

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS
LABORATOIRE DES MATERIAUX & HYDROLOGIE



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & matériaux**

Présentée par

KADDARI Miloud

Intitulé de la thèse

Analyse de l'effet de déformation de cisaillement transverse sur la réponse statique et dynamique des plaques non homogène

Soutenu le devant le Jury composé de :

M ^r . BOURADA Mohamed	Professeur	UDL-SBA	Président
M ^r . KACI Abdelhakim	Professeur	U. SAIDA	Directeur de thèse
M ^r . TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Co-directeur de thèse
M ^r . BENYOUCHEF Samir	Professeur	UDL-SBA	Examineur
M ^r . HOUARI Mohammed Sid Ahmed	Professeur	UDE. MASCARA	Examineur
M ^r . YOUZERA Hadj	MC A	UDE. MASCARA	Examineur

Année universitaire : 2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DEDICACES

À mon très cher père.

À ma mère,

À mes sœurs,

À mes enfants, Nizar et Islem

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université l'université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbès.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à M^r le professeur **KACI Abdelhakim** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour l'aide précieuse qu'il ma apportée tout au long de l'étude, ses conseils éclairés, pour sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragement qui m'ont beaucoup aidé à achever ce travail dans des conditions favorables.

J'exprime également toute ma reconnaissance à M^r le professeur **TOUNSI Abdelouahed** qui à apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien les difficultés.

Je suis reconnaissant envers M^r **BOURADA Mohamed**, professeur à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès pour m'avoir accueillie chaleureusement dans son laboratoire, leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et leur amical soutien.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **BENYOUCEF Samir**, **HOUARI Mohammed Sid Ahmed** et **YOUZERA Hadj** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Enfin, sur un plan plus personnel, je remercie de tout mon cœur ma famille, qui à su me donner sans cesse son soutient et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études. Merci à tous mes amis pour la motivation que leurs amitié m'apportée.

Résumé

RÉSUMÉ

Ce travail de thèse concerne l'étude d'une nouvelle théorie quasi-3D hyperbolique de déformation de cisaillement pour l'analyse de la flexion et de la vibration des plaques poreuses à gradient fonctionnel (FG) reposant sur des fondations élastiques de type Winkler/Pasternak/Kerr. Les propriétés matérielles des plaques poreuses en FG sont définies par la loi de mélange avec l'introduction d'un terme supplémentaire de porosité dans le sens de l'épaisseur. La théorie proposée présente une nouvelle cinématique qui comprend des variables intégrales indéterminées, le nombre d'inconnues impliquées dans le champ de déplacement de la présente théorie est seulement cinq, contre six ou plus dans le cas d'autres théories de cisaillement, donc il est facile à utiliser. L'approche de la présente théorie prend en compte à la fois le cisaillement transversal et les déformations normales (effet stretching) et satisfait les conditions aux limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque. La théorie élimine le besoin du facteur de correction de cisaillement. Les équations d'équilibres sont obtenues par l'application du principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour une plaque simplement appuyée. Des résultats intéressants sont déterminés et comparés aux résultats trouvés dans la littérature pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de cette théorie. Les influences du paramètre de porosité, de l'indice de loi de puissance, du rapport d'élancement et des paramètres de fondation sur la réponse statique et dynamique des plaques FG poreuses seront représentées.

Mots-clés : Flexion; Vibration; Nouvelle théorie des plaques quasi-3D; Contrainte normal; FG poreux; Fondation Kerr.

ABSTRACT

This thesis investigates a new type of quasi-3D hyperbolic shear deformation theory is proposed in this study to discuss the statics and vibration of functionally graded porous plates resting on elastic foundations. Material properties of porous FG plate are defined by rule of the mixture with an additional term of porosity in the through-thickness direction. By including indeterminate integral variables, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and therefore, it is easy to use. The present approach to plate theory takes into account both transverse shear and normal deformations and satisfies the boundary conditions of zero tensile stress on the plate surfaces. The theory eliminates need for shear correction factor. The equations of motion are derived from the Hamilton principle. Analytical solutions are obtained for a simply supported plate. Contrary to any other theory, the number of unknown functions involved in the displacement field is only five, as compared to six or more in the case of other shear and normal deformation theories. A comparison with the corresponding results is made to verify the accuracy and efficiency of the present theory. The influences of the porosity parameter, power-law index, aspect ratio, thickness ratio and the foundation parameters on bending and vibration of porous FG plate.

Keywords: static; vibration; novel Quasi-3D plate theory; normal stress; porous FG; Kerr foundation.

ملخص

في هذه الأطروحة نقترح نظرية جزيئية لتشوه القص ثلاثية الأبعاد لدراسة الانحناء والاهتزاز للصفائح المتدرجة وظيفياً ذات الملامات والمتميزة على قاعة مرنة. يتم تحدي خصائص المواد للصفائح المتدرجة وظيفياً ذات الملامات من خلال قانون الخلط مع إضافة مصطلح خاص باللامات في اتجاه سمك الصفيحة. النظرية المقترحة تقم بحل إزاحة جزيئية يتضمن مصطلحات تكامل غير محددة، يحتوي على عدد أقل من المجاهل، وبالتالي فهو سهل الحل. يأخذ نهج نظرية الصفائح في الاعتبار كل من القص العرضي والتشوهات العادية ويلبي شرط انعكاس الإجهاد على السطح العلوي والسفلي للصفيحة، وذلك بدون استعمال معامل تصحيح القص. يتم اشتقاق معادلات التوازن من خلال تطبيق مبدأ هاملتون. يتم الحصول على حلول تحليلية من أجل صفيحة معمومة بدقطة. مقارنة بالنظريات الأخرى فإن عدد المجاهل في مجال الإزاحة هو خمسة فقط، بينما في حالة النظريات الأخرى المتعلقة بالقص والتشوه العادي ستة أو أكثر. يتم تحدي النتائج المثيرة للاهتمام ومقارنتها بالنتائج الموجودة للتحقق من دقة وفعالية هذه النظرية. كما سيتم عرض تأثيرات معامل الملامات، ومؤشر قانون الطاقة، ودقبة العرض على الارتفاع، ودقبة سمك الصفيحة و أساسيات الصفائح ذات الملامات والمتميزة على قواعده مرنة من أجل دراسة الانحناء والاهتزاز.

الكلمات المفتاحية: الانحناء، الاهتزاز، نظرية جزيئية للصفائح ثلاثية الأبعاد، الإجهاد العادي، ألياف متدرجة ذات الملامات الأساسيات من نوع كار.

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
ملخص	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Liste des notations	xv
Introduction Générale	1

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX AVANCÉS FGM

I.1. Introduction.....	6
I.2. Etude bibliographique	7
I.3. Concept des matériaux à gradient de propriétés	8
I.4. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés	10
I.5. Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels	11
I.6. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	14
I .6.1. Domaine de génie civil	14
I .6.1.1. Le Béton à gradient de propriétés	16
I .6.1.2. Les joints dans la charpente métallique	17
I .6.1.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes	17
I .6.1.4. Les chaussées rigides	17
I .6.1.5. Les chaussées souples	17
I .6.1.6. Les tunnels	18
I .6.1.7. Autres matériaux à gradient de propriétés	18
I .6.2. Domaine aérospatial	19
I .6.3. Domaine de l'industrie biomédical	19
I .6.4. Domaine de l'industrie d'énergie	20
I .6.5. Domaine de l'industrie électrique / électronique	20

I.6.6. Autres industries	20
I.7. Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés (FGM)	21
I.7.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	21
I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	22
I.7.3. Compaction sèche des Poudres	23
I.7.4. Projection plasma	23
I.7.5. Frittage et Infiltration	24
I.7.6. Frittage Laser Différentiel	24
I.7.7. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)	24
I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	26
I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	27
I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	28
I.8.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	29
I.8.4. Autres propriétés matérielles des plaques FGMs	29
I.8.4.1. Le modèle de Voigt	30
I.8.4.2. Le modèle de Reuss	30
I.8.4.3. Le modèle de Tamura	30
I.8.4.4. Modèle par représentation local des éléments de volume (LRVE) ...	30
I.8.4.5. Le modèle d'homogénéisation de Mori Tanaka	30
I.9. Conclusion	32

CHAPITRE II

REVUE DES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES EN MATÉRIAUX FGM

II.1. Introduction	33
II.2. Porosité	34
II.2.1. Définition d'une porosité	34
II.2.2. Formation de porosité	36
II.2.3. Mesure de la porosité	36
II.2.4. Différentes lois de distribution de la porosité	37
II.2.4.1. Modèle de loi exponentielle	37
II.2.4.2. Modèle de loi Trigonométrique	38
II.2.4.3. Modèle de loi de puissance	41
II.2.5. Liens entre taux volumique de porosité et propriétés mécaniques d'un stratifié	44

II. 2.6. Revue de quelques travaux sur les structures FGM avec porosités	47
II.3. Réponses des plaques sur fondations élastiques	52
II.3.1. Modèles de fondations élastiques	53
II.3.1.1. Modèles à paramètre unique	53
II.3.1.1.1. Modèle de Winkler	53
II.3.1.2. Modèles à Deux paramètres	56
II.3.1.2.1. Modèle de Filonenko-Borodich	56
II.3.1.2.2. Modèle de Hetenyi	57
II.3.1.2.3. Modèle de Pasternak	57
II.3.1.3. Modèles à trois paramètres	59
II.3.1.3.1. Modèle de Kerr	59
II.3.2. Revue de quelques travaux sur les structures FGM sur fondation élastique	61
II.4. Conclusion	62

CHAPITRE III

MODÉLISATIONS ANALYTIQUES DES PLAQUES

III.1. Introduction	63
III.2. Définition des plaques	64
III.3. Historique des plaques	64
III.4. Les modèles analytiques des plaques	65
III.4.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	65
III.4.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	66
III.4.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	67
III.5. Les fonctions raffinées de cisaillement transverse	69
III.6. Modèles de théories raffinées	72
III.6.1. Modèles à cinq variables	72
III.6.2. Modèles à quatre variables RPT (Refined Plate Theory)	73
III.6.3. Modèles de déformation des plaques Quasi-3D	74
III.7. Conclusion	75

CHAPITRE IV

UN NOUVEAU MODÈLE QUASI-3D POUR L'ÉTUDE DE LA FLEXION ET DE LA VIBRATION DES PLAQUES FGM POREUSES REPOSANT SUR DES FONDATIONS ÉLASTIQUES DE TYPE WINKLER/PASTERNAK/KERR

IV.1. Introduction	76
IV.2. Relations Constitutives	76
IV.2.1. Hypothèses de base	80
IV.3. Formulation Théorique	81
IV.3.1. Relations cinématiques et relations constitutives	81
IV.3.1.1. Champ des déplacements	81
IV.3.1.2. Champ des déformations	82
IV.3.1.3. Équations constitutives	84
IV.3.2. Équations d'équilibres	85
IV.3.3. Solutions Analytiques	92
IV.4. Conclusion	94

CHAPITRE V

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

V.1. Introduction	95
V.2. Résultats numériques et discussions	95
V.2.1. Résultats de l'analyse de flexion	96
V.2.1.1. Effet d'étirement des plaques imparfaites poreux	99
V.2.1.2. Effet de la fondation élastique (Winkler/Pasternak) des plaques poreuse	101
V.2.1.3. Effet de la fondation élastique de type Kerr des plaques FG isotropes	102
V.2.1.4. Effet de l'augmentation de l'indice de porosité des plaques FG poreuses	103
V.2.2. Résultats de l'analyse de la vibration	110
V.2.2.1. Effets des fondations élastiques (Winkler/Pasternak) et du rapport longueur épaisseur des plaques FG isotropes	112
V.2.2.2. Effets des paramètres de la fondation de Kerr, des indices de fraction volumique et du rapport longueur épaisseur	113
Conclusion générale et perspectives	118
Références bibliographiques	119

Liste des tableaux

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Tebboune 2015)	9
Tableau I.2	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels, (Koizumi, 1997)	13
Tableau I.3	Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM (Swaminathan et Sangeetha, 2017)	32

CHAPITRE III

Tableau III.1	Description des différentes théories de plaques	71
----------------------	---	----

CHAPITRE V

Tableau V.1	Les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM	95
Tableau V.2	Effet de la déformation normale ε_z sur les contraintes adimensionnelles et de la déflexion pour une plaque isotrope carrée soumise à une charge uniformément répartie avec $(a/h = 10)$	97
Tableau V.3	Effet de la contrainte axiale plane $\bar{\sigma}_x$ et la déflexion \bar{w} non dimensionnelles pour une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale	97
Tableau V.4	Comparaison des déplacements et des contraintes d'une plaque rectangulaire simplement supportée sous une charge uniformément répartie avec $(a=10h, b=3a)$	98
Tableau V.5	Comparaison des déplacements et des contraintes non dimensionnelles d'une plaque carrée fonctionnellement graduée poreuse soumise à une charge sinusoïdale avec $(a/h = 10)$	100
Tableau V.6	Variations de la déflexion $\bar{w}(0)$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites par rapport à la rigidité des fondations de type Winkler/Pasternak $(p = 1)$	102

Tableau V.7	La déflexion non dimensionnelle \bar{w} des plaques FG isotropes carrées reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$)	103
Tableau V.8	Variations de la contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x (h/3)$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité de la fondation de Kerr ($p = 1, \bar{K}_l = 100$)	104
Tableau V.9	Les fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque carrée isotrope avec $\nu = 0.3$ et $a/h = 10$	110
Tableau V.10	Les fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ d'une plaque FG avec $\varepsilon_z \neq 0$	111
Tableau V.11	La fréquence non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ d'une plaque FG carrée isotrope reposant sur des fondations de Winkler/Pasternak	112
Tableau V.12	Variations des paramètres de la fréquence $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m/E_m}$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité des fondations de Winkler/Pasternak ($p = 1$)	113
Tableau V.13	Variations des fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m/E_m}$ des plaques carrées FG reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$)	114
Tableau V.14	Variations des fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité de la fondation de Kerr ($p = 1, \bar{K}_l = 100$)	115

Liste des figures

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1	Variation continue des propriétés (Hirai 1996)	8
Figure I.2	Variation discrète des propriétés (Hirai 1996)	8
Figure I.3	Variation continue la microstructure (Yin 2004)	9
Figure I.4	Variation continue la microstructure (Zidi 2013)	9
Figure I.5	Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites (Zemani et Sebakhi, 2015)	13
Figure I.6	distribution des composantes des matériaux (Yoshihisa 2004)	14
Figure I.7	Utilisation dans le domaine de génie civil (Chelahi, 2021)	15
Figure I.8	Structure d'une paroi à gradient de propriétés, ILEK (Said 2015)	16
Figure I.9	Essai de flexion à quatre points, ILEK (Said 2015)	17
Figure I.10	En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée, En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, ILEK (Said 2015)	18
Figure I.11	Transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, ILEK (Said 2015)	19
Figure I.12	Utilisation dans l'industrie d'énergie (Chelahi, 2021)	20
Figure I.13	Principe de la méthode coulage en bande (Lostec 1997)	21
Figure I.14	Principe de la méthode coulage par barbotine (Moya, 1992)	22
Figure I.15	Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma (Steffens, 1990)..	23
Figure I.16	Disposition du procédé frittage laser différentiel (YUKI et al. 1990)	24
Figure I.17	Le coulage centrifuge des poudres mixtes (Xiong, 2005 a)	25
Figure I.18	Géométrie d'une plaque en FGM	26
Figure I.19	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	27
Figure I.20	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	28
Figure I.21	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	29
Figure I.22	Variation du module de Young avec différents modèles micromécaniques (Mahmoudi 2018)	31

CHAPITRE II

Figure II.1	(a) Micrographie des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores, (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores (Benahmed, 2020)	35
Figure II.2	Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites (Olivier et al. 1995)	45
Figure II.3	Variation du paramètre de charge de flambement non dimensionnel en fonction du paramètre de Winkler et le coefficient de porosité (Benahmed, 2020)	49
Figure II.4	Variation de la déflexion non dimensionnelle en fonction du rapport d'une plaque FGM parfaite et imparfaite (Benahmed, 2020)	50
Figure II.5	Effet de la porosité sur la déflexion centrale sans dimension en fonction du rapport latéral à l'épaisseur d'une plaque FGM (Benahmed, 2020)	51
Figure II.6	Déplacements de la surface dus à : (a) une charge répartie sur un modèle de fondation rigide-Winkler, (b) une charge uniforme sur un modèle de fondation flexible-Winkler, (c) une déformation en forme de cuvette réelle ...	54
Figure II.7	Modèle de Filonenko-Borodich	57
Figure II.8	Équilibre de la couche de cisaillement	58
Figure II.9	Plaque supportée par la fondation Pasternak	59
Figure II.10	Plaque supportée par la fondation Kerr	59

CHAPITRE III

Figure III.1	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997)	65
Figure III.2	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997)	66
Figure III.3	Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy 1997)	67
Figure III.4	Tracés des fonctions de cisaillement transverse étudiées	70

CHAPITRE IV

Figure IV.1	Modèles des fondations: (a) fondation de Winkler; (b) fondation de Pasternak; (c) fondation de Kerr	77
Figure IV.2	Illustration de différents modèles de distributions des porosités (a) Uniformes FGM-I, (b) Non uniforme FGM-II, Logarithmique non uniforme FGM-III	77
Figure IV.3	Variations du module de Young de FGM parfait et FGM poreux avec la coordonnée d'épaisseur: (a) $p = 0.5$; (b) $p = 1$; (c) $p = 5$	79

CHAPITRE V

Figure V.1	La distribution de la déflexion à travers l'épaisseur des plaques isotropes FG carrées poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de Kerr : (a) pour différents paramètres des fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	105
Figure V.2	Variation de la déflexion en fonction du rapport longueur épaisseur des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de type kerr : (a) pour différents paramètres de fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	106
Figure V.3	Variation de la déflexion en fonction du rapport d'aspect des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de kerr : (a) pour différents paramètres de fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	107

Figure V.4	Variation de la Contrainte axiale à travers l'épaisseur des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de type Kerr : (a) pour différents paramètres de fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	108
Figure V.5	Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de Kerr : (a) pour différents paramètres de fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	109
Figure V.6	Effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence non dimensionnelle des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de Kerr: (a) pour différents paramètres de fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	116
Figure V.7	Effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence non dimensionnelle des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation Kerr: (a) pour différents paramètres de fondations, (b) FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, (c) FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et (d) FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité	117

Liste des notations

LISTE DES NOTATIONS

$P(z)$	Fraction volumique locale
α	Fraction volumique de porosité
P_c	Propriété matérielle de céramique
P_m	Propriété matérielle du métal
V_c	Fraction volumique de céramique
V_m	Fraction volumique du métal
E_c	Module de Young de céramique
E_m	Module de Young du métal
ρ_c	La densité de céramique
ρ_m	La densité du métal
ν	Coefficient de Poisson
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de l'épaisseur
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$\Psi(z)$	Fonction de forme
$f(z)$	Fonction de forme hyperbolique
u, v	Les composantes des déplacements dans les directions x, y
u_0, v_0	Les composantes des déplacements en membrane dans les directions x, y
u_b, v_b	Les composantes de la flèche suivant les directions x, y
u_s, v_s	Les composantes de cisaillement suivant les directions x, y
$w(x, y, z)$	La composante du déplacement transversal
$w_0(x, y)$	Représente une partie de la flèche pure de la plaque
$\phi_z(x, y)$	La flèche due à l'effet d'étirement
$g(z)$	Fonction de gauchissement
$\int \theta(x, y) dx$	Les variables intégrales indéterminées
$\int \theta(x, y) dy$	

k_1, k_2	Coefficients dépendent de la géométrie
ε^0	Champ des déformations en membrane
k^b	Champ des déformations en flexion
k^s	Champ des déformations en cisaillement
d_{ij}, d_{ijlm}	Opérateurs différentielles
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	Les composantes de rigidité
$D_{ij}^s, H_{ij}^s, B_{ij}^s$	
w	Déplacement transversal ou la flèche
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
$[S]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
ω	Fréquence propre
q	Charge transversale
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les composants des contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Les composants des contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Les composants des déformations dans les directions x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Les composants des déformations de cisaillement
C_{ij}	Les constantes élastiques
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\lambda(z), \mu(z)$	Des coefficients de Lamé
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU_S	La variation de l'énergie de déformation
δU_F	La variation de l'énergie de déformation supplémentaire
δV ou δW	La variation de travail virtuel
δK	La variation de l'énergie cinétique
δW_E	La variation de travail virtuel externe
δW_I	La variation de travail virtuel interne

F	Forces volumique
T	Forces de surface
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z	Efforts normales
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}, S_{yz}	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
G_x, G_y	Les modules de cisaillement de la fondation
K_w	Le module de réaction du sol
K_s	Rigidité de la couche de cisaillement
K_u	Rigidité du ressort supérieure
K_l	Rigidité du ressort inférieure
$P_{Winkler}$	Modèle de fondation Winkler
$P_{Pasternak}$	Modèle de fondation Pasternak
P_{Kerr}	Modèle de fondation Kerr
∂	Dérivée partielle
i, j	Nombres naturels
m_{ij}	Les éléments de la matrice de masse généralisée
s_{ij}	Les éléments de la matrice de rigidité
I_0, I_1, J_1, J_1^s	Les inerties de masse
I_2, J_2, K_2, K_2^s	
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Γ	Propriété matérielle
m, n	Modes propres
L_i	Opérateurs
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	La différenciation par rapport à la variable de temps t
U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} $\Theta_{mn}, \varphi_{mn}$	Des coefficients de Fourier

ACRONYMES

FGM	Functionally Graded Materials
FGM-I	Modèle des porosités uniforme (Imperfecte I)
FGM-II	Modèle des porosités non uniforme (Imperfecte II)
FGM-III	Modèle des porosités logarithmique non uniforme (Imperfecte III)
PM	Powdered Metallurgy
ILEK	Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (Institut de la conception et la construction des structures légères)
HA	Hydrox Apatite
P-FGM	Fonction de la loi de puissance
E-FGM	Fonction exponentielle
S-FGM	Fonction sinusoïdale
CPT	La théorie classique des plaques
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
HSDT	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé
TSDT	La théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre
SSDT	Une fonction trigonométrique sinusoïdale
ESDPT	The exponential shear deformation plate theory
HSDPT	The hyperbolic shear deformation plate theory
RPT	Rafined Plate Theory
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry
ILSS	Inter Laminar Shear Stress
DTM	La méthode de transformation différentielle

Introduction générale

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe des matériaux composites dont lesquels les propriétés des matériaux varient continuellement d'un point à l'autre. Ceci est réalisé en variant la fraction volumique des constituants, par exemple la céramique et le métal, d'une manière prédéterminée. Cette composition en constante évolution élimine les problèmes d'interface et par conséquent, la distribution des contraintes est lisse. Au cours des dernières années, les (FGM) ont été développées pour une utilisation générale en tant qu'éléments structurels dans différentes applications. La raison de l'utilisation croissante des FGM dans diverses structures aérospatiales, automobiles, génie civile et mécaniques est que leurs propriétés matérielles peuvent être adaptées à différentes applications et environnements de travail. La preuve est la très grande quantité de documentation sur ces matériaux (Qian et Batra 2005 ; Darilmaz 2015 ; Ebrahimi et Dashti 2015 ; Bouguenina et al. 2015 ; Akbas 2015 ; Arefi 2015 ; Pradhan et Chakraverty 2015 ; Kar et Panda 2015 ; Ebrahimi et Habibi 2016 ; Moradi-Dastjerdi 2016 ; Laoufi et al. 2016).

En conséquence, diverses théories ont été développées par des chercheurs pour prédire le bon comportement matériel de la flexion des plaques (FGM). Kirchhoff a développé une théorie classique des plaques (CPT) pour l'analyse des plaques minces, qui est basée sur l'hypothèse Kirchhoff où les déformations de cisaillement transversal sont nulles et donc les contraintes transversales n'entrent pas dans la théorie. Cette théorie n'inclut pas les effets de cisaillement et ne s'applique donc qu'aux plaques minces (Abrate 2008 ; Arefi 2015 ; Pradhan 2015 ; Darilmaz 2015). La théorie conventionnelle des plaques donnera des résultats erronés lorsqu'il est utilisé pour les plaques épaisses (Liu 2011).

Pour tenir compte de la contrainte de cisaillement transversal, Reissner (Reissner 1945) et Mindlin (Mindlin 1951) ont développé une théorie des plaques de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) en tenant compte l'effet de déformation de cisaillement transversale pour l'analyse des plaques. Dans cette théorie, les équations de base sont dérivées par en supposant que les déplacements dans le plan sont répartis linéairement sur l'épaisseur de la

plaque. Cela conduit à des contraintes de cisaillement transversal constantes sur toute l'épaisseur de la plaque, de sorte que l'état de contrainte de cisaillement nulle sur la face de la plaque n'est pas satisfait et nécessite un facteur de correction de cisaillement difficile à trouver car il dépend des géométries, les propriétés matérielles et les conditions aux limites de chaque problème (Ferreira et al. 2009).

Suivant les limites des théories CPT et FSDT, un nombre significatif de théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé des plaques (HSDT) qui ne nécessitent pas un facteur de correction de cisaillement et de satisfaire les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques ont été développés et ce, pour approximer correctement la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversal le long de l'épaisseur de la plaque (Bensaid 2017 ; Belkacem et al. 2018 ; Karami et Janghorban 2019).

Souvent, les théories des plaques 2D mentionnées ci-dessus (CPT, FSDT, HSDT et RHSDTs) négligent l'influence de l'effet d'étirement de l'épaisseur (C'est-à-dire, $\varepsilon_z = 0$) en raison de l'hypothèse des déplacements transversal constants à travers l'épaisseur.

Récemment, de nombreuses théories quasi-3D ont été proposées dans la littérature où l'effet d'étirement de l'épaisseur (ε_z) dans les plaques FG à été étudié par différents chercheurs (Akavci et Tanrikulu 2015 ; Adim et Daouadji 2016 ; Kar et Panda 2016 ; Hadji et al. 2018) pour obtenir des résultats précis. Il convient également de noter que des études expérimentales sont menées avec la théorie HSDT pour étudier les comportements mécaniques des structures (Sahoo et al. 2016 ; Hirwani et al. "2016 a, 2018 a, b, c" ; Mehar et al. 2017 ; Sahoo et al. " 2017 a, b, 2018" ; Hirwani et Panda 2018 ; Chandra Mouli et al. 2018 ; Bisen et al. 2018 ; Mehar et Panda "2018, 2019" ; Pandey et al. 2019 ; Sahoo et al. 2019 ; Mehar et al. 2019).

Ces théories qui ressemblent à la théorie d'ordre élevé n'utilisent que cinq fonctions inconnues afin de dériver cinq équations de gouvernance pour les plaques fonctionnellement graduées. L'effet d'étirement de l'épaisseur devient très précieux pour l'analyse des plaques épaisses et doit donc être pris en considération.

De nombreuses théories quasi-3D ont été proposées dans la littérature (Thai et Kim 2013 ; Thai et al. 2014 ; Neves et al. 2012 ; Neves et al. 2013). Thai et Kim (2012) ont proposé une simple théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale quasi-3D pour analyser le comportement de flexion des plaques FG en utilisant cinq variables inconnues. Bourada et al. (2015) ont proposé une nouvelle théorie de déformations de cisaillement simple pour les poutres fonctionnellement graduées. Une théorie des plaques raffinée à été développée par Thai et al. (2013) pour tenir compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur dans les plaques fonctionnellement graduées.

Avec les progrès rapide de la technologie des composants de structure, les structures avec des porosités graduées peuvent être considérées comme l'un des derniers développements dans les FGM. Par exemple, Amar et al. (2017) ont présenté une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement des poutres est proposée sur la base d'une théorie de contrainte modifiée (MCST) pour étudier les réponses de la flexion et de la vibration des micro-poutres fonctionnellement graduées FG poreux.

Ehyaie et al. (2017) ont étudié l'effet de la porosité et le chargement axial sur le comportement vibratoire du nano-poutres FG en rotation. Zenkour (2018) à présenté une théorie quasi-3D raffinée pour les plaques monocouche et sandwichs fonctionnellement graduées avec des porosités. Faleh et al. (2018) ont étudié la réponse de la vibration des nano-particules FG poreuses. Salari et al. (2019) ont examiné le flambement thermique asymétrique dépendant de la porosité des nano-plaques annulaires inhomogènes reposant sur un substrat élastique. Avcar (2019) à étudié récemment la vibration libre des poutres imparfaites fonctionnellement graduées selon la loi de puissance.

L'interaction entre les structures et le sol est d'une importance fondamentale dans la conception des fondations et elle à toujours attiré l'attention des chercheurs et ingénieurs. Il existe de nombreuses études sur la modélisation des fondations élastiques Winkler dans la littérature. C'est le modèle le plus simple qui à été introduit par Winkler en 1867, connu sous le nom de modèle à un paramètre concernant la base élastique, qui considère la base comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement. Cette méthode à été améliorée par la suite par Pasternak qui à pris en compte les interactions entre les différentes sources. Par conséquent, le modèle de Pasternak à été largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions élastiques sol-structure (Pasternak 1954). En généralisation du concept Pasternak, Kerr (1964) à proposé un modèle de fondation à trois paramètres qui se

compose de deux couches de ressorts élastiques interconnectées par une couche de cisaillement élastique.

Les principaux objectifs de ce travail de recherche consistent à :

- développer une nouvelle théorie quasi-3D hyperbolique de déformation de cisaillement pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM poreuse reposant sur fondations élastiques et de comparés les résultats obtenue aux résultats trouvés dans la littérature. Les effets dus au cisaillement transversal et de déformations normales sont inclus. Le nombre de fonctions inconnues pour la théorie proposée est seulement cinq, tandis que six ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque.
- l'étude de l'imperfection du matériau par l'introduction de la fraction volumique de porosité " α " dans la loi de mélange qui se dispersent uniformément ou de manière non uniforme et qui peuvent exister à l'intérieur du matériau de la plaque FG pendant la production.
- l'étude de l'influence des fondations élastique de types (Winkler/Pasternak/Kerr) sur le comportement statique et dynamique des plaques FG, peut être considérée comme l'un des derniers développements dans les FGM.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs domaines d'application, ainsi les techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, et les défauts de fabrications. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM et les modèles analytiques de calcul des plaques utilisés pour l'analyse du comportement thermomécanique des structures en FGM.

Le deuxième chapitre présente une revue de quelques travaux sur les structures FGM sur fondation élastique, la modélisation et l'analyse des structures en FGM avec porosités effectués par les auteurs local et auteurs étrangers. On présente aussi la formulation théorique

du comportement des plaques FGM sur fondations élastiques, ainsi que les modèles mécaniques des fondations élastiques.

Le troisième chapitre détaille les différents modèles analytiques de calcul des plaques, à savoir la théorie de déformation des plaques quasi-3D qui prend en compte les effets du cisaillement et l'étirement (stretching effect) dans le sens transversal.

Le quatrième chapitre présente une solution générale du comportement mécanique de la flexion et de la vibration des plaques poreux en matériaux fonctionnellement gradues (FGM) reposant sur des fondations élastiques en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec la pris en compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque et sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement, en utilisant une fonction de forme hyperbolique.

Le cinquième chapitre est une étape de validation, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie proposée pour l'étude de la flexion et de la vibration des plaques FGM poreuses reposant sur des fondations élastiques choisies comme fondations Winkler/Pasternak/Kerr.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revoir les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives et recommandations dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement statique et de la vibration des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Chapitre I :
Généralités sur les matériaux avancés FGM

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX AVANCÉS FGM

I.1. Introduction

Les matériaux avancée (Functionally Graded Materials "FGM") ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe des matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999 ; Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Hsner et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux.

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicales.

I.2. Etude bibliographique

Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette spatiale hypersonique. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un choc thermique (une température extérieure de 2000°K et une température intérieure de 1000°K dans moins de 10 mm d'épaisseur, la vitesse de vol de plus de 25 Mach, La température des gaz de combustion de la chambre de combustion peut être supérieure à 2000 ° k). Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo-élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel. En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup des travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en ce concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations des plaques en FGM. Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été

consacrées à l'étude des contraintes résiduelles, Le comportement thermomécanique (flambage), le comportement thermo-élastique statique, en revanche peu d'études ont été dédiés aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à s'intéresser à leur comportement dynamique.

I.3. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure I.1) ou discontinue (figure I.2) à travers l'épaisseur (Hirai 1996 Part 2). Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations des contraintes au niveau des interfaces (provoquant délaminage et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques de la structure. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile, génie civil et dans bien d'autres applications technologiques.

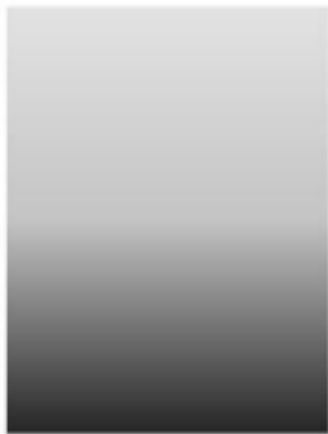


Figure I.1. Variation continue des propriétés (Hirai 1996)



Figure I.2. Variation discontinue des propriétés (Hirai 1996)

La variation continue des propriétés (figures I.3 et I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

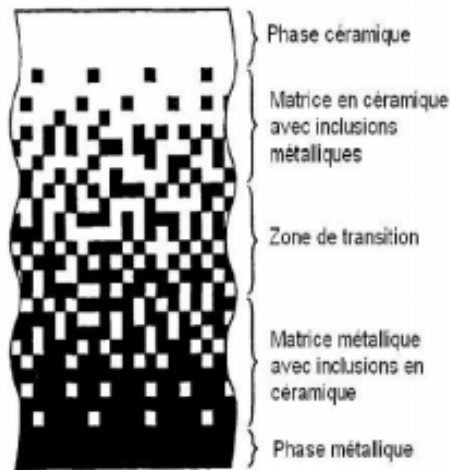


Figure I.3. Variation continue
La microstructure (Yin 2004).

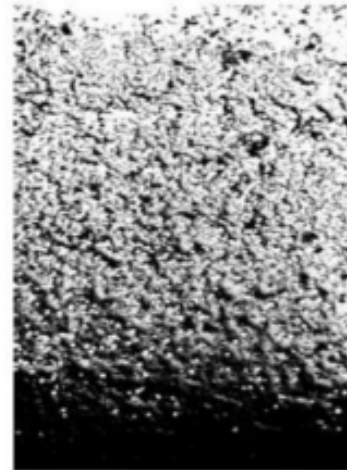


Figure I.4. Variation continue
La microstructure (Zidi 2013).

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Tebboune 2015).

Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> ✓ bonne résistance thermique ; ✓ bonne résistance à l'oxydation ; ✓ Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Élimination des problèmes de l'interface ; ✓ Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Bonne résistance mécanique ; ✓ Conductivité thermique élevée ; ✓ Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.5. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

I.4. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi 1992). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux à comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (Koizumi 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (Koizumi 1997).

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi 1992).

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des « FGM » a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface) et à un gradient de température de 1000°K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux

présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- ✓ le système SiC/C par Le dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition "C.V.D")
- ✓ le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- ✓ le système TiB₂/Cu synthèse par auto-propagation à haute température,
- ✓ le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (Okamura 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications ; biomécaniques, technologie de capteur, optique (Okamura 1991).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations à des futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.5. Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels

Avec l'évolution technologique et les exigences de concurrence économique, les laboratoires de recherches ont poussé d'avantage leurs objectifs techniques, visant à satisfaire la demande en matière de performances et de qualité. Ces performances prescrites ne peuvent être atteintes avec des matériaux purs à cause des propriétés de ces derniers qui ne sont pas assez polyvalentes pour certaines utilisations. Pour résoudre ce problème, la combinaison d'un métal avec d'autres métaux ou non métaux en état de fusion est utilisée, c'est ce qu'on appelle alliage, ceci donne des propriétés différentes de celles des matériaux de base. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique (Ciarlet 1997), car il y'a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Ainsi qu'il

est prohibitif de combiner deux matériaux par ce procédé avec un écart de température de fusion des composants. La métallurgie des poudres (Powdered Metallurgy "PM") est une autre méthode de production d'une pièce qui ne peut être produite par alliage conventionnel, où l'alliage est produit sous forme de poudre à faire fritter. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance (Ciarlet 1997). Bien que ces limitations sont avantageuses à certaines applications (par exemple, filtre et applications non structurelles) mais, elles sont préjudiciables à d'autres. Une autre méthode de production des matériaux avec combinaison de propriétés est celle de combinaison de matériaux à l'état solide, donnant des matériaux composites.

Les matériaux composites sont des matériaux constitués généralement de deux ou plusieurs matériaux différents dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ces matériaux sont constitués d'une matrice et d'un renfort, souvent ce dernier est sous forme de fibres. Ainsi, il est possible d'améliorer les propriétés mécaniques du matériau obtenu telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres.

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue ..., etc.

En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures ; lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (Figure I.5.a), elle ne traverse généralement pas cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (Figure I.5.b). En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. Les matériaux composites donc sont échoués dans des conditions extrêmes à travers le processus de délaminage (séparation des fibres de la matrice) dû à la transition brutale de composition. Cela peut se produire par exemple, dans une application à haute température, où deux matériaux avec différents coefficients de dilatation thermique sont utilisés.

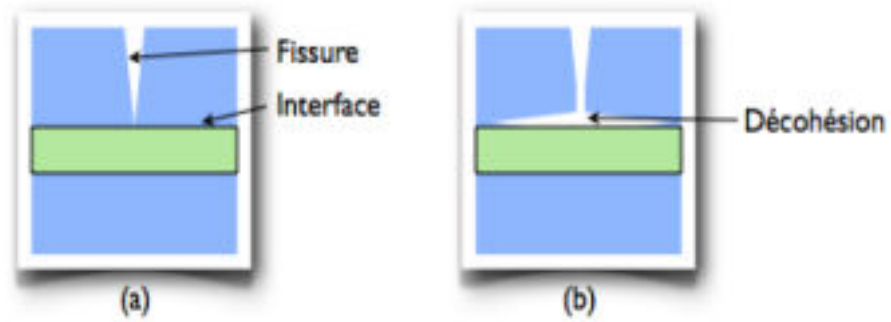


Figure I.5. Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites (Zemani et Sebakhi, 2015).

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau, les FGM sont des matériaux composites conventionnels comme illustré sur le tableau I.2. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Shahsavari et al. 2018).

Tableau I.2. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels, (Koizumi, 1997).

	Exemple	FGM	Non-FGM
Propriétés	Résistance mécanique — · · · Conductivité thermique ———		
Structure	Élément constituants : Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre △ ■		

Le modèle le plus simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est représenté dans la figure I.6. Le matériau plan (Figure I.6.a) composé à une caractéristique plane, et le matériau relié (Figure I.6.b) à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution des composantes est graduée, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

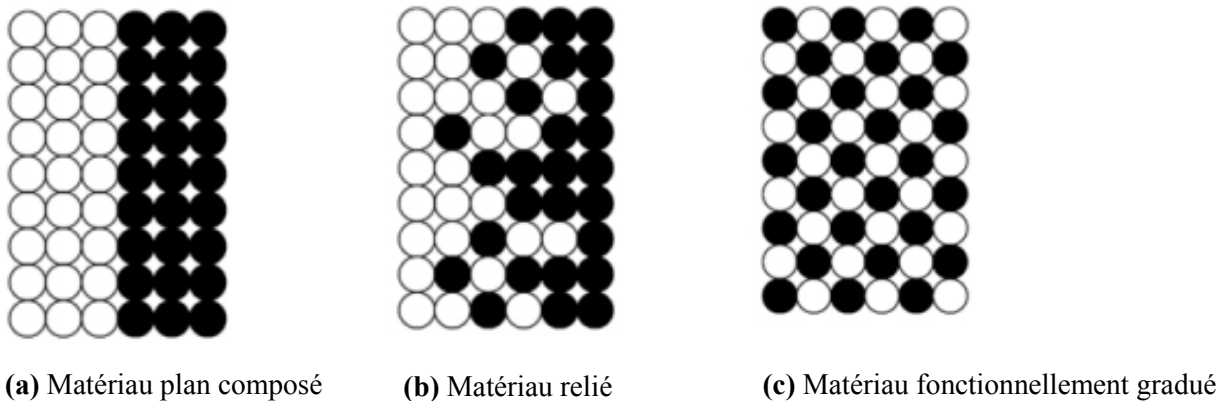


Figure I.6. La distribution des composantes des matériaux (Yoshihisa 2004).

I.6. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Les caractéristiques uniques des matériaux FGM ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant les dernières décennies, ce qui a favorisé leurs utilisations dans la majorité des domaines d'ingénierie. Bien que, originellement, ces matériaux étaient destinés pour les domaines aérospatial et aéronautique, ces derniers ont été utilisés dans le génie civil, l'industrie automobile, biomédicale, défense, électrique/électronique et thermoélectronique.

I.6.1. Domaine de génie civil

Les caractéristiques importantes de la FGM les ont favorisées dans presque tous les domaines d'activité humaine. Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes de matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudié et évalué pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

L'objectif de ces projets est d'évaluer les nouvelles possibilités de conception offertes par les matériaux gradués, en les voyant aussi sous l'angle architectural, et d'élaborer des propositions pour leur utilisation dans divers domaines. Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandu dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autres formes selon la qualité de l'ouvrage, comme celle-ci est représentée dans les figures ci-dessous.



Ouvrages d'arts ponts



Ouvrages d'arts ponts (Tabliers)



Ouvrages Souterrains



Plaque circulaire



Constructions civiles

Figures I.7. Utilisation dans le domaine de génie civil (Chelahi, 2021).

I.6.1.1. Le Béton à gradient de propriétés

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept des bétons à gradients de propriétés (Sobek et al. 2007), les travaux de développement ont lieu à l'institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (ILEK, Institut de la conception et la construction des structures légères) de l'Université allemande de Stuttgart, dans le cadre des projets de recherche « Matériaux à gradient dans le bâtiment et le génie civil » et « planchers préfabriqués à gradient de propriétés » (Heinz et al. 2011). La fabrication, l'automatisation, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement examinées à l'université de Stuttgart. L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM est actuellement en étude et en développement dans plusieurs projets de recherche. Le but principal est de satisfaire un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance, à l'intérieur de l'élément conformément aux spécifications et profils des efforts déterminés pour l'élément (figure I.8).



Figure I.8. Structure d'une paroi à gradient de propriétés, ILEK (Said 2015).

Il est à noter que l'idée du béton à gradient de propriétés, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclabilité et la sauvegarde des ressources économiques.

Les essais et les calculs de planchers à gradient de propriétés se sont révélés d'une réduction de poids de plus de 60% et d'une réduction des émissions de carbone dépassant 35% par rapport aux planchers minces classiques, sans aucune perte de résistance (Eyerer et al. 2000) (figure I.9).



Figure I.9. Essai de flexion à quatre points, ILEK (Said 2015).

I .6.1.2. Les joints dans la charpente métallique

Lors de l'assemblage des éléments en charpente métallique, on est obligé de réaliser des soudures entre deux éléments de nature/nuance différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints FGM est optimale.

I .6.1.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes

L'utilisation des vitres en FGM à pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout et le poids des structures.

I .6.1.4. Les chaussées rigides

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

I .6.1.5. Les chaussées souples

Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de grave bitume et la couche de roulement en béton bitumineux pour éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs tout en obtenant

un comportement optimisé, augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

I.6.1.6. Les tunnels

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches.

I.6.1.7. Autres matériaux à gradient de propriétés

Les textiles avec des propriétés variables de couches superposées permettent de doter au matériau une perméabilité et une rigidité graduelle (figure I.10), ce qui peut augmenter l'efficacité de systèmes d'isolations vis-à-vis les effets de chaleur et d'humidité. En plus, la variation graduelle des propriétés de rigidité permettent de surmonter le changement brusque entre les composantes rigides et flexibles des éléments, ce qui pourrait complètement servir de base à des nouvelles solutions architecturales à l'avenir.



Figure I.10. En haut : texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée,
En bas : essai de l'étanchéité à l'eau, ILEK (Said 2015).

Un autre aspect de cette technologie impliquant des matériaux à gradient de propriétés sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue (figure I.11). Cela représente une nouvelle approche dans la technique d'assemblage avant tout, même si cela signifie que la variation de dilatation thermique ne peut plus être définie de manière précise au niveau local en vue de la transition continue en cause, ou la transmission de charge évité à certains endroits. Sous les auspices du projet, les investigations

préliminaires sont effectuées dans le cadre de la construction des classes pertinentes de matériaux, des domaines potentiels d'application et des méthodes appropriées de production.



Figure I.11. Transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, ILEK (Said 2015).

I .6.2. Domaine aérospatial

Etant le premier domaine d'application des matériaux FGM, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales. Les matériels FGM sont aussi utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.

I .6.3. Domaine de l'industrie biomédical

Le corps humain est composé d'un certain nombre de matériaux FG notamment les os et les dents. Ces derniers sont les parties du corps humain les plus remplacées suite à l'endommagement de ces parties ou bien à cause du processus de vieillissement naturel. C'est pourquoi la majorité de matériaux FG utilisés dans l'industrie biomédicale sont des implants, tels que; Dans les implants pour remplacement squelettique permanent, la porosité graduée aide à minimiser la protection de stress. Les implants dentaires de titane poreux graduellement aident à améliorer les propriétés d'osseuse-intégration de l'implant. Hydrox Apatite poreux gradué (HA) imite la structure bimodale de l'os humain, ce qui aide à promouvoir la nouvelle croissance tissulaire et leurs propriétés mécaniques.

I .6.4. Domaine de l'industrie d'énergie

Les industries d'énergie ont constamment besoin de différents types de FGM, afin d'améliorer l'efficacité de leurs équipements. Certaines applications des matériaux FG dans l'industrie d'énergie incluent le mur intérieur des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les équipements sous pression, les électrodes graduées pour la production de carburant solide d'oxyde, le piézoélectrique FGM pour le capteur ultrasonique, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements des lames de turbine ainsi que les revêtements des barrières thermiques (Figure I.12).



Figure I.12. Utilisation dans l'industrie d'énergie (Chelahi, 2021).

I .6.5. Domaine de l'industrie électrique / électronique

Les matériaux FG sont utilisés dans les industries électriques et électroniques pour la relaxation du champ de stress dans les électrodes et l'interface d'entretoise de terrain, dans les diodes, les semi-conducteurs, pour les isolants et pour la production de capteurs. Les éléments de bouclier thermique dans la micro-électronique sont aussi faits du nanotube carbonique des matériaux FGM.

I .6.6. Autres industries

L'application des matériaux FG inclut aussi divers domaines, exemple, les outils de coupe pour améliorer la force thermique de l'outil de coupe, les lames de rasoir de Fer Aluminure / Acier inoxydable, dans les équipements de sécurité, comme des bouteilles d'air de lutte contre les incendies, les cadres de monocle et les casques. D'autres équipements, comme, le scanner IRM des tubes cryogéniques, les récipients sous pression, les réservoirs à carburant, les cas d'ordinateur portable, les instruments de musique et les tables radiographiques. Les applications des FGM au Japon ont aussi été présentées par (Miyamoto et al. 1999).

I.7. Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés (FGM).

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM. Les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.7.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.13), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande (Lostec 1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

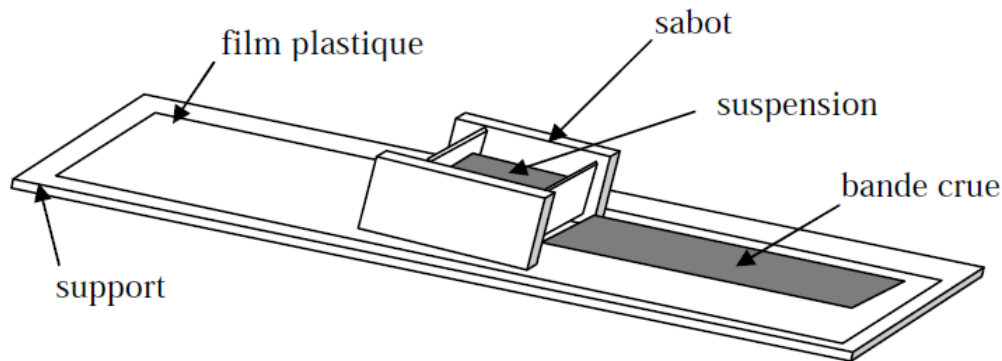


Figure I.13. Principe de la méthode coulage en bande (Lostec 1997).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes ; soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par (Mistler 1973); soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Boch et al. 1986).

I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule (figure I.14), après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique (Moya 1992));
- d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

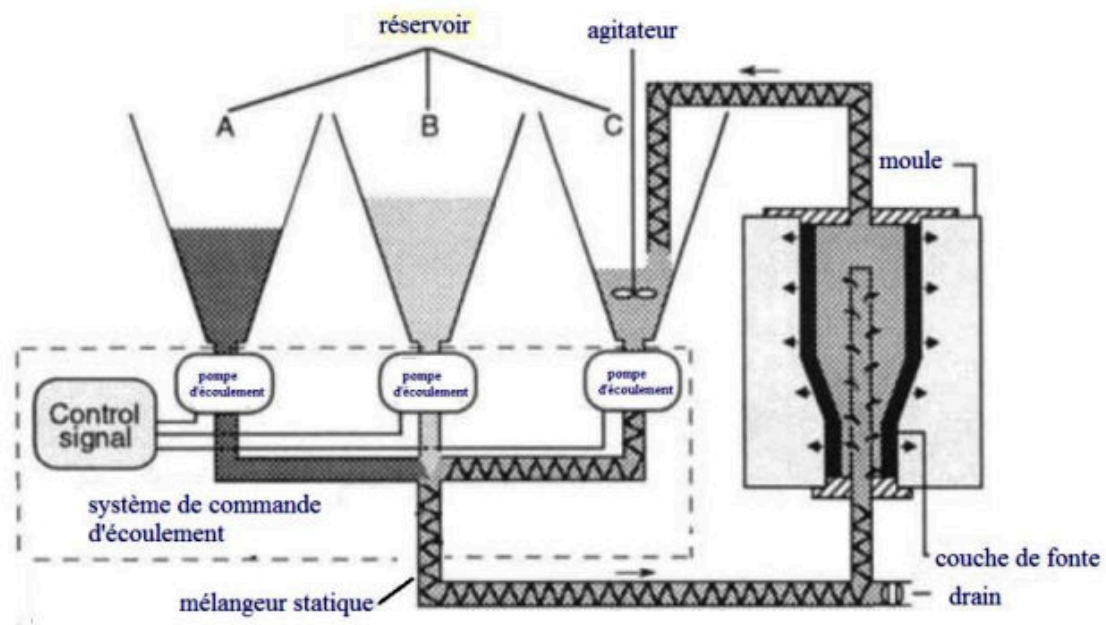


Figure I.14. Principe de la méthode coulage par barbotine (Moya, 1992).

I.7.3. Compaction sèche des poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop, 1993).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.7.4. Projection plasma

Cette méthode se consiste à soumettre un gaz à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique) ce qui le transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique, Steffens, (1990).

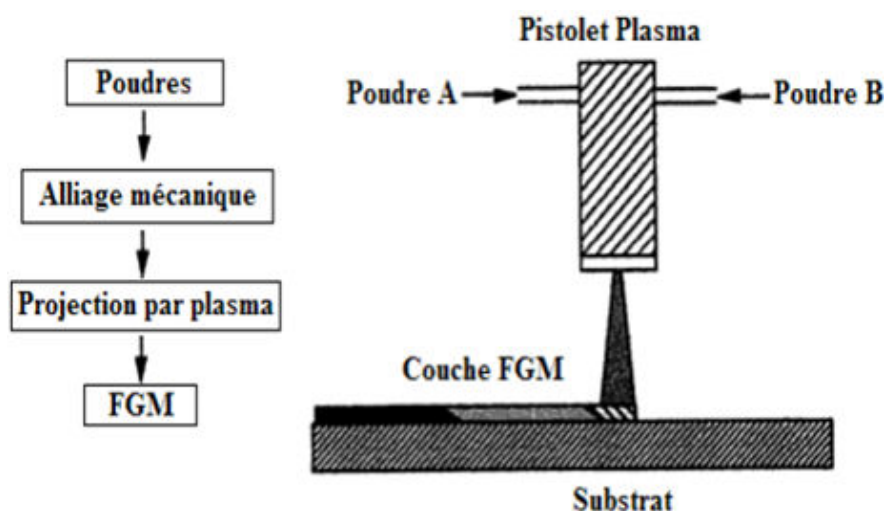


Figure I.15. Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma (Steffens, 1990).

I.7.5. Frittage et infiltration

Cette méthode est basée sur deux étapes la première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité, la seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique, Takahashi (1990). Cette technique convient à la fabrication d'un composite fonctionnellement gradué composé de matériaux qui sont chimiquement inertes avec des températures de fusion très différentes.

I.7.6. Frittage Laser Différentiel

La puissance du laser permet de contrôler la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki et al. (1990) ont fabriqué une pièce FGM de PSZ/Mo. La figure I.16 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

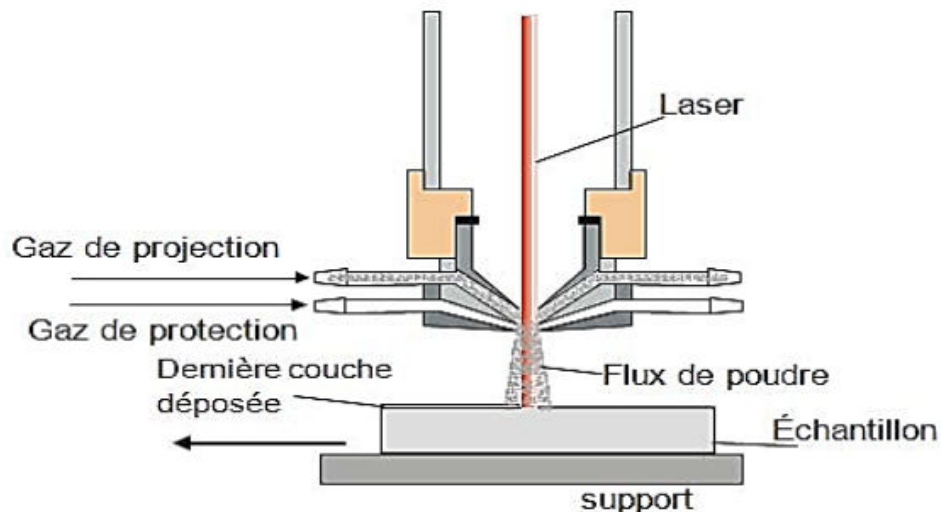


Figure I.16. Disposition du procédé frittage laser différentiel (YUKI et al. 1990).

I.7.7. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des

machines de coulée centrifuge sont ; les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr / min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification Xiong, (2005).

La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans La figure I.17 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano Xiong, (2005 a).

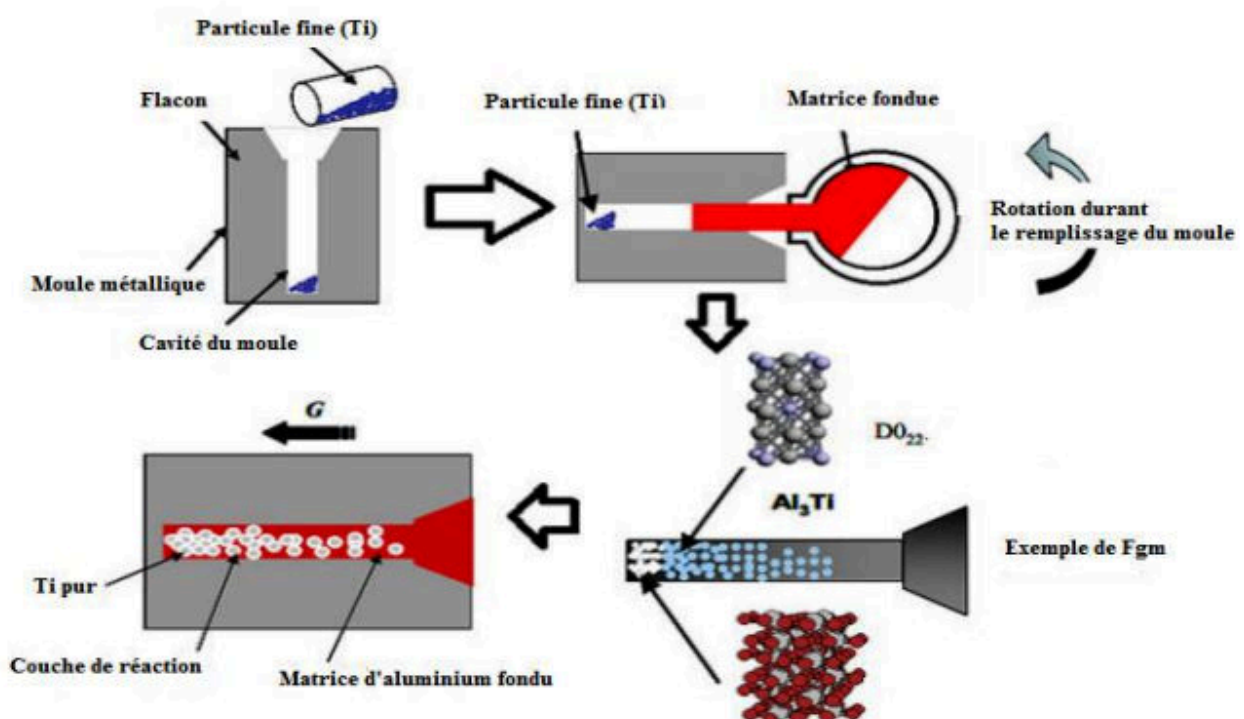


Figure I.17. Le coulage centrifuge des poudres mixtes (Xiong, 2005 a).

I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

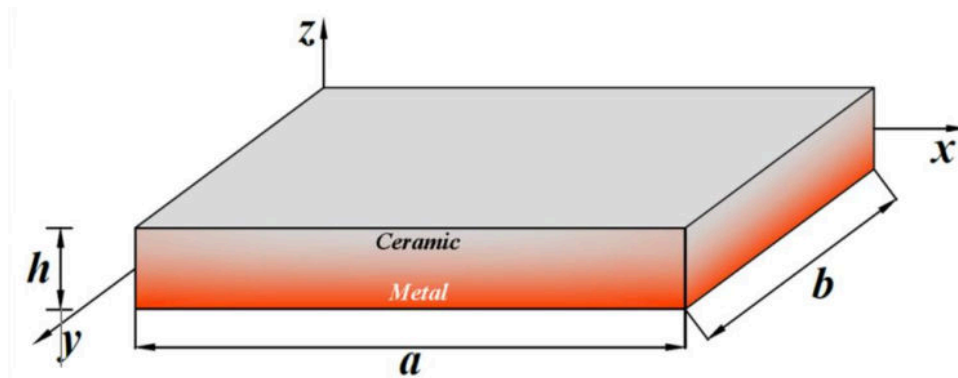


Figure I.18. Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sinusoïdale (S-FGM).

I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I. 1})$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I. 2})$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.21, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

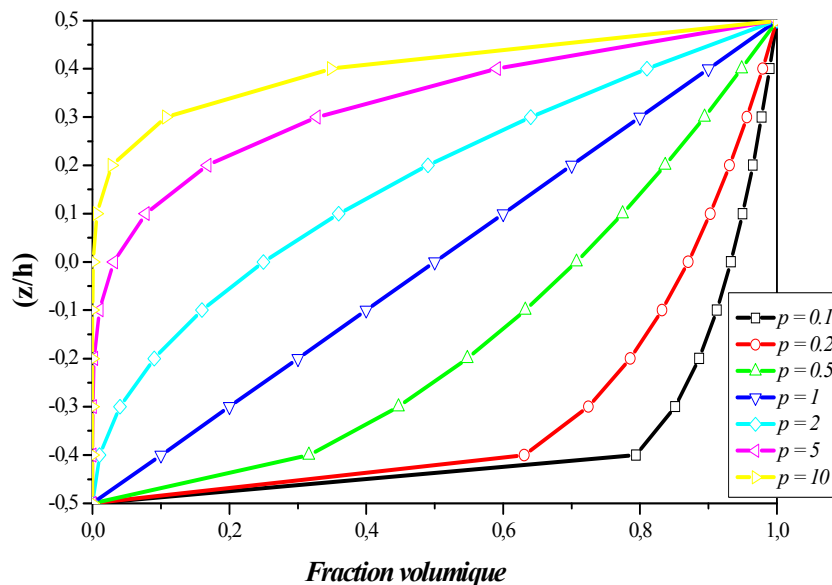


Figure I.19. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao et Wang 1995). Par conséquent, (Chung et chi 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. 3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I. 3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. 4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I. 4.b})$$

La figure I.20 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I. 4.a) et (I. 4.b) représente les distributions sinusoïdale, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

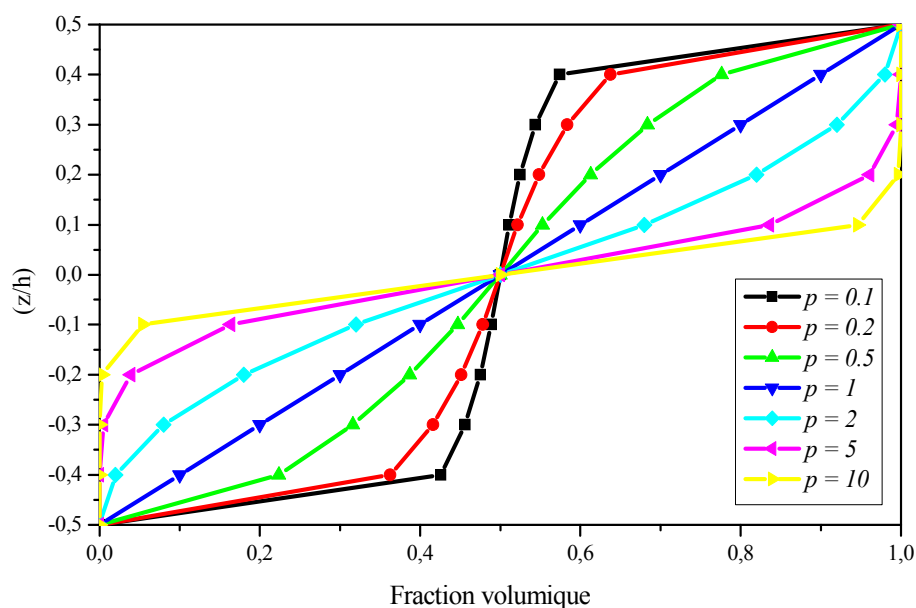


Figure I.20. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.8.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, (Delale et Erdogan 1983):

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad \text{avec :} \quad B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I. 5})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.21.

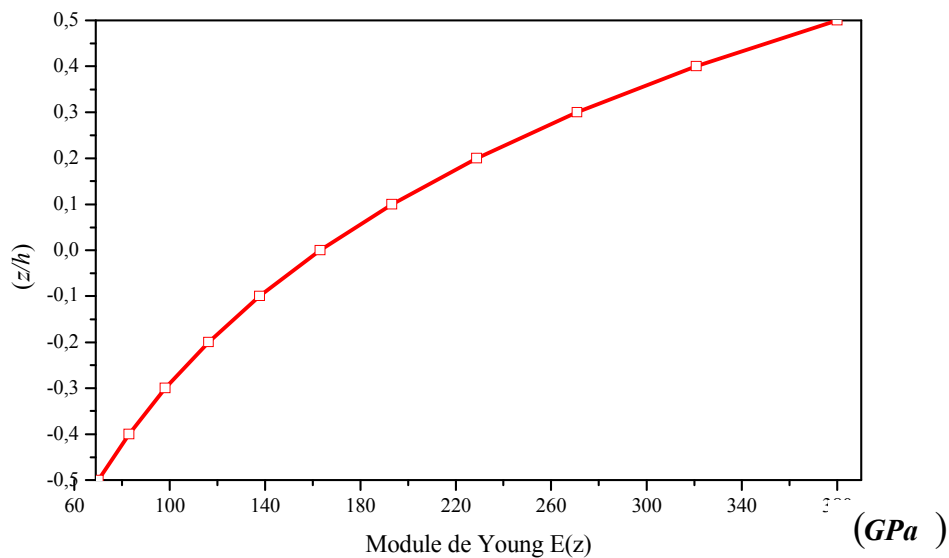


Figure I.21. Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.8.4. Autres propriétés matérielles des plaques FGM

Les lois de mélange P-FGM, S-FGM et E-FGM sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. Plusieurs autres modèles permettant d'évaluer les propriétés globales de la structure existent.

Plusieurs modèles micromécaniques des FGM ont été rapportés par Gasik (1994, 1998) ; Zuiker (1995) ; Reiter et Dvorak (1997, 1998) ; Yin et al. (2004) ; Bachir Bouiadjra et al. (2018) ; Mahmoudi et al. (2018). Ces modèles micromécaniques sont examinés pour obtenir les propriétés matérielles effectives des FGM avec les différentes distributions de la fraction volumique dans l'épaisseur de la plaque. Bachir Bouiadjra et al. (2018) ; Mahmoudi et al. (2018) ont étudié la réponse des plaques FG en utilisant cinq modèles micromécaniques

(Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka). Les expressions mathématiques des modèles micromécaniques sont comme suite :

I.8.4.1. Le modèle de Voigt

$$E(z) = E_c V(z) + E_m (1 - V(z)) \quad (\text{I. 6})$$

I.8.4.2. Le modèle de Reuss

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_m V(z) + E_c (1 - V(z))} \quad (\text{I. 7})$$

I.8.4.3. Le modèle de Tamura

$$E(z) = \frac{(1 - V(z))(q - E_c)E_m + V(z)(q - E_m)E_c}{(1 - V(z))(q - E_c) + V(z)(q - E_m)E_c} \quad (\text{I. 8})$$

Le paramètre q représente le transfert de contrainte/déformation suivant l'expression suivante:

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (\text{I. 9})$$

Si les éléments constitutifs se déforment de manière identique dans la direction de chargement, le paramètre q tend vers l'infini ($q = \infty$). Dans ce cas, le modèle de Tamura se réduit à l'estimation de Voigt. Tandis que, si les éléments constitutifs subissent le même niveau de contrainte ($q = 0$), on aura le modèle de Reuss.

I.8.4.4. Modèle par représentation local des éléments de volume (LRVE)

$$E(z) = E_m \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right); \quad FE = \frac{1}{1 - \frac{E_m}{E_c}} \quad (\text{I. 10})$$

I.8.4.5. Le modèle d'homogénéisation de Mori Tanaka

Pour le schéma de Mori Tanaka, la fraction volumique de la plaque FGM est donnée comme (Mori et Tanaka 1973 ; Benveniste 1987):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left(\frac{E_c}{E_m} - 1 \right) \frac{1 + \nu}{3 - 3\nu}} \quad (\text{I. 11})$$

Bachir Bouiadjra et al. (2018) ; Mahmoudi et al. (2018) ont noté que quel que soit le modèle micromécanique utilisé la densité de masse effective ρ est obtenue par la règle de mélange suivante :

$$\rho(z) = \rho_c V(z) + \rho_m (1 - V(z)) \quad (\text{I. 12})$$

Les estimations du module de Young d'un matériau fonctionnellement gradué, en utilisant les différents modèles micromécaniques sont représentées en fonction de la fraction volumique des constituants sur la figure I.22. On peut remarquer que les approximations de Voigt et de Reuss représentent les bornes supérieure et inférieure pour l'estimation du module de Young.

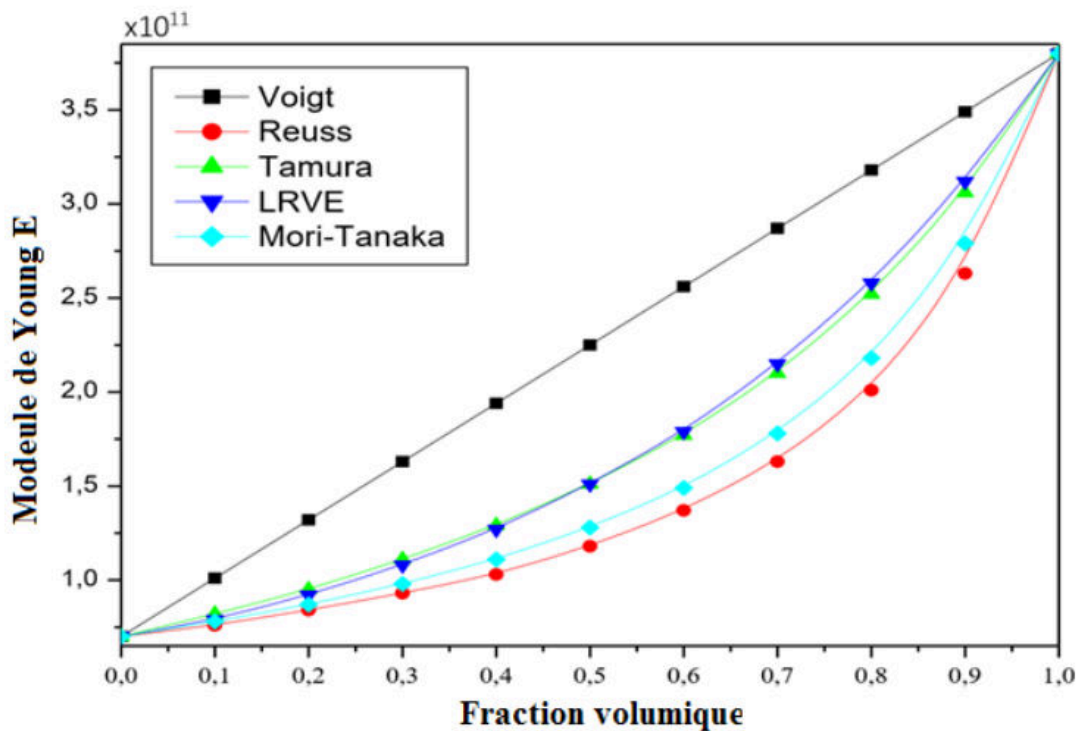


Figure I.22. Variation du module de Young avec différents modèles micromécaniques (Mahmoudi 2018)

Tableau I.3. Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM (Swaminathan et Sangeetha, 2017).

Matériaux		Module d'élasticité E [GPa]	Densité (ρ) [$10^3 \text{ Kg} / \text{m}^3$]
Céramique	Zircone	100 – 250	5 – 6.15
	Alumine	215 – 413	3.5 – 3.98
	Silicium	140 – 180	2.28 – 2.38
	Carbure de tungstène	600 – 686	15.25 – 15.88
	Carbure de bore	362 – 472	2.35 – 2.55
Métal	Fers	80 – 150	6.9 – 7.35
	Alliages d'aluminium	68 – 82	2.5 – 2.9
	Alliages de zinc	68 – 95	4.95 – 7
	Alliages de nickel	150 – 245	7.75 – 8.65
	Aciers	189 – 203	7.85 – 8.1

I.9. Conclusion

Avec la naissance d'un nouveau matériau composite (matériau à gradient fonctionnel FGM) et son utilisation dans les différents domaines et leurs applications, dans ce chapitre nous avons défini le matériau à gradient fonctionnel « FGM », telle que l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs domaines d'application et les techniques de fabrication. Ainsi que les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil, et définit les différents modèles analytiques de calcul des plaques minces et épaisses en FGM, avec les différentes fonctions de cisaillement transversal adopter dans les théories d'ordre élevé (HSDT).

Chapitre II :
Revue des recherches sur les structures
en matériaux FGM

CHAPITRE II

REVUE DES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES EN MATÉRIAUX FGM

II .1. Introduction

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau matériau hétérogène. Il est l'une des formes les plus fonctionnelles des structures composites développées par l'industrie des composites. Les FGM sont considérés comme un matériau structural potentiel pour les industries futures d'engins spatiaux à grande vitesse et de production d'énergie. Les FGM sont des nouveaux matériaux, non homogènes microscopiquement, dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et de façon continue d'une surface à une autre. Dans un FGM, la composition et la structure changent progressivement, ce qui entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau. Néanmoins, dans la fabrication des FGM, des microporosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de températures de solidification entre les constituants des matériaux Zhu et al. (2001). Ces derniers peuvent remettre en cause et modifier le comportement global de telles structures. Wattanasakulpong et al. (2014) ont également donné la discussion sur les porosités qui se développent à l'intérieur des échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges mécaniques. Récemment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont étudié les problèmes linéaires et non linéaires de la vibration des poutres FGM ayant des porosités.

La plaque sur supports élastiques est un modèle courant pour plusieurs types d'ouvrages d'art et d'applications réelles. Par exemple, les modèles de plaques sur fondations élastiques sont toujours utilisés dans l'analyse des fondations des bâtiments, des chaussées en béton armé des autoroutes et des pistes d'aéroport.

En fin de compte, toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol de fondation, et le sol et la structure agissent ensemble pour résister et supporter les charges. La nature intégrale de la fondation et des actions du sol est encore compliquée par la complexité du milieu du sol lui-même.

La présence des fondations élastiques sous les plaques a été aussi représentée dans ce domaine. On peut modéliser n'importe quel problème mathématiquement c.-à-d représenter le problème à étudier par des équations mathématiques. Dans ce chapitre, on présente la formulation théorique du comportement des plaques FGM sur des fondations élastiques, les modèles mécaniques des fondations et une revue de quelques travaux sur les structures FGM sur fondation élastique.

II.2. Porosité

Les porosités sont souvent considérées comme des défauts dans les matériaux d'ingénierie, à moins que les matériaux ne soient délibérément conçus pour avoir des pores pour la fonctionnalité. D'autres applications de la porosité comprennent les briques de revêtement de four, les filtres et les supports de catalyseur. Les FGM sont densifiés pour minimiser la porosité et améliorer les propriétés mécaniques des matériaux. Capacité d'amortissement, coefficient de Poisson, résistances à la traction et à la compression et module d'Young de l'élasticité est inversement proportionnelle à la porosité.

Des séries de techniques de fabrication ont été inventées et évaluées pour minimiser la porosité dans les FGM coulées, notamment : coulée sous vide, coulée sous pression, bullage de gaz inerte au-delà du métal liquide, laminage du matériau après coulée pour fermer les vides, compression et ajout d'hexachloroéthane pour fondre (Larry LH. ,1998).

II.2.1. Définition d'une porosité

La porosité est définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreuse et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension). D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant a priori de la matière gazeuse (tâches noires sur la figure II.1 (a)).

Schoeller (1955), distingue deux catégories de pores représentés sur la figure II.1(b) :

- Les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau ;

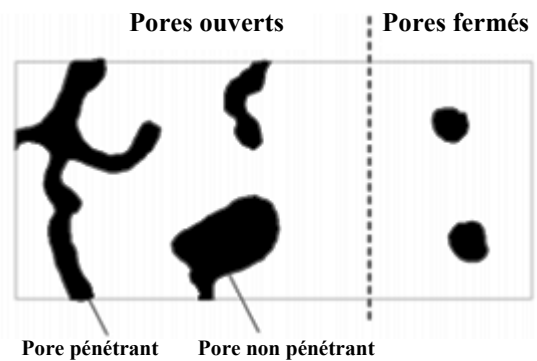
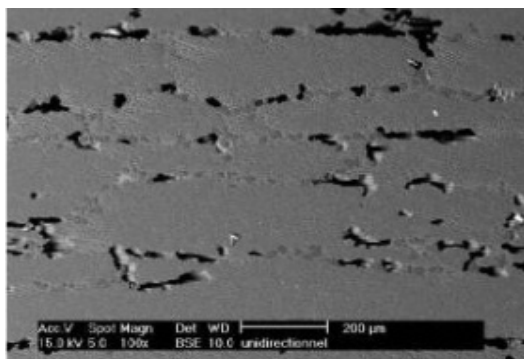
- Les porosités fermées, isolées à l'intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité.

Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreuse. Les nombreuses applications des matériaux poreuses font appel à des tailles de pores qui peuvent varier de l'échelle atomique à l'échelle millimétrique. L'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la figure II.1. (c) Schaefer, (1994). En se référant à la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreuse, une seconde classification des porosités avait préalablement été proposée Schoeller, (1955).

Un micropore est défini comme une cavité de diamètre inférieur à 0,1 μm et une macro pore (porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à 2,5 mm.

Les méso porosités (porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre 0,1 μm et 2,5 mm (figure II.1. (d)). Yohann Ledru, (2009).

La porosité est donc un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Seuls les volumes sont considérés. Néanmoins, il est important de signaler que pour les matériaux composites, le concept de porosité correspond à des interstices de petites tailles (ordre millimétrique et inférieur) par rapport aux fissures, diaclases ou délaminages.



(a)

(b)



Rayon des pores	Classe
$< 0.1 \mu\text{m}$	Microporosité
$0.1 \text{ à } 2500 \mu\text{m}$	Mésoporosité
$> 2500 \mu\text{m}$	Macroporosité

(c)

(d)

Figure II.1. (a) Micrographie des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores, (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores (Benahmed, 2020).

II.2.2. Formation de porosité

Dans les études métallographiques, les pores sont classés en quatre types : les pores ronds, les pores longs et larges, les pores longs et fissurés et les petits pores fissurés (Chen et Engle, 1993). La formation de porosité (Hashim ,1999; & Aqida et al. 2004) est causée par :

- Piégeage de gaz pendant une agitation vigoureuse ;
- Des bulles d'air entrant dans la suspension soit indépendamment, soit comme enveloppe d'air pour les particules de renforcement ;
- De la vapeur d'eau (H₂O) à la surface des particules ;
- Dégagement d'hydrogène ;
- Retrait lors de la solidification.

II.2.3. Mesure de la porosité

L'évaluation de la porosité est possible en mesurant le volume d'air compris à l'intérieur d'un échantillon de matériau poreuse à l'aide des propriétés des gaz parfaits. Beranek (1942) décrit un appareil, le porosimètre, utilisant ce principe. Une méthode dynamique mise au point par Leonard (1948) permet de mesurer la porosité à partir d'un système mécanique. Par la suite Champoux et al. (1991), ont proposé quelques améliorations au porosimètre de Beranek. Henry a développé et installé un dispositif de mesure de la porosité au laboratoire d'acoustique du Mans. L'échantillon est placé dans une enceinte fermée dont on peut faire varier le volume en déplaçant un piston. Une variation ΔV du volume initial V_0 entraîne une variation ΔP de la pression initiale P_0 . Si la transformation est isotherme, le produit PV est constant, et on a Sadouki. M. (2014):

$$P_0 V_0 = (P_0 + \Delta P)(V_0 + \Delta V) \quad (\text{II. 1})$$

On en déduit le volume d'air initial V_0 , puis le volume d'air V_A dans le matériau. La connaissance du volume total V_T fournit la porosité.

$$\alpha = V_A / V_T \quad (\text{II. 2})$$

Fellah et al. (2003), ont proposé des méthodes intéressantes pour la mesure de la porosité. Le principe est basé sur la détection de l'onde réfléchie par la première interface du matériau poreuse.

II.2.4. Différentes lois de distribution de la porosité:

En raison de la présence des vides dans le matériau lors de la production des plaques à gradient de propriétés fonctionnellement, différentes modèles de lois proposés peuvent être utilisés pour modéliser les porosités suivant différentes distribution.

II.2.4.1. Modèle de loi exponentielle :

Dans le cadre d'une étude micromécanique pour modéliser les composites denses alumine-zircone et les composites poreuses alumine-zircone (Pabst & Gregorová, 2004). Proposent une relation entre le module de Young et la porosité:

$$\frac{E}{E_0} = e^{\left(\frac{-B\lambda}{1-\lambda}\right)} \quad (\text{II. 3})$$

Où E_0 est le module de Young sans pores, B prend une valeur arbitraire qui détermine la forme des pores et $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ est la fraction volumique de porosité.

Pour les pores de forme sphérique, la relation exponentielle peut être exprimée par (Pabst & Gregorová, 2004):

$$\frac{E}{E_0} = e^{\left(\frac{-2\lambda}{1-\lambda}\right)} \quad (\text{II. 4})$$

Zenkour dans une étude des plaques sandwich avec porosités modifier cette relation pour qu'elle devienne comme suit (Zenkour, 2018):

$$E = E_0 e^{\left(\frac{z+1}{h} \frac{\xi}{2}\right)^{\xi} \frac{-2\lambda}{1-\lambda}} \quad (\text{II. 5})$$

Où E_0 est le module de Young d'une plaque homogène et ξ indique le paramètre d'inhomogénéité qui peut être supérieur ou égal à zéro. Notez que E_0 et $E_0 e^{\xi}$ sont les modules de Young des deux matériaux dont la plaque est composée.

Sobhy & Zenkour (2019) ; dans l'étude de l'effet de porosité et d'inhomogénéité sur le flambement et la vibration des nano plaques FGM, ont proposés les propriétés effectives du matériau peuvent être présentées comme suit:

$$E(z) = E_m e^{\xi \left(\frac{z+1}{h+2}\right)^n - \frac{2\lambda}{1-\kappa}}, \quad \xi = \ln \frac{E_c}{E_m} \quad (\text{II. 6.a})$$

$$\rho(z) = \rho_m e^{\xi \left(\frac{z+1}{h+2}\right)^n - \frac{2\lambda}{1-\kappa}}, \quad \xi = \ln \frac{\rho_c}{\rho_m}, \quad \kappa \geq 0 \quad (\text{II. 6.b})$$

Où l'indice m désigne le métal, c désigne la céramique, κ représente un paramètre d'inhomogénéité et représente la densité. Notez que la surface inférieure est en métal, tandis que la surface supérieure est en céramique. De plus, la nano plaque est entièrement en céramique poreuse lorsque $\kappa = 0$ alors qu'elle devient entièrement métallique avec des pores lorsque $\kappa \cong \infty$.

II.2.4.2. Modèle de loi Trigonométrique :

Pour l'analyse du flambement d'une poutre poreuse 2D, Magnucki & Stasiewicz, (2004) ont proposés une relation trigonométrique, pour une distribution symétrique parabolique de la porosité comme suit:

○ *Distribution symétrique non uniforme parabolique*

$$E(y) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi\eta)] \quad (\text{II. 7.a})$$

$$G(y) = G_1 [1 - e_0 \cos(\pi\eta)] \quad (\text{II. 7.b})$$

Où : $e_0 = 1 - E_0/E_1$, avec e_0 est le coefficient de porosité de la poutre.

E_0 et E_1 sont les modules de Young à $y=0$ et $y=\pm h/2$, respectivement ;

G_0 et G_1 sont les modules de cisaillement (module de rigidité) pour $y=0$ et $y=\pm h/2$, respectivement ;

$$G_j = E_j / [2(1+\nu)] \quad (\text{II. 8})$$

G_j : Est la relation entre les modules d'élasticité pour $j=0 ; 1$,

Avec : ν est le coefficient de Poisson (supposé constant sur toute l'épaisseur de la poutre).

η : Coordonnée sans dimension, avec $\eta = y/h$.

h : L'épaisseur de la poutre.

Magnucka-Blandzi (2010), à développe cette formule pour une étude dynamique d'une plaque métallique circulaire. Jabbari et al. (2013), ont analysé le flambement d'une plaque circulaire poreuse et ont modifiant la distribution symétrique à une distribution asymétrique décroissante.

○ *Distribution asymétrique non uniforme décroissante*

$$E(z) = E_0 \left[1 - e_1 \cos \left(\left(\frac{\pi}{2h} \right) \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \right] \quad (\text{II. 9.a})$$

$$G(z) = G_0 \left[1 - e_1 \cos \left(\left(\frac{\pi}{2h} \right) \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \right] \quad (\text{II. 9.b})$$

Ou : $e_1 = 1 - \frac{G_1}{G_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0}$, et e_1 est le coefficient de porosité de la plaque ($0 < e_1 < 1$),

E_1 et E_0 sont les modules d'élasticité de Young à $z = -h/2$ et $z = h/2$, respectivement,

G_1 et G_0 sont les modules de cisaillement à $z = -h/2$ et $z = h/2$, respectivement.

$$E_j = 2G_j(1 + \nu) \quad (\text{II. 10})$$

E_j : Est la relation entre les modules d'élasticité et le module de cisaillement pour $j = 0 ; 1$,

Avec : ν est le coefficient de Poisson, qui est supposé constant sur toute l'épaisseur de la plaque. Les propriétés mécaniques du matériau poreuse varient selon l'épaisseur de la plaque ($G_0 \geq G_1$).

Mojahedin A. et al. (2016), ont analysés le flambement d'une plaque circulaire poreuse et (Zhao et al. 2019), ont proposes trois distribution trigonométrique dans une étude des vibrations libres d'une plaque rectangulaire poreuse à gradation fonctionnelle avec des conditions aux limites élastiques uniformes.

Les différents types de distributions des porosités sont de type I (distribution symétrique non uniforme), de type II (distribution asymétrique non uniforme) et de type II (distribution uniforme), la variation du module d'élasticité $E(z)$, du module de cisaillement $G(z)$ et de la

densité de masse $\rho(z)$ sont exprimées en fonction des coordonnées le long de la direction de l'épaisseur. Les expressions sont présentées dans les équations suivantes:

○ **Distribution symétrique non uniforme parabolique (Type I)**

$$E(z) = E_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] + E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II. 11.a})$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] + G_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II. 11.b})$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] + \rho_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II. 11.c})$$

○ **Distribution asymétrique non uniforme décroissante (Type II)**

$$E(z) = E_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{II. 12.a})$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + G_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{II. 12.b})$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + \rho_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{II. 12.c})$$

○ **Distribution uniforme (Type III)**

$$E(z) = E_1 [1 - \alpha] + E_0 \alpha = E_1 [1 - e_0 \alpha] \quad (\text{II. 13.a})$$

$$G(z) = G_1 [1 - \alpha] + G_0 \alpha = G_1 [1 - e_0 \alpha] \quad (\text{II. 13.b})$$

$$\rho(z) = \sqrt{\rho_1^2 (1 - \alpha) + \rho_0^2 \alpha} = \rho_1 \sqrt{1 - e_0 \alpha} \quad (\text{II. 13.c})$$

Où : $e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1} = 1 - \frac{G_0}{G_1}$ et e_0 est le coefficient de porosité de la plaque ($0 < e_0 < 1$), le rapport entre les valeurs maximales E_1 ou minimales E_0 du module de Young et les valeurs maximales G_1 ou minimales G_0 du module de cisaillement est établi par

$G = \frac{E_i}{2(1+\nu)}$, ($i=0, 1$) où ν le coefficient de poisson qui est constant dans le sens de

l'épaisseur de la plaque rectangulaire.

Avec : $e_m = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$ et e_m est le coefficient de densité de la plaque ($0 < e_m < 1$), lié à la masse volumique, dans lequel les valeurs minimale et maximale de la densité de la plaque sont notées respectivement ρ_0 et ρ_1 . Pour une mousse métallique à cellules ouvertes, la

relation d'équation $\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^2$ existe. Par conséquent, la relation entre e_0 et e_m peut être exprimée par l'équation suivante:

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (\text{II. 14})$$

En termes de distribution poreuse uniforme, les propriétés matérielles de la plaque rectangulaire FGM ne changent pas dans le sens de l'épaisseur. Spécifiquement, les propriétés du matériau sont déterminées par le coefficient de porosité e_0 et le coefficient α dans les équations (II. 13.a,b et c) qui s'exprime comme:

$$\alpha = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (\text{II. 15})$$

II.2.4.3. Modèle de loi de puissance :

Dans ce modèle la loi de puissance, la fraction volumique est utilisée pour représenter la distribution de la porosité, par fois combiné à des lois logarithmiques ou trigonométriques.

La formule proposée des propriétés matérielles effectives est sous la forme suivante:

➤ **Matériaux sans porosité:**

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \quad (\text{II. 16})$$

➤ **Matériaux avec porosité:**

$$P(z) = P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) + P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{II. 17})$$

Avec:

$$V_c + V_m = 1 \quad \text{et} \quad V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{II. 18})$$

Les propriétés matérielles du matériau sont notées $P(z)$. P_c et P_m définissent respectivement les propriétés matérielles de la céramique et du métal, V_c et V_m désignent respectivement la fraction volumique de la céramique et du métal.

Wattanasakulpong & Ungbhakorn, (2014) ont analysent la vibration linéaire et non linéaire des poutres FGM avec porosité, (Yahia et al. 2015) étudient la propagation des ondes dans une plaque FGM avec porosité, (Shojaeefard et al. 2017) analysent la vibration libre et le flambement thermique d'une plaque FGM poreuses et (D. Shahsavari et al. 2018.a) étudient le flambement de cisaillement d'une nano plaque avec porosité, et pour une théorie 3D destiné à l'étude des vibration libre d'une plaque FG (D. Shahsavari et al. 2018.b) proposent une loi de puissance de fraction volumique avec porosité:

○ **Matériau FGM imparfaite uniforme (type A):**

L'influence des porosités, qui peuvent exister à l'intérieur des matériaux de la plaque FG pendant la production, est incluse. La règle de mélange modifiée pour la plaque FG à deux phases avec des porosités uniformes peut être exprimée comme :

$$P(z) = P_m \left(1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{II. 19.a})$$

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{\alpha}{2} (P_c + P_m) \quad (\text{II. 19.b})$$

Dans lesquels les indices de c et m représentent respectivement la céramique et le métal. De plus, P est l'indice de fraction volumique (indice de loi de puissance) qui définit la caractérisation de la variation du matériau à travers l'épaisseur de la plaque, et α montre la fraction volumique de porosité tel que ($\alpha \leq 1$). P_c et P_m sont les propriétés matérielles de la céramique et du métal, respectivement.

○ **Matériau FGM imparfaite non uniforme (type B) :**

Pour le deuxième modèle de distribution, les porosités peuvent s'étendre fonctionnellement au cours de la direction de l'épaisseur de la plaque FG comme suit :

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{\alpha}{2} (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{II. 20})$$

○ **Matériau FGM imparfaite logarithmique non uniforme (type C):**

Le modèle non uniforme développé avec une fonction logarithmique est proposée pour la distribution des porosités comme suit:

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \log \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{II. 21})$$

Kim. J et al. (2019) étudient la flexion, la vibration libre et le flambement des micro-plaques poreuses à gradient de propriétés fonctionnelles et proposent une loi de puissance combinée à des fonctions trigonométrique comme suites:

$$P(z) = [(P_t - P_b) f(z) + P_b] (1 - \psi(z)) \quad (\text{II. 22.a})$$

$$f(z) = V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{II. 22.b})$$

Où P_t et P_b sont les propriétés des matériaux sur les surfaces supérieure et inférieure, n est l'indice de puissance et $\psi(z)$ est une fonction de distribution de porosité. Dans cette étude, trois différents types de distributions de porosité sont considérés :

- ***Distribution symétrique non uniforme parabolique (Type I)***

$$\psi(z) = \phi \cos \left[\pi \left(\frac{z}{h} \right) \right] \quad (\text{II. 23})$$

- ***Distribution asymétrique non uniforme décroissante (Type II)***

$$\psi(z) = \phi \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{II. 24})$$

- ***Distribution asymétrique non uniforme croissante (Type II)***

$$\psi(z) = \phi \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{II. 25})$$

Où ϕ : Est la porosité.

Une autre loi de puissance combinée à des fonctions trigonométrique est proposé par Chen D. et al. (2017) pour l'étude la vibration libre et le post flambement des poutres FGM poreuses, et Wan-shen Xiao et al. (2018) pour l'analyse du flambement et post-flambement des nano-poutres poreuses à gradient de propriétés, la loi est présentée comme suites:

$$P_f = P(z) \left(1 - \frac{V_p}{2} \right) \quad (\text{II. 26})$$

Avec:

$$P(z) = (P_2 - P_1) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + P_1 \quad (\text{II. 27})$$

Il convient de mentionner que pour différentes distributions de porosité, V_p (fraction volumique de porosité) peut être écrit comme (Chen et al. 2017) :

$$V_p = \begin{cases} \phi & \text{répartition uniforme} \\ \phi \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) & \text{distribution symétrique} \\ \phi \cos\left(\pi \frac{z}{h}\right) & \text{distribution parabolique} \\ \phi \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) & \text{distribution décroissante} \end{cases} \quad (\text{II. 28})$$

II.2.5. Liens entre taux volumique de porosité et propriétés mécaniques d'un stratifié

Très recherchée dans la fabrication des mousses ou des membranes filtrantes, la porosité est en revanche néfaste aux matériaux composites hauts performances. L'impact de ce défaut a fait l'objet de beaucoup d'attention, comme en atteste le nombre important d'études sur ce sujet. La présence de porosité dans les pièces composites est un fait inévitable. C'est ainsi que des limites furent fixées suivant les applications : dans les structures aérospatiales travaillant en dynamique, un taux de porosités dépassant 1% n'est pas tolérable, Ling Liu et al. (2006); contrairement à d'autres applications où un niveau de 5% et même plus peut être toléré Ling Liu et al. (2006).

Tous les auteurs sont d'accord pour affirmer qu'en dessous d'un certain pourcentage volumique, compris entre 0.5% et 1% suivant le matériau étudié, la porosité n'a pas d'influence sur le comportement de la pièce si elle est bien répartie dans l'espace. En revanche, pour des taux de porosité plus élevés, les propriétés mécaniques de la pièce sont affectées de manière significative et en particulier le cisaillement inter laminaire. En effet, la résistance au cisaillement inter laminaire, ILSS (Inter Laminar Shear Stress), est très sensible à la présence de ces inclusions gazeuses. Sa diminution représentée à la figure II.2, a été mesurée en fonction du taux de porosité par plusieurs chercheurs Yokota (1978) ; Yoshida et al. (1986) ; Tang et al. (1987) ; Bowles et al. (1992) ; Costa et al. (2001) ; Liu et al. (2006 a).

La diminution moyenne de l'ILSS a été estimée en moyenne à 6% par unité volumique de taux de porosité pour des stratifiés carbone/époxy. On peut remarquer de grandes disparités suivant les études considérées. Celles-ci sont dues essentiellement à la nature des matériaux des différentes études, tissu pré imprégné (Costa), ou nappes avec différents types de fibres T300 (Bowles), T700 (Liu), et différents types de résine de classe 120°C (Yoshida) ou 180°C (Autres).

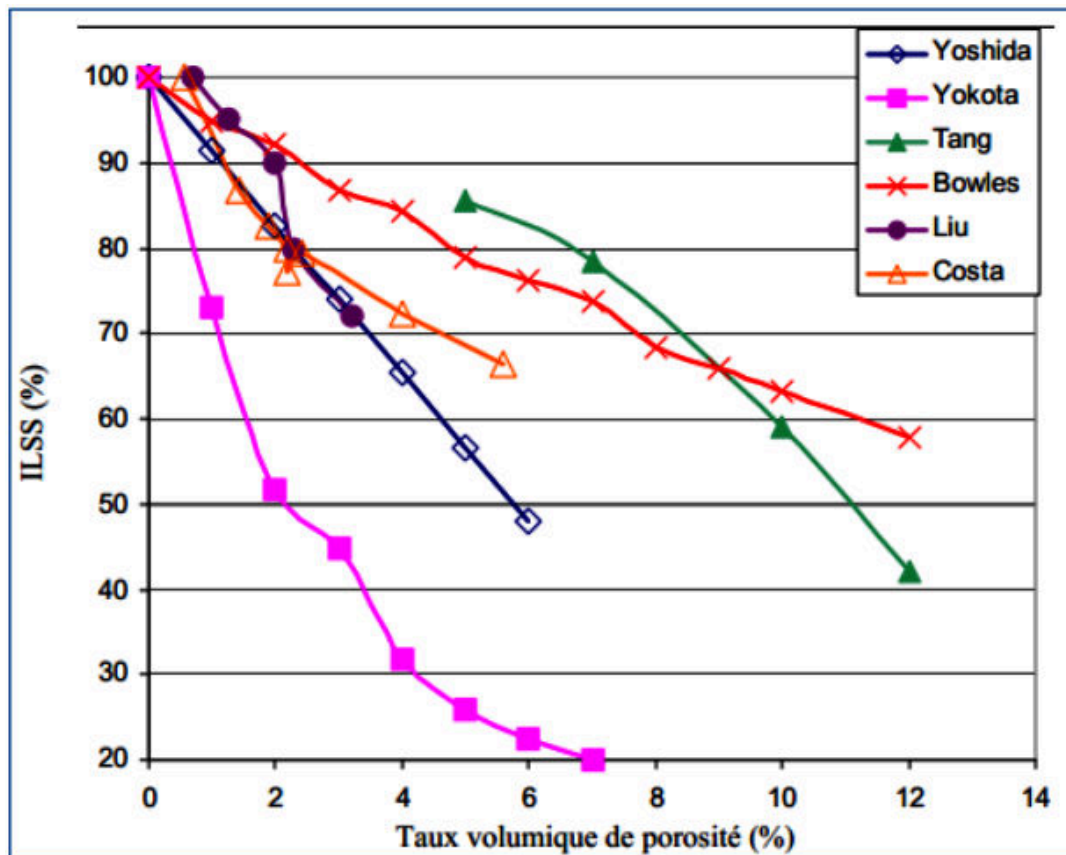


Figure II.2. Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites (Olivier et al. 1995).

L'étude la plus réaliste permettant d'expliquer la diminution de l'ILSS en fonction de l'augmentation du taux volumique de porosité est proposée par Wisnom et al. (1996). Ces travaux mettent en évidence l'initiation des fissures à partir des porosités dès que ces dernières sont suffisamment grandes (diamètre équivalent > 0.2 mm). Les résultats présentés montrent aussi que la présence de porosité diminue la surface de contact entre les fibres et la matrice, ce qui favorise la rupture de la pièce en cisaillement inter laminaire.

Plusieurs modèles sont proposés afin de prévoir numériquement la valeur de la contrainte à rupture en cisaillement inter laminaire d'une pièce en fonction de son pourcentage volumique de porosité Bowles et al. (1992) ; Yoshida et al. (1986). Cependant, quel que soit le modèle considéré, les résultats théoriques diffèrent sensiblement des résultats expérimentaux. Ceci est dû aux nombreuses hypothèses simplificatrices utilisées pour l'élaboration de certaines équations, notamment concernant la forme des porosités (sphérique ou cylindrique), et de leur répartition supposée homogène au sein de la pièce. Une telle répartition est en réalité rarement constatée. De plus, il est signalé que la dispersion des

résultats augmente avec le taux volumique de porosité, ce qui rend difficile la comparaison des données expérimentales et théoriques pour des taux de porosité supérieurs à 10%.

En revanche, en s'appuyant sur des paramètres énergétiques d'initiation et de propagation de fissures, le modèle développé par Wisnom et al. (1996) semble bien plus en accord avec la réalité pour modéliser la décroissance de l'ILSS en fonction du taux volumique de porosité.

D'après toutes ces études, il est indéniable que la porosité affecte le comportement en cisaillement inter laminaire du matériau composite, dès que le pourcentage volumique de ce défaut est supérieur à 1%. Les autres caractéristiques mécaniques (traction, compression, cisaillement plan) sont également affectées par la présence de porosité, mais de façon moindre, bien que non négligeable Harper et al. (1987) ; Liu et al. (2004). De manière générale, une augmentation du taux volumique de porosité entraîne une diminution des propriétés mécaniques du matériau. L'une des raisons évoquées (Olivier, 1994 ; Olivier et al. 1995) notamment pour expliquer la chute de la contrainte à rupture en traction et en compression, concerne la déformation locale des fibres due essentiellement à l'apparition de ces porosités et à leurs mouvements au sein de la matrice durant le cycle de cuisson. On peut aussi raisonnablement penser que la présence de porosité au sein du stratifié modifie à la fois le transfert d'effort entre la résine et le renfort mais aussi la cohésion de celui-ci. Cette hypothèse reste cependant encore à démontrer.

Dans le milieu industriel aéronautique, il est admis qu'une pièce structurale comportant un taux volumique de porosité supérieur à 2% doit être rebutée. On comprend dès lors l'intérêt de cette étude pour minimiser au maximum l'apparition de ces défauts, apparition qui peut être due à plusieurs causes.

En effet, plusieurs études montrent que les caractéristiques mécaniques des composites sont sensibles à la teneur en porosité, EL-Habib Ahmed, (2006). Dans leurs recherches sur la détermination de la pression de cuisson optimale aboutissant à un minimum de porosité, Olivier et al. (1995) ont étudié en même temps les principales causes et effets de la porosité sur les composites carbone/époxy. Deux principales causes engendrant de la porosité ont été citées EL-Habib Ahmed, (2006):

- ✓ La première est l'emprisonnement d'air lors de l'imprégnation des fibres par la résine.
- ✓ La seconde est due à l'évaporation des substances volatiles contenues dans le système matriciel.

Après ces deux amorces, l'augmentation du taux de porosité peut survenir à partir de la diffusion de l'air ou par l'agglomération des porosités voisines.

II.2.6. Revue de quelques travaux sur les structures FGM avec porosités

Mahmoudi A. et al. (2017) ont fait une solution analytique pour l'étude du comportement vibratoire des plaques en matériau fonctionnellement gradué (FGM), et ont pris en considération des porosités qui peuvent apparaître durant le processus de fabrication de ces plaques. Une méthode basée sur la théorie d'ordre élevé présentée pour étudier la vibration libre des plaques FGM reposant sur fondation élastique. Benferhat Rabia, (2016) à utilisé une nouvelle théorie raffinée est proposée pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées avec porosités, cette dernière peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. Hadji et al. (2015 b) ont proposé une théorie de déformation de cisaillement exponentielle raffinée pour l'analyse de la vibration libre des poutres en FGM avec porosités.

Kadoli, R. et al. (2008) ont étudié un champ de déplacement basé sur la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse de comportement statique des poutres à gradation fonctionnelle FGM (métal/céramique) à température ambiante. Les poutres FGM avec une variation de la fraction volumique du métal ou de la céramique en fonction de l'exposant de la loi de puissance sont considérées. En utilisant le principe de l'énergie potentielle stationnaire, la forme d'éléments finis de l'équation d'équilibre statique pour la poutre FGM est présentée. Deux matrices de rigidité sont ainsi dérivées de sorte que l'une d'elles réfléchisse l'influence de la rotation de la normale et l'autre de la rotation de cisaillement. Les résultats numériques sur la déflexion transversale, les contraintes axiales et de cisaillement dans une poutre FGM d'épaisseur moyenne sous une charge répartie uniforme pour des conditions aux limites encastées- encastées et simplement appuyées sont discutés en profondeur. L'effet de l'exposant de la loi de puissance pour diverses combinaisons de la poutre FGM métal-céramique sur la déflexion et les contraintes est également commenté.

Les études révèlent que, selon que le chargement repose sur la face riche en céramique ou sur la face riche en métal de la poutre, la flèche statique et les contraintes statiques dans la poutre ne restent pas les mêmes.

Wattanasakulpong, N et al. (2014). Ont présenté les problèmes de vibrations linéaires et non linéaires posés par des poutres soumises à des contraintes élastiques en matériaux à

gradation fonctionnelle (FGM). En raison des porosités pouvant se produire à l'intérieur des FGM pendant la fabrication, il est donc nécessaire de considérer le comportement vibratoire des poutres ayant des porosités dans cette étude. La loi de mélange est modifiée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des poutres fonctionnellement graduées avec des phases de porosité. La méthode de transformation différentielle (DTM) est utilisée pour résoudre les réponses vibratoires linéaires et non linéaires des poutres FGM avec différents types de supports élastiques. Les effets de la distribution des propriétés des matériaux, des constantes de ressort et de la fraction volumique de porosité sur les fréquences linéaires et non linéaires des poutres FGM sont également présentées et discutés en détail.

Atmane, H et al. (2017) ont utilisé une nouvelle théorie efficace pour l'analyse de la flexion, de la vibration libre et du flambement des poutres en matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sur une fondation élastique à deux paramètres.

La théorie présentée prend en compte les effets de la déformation de cisaillement et l'étirement de l'épaisseur par une variation parabolique de tous les déplacements à travers l'épaisseur, et satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement. En raison des porosités, pouvant survenir à l'intérieur des FGM pendant la fabrication, il est donc nécessaire de prendre en compte les comportements de la vibration, de la flexion et du flambement des poutres ayant des porosités. L'équation du mouvement pour les poutres FGM est obtenue selon le principe de Hamilton. Des solutions sous forme fermée sont obtenues en utilisant la technique de Navier, puis les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant les résultats des problèmes de valeurs propres. La validité de cette théorie est étudiée en comparant certaines théories présentes dans la littérature. On peut conclure que la théorie proposée par Atmane, H et al. (2017) est simple et précise pour résoudre les comportements de la flexion, de la vibration libre et du flambement des poutres sandwich FGM.

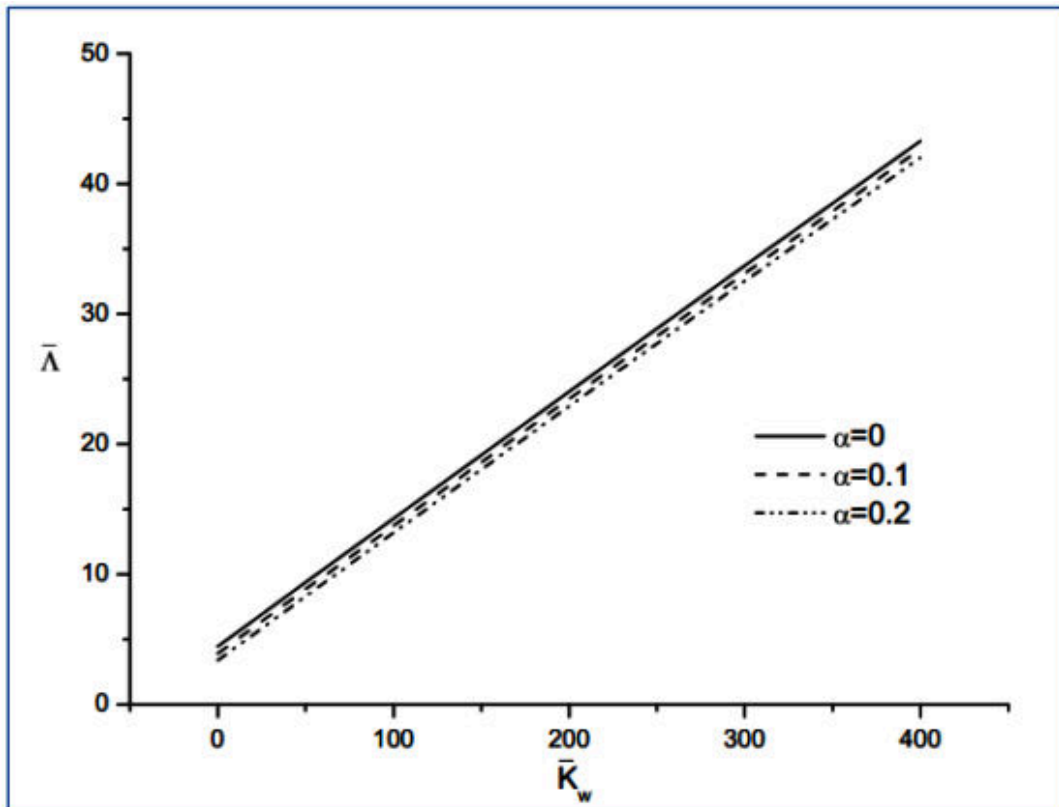


Figure II.3. Variation du paramètre de charge de flambement non dimensionnel en fonction du paramètre \bar{K}_w de Winkler et le coefficient de porosité (Benahmed, 2020).

La figure II.3 présente la variation du paramètre de charge de flambement non dimensionnelle en fonction du paramètre de Winkler, pour trois valeurs de la fraction volumique de porosité $\alpha = 0$, $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.2$. On peut déduire de cette courbe que le paramètre de charge de flambement augmente linéairement avec le paramètre de fondation de Winkler. Cependant, ce paramètre de charge de flambement est inversement proportionnel au coefficient de porosité.

Benferhat, R et al. (2016). Se concentre sur le comportement de l'analyse statique des plaques en matériaux à gradation fonctionnel (FGM) avec des porosités pouvant éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux (FGM) lors de leur fabrication. À cette fin, une nouvelle théorie raffinée des plaques est utilisée, elle ne contient que quatre inconnues, contrairement à cinq inconnues pour les autres théories. Ce nouveau modèle répond à la nullité de la contrainte de cisaillement transverse aux niveaux des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal le long de l'épaisseur de la plaque est prise en compte dans cette

analyse ; la distribution des propriétés matérielles de la plaque FGM varie selon la loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

La loi de mélange est modifiée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FG avec des phases de porosité. La validité de cette théorie est étudiée en comparant certains des résultats avec d'autres théories d'ordre supérieur rapportées dans la littérature, l'influence du paramètre du matériau, la fraction volumique de la porosité et le rapport d'épaisseur sur le comportement mécanique de la plaque P-FGM sont représentés par des exemples numériques.

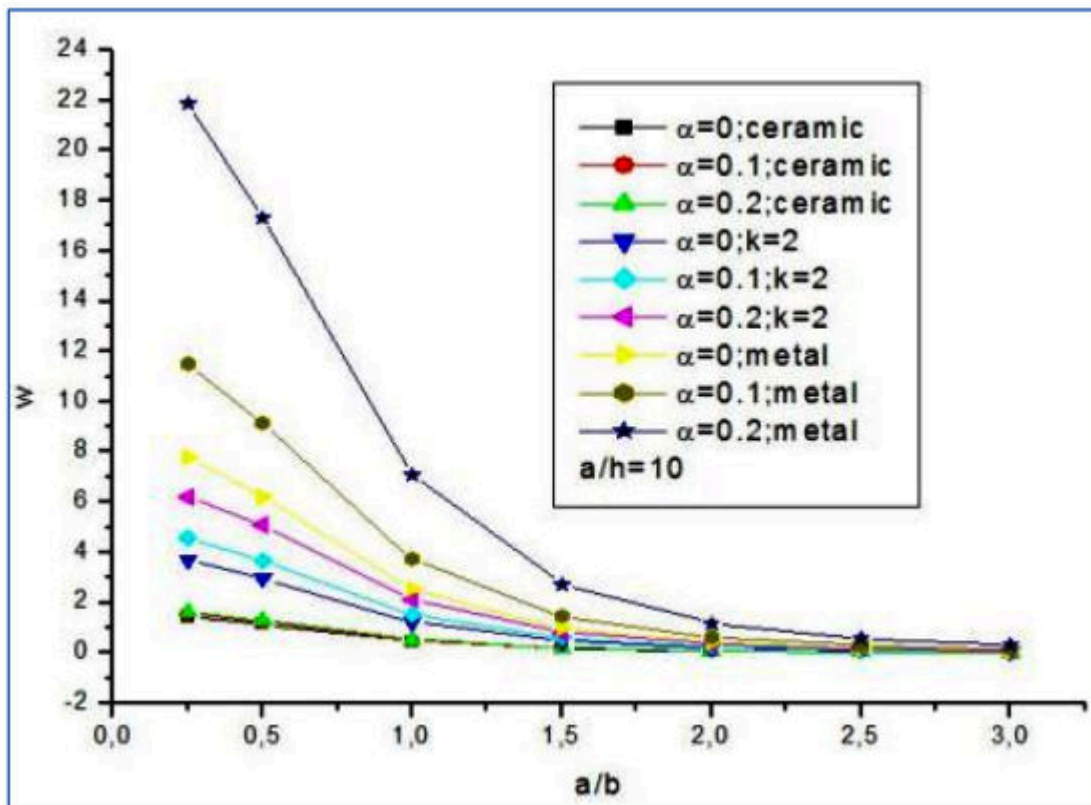


Figure II.4. Variation de la déflexion non dimensionnelle (w) en fonction du rapport (a/b) d'une plaque FGM parfaite et imparfaite (Benahmed, 2020).

La figure II.4 montre la variation de la déflexion non dimensionnelle (w) en fonction du rapport (a/b), respectivement pour des plaques FG parfaites et imparfaites simplement appuyées, sur la base de la théorie des plaques. La flèche est maximale pour la plaque imparfaite FG ($\alpha = 0.1$) et ($\alpha = 0.2$) et minimale pour la plaque FG parfaite ($\alpha = 0$).

Benferhat, R et al. (2016). Ont étudié l'effet de la porosité sur le comportement de la flexion et de la vibration libre d'une plaque fonctionnellement graduée supportée et reposant sur la fondation de Winkler-Pasternak est étudié analytiquement.

La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FGM avec phases de porosité. L'effet dû au cisaillement transversal est inclus en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement. Le nombre de fonctions inconnues impliquées dans cette théorie n'est que de quatre contre cinq ou plus dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement.

Le coefficient de Poisson est maintenu constant. Sur la base de la théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale, la position de la surface neutre est déterminée et l'équation du mouvement pour les plaques rectangulaires FG reposant sur une fondation élastique basée sur une surface neutre est obtenue par l'énergie potentielle totale minimale et le principe de Hamilton. La convergence de la méthode est démontrée et pour valider les résultats, des comparaisons sont effectuées avec les solutions disponibles pour les matériaux isotropes et fonctionnellement gradués (FGM). L'effet de la fraction volumique de porosité sur les plaques Al / Al_2O_3 et $Ti-6Al-4V$ d'oxyde d'aluminium est présenté sous forme graphique. Les rôles joués par l'indice de fraction volumique constitutive, les paramètres de rigidité de la fondation et la géométrie de la plaque sont également étudiés.

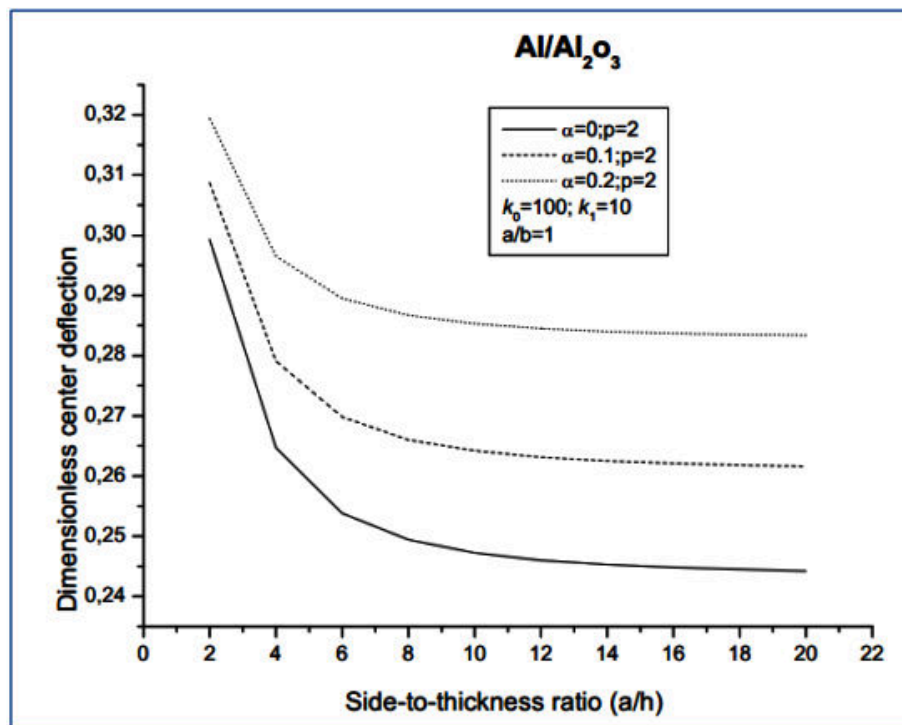


Figure II.5. Effet de la porosité sur la déflexion centrale sans dimension en fonction du rapport latéral à l'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM (Benahmed, 2020).

La Figure II.5 montre l'effet de la porosité sur la déflexion centrale sans dimension en fonction du rapport latéral à l'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM. Comme on peut le constater, l'effet de la porosité sur la déflexion centrale augmente avec l'augmentation du taux d'épaisseur. L'augmentation de la valeur du coefficient de porosité entraîne une augmentation de la déflexion centrale.

Barati, M. R. (2017) Ont présente le comportement en vibration forcée de nano-plaques en mousse métallique poreuse sur un milieu élastique est étudié via une théorie de plaque à quatre variables. Différentes distributions de porosité appelées uniformes, symétriques et asymétriques sont considérées. La théorie du gradient de contrainte non locale (NSGT) contenant deux paramètres d'échelle est utilisée pour la modélisation en fonction de la taille des nano-plaques poreuses. La théorie des plaques satisfait l'effet de déformation de cisaillement et elle a des variables de champ plus faibles que la théorie des plaques du premier ordre. Le principe de Hamilton est utilisé pour dériver les équations gouvernantes. Les résultats obtenus par la méthode de Galerkin sont vérifiés avec ceux fournis dans la littérature. Les effets du paramètre non local, du gradient de déformation, des paramètres de fondation, du chargement dynamique, des distributions de porosité et du coefficient de porosité sur la déflexion dynamique et les fréquences de résonance des plaques nanométriques en mousse métallique sont examinés.

II.3. Réponses des plaques sur fondations élastiques

La plaque sur supports élastiques est un modèle courant pour plusieurs types d'ouvrages d'art et d'applications réelles. Par exemple, les modèles de plaques sur fondations élastiques sont toujours utilisés dans l'analyse des fondations des bâtiments, des chaussées en béton armé des autoroutes et des pistes d'aéroport.

En fin de compte, toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol de fondation, et le sol et la structure agissent ensemble pour résister et supporter les charges. La nature intégrale de la fondation et des actions du sol est encore compliquée par la complexité du milieu du sol lui-même.

De plus, les propriétés des matériaux de construction structurelle sont bien connues de sorte que la rigidité de la structure peut être facilement déterminée, compte tenu de la taille des éléments et de la géométrie de la structure Fai, (1988).

D'autre part, les propriétés du sol sont très difficiles à déterminer car en plus des caractéristiques mentionnées précédemment, les sols sont des matériaux «mous», ce qui rend

très difficile l'obtention d'échantillons pour les tests qui produiront des résultats de laboratoire parallèles au comportement réel du sol.

Deux autres facteurs de complication sont que les propriétés des matériaux du sol dépendent des contraintes et que la formation du sol se compose en pratique de couches de matériaux avec des relations constitutives et des propriétés de matériau différentes Worku and Degu, (2010).

II.3.1. Modèles de fondations élastiques

La modélisation élastique d'un lit de sol est basée sur une hypothèse de comportement de la réaction de fondation sous chargement. La relation la plus courante entre les forces et les déformations est linéaire en raison de la simplicité de la solution des équations.

La réaction de fondation élastique peut être représentée analytiquement en utilisant des modèles mécaniques. L'idéal des modèles mécaniques est la plate-forme en tant qu'assemblage de quelques éléments mécaniques dans divers arrangements comme des ressorts, une plaque en flexion pure, une plaque en cisaillement pur et d'autres dispositions pour simuler le comportement de la plate-forme. Le développement de ces modèles part du modèle à paramètre unique le plus simple et devient plus complexe à mesure que le nombre de paramètres augmente avec des éléments mécaniques supplémentaires afin de rapprocher les modèles de la réalité. Selon le nombre de paramètres utilisés pour décrire le comportement des fondations, les modèles mécaniques peuvent être classés en trois; modèles à un, deux et trois paramètres (Worku, 2010).

II.3.1.1. Modèles à paramètre unique

II.3.1.1.1. Modèle de Winkler

Le modèle le plus simple du comportement élastique linéaire du sol support est proposé par Winkler (1867). Ce modèle suppose que le déplacement de surface du milieu du sol est directement proportionnel à la contrainte qui lui est appliquée et complètement indépendant des contraintes ou des déplacements en d'autres points de l'interface sol-fondation (Straughan, 1990).

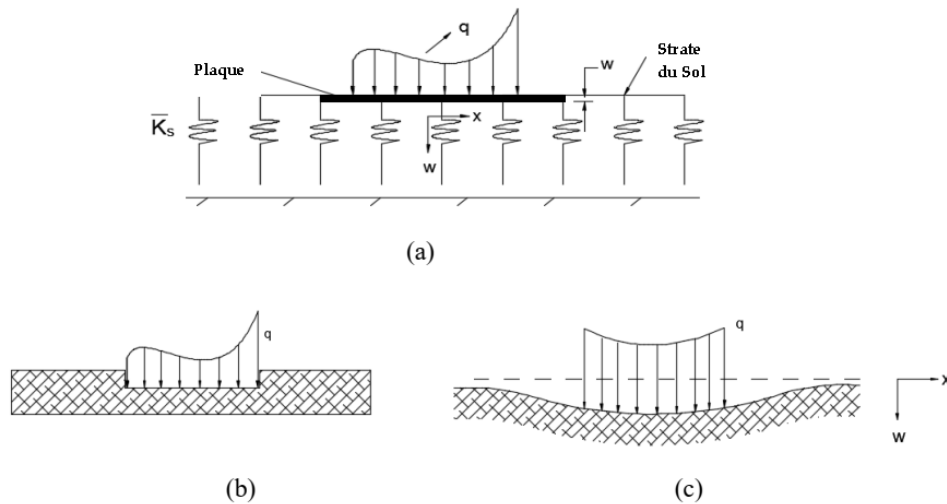


Figure II.6. Déplacements de la surface dus à :

- (a) une charge répartie sur un modèle de fondation rigide-Winkler, (b) une charge uniforme sur un modèle de fondation flexible-Winkler, (c) une déformation en forme de cuvette réelle.

$$q(x, y) = \bar{k}_s w(x, y) \quad (\text{II. 29})$$

Où w : La déflexion verticale du sol ;

q : Contrainte appliquée à ce point ;

\bar{k}_s : Module de réaction du sol de fondation ou coefficient de réaction du sol de fondation.

Pour les plaques, l'application du modèle de Winkler implique la résolution d'une équation différentielle du quatrième ordre.

$$q(x, y) = \bar{k}_s w(x, y) + D \nabla^4 w(x, y) \quad (\text{II. 30})$$

Où D : La rigidité de la plaque en flexion.

Le modèle est constitué de ressorts linéairement élastiques avec une raideur de \bar{k}_s placés à intervalles discrets sous la plaque. Chacun des ressorts ne sera alors déformé que par la pression directement appliquée sur lui, tandis que les ressorts adjacents restent inchangés. Par exemple, si une telle fondation est soumise à une charge superficielle partiellement répartie "q" les ressorts ne seront pas affectés au-delà de la zone chargée. De plus, on peut voir que les déplacements d'une région chargée seront constants que le sol soit soumis à une charge infiniment rigide ou à une charge flexible uniforme comme le montrent les figures II.6 a et b.

Cependant, il a été observé que pour la plupart des matériaux en raison de l'occurrence inhérente de la répartition des charges, le déplacement de la surface de la fondation est en forme de plat (une courbe globale concave vers le haut) comme le montre la figure II.6 c.

Ainsi, en comparant le comportement du mode théorique et du fondement réel, on voit que ce modèle souffre essentiellement d'un manque complet de continuité dans le support médium.

En plus du comportement de discontinuité du modèle, il est également très difficile de déterminer la valeur du module de réaction de la couche de fondation \bar{k}_s .

Une revue de la littérature Fai (1988) ; Straughan (1990), et de nombreux chercheurs ont travaillé au développement de techniques de détermination de \bar{k}_s .

L'un des articles les plus définitifs a été proposé par Terzaghi qui a présenté des tableaux de valeurs recommandées de \bar{k}_s , montrant que le module de réaction du sol de fondation dépend des dimensions de la zone sur laquelle agit la réaction du sol de fondation, et les effets de taille ont été incorporés dans les équations.

Dans une tentative de développer une méthode plus exacte pour déterminer \bar{k}_s , Biot (1937) a résolu le problème d'une poutre infinie avec une charge concentrée reposant sur une plate-forme tridimensionnelle en évaluant le moment de flexion maximum dans la poutre. Biot a constaté qu'une bonne corrélation peut être obtenue avec le modèle de Winkler pour le cas du moment maximal en définissant \bar{k}_s comme suit (Straughan, 1990).

$$\bar{k}_s = \frac{0.95 E_s}{(1-\nu_s^2)} \left(\frac{E_s B^4}{(1-\nu_s^2) E I} \right)^{0.108} \quad (\text{II. 31})$$

Où:

E_s : Module d'élasticité du sol ;

ν_s : Coefficient de Poisson du sol ;

B : Largeur ;

E : Modules d'élasticité de la poutre ;

I : Moment d'inertie.

Plus tard, Vesic (1963) a montré que \bar{k}_s dépend à la fois de la rigidité du sol et de la rigidité de la structure, de sorte que des structures de taille similaire de rigidité différente donneront des valeurs de \bar{k}_s différentes pour la même charge appliquée. Il a trouvé la solution

continue corrélée avec le modèle de Winkler où tous les termes étaient précédemment définis par Straughan (1990).

$$\bar{k}_s = \frac{0.65 E_s}{(1-\nu_s^2)^{1/2}} \sqrt{\frac{E_s B^4}{(1-\nu_s^2) E I}} \quad (\text{II. 32})$$

II.3.1.2. Modèles à Deux paramètres

Connaissant le problème essentiel du modèle de Winkler, plusieurs chercheurs ont tenté d'éliminer le comportement de discontinuité en introduisant une interaction mécanique supplémentaire entre les éléments du ressort du milieu de Winkler, qui est capable de transférer une déformation de cisaillement pure. Ces éléments supplémentaires apportent d'autres paramètres au modèle de fondation en plus du coefficient de réaction de la plateforme. Certains modèles développés à deux paramètres sont présentés ci-dessous.

II.3.1.2.1. Modèle de Filonenko-Borodich

Filonenko-Borodich a proposé un modèle qui acquiert la continuité entre les éléments de ressort individuels dans le modèle Winkler en reliant les extrémités supérieures des ressorts avec une membrane élastique tendue à une contrainte constante T , (figure II.7), la fonction de réponse est donnée par:

$$q(x, y) = \bar{k}_s w(x, y) - T \nabla^2 w(x, y) \quad (\text{II. 33})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} \quad (\text{II. 34})$$

Où: ∇^2 est l'opérateur de Laplace.

Dans le cas de problèmes bidimensionnels (plaque de bande et poutre), l'équation ci-dessus sera réduite à :

$$q(x) = \bar{k}_s w(x) - T \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (\text{II. 35})$$

Les deux constantes élastiques \bar{k}_s et T sont nécessaires pour caractériser le modèle de sol. Cependant, aucune méthode n'est fournie pour le calcul de \bar{k}_s et T (Selvaduri, 1979).

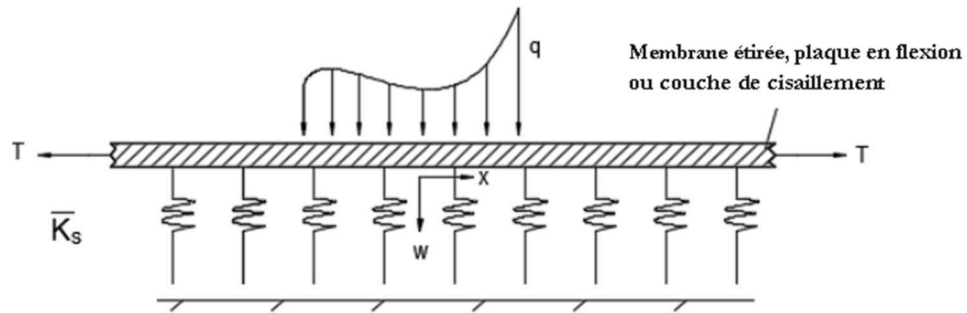


Figure II.7. Modèle de Filonenko-Borodich

II.3.1.2.2. Modèle de Hetenyi

Le modèle proposé par Hetenyi (1946) a créé une interaction entre les ressorts de la fondation en imbriquant une plaque supplémentaire avec une rigidité à la flexion (D) dans la fondation Winkler comme le montre la figure II.6. Et on suppose que la plaque ou la poutre s'est déformée en flexion pure. Selon ce modèle, la fonction de réponse est donnée par:

$$q(x, y) = \bar{k}_s w(x, y) - D \nabla^4 w(x, y) \quad \text{avec} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{II. 36})$$

Où: ∇^2 : Est l'opérateur de Laplace ;

D : Est la rigidité en flexion de la plaque.

Dans le cas de problèmes bidimensionnels, l'équation ci-dessus sera réduite à:

$$q(x) = \bar{k}_s w(x) - D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} \quad (\text{II. 37})$$

II.3.1.2.3. Modèle de Pasternak

Le modèle proposé par Pasternak a amélioré le modèle de Winkler en reliant les extrémités des ressorts à une couche de cisaillement constituée d'éléments verticaux incompressibles, qui ne peuvent se déformer que par cisaillement latéral. Ceci est illustré sur la figure II.9.

Kerr (1964) a expliqué la dérivation de la relation entre le chargement et la déflexion suivant l'hypothèse de Pasternak. Il a été supposé l'équilibre vertical d'un élément de "couche de cisaillement" limitée par les surfaces $x, x + dx, y$ et $y + dy$, comme le montre la fig. II.8.a.

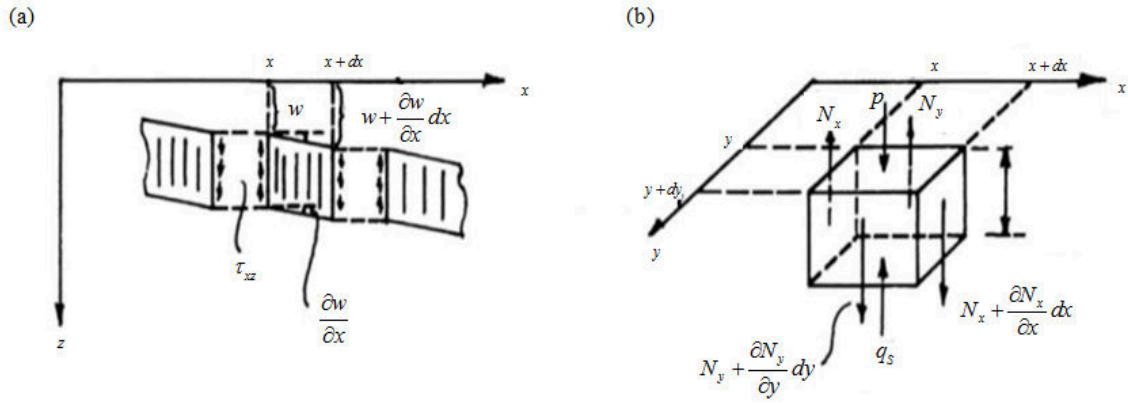


Figure II.8. Équilibre de la couche de cisaillement

En supposant ce matériau de fondation est homogène et isotrope dans le plan x, y avec des modules de cisaillement.

$$G_x = G_y = \bar{G}_p \quad (II. 38)$$

Où \bar{G}_p : Est le module de cisaillement de la fondation élastique.

$$\tau_{xz} = G_x \gamma_{xz} = \bar{G}_p \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G_y \gamma_{yz} = \bar{G}_p \frac{\partial w}{\partial y} \quad (II. 39)$$

Les forces de cisaillement totales par unité de longueur de la couche de cisaillement sont :

$$N_x = \int_0^1 \tau_{xz} dz = \bar{G}_p \frac{\partial w}{\partial x}, \quad N_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = \bar{G}_p \frac{\partial w}{\partial y} \quad (II. 40)$$

À partir de l'équilibre des forces dans la direction z

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q - \bar{k}_p w = 0 \quad \text{avec : } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (II. 41)$$

$$q(x, y) = \bar{k}_p w(x, y) - \bar{G}_p \nabla^2 w(x, y) \quad (II. 42)$$

Où \bar{k}_p : Est le module de réaction de fondation du modèle de Pasternak.

Dans le cas de problèmes bidimensionnels, l'équation précédente sera réduite à:

$$q(x, y) = \bar{k}_p w(x, y) - \bar{G}_p \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (II. 43)$$

On peut voir à partir de l'équation (II.35) qu'elle est identique à (II.43) si T remplacé par \bar{G}_p . Ainsi, la déflexion de surface pour ce modèle est très similaire à celles obtenues pour le modèle de Filonenko-Borodich.

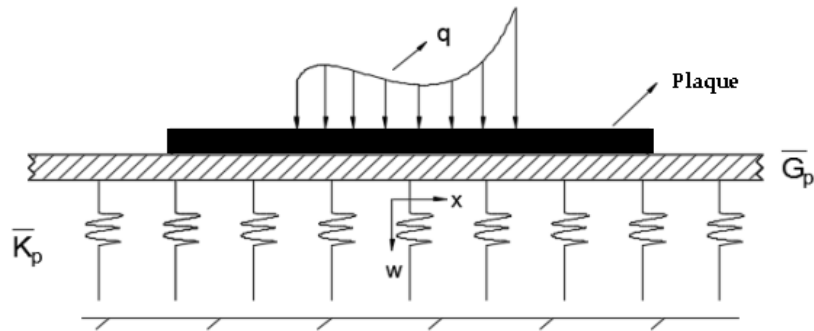


Figure II.9. Plaque supportée par la fondation Pasternak.

II.3.1.3. Modèles à trois paramètres

Pour rendre deux modèles de paramètres plus réalistes, un troisième paramètre est introduit. La caractéristique fondamentale du modèle à trois paramètres est la commodité et la flexibilité dans la détermination du niveau de continuité des déplacements verticaux aux limites entre la surface chargée et déchargée du sol. Parmi les modèles à trois paramètres développés, le modèle de Kerr est le plus largement utilisé.

II.3.1.3.1. Modèle de Kerr

En raison de l'occurrence de la réaction concentrée le long des bords libres d'une structure lorsque le modèle Pasternak est utilisé, Kerr a proposé une généralisation du modèle Pasternak en ajoutant une couche de ressort sur le dessus de la couche de cisaillement comme le montre la figure II.10.

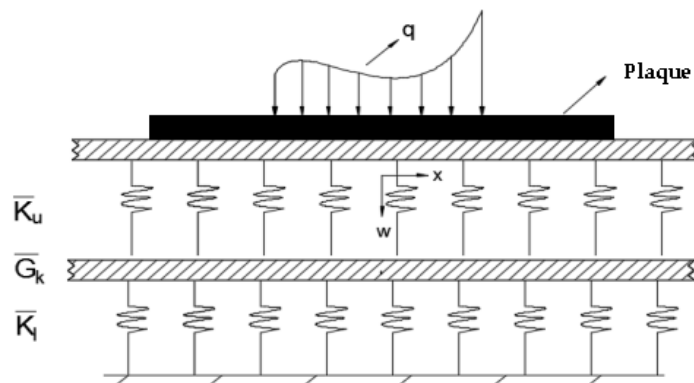


Figure II.10. Plaque supportée par la fondation Kerr.

Le modèle mécanique de Kerr se compose de deux couches de constantes de ressort séparées par une couche de cisaillement. L'équation mathématique est dérivée en considérant deux parties ; de la déflexion de la plaque, la déflexion due à la contraction ou à l'extension de

la couche supérieure du ressort w_u et la déflexion due au reste de la fondation w_l (Worku et Degu, 2010).

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad (\text{II. 44})$$

Où

w : Est la déflexion de la surface.

w_1 : Est la déflexion due à la contraction ou à l'extension de la couche supérieure du ressort ;

w_2 : Est la déflexion due au reste de la fondation.

Selon la figure II.10 et les équations (II.29) et (II.42).

$$q(x, y) = k_u w_1 \quad (\text{II. 45})$$

$$q(x, y) = k_l w_2 - k_p \nabla^2 w_2 \quad (\text{II. 46})$$

Où k_u est la constante de ressort de la couche de ressort supérieure, k_l est la constante de ressort de la couche de ressort inférieure et k_p est la constante de la couche de cisaillement.

On note que les paramètres k_u , k_l et k_p sont déterminés à partir les propriétés de sol de fondation.

En introduisant le rapport $\left(\frac{k_l - k_p \nabla^2}{k_u} \right)$ dans l'équation (II.45) puis en ajoutant le résultat à l'équation (II.46). En considérant l'équation (II.44), on obtient la relation entre la réaction et la déflexion de la fondation comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_l}{k_u} \right) q(x, y) - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2 q(x, y) = k_l w(x, y) - k_p \nabla^2 w(x, y) \quad (\text{II. 47})$$

Cette équation différentielle a été résolue et interprétée par Kerr (1965, 1967) et Kneifati (1985). Dans le cadre de l'étude des plaque FG, Shahsavari et al. (2018) et Daikh et al. (2019) ont utilisé une formule simple de la réaction de la fondation élastique avec trois paramètres comme suit :

$$q(x, y) = \left(\frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) w - \left(\frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \right) \nabla^2 w \quad (\text{II. 48})$$

II.3.2. Revue de quelques travaux sur les structures FGM sur fondation élastique

Addou, Farouk Yahia et al. (2019), ont étudié l'influence de la porosité sur la réponse dynamique des plaques FG reposant sur la fondation Winkler/Pasternak/Kerr avec l'utilisation d'une théorie hyperbolique la quasi 3D HSDT simple. Quatre modèles différents de variations de porosité sont considérés. La théorie hyperbolique quasi-3D utilisée est simple et facile à appliquer car elle ne considère que quatre variables inconnues pour déterminer les quatre réponses vibratoires couplées (axial-cisaillement flexion étirement). Une étude paramétrique détaillée a été établie pour évaluer les influences de l'indice de gradient, du paramètre de porosité, de la rigidité des paramètres de fondation, des nombres de modes et de la géométrie sur les fréquences naturelles des plaques FG imparfaites.

Davood Shahsavari et al. (2018), ont présenté une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D pour étudier la vibration libre des plaques poreuses à gradation fonctionnelle FG reposant sur des fondations élastiques Winkler/Pasternak/Kerr. Trois modèles différents de distributions de porosité (y compris les modèles de distribution uniforme, non uniforme et logarithmique non uniforme) sont considérés. La théorie hyperbolique quasi-3D présentée est simple et facile à mettre en œuvre car elle n'utilise que cinq variables inconnues pour déterminer les quatre réponses vibratoires couplées (axial-cisaillement-flexion-étirement).

Mengzhen Li et al. (2021), ont introduit une théorie quasi-3D simple avec une fonction de cisaillement de Reddy et une nouvelle fonction de cisaillement trigonométrique pour effectuer une analyse de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique Winkler/Pasternak/Kerr. La fonction de déformation de cisaillement transversal proposé satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque FG et sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. Des conditions aux limites sont dérivées sur la base du principe de Hamilton et d'un modèle mathématique de type Winkler/Pasternak/Kerr. Les propriétés matérielles des plaques FGM discutées sont supposées varier à travers l'épaisseur en fonction de la distribution de la loi de puissance. Les résultats obtenus sont comparés à d'autres solutions 2D, quasi-3D et 3D exactes.

Chami, Khaldoune et al. (2020), ont présenté une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique efficace et originale pour le comportement en flexion et dynamique de poutres graduées fonctionnellement (FG) reposant sur des fondations Winkler - Pasternak. La théorie tient compte de la distribution hyperbolique des déformations de cisaillement transverse et satisfait les conditions aux limites de nullité de la contrainte de cisaillement transverse sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. Des solutions analytiques de type Navier sont obtenues pour les problèmes de flexion et de vibration. L'exactitude des solutions actuelles est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec les solutions existantes. On peut conclure que la théorie actuelle est non seulement précise mais aussi simple pour prédire le comportement de flexion et de vibration des poutres à gradation fonctionnelle.

Aicha, Kablia et al. (2020), ont analysé l'effet du taux de distribution de porosité pour la flexion des plaques FGM imparfaites reposant sur des fondations Winkler/Pasternak dans diverses conditions aux limites, sont dérivées avec l'utilisation d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement affinée. Différents types de taux de distribution de porosité sont considérés. Des équations incluant l'interaction plaque-fondation. Ce nouveau modèle répond à la nullité de la contrainte de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La nouvelle règle de mélange est proposée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FG avec différents cas de distribution de porosité.

II.4. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est la compréhension des phénomènes de création et de croissance de la porosité dans les matériaux composites afin d'en minimiser leur taux volumique. Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM avec porosités effectués par les auteurs local et auteurs étrangers.

On présente aussi la formulation théorique du comportement des plaques FGM sur fondations élastiques, les modèles mécaniques des fondations et une revue de quelques travaux sur les structures FGM sur fondation élastique.

En raison du vaste domaine qui se développe rapidement sur les matériaux à gradient de propriété, en conclusion, les FGM représentent un domaine en évolution rapide dans l'ingénierie avec de nombreuses applications pratiques.

Chapitre III : Modélisations analytiques des plaques

CHAPITRE III

MODÉLISATIONS ANALYTIQUES DES PLAQUES

III .1. Introduction

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Ce chapitre est consacré aux différentes théories et propriétés matérielles des plaques FGM. Nous avons évoqué dans le chapitre précédent l'utilisation de plus en plus grandissante de ces matériaux FGM dans les divers domaines de l'ingénierie. Les avantages liés à leur structure offrent des solutions technologiques dans plusieurs domaines essentiellement dans les différents types de chargements qui exigent des matériaux possédant des propriétés mécaniques assez élevées.

La modélisation des structures nécessite des théories d'ordre supérieur qui tiennent compte l'effet du cisaillement transverse. Cette partie prendra en compte les différentes théories utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques ; la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée des plaques et enfin la théorie quasi-3D. La deuxième partie sera consacrée aux différents modèles de répartition des propriétés des FGM.

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. On distingue quatre équations, dans un modèle de mécanique des solides, comportant :

- Les équations du mouvement ;
- Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- Loi de comportement, les relations de contrainte-déformations ;
- Et les équations de compatibilité.

Dans ce chapitre nous allons présenter les principales théories des plaques utilisées dans la littérature pour étudier le comportement des plaques en matériau à gradient fonctionnel FGM.

III .2. Définition des plaques

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, définies par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur, notée $h(x, y)$, petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur, suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épais aux plaques et coques.

Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique régnant le comportement:

- a) Les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée ;
- b) Les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;
- c) Les Plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

III .3. Historique des plaques

Du point de vue historique, c'est Love qui utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff en 1888, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les théories des poutres, pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique CPT ou théorie de Love-Kirchhoff (Love A. E. H., 1888). La théorie des plaques modérées ou semi-épaisses, théorie des déformations du premier ordre, a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de (Rayleigh 1877), (Timoshenko S., 1921), (Reissner E., 1945) et (Uflyand Y.S., 1948)(Mindlin R. D., 1951), cette théorie utilise un coefficient de correction pour obtenir des résultats plus exactes, $K = \sqrt{(5/6)}$. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque (Bachir Bouiadjira R., 2015).

On compte plusieurs centaines d'articles relatifs au sujet des plaques et coques, certains présentant l'état de l'art, et d'autres précisant des problèmes de stabilité qui intéressent les ingénieurs constructeurs. Permis ces articles, on peut citer ceux de (Timoshenko S., 1959), (Reddy J.N., 1997) (Reddy .J .N, 2004).

III .4. Les modèles analytiques des plaques

III .4.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement liée à l'élanement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure III.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ce modèle de plaque peut être référé en (Timoshenko et Woinowsky-Krieger 1959), Reddy (Reddy 1997, Reddy 1999).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{III.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

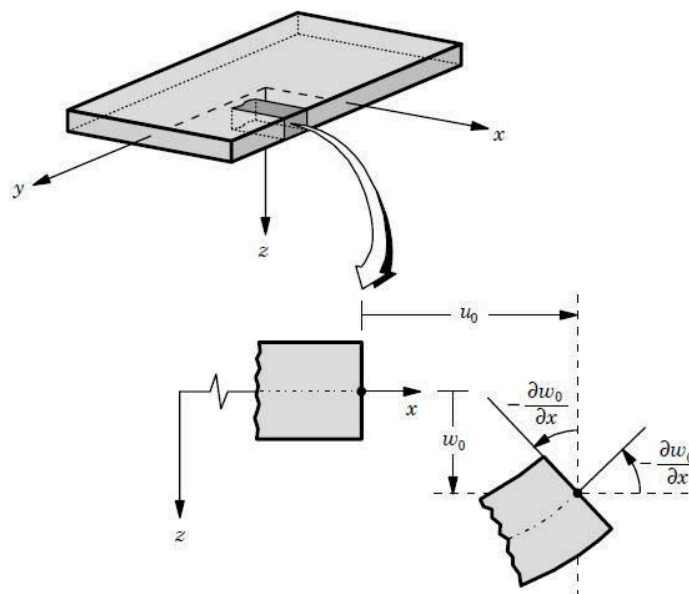


Figure III.1. Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997).

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$: Est la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III .4.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé de la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans (Reissner 1945, Mindlin 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que (Timoshenko et Woinowsky Krieger 1959, Reddy 1997, Reddy 1999).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \quad (\text{III.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (\text{III.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques écrite si dessus par le remplacement de $\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

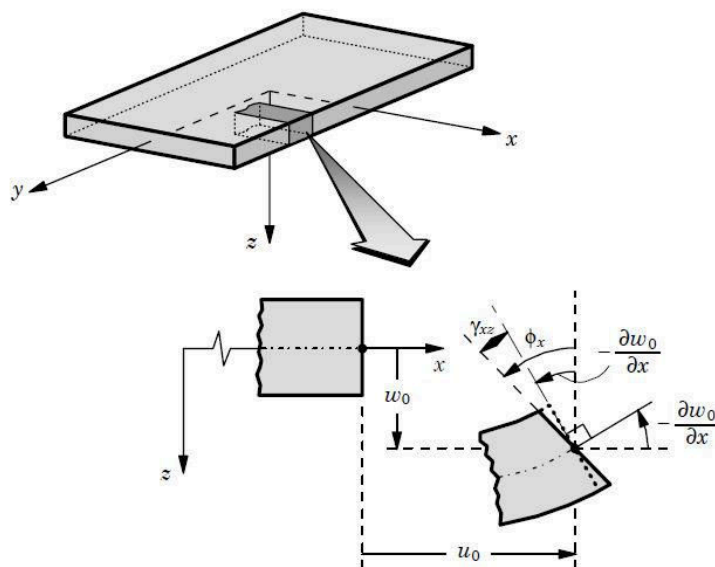


Figure III.2. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III .4.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al. 1949 ; Naghdi 1957 ; Reissner 1975 ; Reddy 1984 ; Kant et Swaminathan 2002). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

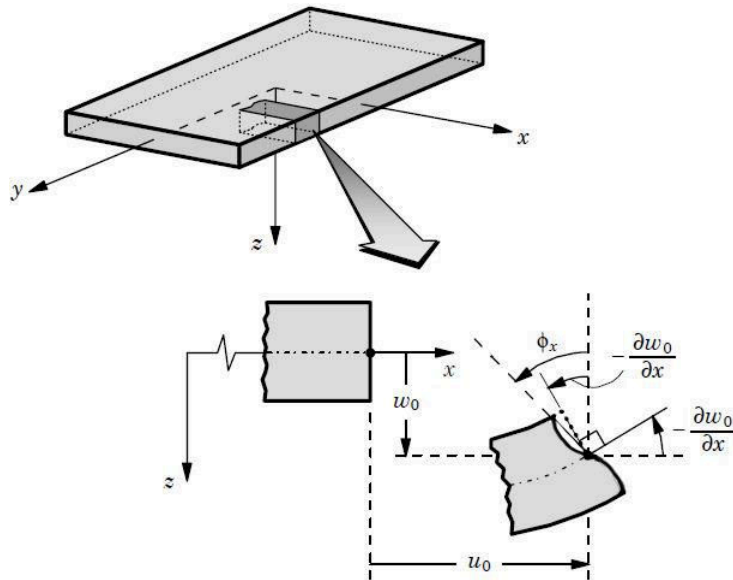


Figure III.3. Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy 1997).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{III.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{III.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $\left(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \right)$, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy 1997, Reddy 1999) sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{III.4})$$

Dans le modèle de Reddy:

- Le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.
- La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur.
- Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier 1991 propose le modèle sinus (TSDPT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The Exponential Shear Deformation Plate Theory ESDPT) développée par (Karama et al. 2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad \text{et} \quad \phi_z = 0 \quad (\text{III.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The Hyperbolic Shear Deformation Plate Theory HSDPT) développée par (Ait Atmane et al. 2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad \text{et} \quad \phi_z = 0 \quad (\text{III.7})$$

III .5. Les fonctions raffinées de cisaillement transverse

Pour objet d'une prise en compte du cisaillement transverse la plus précise possible, de nombreux modèles de fonction de gauchissement ont été développés et sont encore développés aujourd'hui. Il est intéressant de noter que la majorité de ces différentes fonctions de cisaillement transverse, permettant de considérer un gauchissement des sections, sont basées sur un modèle de développement polynomial, de puissances impaires, de la fonction $f(z)$ de la forme suivante :

$$f(z) = a_1 z - a_3 \cdot \left(\frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^3}{h^2} \right) + a_5 \cdot \left(\frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^5}{h^4} \right) + \dots + (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot a_n \cdot \left(\frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{z^n}{h^{(n-1)}} \right) \quad (\text{III.8})$$

La construction des fonctions $f(z)$ s'établit alors par le choix des coefficients a_n induits par l'ordre choisi pour le développement. On retrouve donc dans cette formulation générale de la fonction de cisaillement transverse la théorie classique, où les coefficients a_n sont tous égaux à 0, ainsi que la théorie naturelle où le coefficient a_1 est égal à 1 et $a_n = 0$ quand $n > 1$. La figure III.4 montre l'évolution de ces différents modèles pour une épaisseur de pièce de 20 mm. Cette figure permet d'apprécier la tendance des développements à accentuer le phénomène de gauchissement de la section sollicitée. En effet, il apparaît clairement que la théorie de Mantari (plus récente) propose une amplitude du gauchissement nettement supérieure à celle proposée par les théories d'ordre supérieur précédentes.

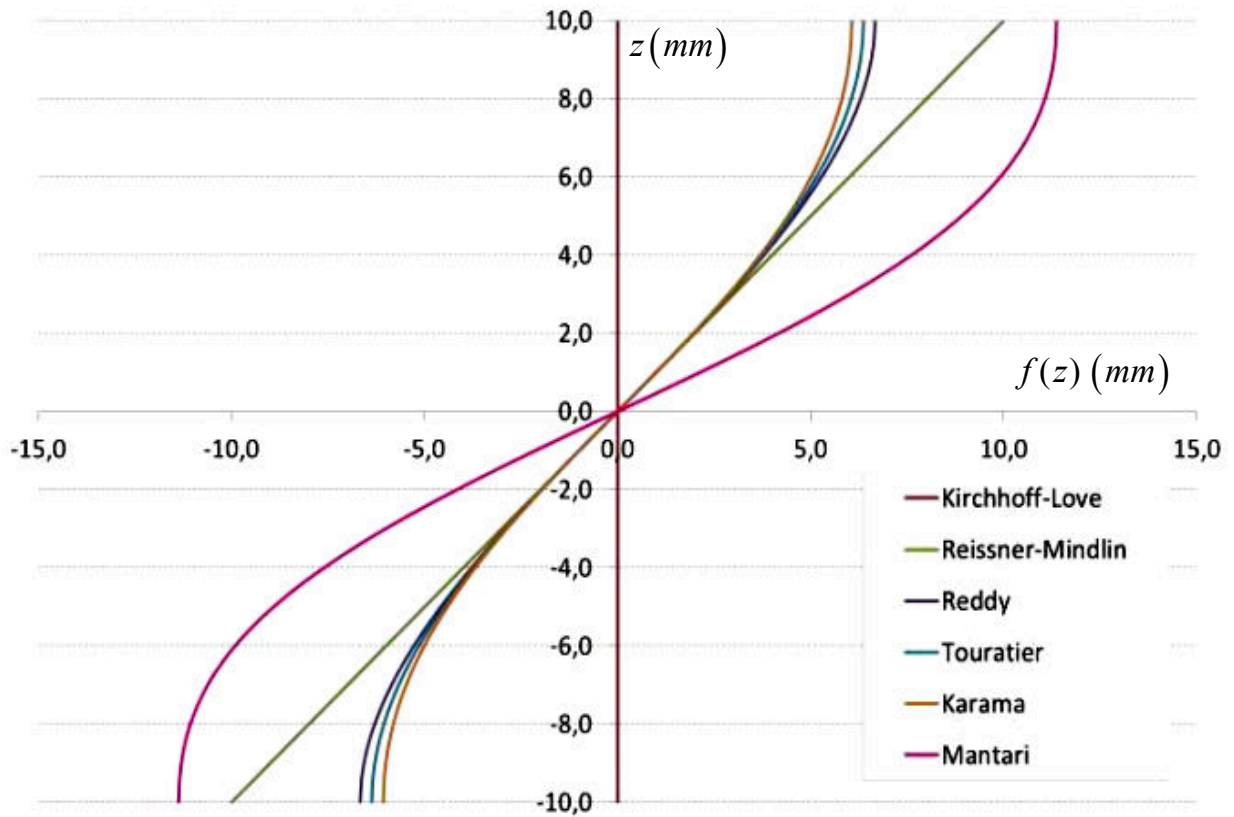


Figure III.4. Tracés des fonctions de cisaillement transverse étudiées

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé de nombreuses fonctions de cisaillement transversal pour donner la réponse mécanique des plaques composites aussi proche que possible de la solution exacte d'élasticité 3D. Néanmoins, à partir de la première fonction polynomiale simple (Ambartsumian 1960), ces fonctions deviennent de plus en plus complexes.

Plusieurs auteurs ont proposé des fonctions de cisaillement $f(z)$ pour les modèles d'ordre élevé. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur peut prendre une forme parabolique, sinusoïdale hyperbolique, ou exponentielle. Le tableau III.1 résume les théories les plus utilisées dans la littérature.

Tableau III.1. Description des différentes théories de plaques.

Théorie	Intitulé	Fonction de cisaillement	Domaine de validité
CPT, Kirchhoff	Théorie classique des plaques	0	Plaques minces
FSDT, Mindlin	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	z	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambarsumian	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier	Théorie d'ordre supérieur (trigonométrique)	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	
ESDPT, (Karama, Afaq et Mistou, 2003)	Théorie d'ordre supérieur (exponentielle)	$z e^{-2(z/h)^2}$	
PSDPT, Levinson, Reddy	Théorie d'ordre supérieur (parabolique)	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	
Akavci et Tanrikulu, (2015)	Théorie de déformation quasi-3D (hyperbolique)	$3.7 z \left(1.2 z \operatorname{sech}^{0.65} (z/h) - 1 \right)$	
Thai et al. (2014)	Théorie de déformation quasi-3D (hyperbolique)	$h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - h \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$	
Hebali et al. (2014)	Théorie raffiné des plaques (hyperbolique)	$\frac{(h/\pi) \sinh \left(\frac{\pi}{h} z \right) - z}{\cosh (\pi/2) - 1}$	
Bennoun, Houari et Tounsi, (2016)	Théorie raffiné des plaques (hyperbolique)	$z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right)$	

III .6. Modèles de théories raffinées

III .6.1. Modèles à cinq variables

Cette théorie est basée sur un champ de déplacement à cinq variables (Ambartsumian 1958 ; Soldatos 1993 ; Zenkour 2006 ; Zenkour 2009 ; Aydogdu 2009 ; Sobhy 2013 ; Lee et al. 2015) comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{III.9.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{III.9.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.9.c})$$

Ou : (u, v, w) sont les déplacements dans les directions x, y, z ; (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements au plan moyen, (φ_x, φ_y) sont les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes x et y , respectivement, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transversal.

Voyiadjis et Shi (1991) ; Mahi et al. (2015) ont présenté un modèle de cinq variables sous la forme suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + g(z) \left(\varphi_x(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (\text{III.10.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + g(z) \left(\varphi_y(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (\text{III.10.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.10.c})$$

En faisant d'autres hypothèses (Lee et al. 2015), donné par:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{III.11.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{III.11.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.11.c})$$

Avec: (φ_x, φ_y) sont les rotations autour des axes x et y , respectivement $\left(\varphi_x = -\frac{\partial w_s}{\partial x}, \varphi_y = -\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)$

Reddy (1984) propose un modèle de cinq variables sous la forme suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\beta_x + f(z)\left(\beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \quad (\text{III.12.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\beta_y + f(z)\left(\beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \quad (\text{III.12.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.12.c})$$

En faisant d'autres hypothèses (Senthilnathan et al. 1987, Shimpi 2002), donné par:

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.13.a})$$

Avec :

$$\beta_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x} \quad \text{et} \quad \beta_y = \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.13.b})$$

III .6.2. Modèles à quatre variables RPT (Rafined Plate Theory)

Dans le but de surmonter le problème des HSDT, Shimpi, (2002) à développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT) afin de diminuer le nombre total des variables utilisées dans les équations d'équilibre. Dans cette théorie le nombre d'inconnues est de quatre (u_0, v_0, w_b et w_s) contrairement aux théories classiques qui en comptent cinq (u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y).

En divisant le déplacement transversal en parties de cisaillement et de flexion, la RPT maintient une grande précision tout en simplifiant les formulations (Shimpi et Patel, 2006). D'une part, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement pour combler le problème de l'utilisation de la FSDT. D'autre part, en utilisant différentes fonctions de forme pour satisfaire les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces inférieure et supérieure et faire correspondre la répartition de la contrainte de cisaillement transversale sur l'épaisseur. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été présentées pour l'analyse de vibration libre Rahmani et al. (2020) ; de flexion Bellifa et al. (2016) ; Shahsavari et Janghorban, (2017); Zine et al. (2020) ; et de flambement des plaques Bellifa et al. (2017).

De ce fait, Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.14.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.14.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.14.c})$$

Où w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.

III .6.3. Modèles de déformation des plaques Quasi-3D

Cependant, puisque toutes les théories mentionnées ci-dessus supposent que les déplacements transversaux sont constants dans le sens de l'épaisseur, l'effet d'étirement (stretching effect) dans le sens transversal est ignoré.

Dans la mesure où on doit tenir compte de l'influence de l'effet d'étirement, on est contraint d'appliquer la théorie quasi-3D qui a été développée pour étudier les plaques de moyenne, forte et très forte épaisseur. Cette théorie prend en considération des variations d'ordre supérieur du déplacement dans le plan et du déplacement transversal à travers l'épaisseur et par conséquent, prend en compte les effets du cisaillement et des déformations normales. Plusieurs travaux ont porté sur ces théories :

- Thai et Kim, (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables au lieu des théories d'ordre élevé à six variables.
- Hebali et al. (2014) ; Bouhadra et al. (2018) ont proposé différentes fonctions de forme des théories à cinq inconnues.
- Zenkour a développé de nombreuses théories quasi-3D différentes qui ne contenaient que quatre inconnues pour étudier le comportement en flexion et en vibration des plaques FGM et des plaques sandwich FGM (Zenkour, 2013, 2014, 2015).
- Neves et al. (2012) ont développé une nouvelle théorie quasi-3D utilisant une fonction hyperbolique pour analyser les plaques FGM.
- Une étude sur les effets de la fondation Winkler/Pasternak/Kerr et de la porosité sur le comportement des plaques FG imparfaites en basant sur la théorie quasi-3D est réalisée par Addou et al. (2019).

Le champ de déplacement est présenté par les équations suivantes :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.15.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.15.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + w_{st}(x, y, z) \quad (\text{III.15.c})$$

Où :

$$w_{st}(x, y, z) = g(z)\varphi(x, y, z) \quad (\text{III.16})$$

w_{st} : Est le terme qui exprime l'étirement de l'épaisseur.

III .7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les différents modèles analytiques de calcul des plaques ; à savoir les théories qui se basent sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité (solution exacte 3D), la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée des plaques (RPT) et la théorie de déformation des plaques quasi-3D qui prend en compte les effets du cisaillement et l'étirement (stretching effect) dans le sens transversal. Ces dernières ont été développées afin de surpasser les limitations des théories existantes. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau isotrope, FGM, sandwich, plaque mince ou épaisse) et aux différents domaines (statique, dynamique et instabilité) et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Ainsi nous avons présentés les modèles possibles qui interviennent dans la description de la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur pour les plaques FG.

Chapitre IV:

***Un nouveau modèle quasi-3D pour l'étude de la flexion
et de la vibration des plaques FGM poreuses reposant
sur des fondations élastiques de type
Winkler/Pasternak/Kerr***

CHAPITRE IV

UN NOUVEAU MODÈLE QUASI-3D POUR L'ÉTUDE DE LA FLEXION ET DE LA VIBRATION DES PLAQUES FGM POREUSES REPOSANT SUR DES FONDATIONS ÉLASTIQUES DE TYPE WINKLER/PASTERNAK/KERR

IV.1. Introduction

Après avoir établi un bilan des recherches sur quelques théories des plaques FGM, nous allons présenter dans ce chapitre l'influence de la porosité sur le comportement en flexion et en vibration des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques de type Winkler/Pasternak/Kerr. Pour illustrer ceci, nous avons développé une nouvelle théorie quasi-3D hyperbolique de déformation de cisaillement, cette théorie prend en considération l'effet d'étirement (Stretching) de l'épaisseur de la plaque FGM. Les termes d'intégrale indéfini sont introduits dans le champ de déplacement proposé, et contrairement aux théories conventionnelles HSDT, la présente théorie ne contient que cinq inconnus.

IV.2. Relations constitutives

Supposons qu'une plaque FG est faite d'un mélange de métal et de céramique, les propriétés matérielles de la plaque comme le module de Young E , la densité ρ et le coefficient de Poisson ν , changeant continuellement à travers l'épaisseur selon la loi de puissance. On suppose que la plaque FG est reposée sur des fondations élastiques; Winkler (Figure IV.1 a), Pasternak (Figure IV.1 b) et Kerr (Figure IV.1 c).

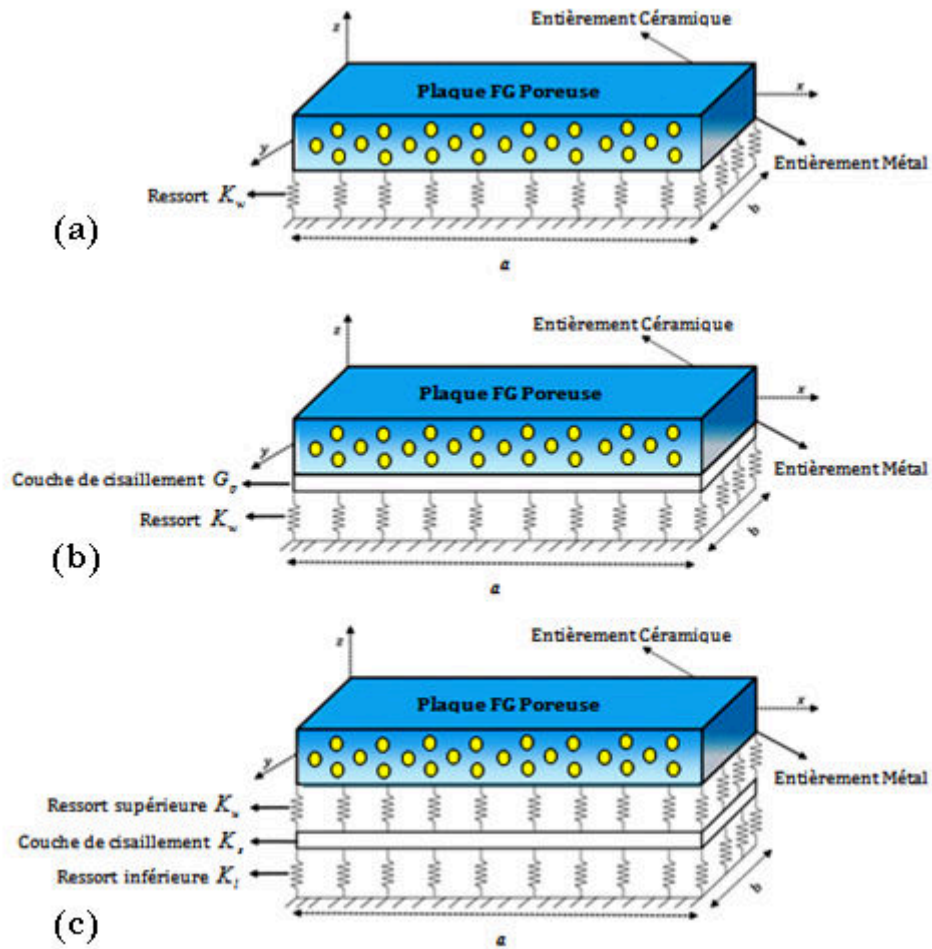


Figure IV.1 : Modèles des fondations élastiques

(a) fondation de Winkler ; (b) fondation de Pasternak ; (c) fondation de Kerr.

Cependant, l'influence des porosités est incluse, qui peuvent exister à l'intérieur du matériau de la plaque FG pendant la production et qui se dispersent de manière uniforme, non uniforme ou logarithmiques non uniformes, comme on peut l'observer sur la (Figure IV 2 (a, b et c)).

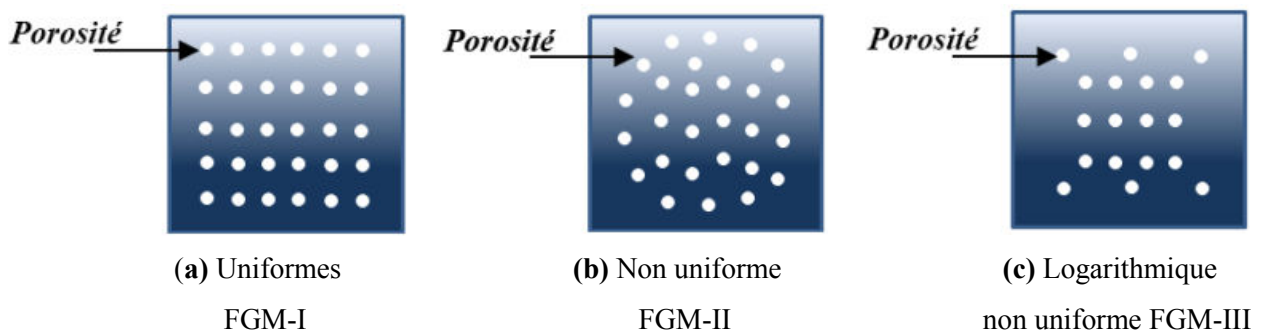


Figure IV.2 Illustration de différents modèles de distributions des porosités.

La loi des mélanges pour les plaques FG à deux phases avec des porosités peut être exprimée comme (Amar et al. 2017, Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014, Benferhat et al. 2016).

$$P(z) = P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) + P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV. 1})$$

Où α est la fraction volumique de porosité ($\alpha \leq 1$), pour une FGM parfaite ($\alpha = 0$), P_c et P_m sont les propriétés matérielles de la céramique et du métal et V_c , V_m sont les fractions volumiques de la céramique et du métal respectivement; les compositions sont représentées comme suit :

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{IV. 2})$$

○ Les propriétés matérielles de la plaque imparfaite FG avec des porosités uniformes FGM-I peut être réécrit comme suit (Figure IV 2. a):

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)V_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c + \rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \end{aligned} \quad (\text{IV. 3})$$

$$\text{Où : } V_c = (0.5 + z/h)^p$$

V_c Est la fraction volumique de la céramique.

○ Pour FGM-II défini comme modèle de distribution des porosités non uniforme, les propriétés matérielles réelles se présentent sous la forme de Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014 (Figure IV 2. b).

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)V_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c + \rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV. 4})$$

- Pour FGM-III défini comme modèle de distribution non uniforme développé avec une fonction logarithmique, la distribution des porosités sous forme étendue (élargie) est comme suit (Figure IV 2. c):

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m - \log\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)(E_c + E_m)\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (IV.5)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_c + \rho_m - \log\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)(\rho_c + \rho_m)\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)$$

La figure IV.3 montre la variation de l'épaisseur en fonction du module de Young pour différents indices de loi de puissance et la fraction volumique de porosité est fixée à $\alpha = 0.2$.

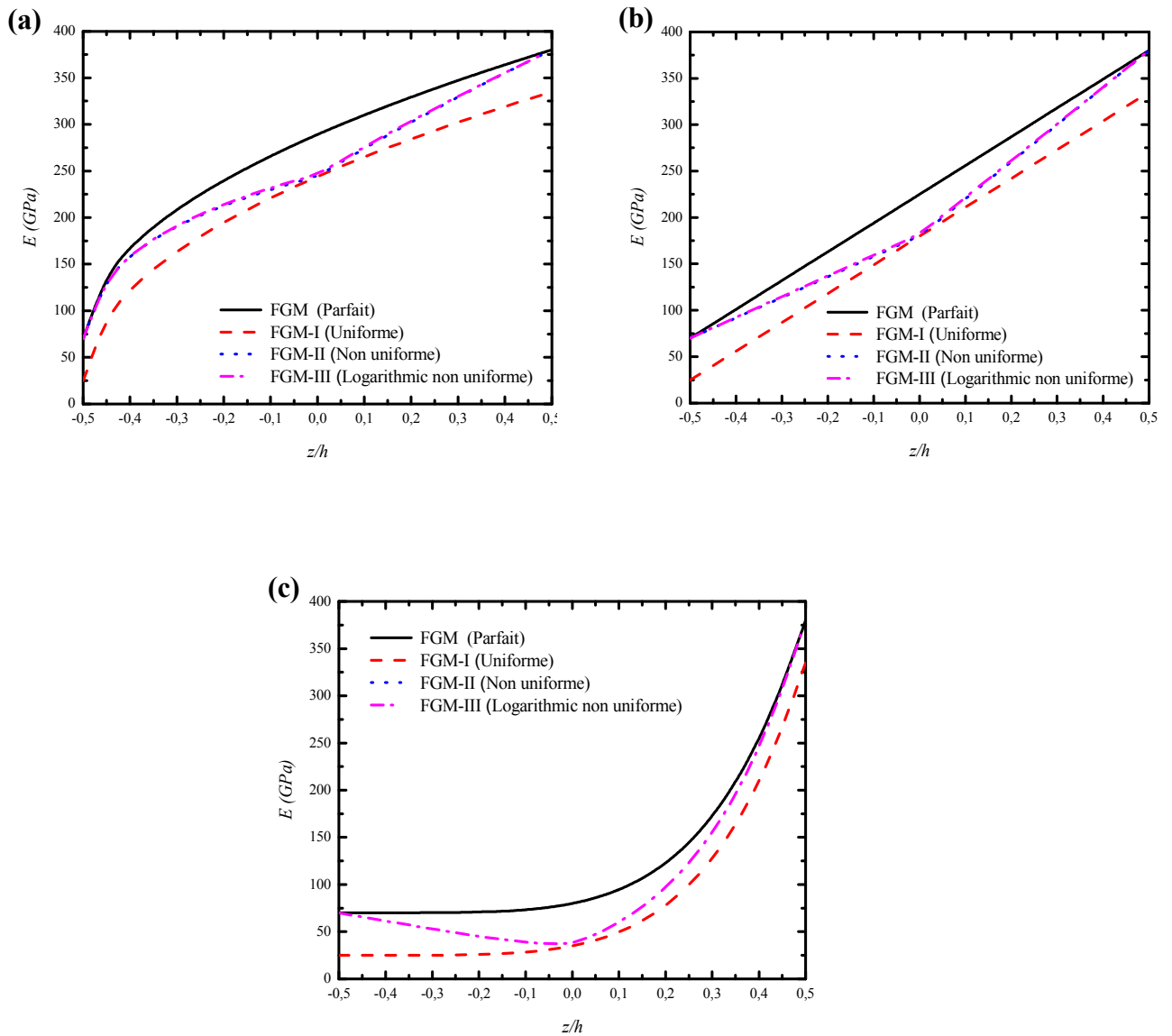


Figure IV.3 Variations du module de Young de FGM parfait et FGM poreux avec la coordonnée d'épaisseur: (a) $p = 0.5$; (b) $p = 1$; (c) $p = 5$.

On observe que le FGM parfait possède le module d'Young le plus élevé tandis que le FGM-I uniformes à le plus petite. Le module d'Young des porosités non uniformes FGM-II et FGM-III se situe entre ceux du FGM parfait et FGM-I qui à des porosités uniformes. De plus, le module de Young pour des porosités non uniformes FGM-II et FGM-III à des caractéristiques discontinues; il coïncide avec celui du FGM-I à la surface médiane de la plaque, et coïncide avec celui du FGM parfait à la surface supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.

IV.2.1. Hypothèses de base

Les hypothèses retenues de la présente théorie s'énoncent comme suit:

- ❖ Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur h de la plaque, par conséquent, les déformations sont infinitésimales.
- ❖ Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y se composent d'un déplacement en membrane, un déplacement en flexion et un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements u et v dans les directions x et y respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_b(x, y) + u_s(x, y, z) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_b(x, y) + v_s(x, y, z) \end{aligned} \tag{IV. 6}$$

Les premières composantes u_0 et v_0 représentent les déplacements en membrane. Les deuxièmes composante u_b et v_b , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacement donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes u_b et v_b sont donnée par:

$$u_b = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{IV. 7}$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement u_s et v_s , elles donnent lieu, une variation hyperboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} et γ_{yz} , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} sont nulles aux facettes supérieure et inférieure de la plaque.

Les expressions des composantes u_s et v_s dépendent du terme intégrale qui réduit ainsi le nombre de variables à cinq (05) par rapport aux théories d'ordre élevé conventionnelles, et elles sont donnée comme suit :

$$u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx, \quad v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV. 8})$$

Les coefficients k_1 et k_2 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie.

➤ La composante du déplacement transversal $w(x, y, z)$ peut être dissociée en deux termes :

- Le premier $w_0(x, y)$ représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que le dérivé de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale.
- Le deuxième terme $\phi_z(x, y)$ considère la flèche due à l'effet d'étirement (effet de la déformation normale) de l'épaisseur de la plaque en incluant la fonction $g(z)$ qui est donnée par l'équation (IV. 12). Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées x, y seulement et s'écrivent comme suit :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \phi_z(x, y) \quad (\text{IV. 9})$$

IV.3. Formulation théorique

IV.3.1. Relations cinématiques et relations constitutives

IV.3.1.1. Champ des déplacements

La présente théorie des plaques à variables intégrales indéterminées utilisée par (Amar et al. 2018) où le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes de la théorie actuelle est réduit, et donc, il est facile à utiliser. La théorie présentée est à variation constante, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et donnent une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) + g(z) \phi_z(x, y)
 \end{aligned} \tag{IV. 10}$$

Où $(u_0, v_0, w_0, \theta, \phi_z)$ sont cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque; et h est l'épaisseur de la plaque.

Dans cette étude, $f(z)$ est une fonction de forme hyperbolique choisie dans la forme de (Čukanović et al. 2018), cette fonction satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

$$f(z) = z \left(\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - 1.388 \right) \tag{IV. 11}$$

Et $g(z)$ est donné comme suit :

$$g(z) = f'(z) \tag{IV. 12}$$

IV.3.1.2. Champ des déformations

Les déformations linéaires non nulles associées au champ des déplacements dans l'équation (IV. 10) sont écrits comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{IV. 13.a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{IV. 13.b}$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \tag{IV. 13.c}$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 14.a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 14.b})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 14.c})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta \, dy + \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta \, dx + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 14.d})$$

$$\varepsilon_z^0 = \phi_z \quad (\text{IV. 14.e})$$

Et :

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{IV. 15})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta \, dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta \, dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV. 16})$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas en utilisant Navier. Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV. 17})$$

Avec :

$$k_1 A' = k_2 B' = -1 \quad (\text{IV. 18})$$

Où α et β sont définis dans l'expression (IV. 41).

IV.3.1.3. Équations constitutives

Les relations constitutives de comportement élastique linéaire d'une plaque FG peuvent s'exprimer comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 19})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont respectivement les composants des contraintes et des déformations.

Le calcul des constantes élastiques C_{ij} dépend des hypothèses dont lesquelles on prend en compte ou non la déformation normale ε_z considérée.

➤ Si $\varepsilon_z = 0$ alors les constantes élastiques C_{ij} réduit en contraintes planes.

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{IV. 20.a})$$

$$C_{12} = \nu C_{11} \quad (\text{IV. 20.b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV. 20.c})$$

- Si $\varepsilon_z \neq 0$ (étirement de l'épaisseur), alors C_{ij} sont des constantes élastiques 3D, données par:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z) \quad (\text{IV. 21.a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \quad (\text{IV. 21.b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV. 21.c})$$

Avec:

$$\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (\text{IV. 22.a})$$

$$\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV. 22.b})$$

Où : $\lambda(z)$ et $\mu(z)$ sont des coefficients de Lamé. Les modules $E(z)$ et $G(z)$ et les coefficients élastiques C_{ij} varient à travers l'épaisseur, selon les Equations (IV. 3), (IV. 4) et (IV. 5).

IV.3.2. Équations d'équilibres

Le principe d'énergie d'Hamilton est appliqué pour dériver les équations de mouvement de la plaque FG imparfaite.

$$0 = \int_0^T (\delta U_s + \delta U_F + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV. 23})$$

Où δU_s est la variation de l'énergie de déformation, δU_F est la variation de l'énergie de déformation supplémentaire induite par les fondations élastiques, δV est le travail virtuel effectué par les forces externes appliquées et δK est la variation de l'énergie cinétique.

- La variation de l'énergie de déformation est exprimée par:

$$\delta U_s = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz$$

$$= \int_A \left[\begin{array}{l} N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + S_x k_1 \theta + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - \\ M_y \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + S_y k_2 \theta + N_z \phi_z + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\ - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + S_{xy} \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \right) \\ + Q_{xz} \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + Q_{yz} \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \end{array} \right] dx dy \quad (\text{IV. 24})$$

Où N , M , S et Q sont les résultantes des contraintes et des moments définies par:

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad i = x, y, xy \quad (\text{IV. 25.a})$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_i dz, \quad i = xy, yz \quad (\text{IV. 25.b})$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz \quad (\text{IV. 25.c})$$

- La variation de l'énergie de déformation supplémentaire induite par les fondations élastiques peut être définie comme:

$$\delta U_F = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (U_{Winkler} + U_{Pasternak} + U_{Kerr}) dA dz \quad (\text{IV. 26})$$

$$= P_{Winkler} + P_{Pasternak} + P_{Kerr}$$

Dans le cas du modèle de fondation Winkler, la charge répartie peut être définie par:

$$P_{Winkler} = K_w (w_0 + g \phi_z) \quad (\text{IV. 27})$$

Où K_w est le module de réaction du sol de fondation (coefficient élastique de la fondation).

Le modèle de fondation Pasternak est un modèle élastique à deux paramètres, qui se compose d'un paramètre de couche de cisaillement avec une rigidité G_x , G_y sont les modules de cisaillement de la fondation (rigidité de la fondation de la couche de cisaillement).

Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons $G_x = G_y = G$ et K_w est le module de réaction du sol (rigidité des ressorts). Ainsi, la réaction répartie entre le modèle de fondation Pasternak et la surface inférieure de la plaque FG peut être définie par:

$$P_{Pasternak} = K_w (w_0 + g\phi_z) - G_{px} \frac{\partial^2 (w_0 + g\phi_z)}{\partial x^2} - G_{py} \frac{\partial^2 (w_0 + g\phi_z)}{\partial y^2} \quad (IV. 28)$$

De toute évidence, le modèle de fondation Pasternak peut se réduire au modèle de fondation Winkler lorsque l'on considère $G_{px} = G_{py} = 0$.

Le modèle de fondation Kerr est un modèle élastique à trois paramètres composé d'une couche de cisaillement avec rigidité K_s indépendante des couches supérieure avec rigidité K_u et inférieure avec rigidité K_l (couches élastiques modélisée par des ressorts distribués). La distribution de la réaction du modèle de fondation Kerr est définie comme suit (Kneifati 1985).

$$P_{Kerr} = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) (w_0 + g\phi_z) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \left[\frac{\partial^2 (w_0 + g\phi_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (w_0 + g\phi_z)}{\partial y^2} \right] \quad (IV. 29)$$

- La variation du travail effectué par les forces externes appliquées peut s'exprimer comme suit:

$$\delta V = - \int_A q \delta w dx dy = - \int_A q (\delta w_0 + g(z) \delta \phi_z) dx dy \quad (IV. 30)$$

- La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être s'exprime comme suit:

$$\delta K = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \\ -I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ +I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] \\ -J_1 \left[k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right. \\ \left. + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\ +J_2 \left[k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right. \\ \left. + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\ +K_2 \left[k_1^2 A'^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\ +J_1^s [\dot{w}_0 \delta \dot{\phi}_z + \dot{\phi}_z \delta \dot{w}_0] + K_2^s \dot{\phi}_z \delta \dot{\phi}_z \end{array} \right\} d\Omega \quad (IV. 31)$$

Où la notation en exposant des point indique la différenciation par rapport à la variable de temps t; $\rho(z)$ est la densité de masse; et $(I_0, I_1, J_1, J_1^s, I_2, J_2, K_2, K_2^s)$ sont les inerties de masse définies comme suit:

$$(I_0, I_1, J_1, J_1^s, I_2, J_2, K_2, K_2^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, g, z^2, z f, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad (IV. 32)$$

Substitution des équations (IV. 24), (IV. 26), (IV. 30) et (IV. 31) dans l'équation (IV. 23), l'intégration par parties et la collecte des coefficients $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta, \delta \phi_z)$, les équations suivantes de mouvement sont obtenues:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + P_{Winkler} + P_{Pasternak} + P_{Kerr} + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \nabla^2 \ddot{\theta} + J_1^s \ddot{\varphi}_z \\
 \delta \theta : -k_1 S_x - k_2 S_y + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 - J_3 \nabla^2 \ddot{\theta} \\
 \delta \varphi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z + P_{Winkler} + P_{Pasternak} + P_{Kerr} = J_1^s \ddot{w}_0 + J_3^s \ddot{\varphi}_z
 \end{array} \right. \quad (IV. 33)$$

Et les conditions aux limites suivantes sont obtenues en $(x = 0, a)$ et $(y = 0, b)$.

$$u_0 = v_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \quad \text{à } (x = 0, a) \quad (IV. 34.a)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \quad \text{à } (y = 0, b) \quad (IV. 34.b)$$

En substituant l'équation (IV. 13) dans l'équation (IV. 19) et les résultats suivants dans l'équation (IV. 25). Les résultantes des contraintes et des moments peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N_x \\
 N_y \\
 N_{xy} \\
 M_x \\
 M_y \\
 M_{xy} \\
 S_x \\
 S_y \\
 S_{xy} \\
 N_z
 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
 A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & L \\
 A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & L \\
 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\
 B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & L^a \\
 B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & L^a \\
 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\
 B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & R \\
 B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & R \\
 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\
 L & L & 0 & L^a & L^a & 0 & R & R & 0 & Z
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_x^0 \\
 \varepsilon_y^0 \\
 \gamma_{xy}^0 \\
 k_x^b \\
 k_y^b \\
 k_{xy}^b \\
 k_x^s \\
 k_y^s \\
 k_{xy}^s \\
 \varepsilon_z^0
 \end{array} \right\} \quad (IV. 35.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_{yz} \\
 S_{xz}
 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc}
 A_{44}^s & 0 \\
 0 & A_{55}^s
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l}
 \gamma_{yz}^0 \\
 \gamma_{xz}^0
 \end{array} \right\} \quad (IV. 35.b)$$

Où les coefficients de rigidité sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV. 36.a})$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ Z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{IV. 36.b})$$

En substituant l'équation (IV. 35) dans l'équation (IV. 33), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta, \delta \phi_z)$ comme suit :

$$\delta u_0 : L_1 u_0 + A_{11} L_2 v_0 - L_3 \frac{\partial w_0}{\partial x} + L_4 \frac{\partial \theta}{\partial x} + L \frac{\partial \phi_z}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV. 37.a})$$

$$\delta v_0 : A_{11} L_2 u_0 + L_5 v_0 - L_3 \frac{\partial w_0}{\partial y} + L_6 \frac{\partial \theta}{\partial y} + L \frac{\partial \phi_z}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV. 37.b})$$

$$\delta w_0 : L_3 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - L_7 w_0 + L_8 \theta + L_9 \phi_z = 0 \quad (\text{IV. 37.c})$$

$$\delta \theta : -L_4 \frac{\partial u_0}{\partial x} - L_6 \frac{\partial v_0}{\partial y} + L_8 w_0 - L_{10} \theta + L_{11} \phi_z = 0 \quad (\text{IV. 37.d})$$

$$\delta \phi_z : L \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + L_9 w_0 + L_{13} \theta + L_{14} \phi_z = 0 \quad (\text{IV. 37.e})$$

Où l'opérateur L_i est donné par :

$$L_1 = A_{11} \nabla_x^2 - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV. 38.a})$$

$$L_2 = (\nu + \bar{\nu}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad (\text{IV. 38.b})$$

$$L_3 = B_{11} \nabla^2 - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV. 38.c})$$

$$L_4 = B_{11}^s \left((k_1 + k_2\nu) + \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B') \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - J_1 k_1 A' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV. 38.d})$$

$$L_5 = A_{11} \nabla_y^2 - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV. 38.e})$$

$$L_6 = B_{11}^s \left((k_1\nu + k_2) + \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B') \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - J_1 k_2 B' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV. 38.f})$$

$$L_7 = D_{11} \nabla^4 + (I_0 - I_2 \nabla^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + K_w - G_p \nabla^2 + \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 \quad (\text{IV. 38.g})$$

$$L_8 = D_{11}^s \left((k_1 + k_2\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(k_1 A' + k_2 B') \bar{\nu} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_1\nu + k_2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{IV. 38.h})$$

$$L_9 = L^a \nabla^2 - J_1^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \left(K_w - G \nabla^2 + \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 \right) \quad (\text{IV. 38.i})$$

$$L_{10} = H_{11}^s (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) + \left(\left(\bar{\nu} H_{11}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (k_1 A')^2 A^s \right) - (k_1 A')^2 K_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ + \left(\left(\bar{\nu} H_{11}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (k_2 B')^2 A^s \right) - (k_2 B')^2 K_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{IV. 38.j})$$

$$L_{11} = A^s \left(k_1 A' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - R (k_1 + k_2) \quad (\text{IV. 38.k})$$

$$L_{12} = A^s \nabla^2 - R^a - K_2^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \left(K_w - G_p \nabla^2 + \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 \right) \quad (\text{IV. 38.l})$$

$$L_{13} = A^s \left(k_1 A' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV. 38.m})$$

$$L_{14} = A^s \nabla^2 + Z - K_2^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \left(K_w - G_p \nabla^2 + \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 \right) \quad (\text{IV. 38.n})$$

Dans lequel : $\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nabla_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, (IV. 39.a)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 (\nabla^2), \quad \bar{\nu} = \frac{1-\nu}{2} \quad (\text{IV. 39.b})$$

IV.3.3. Solutions analytiques

Dans cette section, des solutions analytiques de la flexion et de la vibration sont présentées pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sous une charge transversale q .

Sur la base de l'approche Navier, les déplacements et sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta(x, y, t) \\ \phi_z(x, y, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Theta_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (\text{IV. 40})$$

Où $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Theta_{mn}, \phi_{mn}$ sont des coefficients de Fourier à déterminer pour chaque paire de m et n .

ω : Est la fréquence propre associée par (m, n) mode propre, α et β sont exprimés comme :

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \quad (\text{IV. 41})$$

La charge transversale q est également développée en double série Fourier comme suit:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{IV. 42})$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

$$= \begin{cases} q_0 & \text{Pour une charge répartie sinusoïdale,} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{Pour une charge uniformément répartie.} \end{cases} \quad (\text{IV. 43})$$

En substituant les équations (IV. 40) et (IV. 42) dans l'équation (IV. 37), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & m_{35} & 0 & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Theta_{mn} \\ \phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 44})$$

Où :

$$s_{11} = A_{11} (\alpha^2 + \bar{\nu} \beta^2) \quad (\text{IV. 45.a})$$

$$s_{12} = \alpha \beta A_{11} (\nu + \bar{\nu}) \quad (\text{IV. 45.b})$$

$$s_{13} = -B_{11} [(\nu + 2\bar{\nu}) \alpha \beta^2 + \alpha^3] \quad (\text{IV. 45.c})$$

$$s_{14} = B_{11}^s \alpha [(k_1 + \nu k_2) - \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B')] \beta^2 \quad (\text{IV. 45.d})$$

$$s_{15} = -L \alpha \quad (\text{IV. 45.e})$$

$$s_{22} = A_{11} (\beta^2 + \bar{\nu} \alpha^2) \quad (\text{IV. 45.f})$$

$$s_{23} = B_{11} \beta (\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{IV. 45.g})$$

$$s_{24} = B_{11}^s \beta [(\nu k_1 + k_2) - \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B')] \alpha^2 \quad (\text{IV. 45.h})$$

$$s_{25} = -L \beta \quad (\text{IV. 45.i})$$

$$s_{33} = D_{11} (\alpha^2 + \beta^2)^2 + P_{foundations} \quad (\text{IV. 45.j})$$

$$s_{34} = D_{11}^s [-k_1 (\alpha^2 + \nu \beta^2) + 2\bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B') \alpha^2 \beta^2 - k_2 (\nu \alpha^2 + \beta^2)] \quad (\text{IV. 45.k})$$

$$s_{35} = L^a (\alpha^2 + \beta^2) + g P_{foundations} \quad (\text{IV. 45.l})$$

$$s_{44} = H_{11}^s (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2 + \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B')^2 \alpha^2 \beta^2) + A^s (k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) \quad (\text{IV. 45.m})$$

$$s_{45} = -A^s (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) - R (k_1 + k_2) \quad (\text{IV. 45.n})$$

$$s_{55} = A^s (\alpha^2 + \beta^2) + Z + g P_{foundations} \quad (\text{IV. 45.o})$$

Où m_{ij} sont les éléments de la matrice de masse généralisée et leurs expressions spécifiques sont également données par:

$$m_{11} = I_0 \quad (\text{IV. 46.a})$$

$$m_{13} = -\alpha I_1 \quad (\text{IV. 46.b})$$

$$m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha \quad (\text{IV. 46.c})$$

$$m_{22} = I_0 \quad (\text{IV. 46.d})$$

$$m_{23} = -\beta I_1 \quad (\text{IV. 46.e})$$

$$m_{24} = -J_1 k_2 B' \beta \quad (\text{IV. 46.f})$$

$$m_{33} = I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{IV. 46.g})$$

$$m_{34} = J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) \quad (\text{IV. 46.h})$$

$$m_{35} = J_1^s \quad (\text{IV. 46.i})$$

$$m_{44} = J_3 (k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) \quad (\text{IV. 46.j})$$

$$m_{55} = J_3^s \quad (\text{IV. 46.k})$$

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement mécanique de la flexion et de la vibration des plaques poreuses en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) reposant sur des fondations élastiques en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec une fonction de forme hyperbolique. Le nombre d'inconnus dans la présente théorie est seulement cinq (05) par rapport à plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

La théorie considère la déformation du cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont obtenues par l'application du principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant. Elles permettent de comprendre clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats trouvés dans la littérature à savoir les résultats obtenus par d'autres théories d'ordre élevé avec ou sans prise en compte de la déformation normale ε_z et celles obtenues par la théorie d'élasticité tridimensionnelle.

Chapitre V : Résultats et discussions

CHAPITRE V

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

V.1. Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques concernant l'influence de la porosité sur le comportement en flexion et en vibration des plaques FGM poreuses reposant sur des fondations élastiques de type Winkler/Pasternak/Kerr en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D, que nous avons développé dans le chapitre précédent, cette section s'apparente donc à une étape de validation, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie.

On suppose que les propriétés matérielles de la plaque FGM varient continuellement à travers l'épaisseur selon la loi de puissance, en fonction des fractions volumiques des constituants.

V.2. Résultats numériques et discussions

Dans ce chapitre, les résultats numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision de la théorie proposée pour l'étude des réponses statiques et vibratoires des plaques FG poreuses simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques choisies comme fondations Winkler/Pasternak/Kerr. Les résultats sont calculés en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D avec seulement cinq inconnues. Pour illustrer l'approche proposée, une plaque fonctionnellement graduée de céramique-métal est considérée. Les propriétés matérielles utilisées sont présentées dans le tableau V.1.

Tableau V.1. Les propriétés matérielles de la plaque FGM

Matériau		Propriétés Matérielles		
		Module d'élasticité E [GPa]	Densité ρ [kg/m ³]	Coefficient de Poisson ν
Métal	Aluminium (Al)	$E_m = 70$	$\rho_m = 2702$	$\nu = 0.3$
Céramique	Alumine (Al_2O_3)	$E_c = 380$	$\rho_c = 3800$	$\nu = 0.3$

Pour plus de commodité, les formes adimensionnelles des déplacements et des contraintes sont utilisées:

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{z}{h} & S &= a/h & \hat{w} &= \frac{100E}{q_0 h S^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) \\
\hat{\sigma}_x &= \frac{1}{q_0 S^2} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) & \hat{\sigma}_y &= \frac{1}{q_0 S^2} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) & \hat{\tau}_{xy} &= \frac{1}{q_0 S} \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \\
\hat{\tau}_{xz} &= \frac{1}{q_0 S} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) & \hat{\tau}_{yz} &= \frac{1}{q_0 S} \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) & \tilde{u} &= \frac{100D_c}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) \\
\tilde{w} &= \frac{100D_c}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) & \tilde{\sigma}_x &= \frac{h^2}{q_0 S^2} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) & \tilde{\tau}_{xy} &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy} \left(0, 0, -\frac{h}{2} \right) \\
\tilde{\tau}_{xz} &= \frac{1}{q_0} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) & \bar{u} &= \frac{100E_c}{q_0 a S^3} u \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right) & \bar{w} &= \frac{10E_c}{q_0 a S^3} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right) \\
\bar{\sigma}_x &= \frac{1}{q_0 S} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right) & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{q_0 S} \tau_{xy} \left(0, 0, \bar{z} \right) & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{1}{q_0 S} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z} \right) \quad (V.1) \\
k_w^* &= \frac{K_w a^4}{h^3} & k_s^* &= \frac{K_s a^2}{h^3 \nu} = \frac{K_s b^2}{h^3 \nu} & \bar{K}_w &= \frac{K_w a^4}{D_m} \\
\bar{G}_p &= \frac{G_p a^2}{D_m} & \bar{K}_l &= \frac{K_l a^4}{D_m} & \bar{K}_u &= \frac{K_u a^4}{D_m} \\
\bar{K}_s &= \frac{K_s a^2}{D_m} & D_m &= (E_m h^3) / (12(1-\nu_m^2)) & \hat{\omega} &= \omega h \sqrt{\rho/G} \\
\tilde{\omega} &= \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} & \bar{\omega} &= \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}
\end{aligned}$$

V.2.1. Résultats de l'analyse de la flexion

Afin de valider l'exactitude de la présente théorie quasi-3D, nous avons obtenu les résultats des contraintes et de la déflexion, pour une plaque isotrope homogène ($p = 0$) soumises à une charge uniformément répartie, par la présente théorie et les comparées à ceux obtenus par la solution exacte 3D de Srinivas et al (1970) et des solutions quasi-3D données par Shimpi et al. (2003) ; Hebali et al. (2014) et Benahmed et al. (2017) comme le montre le tableau V.2.

Tableau V.2. Effet de la déformation normale ε_z sur les contraintes adimensionnelles et de la déflexion pour une plaque isotrope carrée soumise à une charge uniformément répartie avec ($a/h = 10$).

Théories	$\hat{w}(a/2, b/2, 0)$	$\hat{\sigma}_x(h/2)$	$\hat{\sigma}_y(h/2)$	$\hat{\tau}_{xy}(h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, 0)$	$\bar{\tau}_{yz}(a/2, 0, 0)$
Exact 3D (Srinivas et al, 1970 a)	4.639	0.290	0.290	/	0.488	/
Shimpi et al. (2003) $\varepsilon_z \neq 0$	4.625	0.307	0.307	0.195	0.505	0.505
Hebali et al. (2014)	4.631	0.276	0.276	0.197	0.481	0.481
Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	4.633	0.302	0.302	0.197	0.481	0.502
Présente $\varepsilon_z \neq 0$	4.639	0.288	0.288	0.197	0.491	0.491

A partir de ce tableau, On peut observer que les résultats obtenus par la présente théorique quasi-3D et ceux publiés sont en excellent accord.

Le tableau V.3 montre la déflexion non dimensionnel \bar{w} et la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque carrée soumise à une charge sinusoïdale. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions quasi-3D données par Neves et al (2012) ; Hebali et al (2014) et avec celles obtenues à l'aide d'approximations d'éléments finis par Carrera et al (2011).

Tableau V.3. Effet de la contrainte axiale plane $\bar{\sigma}_x$ et la déflexion \bar{w} non dimensionnelles pour une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale.

p	Théories	$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$			$\bar{\sigma}_x(h/3)$		
		$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$
1	Carrera et al. (2011) $\varepsilon_z \neq 0$	0.7171	0.5875	0.5625	0.6221	1.5064	14.969
	Neves et al. (2012) $\varepsilon_z \neq 0$	0.6997	0.5845	0.5624	0.5925	1.4945	14.969
	Hebali et al. (2014) $\varepsilon_z \neq 0$	0.6910	0.5686	0.5452	0.5952	1.4954	14.963
	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.6916	0.5695	0.5461	0.5848	1.4623	14.619
4	Carrera et al. (2011) $\varepsilon_z \neq 0$	1.1585	0.8821	0.8286	0.4877	1.1971	11.923
	Neves et al. (2012) $\varepsilon_z \neq 0$	1.1178	0.8750	0.8286	0.4404	1.1783	11.932
	Hebali et al. (2014) $\varepsilon_z \neq 0$	1.0964	0.8413	0.7926	0.4507	1.1779	11.871
	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	1.0983	0.8424	0.7934	0.4375	1.1396	11.478
10	Carrera et al. (2011) $\varepsilon_z \neq 0$	1.3745	1.0072	0.9361	0.1478	0.8965	8.9077
	Neves et al. (2012) $\varepsilon_z \neq 0$	1.3490	0.8750	0.8286	0.3227	1.1783	11.932
	Hebali et al. (2014) $\varepsilon_z \neq 0$	1.3333	0.9791	0.9114	0.3325	0.8889	8.9977
	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	1.3506	0.9791	0.9143	0.3136	0.8549	8.6648

On peut observer que nos résultats sont en excellent accord avec ceux prédits en utilisant des théories qui considèrent l'étirement d'épaisseur (stretching effect).

Le tableau V.4 montre les effets de la rigidité de la fondation Winkler/Pasternak et de l'indice de puissance p sur les composantes des déplacements et des contraintes non dimensionnelles d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sous une charge uniformément répartie, par rapport à ceux donnés par Thai et Choi (2011), Zenkour et Sobhy (2013), Benahmed et al (2017).

Tableau V.4. Comparaison des déplacements et des contraintes d'une plaque rectangulaire simplement supportée sous une charge uniformément répartie avec ($a=10h$, $b=3a$).

p	k_w^*	k_s^*	Théories	$\tilde{u}(-h/2)$	$\tilde{w}(0)$	$\tilde{\sigma}_x(-h/2)$	$\tilde{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\tilde{\tau}_{xz}(0)$
0.5	0	0	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.3491	1.9345	0.2337	0.0941	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.34919	1.93441	0.23372	0.09415	7.68354
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.33498	1.90215	0.23941	0.09007	7.56253
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.33516	1.90422	0.23272	0.09026	7.38728
	100	0	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.3358	1.8590	0.2242	0.0916	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.33586	1.85907	0.22424	0.09167	7.42978
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.32246	1.82955	0.22989	0.08774	7.31675
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.32261	1.83143	0.22346	0.08793	7.14708
	100	100	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.3012	1.6640	0.1999	0.0850	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.30131	1.66399	0.19989	0.08503	6.76069
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.28991	1.64138	0.20536	0.08151	6.66745
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.29000	1.64282	0.19961	0.08168	6.51483
2	0	0	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.6564	3.2266	0.4395	0.1766	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.65655	3.22672	0.43961	0.17666	6.91072
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.60340	3.07560	0.44695	0.16202	6.79513
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.60465	3.08188	0.43926	0.16248	6.60914
	100	0	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.6156	3.0218	0.4105	0.1690	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.61576	3.02190	0.41060	0.16906	6.53895
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.56771	2.88981	0.41881	0.15538	6.44548
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.56881	2.89532	0.41156	0.15582	6.26874
	100	100	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.5186	2.5364	0.3423	0.1501	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.51872	2.53642	0.34233	0.15020	5.63882
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.48189	2.44460	0.35187	0.13875	5.59033
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.48267	2.44849	0.34570	0.13911	5.43906

Suite tableau V.4.

p	k_w^*	k_s^*	Théories	$\tilde{u}(-h/2)$	$\tilde{w}(0)$	$\tilde{\sigma}_x(-h/2)$	$\tilde{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\tilde{\tau}_{xz}(0)$
5	0	0	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.7802	3.8506	0.5223	0.2103	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.78046	3.85174	0.52237	0.21044	6.14557
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.72061	3.69376	0.53104	0.19389	6.03129
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.72112	3.69681	0.52200	0.19418	5.82417
	100	0	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.7230	3.5620	0.4816	0.1996	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.72323	3.56296	0.48167	0.19975	5.75485
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.66999	3.42857	0.49132	0.18445	5.66241
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.67041	3.43116	0.48295	0.18472	5.46811
	100	100	Thai et Choi (2011) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.5922	2.9046	0.3897	0.1740	-
			Zenkour et Sobhy (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	0.59231	2.90518	0.38971	0.17410	4.84302
			Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.55294	2.81786	0.40060	0.16159	4.79288
			Présente $\varepsilon_{zz} \neq 0$	0.55318	2.81942	0.39373	0.16182	4.63122

Dans lequel l'effet d'étirement de l'épaisseur est négligé ($\varepsilon_{zz} = 0$), nous voyons que les résultats surestiment les déplacements et les contraintes, et cela est attribuable à l'effet d'étirement de l'épaisseur, qui est omis dans les théories développées par ces références.

En outre, il peut être observé à partir du tableau V.4 que les résultats de la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D donnés par Benahmed et al (2017) sont en excellent accord pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance et de la rigidité de fondation.

V .2.1.1. Effet d'étirement des plaques imparfaites poreuses

Après avoir procédé à la validation de la présente théorie quasi-3D. On va étudier l'influence de l'effet de la déformation normale (effet d'étirement) sur les performances des plaques imparfaites contenant des porosités.

Le tableau V.5 montre l'effet de l'indice de puissance p sur les composantes des déplacements et des contraintes non dimensionnelles d'une plaque carrée soumise à une charges sinusoïdales ($a/h=10$) et aux niveaux fonctionnels non poreux ($\alpha=0$) et comparées à ceux données par Zenkour (2006) ; Thai et Kim (2013) ; Mantari et al. (2012) et Nguyen et al. (2014) sans l'effet d'étirement ($\varepsilon_{zz} = 0$) et des solutions quasi-3D avec l'effet d'étirement ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) données par Carrera et al, 2008 et Wu et Chiu, 2011.

Tableau V.5. Comparaison des déplacements et des contraintes non dimensionnelles d'une plaque carrée fonctionnellement graduée poreuse soumise à une charge sinusoïdale avec ($a/h = 10$).

p	Théories		$a/h = 10$				
			$\bar{u}(-h/4)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/3)$	$\bar{\tau}_{xz}(h/6)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$
0	Zenkour (2019) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	$\alpha = 0.0$	0.216337	0.293938	1.303085	0.212331	0.700122
		$\alpha = 0.1$	0.229953	0.312438	1.303085	0.212331	0.700121
	Présente	$\alpha = 0.0$	0.216724	0.294236	1.322308	0.211924	0.701028
		$\alpha = 0.1$	0.230364	0.312754	1.322308	0.211924	0.701028
1	Nguyen et al. (2014) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.641300	0.589000	1.489000	0.261100	0.611100
	Carrera et al. (2008) $\varepsilon_{zz} \neq 0$		0.643600	0.587500	1.506200	0.251000	0.608100
	Wu et Chiu (2011) $\varepsilon_{zz} \neq 0$		0.643600	0.587600	1.506100	0.251100	0.611200
	Zenkour (2006) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.662600	0.588900	1.489400	0.262200	0.611000
	Mantari et al. (2012) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.639800	0.588000	1.488800	0.256600	0.610900
	Thai et Kim (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.641400	0.589000	1.489800	0.260800	0.611100
	Zenkour (2019) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	$\alpha = 0.0$	0.587959	0.569038	1.434203	0.261088	0.565518
		$\alpha = 0.1$	0.701623	0.655782	1.458887	0.266506	0.546517
	Présente	$\alpha = 0.0$	0.588612	0.569540	1.462255	0.260588	0.566008
		$\alpha = 0.1$	0.702349	0.656340	1.487920	0.265995	0.546960
2	Nguyen et al. (2014)		0.898200	0.757300	1.395900	0.274200	0.544200
	Carrera et al. (2008) $\varepsilon_{zz} \neq 0$		0.901200	0.757000	1.414700	0.249600	0.542100
	Wu et Chiu (2011) $\varepsilon_{zz} \neq 0$		0.901300	0.757100	1.413300	0.249500	0.543600
	Zenkour (2006) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.928100	0.757300	1.395400	0.276300	0.544100
	Mantari et al. (2012) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.895700	0.756400	1.394000	0.274100	0.543800
	Thai et Kim (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$		0.898400	0.757300	1.396000	0.273700	0.544200
	Zenkour (2019) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	$\alpha = 0.0$	0.807013	0.721361	1.325404	0.274742	0.493683
		$\alpha = 0.1$	1.049624	0.885498	1.332625	0.284519	0.453813
	Présente	$\alpha = 0.0$	0.808897	0.722455	1.358142	0.273311	0.494670
		$\alpha = 0.1$	1.052371	0.887131	1.366945	0.282911	0.454865
4	Nguyen et al. (2014)		1.050000	0.881600	1.179200	0.254600	0.566900
	Carrera et al. (2008) $\varepsilon_{zz} \neq 0$		1.054100	0.882300	1.198500	0.236200	0.566600
	Wu et Chiu (2011) $\varepsilon_{zz} \neq 0$		1.054100	0.882300	1.184100	0.236200	0.567100
	Zenkour (2006) $\varepsilon_{zz} = 0$		1.094100	0.881900	1.178300	0.258000	0.566700
	Mantari et al. (2012) $\varepsilon_{zz} = 0$		1.045700	0.881400	1.175500	0.262300	0.566200
	Thai et Kim (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$		1.050200	0.881500	1.179400	0.253700	0.566900
	Zenkour (2019) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	$\alpha = 0.0$	0.942715	0.841682	1.103477	0.255831	0.514100
		$\alpha = 0.1$	1.310574	1.082177	1.043439	0.267216	0.479271
	Présente	$\alpha = 0.0$	0.944523	0.842353	1.139552	0.253065	0.514878
		$\alpha = 0.1$	1.313739	1.083384	1.081856	0.263691	0.480244

Suite tableau V.5.

p	Théories	$a / h = 10$					
		$\bar{u}(-h/4)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/3)$	$\bar{\tau}_{xz}(h/6)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$	
8	Nguyen et al. (2014)	1.075900	0.974600	0.947300	0.209400	0.585700	
	Carrera et al. (2008) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	1.083000	0.973800	0.968700	0.226200	0.587900	
	Wu et Chiu (2011) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	1.083000	0.973900	0.962200	0.226100	0.588300	
	Zenkour (2006) $\varepsilon_{zz} = 0$	1.134000	0.975000	0.946600	0.212100	0.585600	
	Mantari et al. (2012) $\varepsilon_{zz} = 0$	1.070900	0.973700	0.943100	0.214000	0.585000	
	Thai et Kim (2013) $\varepsilon_{zz} = 0$	1.076300	0.974600	0.947700	0.208800	0.585800	
	Zenkour (2019) $\varepsilon_{zz} \neq 0$	$\alpha = 0.0$	0.982899	0.944138	0.886117	0.210366	0.540509
		$\alpha = 0.1$	1.393026	1.232257	0.785381	0.210846	0.511665
	Présente	$\alpha = 0.0$	0.982757	0.943841	0.920533	0.208281	0.540263
		$\alpha = 0.1$	1.393060	1.231426	0.822481	0.208014	0.511488

Le tableau V.5 montre qu'un excellent accord est obtenu pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance.

Ensuite, les résultats des composantes des déplacements et des contraintes des plaques FG parfaites et imparfaites avec une distribution uniforme (FGM-I) sont calculés et tabulés dans le même tableau. Les comparaisons entre les résultats actuels et les résultats disponibles obtenus par Zenkour (2019) sont en très bon accord pour tous les cas.

V .2.1.2. Effet de la fondation élastique (Winkler/Pasternak) des plaques poreuse

Le tableau V.6 présente les effets des paramètres de la fondation élastique de type Winkler/Pasternak (\bar{K}_w, \bar{G}_p) et du rapport d'épaisseur latérale (a/h) sur la flèche \bar{w} . Pour cela, trois types de distribution des porosités ont été considérés, une distribution uniforme des porosités (FGM I), une distribution non uniforme des porosités (FGM II) et une distribution logarithmique non uniforme des porosités (FGM III).

Tableau V.6. Variations de la déflexion $\bar{w}(0)$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites par rapport à la rigidité des fondations de type Winkler/Pasternak ($p = 1$).

(\bar{K}_w, \bar{G}_p)	(a/h)	FGM (Parfait)	FGM-I (Uniforme)		FGM-II (Non uniforme)		FGM-III (Logarithmique non uniforme)	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$
(0,0)	5	0.6397	0.8675	2.4657	0.6995	0.8243	0.6963	0.7976
	10	0.5695	0.7797	2.3254	0.6180	0.7173	0.6155	0.6963
	20	0.5518	0.7576	2.2899	0.5974	0.6903	0.5951	0.6707
(100,0)	5	0.5785	0.7585	1.7473	0.6269	0.7253	0.6244	0.7046
	10	0.5200	0.6897	1.6721	0.5601	0.6404	0.5580	0.6236
	20	0.5049	0.6719	1.6523	0.5428	0.6184	0.5409	0.6027
(100,100)	5	0.2001	0.2177	0.2584	0.2055	0.2149	0.2052	0.2130
	10	0.1913	0.2103	0.2554	0.1965	0.2054	0.1962	0.2037
	20	0.1886	0.2078	0.2544	0.1936	0.2024	0.1934	0.2007

Il est clair que pour des distributions de porosité non uniformes, les déflexions \bar{w} augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité α sans ou reposant sur des fondations élastique et les déflexions \bar{w} diminuent lorsque a/h augmente.

De plus, la flèche diminue avec l'existence des fondations élastiques. L'intégration des paramètres de fondation de Pasternak donne plus de résultats que celle du paramètre de fondation de Winkler.

V .2.1.3. Effet de la fondation élastique de type Kerr des plaques FG isotropes

Le tableau V.7 présente les effets des paramètres de la fondation Kerr (\bar{K}_u, \bar{K}_s), des indices de fraction volumique p et du rapport d'épaisseur latérale (a/h) sur la déflexion non dimensionnelle \bar{w} , des plaques FG isotropes carrées reposant sur la fondation Kerr ($\bar{K}_l = 100$), sur la base de la théories de déformation de cisaillement quasi-3D actuelles des plaques.

Tableau V.7. La déflexion non dimensionnelle \bar{w} des plaques FG isotropes carrées reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$).

\bar{K}_u	\bar{K}_s	(a/h)	Plaque isotrope		Plaque FG			
			Céramique	Métal	$p = 0.5$	$p = 1.0$	$p = 2.0$	$p = 5.0$
100	0	5	0.326733	1.584470	0.481184	0.607582	0.769141	0.959577
		10	0.287172	1.409126	0.429470	0.543630	0.681242	0.814469
		20	0.277131	1.363622	0.416313	0.527335	0.658800	0.778160
100	100	5	0.213199	0.441534	0.269583	0.304953	0.340607	0.372736
		10	0.194842	0.423748	0.251300	0.286419	0.320423	0.347141
		20	0.189785	0.417700	0.246124	0.281089	0.314517	0.339377
200	100	5	0.190054	0.352272	0.233574	0.259616	0.284942	0.307042
		10	0.175123	0.340379	0.219420	0.245704	0.270285	0.289054
		20	0.170918	0.336057	0.215300	0.241581	0.265859	0.283409
200	200	5	0.134441	0.198825	0.154778	0.165710	0.175567	0.183642
		10	0.126414	0.194602	0.147957	0.159423	0.169379	0.176566
		20	0.123992	0.192678	0.145788	0.157371	0.167313	0.174101

Comme on peut le voir, ce paramètre du ressort supérieur et de la couche de cisaillement à des effets décroissants. Le paramètre de cisaillement à plus d'effet que les paramètres de ressort inférieur et supérieur. Comme autre tentative de vérification, on peut voir que la déflexion non dimensionnelle \bar{w} de la plaque FG dans la fondation Kerr est petite que celles dans les fondations de Winkler/Pasternak en raison d'un ressort supérieur supplémentaire.

V .2.1.4. Effet de l'augmentation de l'indice de porosité des plaques FG poreuses :

La variation de la contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ des plaques carrées FG poreuses et non poreuses en fonction de la rigidité de la fondation de Kerr ($p=1, \bar{K}_l=100$) sont considérées pour étudier l'influence de l'augmentation de l'indice de volume de porosité.

Pour la plaque FG poreuse, trois types de distribution de porosité sont étudiés (FGM-I, FGM-II et FGM-III). Divers rapports longueur-épaisseur (a/h) et paramètres de porosité sont présentés.

Tableau V.8. Variations de la contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x(h/3)$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité de la fondation de Kerr ($p=1, \bar{K}_l=100$).

(\bar{K}_u, \bar{K}_s)	a/h	FGM	FGM-I		FGM-II		FGM-III	
		(Parfait)	(Uniforme)		(Non uniforme)		(Logarithmique Non uniforme)	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$
(100, 0)	20	2.794258	2.869319	3.541020	2.710523	2.529268	2.714962	2.568618
	10	1.395791	1.432925	1.767293	1.352675	1.259340	1.354961	1.279601
	5	0.694908	0.712684	0.876936	0.670874	0.618868	0.672148	0.630149
(100, 100)	20	1.489524	1.314269	0.844666	1.393629	1.213730	1.398478	1.250109
	10	0.736002	0.649063	0.418658	0.686925	0.594999	0.689407	0.613566
	5	0.352375	0.310496	0.203453	0.325913	0.276706	0.327249	0.286593
(200, 100)	20	1.280190	1.104625	0.666849	1.190994	1.026720	1.195476	1.059631
	10	0.631562	0.544821	0.330469	0.586028	0.502311	0.588315	0.519061
	5	0.300999	0.259829	0.160822	0.276675	0.232297	0.277894	0.241128
(200, 200)	20	0.834003	0.687288	0.370190	0.766648	0.647145	0.769990	0.670641
	10	0.410234	0.338304	0.183540	0.376041	0.315489	0.377736	0.327377
	5	0.194416	0.161145	0.090022	0.176474	0.144945	0.177362	0.151101

Les résultats sont répertoriés dans le tableau V.8, Il est à noter que la contrainte axiale de la plaque FG diminue à mesure que les paramètres de fondation élastique de la couche supérieure (\bar{K}_u) et de la couche de cisaillement (\bar{K}_s) du ressort augmentent.

Il est important de noter que le paramètre de la couche de cisaillement est plus efficace que les deux autres paramètres des couches supérieure et inférieure (\bar{K}_u, \bar{K}_l). On note aussi que pour une distribution logarithmique des porosités (FGM-III), la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ augmente.

La fonction logarithmique à un effet significatif sur les indices de volume à haute porosité et n'a aucun effet significatif sur les indices de volume à faible porosité. De plus, il est important de souligner que la fondation élastique de type Kerr joue un rôle important dans les réponses imparfaites des plaques FG.

La figure V.1 montre la distribution de la déflexion \bar{w} à travers l'épaisseur des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation Kerr ($a=10h, p=5, \bar{K}_l=100$).

La déflexion \bar{w} diminue avec l'augmentation des deux paramètres de la couche supérieure (\bar{K}_u) et de la couche de cisaillement (\bar{K}_s) du ressort, et augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité α .

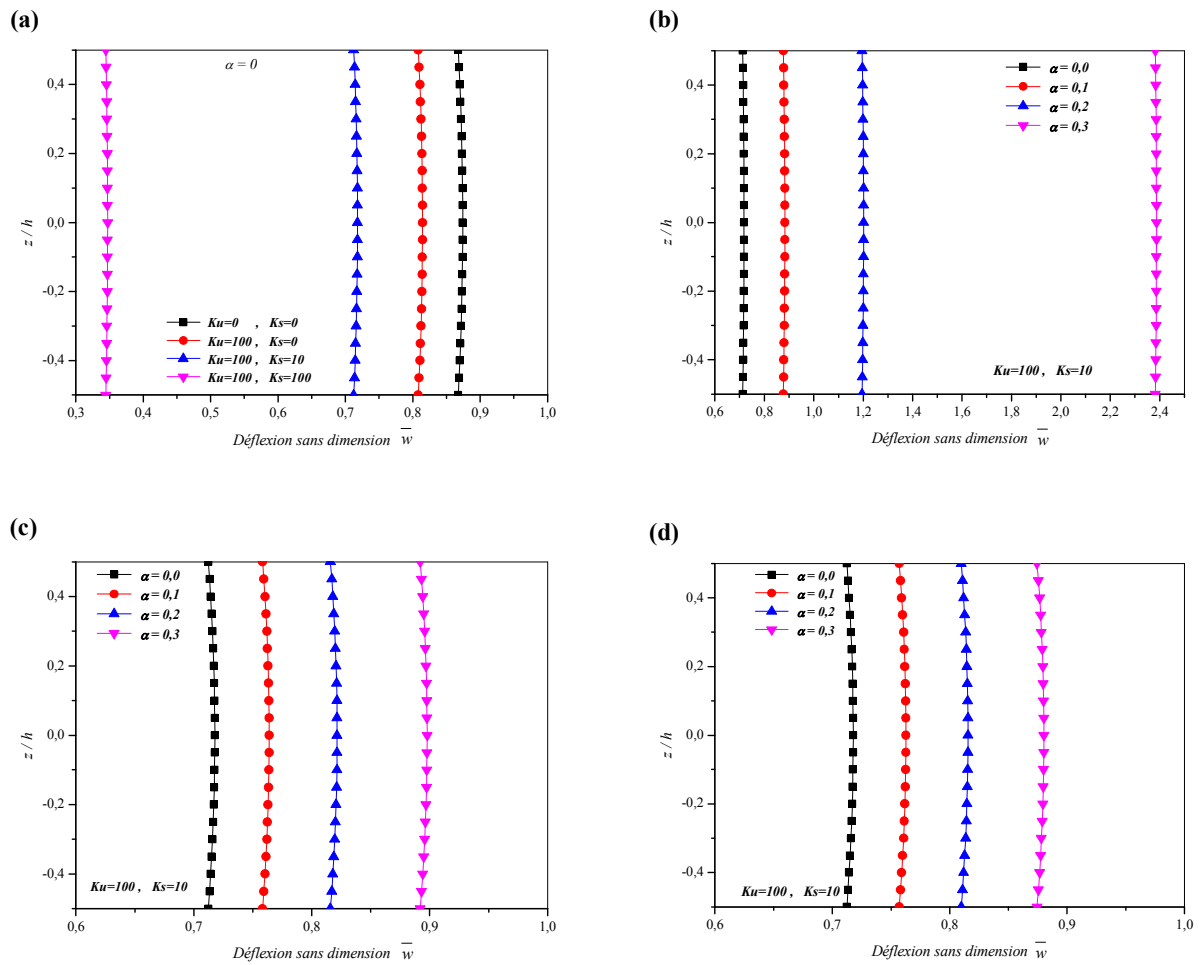


Figure V.1. La distribution de la déflexion \bar{w} à travers l'épaisseur des plaques isotropes FG carrées poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de Kerr : **(a)** pour différents paramètres des fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($a = 10h, p = 5, \bar{K}_l = 100$).

La figure V.2 montre les variations de la déflexion non dimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport longueur épaisseur (a/h) des plaques FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation Kerr ($p = 5, \bar{K}_l = 100$). On observe que la déflexion \bar{w} diminue avec l'augmentation des deux paramètres (\bar{K}_u, \bar{K}_s), et le rapport a/h . On observe également lorsque la fraction volumique de porosité α augmente, la déflexion non dimensionnelle \bar{w} augmente.

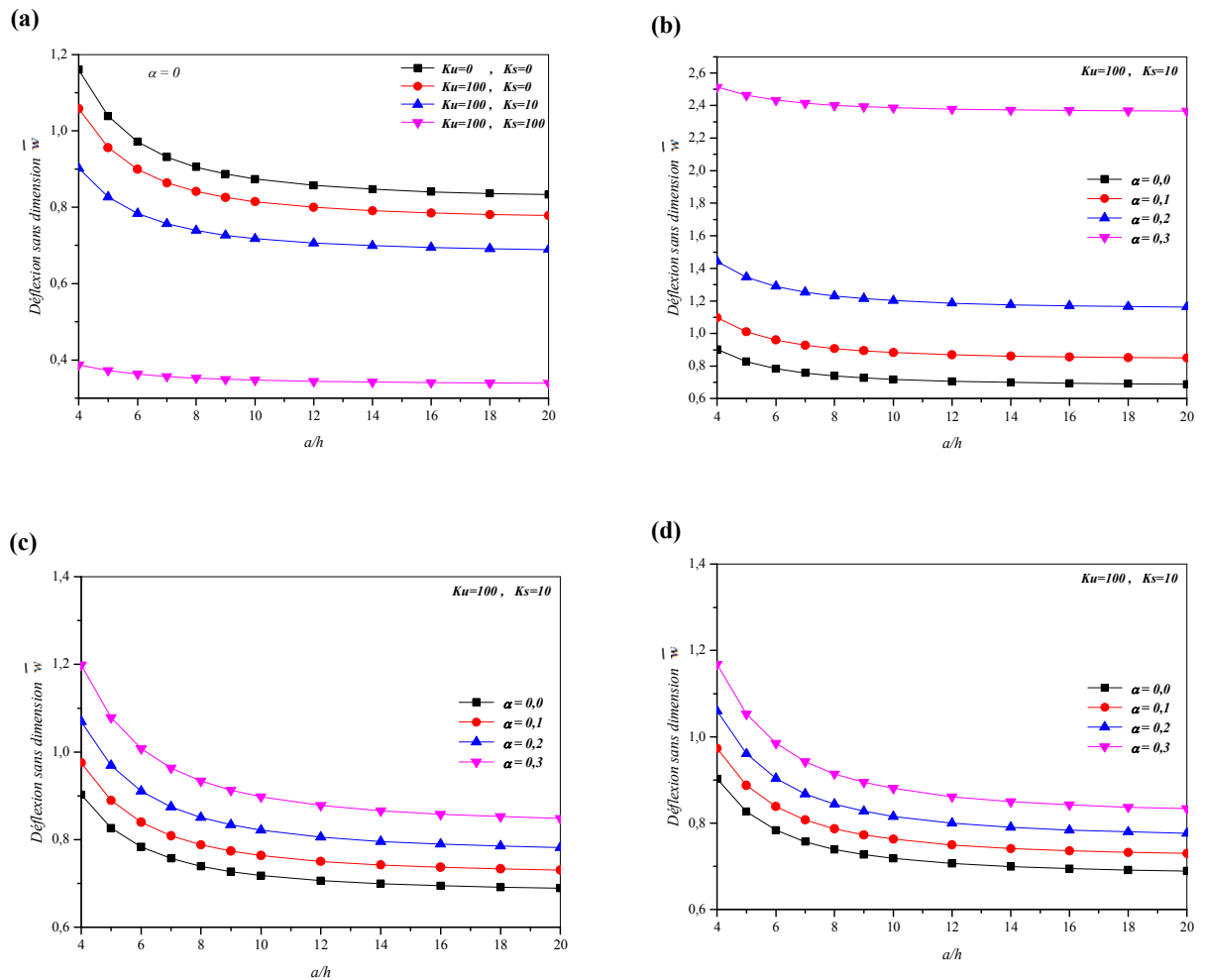


Figure V.2. Variation de la déflexion \bar{w} en fonction du rapport longueur épaisseur (a/h) des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de type kerr : **(a)** pour différents paramètres de fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($p=5, \bar{K}_l=100$).

La figure V.3 illustre les variations de la déflexion non dimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport a/b des plaques FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de type Kerr ($a=10h, p=5, \bar{K}_l=100$). On peut remarquer que la déflexion \bar{w} diminue avec l'augmentation des deux paramètres (\bar{K}_u, \bar{K}_s) et diminue directement lorsque a/b augmente, comme le montre la figure V.3 (a), On peut remarquer aussi lorsque la fraction volumique de porosité α augmente, la déflexion \bar{w} augmente. De plus, il a observé que la déflexion \bar{w} pour une distribution des porosités uniforme est plus grande qu'une autre distribution.

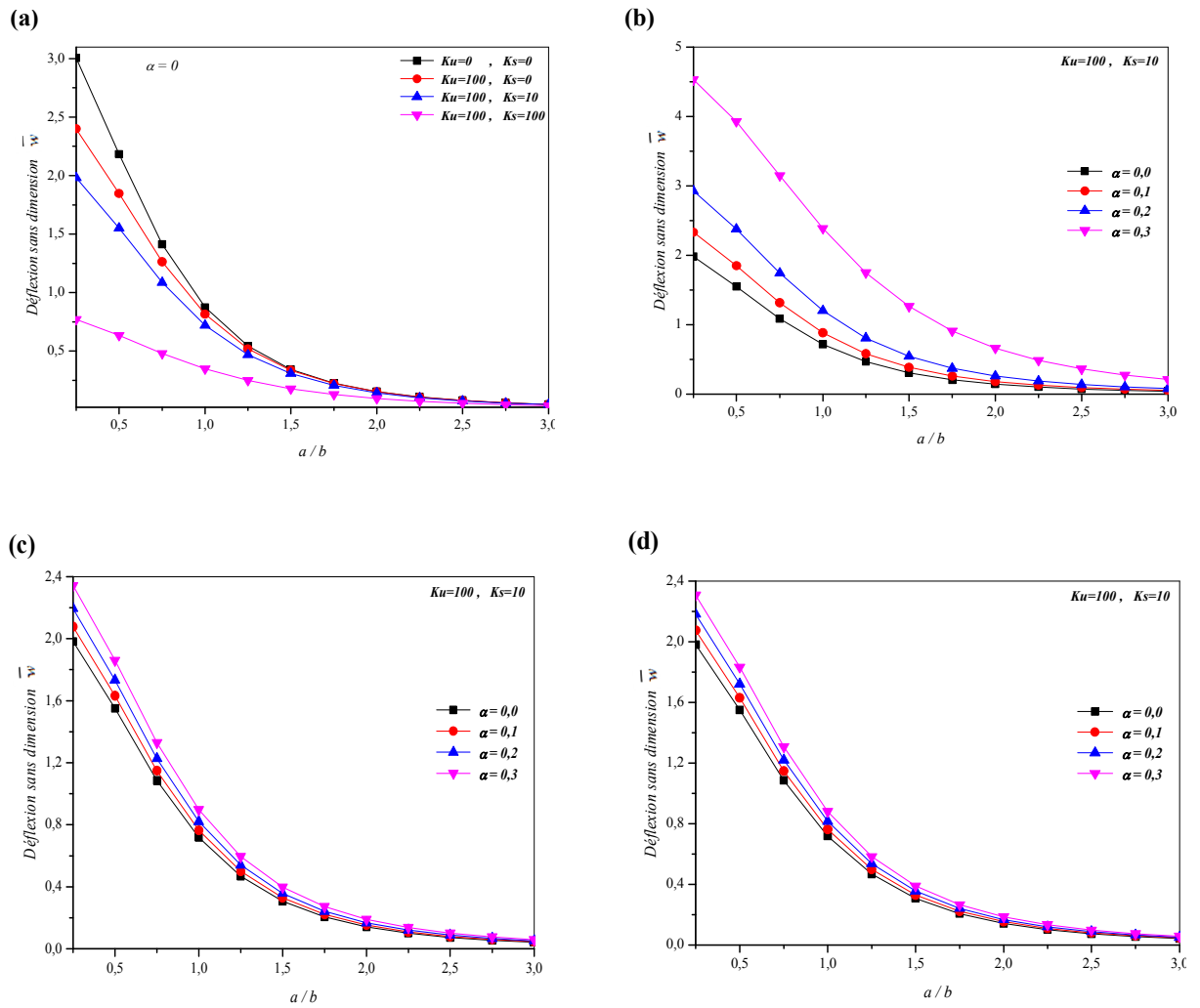


Figure V.3. Variation de la déflexion \bar{w} en fonction du rapport d'aspect a/b des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de kerr : **(a)** pour différents paramètres de fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($a = 10h$, $p = 5$, $\bar{K}_l = 100$).

La figure V.4 montre la contrainte axiale dans le plan $\bar{\sigma}_x$ des plaques carrées FG poreuses et non poreuses à travers l'épaisseur reposant sur la fondation de type Kerr ($a = 10h$, $p = 5$, $\bar{K}_l = 100$), La contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ augmente le long du demi plan inférieur en augmentant les deux paramètres (\bar{K}_u, \bar{K}_s) et augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité α . De plus, il a observé aussi que la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ diminue le long du demi plan supérieur en augmentant les deux paramètres (\bar{K}_u, \bar{K}_s) .

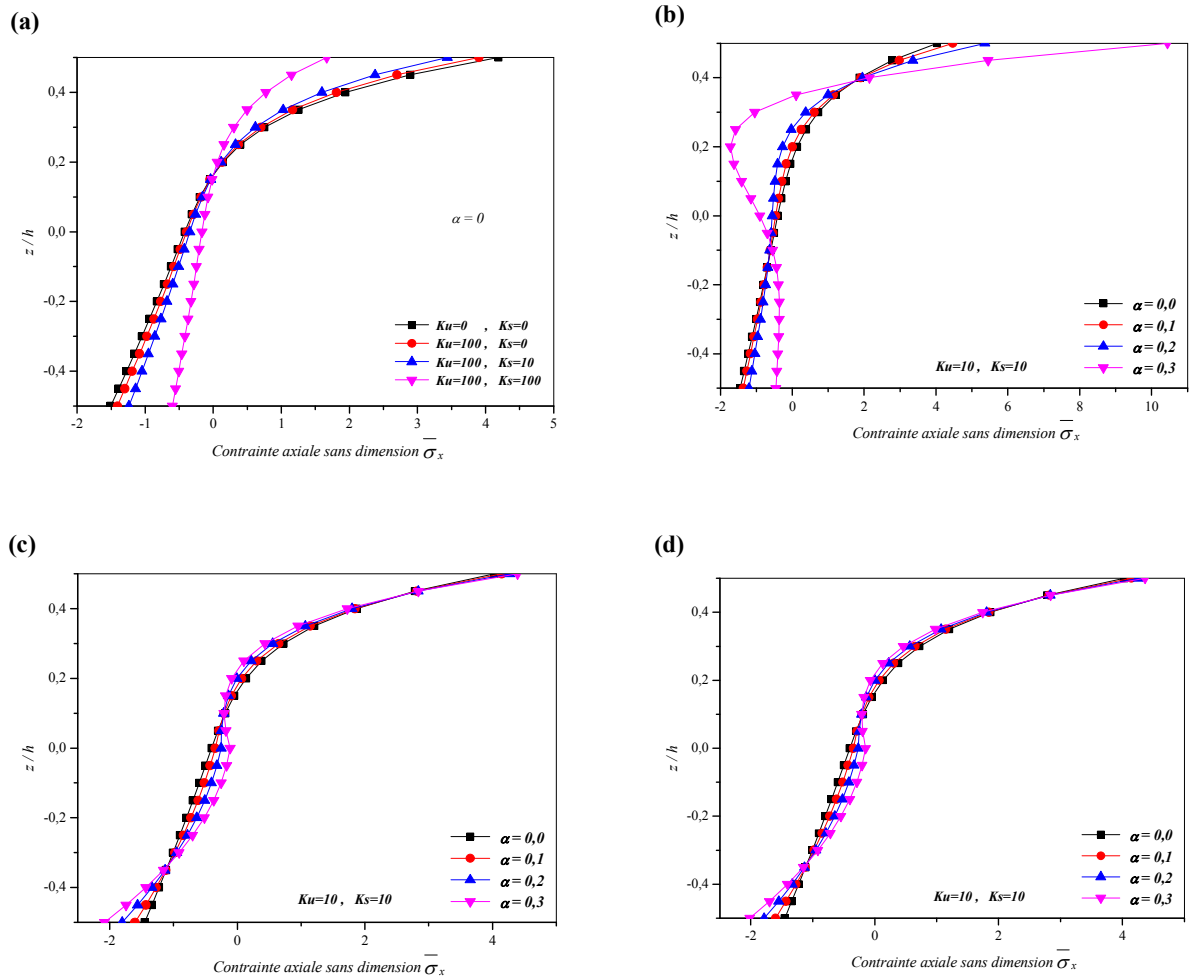


Figure V.4. Variation de la Contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de type Kerr : **(a)** pour différents paramètres de fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($a = 10h$, $p = 5$, $\bar{K}_l = 100$, $\bar{K}_u = 10$, $\bar{K}_s = 10$).

La figure V.5 montre la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ dans les plaques FG poreuses et non poreuses à travers l'épaisseur pour différentes valeurs de rigidité de la fondation de kerr (\bar{K}_u, \bar{K}_s), et la fraction volumique de porosité α , respectivement ($a = 10h$, $p = 5$, $\bar{K}_l = 100$).

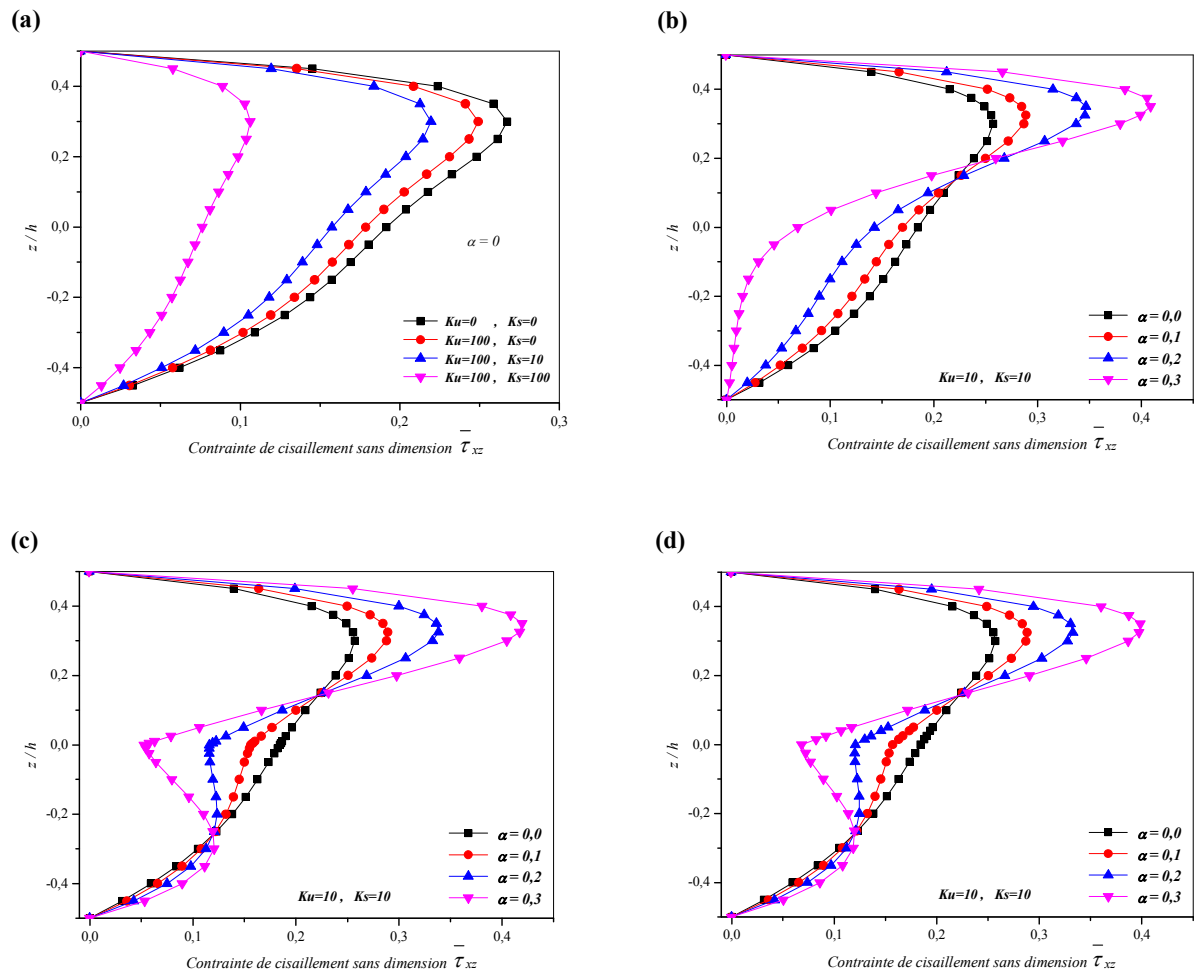


Figure V.5. Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de Kerr : **(a)** pour différents paramètres de fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($a = 10h$, $p = 5$, $\bar{K}_l = 100$).

On peut noter que la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ diminue en augmentant les paramètres de rigidités de la fondation (\bar{K}_u, \bar{K}_s), et on peut observer aussi que la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ augmente le long du demi plan supérieur en $0.2h \leq z \leq 0.5h$ et diminue le long du demi plan inférieur en $-0.5h \leq z \leq 0.2h$ avec l'augmentant de la fraction volumique de porosité α . Il est aussi clair qu'au niveau de la surface supérieure et inférieure de la plaque, la contrainte de cisaillement est égale à zéro.

V.2.2. Résultats de l'analyse de la vibration

Le tableau V.9 montre les fréquences non dimensionnelles d'une plaque carrée homogène simplement supportée pour $a/h=10$ en utilisant la présente théorie. Les solutions actuelles qui prennent en compte à la fois le cisaillement transverse et la déformation normale transversale sont comparées à celles obtenues par Zhou et al. (2002) à partir de la solution d'élasticité tridimensionnelles et à celles données par les théories de déformation de cisaillement quasi-3D de Jha et al. (2013) ; Akavci et Tanrikulu (2015) ; Benahmed et al. (2017) ; Farzam-Rad et al. (2017) et Davood et al. (2018). Un bon accord est obtenu entre la solution actuelle et les solutions publiées.

Tableau V.9. Les fréquences non dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque carrée isotrope avec $\nu = 0.3$ et $a/h = 10$.

Théories	Mode (m, n)						
	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 3)	(2, 4)	(1, 5)
Exact 3D (Zhou et al. 2002)	0.0932	0.2226	0.3421	0.5239	0.6889	0.7511	0.9268
Jha et al. (2013) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.5240	0.6892	0.7515	0.9275
Akavci et Tanrikulu (2015) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0932	0.2227	0.3424	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0932	0.2229	0.3425	0.5248	0.6904	0.7528	0.9294
Farzam-Rad et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0932	0.2227	0.3423	0.5243	0.6896	0.7520	0.9284
Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.5240	0.6892	0.7514	0.9274
Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.5240	0.6891	0.7513	0.9273

De plus, la comparaison des fréquences non dimensionnelles est répertoriée dans le tableau V.10 pour différentes valeurs des rapports a/b et a/h . Une excellente corrélation est observée entre la fréquence obtenue à partir de la présente théorie et celle des résultats exacts-3D (Jin et al. 2014) et quasi-3D (Mantari et al. 2014 ; Farzam-Rad et al. 2017 et Davood et al. 2018).

Tableau V.10. Les fréquences non dimensionnelles $\tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FG avec $\varepsilon_z \neq 0$

a/h	Théories	$a/b=0.5$			$a/b=1$		
		$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$
2	Exact 3D (Jin et al, 2014)	0.9570	0.7937	0.7149	1.8470	1.4687	1.3095
	Mantari et al. (2014) $\varepsilon_z \neq 0$	1.3040	1.0346	0.9293	1.8505	1.4774	1.3219
	Farzam-Rad et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.9570	0.7961	0.7193	1.8528	1.4788	1.3226
	Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	1.3039	1.0345	0.9293	1.8503	1.4772	1.3218
	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	1.3038	1.0344	0.9292	1.8500	1.4770	1.3216
5	Exact 3D (Jin et al, 2014)	0.2713	0.2088	0.1888	0.4169	0.3222	0.2905
	Mantari et al. (2014) $\varepsilon_z \neq 0$	0.2712	0.2115	0.1926	0.4168	0.3260	0.2961
	Farzam-Rad et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.2714	0.2116	0.1926	0.4170	0.3262	0.2961
	Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.2712	0.2115	0.1926	0.4168	0.3260	0.2961
	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.2712	0.2115	0.1926	0.4168	0.3260	0.2961
10	Exact 3D (Jin et al, 2014)	0.0719	0.0550	0.0499	0.1135	0.0870	0.0789
	Mantari et al. (2014) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0718	0.0557	0.0510	0.1135	0.0882	0.0806
	Farzam-Rad et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0719	0.0558	0.0510	0.1136	0.0882	0.0806
	Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0718	0.0557	0.0510	0.1135	0.0882	0.0806
	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0718	0.0557	0.0510	0.1135	0.0882	0.0806

La fréquence non dimensionnelle $\tilde{\omega}$ des plaques FG isotropes par rapport aux deux paramètres de Winkler/Pasternak, l'indice de loi de puissance p et le rapport longueur épaisseur a/h sont répertoriés dans le tableau V.11. Ces résultats sont prédits par cette théorie qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse et la déformation normale (effet d'étirement), ainsi que des théories de références (Benahmed et al. 2017 ; Davood et al. 2018).

Il est évident que les résultats actuels concernant la fréquence non dimensionnelle des plaques FG avec la fondation de type Winkler/Pasternak sont identiques.

Tableau V.11. La fréquence non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FG carrée isotrope reposant sur des fondations de Winkler/Pasternak.

\bar{K}_w	\bar{G}_p	a/h	Théories	p				
				0	0.5	1	2	5
0	0	20	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0291	-	0.0226	0.0207	-
			Baferani et al. (2011) $\varepsilon_z = 0$	0.0290	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0291	0.0248	0.0226	0.0206	0.0195
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0291	0.0248	0.0226	0.0206	0.0195
		10	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.1136	-	0.0883	0.0807	-
			Baferani et al. (2011)	0.1134	0.0975	0.0891	0.0819	0.0767
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.1135	0.0970	0.0882	0.0806	0.0755
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1135	0.0970	0.0882	0.0806	0.0755
		5	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.4174	-	0.3264	0.2965	-
			Baferani et al. (2011)	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.4168	0.3586	0.3260	0.2961	0.2722
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.4168	0.3586	0.3260	0.2961	0.2722
100	0	20	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0298	-	0.0236	0.0218	-
			Baferani et al. (2011)	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.0210
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208
		10	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.1164	-	0.0924	0.0854	-
			Baferani et al. (2011)	0.1162	0.1012	0.0933	0.0867	0.0821
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.1163	0.1006	0.0923	0.0853	0.0809
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1163	0.1006	0.0923	0.0853	0.0809
		5	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.4286	-	0.3431	0.3158	-
			Baferani et al. (2011)	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.4284	0.3734	0.3431	0.3159	0.2950
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.4282	0.3731	0.3428	0.3155	0.2946
100	100	20	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0411	-	0.0386	0.0383	-
			Baferani et al. (2011)	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0410	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
		10	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.1614	-	0.1521	0.1509	-
			Baferani et al. (2011)	0.1619	0.1563	0.1542	0.1535	0.1543
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.1616	0.1551	0.1525	0.1512	0.1521
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1613	0.1548	0.1521	0.1509	0.1517
		5	Benahmed et al. (2017) $\varepsilon_z \neq 0$	0.6089	-	0.5794	0.5752	-
			Baferani et al. (2011)	0.6162	0.6026	0.5978	0.5970	0.5993
			Davood et al. (2018) $\varepsilon_z \neq 0$	0.6137	0.5940	0.5856	0.5815	0.5843
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.6101	0.5898	0.5811	0.5769	0.5792

V .2.2.1. Effets des fondations élastiques (Winkler/Pasternak) et du rapport longueur épaisseur des plaques FG isotropes

Le tableau V.12 présente les effets des paramètres des fondations élastiques (\bar{K}_w, \bar{G}_p) et du rapport longueur épaisseur a/h sur les paramètres de la fréquence $\bar{\omega}$. Pour cela, trois types des distributions de porosité ont été considérés, une distribution uniforme des porosités (FGM I), une distribution non uniforme des porosités (FGM II) et une distribution logarithmique non uniforme des porosités (FGM III).

Tableau V.12. Variations des paramètres de la fréquence $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité des fondations de Winkler/Pasternak ($p = 1$).

(\bar{K}_w, \bar{G}_p)	a/h	Théories	FGM (Parfait)	FGM-I (Uniforme)		FGM-II (Non uniforme)		FGM-III (Logarithmique Non uniforme)	
			$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$
(0, 0)	20	Davood et al. (2018)	9.020	8.370	5.738	9.052	9.117	9.050	9.106
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	9.020	8.370	5.738	9.051	9.116	9.053	9.105
	10	Davood et al. (2018)	8.818	8.203	5.659	8.845	8.896	8.843	8.889
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	8.818	8.203	5.659	8.842	8.895	8.859	8.887
	5	Davood et al. (2018)	8.151	7.641	5.378	8.164	8.178	8.163	8.178
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	8.151	7.641	5.378	8.153	8.177	8.225	8.177
(100, 0)	20	Davood et al. (2018)	9.430	8.917	6.933	9.505	9.655	9.501	9.626
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	9.429	8.917	6.933	9.503	9.653	9.504	9.624
	10	Davood et al. (2018)	9.231	8.753	6.850	9.301	9.438	9.298	9.412
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	9.228	8.750	6.848	9.296	9.434	9.312	9.408
	5	Davood et al. (2018)	8.577	8.203	6.559	8.636	8.738	8.632	8.719
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	8.569	8.196	6.553	8.617	8.729	8.709	8.711
(100,100)	20	Davood et al. (2018)	15.439	16.320	18.625	16.011	17.098	15.982	16.800
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	15.430	16.313	18.621	16.002	17.089	15.975	16.871
	10	Davood et al. (2018)	15.245	16.148	18.464	15.812	16.883	15.783	16.668
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	15.211	16.118	18.446	15.777	16.850	15.758	16.635
	5	Davood et al. (2018)	14.640	15.595	17.872	15.192	16.221	15.164	16.016
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	14.528	15.477	17.731	15.073	16.100	15.080	15.896

Il est clair que pour des distributions de porosité non uniformes, la fréquence $\bar{\omega}$ augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité α sans ou avec fondations élastiques et la fréquence $\bar{\omega}$ augmentent avec l'augmentation de a/h . De plus, la fréquence $\bar{\omega}$ augmente aussi avec l'existence des fondations élastiques. L'intégration des paramètres de fondation de Pasternak donne plus de résultats que celle des paramètres de fondation de Winkler.

V .2.2.2. Effets des paramètres de la fondation de Kerr, des indices de fraction volumique et du rapport longueur épaisseur

Le tableau V.13 montre les effets des paramètres de la fondation de Kerr (\bar{K}_u, \bar{K}_s) , des indices de fraction volumique p et du rapport longueur épaisseur a/h sur la fréquence $\bar{\omega}$ des plaques FG carrées isotropes reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$) sur la base de la théorie actuel quasi-3D de déformation de cisaillement des plaques.

Comme on peut le voir que les paramètres du ressort supérieur et de la couche de cisaillement à des effets croissants. Le paramètre de cisaillement à plus d'effet que les constantes du ressort inférieur et supérieur.

Tableau V.13. Variations des fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques carrées FG reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$).

\bar{K}_u	\bar{K}_s	a/h	Théories	Plaque Isotrope		Plaque FG			
				Céramique	Métal	$p = 0.5$	$p = 1.0$	$p = 2.0$	$p = 5.0$
100	0	20	Davood et al. (2018)	0.0294	0.0157	0.0253	0.0231	0.0212	0.0202
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0294	0.0158	0.0253	0.0231	0.0212	0.0202
		10	Davood et al. (2018)	0.1149	0.0615	0.0988	0.0903	0.0830	0.0783
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1149	0.0624	0.0988	0.0903	0.0830	0.0782
		5	Davood et al. (2018)	0.4226	0.2278	0.3661	0.3347	0.3061	0.2838
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.4225	0.2375	0.3659	0.3345	0.3060	0.2836
100	100	20	Davood et al. (2018)	0.0356	0.0285	0.0329	0.0316	0.0308	0.0305
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0356	0.0285	0.0329	0.0316	0.0307	0.0305
		10	Davood et al. (2018)	0.1396	0.1125	0.1294	0.1245	0.1212	0.1201
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1395	0.1137	0.1292	0.1243	0.1210	0.1198
		5	Davood et al. (2018)	0.5246	0.4332	0.4906	0.4739	0.4615	0.4560
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.5226	0.4492	0.4883	0.4714	0.4589	0.4531
200	100	20	Davood et al. (2018)	0.0375	0.0317	0.0351	0.0341	0.0335	0.0334
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0375	0.0318	0.0351	0.0341	0.0334	0.0334
		10	Davood et al. (2018)	0.1473	0.1255	0.1385	0.1345	0.1320	0.1316
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1471	0.1269	0.1382	0.1342	0.1317	0.1313
		5	Davood et al. (2018)	0.5559	0.4850	0.5273	0.5139	0.5047	0.5024
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.5533	0.5026	0.5243	0.5107	0.5014	0.4988
200	200	20	Davood et al. (2018)	0.0440	0.0419	0.0427	0.0423	0.0422	0.0426
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.0440	0.0420	0.0427	0.0422	0.0422	0.0426
		10	Davood et al. (2018)	0.1735	0.1660	0.1687	0.1670	0.1668	0.1684
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.1731	0.1678	0.1683	0.1666	0.1663	0.1680
		5	Davood et al. (2018)	0.6617	0.5511	0.6484	0.6436	0.6431	0.6494
			Présente $\varepsilon_z \neq 0$	0.6572	0.5511	0.6431	0.6380	0.6372	0.6430

Les variations des paramètres de la fréquence $\bar{\omega}$ des plaques carrées FG poreuses et non poreuses en fonction de la rigidité de la fondation de Kerr ($p=1$, $\bar{K}_l=100$) sont considérées pour étudier l'influence de l'augmentation de l'indice de volume de porosité α . Pour la plaque FG poreuse, trois types de distribution de porosité sont étudiés. Divers rapports longueur-épaisseur et paramètres de la fondation de Kerr sont présentés.

Les résultats sont présentés au tableau V.14. Il est à noter que les paramètres de la fréquence $\bar{\omega}$ de la plaque FG augmentent à mesure que les paramètres de la couche supérieure (\bar{K}_u) et de la couche de cisaillement (\bar{K}_s) du ressort augmentent. Il est important de noter aussi que le paramètre de la couche de cisaillement est plus efficace que les deux autres paramètres de la couche supérieure et inférieure (\bar{K}_u, \bar{K}_l).

Tableau V.14. Variations des fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées FG parfaites et imparfaites en fonction de la rigidité de la fondation de Kerr ($p = 1, \bar{K}_l = 100$).

(\bar{K}_u, \bar{K}_s)	a/h	Théories	FGM	FGM-I		FGM-II		FGM-III	
			(Parfait)	(Uniforme)		(Non uniforme)		(Logarithmique Non uniforme)	
			$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$
(100, 0)	20	Davood et al. (2018)	9.227	8.648	6.364	9.281	9.390	9.278	9.369
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	9.227	8.648	6.363	9.280	9.388	9.281	9.368
	10	Davood et al. (2018)	9.027	8.482	6.282	9.076	9.171	9.073	9.154
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	9.026	8.481	6.282	9.072	9.169	9.089	9.151
	5	Davood et al. (2018)	8.367	7.927	5.997	8.403	8.462	8.401	8.453
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	8.363	7.923	5.994	8.388	8.457	8.457	8.448
(100,100)	20	Davood et al. (2018)	12.643	12.969	13.780	13.006	13.702	12.987	13.562
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	12.638	12.965	13.778	12.999	13.696	12.984	13.556
	10	Davood et al. (2018)	12.454	12.807	13.656	12.811	13.494	12.793	13.357
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	12.433	12.789	13.646	12.789	13.474	12.783	13.337
	5	Davood et al. (2018)	11.849	12.281	13.216	12.196	12.847	12.178	12.718
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	11.786	12.218	13.153	12.126	12.780	12.164	12.651
(200,100)	20	Davood et al. (2018)	13.639	14.174	15.564	14.079	14.920	14.056	14.751
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	13.632	14.169	15.561	14.072	14.913	14.052	14.744
	10	Davood et al. (2018)	13.449	14.009	15.426	13.884	14.710	13.862	14.545
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	13.423	13.987	15.414	13.857	14.686	13.846	14.520
	5	Davood et al. (2018)	12.847	13.477	14.934	13.270	14.063	13.249	13.905
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	12.767	13.395	14.847	13.183	13.977	13.209	13.820
(200,200)	20	Davood et al. (2018)	16.901	18.040	21.010	17.575	18.851	17.541	18.595
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	16.890	18.032	21.006	17.564	18.841	17.532	18.584
	10	Davood et al. (2018)	16.704	17.861	20.832	17.372	18.630	17.338	18.377
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	16.662	17.825	20.807	17.330	18.589	17.304	18.337
	5	Davood et al. (2018)	16.089	17.286	20.147	16.739	17.947	16.706	17.706
		Présente $\varepsilon_z \neq 0$	15.950	17.136	19.956	16.592	17.795	16.587	17.556

Le tableau V.14 montre l'influence de l'indice de volume de porosité pour les différents modèles de distribution de porosité dans une plaque FG simplement appuyée reposant sur une fondation élastique de type Kerr. On note que pour une distribution logarithmique de porosité non uniforme, la fréquence $\bar{\omega}$ diminue. La fonction logarithmique a un effet significatif sur les indices de volume à haute porosité et n'a aucun effet significatif sur les indices de volume à faible porosité. De plus, il est également important de souligner que la fondation élastique Kerr joue un rôle important dans les réponses imparfaites des plaques FG.

La fréquence non dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FG carrées simplement appuyées reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100$) pour diverses valeurs des rapports longueur épaisseur a/h est représentée sur la figure V.6 basée sur la nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

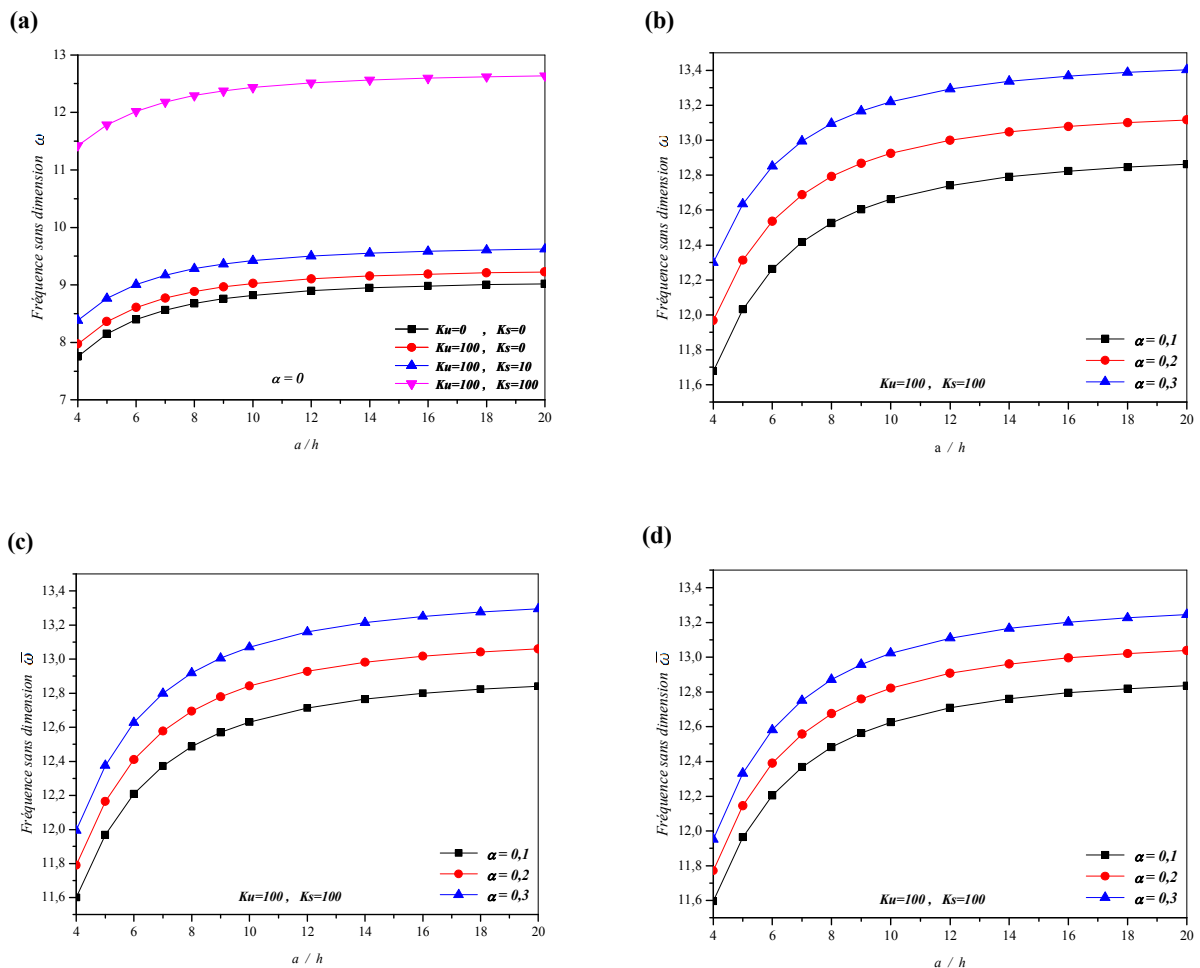


Figure V.6. Effet du rapport d'épaisseur a/h sur la fréquence non dimensionnelle des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation de Kerr: **(a)** pour différents paramètres de fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($p=1, \bar{K}_l=100, \bar{K}_u=100, \bar{K}_s=100$).

Comme on peut le voir, la fréquence augmente considérablement avec l'augmentation des paramètres de fondation élastique (\bar{K}_u, \bar{K}_s) et l'indice de volume de porosité.

La figure V.7 illustre les variations des fréquences $\bar{\omega}$ en fonction du rapport a/b des plaques FG carrées simplement supportées reposant sur la fondation de Kerr ($\bar{K}_l = 100, p = 1$) pour diverses valeurs des paramètres de la fondation élastique (\bar{K}_u, \bar{K}_s) et de l'indice de volume de porosité.

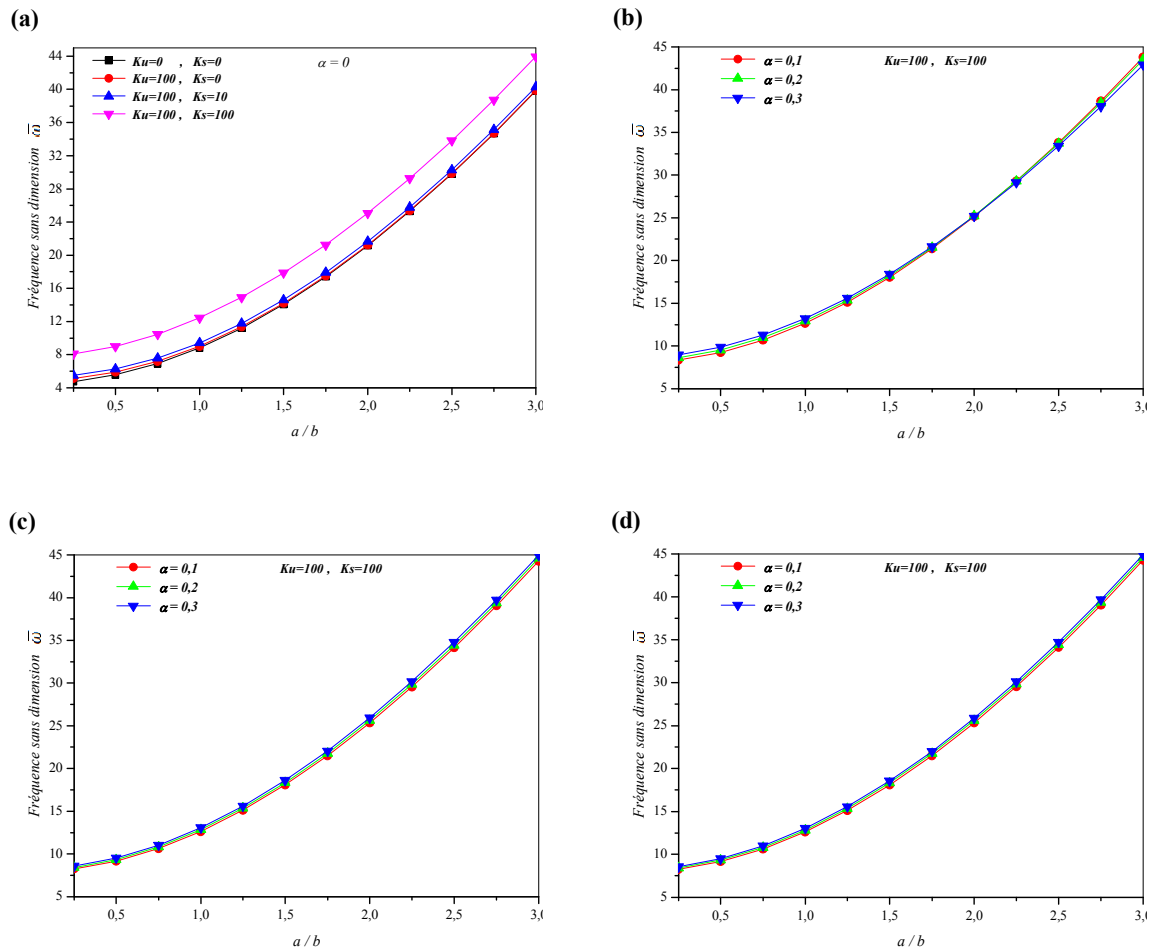


Figure V.7. Effet du rapport d'épaisseur a/b sur la fréquence non dimensionnelle des plaques carrées FG poreuses et non poreuses reposant sur la fondation Kerr: **(a)** pour différents paramètres de fondations, **(b)** FGM-I (uniforme) pour différents indices de volume de porosité, **(c)** FGM-II (non uniforme) pour différents indices de volume de porosité et **(d)** FGM-III (logarithmique non uniforme) pour différents indices de volume de porosité ($a = 10 h, \bar{K}_l = 100, \bar{K}_u = 100, \bar{K}_s = 100, p = 1$).

Il est à noter que les paramètres de la fréquence $\bar{\omega}$ de la plaque FG augmentent à mesure que les paramètres de la couche supérieure (\bar{K}_u) et de la couche de cisaillement (\bar{K}_s) du ressort augmentent. Les fréquences augmentent directement à mesure que a/b augmentent et que l'indice de volume de porosité augmente.

*Conclusion générale
& Perspectives*

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans ce travail de recherche, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse du comportement en flexion et en vibration des plaques poreuses FG reposant sur des fondations élastiques de type Winkler/Pasternak/Kerr est proposée.

La présente théorie contient seulement cinq inconnues dont la contrainte de cisaillement transverse est parabolique et satisfait les conditions de nullité sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Les équations de mouvement dérivées du principe d'Hamilton sont résolues analytiquement pour les problèmes de la flexion et de la vibration d'une plaque simplement appuyée. Des résultats sont effectués et comparés aux résultats trouvés dans la littérature pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie.

Les résultats obtenus à partir de ce travail nous a permis de mettre en évidence certains points, à savoir :

1. Des études comparatives ont révélé que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi plus efficace car le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la présente théorie est seulement cinq, par rapport à d'autres théories qui contenant six inconnues et plus.
2. Les effets des paramètres de Winkler/Pasternak, de l'indice de loi de puissance p et du rapport longueur-épaisseur a/h dans l'analyse de la flexion et de la vibration sont étudiés. Les résultats obtenus par la présente théorie qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse et la déformation normale (effet d'étirement) et la fondation Winkler/Pasternak sont identiques.
3. L'influence de l'effet de la déformation normale (effet d'étirement) sur les performances des plaques imparfaites contenant des porosités est en bon accord pour tous les cas.
4. Les effets des paramètres de la fondation Kerr, des indices de fraction volumique p et du rapport longueur épaisseur a/h sur la flexion et la vibration sont analysés, puis nous avons vu que la déflexion non dimensionnelle \bar{w} de la plaque FG avec la fondation Kerr est plus petite que celles intégrées dans la fondation de type Winkler/Pasternak en raison d'un ressort supérieur supplémentaire tandis que les fréquences $\bar{\omega}$ augmentent.

En perspective, une amélioration de la formulation actuelle sera envisagée dans les futurs travaux visant à examiner d'autres types de matériaux (Hirwani et al. 2016 b ; Keikha et al. 2018 ; Al-Osta 2019 ; Fadoun 2019 ; Rajabi et Mohammadi Mehr 2019 ; Kunche et al. 2019).

Références bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

Abrate, S. (2008), "Functionally graded plates behave like homogeneous plates", *Compos. Part B: Eng.*, 39(1), 151-158. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2007.02.026>.

Addou, F. Y., Meradjah, M., Bousahla, A. A., Benachour, A., Bourada, F., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2019). "Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT". *Computers and Concrete*, 24(4), 347-367. <https://doi.org/10.12989/cac.2019.24.4.347>

Adim, B. and Daouadji, T.H. (2016), "Effects of thickness stretching in FGM plates using a quasi-3D higher order shear deformation theory", *Adv. Mater. Res.*, 5(4), 223-244. <https://doi.org/10.12989/amr.2016.5.4.223>.

Aicha, K., Rabia, B., Daouadji, T. H., & Bouzidene, A. (2020). "Effect of porosity distribution rate for bending analysis of imperfect FGM plates resting on Winkler-Pasternak foundations under various boundary conditions". *Coupled systems mechanics*, 9(6), 575-597. <https://doi.org/10.12989/csm.2020.9.6.575>

Ait Atmane. H., Tounsi. A., Mechab. I., Adda Bedia. E.A, (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.

Akavci, S. and Tanrikulu, A. (2015), "Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories", *Compos. Part B: Eng.*, 83, 203-215. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.043>.

Akbaş, Ş.D. (2015), "Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments", *Steel Compos. Struct.*, 19(6), 1421-1447. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.19.6.1421>.

Al-Osta, M.A. (2019), "Shear behaviour of RC beams retrofitted using UHPFRC panels epoxied to the sides", *Comput. Concrete*, 24(1), 37-49. <https://doi.org/10.12989/cac.2019.24.1.037>.

Amar, L.H.H., Kaci, A. and Tounsi, A. (2017), "On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams with porosities", *Struct. Eng. Mech.*, 64(5), 527-541. <https://doi.org/10.12989/sem.2017.64.5.527>.

Amar, L.H.H., Kaci, A., Yeghnem, R. and Tounsi, A. (2018), "A new four-unknown refined theory based on modified couple stress theory for size-dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro-plate", *Steel Compos. Struct.*, 26(1), 89-102. <https://doi.org/10.12989/scs.2018.26.1.089>.

Aqida, S. N., Ghazali, M. I., & Hashim, J. (2004). "Effect of porosity on mechanical properties of metal matrix composite": an overview. *Jurnal Teknologi*, 17-32.

Arefi M. (2015), "Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections", *Steel Compos. Struct.*, 18(3), 659-672. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.18.3.659>.

Arefi, M. (2015), "The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers", *Smart Struct. Syst.*, 15 (5), 1345-1362. <http://dx.doi.org/10.12989/sss.2015.15.5.1345>.

Atmane, H. A., Tounsi, A., & Bernard, F., (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations" *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13 (1), 71-84.

Attia, A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S., (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 65, No. 4 (2018) 453-464.

Avcar, M. (2019), "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, 30(6), 603-615. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.6.603>.

B

Bachir Bouiadjra, R., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bernard, F., (2018), "Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical models", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 3 (2018) 317-328.

Bachiri, A., Bourada, M., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., (2018), "Thermodynamic effect on the bending response of elastic foundation FG plate by using a novel four variable refined plate theory", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 41, No. 8, 1042–1062.

Baferani, A.H., Saidi, A. and Ehteshami, H. (2011), "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Compos. Struct.*, 93(7), 1842-1853. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020>.

Bao. G., Wang. L., (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings" *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.

Barati, M. R., (2017), "Nonlocal-strain gradient forced vibration analysis of metal foam nanoplates with uniform and graded porosities". *Advances in nano research*, Vol 5 N°4, p 393.

- Baron. C., Naili. S., (2008), "Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.
- Belkacem, A., Tahar, H.D., Abderrezak, R., Amine, B. M., Mohamed, Z. and Boussad, A. (2018), "Mechanical buckling analysis of hybrid laminated composite plates under different boundary conditions", *Struct. Eng. Mech.*, 66(6), 761-769.
<https://doi.org/10.12989/sem.2018.66.6.761>.
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. Meftah, S.A., (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B Eng.*, 42, 1386-1394.
- Benahmed, A., Mohammed S,A, Houari., Benyoucef, S., Belakhdar, Kh., Tounsi, A., (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation" *J. Geomechanics and Engineering*, Vol. 12, No.1, 9-34; <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.1.009>.
- Benahmed A., (2020), "Etude des propriétés Physique des nanostructures fabriquées à partir des mélanges Céramique -métal", Thèse de doctorat en Physiques, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, Département Matériaux Et Développement Durable.
- Benatta. M.A., Mechab. I., Tounsi. A., Adda Bedia. E.A., (2008), "Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects". *Computational Materials Science*; 44 (2): 765–773.
- Benferhat. R., Hassaine D. T., Hadji. L., Mohamed. S. M. (2016), "Static analysis of the FGM plate with porosities", *Steel and Comt. Stres.* 21(1):123-136.
<https://doi.org/10.12989/scs.2016.21.1.123>.
- Benferhat, R., Daouadji, T. H., Mansour, M. S., & Hadji, L., (2016). "Effect of porosity on the bending and free vibration response of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundations", *Earthquakes and Structures*, 10(6), 1429-1449.
- Bensaid, I., (2017), "A refined nonlocal hyperbolic shear deformation beam model for bending and dynamic analysis of nano-scale beams", *Adv. Nano Res.*, 5(2), 113-126.
<https://doi.org/10.12989/anr.2017.5.2.113>.
- Benveniste, Y. (1987). "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials", *Mechanics of materials*; 6 (2), 147-157.
- Benyoucef. S., Mechab. I., Tounsi. A., Fekrar. A., Ait Atmane. H., Adda Bedia. E.A, (2010), "Bending of thick functionally graded plates resting on winkler–pasternak elastic foundations". *Mechanics of Composite Materials*; 46 (4): 425-434.
- Beranek, L. L. (1942). "Acoustic impedance of porous materials". *The Journal of the Acoustical Society of America*, 13(3), 248-260.

Bisen, H.B., Hirwani, C.K., Satankar, R.K., Panda, S.K., Mehar, K. and Patel, B. (2018) "Numerical study of frequency and deflection responses of natural fiber (Luffa) reinforced polymer composite and experimental validation", *J. Nat. Fib.*, 1-15.
<https://doi.org/10.1080/15440478.2018.1503129>.

Bishop. A., Lin. C.Y., Navaratnam. M., Rawlings. R.D., McShane. H.B., (1993) "A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process", *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18.

Boch. P., Chartier. T., Huttepain. M., (1986), "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites", *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations". *Steel Compos. Struct*; 14 (1) : 85-104.

Bouguenina, O., Belakhdar, K., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), "Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling". *Steel Compos. Struct* 19 (3), 679-695. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.19.3.679>.

Bouremana. M., Tounsi. A., Kaci. A., Mechab. I., (2009), "Controlling thermal deformation by using composite materials having variable fiber volume fraction". *Materials & Design*; 30 (7): 2532-2537.

Bowles, K.J., Frimpong, S., (1992), "Voids effects on the inter-laminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites", *Journal of Composite Materials*, Vol 26, pp 1487-1509.

C

Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M. and Soave, M. (2011). "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Compos. Part B*, 42, 123-133.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.10.005>.

Carrera, E., Brishetto, S. and Robaldo, A. (2008), "Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates", *AIAA J.*, 46, 194-203.
<https://doi.org/10.2514/1.32490>.

Carrera. E., (2002), "Temperature profile influence on layered plates response considering classical and advanced theories", *AIAA J*; 40: 419–427.

Chakraborty. A., Gopalakrishnan. S., Reddy. J.N., (2003), "A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials", *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539.

Champoux, Y., Stinson, M. R., & Daigle, G. A. (1991). "Air-based system for the measurement of porosity". *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89 (2), 910-916.

Chami, K., Messafer, T., & Hadji, L. (2020). "Analytical modeling of bending and free vibration of thick advanced composite beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundation", *Earthquakes and Structures*, 19(2), 91-101.
<https://doi.org/10.12989/eas.2020.19.2.091>

Chandra Mouli, B., Ramji, K., Kar, V.R., Panda, S.K., Lalepalli, A.K. and Pandey, H.K. (2018), "Numerical study of temperature dependent eigenfrequency responses of tilted Functionally graded shallow shell structures", *Struct. Eng. Mech.*, 68(5), 527- 536.

<https://doi.org/10.12989/sem.2018.68.5.527>.

Chelahi C. S. (2021), "Etude de la stabilité des structures non homogènes minces et épaisses", Thèse de doctorat 3ième Cycle en Génie Civil, Université de Saida, Dr. Moulay Tahar Faculté des Sciences.

Chen, D., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2017), "Nonlinear vibration and post-buckling of functionally graded graphene reinforced porous nano composite beams". *Composites Science and Technology*, 142, 235-245.

Chen, X. G., and S. Engler. 1993. Formation of Gas Porosity in Aluminium Alloys. *American Foundry Society Transactions*. 92-94: 673-682.

Chi, S. H., Chung, Y.L, (2006), "Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load", Part I: Analysis, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3657-3674.

Chi, S. H., Chung, Y.L, (2006), "Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load", Part II: Numerical results, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3675-3691.

Ching. H.K., Yen. S.C., (2006), "Transient thermo-elastic deformation of 2D functionally graded beams under non-uniformly convective heat supply", *Compos. Struct*; 73 (4): 381–393.

Cho. J. R., Ha. D.Y., (2001), "Averaging and finite element discretisation approaches in the numerical analysis of functionally graded materials", *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196.

Ciarlet. P.M., (1997), "Mathematical Elasticity", Vol. II: Theory of Plates. North-Holland Amsterdam.

Costa, M. L., De Almeida, S. F. M., & Rezende, M. C., (2001). "The influence of porosity on the Inter Lamina Shear Strength of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates". *Composites Science and Technology*, 61(14), 2101-2108.

Croce. L. D., Venini. P., (2004), "Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates". *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*; 193: 705-725.

Čukanović, D., Radaković, A., Bogdanović, G., Milanović, M., Redžović, H. and Dragović, D. (2018), "New shape function for the bending analysis of functionally graded plate", *Mater.* 11 (12), 2381. <https://doi.org/10.3390/ma11122381>.

D

Daikh, A.A., (2019), "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Mater. Res. Express* 6, 065702.

Darilmaz, K. (2015). "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 395-408. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.2.395>.

Das. Y. C., Rath. B. K., (1972), "Thermal bending of moderately thick rectangular plate". *J, AIAA*; 10:1349–1352.

Delale. F., Erdogan, F. (1983) "The crack problem for a nonhomogeneous plane". *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

E

Ebrahimi, F. and Dashti, S. (2015), "Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam", *Steel Compos. Struct.*, 19(5), 1279-1298. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.19.5.1279>.

Ebrahimi, F. and Habibi, S. (2016), "Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate", *Steel Compos. Struct.*, 20(1), 205-225. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2016.20.1.205>.

Ehyaeei, J., Akbarshahi, A. and Shafiee, N. (2017), "Influence of porosity and axial preload on vibration behavior of rotating FG nanobeam", *Adv. Nano Res.*, 5(2), 141-169. <https://doi.org/10.12989/anr.2017.5.2.141>.

EL-HABIB, Ahmed, (2006), "Etude de la variabilité de stratifiés carbone/époxy et du comportement structurel d'une voilure d'aéronef léger", ENSMA.

Eyerer P., Reinhardt H., (2000), "Ökologische Bilanzierung von Baustoffen und Gebäuden", Basel : Birkhäuser.

F

Fadoun, O.O. (2019), "Analysis of axisymmetric fractional vibration of an isotropic thin disc in finite deformation", *Comput. Concrete*, 23(5), 303-309. <https://doi.org/10.12989/cac.2019.23.5.303>.

Fai, M.K. (1988). "Elastic Solution for Rectangular and Circular Plates on Non-Homogeneous Soil Foundation" University of Hong Kong.

Faleh, N.M., Ahmed, R.A. and Fenjan, R.M. (2018), "On vibrations of porous FG nanoshells", *Int. J. Eng. Sci.*, 133, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.08.007>.

Fellah, Z., Berger S., Lauriks, W., Depollier C., Trompette, P., Chapelon, J.Y., Ultrasonic, (2003), "measurement of the porosity and tortuosity of air-saturated random packings of beads". *J. Appl. Phys.*, 93(11): 9352.

Farzam-Rad, S.A., Hassani, B. and Karamodin, A. (2017), "Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface", *Compos.: Part B Eng.*, 108, 174-189. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.029>.

Ferreira, A.J.M., Castro, L.M. and Bertoluzza, S. (2009), "A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory", *Compos. Struct.*, 89(3), 424-432. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.09.006>.

Fuchiyama. T., Noda. N., (1995), "Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material". *JSAE Rev*; 16 (3):263–8.

G

Gasik M. , K. Lilius, (1994), "Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical model", *Comput. Mater. Sci.* 3, 41-49.

Gasik, M.M. (1998), "Micromechanical modeling of functionally graded materials", *Comput.Mater. Sci.*, 13, 42–55.

H

Hadji, L., Meziane, M.A.A. and Safa, A. (2018), "Mechanical behaviour of FGM sandwich plates using a quasi-3D higher order shear and normal deformation theory", *Struct. Eng. Mech.*, 66(6), 771-781. <https://doi.org/10.12989/sem.2017.61.1.049>.

Harper, B. D., Staab, G. H., & Chen, R. S. (1987). "A note on the effects of voids upon the hygral and mechanical properties of AS4/3502 graphite/epoxy". *Journal of composite materials*, 21(3), 280-289.

Hashim, J. (1999). "Microstructure and porosity studies of cast Al-SiCp metal matrix composite". *Jurnal teknologi*, 31(A), 1-12.

He. X.Q., Ng. T.Y., S. Sivashankera., K. M, (2001), "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", *Int. J; Solids Structures*; 38 (9): 1641-1655.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Bedia, E.A.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000665](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000665).

Heinz P., Herrmann M., Sobek W., (2011), "Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen", Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau (1/2011), Stuttgart, ILEK.

Hetényi. M. (1946). "Beams on Elastic Foundation", University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

Hildebrand. F.B., Reissner.E., Thomas. G.G., (1949), "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". NACA T. N. N°:1833.

Hirai, T, (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; 293-341.

Hirwani, C.K. and Panda, S.K. (2018), "Numerical and experimental validation of nonlinear deflection and stress responses of pre-damaged glass-fibre reinforced composite structure", *Ocean Eng.*, 159, 237-252. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.035>.

Hirwani, C.K., Panda, S.K. and Patel, B.K. (2018c), "Theoretical and experimental validation of nonlinear deflection and stress responses of an internally debonded layer structure using different higher-order theories", *Acta Mechanica*, 229(8), 3453- 3473. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2173-8>.

Hirwani, C.K., Panda, S.K., Mahapatra, S.S., Mandal, S.K., Srivastava, L. and Buragohain, M.K. (2018 a), "Flexural strength of delaminated composite plate-An experimental validation", *Int. J. Damage Mech.*, 27(2), 296-329. <https://doi.org/10.1177/1056789516676515>.

Hirwani, C.K., Panda, S.K., Mahapatra, T.R., Mandal, S.K., Mahapatra, S.S. and De, A.K. (2018 b), "Delamination effect on flexural responses of layered curved shallow shell panelexperimental and numerical analysis", *Int. J. Comput. Meth.*, 15(4), 1850027. <https://doi.org/10.1142/S0219876218500275>.

Hirwani, C.K., Patil, R.K., Panda, S.K., Mahapatra, S.S., Mandal, S.K., Srivastava, L. and Buragohain, M.K. (2016 a), "Experimental and numerical analysis of free vibration of delaminated curved panel", *Aerosp. Sci. Technol.*, 54, 353-370. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.05.009>.

Hirwani, C.K., Sahoo, S.S. and Panda, S.K. (2016 b), "Effect of delamination on vibration behaviour of woven Glass/Epoxy composite plate-An experimental study", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 115(1), 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/115/1/012010>.

Houari. M.S.A., Benyoucef. S., Mechab. I., Tounsi. A., Adda Bedia. E.A., (2011), "Two-variable refined plate theory for thermo-elastic bending analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Thermal Stresses*; 34 (4): 315–334.

Hsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.

J

Jabbari, M., Joubaneh, E. F., Khorshidvand, A. R., & Eslami, M. R. (2013). "Buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric actuator layers under uniform radial compression". *International Journal of Mechanical Sciences*, 70, 50-56.

Javaheri. R., Eslami. M.R., (2002), "Buckling of functionally graded plates under in plane compressive loading", *ZAMM*, 82 (4): 277–283.

Javaheri. R., Eslami. M.R., (2002), "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher-order theory", *J. Therm. Stresses*; 25 (7): 603–625.

Javaheri. R., Eslami. M.R., (2002), "Thermo-elastic buckling of rectangular plates made of functionally graded materials", *AIAA J*; 40 :162–169.

Jha, D., Kant, T. and Singh, R. (2013), "Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects", *Compos. Struct.*, 96, 799-823. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.034>.

Jin, G., Su, Z., Shi, S., Ye, T. and Gao, S. (2014), "Threedimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions", *Compos. Struct.*, 108, 565-577. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.051>.

Jin. Z.-H., (2002), "An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material", *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895.

K

Kadoli, R., Akhtar, K., Ganesan, N. (2008), "Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory". *Applied mathematical modelling*, 32(12), 2509-2525.

Kant. T., Swaminathan. K., (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory". *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344.

Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel Compos. Struct.*, 18(3), 693-709. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.3.693>.

Kar, V.R. and Panda, S.K. (2016), "Nonlinear thermo-mechanical behavior of functionally graded material cylindrical/ hyperbolic/ elliptical shell panel with temperature-dependent and temperature-independent properties", *J. Press. Ves. Technol.*, 138(6), 061202. <https://doi.org/10.1115/1.4033701>.

Karama. M., Afaq. K.S., Mistou. S., (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.

Karami, B. and Janghorban, M. (2019), "A new size-dependent shear deformation theory for free vibration analysis of functionally graded/anisotropic nanobeams", *Thin Wall. Struct.*, 143, 106-227. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106227>.

Kashtalyan. M., (2004), "Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates", *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864.

Keikha, R., Heidari, A., Hosseinabadi, H., & Haghghi, M. S. (2018). "Classical shell theory for instability analysis of concrete pipes conveying nanofluid". *Computers and Concrete*, 22(2), 161-166. <https://doi.org/10.12989/cac.2018.22.2.161>.

Kerr, A. D., (1964), "Elastic and Viscoelastic Foundation Models," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 31, pp. 491-498. <https://doi.org/10.1115/1.3629667>.

Kerr, A. D., (1965), "A Study of a New Foundation Model," *Acta Mechanica*, Vol. 1, pp. 135-147.

Kim, J., Żur, K. K., & Reddy, J. N. (2019). "Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates". *Composite Structures*, 209, 879-888.

Kitipornchai, S., Yang, J., & Liew, K. M. (2006), "Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments", *Computer methods in applied mechanics and engineering*; 195 (9-12), 1075-1095.

Kneifati, M.C., (1985) "Analysis of plates on a Kerr foundation model", *J. Eng. Mech.* 111, 1325–1342.

Koizumi. M.(1997), "FGM activities in Japan ", Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520- 21. Japan.

Koizumi. M., (1992), "Recent Progress of functionally graded materials in Japan". *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347.

Kokini. K., Takeuchi. Y., (1990), "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads". In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36.

Kunche, M.C., Mishra, P.K., Nallala, H.B., Hirwani, C.K., Katariya, P.V., Panda, S. and Panda, S.K. (2019), "Theoretical and experimental modal responses of adhesive bonded Tjoints", *Wind Struct.*, 29(5), 361-369. <https://doi.org/10.12989/was.2019.29.5.361>.

L

Laoufi, I., Ameer, A., Zidi, M., Adda Bedia, E.A. and Bousahla, A.A. (2016), "Mechanical and hygro-thermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory", *Steel Compos. Struct.*, 20(4), 889-912. <https://doi.org/10.12989/scs.2016.20.4.889>.

Larry LH. (1998). "Bioceramics". *Journal of the American Ceramic Society*, 81:1705-1728

Leonard, R. W. (1948). "Simplified porosity measurements". *The Journal of the Acoustical Society of America*, 20(1), 39-41.

Li, M., Soares, C. G., & Yan, R. (2021). "Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT". *Composite Structures*, 264, 113643. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113643>

Ling, L., Zhang, B., Wang, D., Wu, Z., (2006), "Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates". *Composite Structures* 73, 303–309.

Liu, L., Zhang, B., Wang, D., (2004), "Void content in carbon/epoxy composites and its effects on flexural properties", 49th International Sampe Symposium and Exhibition, pp 254-261.

Liu, L., Zhang, B. M, Wang, D. F., & Wu, Z. J. (2006), "Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates". *Composite structures*, 73(3), 303-309.

Liu, Y. (2011), "A refined shear deformation plate theory", *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech.*, 12(3), 141-149.

Lostec. L., (1997), "Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L", Thèse de l'université de Limoges.

M

Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A., (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Modelling*,
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045>.

Mahmood, M. & Akinlabi, E., (2017). "Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering". s.l.: Springer.

Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., Adda Bedia, E.A and Mahmoud, SR. (2017), "A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations". *J. Sandw. Struct.Mater*; In Press.

Mahmoudi. A, Rabbab B. B., Benyoucef. S., Tounsi. A., Adda., B. A., (2017). "Influence de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sur fondation élastique", *Nature & Technology Journal. Vol. A : Fundamentals and Engineering Sciences*, 17, 24-35.

Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., E.A Adda Bedia., (2018), "On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation", *Earthquakes and Structures.*, 14 (2), 117-128.

Magnucki, K., & Stasiewicz, P. (2004). "Elastic buckling of a porous beam". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 42(4), 859-868.

Magnucka-Blandzi, E. (2010). "Non-linear analysis of dynamic stability of metal foam circular plate". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 48(1), 207-217.

Mantari, J., Granados, E., Hinostroza, M. and Soares, C.G. (2014), "Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT", *Compos. Struct.*, 118, 455-471. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.039>.

Mantari, J.L, Oktem, A.S. and Soares, O.G. (2012), "Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, 94, 714-723. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.007>.

Markworth. A. J., Ramesh. K. S., Parks. W. P., (1995), Review: "Modelling studies applied to functionally graded materials", *J. Mater. Sci*; 30 (9) : 2183–2193.

Matsunaga. H., (2009), "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory". *Compos Struct*; 90 (1): 76–86.

Mehar, K. and Panda, S.K. (2018), "Elastic bending and stress analysis of carbon nanotube-reinforced composite plate: Experimental, numerical, and simulation", *Adv. Polym. Technol.*, 37(6), 1643-1657. <https://doi.org/10.1002/adv.21821>.

- Mehar, K. and Panda, S.K. (2019), "Theoretical deflection analysis of multi-walled carbon nanotube reinforced sandwich panel and experimental verification", *Compos. Part B: Eng.*, 167, 317- 328. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.058>.
- Mehar, K., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R. (2017), "Theoretical and experimental investigation of vibration characteristic of carbon nanotube reinforced polymer composite structure", *Int. J. Mech. Sci.*, 133, 319-329. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.057>.
- Mehar, K., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R. (2019), "Large deformation bending responses of nanotube-reinforced polymer composite panel structure: Numerical and experimental analyses", *Proc. Inst. Mech. Eng., Part G: J. Aerosp. Eng.*, 233(5), 1695-1704. <https://doi.org/10.1177/0954410018761192>.
- Mekerbi, M., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Bousahla, A. A., & Mahmoud, S. R. (2021). "Thermodynamic behavior of functionally graded sandwich plates resting on different elastic foundation and with various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 23(3), 1028-1057.
- Meziane, A.A., M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014) "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16 (3), 293- 318.
- Mindlin, R.D. (1951), "Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates", *J. Appl. Phys.*, 22(3), 316-323. <https://doi.org/10.1063/1.1699948>.
- Mindlin. R.D., (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38.
- Mistler. R. E., (1973), "High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique", *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854.
- Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". *Processing and Applications*.
- Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., & Eslami, M. R. (2016). "Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory". *Thin-Walled Structures*, 99, 83-90.
- Moradi-Dastjerdi, R. (2016), "Wave propagation in functionally graded composite cylinders reinforced by aggregated carbon nanotube". *Struct. Eng. Mech.*, 57(3), 441-456. <https://doi.org/10.12989/sem.2016.57.3.441>.
- Mori, T., & Tanaka, K. (1973). "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta metallurgica*; 21 (5), 571-574.
- Moya. J.S., Sanchez-Herencia. A.J., Requena, MORENO. J., R., (1992), "Functionally gradient ceramics by sequential slip casting", *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35.

N

Na. K.-S., Kim. J.-H., (2004), "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials", *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437.

Naghdi. P. M., (1957), "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl.Math*,14:369-380.

Nemat-Alla. M., (2003), "Reduction of thermal stresses by developing two- dimensional functionally graded materials", *Int. J. Solids Struct*; 40 (26): 7339–7356.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M. (2013), "Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a mesh less technique", *Compos. Part B: Eng.*, 44(1), 657-674.

<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.089>.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. (2012), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos. Part B: Eng.*, 43(2), 711-725.

<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>.

Nguyen, V.H., Nguyen, T.K., Tai, H.T. and Vo, T.P. (2014), "A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates", *Compos. B*, 66, 233 246. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.012>.

Nguyen. T.K., Sab. K., Bonnet. G., (2008), "First order shear deformation plates models for functionally graded materials". *Compos. Struct. Struct*; 83 (1): 25-36.

Nguyen.T. K., Sab. K., Bonnet. G., (2007), "Shear correction factors of functionally graded plates". *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575.

Notta-Cuvier, D., (2011), "Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de comportements viscoplastiques et d'endommagement, à partir de mesures de champs mécaniques hétérogènes", Thèse de doctorat en Génie mécanique, Université Lille-Nord-de-France, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

O

Okamura. H., (1991), "State of the art of material design projects for severe service applications", *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9.

Olivier, P. (1994). Etude des contraintes résiduelles de cuisson dans les stratifiés carbone-époxy en relation avec les cycles de polymérisation, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 270p.

Olivier, P., Cottu, J. P., & Ferret, B.. (1995), "Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates", *Composites*; 26 (7), 509-515.

Ootao. Y., Tanigawa. Y., (2004), "Transient thermo-elastic problem of functionally graded thick strip due to non-uniform heat supply", *Compos. Struct*; 63 (2) : 139–146.

P

Pabst, W., & Gregorova, E. (2004). "Effective elastic properties of alumina-zirconia composite ceramics-Part 2. Micromechanical modeling". CERAMICS SILIKATY., 48(1), 14-23.

Pabst, W., Gregorova, E., Ticha, G., & Tynova, E. (2004). "Effective elastic properties of alumina-zirconia composite ceramics- part 4. Tensile modulus of porous alumina and zirconia". Ceramics- Silikaty, 48(4), 165-174.

Pal. R., (2005), "New Models for Effective Young's modulus of particulate composites", Composites, Part B; 36 (6-7): 513–523.

Pandey, H.K., Hirwani, C.K., Sharma, N., Katariya, P.V. and Panda, S.K. (2019), "Effect of nano glass cenosphere filler on hybrid composite eigen frequency responses - An FEM approach and experimental verification", Adv. Nano Res., 7(6), 419-429.
<https://doi.org/10.12989/anr.2019.7.6.419>.

Park. J.-S., Kim. J.-H., (2005), "Thermal post buckling and vibration analysis of functionally graded plates", J. Sound Vib; 289 (25-28): 77–93.

Pasternak, P. (1954), "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturipo Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow.

Peng. X.L., LI. X.F., (2009), "Thermo-elastic analysis of functionally graded annulus with arbitrary gradient" .Appl. Math. Mech. -Engl. Ed; 30 (10): 1211–1220.

Pindera. M.-J., Arnold. S. M., Aboudi. J., Hui. D., (1994), "Use of Composites in Functionally Graded Materials", Composites Eng; 4 (1): 1-145.

Pradhan, K.K. and Chakraverty, S. (2015), "Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports", Struct. Eng. Mech., 53(2), 337-354.
<https://doi.org/10.12989/sem.2015.53.2.337>.

Pradhan, S.C., Murmu, T., (2009), "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method", J. Sound Vibr., 321, 342-362.

Praveen. G.N., Reddy. J.N., (1998), "Nonlinear transient thermo-elastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", Int. J; Solids Structures; 35 (33): 4457-4476.

Q

Qian, L.F. and Batra, R.C. (2005), "Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a mesh less local Petrov Galerkin Method", Comput. Mech., 35(3), 214-226.
<https://doi.org/10.1007/s00466-004-0617-6>.

R

Rajabi, J. and Mohammadimehr, M. (2019), "Bending analysis of a micro sandwich skew plate using extended Kantorovich method based on Eshelby-Mori-Tanaka approach", *Comput. Concrete*, 23(5), 361-376. <https://doi.org/10.12989/cac.2019.23.5.361>.

Reddy. J. N., (2000), "Analysis of functionally graded plates". *Int. J. Numer. Methods Eng*; 47: 663-684.

Reddy. J.N., (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.

Reddy. J.N., (1997), "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". CRC Press, Boca Raton.

Reddy. J.N., (1999), "Theory and Analysis of Elastic plates". Taylor & Francis, Philadelphia.

Reddy. J.N., Cheng. Z.-Q., (2001), "Three-dimensional thermo-mechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855.

Reddy. J.N., Hsu. Y.S, (1980), "Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates", *Journal of Thermal Stresses*; 3 (4) :475–93.

Reiter T., Dvorak G.J. (1998), "Micromechanical Modeling of Functionally Graded Materials", In: BaheiEl-Din Y.A., Dvorak G.J. (eds) *IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials. Solid Mechanics and its Applications*, vol 60. Springer, Dordrecht

Reiter, T., and Dvorak, G.J. (1997), "Micromechanical Models for Graded Composite Materials", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1655-1673.

Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, 12 (2): A69-A77.

Reissner. E., (1975), "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation", *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.

Reuter. T., Dvorak. G. J., Tvergaard. V., (1997), "Micromechanical models for graded composite materials", *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302.

S

Sadollah, A. e. a., (2013). "Optimum Material Gradient for Functionally Graded Dental Implant Using Particle Swarm Optimization". *Advanced Materials Research*, Volume 647, pp. 30-36.

Sadouki. M., (2014), "Modélisation théorique de la propagation acoustique dans un milieu poreux inhomogène". Thèse doctorat Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Université de Khemis Miliana.

- Sahoo, S.S., Hirwani, C.K., Panda, S.K. and Sen, D. (2018), "Numerical analysis of vibration and transient behavior of laminated composite curved shallow shell structure: An experimental validation", *Scientia Iranica*, 25(4), 2218-2232.
- Sahoo, S.S., Panda, S.K. and Singh, V.K. (2017 a), "Experimental and numerical investigation of static and free vibration responses of woven glass/epoxy laminated composite plate", *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L: J. Mater.: Des. Appl.*, 231(5), 463-478.
<https://doi.org/10.1177/1464420715600191>.
- Sahoo, S.S., Panda, S.K., Mahapatra T.R. and Hirwani, C.K. (2019), "Numerical analysis of transient responses of delaminated layered structure using different mid-plane theories and experimental validation", *Iran. J. Sci. Technol. Tran. Mech. Eng.*, 43(1), 41-56.
<https://doi.org/10.1007/s40997-017-0111-3>.
- Sahoo, S.S., Panda, S.K., Singh, V.K. and Mahapatra T.R. (2017 b), "Numerical investigation on the nonlinear flexural behavior of wrapped glass/epoxy laminated composite panel and experimental validation", *Arch. Appl. Mech.*, 87, 315-333.
<https://doi.org/10.1007/s00419-016-1195-8>.
- Sahoo, S.S., Singh, V.K. and Panda, S.K. (2016), "Nonlinear flexural analysis of shallow carbon/epoxy laminated composite curved panels: experimental and numerical investigation", *J. Eng. Mech.*, 142(4), 04016008. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001040](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001040).
- Said.A, (2015), "Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil", Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès, Algérie.
- Saidi H., Houari M.S.A., Tounsi, A., (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory". *Steel Compos Struct*; 15: 221–245.
- Salari, E., Ashoori, A. and Vanini, S.A.S. (2019), "Porosity dependent asymmetric thermal buckling of inhomogeneous annular nano plates resting on elastic substrate", *Adv. Nano Res.*, 7(1), 25-38. <https://doi.org/10.12989/anr.2019.7.1.025>.
- Sankar. B. V., (2001), "An elasticity solution for functionally graded beams", *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696.
- Sankar. B. V., Tzeng. J.T., (2002), "Thermal stresses in functionally graded beams", *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232.
- Savoia. M., Reddy. J.N., (1995), "Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates", *Int. J; Solids Structures*; 32 (5): 593-608.
- Schaefer, D.W. (1994), "Engineered porous materials", A publication of the Materials Research Society : *Bulletin MRS*, Vol 19, N°4, p 14-17.
- Schoeller. H., (1955) "Hydrogéologie". Ecole Nationale Supérieur du Pétrole, Technip Paris, Vol 2, p 443.
- Selvaduri, A.P.S. (1979). "Elastic Analysis of Soil Foundation Interaction", Elsevier scientific Publishing Company, Vol. 17, Amsterdam, The Netherlands.

- Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L. and Karami, B. (2018), "A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Aerospace Science and Technology*, 72, 134-149.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>.
- Shahsavari, D., Karami, B., & Mansouri, S. (2018). "Shear buckling of single layer graphene sheets in hygrothermal environment resting on elastic foundation based on different nonlocal strain gradient theories". *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 67, 200-214.
- Shimpi, R.P., Arya, H. and Naik, N.K. (2003), "A higher order displacement model for the plate analysis", *J. Reinf. Plast. Compos.*, 22(22), 1667-1688.
<https://doi.org/10.1177/073168403027618>.
- Shojaefard, M. H., Googarchin, H. S., Ghadiri, & Mahinzare, M. (2017). "Micro temperature-dependent FG porous plate: Free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT". *Applied Mathematical Modelling*, 50, 633-655.
- Shyang-ho. Chi ., Yen-Ling. Chung, (2003), "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- Sladek. J., Sladek. V., Zhang. Ch., (2003), "Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method", *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504.
- Sobek, W., (2007), "Entwerfen im Leichtbau" [Design in Light Construction], Themenheft Forschung [Research Journal]/University of Stuttgart, 3, 70-82.
- Sobhy, M., & Zenkour, A. M. (2019). Porosity and in homogeneity effects on the buckling and vibration of double-FGM nanoplates via a quasi-3D refined theory. *Composite Structures*, 220, 289-303.
- Sobhy M and Zenkour AM., (2015), "Thermodynamical Bending of FGM Sandwich Plates Resting on Pasternak’s Elastic Foundations", *Adv. Appl. Math. Mech*; 7(1): 116-134.
- Sobhy, M. (2013), "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", *Compos.Struct.* 99 76–87.
- Sobhy, M. (2015), "Thermoelastic response of FGM plates with temperature-dependent properties resting on variable elastic foundations", *J. Appl. Mech.*, 7 (6), 1550082.
- Srinivas, S., Joga, C.V. and Rao, A.K. (1970), "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates", *Int. J. Solid. Struct.*, 6, 1463-1481. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(70\)90076-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(70)90076-4).
- Steffens. H.D., Dvorak. M., Wewel. M., (1990), "Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43.
- Straughan, W.T. (1990). "Analysis of Plates on Elastic Foundation", Texas Tech University.

Suresh, S., Mortensen, A. (1998), "Fundamentals of Functionally Graded Materials", (IOM Communications Ltd., London).

Swaminathan, K., & Sangeetha, D. (2017). "Thermal analysis of FGM plates A critical review of various modeling techniques and solution methods". *Composite Structures*, 160, 43- 60.

T

Takahashi. M., Itoh. Y., H. Kashiwaya, (1990). "Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34.

Talha M, Singh BN., (2010), "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory", *Applied Mathematical Modeling*, 34(12): 3991- 4011.

Tang, J.M., Lee, W.I., Springer, G.S., (1987), "Effects of cure pressure on resin flow, voids and mechanical properties", *Journal of Composite Materials*, Vol 21, p 421- 440.

Tarn. J.-Q., (2001), "Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads", *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–8206.

Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari M.S.A. and Tounsi, A., (2015), "Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory", *Steel and Composite Structures.*, 18(2), 443-465.

Tebboune.W (2015), "Contribution à l'étude de la stabilité thermique des structures composites", Thèse de Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès, Algérie.

Terzaghi, K. (1955). "Evaluation of coefficients of subgrade reaction". *Geotechnique*, 5(4), 297-326.

Thai, H.T. and Choi, D.H. (2011), "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation", *Compos. Sci. Technol.*, 71(16), 1850-1858.

<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.08.016>.

Thai, H.T. and Kim, S.E. (2013), "A simple higher order shear deformation theory for bending and free vibration of functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 96, 165-173.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.025>.

Thai, H.T. and Kim, S.E. (2013), "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 99, 172-180.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.030>.

Thai, H.T., Vo, T.P., Bui, T.Q. and Nguyen, T.K. (2014), "A quasi- 3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates", *Acta Mechanica*, 225(3), 951-964.

<https://doi.org/10.1007/s00707-013-0994-z>.

Timoshenko. S.P., (1940), "Strength of materials", Chapitre I, 170-171. D. Van Nostrand Company.

Timoshenko. S.P., Gere. J.M., (1972), "Mechanics of Materials". D. Van Nostrand Company.

Timoshenko. S.P., Woinowsky-Krieger. S., (1959), "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill, New York.

Touratier. M., (1991), "An efficient standard plate theory", *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.

Tungikar. V. B., Rao. K. M., (1994), "Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminates", *Compos. Struct*; 27 (4): 419–427.

V

Van der Biest. O., Gasik. M., Vleugels eds. J., "Functionally graded materials" VIII FGM (2004), Proceedings of the eighth international symposium on multifunctional and functionally graded materials, materials science forum, vols. 492–493, trans tech publications ltd, uetikon-Zuerich, Switzerland.

Van Do, V.N., Lee, C.H., (2018), "Quasi-3D higher-order shear deformation theory for thermal buckling analysis of FGM plates based on a meshless method". *Aerospace Science and Technology*., 82- 83, 450- 465.

Vel. S. S., Batra. R.C., (2002), "Exact solution for thermo-elastic deformations of functionally graded thick rectangular plates", *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433.

W

Wang, Z.X., Shen, H.S., (2013), "Nonlinear dynamic response of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations in thermal environments", *Ocean Engineering*, 57, 99-110.

Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn V. (2014), "Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities", *Aerosp. Sci. Technol.* 32 (1) 111–120. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002>.

Wisnom, M. R., Reynolds, T., Gwilliam, N. (1996), "Reduction in Inter Laminar Shear Strength by discrete and distributed voids. *Composites Science and Technology*, 56 (1), 93 101.

Woo. J., Meguid. S.A., (2001), "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells", *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421.

Worku, A. (2010). "Part I: A Generalized Formulation of Continuum Models for Elastic Foundations". *Advances in Analysis, Modeling & Design*, Geo Florida.

Worku, A. and Degu Y. (2010). "Part II: Application of Newly Derived and Calibrated Sub grade Models in the Analysis of Beams on Elastic Foundations", *Journal of Eng. Mechanics*, Geo Florida.

Wu, C.P. and Chiu, K.H. (2011), "RMVT-based mesh less collocation and element- free Galerkin methods for the quasi- 3D free analysis of multilayer composite and FGM plates", *Compos. Struct.*, 93(5), 1433-1448. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.07.001>.

X

Xiao, W. S., Gao, Y., & Zhu, H. (2019). "Buckling and post-buckling of magneto-electro-thermo-elastic functionally graded porous nanobeams". *Microsystem Technologies*, 25(6), 2451-2470.

Xiong H., Kawasaki A., Kang Y., Watanabe R (2005 a) . "Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs", *Surf & Coat. Technol.* 194-203.

Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., and Watanabe, R.,(2005), "Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature" *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.

Y

Yahia, S. A., Atmane, H. A., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015). "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories". *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1143-1165.

Yang, J. J., Liew. K. M., Kitipornchai. S., (2005), "Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates", *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8):1165 1175.

Yang, J., Liew, K. M., & Kitipornchai, S. (2005), "Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading", *International Journal of Mechanical Sciences*, 47 (10), 1519-1541.

Yang, J. J., Shen. H.-S., (2003), "Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions", *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115.

Yin. H. M., Sun. Z.L., Paulino. G.H., (2004), "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions", *Acta Mater*; 52 (12): 3535–3543.

Yohann L., Ledru. Y., Piquet R., Schmidt F., Michel L., Bernhart G., (2009), "Quantification 2D et 3D de la Porosité par Analyse d'Image dans les Matériaux Composites Stratifiés Aéronautique", *Proc of JNC16*.

Yokota, M.J., (1978), "Process controlled curing of resin matrix composites", *Sample Journal*, p11-17, July/Augus.

Yoshida, H., Ogasa, T., Hayashi, R., (1986), "Statistical approach to the relationship between ILSS and void content of CFRP", *Composites Science and Technology*, Vol 25, pp 3-18.

Yoshihisa,U. (2004). "Properties of functionally graded materials", *Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications*", B, Vol. 39-B ,39-51.

Yuki, M., Toshikazu, M., Toshio, I., Kawasaki, A., & Watanabe, R. (1990). "Temperature Gradient Sintering Process of PSZ/Mo Powder Compacts by Laser Beam Irradiation", *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, 37(7), 929-932.

Z

Zemani, K., Sebakhi, F., (2015), "Etude des vibrations libres des plaques épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur un support élastique de Winkler-Pasternak", projet de fin d'études master structures aéronautique, Institut d'aéronautique et des études spatiales de Blida,

Zenkour, A.M. (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded material", *Appl. Math. Model.*, 30 (1):, 67-84.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009>.

Zenkour, A.M. (2018), "A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities", *Compos. Struct.*, 201, 38-48.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.147>.

Zenkour, A.M. (2019), "Quasi-3D refined theory functionally graded porous plates: Displacements and stresses", *Appl. Math. Model.* 22 (1), 22-35.
<https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-11003>.

Zenkour, A.M. and Sobhy, M. (2013), "Dynamic bending response of thermo elastic functionally graded plates resting on elastic foundations", *Aerosp. Sci. Technol.*, 29(1), 7-17.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.01.003>.

Zenkour, A.M., (2005), A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1 "Deflection and stresses", Part 2 "Buckling and free vibration". *Int. J. Solids Struct.* 42, 5224–5258.

Zenkour, A.M., Alghamdi, NA., (2010), "Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads". *Mec.Ad.Mater.Struct.*, 17, 419–432.

Zenkour. A. M., Kafr El-Sheikh., (2004), "Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced visco-elastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory", *Acta Mechanica*; 171 (3-4):171–187.

Zenkour. A.M., Sobhy. M., (2010), "Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates", *Compos Struct*; 93 (1):102–93.

Zhao, J., Wang, Q., Deng, X., Choe, K., Zhong, R., & Shuai, C. (2019). Free vibrations of functionally graded porous rectangular plate with uniform elastic boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 168, 106-120.

Zhao. X., Lee. YY., Liew. K.M., (2009), "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates". *Compos Struct*; 90 (2): 161–71.

Zhong. Z., Yu. T., (2007), "Analytical solution of cantilever functionally graded beam". Composites Science and Technology; 67 (3-4): 481-488.

Zhou, D., Cheung, Y., Au, F. and Lo, S. (2002), "Three dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method", Int. J. Solid. Struct., 39, 6339-6353. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00460-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00460-2).

Zidi.M (2013), "Analyse de la réponse statique des plaques FGM sur des fondations élastiques avec un chargement hygro-théromécanique", Thèse de Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès, Algérie.

Zuiker. J. R., (1995), "Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations", Composites Eng, 5 (7): 807–819.

Zhu J., Lai Z., Yin Z., Jeon J. And Lee S., (2001), "Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy", Mater. Chem. Phys., 68, 130–135.