vibration utilisé à l'aide de la présente théorie d'ordre élevé basée sur un champ de déplacement transverse et en gardant les mêmes conditions aux limites imposés aux bords de la plaque. D'après Les résultats obtenus on observe un très bon accord avec les solutions analytiques présentées par Singh et al. [101]. En effet, les propriétés mécaniques du matériau ont un effet significatif sur les fréquences propres de vibration des plaques stratifiées.

Mode	**Source**	**Matériau 1**	**Matériau 2**
1	Singh et al. [101] Présente	8.98083 8.98691	10.56565 10.58110
2	Singh et al. [101] Présente	21.93360 22.16046	26.30276 26.59112
3	Singh et al. [101] Présente	30.34590 30.46608	36.34791 36.49444
4	Singh et al. [101] Présente	39.98180 40.59950	48.70060 49.51371
5	Singh et al. [101] Présente	45.59216 46.07020	55.14367 55.88987

Tableau V.4: *Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée [0/90] avec le rapport* $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$.

V.5. Effet de la présence de la masse du patch

Un modèle a été développé pour servir de base à l'identification des vibrations libres des plaques composites stratifiées renforcées par une série de patch. Dans cette étude l'influence des rapports géométriques, longueur/épaisseur et longueur/largeur sur les fréquences fondamentales adimensionnelles pour deux plaques composites à séquence d'empilement équilibré de type $[45/\text{-}45]_2$ et $[30/\text{-}30]_2$ en présence d'une masse de patch est présentée dans les tableaux V.5 et V.6. La masse du patch est située sur le centre d'une plaque carrée avec des rapports sans dimension ont été considérés dans cette étude, comme ($c/a=d/b=0.4$) avec un rapport de masse $M/M_P=0.5$ (M_P est la masse de la plaque).

a/b	$[45/\text{-}45]_2$				
	a/h				
	10	**20**	**30**	**40**	**50**
0.2	5.2041	5.7389	5.8607	5.9055	5.9267
0.4	6.2602	7.0677	7.2607	7.3327	7.3668
0.6	7.6323	8.8758	9.1911	9.3109	9.3682
0.8	9.1617	10.9777	11.4675	11.6574	11.7490
1	10.7946	13.3009	14.0183	14.3022	14.4404
1.2	12.5130	15.8199	16.8205	17.2248	17.4235
1.4	14.3075	18.5244	19.8688	20.4235	20.6988
1.6	16.1699	21.4077	23.1624	23.9017	24.2724
1.8	18.0925	24.4627	26.7000	27.6629	28.1506
2	20.0671	27.6813	30.4787	31.7088	32.3385

Tableau V.5: *Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré* $[45/\text{-}45]_2$ *(Matériau 3).*

a/b	$[30/\text{-}30]_2$				
	a/h				
	10	**20**	**30**	**40**	**50**
0.2	6.6404	7.6532	7.9043	7.9990	8.0442
0.4	7.2302	8.4201	8.7217	8.8362	8.8910
0.6	8.1068	9.5726	9.9554	10.1022	10.1727
0.8	9.1830	11.0065	11.4988	11.6896	11.7817
1	10.3965	12.6481	13.2767	13.5233	13.6429
1.2	11.7067	14.4511	15.2433	15.5579	15.7114
1.4	13.0887	16.3899	17.3748	17.7710	17.9653
1.6	14.5286	18.4531	19.6629	20.1560	20.3994
1.8	16.0167	20.6341	22.1047	22.7123	23.0141
2	17.5437	22.9247	24.6950	25.4369	25.8078

Tableau V.6: *Fréquence fondamentale adimensionnelle pour un stratifié équilibré* $[30/\text{-}30]_2$ *(Matériau 3).*

D'après les résultats obtenus, on peut remarquer que la présence de la masse du patch à un effet bénéfique pour diminuer les fréquences fondamentales adimensionnelles par contre l'absence de cette masse peut augmenter les fréquences de vibration des plaques composites. D'autre part, nous avons constaté dans notre cas que l'accroissement des rapports longueur/largeur et longueur/épaisseur pour les deux types de stratification peut augmenter la fréquence fondamentale adimensionnelle d'une manière considérable.

La variation de la fréquence propre en fonction de différentes valeurs du rapport d'orthotropie (*E1/E2*) des plaques stratifiées antisymétriques $[0/90]_2$, $[45/-45]_2$ et $[30/-30]_2$ en présence de la masse du patch est indiquée sur la figure V.1. On peut observer clairement que l'augmentation du rapport d'orthotropie du matériau étudié conduit à une augmentation des fréquences fondamentales adimensionnelles et cela est dû à l'augmentation de la rigidité de la plaque carrée travaillée dans les conditions d'appui simple. Deux autres aspects peuvent être ajoutés au profit de la figure V.1, le premier exprime que les résultats obtenus permettent de visualiser l'importance de séquence d'empilement des couches (croisé ou équilibré) sur la variation de la fréquence adimensionnelle et le deuxième confirme que le renforcement par collage des patchs externes a tout simplement pour effet d'améliorer les fréquences propres de vibration des plaques (le patch collé a pour effet de soulager la zone de vibration sur les plaques composites).

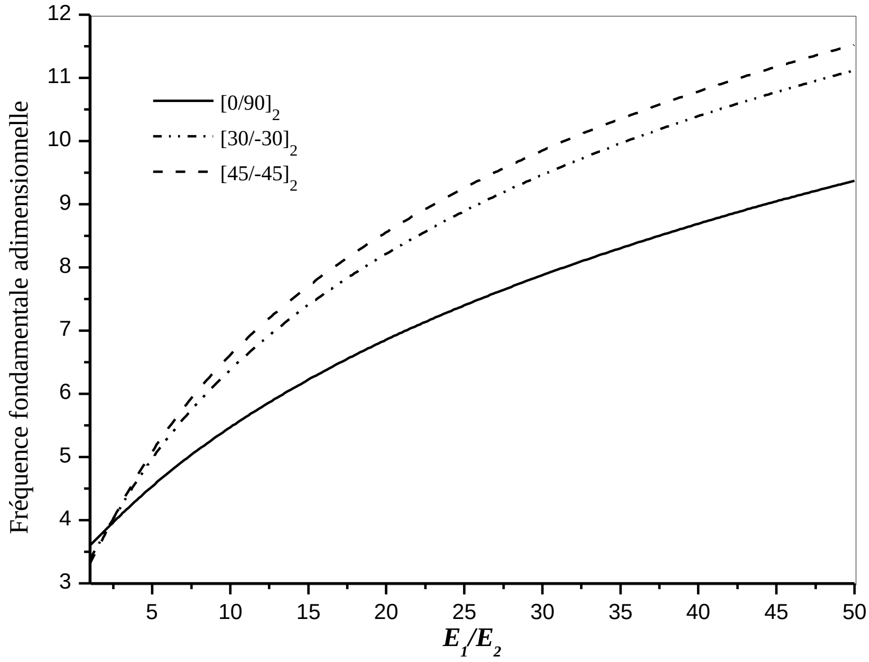


Figure V.1: *Influence d'orthotropie sur la fréquence fondamentale adimensionnelle* (Ω) *pour une plaque carrée avec* $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$, $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{p}}=0.5$, $\boldsymbol{c}/\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d}/\boldsymbol{b}=0.4$, *Matériau 3*

D'autres travaux ont été menés sur l'optimisation de la forme du patch ainsi que sur le transfert d'effort entre le substrat et le patch. Ces travaux ont montré que les patchs en forme d'étoile ont pour conséquence de rigidifier les structures composites et de retarder au mieux la propagation des fissures dans les cas des problèmes d'endommagements, afin de prolonger la durée de vie de plusieurs types de structures aéronautiques [102].

La figure V.2 présente trois allures différentes selon l'angle d'orientation des fibres, de plus elle montre l'effet du rapport longueur sur épaisseur sur les paramètres de la fréquence fondamentale adimensionnelle et il peut être observé que la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport longueur sur épaisseur ($\boldsymbol{a/h}$). Cependant, à partir de $\boldsymbol{a/h} \geq 20$, la fréquence fondamentale adimensionnelle atteint une valeur constante c'est-à-dire indépendante du rapport ($\boldsymbol{a/h}$) et on peut dire tout simplement que la plaque se comporte comme une plaque mince.

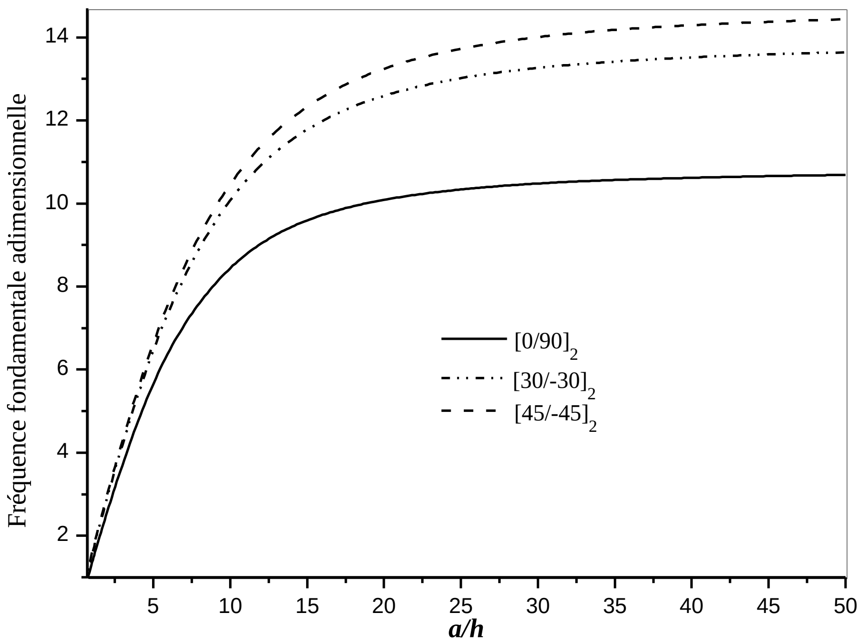


***Figure V.2:** Influence du rapport longueur/ épaisseur sur la fréquence fondamentale adimensionnelle (Ω) pour une plaque carrée avec $\boldsymbol{M/M_p} = 0.5$, $\boldsymbol{c/a} = \boldsymbol{d/b} = 0.4$, Matériau 3*

La figure V.3 ci-dessous montre l'influence de la variation du rapport de la masse du patch sur la masse de la plaque $(\boldsymbol{M/M_p})$ avec $(\boldsymbol{c/a} = \boldsymbol{d/b} = 0.4)$ sur les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques composites de forme géométriques carrées et composées de différentes séquences d'empilement avec les mêmes conditions aux limites présentées au chapitre précédent. Cet effet est particulièrement important compte tenu du rapport de la largeur sur l'épaisseur $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$. Selon cette figure, on peut constater que l'augmentation de la quantité de masse locale entraîne la diminution de la rigidité de la plaque et au fur et à mesure peut provoquer la diminution des fréquences propres adimensionnelles.

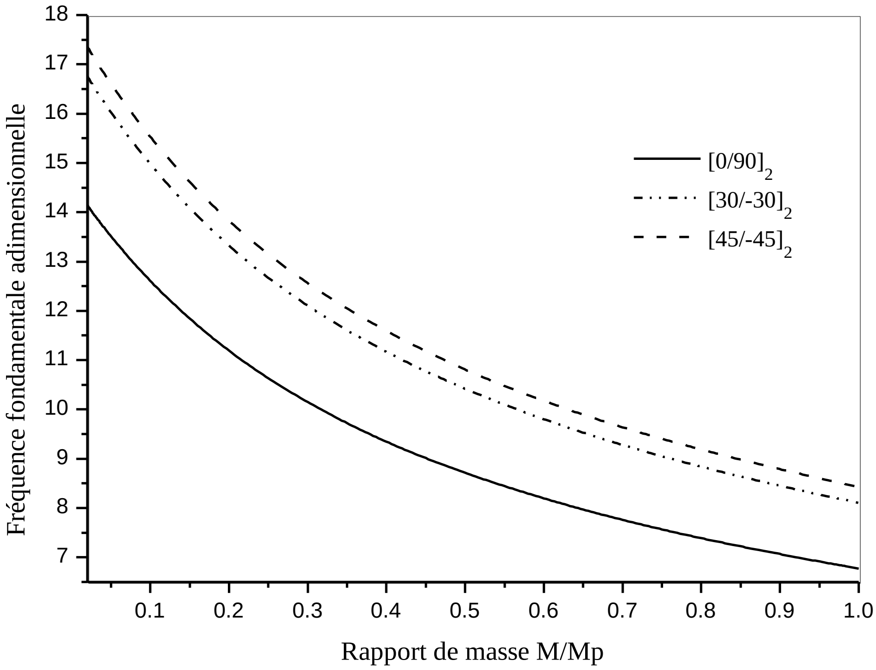


Figure V.3: *Effet du rapport de masse sur la fréquence fondamentale adimensionnelle* (Ω) *pour une plaque carrée,* $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{h}=10$, *Matériau 3.*

V.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats obtenus par le calcul analytique développé sur la base de la théorie des plaques à quatre variables trigonométriques pour analyser le comportement de la vibration libre des plaques stratifiées rectangulaires. Le nombre de variables dans cette théorie est seulement quatre ce qui permet de réduit les équations de mouvements et simplifier le problème étudié. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque tout en remplissant les conditions de nullité des contraintes sur les bords libres, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Les résultats obtenus sont ainsi commentés avec la théorie tridimensionnelle d'élasticité linéaire et d'autres modèles d'ordre élevé de la littérature.

La précision et l'efficacité de la présente théorie nous permettent d'analyser aussi la vibration libre des plaques stratifiées rectangulaires renforcées par une masse de patch localisée. Nous avons effectué plusieurs applications numériques ayant pour but de déterminer les différents paramètres pouvant influencés sur la fréquence naturelle adimensionnelle pour la vibration libre des plaques rectangulaires en matériaux composites stratifiés à plis croisés et équilibrés.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'utilisation des plaques stratifiées comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure: mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse dynamique et du comportement vibratoire des plaques.

Nous avons, dans le cadre de ce travail, développé une méthode analytique qui utilise les champs de déplacement et de déformation des plaques en matériaux composites stratifiés, prenant en compte les effets de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Ils sont pour la plupart basés sur des théories d'ordre élevés qui permettent en effet de modéliser des structures composites stratifiées ou sandwichs sans recourir aux facteurs de correction de cisaillement. Il est bien connu que les théories classiques des plaques stratifiées basées sur les hypothèses de Kirchhoff, négligeant les cisaillements transverses ne sont adéquates que pour l'analyse des plaques composite minces. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevé ; par contre la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à Reissner-Mindlin pour le cas des plaques épaisses, mène à une déformation de cisaillement transversale constante dans la direction de l'épaisseur et nécessite de ce fait l'utilisation de ces facteurs correctifs de cisaillement.

L'objectif assigné à cette recherche est l'étude du comportement vibratoire, Analytique et numérique des plaques composites stratifiées antisymétriques, simplement appuyées sous l'effet d'un cisaillement transverse, dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires. Pour atteindre cet objectif, nous avons développé une théorie raffinée des plaques de quatre variables trigonométriques pour étudier la vibration libre des plaques composites stratifiés isotropes et anisotropes avec la présence d'une masse de patch parfaitement collée pour assurer le renforcement de l'ensemble. La théorie explique les effets de déformation de cisaillement sans nécessiter d'un facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en deux composantes, la première est celle de la flexion et la deuxième est de cisaillement, le nombre des inconnues et des équations de mouvements régissant de la présente théorie est réduit à quatre contre cinq dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur proposées dans la littérature. Le principe d'Hamilton, en utilisant la présente théorie à quatre variables trigonométriques a été appliqué à des plaques rectangulaires portant une masse de patch distribuée, pour déterminer l'effet de la masse de patch distribuée sur les fréquences fondamentales des plaques. Pour plus de clarté, nous avons effectué plusieurs applications numériques ayant pour but de déterminer les différents paramètres pouvant influencés sur le comportement de la plaque, à savoir l'effet du degré d'orthotropie, de la séquence d'empilement, du rapport de masse et de l'emplacement de la masse du patch distribuée. Nous notons que la présente approche peut être étendue pour étudier la déformation thermique des plaques stratifiées orthotropes [103], les vibrations non linéaires de plaques rectangulaires [104] ou des plaques fabriquées par des matériaux à gradient de propriétés [105].

En conclusion, on peut dire que la théorie des plaques raffinées (RPT) à quatre variables proposée est exacte, simple et même efficace pour la résolution du comportement vibratoire des plaques en matériaux composites stratifiés, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une description trigonométrique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Cette théorie est donc très utile pour la conception de patchs destinés à la réparation et le renforcement des structures composites en répondant à des préoccupation industrielles liées aux domaines de maintenance et d'entretien.

Nous présentons ici, un certain nombre de pistes de recherches qui peuvent être envisagées pour poursuivre la démarche de validation de nouvelles réparations composites par des patchs.

- Au profit de la réparation par une série de patch, il existe plusieurs paramètres à considérer ou sélectionner : forme des patchs, épaisseur des patchs, propriété de la colle, épaisseur du joint collé et même la séquence d'empilement des patchs (dans le cas où ils sont constitués par un matériau composite) ;

- L’influence des assemblages collés patch/plaque qui sont liées à des concentrations de contraintes dans la colle dues à l’existence d’une zone de transfert progressif d’effort de la plaque vers le patch ;
- Il serait intéressant de regarder l’influence de l’environnement ou encore du vieillissement sur le comportement d’une structure renforcée par un patch. En effet, en situation réelle, les structures aéronautiques sont soumises à des conditions d’utilisation sévères, et l’influence de ces conditions sur le comportement global peut être importante (sensibilité à l’humidité et à la température. Durabilité limitée du joint collé) ;
- Etude du comportement des dalles en béton armé renforcées par collages des patchs en matériaux composites et soumises à un chargement centré (cas de la réhabilitation), ce type de renforcement peut s’avérer bénéfique à la fois vis à vis de la flexion ;
- D’autres perspectives peuvent être envisagées, notamment autour du comportement de la colle puisque la plupart des structures comme dans les applications aéronautiques et maritimes, sont soumises a des chargements thermiques et hygroscopiques. Il serait donc nécessaire d’introduire l’influence de ces nouveaux paramètres sur la colle ;

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1] Dufort L., Etude de cisaillement transverse dans des poutres stratifiés et sandwich : Aspect théorique et expérimentaux. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal-Clermont II, 2000.

[2] Timoshenko SP., Vibration problems in engineering. Princeton: Van Nostrand, 1955.

[3] Leissa AW. Vibration of plates. NASA, SP-160, O/ce of Technology Utilization, NASA, Washington, DC, 1969.

[4] Szilard R., Theory and analysis of plates, classical and numerical method. Englewood Cli1s, NJ, USA: Prentice-Hall, 1974.

[5] Reddy JN., Theory and analysis of elastic plates. Philadelphia, USA: Taylor & Francis, 1999.

[6] Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J Appl Mech, Trans ASME, 12(2): 69–77, 1945.

[7] Mindlin RD., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J Appl Mech, Trans ASME, 18(1): 31–38, 1951.

[8] Ambartsumian SA., On the theory of bending plates. Izv Otd Tech Nauk AN SSSR, 5: 69–77, 1958.

[9] Soldatos KP, Timarci T., A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. Compos Struct, 25: 165–71, 1993.

[10] Reddy JN., A simple higher-order theory for laminated composite plates. J Appl Mech, 51: 745–752, 1984.

[11] Touratier M., An efficient standard plate theory. Int J Eng Sci, 29(8): 901–16, 1991.

[12] Karama M, Afaq KS, Mistou S., Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. Int J Solids Structures, 40(6): 1525–1546, 2003.

[13] Soldatos KP., A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. Acta Mech; 94: 195–200, 1992.

[14] Shimpi RP., Refined plate theory and its variants. AIAA J; 40(1): 137–46, 2002.

[15] Shimpi RP, Patel HG., A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. Int J Solids Structures, 43(22): 6783–99, 2006.

[16] Shimpi RP, Patel HG., Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. J Sound Vib, 296(4–5): 979–99, 2006.

[17] Alibeigloo A., Shakeri M., Kari MR., Free vibration of anti-symmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third-order shear deformation theory. Journal of Ocean Engineering, 35: 183 – 190, 2008.

[18] Alibeigloo A., Kari MR., Forced vibration analysis of anti-symmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third order shear deformation theory. Thin-Walled Structures, 47: 653 – 660, 2009.

[19] Seung-Eock K., Huu-Tai T., Lee J., A two variable refined plate theory for laminated composite plates. Composite Structures, 89: 197 – 205, 2009.

[20] Alibakhshi R., The effect of anisotropy on free vibration of rectangular composite plates with patch mass. International Journal of Engineering TRANSACTIONS B: Applications, 25(3): 223 – 232, 2012.

[21] Tounsi A., Houari M.S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A., A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. Aerospace Science and Technology, 24: 209 – 220, 2013.

[22] Bouderba B., Houari M.S.A., Tounsi A., Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. Steel and Composite Structures, 14: 85–104, 2013.

[23] Nedri K., El Meiche N., Tounsi A., Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory. Mechanics of Composite Materials, 49(6): 629 – 640, 2014.

[24] Berbain F., Chevalier A., Choudin C., Mise en œuvre des composites - Méthodes et matériels. Techniques de l'ingénieur. Plastiques et Composites, no. A 3720, 1997.

[25] Reinhart T.J., Clements L.L., Introduction to composites. Engineered materials handbook: Composites. Ohio, USA : ASM International, vol.1: 27–34, 1993.

[26] Gurdal Z., Haftka R.T., Hajela P., Design and optimization of laminated composite materials. Canada: Wiley-Interscience Publication, 352 p. ISBN 047125276X., 1999.

[27] Beeby A.W., The prediction of crack widths in hardened concrete. The structural Engineer, vol. 57A(1): 9–17, 1979.

[28] Powers T.C., Brownyard T.L., Studies of the physical properties of hardened cement paste. Bulletin 23, Research laboratories of the Portland cement association, Chicago, 1948.

[29] Pierre, P., Etude du comportement mécanique des composites cimentaires armés de microfibres d'acier. Thèse de doctorat de l'Université Laval, Québec, Canada, 1998.

[30] Chan, Y.W., LI, V.C., Effects of transition zone densification on fiber/cement paste bond strength improvement. Advanced cement based materials, vol. 5: 8–17, 1997.

[31] Beaudoin J.J., Handbook of fiber-reinforced concrete-principles, properties developments and applications. Noyes publication, U.S .A, 332 p, 1990.

[32] Naaman A. E., Homriche J. R., Tensile stress-strain properties of SIFCON. AC1 Materials journal, vol. 86(3): 244–251, 1989.

[33] Berthelot, J. M., Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures. Paris, Masson, 615 p, 1992.

[34] Bahlouli N., Cours Composites sur le site Internet " http://www-ipst.u strasbg.fr/cours/matériaux-composites ".

[35] «Glossaire des matériaux composites» - carma –Actualisation, octobre 2006.

[36] Vacher S., Capteurs à fibres optiques pour le contrôle de l'élaboration et la caractérisation mécanique des matériaux composites. PhD thesis. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2004.

[37] Yves P., influence des propriétés de la matrice sur le comportement mécanique de matériaux composites verre/polyester utilisés en construction navale de plaisance – cas des résines polyester limitant les émissions de styrène. Thèse de doctorat. Université de Bretagne Sud, 2006.

[38] Remond Y., Lamon J., Matériaux composites, Elaboration -conception -Structure – Comportement mécanique. Strasbourg, vol.1 : 12–14, 2003.

[39] Parneix P., Liu J., Lucas D., Les matériaux composites en construction navale militaire. Communication présentée lors de la réunion des spécialistes RTO AVT sur «Les structures composites à bas coût» ; Norvège, 2001.

[40] Parneix P., Lucas D., Les matériaux composites en construction navale militaire. Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, Réf. AM 5660, 2000.

[41] Thionnet A., Renard J., A theoretical and experimental study to point out the notion of loading mode in damage mechanics: Application to the identification and validation of the fatigue damage modelling for laminates composites. International journal of fatigue, vol. 24 : 147–154, 2002.

[42] Aussedat-Yahia E., Comportement et endommagements du composite tissé carbone/ PMR15 soumis à des chargements mécaniques et thermiques. Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.

[43] Gamstedt EK., Sjögren BA., Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies. Composite Science and Technology, 59: 167–78, 1999.

[44] Berthelot J.M., Composite Materials: Mechanical Behaviour and Structural Analysis. Livre, 1998.

[45] Desrumaux F., Meraghni F., Benzeggagh M.L., Micromechanical modeling coupled to a reliability approach for damage evolution prediction in composite materials. Appl. Comp. Mater., 7: 231–250, 2000.

[46] Allix O., Levêque D., Perret L., Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. Comp. Sci. Tech., 58: 671–678, 1998.

[47] Duplessis-Kergomard Y., Etude expérimentale et numérique de la fissuration intralaminaire et de l'initiation du délaminage de bord libre dans les structures stratifiées pseudo-tissées. Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2007.

[48] Hautier M., Analyse des réparations des matériaux composites : mise en œuvre d'un procédé par infiltration et étude du comportement mécanique. Thèse de doctorat en Génie mécanique, l'Université de Toulouse, 2010.

[49] Torres M., Plissonneau B., Repair of Helicopter composite structure: Techniques and Substantiations, Advisory group for aerospace research & development (AGARD) CP402. Teh Repair of Aircraft Structures Involving Composite Materials, p.6-1-6 – 21, 1986.

[50] Jones R., Callinan R. J., A design study in crack patching. Fibre Science and Technology, vol.14: 99–111, 1979.

[51] Baker A. A., Rose L. R. F., Jones R., Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structure, 1ère ed., Netherlands, Elsevier Science, ISBN: 0-08-042699-9, 2002.

[52] Baker A. A., Repair of cracked or defective metallic aircraft components with advanced fibre composites - an overview of Australian work. Composite Structures, vol. 2: 153–181, 1984.

[53] Duong C. N., Wang C. H., Composite Repair / Theory and Design, 1st ed. ed., Netherlands, Elsevier, ISBN: 978-0-0804-5146-6, 2007.

[54] Russell A. J., Bowers C. P., Repairing Delamination with Low Viscosity Epoxy Resins. AGARD (Advisory Group for Aerospace Research & Developments) CP 530, Neuilly sur Seine, p. 1–10, 1992.

[55] Pang J. W. C., Bond I. P., Bleeding composites - damage detection and self-repair using a biomimetic approach. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, vol.36: 183–188, 2005.

[56] Williams G., Trask R., Bond I., A self-healing carbon fibre reinforced polymer for aerospace applications. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, vol.38: 1525–1532, 2007.

[57] Chun H. Wang, Andrew J. Gunnion., On the design methodology of scarf to composite laminates. Composites Science and Technology, 68: 35–46, 2008.

[58] Werfelman L., The Composite Evolution; Boeing, p.17–21. 2007.

[59] Hu F.Z., Soutis C., Strength prediction of patch-repaired CFRP laminates loaded in compression. Composites Science and Technology, 60: 1103–1114, 2000.

[60] Soutis C., Hu F.Z. Design and performance of bonded patch repairs of composite structure. Proc Instn Mech Engrs, 211Part G, 1997.

[61] Liu X., Wang G., Progressive failure analysis of bonded composite repairs. Composite Structures, 81: 331–340, 2007.

[62] Campilho R., Moura M., Ramantani D., Morais J., Domingues J., Buckling strength of adhesively-bonded single and double-strap repairs on carbon-epoxy structures. Composites Science and Technology, 70: 371–379, 2010.

[63] Grabovac I., Whittaker D., Application of bonded composites in the repair of ships structures - A 15-year service experience. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 40: 1381–1398, 2009.

[64] Breitzman T., Iarve E., Cook B., Schoeppner G., Lipton R. Optimization of a composite scarf repair patch under tensile loading. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 40: 1921–1930, 2009.

[65] Ridha M., Tan V., Tay T., Traction-separation laws for progressive failure of bonded scarf repair of composite panel. Composite Structures, 93: 1239–1245, 2011.

[66] Whittingham B., Baker A.A., Harman A., Bitton D., Micrographic studies on adhesively bonded scarf repairs to thick composite aircraft structure. Composites: Part A, 2008.

[67] Mathias J.D., Balandraud X., Grédiac M., Applying a genetic algorithm to the optimization of composite patches. Computers and Structures, Vol. 84: 823–834, 2006.

[68] Mathias J.D., Balandraud X., Grédiac M., Experimental investigation of composite patches with a full-field measurement method. Composites Part A, Vol. 37:177–190, 2006.

[69] Mathias J.D., Grédiac M., Balandraud X., Optimization of composite patches to reinforce aeronautic structures. AIAA Journal, in revision, 2006.

[70] Avram, J., Fatigue response of thin stiffened aluminum cracked panels repaired with bonded composite patches. PhD thesis. Air Force Institue of Technology, 2001.

[71] Baker, A., and Jones, R. Bonded repair of aircraft structures. Martinus Nijhoff Publishers, 1988.

[72] Reissner. E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, p. 69–77, 1945.

[73] Whitney J.M., The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. J.Compos. Mater, vol. 3, p. 534–547, 1969.

[74] Reddy J. N., Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis, CRC Press, 1997.

[75]. Berthelot J.-M., Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures, Éditions TEC & DOC, 2ème édition, 1999.

[76] Whitney et al., Whitney J.M., Pagano N.J., Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 37, p. 1031–1036, 1970.

[77] Whitney J.M. et Sun C.T., A higher order theory for extensional motion of laminated composites. J. Sound and Vibration, vol. 30(1), p. 85–97, 1973.

[78] Reddy J.N., An evaluation of equivalent-single-layer and layer-wise theories of composite laminates. Composite Structures, vol. 25, p. 21–35, 1993.

[79] Ambartsumyan S.A., Theory of Anisotropic Plate. Economic Publishing Co, 1969.

[80] M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc, 29 (8): 901–916, 1991.

[81] Aydogdu M., Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. International Journal of Mechanical Sciences, 47, p. 1740–1755, 2005.

[82] Robbins DH, Reddy JN., Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, p. 655–77, 1993.

[83] Robbins DH, Reddy JN., Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. Computers & Structures, 41(2): 65–79, 1991.

[84] Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. Journal of Sound and Vibration, 30: 495–507, 1973.

[85] Barbero E, Reddy J, Teply J., An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29: 1–14, 1990.

[86] Carrera E., Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. Archives of Computational Methods in Engineering, 9: 87–140, 2002.

[87] Fredrichs K.O. Dressler R.F., A boundary layer theory for elastic plates. Comm. on Pure Applied Mathematics, vol. 14, p. 1–33, 1961.

[88] Goldenveizer A.L., Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymtotic integration of the equations of the theory of elasticity. Prik. Mat. Mech., vol. 26, no. 4, p. 668–686, 1962.

[89] Widera O.E., An asymtotic theory for the motion of elastic plates. Acta. Mech., vol. 9, p. 54–66, 1970.

[90] Ladeveze P., Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques, volume 2 of Calcul de Structures et Intelligence Artificielle. Pluralis, 1988.

[91] Allix O., Modélisation du comportement des composites stratifié : application à analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.

[92] Nguyen V. T., Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.

[93] Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. International Journal of Mechanical Sciences, 52: 626–633, 2010.

[94] Reddy J.N., Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method. Journal of Sound and Vibration, 66(4): 565–576, 1979.

[95] Meirovitch L., Fundamentals of vibrations. McGraw Hill International Edition, Sangapore, 2001.

[96] Hearmon R.FS., The frequency of flexural vibration of rectangular plates with clamped or simply supported edges. Journal of applied Mechanics, 26, 537–540, 1959.

[97] Noor AK., Free vibrations of multilayered composite plates. AIAA J, 11, 1038–1039, 1973.

[98] Kant T., Swaminathan K., Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. Composite Structures, 53, 73–85, 2001.

[99] Bert C.W., Chen T.L.C., Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates. International Journal of Solids and Structure, 14, 465–473, 1978.

[100] Shankara CA., Iyengar NG. A C° element for the free vibration analysis of laminated composite plates. Journal of Sound and Vibration, 191, 721 – 738, 1996.

[101] Singh B.N., Yadav D., Iyengar N.G.R., Natural frequencies of composite plates with random material properties using higher-order shear deformation theory, International Journal of Mechanical Sciences, 43, 2193–2214, 2001.

[102] Kumar A., Hakeem S., Optimum design of symmetric composite patch repair to centre cracked metallic sheet. Composite Structures 49, 285–292, 2000.

[103] Moradi S, Mansouri MH., Thermal buckling analysis of shear deformable laminated orthotropic plates by differential quadrature. Steel Compos Struct, 12(2), 129-147, 2012.

[104] Rashidi M.M., Shooshtari A., Anwar Beg O., Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Karman rectangular plates. Computers and Structures, 106–107, 46–55, 2012.

[105] Yaghoobi H., Yaghoobi P., Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. Meccanica, 48, 2019 – 2035, 2013.