

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS
THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Melle : **ABDELBARI Salima**

Intitulé de la thèse

Etude dynamique des structures à section en matériaux à gradient évalué FGM

Composition du jury :

| | | | |
|---------------------------------|------------|---------------------------|------------------------------|
| TOUNSI Abdelouahed | Pr | Président | UDL SBA |
| ADDA BEDIA El Abbas | Pr | Directeur de thèse | UDL SBA |
| AMARA Khaled | MCA | Examineur | C U DE AIN TEMOUCHENT |
| FAHSI Bouazza | MCA | Examineur | UDL SBA |
| HOUARI Mohamed Sid Ahmed | MCA | Examineur | U DE MASCARA |
| KACI Abdelhakim | MCA | Examineur | U DE SAIDA |
| FEKRAR Abdelkader | MCA | Invité | UDL SBA |

Année universitaire 2015-2016

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier ALLAH le Tout Puissant de m'avoir donné la force et la volonté d'accomplir ce travail et d'avoir éclairé mon chemin.

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, le professeur **ADDA BEDIA el abbes**, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail.

Je tiens à présenter mes sincères remerciements au professeur **TOUNSI Abdelouahed** de m'avoir fait l'honneur de présider le jury et Je le remercie également pour son accueil chaleureux à chaque fois que j'ai sollicité son aide, ainsi que pour ses multiples encouragements.

Je tiens à dire merci du fond de mon cœur à mon ami, frère, le docteur **FEKRAR Abdelkader** J'ai traversé des moments si difficiles que plus d'une fois j'ai pensé que je ne verrai jamais le bout du tunnel. A chacun de ces moments, tu étais là pour me reconforter et m'aider à trouver des solutions. Je te remercierai jamais assez pour tout ce que tu as fait pour moi.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury : Dr. **HOUARI Mohammed Sid ahmed**, Dr. **FAHSI Bouazza**, Dr. **KACI Abdelhakim**, Dr. **AMARA Khaled** pour avoir accepté de juger et d'évaluer ce travail.

L'aboutissement de cette thèse a aussi été encouragé par de nombreuses discussions avec des collègues de disciplines variées. Je ne citerai pas de noms ici, pour ne pas en oublier certains

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille et mes amis, leur amour, leur tendresse, leur confiance me portent et me guident tous les jours. Un grand merci.

sommaire

ملخص

Résumé

Abstract

La liste des tableaux

La liste des figures

La liste de notation

Introduction générale.....1

Chapitre I : Généralité Sur Les Matériaux A Gradient Evalué

Introduction :.....3

I.1 les matériaux à gradient évalué FGM.....3

I.2 Procédé de fabrication des matériaux à gradient évalué5

a-coulage en bande (tape casting).....5

b-coulage séquentiel en barbotine.....5

c-la métallurgie des poudres.....6

d-le frittage.....7

d-Projection plasma7

I.3 domaine d'applications des matériaux a gradient évalué8

I.4 les lois de mélange des propriétés matérielles des FGM.....9

❖ Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....10

❖ Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....10

❖ Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....11

Conclusion.....12

Chapitre II : Les Plaques FGM : Vibration, Fondations Elastiques Et Théories

Introduction.....13

| | |
|---|----|
| II.2 L'analyse Vibratoire..... | 13 |
| II.3 Vibration Libre..... | 13 |
| II.3 Les Fondations Elastiques..... | 14 |
| II.4 Les principales théories utilisées | 15 |
| II.4.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)..... | 15 |
| II.4.2 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)..... | 15 |
| II.4.3 Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT)..... | 17 |
| II.4.4 La théorie raffinée de déformation des plaques | 20 |
| Conclusion..... | 21 |

Chapitre III : Les Différentes Recherches Sur Les Plaques

| | |
|--|----|
| Introduction..... | 22 |
| III.1.1 Etudes sur le comportement structurel des FGM | 22 |
| III.1.2 Etudes sur le comportement thermomécanique des FGM | 24 |
| III.1.3 Etudes Sur Le Comportement dynamique Des FGM | 25 |
| Conclusion..... | 31 |

Chapitre IV : Le Développement D'une Nouvelle Théorie

| | |
|--|----|
| Introduction | 32 |
| IV.1 la géométrie de la plaque | 32 |
| IV.2 les Equations cinématique et constitutive..... | 33 |
| IV.3 Les équations gouvernantes | 35 |
| IV.4 La solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyée | 39 |
| Conclusion | 40 |

Chapitre V : Résultats Et Discussion

| | |
|---|----|
| Introduction..... | 41 |
| V. 1 Application numérique | 41 |
| V. 2 Analyse de la vibration libre de la plaque Al/ZrO ₂ | 42 |

| | |
|--|-----------|
| V. 3 Analyse de la vibration libre d'une plaque type Al/Al ₂ O ₃ | 44 |
| Conclusion | 51 |
| Conclusion générale | 52 |

ملخص

في هذا العمل تم تقديم نظرية محسنة تحتوي على أربع مجاهيل من أجل تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المتدرجة وظيفيا ذات خصائص مادية ومرتكزة على أساس مرن من نوع باسترناك وينكلر . بتجزئة التحرك العرضي إلى جزأين واحد متعلق بالانحناء و آخر متعلق بالقص، عدد المتغيرات و معادلات الحركة يقل بالنسبة للنموذج الحالي، وهذا يسهل التحليل البنيوي. هذه النظريات تستند على إدخال التوزيعات، الخطية، المكافئة، القطعية، للإجهاد القص العرضي من خلال السمك بينما تحقق الشروط على إجهادات القص العرضي والتي تنعدم على حواف العلوية و السفلية للصفحة و ذلك بدون استعمال معامل تصحيح القص. الخصائص المادية تعتبر متغيرة وفق قانون أسي عبر السمك. بتطبيق مبدأ هاملتون نحصل على معادلات الحركة. لتحليل الاهتزاز الحر للصفحة يجب الاعتماد على سلسلة فورييه التي بدورها تحترم شروط الدعم (طريقة نافيه). يتم عرض التحقيقات العددية لإظهار تأثير تركيب المواد، هندسة الصفحة يمكن أن نستنتج أن هذه النظرية ليست صحيحة فحسب بل أيضا من السهل التنبؤ برود ذبذبات الصفائح المتدرجة وظيفيا التي خصائصها المادية .

الكلمات الرئيسية: الصفائح المتدرجة وظيفيا ، نظري محسنة تحتوي على أربع مجاهيل ، الاهتزاز الحر.

Résumé

Ce travail présente une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique simple pour analyser la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées (FGM) reposant sur des fondations élastiques.

La théorie présentée est une théorie raffinée de déformation de cisaillement transverse d'ordre élevé, Le modèle proposé contient un nombre réduit d'inconnues et considère des distributions hyperbolique des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur tout en respectant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque sans introduire des facteurs de correction.

Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse de la vibration libre des plaques en se basant sur les séries de Fourier qui satisfont les conditions d'appuis (la méthode de Navier), les résultats sont comparés avec les résultats existantes pour démontrer l'exactitude de la théorie proposée.

Mots-clés: *théorie de déformation de cisaillement, Vibration, Plaque à gradient évalué, Fondation élastique.*

Abstract

This work presents a simple hyperbolic shear deformation theory for analysis of functionally graded plates resting on elastic foundation. The proposed model contains fewer number of unknowns and equations of motion than the first-order shear deformation model, but the transverse shear stresses account for a hyperbolic variation and respect the tangential stress-free boundary conditions on the plate boundary surface without introducing shear correction factors. Equations of motion are obtained from Hamilton's principle. The Navier-type analytical solutions for simply-supported plates are compared with the existing solutions to demonstrate the accuracy of the proposed theory.

Keywords: *shear deformation theory; Vibration; Functionally graded plate; Elastic foundation.*

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

| | |
|---|----|
| Figure I.1: Un type d'un matériau FGM en céramique et métal Yin et al (2004)..... | 4 |
| Figure I.2 : Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande..... | 5 |
| Figure I.3 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres BARKA Merbouha (2012)..... | 6 |
| Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM..... | 8 |
| Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM..... | 9 |
| Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM..... | 10 |
| Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM..... | 11 |
| Figure I.8 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM..... | 12 |

Chapitre II

| | |
|---|----|
| Figure II.1: Système de coordonnées et géométrie pour plaques FGM rectangulaires sur Fondation élastique de Pasternak..... | 14 |
| Figure II.2 : Cinématique de Love-Kirchhoff..... | 15 |
| Figure II.3 : Cinématique de Reissner-Mindlin..... | 16 |
| Figure II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur..... | 18 |
| Figure II.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur..... | 20 |
| Figure II.6: Variation de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur..... | 20 |

Chapitre III

Figure III.1 : Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al (2004) et le modèle de Mori-Tanaka.....24

Chapitre IV

Figure IV.1: géométrie d'une plaque FG rectangulaire.....32

Chapitre V

FigureV.1:Variation des fréquences fondamentale non dimensionnelle $\tilde{\beta} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ de la plaque carrée Al/Al₂O₃ en fonction de l'indice de puissance P48

Figure V.2: Variation des fréquences non dimensionnelle $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ of Al₂O₃ FG des plaque carré reposant sur fondation élastique en fonction de l'indice de puissance ($a/h = 5$)49

Figure V.3(a) : Variation des fréquences fondamentale non -dimensionnelles $\tilde{\beta} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaque carré en FGM Al/Al₂O₃ reposant sur la fondation élastique de type Winkler ($a/h = 10$): $k_s = 0$ 50

Figure V.3(b) : Variation des fréquences fondamentale non -dimensionnelles $\tilde{\beta} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques carré en FGM Al/Al₂O₃ reposant sur la fondation élastique Winkler ($a/h = 10$): (a) $k_s = 10$ 50

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre I

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....4

Chapitre V

Tableau V.1: les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM.....41

Tableau V.2: la comparaison des fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque Al/ZrO₂.....42

Tableau V.3 : la comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque Al/ZrO₂ (m=n=1).....43

Tableau V.4: Comparaison des fréquences non dimensionnelles de la plaque Al/ZrO₂ rectangulaire ($a/b = 1.5$).....44

Tableau V.5: les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles de la plaque carré Al/Al₂O₃ ($k_w = k_s = 0$).....45

Tableau V.6: Comparaison des fréquences non dimensionnelles de la plaque Al/Al₂O₃ rectangulaire ($h/a = 0.15$).....46

Tableau V.7: Comparaison des fréquences non dimensionnelles de la plaque Al/Al₂O₃ Rectangulaire.....47

Notation

| | |
|------------------------|--|
| $E(z)$ | Module de Young en fonction de « z » |
| E_m | Module de Young du métal |
| E_c | Module de Young de céramique |
| $G(z)$ | Module de cisaillement en fonction de « z » |
| $\nu(z)$ | Coefficient de Poisson en fonction de « z » |
| ν | Coefficient de Poisson |
| $\rho(z)$ | La densité du matériau en fonction de « z » |
| ρ_m | La densité du métal |
| ρ_c | La densité de la céramique |
| $V(z)$ | Fraction volumique |
| $\alpha(z), \beta(z)$ | Coefficients de Lamé |
| p | Paramètre du matériau |
| a | Longueur de la plaque |
| b | Largeur de la plaque |
| h | Épaisseur de la plaque |
| u_0, v_0, w_0 | Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque |
| u_b, v_b, w_b | Les composantes du champ de déplacement de flexion |
| u_s, v_s, w_s | Les composantes du champ de déplacement de cisaillement |
| u, v, w | Les déplacements dans les directions x, y, z |
| φ_x, φ_y | Les rotations autour des axes x et y |

| | |
|--|---|
| $\Psi(z)$ | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) |
| $f(z)$ | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Contraintes normales |
| $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ | Contraintes de cisaillement |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformation dans la direction x, y et z |
| $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ | Déformations de distorsion |
| $\delta u, \delta v, \delta w$ | Champ virtuel de déplacement |
| δU | Variation de l'énergie de déformation |
| δV | Variation de l'énergie potentielle |
| δK | Variation de l'énergie cinétique. |
| $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$ | Champ de déformation longitudinal virtuel |
| $\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$ | Champ de déformation transversal virtuel |
| N_x, N_y, N_{xy} | Efforts normaux |
| M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b | Moments de flexion |
| M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s | Moment supplémentaire du au cisaillement transverse |
| S_{xz}^s, S_{yz}^s | Effort de cisaillement |
| ∂ | Dérivée partielle |
| $i, j, l \text{ et } m$ | Sont des nombres naturels. |
| A_{ij} | Termes de rigidité en membrane de la plaque |
| B_{ij} | Termes de rigidité de couplage de la plaque |
| D_{ij} | Termes de rigidité de flexion de la plaque |
| A_{ij}^s | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement |
| B_{ij}^s | Termes de rigidité de la plaque en cisaillement |

D_{ij}^s Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

H_{ij}^s Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

(m, n) ième mode propre

(I_i, J_i, K_i, J_i^s) Inerties de masse

$\{ \}$ Vecteur colonne

$[]$ Matrice

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux à gradient évalué est une classe de matériau composite hétérogène qui présente une distribution continue des caractéristiques mécaniques d'un point à un autre. Ce matériau est obtenu en mélangeant deux ou plusieurs matériaux dans un certain rapport en volume (par exemple, en métal et céramique). Les Composites classiques structures telles que les plastiques renforcés de fibres (PRFs) souffrent de discontinuité des caractéristiques des matériaux à l'interface des couches et des électeurs. Depuis le concept de FGMs a été proposé dans les années 1980, ces nouveaux types de matériaux ont été utilisés dans de nombreux domaines d'application de l'ingénierie, tels que les avions, les véhicules spatiaux, les industries de la défense, de l'électronique et des secteurs biomédical, pour éliminer les concentrations de contraintes, pour se détendre les contraintes résiduelles, et pour améliorer la force de liaison. En raison des variations et des applications larges de matériaux FGMs, les recherches sur les plaques à gradient évalué (FGM), ont reçu beaucoup d'attention, et plusieurs théories de plaques ont été proposées. Elles sont basées sur la prise en considération de l'effet de déformation de cisaillement transversal ,Bourada et al(2012) ,Bouderba et al(2013),Tounsi et al (2013),Fekrar et al (2014), Zidi et al (2014), Bousahla et al (2014),Yaghoobi et al (2014), Meradjah et al (2015), Bouchafa et al(2015) Akbaş (2015),Darilmaz (2015),Larbi Chaht et al (2015) Hadji et al (2015),Ebrahimi and Dashti (2015),Arefi (2015),Ait Yahia et al (2015) ,Bakora et Tounsi (2015),Hamidi et al, (2015),Bounouara et al (2016).

Dans ce travail une nouvelle théorie de déformation de cisaillement simple pour analyser la vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques. Cette théorie proposée possède moins d'inconnus et moins d'équations d'équilibre comparativement à la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. De plus, ces nouvelles théories satisfont la condition de nullité de la contrainte de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans introduire les coefficients de correction de cisaillement. Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en se basant sur une variation hyperbolique des déplacements axiaux à travers l'épaisseur, La décomposition du déplacement transversal en deux composantes: flexion et cisaillement nous a menés à réduire le nombre d'inconnus et par conséquent la présente théorie devient beaucoup plus favorables aux formulations

mathématiques. Les plaques FG simplement appuyées sont considérées avec des propriétés matérielles avec une distribution de puissance en termes des fractions volumiques des constituants. Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe d'Hamilton.

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation qui suit :

- Le premier chapitre donne un aperçu détaillé sur les matériaux à gradient évalué.
- Dans le deuxième chapitre, une attention particulière sera portée sur tous les paramètres qui ont rapport avec ce travail tel que l'analyse vibratoire, les fondations élastiques et les différentes théories des plaques.
- Le chapitre trois présente une bibliographie de quelques recherche scientifiques portant sur les matériaux à gradient évalué « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.
- Le quatrième chapitre sera consacré à présenter une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement raffinée pour analyser la vibration libre des plaques reposant sur des fondations élastiques et qui sera explicitement formulée.
- Dans le cinquième chapitre on présentera les résultats obtenus. Ils seront comparés avec d'autres résultats déjà publiés par d'autres auteurs. Cette comparaison nous a permis la validation de nos résultats.

Ce travail s'achèvera en présentant une conclusion générale qui résumera notre travail incluant les perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I

Généralités Sur Les Matériaux
A Gradient Evalué FGM

Introduction :

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures.

Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurelles.

De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc).

Cependant, malgré les avantages que présentent ces matériaux, ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes interraciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème qui a une influence significative sur le comportement des structures composites multicouches a stimulé les chercheurs à découvrir des nouveaux composites dont ils peuvent éliminer ces contraintes et décrire correctement leur comportement structurel.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites a attiré une attention particulière. Connue sous le nom de matériaux à gradient évalué (FGM).

I.1 les matériaux à gradient évalué FGM:

Un matériau à gradient évalué (FGM) est un matériau dans lequel la composition et la structure changent graduellement en entraînant une modification correspondante dans les propriétés du matériau. Ce concept de FGM peut être appliqué à divers matériaux pour des utilisations structurelles et fonctionnelles. Il ya plusieurs années, ce concept a été évalué en premier lieu dans le développement de revêtement des barrières thermiques pour augmenter la résistance thermique des lames dans les moteurs de turbine à gaz pour divers applications telles que les systèmes de protection thermique.

Généralement, les FGMs sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM Bessaim (2015). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le Tableau I.1.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

| | | |
|---|-----------------|--|
| La face à haute température | céramique | -bonne résistance thermique -bonne résistance a l'oxydation -faible conductivité thermique |
| Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaires» | Céramique-métal | -élimination des problèmes de l'interface -relaxer les contraintes thermiques |
| La face à basse température | métal | -bonne résistance mécanique -conductivité thermique élevée -très bonne ténacité |

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la Figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais microstructure différente Bessaim (2015).

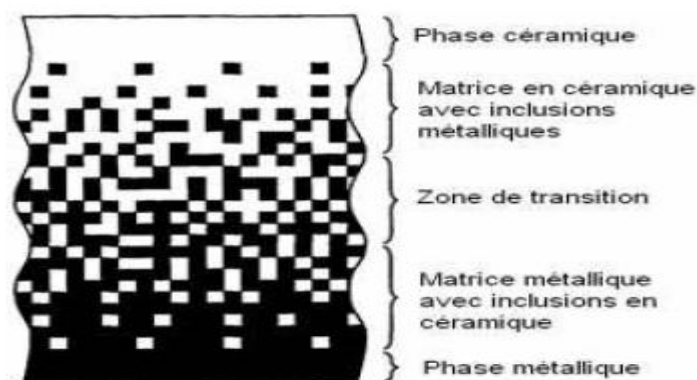


Figure I.1: Un type d'un matériau FGM en céramique et métal Yin et al (2004)

I.2 Procédés de fabrication des matériaux à gradient évalué :

Il existe de nombreuses méthodes pour la fabrication des FGM, nous citons ci dessous quelques unes d'entre elles :

a- Coulage en bande (Tape casting) :

Le coulage en bande est devenu une technique largement utilisée pour la fabrication de feuilles métalliques ou céramiques.

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à laminer une suspension sur un support fixe à l'aide d'un sabot de coulage, Aurélie Julian (2008).

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support Figure I.2, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande François Cabannes (2014).

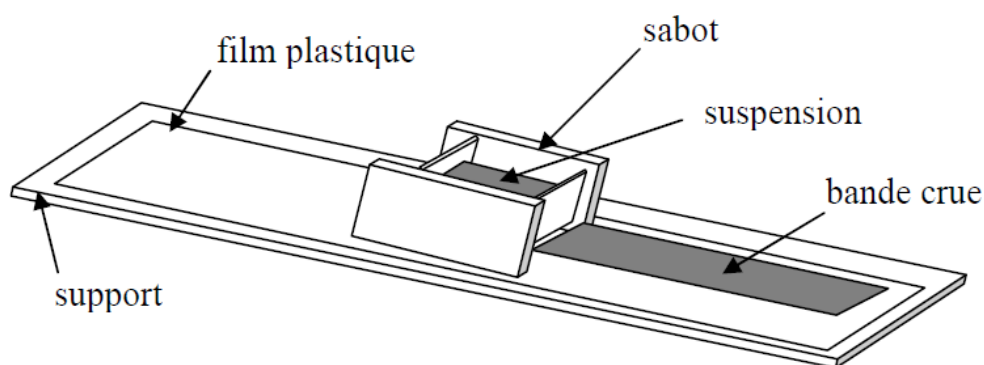


Figure I.2 : Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande

b- Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting):

Le coulage en barbotine consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule, Hossein Abdizadeh (1997). Après séchage, on obtient le corps en cru. Le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ✚ Formation du tesson ou « prise »
- ✚ Consolidation du tesson ou « raffermissement »

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine, Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- ✚ Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique)
- ✚ Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression)

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

c- La métallurgie des poudres :

La métallurgie en poudre est une technique pour fabriquer les matériaux à gradient évalué, par trois étapes de base notamment : la pesée et le mélange de la poudre (a, b), le jalonnement de la poudre pré-mélangée (c) et finalement le frittage(d) Rasheedat M et al (2012) (voir Figure I.3).

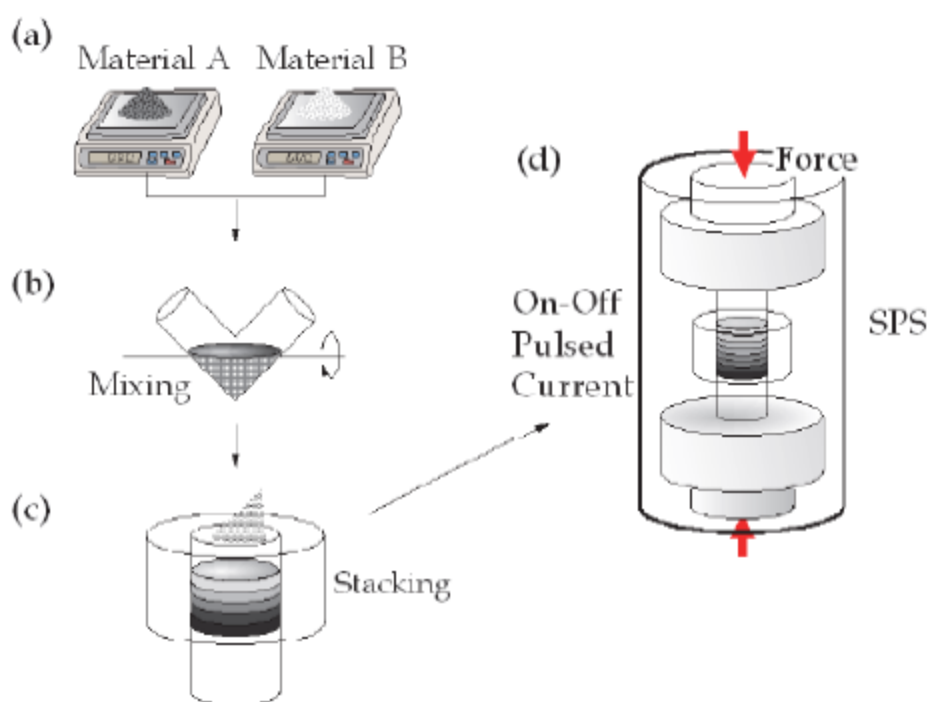


Figure I.3 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres, Barka Merbouha (2012)

Cette technique à beaucoup d'avantages, on cite brièvement ci-dessous quelques uns d'entre eux :

- ✚ Le procédé permet la réalisation de pièces à partir de métaux dont les méthodes Classiques de fusion sont impossibles à adapter
- ✚ Une structure métallurgique fine et homogène
- ✚ Ce procédé de mise en forme des matériaux limite le nombre d'étape pour la production de produits finis usinés. La diminution des étapes a un impact direct sur les coûts de production.
- ✚ Obtention d'un produit de grande qualité à des prix compétitifs

d- Le frittage:

Le frittage est un processus qui permet d'agglomérer des poudres et d'obtenir des produits compacts, denses et durs, sans atteindre nécessairement la température de fusion de l'un de ses constituants. Cette consolidation s'effectue par la formation de liaisons entre les grains. Au point de vue physico-chimique, trois types de frittage sont distingués, Talidi Abdellah (2006) :

- ✚ **La vitrification** : Il y'a apparition d'une phase vitreuse largement suffisante pour combler la porosité. Ce procédé est largement utilisé pour densifier les céramiques.
- ✚ **Le frittage en phase liquide** : La quantité du liquide qui apparait est juste suffisante pour réarranger les particules, il consiste à former des ponts entre les grains et les amener ainsi au contact les uns des autres. Ce type de frittage est polyphasé. il se produit lorsque la température de traitement est supérieure au point de fusion du constituant le plus fusible.
- ✚ **Le frittage en phase solide** : Tous les constituants restent solides. La consolidation est produite par soudure et le changement de forme des grains. Ce type de frittage peut être monophasé à un constituant ou polyphasé.

e- Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très

utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique .

I.3 Domaines d'applications des matériaux à gradient évalué :

Le concept des matériaux à gradient évalué est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la Figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

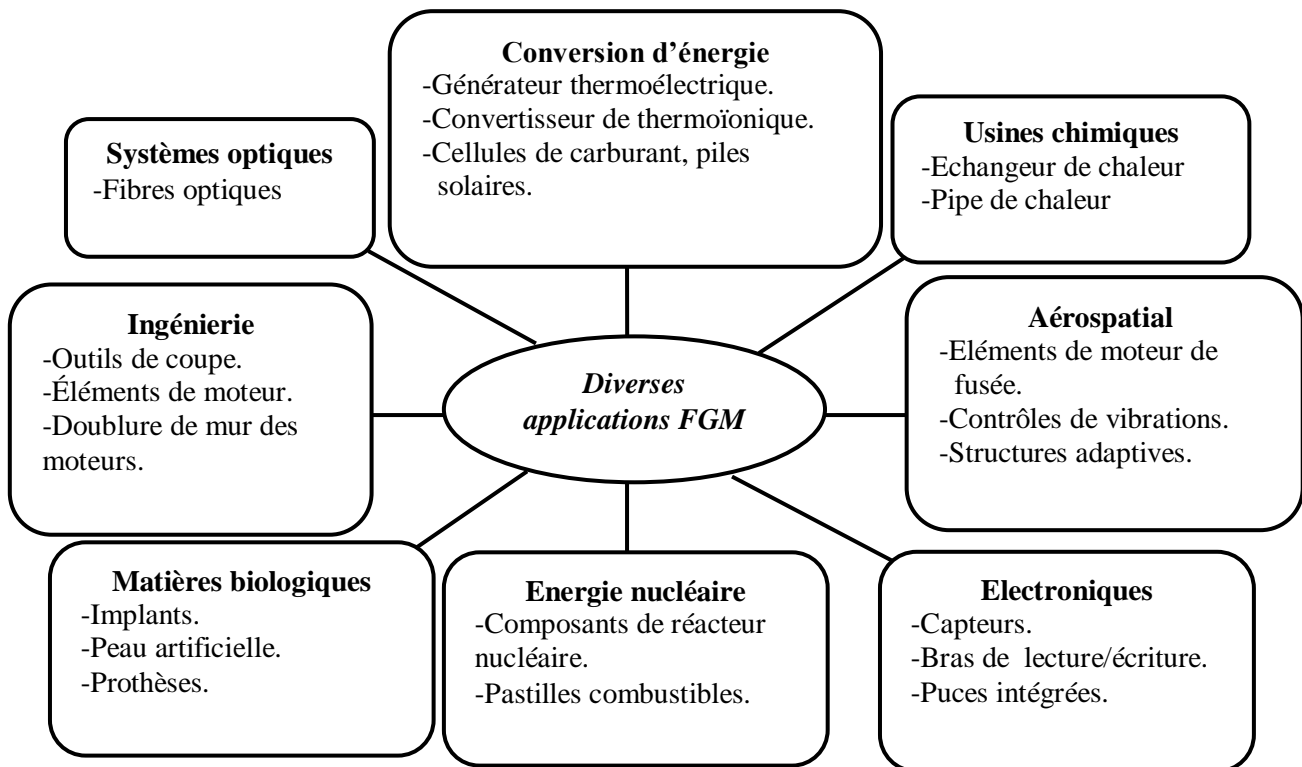


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM

I.4 Les Loix de mélange des plaques FGM :

Les matériaux à gradient évalué « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurelles et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

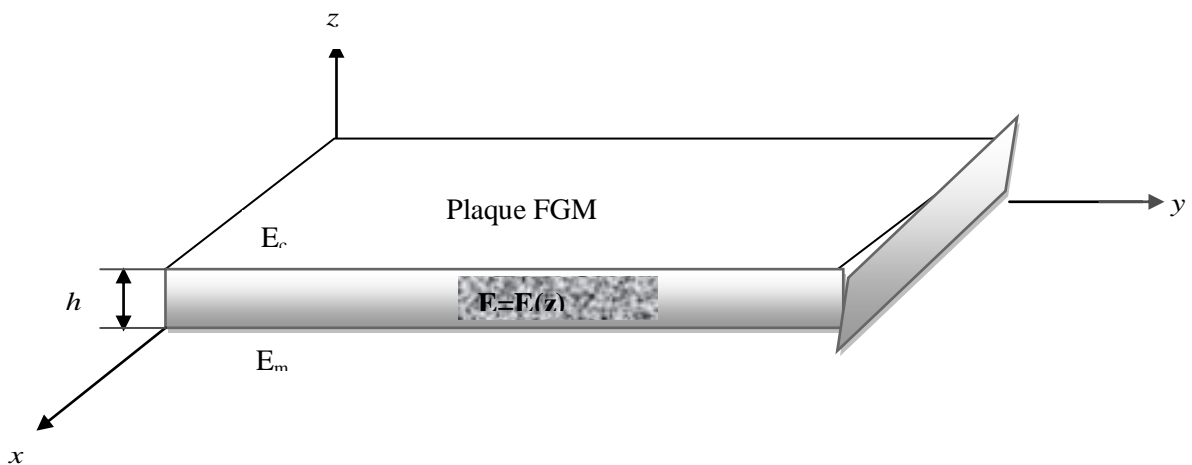


Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau : dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

❖ Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges, Boussahla (2015) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans la Figure I.6.

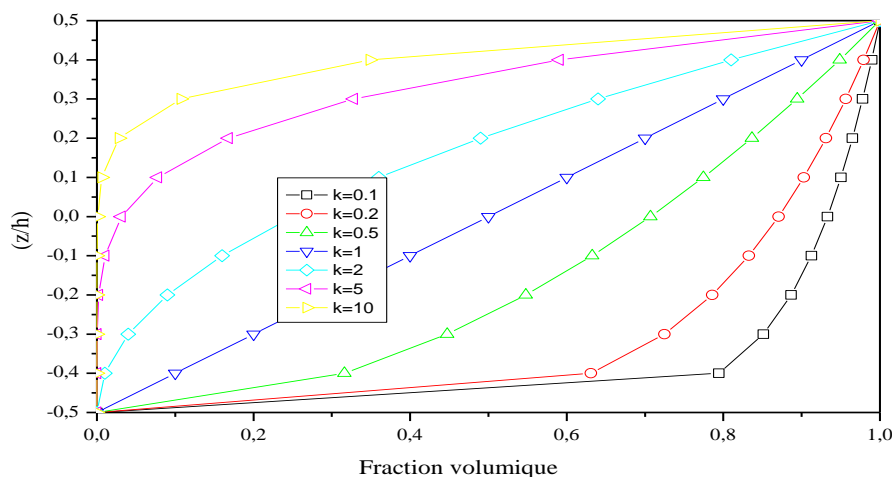


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

❖ Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux

fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I.3.a}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I.3.b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I.4.a}$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I.4.b}$$

La Figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

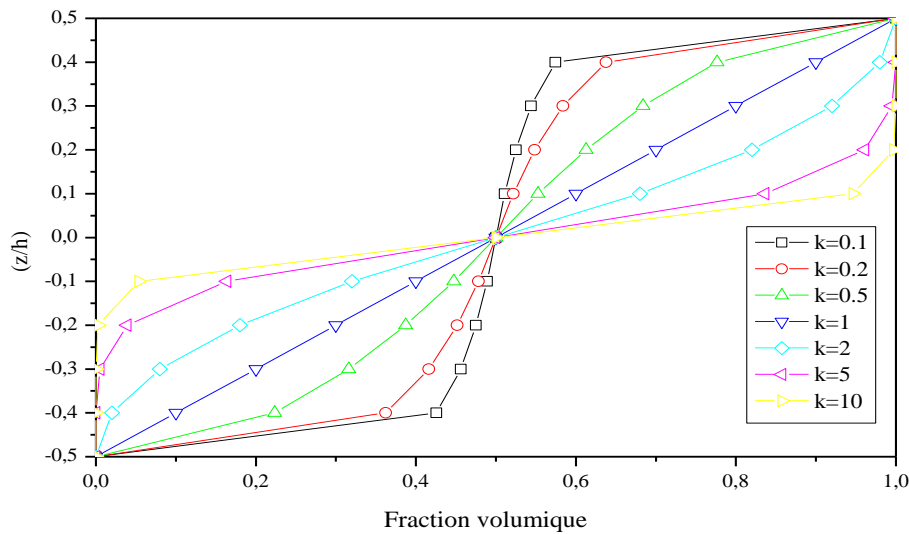


Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

❖ **Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :**

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s’écrit sous la forme, F. Delale., F. Erdogan (1983):

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure I.8

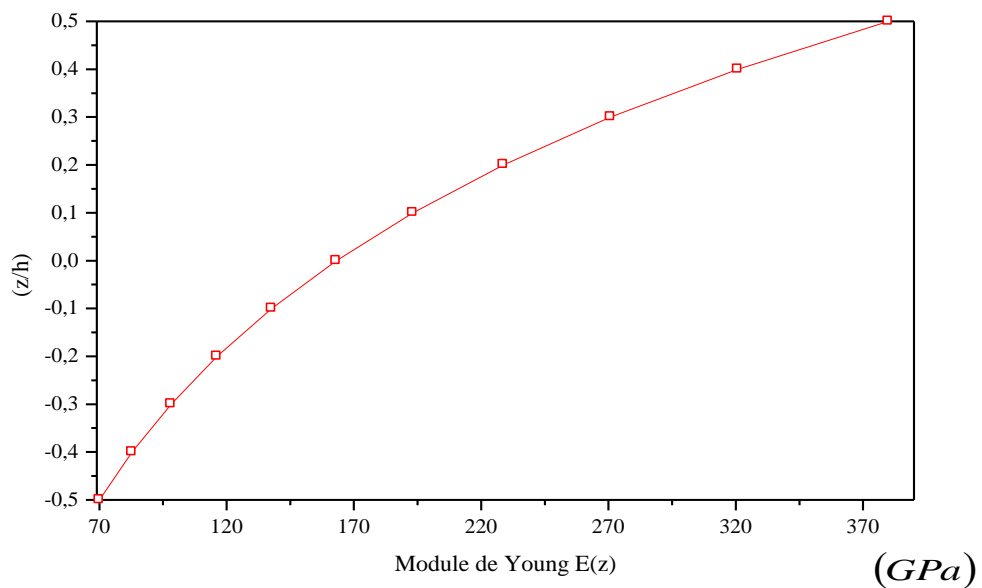


Figure I.8 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter une généralité sur les matériaux à gradient évalué, Dans un premier temps, nous avons présenté les notions fondamentales et puis en est passé à décrire les différentes méthodes modernes d'usinage et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

Chapitre II

Les Plaques : Vibration, Fondations
Elastiques et Théories

Introduction :

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement dynamique.

Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées seront exposées.

II.1 l'analyse vibratoire :

L'analyse vibratoire est une question d'actualité importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire. Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations. D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire de plaque devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement. L'étude et l'analyse des vibrations ont pris au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement du comportement dynamique du matériau isotrope, orthotrope ou composite. Le contrôle des vibrations dans ces structures plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur qu'à l'ingénieur mécanicien. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure est indispensable.

II.2 vibration libre :

Les vibrations naturelles sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations mécaniques. Les équations régissant le mouvement des plaques sont plus.

II.3 Les Fondations Élastiques:

Les plaques reposant sur des fondations élastiques ont été largement adoptées par nombreuses études pour modéliser divers problèmes d'ingénierie au cours des dernières décennies. Ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que les radiers, les réservoirs de stockage et les piscines. De plus, pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs types de modèles de fondations ont été proposés. Le plus simple est le modèle de Winkler (modèle à 1 seul paramètre) qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans les effets de couplage entre eux. Ainsi, dans ce modèle les propriétés du sol sont décrites seulement par un seul paramètre (K_w), qui représente des ressorts verticaux, Avramidis et Morfidis (2006). Cependant, le modèle de Winkler est incapable de prendre en considération la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qu'il n'y a pas une interaction entre les ressorts voisins mène à l'ignorance de l'influence du sol dans certaines parties de la plaque. Pour éviter ces défaillances, plusieurs modèles de fondation élastique à deux paramètres ont été proposés tels que les fondations élastiques de Pasternak (K_s), Pasternak (1954). Le modèle de Pasternak est largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure-fondation.

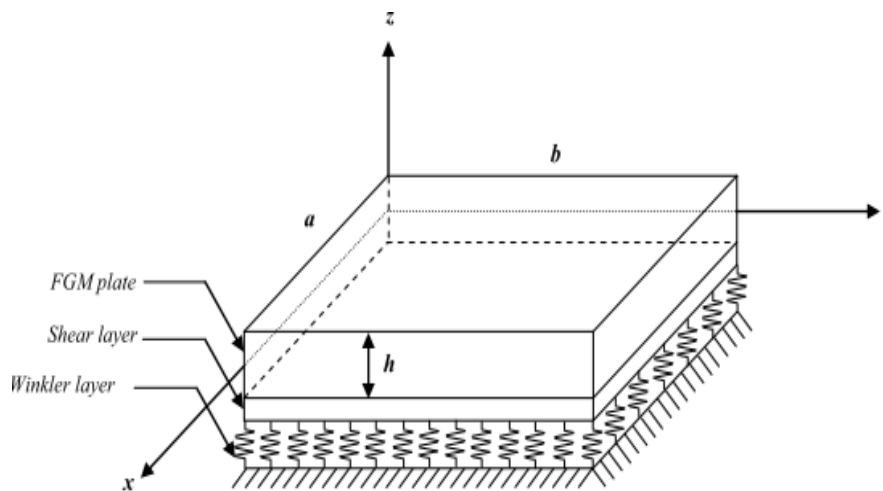


Figure II.1: Système de coordonnées et géométrie pour plaques FGM rectangulaires sur Fondation élastique de Pasternak

II.4 Les principales théories utilisées :

II.4.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On commence par le model le plus simple et le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur, Reissner (1961). L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (1950) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après Déformation (Figure II.1).

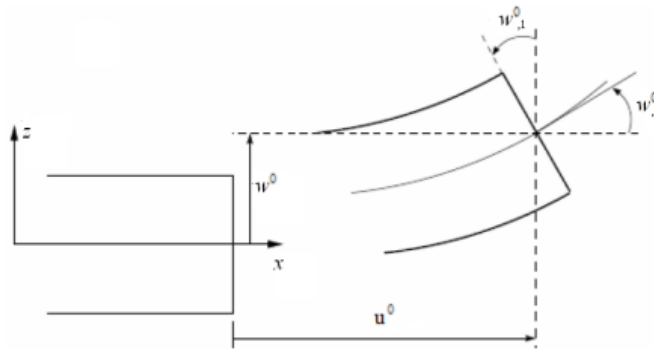


Figure II.2 : Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - zw_{,1}^0(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) - zw_{,2}^0(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

u^0 et v^0 : Les déplacements des membranes suivant les axes x, y

w^0 : La flèche de la plaque

$w_{,1}^0, w_{,2}^0$: Les rotations dues a la flexion (sans cisaillement) mesurées le plan autour x, y

II.4.2 théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT (Les modèles Reissner-Mindlin) :

Pour introduire l'effet de cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique de Mindlin adoptée est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure II.2).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin (1951) s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) - z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

φ_x et φ_y : Les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x,y.

$\gamma_{xy} = (w_{,1}^0 + \varphi_x)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

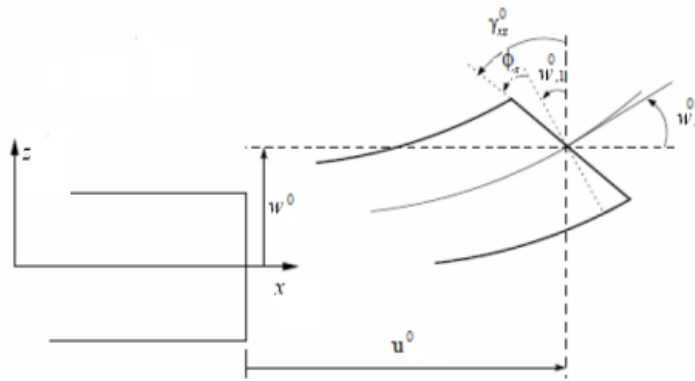


Figure II.3 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transverse, Whitney (1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. Dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

II.4.3 Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure II.3), Liberscu (1967), Touratier (1991), Nguyen (2004). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_i^{0(3)} = \phi_i^{0(1)} = 0, \phi_i^{0(3)}, \alpha = \{1, 2\}$.

Le champ de déplacement devient

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

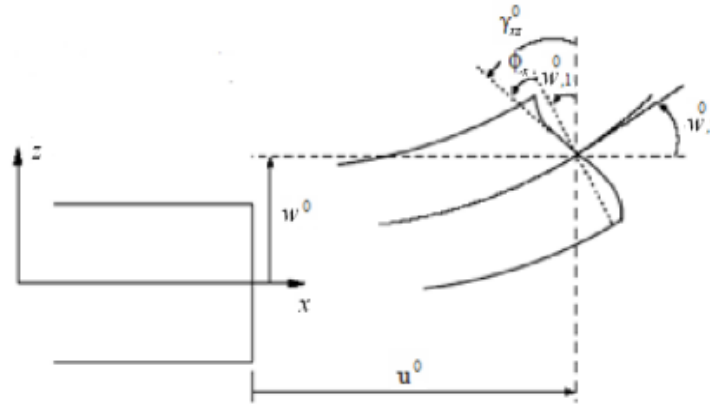


Figure II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur

Avec :

(u_0, v_0, w_0) : sont les déplacements en membrane et les rotations autour des x et y respectivement. $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$, $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$, $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes $\psi'(z) = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $\psi(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec ;

$$\psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner (1945), avec ;

$$\psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy (1987) avec ;

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

-L'approche de Touratier (1991) avec ;

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (1984).

Récemment, Afaq (2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" Touratier ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche d'Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

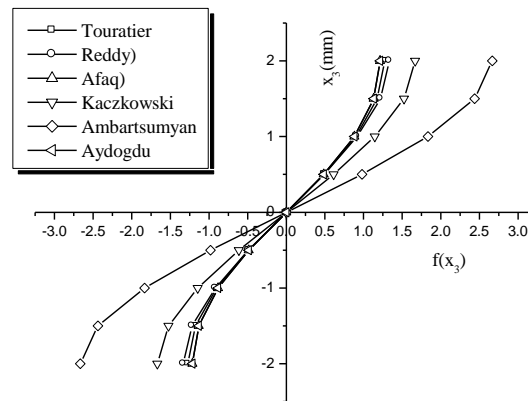


Figure II.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

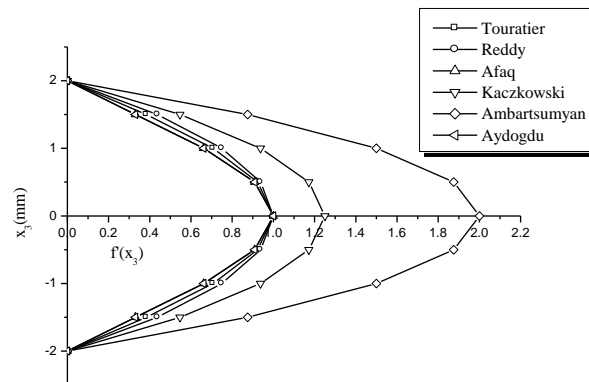


Figure II.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur

II.4.4 La théorie raffinée de déformation des plaques :

Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane et al (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji et al (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, z) + w_s(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.12}$$

Où u_0, v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y d'un point sur le plan moyen de la plaque.

w_b et w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion et au cisaillement, respectivement.

$\psi(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de forme $\psi(z)$ est choisit de telle façon que la condition de nullité de la contrainte de cisaillement transversale aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque est respectée, et par conséquent, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

Conclusion :

Le savoir de l'importance de l'analyse vibratoire et l'effet des fondations élastiques sur le comportement dynamique des plaques FGM est indispensable pour faire une bonne étude en utilisant la théorie la plus adéquate ,tel que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ,la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ,la théorie raffinée (RPT).

Chapitre III

les différentes recherches
sur
les plaques FGM

Introduction :

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements structurel et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux comportement dynamique de ces matériaux.

III.1 Etudes sur le comportement structurel des FGM :

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient évalué. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le Volume).

Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques les plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes. Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker (1995) a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent et les modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références Reuter (1997). Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur

analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et Ha (2001) ont comparée la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal (2005) ne se rapporte pas aux matériaux à gradient évalué, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogène mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant en compte l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publié Yin (2004). Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans Figure III.1, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al (2004) et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérées exactes. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.

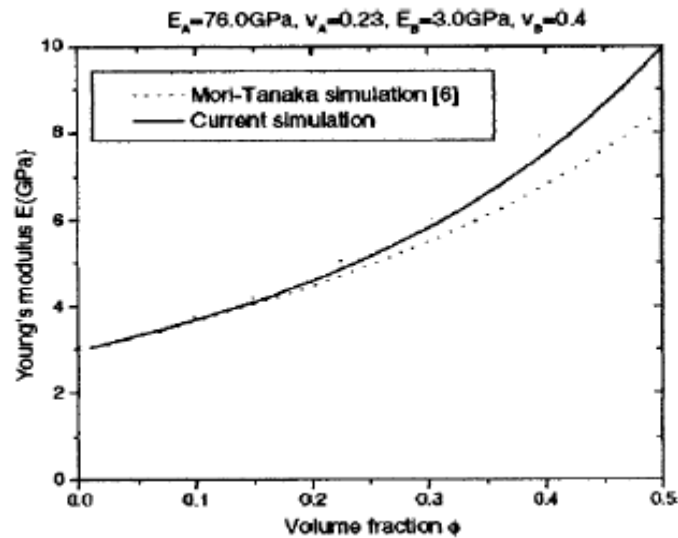


Figure III.1: Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al (2004) et le modèle de Mori-Tanaka.

III.2 Etudes sur le comportement thermomécanique des FGM :

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée. Jin (2002) a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidis à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa (2004) où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al (2003) en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrit et un cylindre avec une température constante appliquée sur la sa surface.

Vel et Batra (2002) ont également présenté les solutions analytiques du problème de conduction thermique transitoire en 3D pour une plaque en FGM simplement appuyée, basé sur la théorie linéaire découplée, quasi-statique thermo-élasticité. Les températures uniformes sont prescrites sur les bords et soit la température en fonction du temps ou de flux de chaleur est considéré sur le dessus et les surfaces inférieures de la plaque en FGM. Les contraintes transitoires induites par la chaleur dans des plaques en FGM ont été liés au mode d'application de la charge thermique dans cette étude.

Qian et al (2004) ont étudié les déformations thermo-élastiques transitoires d'une plaque en FGM épaisse. Les contraintes et les déformations dues à l'application simultanée des contraintes thermiques et mécaniques transitoires ont été calculées en maintenant les bords de la plaque à température uniforme. Les solutions sont obtenues par la méthode locale maillage de Petrov-Galerkin (MLPG). Ils ont constaté que les centres de gravité de la flèche et de la contrainte axiale induite au centre de gravité de la surface supérieure de la plaque sont nettement influencés par les conditions aux limites appliquées au niveau des bords de la plaque.

III.3 Etudes Sur Le Comportement dynamique Des FGM :

A partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques Praveen et Reddy (1998) ont analysé par éléments finis les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales, Reddy (2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

Yang et Shen (2001) ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'index de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élanement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM. Les solutions ont été obtenues grâce à l'utilisation conjointe de la méthode QD et de la méthode de Galerkin. Seule la dépendance des propriétés du matériau à la température a été prise en compte.

En se basant sur la méthode des éléments finis, He, Ng et al (2001) ont analysé, le contrôle actif de la réponse dynamique de plaques minces en FGM, auxquelles sont collés des

actionneurs piézoélectriques et des capteurs. Le problème a été résolu en utilisant la théorie classique des plaques (CPT) et un modèle d'éléments finis, pour finalement analyser l'effet de la fraction volumique sur les réponses statiques et dynamiques pour différentes conditions aux limites. Le modèle du contrôle actif s'est avéré efficace car la réponse dynamique a montré que les amplitudes des vibrations ont été grandement atténuées pour des valeurs de gains appropriées. Une méthode similaire a été proposée par Liew, He et al (2001) en se servant de la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) et en prenant en compte une variation de température. Toutes ces études ont été faites en considérant une température constante ($T = 300^\circ\text{K}$) exceptée celle de Liew, He et al.

C'est en 2002 qu'il y a eu prise en compte de l'effet de la température par Yang et Shen qui étudièrent les caractéristiques vibratoires de la réponse transitoire d'une plaque FGM pour laquelle les propriétés thermomécaniques dépendent de la température. Le problème a été résolu par une méthode hybride MDQ-Galerkin couplée à la procédure de superposition. Il faut souligner que ces auteurs n'ont pas considéré le cas d'une conduction thermique à travers l'épaisseur, par contre les propriétés thermomécaniques dépendent à la fois de la position et de la température. La raison évoquée était que le problème serait devenu bien plus complexe.

Reddy et Chen (2003) ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matriciel. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

Huang et Shen (2004) ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra (2004) pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (W_a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. Qian, Batra et al (2004) ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux réalisés par Qian, Batra et al (2003) relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre

supérieure combinée à la méthode de Pétrov-Galerkin Liew, Zhao et al (2011).

En utilisant la méthode de Ritz (1908) avec fonction poutre et en se servant de la théorie des plaques d'ordre supérieur de Reddy, (Kim 2005) a montré l'influence de la composition (concentrations des constituants), de la géométrie et de l'élévation de température sur les caractéristiques vibratoires d'une plaque FGM métal-céramique encastrée dont les propriétés dépendent de la température. Cette dernière est supposée varier uniquement à travers l'épaisseur.

Les travaux de Ferreira, Batra et al (2006) ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. Ils ont utilisé la méthode globale de collocation associée à la théorie d'ordre supérieur de Reddy (1984,1990) et la technique de Mori-Tanaka ,Benveniste (1987), Mori et Tanaka (1973) pour approximer les solutions par la MRBF (multiquadratic radial basis functions). Selon ces auteurs, la méthode numérique utilisée est avantageuse par rapport à celle des éléments finis par le fait qu'elle ne nécessite ni la discrétisation du domaine en éléments bidimensionnelles ou tridimensionnelles ni la connexion entre les éléments discrétisés. Cette technique est appelée méthode sans maillage, meshless-method, Liu (2003). La méthodologie a permis d'avoir des fréquences très proches de celles calculées par Vel et Batra (2004) obtenues par la méthode tridimensionnelle exacte.

C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. Uymaz et Aydogdu (2007) ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'index de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Les déplacements ont été approximés par des polynômes orthogonaux de Chebyshev. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs peuvent diminuer très sensiblement les concentrations de contraintes au niveau des interfaces grâce à la variation gradée des propriétés entre l'âme et le revêtement.

Zenkour (2005) a analysé le flambage et les vibrations libres des plaques FGM sandwichs.

En utilisant la théorie des déformations sinusoïdales d'ordre supérieur, il a étudié l'influence du cisaillement transverse, de l'épaisseur de l'âme (relativement à l'épaisseur de la plaque) sur la charge critique de flambage et sur les fréquences propres. Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li et al (2008). La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés.

L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM. Les déplacements ont été approximés par les polynômes orthogonaux de Chebyshev. L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'index des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse. Poursuivant leurs efforts, Li et al (2009) ont analysé, en 2009, les vibrations libres d'une plaque FGM céramique-métal en appuis simples puis encadrée en incluant trois cas d'environnements thermiques : élévations uniforme, linéaire et non linéaire de la température. La théorie est basée sur l'élasticité tridimensionnelle.

Matsunaga (2008) a analysé, les vibrations libres et le flambage d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. Plusieurs théories d'approximation par troncature ont été appliquées pour résoudre le problème de la plaque FGM en appuis simples.

L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaques FGM.

Zhao et al (2009) ont analysé les vibrations libres d'une plaque FGM en utilisant la méthode kp-Ritz (element-free kernel particle-Ritz method). Pour tenir compte du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, les auteurs ont utilisé la théorie de déformation des plaques du premier ordre. Les résultats trouvés ont montré que l'index de la fraction volumique compris entre 0 et 5 a une influence significative sur les fréquences et que les effets de la géométrie sur les fréquences sont indépendants de la fraction volumique. Les auteurs ont aussi conclu que les différentes valeurs du coefficient de correction du cisaillement n'ont pas de véritables effets sur les fréquences naturelles lorsque le rapport d'élanement est très largement supérieur à 10.

En utilisant les polynômes orthogonaux Chebyshev et la méthode de Ritz, Amini et al (2009) ont effectué l'analyse des vibrations libres de plaques FGM reposant sur des fondations élastiques et dont la formulation est basée sur la théorie de l'élasticité 3-D. grâce à une méthode semi-analytique hybride basée sur la MDQ (méthode Quadratique différentielle) et en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, Mlekzadeh (2009) a analysé durant la même année les vibrations d'une plaque FGM reposant sur des fondations élastiques. Les solutions obtenues ont permis de montrer l'influence de la géométrie, des paramètres du support élastique et des conditions aux limites sur paramètres de fréquence.

Le principal résultat concerne la méthode numérique utilisée. En effet, l'application de la MDQ dans la direction de l'épaisseur permet de prendre en compte une distribution arbitraire des propriétés à travers l'épaisseur et d'implémenter les effets du support élastique en tant que conditions aux limites sur la surface inférieure, efficacement et d'une manière exacte. Par la suite Lü et al (2009) ont présenté des solutions exactes d'une plaque FGM épaisse reposant sur une fondation élastique, obtenues par la méthode SSA (State Space Approach). Atman Tounsi et al (2010) ont étudié par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre supérieur, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

Huang, McGee III et al (2011) se sont penchés sur le comportement vibratoire libre d'une plaque FGM épaisse fissurée au bord. L'étude emploie la théorie Reddy (1984,1999) et une nouvelle procédure de Ritz à base de fonctions admissibles spéciales, appelées « fonctions criques ». Celles-ci permettent de correctement tenir compte du comportement de la singularité des contraintes à l'extrémité de la crique en prenant en considération la discontinuité des déplacements et de leurs pentes à travers la crique. Les résultats ont permis de montrer qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, les paramètres de fréquence de la plaque FGM métal-céramique (Al/Al₂O₃) diminuent mais que ceux de la plaque (Al/ZrO₂) augmentent. L'utilisation de la loi de mélange de Mori et Tanaka (1973) conduit à des paramètres de fréquence plus petits que ceux obtenus par la loi de mélange en puissance (P-FGM). Lorsque la longueur de la crique augmente, les paramètres de fréquence diminuent. Cette diminution n'est pas significative lorsque la crique est petite ($d/a < 0.1$). Selon ces auteurs, l'ensemble proposé des fonctions criques de Ritz peut être adapté aux cas de formulations basées sur la théorie de l'élasticité 3-D de corps FGM épais et fissurés.

Ces fonctions peuvent également être directement utilisées pour d'autres formes de plaques (circulaire, elliptique, polygonale, trapézoïdale) et dans d'autres méthodes numériques

(Galerkin et méthode spectrale).

Durant la même année, Saidi et al (2011) ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur des fondations élastiques. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Les équations obtenues par le principe de Hamilton ont été découplées et résolues analytiquement par la méthode de Levy (1899). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration, Ait Atmane et al (2010) ont étudié le comportement de vibration libre de plaques de FG simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques Winkler - Pasternak en proposant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé. En utilisant une théorie des plaques quatre variables raffinées, Benachour et al (2011) ont étudié de la réponse de vibration libre de plaques FG avec gradient arbitraire.

Neves et al (2012 ab) a proposé un modèle de déformation de cisaillement trigonométrique et un quasi - 3D théorie de déformation cisaillement hyperbolique hybride pour le pliage et sans analyse des vibrations de plaques de FG , Akavci (2014) a présenté l'analyse de vibration libre de plaques épaisses FG supportés sur deux paramètres fondation élastique basée sur une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur. Belabed et al (2014) ont développé une théorie efficace de déformation normale pour les plaques de FG. Hebali et al (2014) a examiné l'analyse statique et dynamique des plaques épaisses FG avec une nouvelle théorie cisaillement déformation hyperbolique quasi - 3D. Ait Amar Meziane et al (2014) a présenté une théorie raffinée simple et efficace pour le flambement et et la vibration des plaques sandwich exponentielle classés dans diverses conditions limites. Mahi et al (2015) a proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le pliage et sans analyse des vibrations des plaque gradué isotrope, sandwich et plaques composites laminé. Ait Atmane et al (2015) a présenté une théorie de déformation de cisaillement variationnellement cohérente pour l'analyse des vibrations de poutres FG épaisse ayant des porosités. Bourada et al (2015) ont étudié les comportements de flexion et de vibration des poutres épaisses FG en utilisant une nouvelle théorie simple de cisaillement et

de déformations normales . Nguyen et al (2015) a présenté une théorie de déformation de cisaillement ordre supérieur raffiné pour le pliage , les vibrations et flambage de plaques FG sandwich .

Pradhan et Chakraverty (2015) ont analysé la vibration libre de plaques elliptiques FG minces avec divers supports de bord. Attia et al (2015) ont étudié la réponse de vibration libre de plaques de FG avec des propriétés dépendantes de la température à l'aide de diverses théories raffinés a quatre variables. Belkorissat et al (2015) ont examiné les propriétés de vibration de nanoplaques FG en utilisant une nouvelle théorie nonlocal raffinée a quatre variable. Bennai et al (2015) a présenté une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur et de la théorie de déformation normale pour les plaque sandwich FG. Kar et Panda (2015) ont étudié la vibration de flexion non linéaire de cisaillement panneau déformable de coquille sphérique FG. Bennoun et al (2016) ont proposé une nouvelle théorie des plaques raffiné pour l'analyse des vibrations de plaques sandwich FG. Ait Atmane et al (2016) ont étudié l'effet de l'épaisseur et de la porosité d'étirement sur la réponse mécanique d'une poutre FG reposant sur des fondations élastiques.

Conclusion :

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient évalué et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en se concentrant sur les travaux dédiés aux comportements structurels, thermomécaniques et dynamiques des plaques en FGM.

Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette discipline. Ce chapitre sera consacré aux recherches réalisées durant ces deux dernières décennies.

Chapitre IV

Le Développement
D'une
Nouvelle Théorie

Introduction :

Toute théorie d'un problème de la mécanique des milieux continus, présente comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords de la structure complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode facile à mettre en œuvre, permettant de calculer les distributions des déplacements et des contraintes, ainsi que les fréquences naturelles de la vibration libre des plaques en matériaux à gradient évalué qui sont des approximations de qualité de la solution exacte dans ce cas.

IV.1 la géométrie de la plaque :

Considérons une plaque rectangulaire en FGM ayant les dimensions représentées dans la Figure VI.1. On suppose qu'elle est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k_w et une rigidité de cisaillement de k_s . On suppose que la plaque a un comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles de la plaque FGM varient selon une distribution de puissance suivant l'épaisseur de la plaque tel que :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{IV. 1})$$

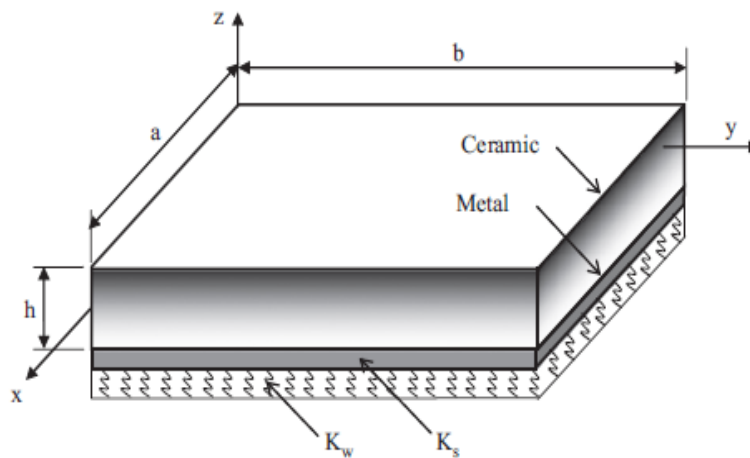


Figure IV.1: géométrie d'une plaque FG rectangulaire

P : présente les propriétés matérielles tel que le module de Young E et la masse volumique ρ , les lettres m et c indiquent le métal et la céramique, les deux matériaux qui constituent les deux surfaces de la plaque inférieure et supérieure, respectivement, Ou $-h/2 \leq z \leq h/2$.

P : est l'indice de puissance, ν est le coefficient de poisson supposant constant.

IV.2 les Equations cinématique et constitutive:

En se basant dans cette étude sur la théorie des plaques d'ordre élevé (HSDT) avec la prise en considération que le nombre des inconnus est réduit.

Le champ de déplacement est exprimé par Mahi et al (2015) :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z)\theta_x(x, y, t) \quad (\text{IV. 2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z)\theta_y(x, y, t) \quad (\text{IV. 2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV. 2c})$$

Ou :

u , v , w sont les déplacements dans les directions x , y , z .

u_0 , v_0 , w_0 : sont les déplacements de la surface moyenne de la plaque.

θ_x et θ_y : sont les rotations des normales de la surface neutre par rapport à y et x .

$\Psi(z)$: la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

Les hypothèses de la théorie :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les déformations engendrées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes : w_b due à la flexion et w_s due au cisaillement transverse.
- Les rotations peuvent être s'écrire : $\theta_x = -\partial w_b(x, y) / \partial x$ et $\theta_y = -\partial w_s(x, y) / \partial y$

Sur la base des hypothèses citées, le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{IV.3a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{IV.3b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{IV.3c})$$

Dans cette étude la nouvelle fonction de forme $f(z)$ pour notre plaque en FGM est présentée sous la forme suivante :

$$f(z) = z - \Psi(z) = z - \frac{h}{2} \tanh\left(2 \frac{z}{h}\right) + \frac{4}{3 \cosh^2(1)} \left(\frac{z^3}{h^2}\right) \quad (\text{IV. 4})$$

Cette fonction aide à satisfaire la nullité des efforts de cisaillement transversaux aux deux facettes de la plaque. Les distributions hyperboliques des efforts de cisaillement transversaux suivant l'épaisseur de la plaque sont prises en considération dans cette analyse à l'aide de la fonction de gauchissement proposée.

Le champ de déformation se déduit du champ de déplacement de l'équation (IV.3) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 5})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 6a})$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV. 6b})$$

Pour un matériau élastique et fonctionnellement gradué, les relations constitutives s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 7})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les éléments de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (VI.1), les coefficients de rigidité C_{ij} peuvent être écrits de la manière suivante :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{IV. 8a})$$

$$C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{IV. 8b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV. 8c})$$

IV.3 Les équations gouvernantes :

Les équations gouvernantes d'équilibre peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton qui dérive l'équation du mouvement de la plaque FGM : Ould Larbi et al (2013), Draiche et al (2014), Tagrara et al (2015):

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV. 9})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation de l'énergie potentielle; δK est la variation d'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est exprimée par :

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \quad (\text{IV. 10})$$

Substituant Equation (IV. 6a) dans Equation (IV. 10) et par intégration à travers l'épaisseur de la plaque, Equation (V.10) peut être réécrit comme suit :

$$\delta U = \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0 \quad (\text{IV. 11})$$

Où A : la surface supérieure et les efforts résultants N , M , et S sont définies par

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (\text{IV. 12a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{IV. 12b})$$

La variation de l'énergie potentiel des fondations élastique peut calculer par :

$$\delta V = \int_A f_e \delta (w_b + w_s) dA \quad (\text{IV. 13})$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation de Pasternak, Tebboune et al(2015), Besseghier et al (2015):

$$f_e = K_w w - K_{s1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{s2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{IV. 14})$$

Où K_w est le module de réaction du sol de fondation (coefficient d'élasticité de la fondation) et K_{s1} et K_{s2} sont les modules de cisaillement de la plate-forme (rigidité de la fondation de la couche de cisaillement). Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons $K_{s1} = K_{s2} = K_s$.

Si la rigidité de la fondation de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient une fondation Winkler.

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V [\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}] \rho(z) dV \\
&= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s)] \right. \\
&\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x} \delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y} \delta\dot{v}_0 \right) \\
&\quad - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x} \delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y} \delta\dot{v}_0 \right) \\
&\quad + I_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} \right) \\
&\quad \left. + J_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{IV. 15}$$

$I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$ sont les inerties massiques, définies respectivement par :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, z^2, z f, f^2) \rho(z) dz \tag{IV. 16}$$

La substitution des équations (IV. 11), (IV. 13), et (IV. 15) dans l'équation. (IV. 9), en intégrant par partie, En rassemblant les coefficients des $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s Les équations d'équilibre résultantes sont :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
\delta v_0 : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
\delta w_b : \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
\delta w_s : \quad \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - f_e &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
&\quad - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
\end{aligned} \tag{IV. 17}$$

Ou $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ est l'opération de laplacien

En substituant l'équation (IV. 5) dans l'équation (IV. 7) et les résultats dans l'équation (IV. 12) les contraintes sont obtenue en tant que:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (\text{IV. 18})$$

Dans le quel:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV. 19a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV. 19b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 19c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 19d})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 19e})$$

Ou Les composantes de rigidité sont définies comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV. 20a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV. 20b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV. 20c})$$

En substituant l'équation (IV.18) dans l'équation (IV.19), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacement ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$), Les équations d'équilibre prennent la forme suivante:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_b - J_1d_1\ddot{w}_s, \quad (\text{IV. 21a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_b - J_1d_2\ddot{w}_s, \quad (\text{IV. 21b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s - f_e = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_b) - J_2(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s) \quad (\text{IV. 21c})$$

$$B_{11}^s d_{1111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{1222}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{1122}v_0 + B_{22}^s d_{2222}v_0 - D_{11}^s d_{11111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{11222}w_b - D_{22}^s d_{22222}w_b - H_{11}^s d_{11111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{11222}w_s - H_{22}^s d_{22222}w_s + A_{44}^s d_{111}w_s + A_{55}^s d_{222}w_s - f_e = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - J_2(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_b) - K_2(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s) \quad (\text{IV. 21d})$$

Avec d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs de dérivations données comme suit:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV. 22})$$

IV.4 La solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyée :

Les solutions analytiques des équations (VI.21) sont obtenues pour l'analyse de la vibration libre des plaques en se basant sur les séries de Fourier qui satisfont les conditions d'appuis (la méthode de Navier).

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 23})$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} , sont des paramètres arbitraire à déterminer, ω est la fréquence propre associée par (m,n) mode propre, et $\alpha = m\pi / a$ et $\beta = n\pi / b$,

En substituant le champ de déplacement (IV. 23) dans les équations d'équilibre (IV. 21), les équations de la fréquence sont obtenues comme suit :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV. 25})$$

Avec:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}), S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), S_{13} = \alpha[\alpha^2 B_{11} + \beta^2(B_{12} + 2B_{66})], \\ S_{14} &= -\alpha[\alpha^2 B_{11}^s + \beta^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s)], S_{22} = -(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}), S_{23} = \beta[\beta^2 B_{22} + \alpha^2(B_{12} + 2B_{66})] \\ S_{24} &= -\beta[\beta^2 B_{22}^s + \alpha^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s)], \\ S_{33} &= -[D_{11}(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66})] + K_w - K_s(\alpha^2 + \beta^2) \\ S_{34} &= [D_{11}^s(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)] + K_w - K_s(\alpha^2 + \beta^2), \\ S_{44} &= -[H_{11}^s(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)] + A_{11}^s(\alpha^2 + \beta^2) + K_w - K_s(\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{11} &= -I_0, m_{13} = \beta I_1, m_{14} = -\beta J_1, m_{22} = m_{11}, m_{23} = -\alpha I_1, m_{24} = -\alpha J_1, m_{33} = -(I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)) \\ m_{34} &= -I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2), m_{41} = -\beta J_1, m_{42} = -\alpha J_1, m_{44} = -(I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2)) \end{aligned} \quad (\text{IV. 26})$$

Conclusion :

L'analyse vibratoire des plaques FGM simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques est examinée par la nouvelle théorie raffinée. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans cette théorie est de quatre, alors que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

Chapitre V

Résultats Et Discussion

Introduction :

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire libre des plaques en matériaux à gradient évalué FGM reposant sur des fondations élastiques. Le modèle ainsi choisis est basé sur le modèle hyperbolique de déformation en cisaillement à quatre variables.

V.1 Application numérique :

Dans cette étude, divers exemples numériques sont examinées afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie pour prédire le comportement de vibration libre de plaques FGM simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques.

Deux types de plaque FGM, Al / ZrO_2 et $\text{Al} / \text{Al}_2\text{O}_3$ sont utilisé pour analyser la plaque en vibration, les propriétés de ces matériaux sont dans le tableau V.1 et plus de commodité les paramètres sans dimension suivant sont utilisés :

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \quad k_w = \frac{K_w a^4}{D}, \quad k_s = \frac{K_s a^2}{D},$$

$$D = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{[p(8+3p+p^2)E_m + 3(2+p+p^2)E_c]}{[(1+p)(2+p)(3+p)]} \quad (\text{V. 1})$$

Tableau V.1: les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM

| Material | proprieties | | |
|---|----------------------------|-----------------------|---|
| | Module de young E (GPa) | Coefficient de poison | Masse volumique (kg/m ³) |
| Aluminium (Al) | 70 | 0.3 | 2702 |
| Alumina (Al ₂ O ₃) | 380 | 0.3 | 3800 |
| Zirconia (ZrO ₂) | 200 | 0.3 | 5700 |

V. 2 Analyse de la vibration libre de la plaque Al/ZrO₂ :

Exemple 1 :

Dans Le premier exemple les fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque carré avec une épaisseur $a = 5 \cdot h$ et en supposant que l'effet des fondations élastiques est négligeable pour trois indices de puissance différents sont examinées et comparée avec la solution exacte en 3D de Vel et Batra (2004) , quasi théories de déformation de cisaillement sinusoïdales et hyperboliques 3D de Neves et al (2012ab) et 2D ordre supérieur des modèles de déformation de cisaillement de Matsunaga (2008) et Hosseini - Hashemi et al (2011) et Akavci (2014).

Tableau V.2: la comparaison des fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque carré Al/ZrO₂ ($a/h=5$), ($k_w = k_s = 0$)

| Source | $p = 2$ | $p = 3$ | $p = 5$ |
|--|---------------|---------------|---------------|
| Vel and Batra (2004) | 0.2197 | 0.2211 | 0.2225 |
| Neves et al (2012a) ($\varepsilon_z = 0$) | 0.2189 | 0.2202 | 0.2215 |
| Neves et al (2012a) ($\varepsilon_z \neq 0$) | 0.2198 | 0.2212 | 0.2225 |
| Neves et al (2012b) ($\varepsilon_z = 0$) | 0.2191 | 0.2205 | 0.2220 |
| Neves et al (2012b) ($\varepsilon_z \neq 0$) | 0.2201 | 0.2216 | 0.2230 |
| Matsunaga (2008) | 0.2264 | 0.2270 | 0.2280 |
| Hosseini-Hashemi et al (2011) | 0.2264 | 0.2276 | 0.2291 |
| Akavci (2014) | 0.2263 | 0.2268 | 0.2277 |
| Present study | 0.2258 | 0.2266 | 0.2276 |

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$$

Les résultats montrent que les fréquences fondamentales non dimensionnelles de ces plaques obtenues par la méthode actuelle sont en bonne concordance avec ceux indiqués par les autres théories et montrent que Les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'indice matériel P

Exemple 2 :

Une autre étude comparative entre les fréquences non dimensionnelle en fonction du rapport a/h et en fonction de l'indice de puissance sur la même plaque a été faite.

L'excellent accord entre nos résultats et ceux trouvé dans les théories du 3D Vel et Batra (2004) et 2D théories d'ordre élevé de déformation de cisaillement de Matsunaga (2008) et Akavci (2014) est très remarqué dans le Tableau V.3.

Pour les différentes valeurs du paramètre du matériau P et pour les différents rapports d'épaisseur, On remarque que plus le rapport (a/h) augmente, les fréquences naturelles augmentent et ceci pour les différentes valeurs de paramètre du matériau P .

Tableau V.3 : la comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque carré Al/ZrO₂ ($m=n=1$), ($k_w = k_s = 0$)

| Mode no. | Source | $p = 0^{(a)}$ | | $p = 1$ | | | $a/h = 5$ | | |
|----------|----------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | $a/h = \sqrt{10}$ | $a/h = 10$ | $a/h = 5$ | $a/h = 10$ | $a/h = 20$ | $p = 2$ | $p = 3$ | $p = 5$ |
| 1 | Vel and Batra (2004) | 4.6582 | 5.7769 | 5.4806 | 5.9609 | 6.1076 | 5.4923 | 5.5285 | 5.5632 |
| | Matsunaga (2008) | 4.6582 | 5.7769 | 5.7123 | 6.1932 | 6.3390 | 5.6599 | 5.6757 | 5.7020 |
| | Akavci (2014) | 4.6569 | 5.7754 | 5.7110 | 6.1924 | 6.3388 | 5.6593 | 5.6718 | 5.6941 |
| | Present study | 4.6274 | 5.7705 | 5.6955 | 6.1876 | 6.3373 | 5.6475 | 5.6640 | 5.6885 |
| 2 | Vel and Batra (2004) | 8.7132 | 27.554 | 14.558 | 29.123 | 58.250 | 14.278 | 14.150 | 14.026 |
| | Matsunaga (2008) | 8.7132 | 27.554 | 15.339 | 30.685 | 61.374 | 14.970 | 14.742 | 14.476 |
| | Akavci (2014) | 8.7132 | 27.554 | 15.341 | 30.686 | 61.374 | 14.972 | 14.743 | 14.477 |
| | Present study | 8.7130 | 27.554 | 15.344 | 30.686 | 61.375 | 14.978 | 14.750 | 14.483 |
| 3 | Vel and Batra (2004) | 14.463 | 46.503 | 24.381 | 49.013 | 98.145 | 23.909 | 23.696 | 23.494 |
| | Matsunaga (2008) | 14.463 | 46.503 | 25.776 | 51.795 | 103.71 | 25.140 | 24.741 | 24.278 |
| | Akavci (2014) | 14.728 | 46.574 | 25.926 | 51.866 | 103.74 | 25.296 | 24.909 | 24.461 |
| | Present study | 14.728 | 46.574 | 25.924 | 51.866 | 103.74 | 25.296 | 24.908 | 24.460 |
| 4 | Vel and Batra (2004) | 24.830 | 201.34 | 57.620 | 212.22 | 828.78 | 54.685 | 53.179 | 52.068 |
| | Matsunaga (2008) | 24.830 | 201.34 | 61.509 | 227.29 | 888.60 | 57.576 | 55.237 | 53.288 |
| | Akavci (2014) | 25.427 | 203.98 | 62.886 | 231.52 | 904.25 | 58.993 | 56.373 | 54.067 |
| | Present study | 25.347 | 202.92 | 62.635 | 230.40 | 899.60 | 59.135 | 56.805 | 54.615 |

$$^{(a)} \tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c} \quad , \quad \tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}$$

Exemple 3:

Le tableau V.4 présente les fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques rectangulaires reposant sur des fondations élastiques. Les résultats de la présente formulation sont comparés avec les résultats de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) des Hosseini Hashemi et al (2010) et théories de d'ordre élevé déformation de cisaillement (de HSDTs) de Hasani Baferani et al (2011) et Akavci (2014). On peut observer à partir du Tableau V.4 que les résultats actuels avec uniquement quatre inconnues sont en bon accord avec les résultats d'autres théories de cinq inconnues.

Tableau V.4: Comparaison des fréquences non dimensionnelles de la plaque Al/ZrO₂ rectangulaire ($a/b = 1.5$)

| (k_w, k_s) | a/h | p | Source | | | |
|--------------|-------|------|-------------------------------|--------------------------------|---------------|----------------|
| | | | Hasani Baferani et al. (2011) | Hosseini-Hashemi et al. (2010) | Akavci (2014) | Present study |
| (0, 0) | 0.05 | 0 | – | 0.02392 | 0.02393 | 0.02392 |
| | | 0.25 | – | 0.02269 | 0.02309 | 0.02308 |
| | | 1 | – | 0.02156 | 0.02202 | 0.02201 |
| | | 5 | – | 0.02180 | 0.02244 | 0.02244 |
| | 0.1 | 0 | – | 0.09188 | 0.09203 | 0.09191 |
| | | 0.25 | – | 0.08603 | 0.08895 | 0.08884 |
| | | 1 | – | 0.08155 | 0.08489 | 0.08479 |
| | | 5 | – | 0.08171 | 0.08576 | 0.08573 |
| | 0.2 | 0 | – | 0.32284 | 0.32471 | 0.32328 |
| | | 0.25 | – | 0.31003 | 0.31531 | 0.31396 |
| | | 1 | – | 0.29399 | 0.30152 | 0.30026 |
| | | 5 | – | 0.29099 | 0.31860 | 0.29710 |
| (250,25) | 0.05 | 0 | 0.03421 | 0.03421 | 0.03422 | 0.03421 |
| | | 0.25 | 0.03321 | 0.03285 | 0.03312 | 0.03311 |
| | | 1 | 0.03249 | 0.03184 | 0.03213 | 0.03213 |
| | | 5 | 0.03314 | 0.03235 | 0.03277 | 0.03277 |
| | 0.1 | 0 | 0.13365 | 0.13365 | 0.13375 | 0.13366 |
| | | 0.25 | 0.13004 | 0.12771 | 0.12959 | 0.12952 |
| | | 1 | 0.12749 | 0.12381 | 0.12585 | 0.12578 |
| | | 5 | 0.12950 | 0.12533 | 0.12778 | 0.12776 |
| | 0.2 | 0 | 0.43246 | 0.49945 | 0.50044 | 0.49967 |
| | | 0.25 | 0.42868 | 0.48327 | 0.48594 | 0.48522 |
| | | 1 | 0.46406 | 0.46997 | 0.47298 | 0.47233 |
| | | 5 | 0.44824 | 0.47400 | 0.47637 | 0.47610 |

$$\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

V. 3 Analyse de la vibration libre d'une plaque type Al/Al₂O₃:

Exemple 1 :

Pour vérifier la présente théorie, un autre type des plaques a été utilisé, Tableau V.5 montre une comparaison entre les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles des plaques carrées FGM calculées en utilisant la présente théorie et ceux donnés par Matsunaga (2008) et par Akavci (2014), Il peut être vu à partir du tableau V.5 que, pour les deux plaques minces et épaisses, un bon accord entre les résultats est démontrée.

Tableau V.5: les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles de la plaque carré Al/Al_2O_3 ($k_w = k_s = 0$)

| h/b | P | Source | Mode no | | | | | | | | |
|----------------------|-----|----------------------|----------------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 0.1 | 0 | Mode | 1, 0, 1 | 1, 1, 1 | 2, 0, 1 | 1, 2, 1 | 1, 0, 2 | 2, 2, 1 | 3, 0, 1 | 1, 3, 1 | |
| | | Matsunaga (2008) | 0.02936 | 0.0577 | 0.1120 | 0.1381 | 0.1948 | 0.2121 | 0.2357 | 0.2587 | |
| | | Akavci (2014) | 0.02936 | 0.0577 | 0.1119 | 0.1379 | 0.1948 | 0.2120 | 0.2355 | 0.2585 | |
| | | Present study | 0.02934 | 0.0577 | 0.1118 | 0.1377 | 0.1948 | 0.2114 | 0.2347 | 0.2576 | |
| | 0.5 | Matsunaga (2008) | 0.0249 | 0.0491 | 0.0956 | 0.1180 | 0.1749 | 0.1819 | 0.2022 | 0.2222 | |
| | | Akavci (2014) | 0.0249 | 0.0490 | 0.0954 | 0.1176 | 0.1749 | 0.1813 | 0.2016 | 0.2214 | |
| | | Present study | 0.02489 | 0.04901 | 0.09524 | 0.1174 | 0.1749 | 0.1808 | 0.2010 | 0.2207 | |
| | 1 | Matsunaga (2008) | 0.0224 | 0.0442 | 0.0861 | 0.1063 | 0.1620 | 0.1640 | 0.1824 | 0.2004 | |
| | | Akavci (2014) | 0.0224 | 0.0442 | 0.0860 | 0.1061 | 0.1620 | 0.1636 | 0.1819 | 0.1999 | |
| | | Present study | 0.02244 | 0.04420 | 0.08591 | 0.1059 | 0.1621 | 0.1632 | 0.1814 | 0.1993 | |
| | 4 | Matsunaga (2008) | 0.0194 | 0.0381 | 0.0735 | 0.0904 | 0.1308 | 0.1383 | 0.1534 | 0.1681 | |
| | | Akavci (2014) | 0.0194 | 0.0380 | 0.0734 | 0.0902 | 0.1308 | 0.1379 | 0.1529 | 0.1677 | |
| | | Present study | 0.01941 | 0.03810 | 0.07352 | 0.09037 | 0.1309 | 0.1381 | 0.1532 | 0.1679 | |
| | 10 | Matsunaga (2008) | 0.0186 | 0.0364 | 0.0699 | 0.0858 | 0.1153 | 0.1306 | 0.1446 | 0.1583 | |
| | | Akavci (2014) | 0.0186 | 0.0364 | 0.0699 | 0.0858 | 0.1153 | 0.1305 | 0.1445 | 0.1582 | |
| | | Present study | 0.01860 | 0.03639 | 0.06994 | 0.08582 | 0.1153 | 0.1304 | 0.1445 | 0.1581 | |
| | | | Mode | 1,0,1 | 1,1,1 | 2,0,1 | 1,0,2 | 1,2,1 | 1,1,2 | 1,0,3 | 2,2,1 |
| | 0.2 | 0 | Matsunaga (2008) | 0.1120 | 0.2121 | 0.3874 | 0.3897 | 0.4658 | 0.5511 | 0.6566 | 0.6753 |
| | | | Akavci (2014) | 0.1119 | 0.2120 | 0.3872 | 0.3897 | 0.4657 | 0.5510 | 0.6587 | 0.6759 |
| | | | Present study | 0.1118 | 0.2114 | 0.3851 | 0.3896 | 0.4626 | 0.5511 | 0.6586 | 0.6697 |
| | | 0.5 | Matsunaga (2008) | 0.0956 | 0.1819 | 0.3343 | 0.3497 | 0.4040 | 0.4941 | 0.5878 | 0.5891 |
| | | | Akavci (2014) | 0.0954 | 0.1813 | 0.3330 | 0.3495 | 0.4015 | 0.4940 | 0.5905 | 0.5856 |
| | | | Present study | 0.09524 | 0.1808 | 0.3314 | 0.3497 | 0.3990 | 0.4945 | 0.5903 | 0.5809 |
| | | 1 | Matsunaga (2008) | 0.0861 | 0.1640 | 0.3020 | 0.3236 | 0.3644 | 0.4567 | 0.5325 | 0.5444 |
| Akavci (2014) | | | 0.0860 | 0.1636 | 0.3009 | 0.3236 | 0.3629 | 0.4569 | 0.5461 | 0.5302 | |
| Present study | | | 0.08591 | 0.1632 | 0.2996 | 0.3241 | 0.3611 | 0.4585 | 0.5461 | 0.5258 | |
| 4 | | Matsunaga (2008) | 0.0735 | 0.1383 | 0.2502 | 0.2607 | 0.3000 | 0.3668 | 0.4325 | 0.4362 | |
| | | Akavci (2014) | 0.0734 | 0.1379 | 0.2493 | 0.2606 | 0.2987 | 0.3668 | 0.4381 | 0.4304 | |
| | | Present study | 0.07352 | 0.1381 | 0.2496 | 0.2619 | 0.2990 | 0.3703 | 0.4383 | 0.4303 | |
| 10 | | Matsunaga (2008) | 0.0699 | 0.1306 | 0.2300 | 0.2337 | 0.2790 | 0.3243 | 0.3855 | 0.3981 | |
| | | Akavci (2014) | 0.0699 | 0.1305 | 0.2337 | 0.2300 | 0.2792 | 0.3245 | 0.3878 | 0.3991 | |
| | | Present study | 0.06994 | 0.1304 | 0.2333 | 0.2306 | 0.2785 | 0.3263 | 0.3877 | 0.3971 | |

$$\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

Exemple 2 :

Tableau V.6 illustre les fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques Al / Al₂O₃ FG reposant sur des fondations élastiques. Les résultats sont obtenus pour les différents rapports d'aspect et comparés à ceux obtenus par Hasani Baferani et al (2011) et Akavci (2014) par HSDTs et Hosseini Hashemi et al (2010) par FSDT. Il peut être observé que, la théorie proposée est en bon accord avec les autres théories de déformation de cisaillement.

Tableau V.6: Comparaison des fréquences non dimensionnelles de la plaque Al/Al₂O₃ rectangulaire ($h/a = 0.15$)

| (k_w, k_s) | a/b | p | Source | | | |
|--------------|-------|------|-------------------------------|--------------------------------|---------------|----------------|
| | | | Hasani Baferani et al. (2011) | Hosseini-Hashemi et al. (2010) | Akavci (2014) | Present study |
| (0, 0) | 0.5 | 0 | – | 0.08006 | 0.08018 | 0.08009 |
| | | 0.25 | – | 0.07320 | 0.07335 | 0.07327 |
| | | 1 | – | 0.06335 | 0.06148 | 0.06142 |
| | | 5 | – | 0.05379 | 0.05215 | 0.05221 |
| | 1 | 0 | – | 0.12480 | 0.12508 | 0.12486 |
| | | 0.25 | – | 0.11354 | 0.11457 | 0.11439 |
| | | 1 | – | 0.09644 | 0.09613 | 0.09599 |
| | | 5 | – | 0.08027 | 0.08089 | 0.08102 |
| | 2 | 0 | – | 0.28513 | 0.28659 | 0.28547 |
| | | 0.25 | – | 0.25555 | 0.26356 | 0.26260 |
| | | 1 | – | 0.20592 | 0.22189 | 0.22115 |
| | | 5 | – | 0.16315 | 0.18232 | 0.18277 |
| (100,10) | 0.5 | 0 | 0.12869 | 0.12870 | 0.12876 | 0.12871 |
| | | 0.25 | 0.11885 | 0.11842 | 0.11847 | 0.11842 |
| | | 1 | 0.10498 | 0.10519 | 0.10388 | 0.10384 |
| | | 5 | 0.09227 | 0.09223 | 0.09098 | 0.09101 |
| | 1 | 0 | 0.17020 | 0.17020 | 0.17039 | 0.17024 |
| | | 0.25 | 0.15734 | 0.15599 | 0.15665 | 0.15652 |
| | | 1 | 0.13854 | 0.13652 | 0.13592 | 0.13583 |
| | | 5 | 0.12077 | 0.11786 | 0.11774 | 0.11782 |
| | 2 | 0 | 0.31449 | 0.32768 | 0.32889 | 0.32796 |
| | | 0.25 | 0.30484 | 0.29612 | 0.30297 | 0.30190 |
| | | 1 | 0.26966 | 0.24674 | 0.25901 | 0.25841 |
| | | 5 | 0.22932 | 0.20359 | 0.21785 | 0.21819 |

$$\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

Exemple 3 :

Tableau V.7 présente la comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques Al / Al₂O₃ FG reposant sur des fondations élastiques avec ceux rapportés par Akavci (2014) en utilisant HSDT. On peut constater à partir du Tableau V.7 que les résultats de la théorie proposée sont identiques avec les résultats d'Akavci (2014).

Tableau V.7: Comparaison des fréquences non dimensionnelles de la plaque Al/Al₂O₃ rectangulaire

| $(k_w, k_s)^{(a)}$ | a/b | a/h | p | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | | 0 | | 1 | | 5 | | 10 | |
| | | | Akavci (2014) | Present | Akavci (2014) | Present | Akavci (2014) | Present | Akavci (2014) | Present |
| (0,0) | 0.5 | 5 | 6.7771 | 6.7640 | 5.2122 | 5.2035 | 4.3763 | 4.3839 | 4.2153 | 4.2149 |
| | | 10 | 7.1794 | 7.1758 | 5.4918 | 5.4892 | 4.6986 | 4.7014 | 4.5432 | 4.5434 |
| | | 20 | 7.2948 | 7.2938 | 5.5712 | 5.5704 | 4.7943 | 4.7950 | 4.6411 | 4.6412 |
| | 1 | 5 | 10.4133 | 10.382 | 8.0368 | 8.0165 | 6.6705 | 6.6855 | 6.4099 | 6.4075 |
| | | 10 | 11.3468 | 11.337 | 8.6899 | 8.6836 | 7.4033 | 7.4100 | 7.1521 | 7.1522 |
| | | 20 | 11.6338 | 11.631 | 8.8879 | 8.8864 | 7.6393 | 7.6413 | 7.3934 | 7.3935 |
| | 2 | 5 | 22.8734 | 22.728 | 17.8289 | 17.732 | 14.3625 | 14.394 | 13.7120 | 13.678 |
| | | 10 | 27.1085 | 27.056 | 20.8487 | 20.814 | 17.5051 | 17.536 | 16.8613 | 16.860 |
| | | 20 | 28.7174 | 28.703 | 21.9670 | 21.957 | 18.7946 | 18.806 | 18.1727 | 18.174 |
| (0, 100) | 0.5 | 5 | 11.1237 | 11.116 | 11.8489 | 10.846 | 10.9925 | 10.994 | 11.0818 | 11.081 |
| | | 10 | 11.4503 | 11.448 | 11.0940 | 11.093 | 11.2538 | 11.254 | 11.3313 | 11.331 |
| | | 20 | 11.5474 | 11.546 | 11.1660 | 11.166 | 11.3343 | 11.334 | 11.4093 | 11.409 |
| | 1 | 5 | 15.2095 | 15.190 | 14.3923 | 14.384 | 14.3071 | 14.310 | 14.3829 | 14.381 |
| | | 10 | 15.9813 | 15.974 | 14.9443 | 14.941 | 14.8693 | 14.872 | 14.9193 | 14.919 |
| | | 20 | 16.2285 | 16.226 | 15.1189 | 15.118 | 15.0607 | 15.062 | 15.1056 | 15.106 |
| | 2 | 5 | 28.6623 | 28.558 | 25.6912 | 25.638 | 24.3625 | 24.368 | 24.3109 | 24.294 |
| | | 10 | 32.3444 | 32.300 | 28.2316 | 28.208 | 26.7223 | 26.738 | 26.5586 | 26.556 |
| | | 20 | 33.8076 | 33.795 | 29.2272 | 29.220 | 27.7770 | 27.784 | 27.5919 | 27.592 |
| (100, 0) | 0.5 | 5 | 7.2276 | 7.2150 | 5.8746 | 5.8670 | 5.2360 | 5.2420 | 5.1288 | 5.1285 |
| | | 10 | 7.6153 | 7.6120 | 6.1393 | 6.1370 | 5.5276 | 5.5298 | 5.4199 | 5.4200 |
| | | 20 | 7.7272 | 7.7262 | 6.2152 | 6.2146 | 5.6156 | 5.6162 | 5.5087 | 5.5088 |
| | 1 | 5 | 10.7082 | 10.678 | 8.4748 | 8.4560 | 7.2560 | 7.2690 | 7.0373 | 7.0350 |
| | | 10 | 11.6262 | 11.617 | 9.1107 | 9.1048 | 7.9520 | 7.9580 | 7.7356 | 7.7356 |
| | | 20 | 11.9909 | 11.906 | 9.3044 | 9.3024 | 8.1789 | 8.1808 | 7.9658 | 7.9658 |
| | 2 | 5 | 23.0053 | 22.862 | 18.0231 | 17.927 | 14.6363 | 14.668 | 14.0098 | 13.977 |
| | | 10 | 27.2246 | 27.172 | 21.0241 | 20.990 | 17.7396 | 17.769 | 17.1126 | 17.111 |
| | | 20 | 28.8295 | 28.815 | 22.1378 | 22.128 | 19.0187 | 19.030 | 18.4115 | 18.412 |
| (100, 100) | 0.5 | 5 | 11.4036 | 11.396 | 11.1817 | 11.178 | 11.3598 | 11.360 | 11.4581 | 11.458 |
| | | 10 | 11.7285 | 11.726 | 11.4284 | 11.427 | 11.6243 | 11.625 | 11.7103 | 11.710 |
| | | 20 | 11.8253 | 11.825 | 11.5008 | 11.500 | 11.7054 | 11.706 | 11.7888 | 11.789 |
| | 1 | 5 | 15.4127 | 15.394 | 14.6407 | 14.632 | 14.5862 | 14.588 | 14.6702 | 14.668 |
| | | 10 | 16.1808 | 16.174 | 15.1927 | 15.189 | 15.1498 | 15.152 | 15.2075 | 15.207 |
| | | 20 | 16.4271 | 16.425 | 15.3674 | 15.366 | 15.3414 | 15.342 | 15.3938 | 15.394 |
| | 2 | 5 | 28.7674 | 28.664 | 25.8251 | 25.772 | 24.5206 | 24.526 | 24.4759 | 24.458 |
| | | 10 | 32.4417 | 32.398 | 28.3613 | 28.338 | 26.8763 | 26.892 | 26.7186 | 26.716 |
| | | 20 | 33.9029 | 33.890 | 29.3557 | 29.350 | 27.9292 | 27.935 | 27.7497 | 27.749 |

^(a) $k_w = K_w a^4 / D_m$, $k_s = K_s a^2 / D_m$ OU $D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu^2)$

-La variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles en fonction de l'indice de puissance et le rapport a/h est présentée dans la Figure V.1. On peut constater d'après la figure que l'augmentation de l'indice de puissance conduit à une diminution de la fréquence fondamentale, Et ainsi une grande valeur de l'indice matériel P signifie que la plaque est riche en métal ce qui mène à la diminution de la rigidité.

La figure V.1 montre également que, avec une diminution du rapport a/h , l'influence de la déformation de cisaillement devient très efficace.

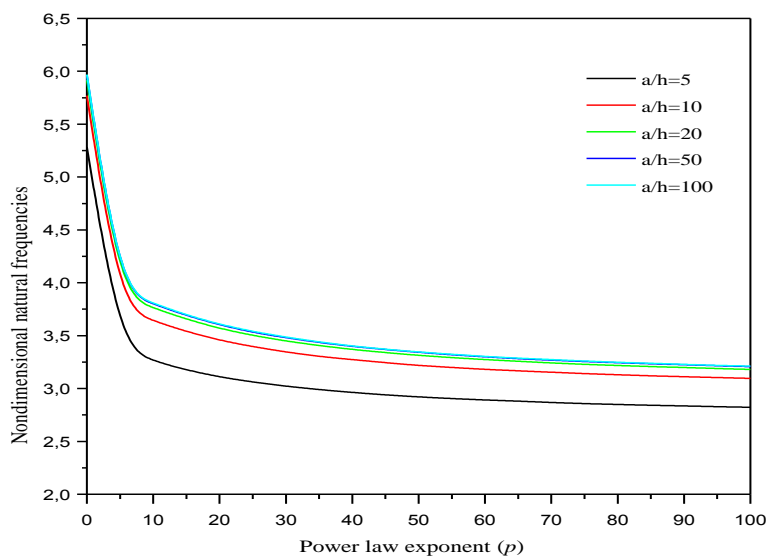


Figure V.1: Variation des fréquences fondamentale non dimensionnelle $\tilde{\beta} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ de la plaque carrée Al/Al₂O₃ en fonction de l'indice de puissance P

-Figure V.2 Présente l'effet des paramètres de fondation élastique sur la variation des fréquences naturelle non dimensionnelle de la plaque carré Al / Al₂O₃ simplement appuyées en fonction de l'indice de loi de puissance P . on constate que la présence de fondation élastique permet a la plaque pour devenir plus rigide.

La figure montre que les fréquences de notre plaque augmentent quand les paramètres de fondation augmentent.

Les résultats montrent aussi, la fondation Pasternak à un impact plus important que paramètre Winkler sur la fréquence fondamentale de la plaque.

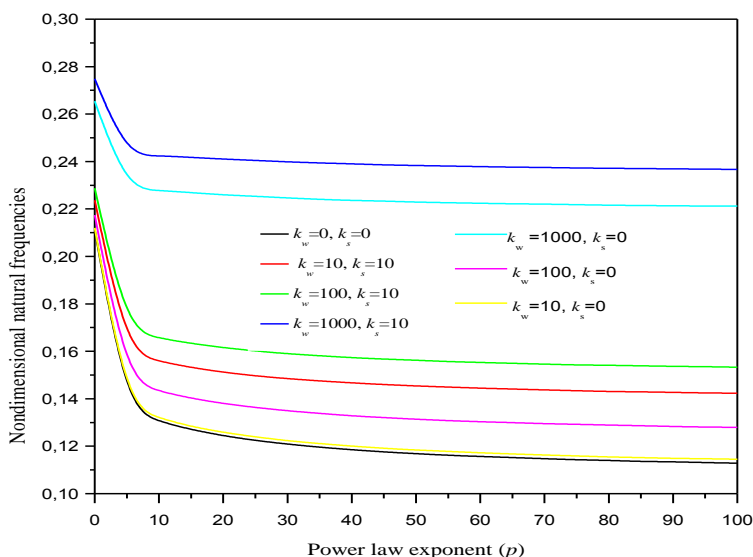


Figure V.2: Variation des fréquences non dimensionnelles $\beta = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ de la plaque Al/Al₂O₃ carré reposant sur fondation élastique en fonction de l'indice de puissance ($a/h = 5$)

-Les variations de fréquence fondamentale non dimensionnelle de la plaque carrée Al /Al₂O₃ simplement appuyée sont présentés dans les figures V. 3a et 3b en fonction de la fondation de Winkler. On constate d'après les résultats que, l'augmentation de l'indice de puissance réduit la fréquence fondamentale. On conclut d'après les résultats, que l'augmentation de la valeur de l'indice de puissance augmente l'impact de la fondation élastique sur la fréquence naturelle.

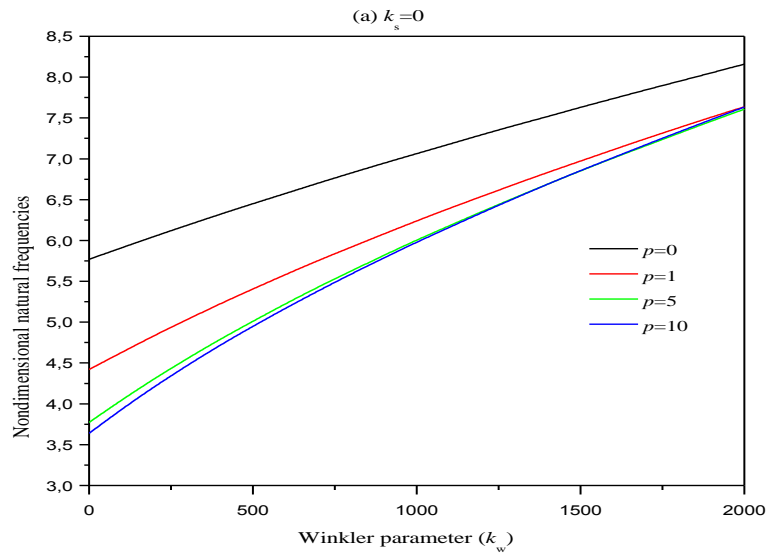


Figure V.3(a) : Variation des fréquences fondamentale non dimensionnelles $\tilde{\beta} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaque carré en FGM Al_2O_3 reposant sur la fondation élastique de type Winkler ($a/h = 10$): $k_s = 0$

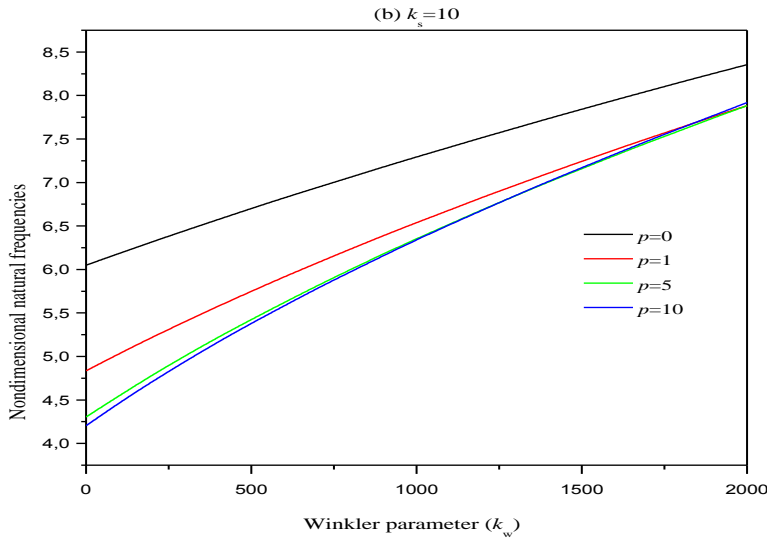


Figure V.3(b) : Variation des fréquences fondamentale non dimensionnelles $\tilde{\beta} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques carré en FGM Al/Al_2O_3 reposant sur la fondation élastique Winkler ($a/h = 10$): (a) $k_s = 10$

Conclusion :

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté les résultats de l'analyse de la vibration libre des plaques en FGM reposant sur des fondations de Winkler-Pasternak en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables. La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une inscription parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Toutes les études comparatives ont démontrées que les résultats obtenus en utilisant la théorie proposée à quatre variables et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est simple et efficace pour analyser la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées.

Conclusion
générale

CONCLUSION GENERALE

Les structures en matériaux a gradient évalué représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans ce travail une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique est proposée pour analyser la vibration de plaques FG simplement appuyé reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak.

La théorie proposée est une théorie raffiné ,le nombre des inconnues et les équations du présent modèle est réduit à quatre au lieu de cinq, En décomposant le déplacement en flexion et en cisaillement, et repose sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature.

Les principaux résultats obtenus:

- L'augmentation de l'indice de puissance conduit à la réduction des fréquences naturelles de la plaque.
- L'augmentation des valeurs des paramètres Winkler et Pasternak permet à augmenter la fréquence naturelle de la plaque FG.
- Le paramètre Pasternak de la fondation a une influence plus importante sur l'augmentation de la fréquence naturelle de la plaque de FG que le paramètre Winkler.
- Toutes les études comparatives ont montré que les fréquences non dimensionnelle obtenues par la présente théorie et la théorie exacte d'élasticité, les théories l'ordre élevé de déformation de cisaillement sont presque identiques. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et peuvent

ainsi améliorer le coût du calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGMs, en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie.

En perspective il est prévu d'appliqué le nouveau modèle pour analyser les différents comportements des structures en FGMs local ou non local, et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux

Référence
Bibliographie

REFERENCE BIBLIOGRAPHIE

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2016) :

“Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (In press).

Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016):

“A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, (In press).

Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016):

“A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423 – 431.

Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015):

“A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, 39, 2489–2508.

Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2015):

“A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, 18(3), 793 – 809.

Nguyen, K.T., Thai, T.H., Vo, T.P. (2015):

“A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, 18(1), 91 – 120.

Besseghier, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Benzair, A. (2015) :

“Nonlinear vibration properties of a zigzag single-walled carbon nanotube embedded in a polymer matrix”, *Advances in Nano Research*, 3(1), 29-37.

Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015),

“Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, 18(6), 1493 – 1515.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2015):

“A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel and Composite Structures*, 19(2), 369-384

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015):

“Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1143 – 1165.

Kar, V.R., Panda, S.K. (2015):

“Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel and Composite Structures*, **18(3)**, 693-709.

Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2015):

“Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 425 – 442.

Sallai, B., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E.A. (2015):

“Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam”, *Steel and Composite Structures*, **19(4)**, 829-841.

Tagrara, S.H., Benachour, A., Bachir Bouiadjra, M., Tounsi, A. (2015):

“On bending, buckling and vibration responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Steel and Composite Structures*, **19(5)**, 1259-1277.

Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015):

“Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, **18(2)**, 443 – 465.

Arefi, M. (2015):

“Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections”, *Steel and Composite Structures*, **18(3)**, 569 – 672.

Akbaş, Ş.D. (2015):

“Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures*, **19(6)**, 1421-1447.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015):

“Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel and Composite Structures*, **18(1)**, 187-212.

Pradhan, K.K., Chakraverty, S. (2015):

“Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports”, *Structural Engineering and Mechanics*, **53(2)**,

Bakora, A., Tounsi, A. (2015):

” Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, **56(1)**, 85 – 106.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015),

“On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel and Composite Structures*, **18(4)**, 1063-1081.

Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015):

“A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams” *Steel and Composite Structures*, **19(3)**, 521-546.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015):

“A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409 – 423.

Ebrahimi, F., Dashti, S. (2015):

” Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam”, *Steel and Composite Structures*, **19**(5), 1279 – 1298.

Hadji, L., Khelifa, Z., Adda Bedia, E.A. (2015):

“A new higher order shear deformation model for functionally graded beams”, *KSCE Journal of Civil Engineering*, (In press).

Hadji, L., Adda Bedia, E.A. (2015):

“Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams”, *Wind & Structures*, **21**(3), 273 – 287.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015):

“A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 235 – 253.

Darılmaz, K., (2015):

“Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 395 – 408.

Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014):

“A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795 – 810.

Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A., Khoshnevisrad, P. (2014):

“Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loadings using VIM”, *Steel and Composite Structures*, **17**(5), 753 – 776.

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014):

“A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, **11**(6), 1350082.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014):

“An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283.

Akavci, S.S. (2014): ”An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Composite Structures*, **108**, 667–676.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014) :

“An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293–318.

Ould Larbi, L, Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013):

“An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **41**, 421–433.

Draiche, K., Tounsi, A., Khalfi, Y. (2014):

“A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel and Composite Structures*, **17(1)**, 69-81.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Anwar Bég, O. (2014):

“Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology*, **34**, 24–34.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A (2014):

“New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **140**, 374 – 383.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013) :

“Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013):

A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, **24**, 209 – 220.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012):

“A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **14(1)**, 5-33.

Neves, A.M.A, Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., et al. (2012a):

“A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Composites: Part B*, **43**, 711–725.

Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., et al. (2012b):

“A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos Struct*, **94**, 1814–1825.

Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A. (2011):

“A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Composites Part B*, **42**, 1386-1394.

Hasani Baferani, A, Saidi, A.R, Ehteshami, H. (2011):

“Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation”, *Compos Struct*, **93**, 1842–1853.

Hosseini-Hashemi, S.H, Fadaee, M, Rokni Damavandi Taher, H. (2011):

“Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory”, *Appl Math Model*, **35**, 708–727.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010):

“Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int J Mech Mater Des*, **6**, 113–121.

Hosseini-Hashemi, S.H, Rokni Damavandi Taher, H, Akhavan, H, Omid, M. (2010):

“Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, *Appl Math Model*, **34**, 1276–1291.

Lu, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q. (2009):

“Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations”, *Mech Advan Mater Struct*, **16**, 576–84.

Malekzadeh, P. (2009):

“Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations”, *Compos Struct*, **89**, 367–373.

Chen, C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. (2009):

“Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory”, *J Reinforced Plast Compos*, **28(10)**, 1215–1234.

Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M. (2009):

“Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”, *J Sound Vib*, **319**, 918–939.

Matsunaga, H. (2008):

“Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory”, *Compos Struct*, **82**, 499–512.

Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F., Jorge, R.M.N. (2006):

“Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method”, *Compos Struct*, **75**, 593–600.

Qian, L.F., Batra, R.C., Chen, L.M. (2004):

“Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method”, *Composites: Part B*, **35**, 685–697.

Vel, S.S., Batra, R.C. (2004):

“Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, J Sound Vib, 272, 703–730.