

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBÈS

THESE DE DOCTORAT DE 3^{ème} CYCLE

Présentée par :
KEBIR Hadjer

Domaine : Mathématiques Informatique

Filière : Mathématiques

*Intitulé de la formation : Statistique, Mathématiques
appliquées à l'économie et à la finance*

Intitulée

**Etude comparative de l'estimation fonctionnelle de
la fonction de risque conditionnelle**

Soutenue le :

Devant le jury composé de :

Président :

BENAISSA Samir

Professeur

à L'Université S.B.A

Examineurs :

Mr CHOUIF Abdelhak Maitre de Conférence A à L'Université S.B.A

Mr AZZOUZI Badreddine Maitre de Conférence A Ecole Supérieure de
Management de Tlemcen

Directeur de thèse :

Mr MECHAB Boubaker Maitre de Conférence A à L'Université S.B.A.

Année universitaire : 2018/2019

Remerciements

La première personne que je tiens à remercier est mon directeur de thèse Mr.**MECHAB Boubaker**, pour l'orientation, la confiance, la patience et surtout ses judicieux conseils, qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury, pour avoir eu l'amabilité de participer à la soutenance.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur **BENAISSA Samir** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury. Il m'a toujours encouragé et précieusement conseillé.

Je remercie vivement Monsieur **AZZOUZI Badreddine** pour sa lecture attentive et ses remarques pertinentes. Je suis très honoré de sa présence.

Je voudrais aussi remercier Monsieur **CHOUAF Abdelhak** pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mes travaux en acceptant de participer au jury.

Je remercie les membres du Laboratoire de Statistique et Processus Stochastiques de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès. J'ai toujours trouvé soutien et encouragement.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

*Cette thèse est dédiée à mon mari...
à mes parents...
et à toute ma famille et mes meilleurs amis...*

Table des matières

Résumé	6
Summary	7
1 Présentation	8
1.1 Contexte général	8
1.1.1 Aspect non paramétrique	8
1.1.2 Analyse de données fonctionnelles	9
1.2 Estimation récursive	12
1.3 Données ergodiques	13
1.4 Contribution de la thèse	15
1.5 Plan de la thèse	17
2 Estimation fonctionnelle de la fonction de hasard conditionnelle : Cas i.i.d. et cas de mélange	22
2.1 Modèle	22
2.2 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas i.i.d. .	24
2.2.1 Notations et hypothèses	24
2.2.2 Propriétés asymptotiques	24
2.3 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas dépendant	27
2.3.1 Notations et hypothèses	27
2.3.2 Propriétés asymptotiques	27
2.4 Preuves	28
3 Estimation fonctionnelle de la fonction hasard conditionnelle avec données ergodiques	49
3.1 Modèle	50

3.2	Hypothèses	51
3.3	Principaux résultats	52
3.3.1	Normalité asymptotique	53
3.4	Les lemmes techniques	54
3.5	Appendice	57
4	Recursive kernel estimate of the conditional hazard function for functional ergodic data	69
4.1	Introduction	70
4.2	Model and Notations	71
4.3	Assumptions	73
4.4	Main Results	74
4.5	Application : estimate the point at high risk	77
4.6	Appendix	77
5	Simulation	87
5.1	Données	87
5.2	Résultats	89
	Conclusion et Perspectives	90
	Bibliographie générale	92

Résumé

Dans cette thèse, nous intéressons essentiellement à une étude comparative entre les méthodes d'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode du noyau pour une variable explicative fonctionnelle conditionnée à une variable réponse réelle.

Dans un premiers temps, Nous étudions la convergence presque complète de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle dans les deux cas : cas des données indépendantes identiquement distribuées i.i.d. et le cas de mélange fort. D'autre type de dépendance faible sera considéré pour notre étude et nous établissons sous la condition d'ergodicité les propriétés asymptotique de notre estimateur construit de fonction de hasard conditionnelle.

Dans un second temps, vu l'avantage de l'estimation récursive en pratique, nous intéressons à un estimateur récursif pour notre fonction et nous généralisons les résultats obtenus précédemment. Nous établissons la convergence presque complète sous des conditions générales. Ainsi, une application à l'estimation du point à haut risque est également considérée. Finalement, pour valider notre résultat, une étude sur des données simulées sera donnée.

Summary

In this thesis, we are mainly interested in a comparative study between non-parametric methods estimation of the conditional hazard function by the kernel method for a functional explanatory variable conditioned to a real response variable.

First, we study the almost complete convergence of the estimator of the conditional hazard function in both cases : the case of identically distributed independent data i.i.d. and the case of strong mixing. Other types of low dependency will be considered for our study and we under the condition of ergodicity, we establish the asymptotic properties of our estimator constructed as a conditional hazard function.

Secondly, because of the advantage of recursive estimation in practice, we are interested in a recursive estimator for our function and we generalize the results obtained previously. We establish the almost complete convergence under general conditions. Thus, an application to the estimation of the point at high-risk is also considered. Finally, in order to validate our results, a study on simulated data will be given.

Chapitre 1

Présentation

1.1 Contexte général

1.1.1 Aspect non paramétrique

En générale, une procédure non paramétrique est une procédure statistique qui possède certaines propriétés souhaitables qui tiennent sous des hypothèses relativement modérées concernant les populations sous-jacentes à partir desquelles les données sont obtenues. Le développement rapide et continu de procédures statistiques non paramétriques au cours des dernières décennies est dû aux avantages suivants des techniques non paramétriques :

1. Les méthodes non paramétriques nécessitent peu d'hypothèses sur les populations sous-jacentes à partir desquelles les données sont obtenues. En particulier, les procédures non paramétriques renoncent l'hypothèse traditionnelle selon laquelle les populations sous-jacentes sont normales.

2. Les procédures non paramétriques permettent à l'utilisateur d'obtenir des P valeurs exactes pour les tests, des probabilités de couverture exactes pour les intervalles de confiance, des taux d'erreur expérimentaux exactes pour les procédures de comparaison multiples et des probabilités de couverture exactes pour les bandes de confiance sans se fier aux hypothèses selon lesquelles les populations sous-jacentes sont normales.

3. Les techniques non paramétriques sont souvent (bien que pas toujours) plus faciles à appliquer que leurs homologues de la théorie habituelle.

4. Les procédures non paramétriques sont souvent assez faciles à comprendre.

5. Bien qu'à première vue, la plupart des procédures non paramétriques

semblent sacrifier une trop grande partie des informations de base contenues dans les échantillons, les enquêtes théoriques sur l'efficacité ont montré que ce n'est pas le cas. Habituellement, les procédures non paramétriques ne sont que légèrement moins efficaces que leurs concurrentes de la théorie normale lorsque les populations sous-jacentes sont normales (le système national des méthodes de la théorie normale), et elles peuvent être légèrement ou énormément plus efficaces que ces concurrentes lorsque les populations sous-jacentes ne sont pas normales.

6. Les méthodes non paramétriques sont relativement insensibles aux observations périphériques.

7. Les procédures non paramétriques sont applicables dans de nombreuses situations où les procédures théoriques normales ne peuvent être pas utilisées. De nombreuses procédures non paramétriques ne nécessitent que le rang des observations, plutôt que la magnitude réelle des observations, alors que les procédures paramétriques exigent les magnitudes.

8. Le processus de Dirichlet de Ferguson (1973) a ouvert la voie à la combinaison des avantages des méthodes non paramétriques et de l'utilisation d'informations préalables pour former une approche bayésienne non paramétrique ne nécessitant pas d'hypothèses de répartition.

9. Le développement de logiciels a facilité le calcul rapide des P valeurs exactes et approximatives pour les tests non paramétriques conditionnels.

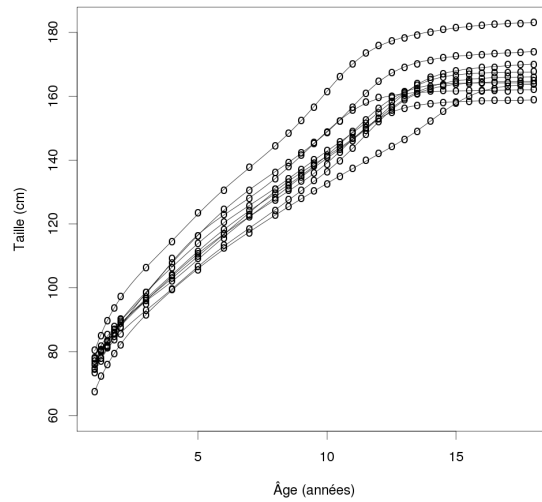
1.1.2 Analyse de données fonctionnelles

L'analyse de données fonctionnelles (FDA) est une branche de la statistique qui suscite de plus en plus l'intérêt de la communauté scientifique, également en raison du nombre croissant de situations dans lesquelles les scientifiques théoriques et appliqués doivent faire face à des données de nature continue (fonctions, courbes, images, surfaces, etc.).

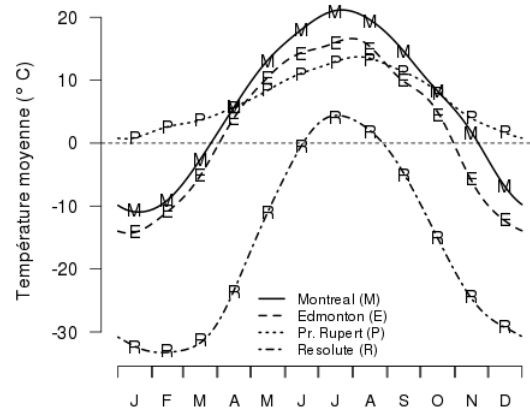
L'analyse de données fonctionnelles n'est pas l'analyse fonctionnelle des mathématiciens, même si elle fait appel à certains outils de cette discipline, les données fonctionnelles ressemblent aux données vectorielles, mais cette ressemblance n'implique pas l'identité, c'est cette différence qui rend l'analyse fonctionnelle beaucoup plus marrante que l'analyse multivariée classique. Des exemples de données fonctionnelles :

1. Étude de croissance de Berkeley : Les tailles de 10 filles mesurées à 31 âges. Les cercles marquent les 31 âges de mesures de répartition non-uniforme. L'erreur sur chaque mesure est de l'ordre de 3 mm. En principe,

les mesures auraient pu être effectuées à n'importe quel âge.



2. Températures des 4 stations : Les moyennes mensuelles sont figurées par les lettres. Les courbes sont des estimations fonctionnelles (avec une base de Fourier) pour chaque station.



Le domaine de l'analyse de données fonctionnelles a été popularisé notamment au moyen des livres de Ramsay et Silverman (2002, 2005) et, au cours

des vingt dernières années, de nombreuses contributions statistiques ont été publiées (voir, par exemple, Bosq (2000, 2005, 2007)). Ferraty et Vieu (2006) et Zhang (2013) pour les monographies générales, Cuevas (2014) et Müller (2005) pour les enquêtes méthodologiques, et Bongiorno et al. (2014) pour une sélection de développements récents. En parallèle, des méthodologies étendues et variées pour traiter les problèmes de dimension très élevée ont été développées : avec le mots dimension très élevée, on veut en général indiquer que le nombre de variables observées est grand et même parfois beaucoup plus élevé que le nombre d'unités statistiques (voir, par exemple, la monographie Bühlmann (2011), le document Bouveyron (2014) pour une discussion sur les questions ouvertes complexes dans la région, et Ahmed (2014) et Debashis (2014), pour des enquêtes sélectionnées portant sur quelques pays (Questions spécifiques). Dans ce cas également, l'un des principaux stimulants de l'intérêt pour les statistiques à haute dimension (HDS) est le nombre croissant de situations impliquant un grand nombre de variables observées.

Techniques non paramétriques pour les données fonctionnelles. Depuis qu'il a été popularisé par Ferraty et Vieu (2006) la FDA non paramétrique a reçu une grande attention dans la littérature et, naturellement, ce numéro spécial inclut diverses contributions dans ce domaine. Le document de Gardes et Girard (2015) est en train de réexaminer l'estimation de la distribution conditionnelle avec une covariable fonctionnelle (voir par exemple Ferraty et al. (2005, 2010)) avec pour objectif principal d'estimer les quantiles conditionnels extrêmes et l'indice de queue de la distribution de Weibull, ce qui permet une bonne adaptation au contexte fonctionnel des versions non paramétriques multivariées antérieures. Théorie conditionnelle des quantiles extrêmes (voir par exemple Daouia (2013)). La question importante du choix de la fenêtre a été abordée jusqu'à présent, comme nous le savons, seulement dans la régression et pour les données iid (voir Rachdi et Vieu (2007)), tandis que pour les données dépendantes, elles ont été traitées uniquement dans un paramètre de dimension finie Härdle (1992). Les principales innovations du document de Shang (2015) concernent les données fonctionnelles dépendantes et l'estimation par quantile. La contribution de Chagny et Roche (2015) se concentre sur la sélection de la bande passante dans le modèle de régression à réponse scalaire, dans lequel une adaptation fonctionnelle des techniques minimax (voir par exemple Goldenshluger et Lepski (2011)) est utilisée pour construire des sélecteurs entièrement pilotés par les données.

L'estimation de la fonction de hasard à un grand intérêt en statistique. En effet, elle est utilisée dans l'analyse de risque ou pour l'étude des phénomènes

de survie.

Les premiers résultats conséquents sur le sujet furent établis au début des années 60 (voir Watson et Leadbetter (1964)). L'estimation de ce modèle par la méthode du noyau a été partiellement utilisée par Roussas (1989). Ce dernier a estimé la fonction de hasard comme rapport entre l'estimateur à noyau de la densité et l'estimateur empirique de la fonction de répartition et il a établi sous des conditions de mélange faible, la convergence presque sûre de cet estimateur. Un an plus tard, le même auteur (1990) a obtenu la normalité asymptotique de cet estimateur, en considérant les différents types de mélange, à savoir, le ϕ , le ρ , le α et le β -mélange. Lecoutre et Ould-Saïd (1993) ont étudié les propriétés de convergence simple et uniforme d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard, dans le cas des variables aléatoires multi-dimensionnelles, issus d'un processus fortement mélangeant, avec censure aléatoire. En utilisant l'estimation par la méthode du noyau pour les deux paramètres fonctionnels (la densité et la fonction de répartition), Youndjé et al. (1996) ont construit un estimateur pour la fonction de hasard et ils ont élaboré une méthode permettant le choix optimal du paramètre de lissage pour l'estimation de ce paramètre, lorsque les observations sont i.i.d. Ce dernier résultat a été généralisé par Estève et al. (2002) au cas des observations dépendantes. Dans la même année Estève a rétabli les résultats de Vieu (1991) en précisant la vitesse de convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la fonction de hasard, en considérant des observations fortement mélangeantes. Récemment, Quintela-del-Rio (2006) a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique d'un estimateur à noyau pour le maximum de la fonction de hasard. On trouvera aussi dans cet article une application sur des données réelles permettant de prévoir la période à haut risque sismique pour la région de Grenade en Espagne.

1.2 Estimation récursive

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de densité de probabilité g . On veut estimer g à partir d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Un estimateur récursif à noyau est donné par la relation récursive suivante :

$$\hat{g}_n = (1 - \gamma_n)\hat{g}_{n-1}(x) + \frac{\gamma_n}{h_n}K\left(\frac{x - X_n}{h_n}\right).$$

où γ_n et h_n sont deux suites de réels positifs qui tendent vers 0. Voici deux exemples d'estimateurs récurrents.

Estimateur de Wolverton-Wagner. Il correspond au choix $\gamma_n = \frac{1}{n}$ et s'écrit :

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right)$$

Cet estimateur récurrent a été introduit par Wolverton et Wagner (1969) et étudié par Yamato (1971).

Estimateur de Deheuvels. Dans le cas où on pose $\gamma_n = \frac{h_n}{S_n}$ avec $S_n = \sum_{i=1}^n h_i$,

Deheuvels (1973) a proposé un autre estimateur récurrent de la densité de la forme :

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right).$$

Choix du noyau et de la fenêtre : Ces choix ne peuvent s'effectuer que par l'utilisation de certains critères. Sans entrer dans tous les détails, il s'avère que le choix du noyau n'a pas d'influence majeure s'il est choisi dans une classe raisonnable. En revanche, le choix de la fenêtre h_n est crucial. En générale, h_n est obtenue par des techniques de validation croisée.

1.3 Données ergodiques

Les techniques de régression non paramétriques utilisées pour modéliser des données de séries chronologiques économiques et financières ont suscité beaucoup d'attention au cours des deux dernières décennies. L'estimation et les tests de spécification ont été systématiquement examinés afin de déterminer les valeurs i.i.d. réelles ou des processus stationnaires faiblement dépendants ; voir, par exemple, Györfi et al. (1989), Robinson (1989), Yoshihara (1994), Härdle et al. (1997), Fan et Yao (2003) et les références qui y figurent. Récemment, l'étude des données fonctionnelles a suscité un intérêt croissant. Pour un aperçu de l'état actuel de l'analyse des données fonctionnelles non paramétriques, nous renvoyons aux travaux de Ferraty et Vieu (2000, 2004), Ferraty et al. (2002), Masry (2005), Ferraty et al. (2007), Delsol (2009), Laïb et Louani (2010) et la récente monographie de Ferraty et Vieu (2006), ainsi que leurs références. Pour des aperçus récents plus généraux sur l'analyse de

données fonctionnelles, comprenant non seulement ces points de vue non paramétriques, le lecteur peut se reporter à Ramsay et Silverman (1997, 2002), au récent manuel de Ferraty et Romain (2011), ainsi qu'à la divers numéros spéciaux de revues statistiques de haut niveau récemment consacrées à ce problème (voir Davidian et al. (2004), Ferraty (2010), González-Manteiga et Vieu (2007), Valderrama (2007)).

La théorie d'ergodicité est une structure de dépendance couvre plusieurs cas ne satisfaisant pas les structures de mélange habituelles. De plus, le cadre ergodique évite la condition de mélange forte largement utilisée et ses variantes pour mesurer la dépendance et les calculs probabilistes très compliqués qu'il implique. De plus, d'un point de vue pratique, la condition d'ergodicité est l'un des principaux postulats de la physique statistique. Il modélise les propriétés thermodynamiques des gaz, atomes, électrons ou plasmas. Cette hypothèse est également utilisée dans le traitement du signal pour étudier l'évolution d'un signal aléatoire. Malgré cette importance dans les applications, le littérateur dans cette dépendance fonctionnelle est toujours limité. Ce problème a été initié par Laib et Louani (2010, 2011). Ils considèrent le problème de l'estimation fonctionnelle pour les opérateurs de régression non paramétriques dans la condition d'ergodicité. Récemment, Gheiriballah et al. (2013) ont présenté la convergence presque complète (avec le taux) d'une famille d'estimateurs non paramétriques robustes pour la fonction de régression. Plus récemment, Benziadi et al. (2014) ont indiqué la convergence presque complète des estimations du noyau récursif des quantiles conditionnels. Nous adoptons la définition introduite par Laib et Louani (2010). De plus, comme d'habitude pour la modélisation non paramétrique en statistique fonctionnelle, la contribution du composant fonctionnel à notre étude asymptotique est contrôlée par la propriété de concentration de la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle. Plus précisément, en plus de l'hypothèse de concentration classique, nous devons prendre en compte le paramètre de dépendance modélisé par la condition ergodique. Ainsi, nos données ergodiques fonctionnelles sont réalisées par les considérations suivantes :

pour $i = 1, \dots, n$, on met $\mathcal{F}$ est la σ -algèbre généré par $((X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k))$, on pose $\mathcal{G}_k$ est la *sigma*-algèbre généré par $((X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k), X_{k+1})$ et on

pose que le processus ergodique strictement stationnaire $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) la fonction } \phi(x, h) := \mathbb{P}(X \in B(x, h)) > 0, \forall h > 0. \\ \text{(ii) pour tout } i = 1, \dots, n \text{ il existe une fonction déterministe } \phi_i(x, \cdot) \text{ tel que} \\ \quad \mathbb{P}(X_i \in B(x, h) | \mathfrak{F}_{i-1}) \leq \phi_i(x, h), \forall h > 0. \\ \text{(iii) pour tout } (h_i)_{i=1, \dots, n} > 0, \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, h_i) | \mathfrak{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \phi(x, h_i)} \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

où $B(x, h) := \{x' \in \mathcal{F} / d(x', x) < h\}$. nous soulignons que cette hypothèse est très inférieure à celui considéré par Laib et Louani (2011).

en effet contrairement à Laib et Louani (2011), ici ce n'est pas nécessaire d'écrire approximativement la fonction de concentration $\mathbb{P}(X \in B(x, h))$ et la fonction de concentration conditionnelle $\mathbb{P}(X \in B(x, h) | \mathfrak{F}_{i-1})$ comme produit de deux fonction non négatives de centre et de rayon.

1.4 Contribution de la thèse

Dans cette section nous résumons brièvement les contributions principales de cette thèse. Nous les classifions selon le type de données et les dépendances proposées. Dans le domaine de l'estimation fonctionnelle et dans notre travail de thèse, nous avons apporté une contribution au thème de l'estimation non paramétrique réursive fonctionnelle qui représente une généralisation naturelle des résultats obtenus dans la littérature.

Le cadre général présenté dans cette thèse est celui de l'estimation fonctionnelle de la fonction de risque conditionnelle dans le cas des données fonctionnelles. Ce domaine est d'actualité et d'un intérêt scientifique important selon les différents résultats obtenus et publiés par les chercheurs. Notre travail est une étude comparative entre les estimateurs considérés par d'autres auteurs et notre méthode basée sur la récursivité de l'estimateur pour montrer l'avantage de par rapport aux autres.

Les contributions principales sont les suivantes :

Résultats : Convergence presque complète cas des observations i.i.d. :

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses d'indépendance, on a :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}}\right) \text{ p.co.} \quad (1.1)$$

Résultat : Convergence presque complète cas des observations mélangées :

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses de dépendance, on a :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}}\right).$$

Résultat : Convergence presque sûre cas des données ergodiques :

Théorème 1.3 *Sous des conditions d'ergodicité, on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}_n^x(y) - h^x(y)| = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{p.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}}\right).$$

Résultat : Normalité asymptotique cas des données ergodiques :

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses d'ergodicité, on a*

$$\sqrt{nh_H \psi(h)} (\hat{h}_n^x(y) - h^x(y)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_h^2(x, y)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

où $\xrightarrow{L}$ signifie la convergence en loi.

Avec

$$\sigma_h^2(x, y) = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{h^x(y)}{f_1(x)(1 - F^x(y))} \int_R H^{(1)^2}(v) dv.$$

et

$$M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(t) \tau_0(t) dt \quad \text{pour } j = 1, 2$$

. Résultat : Convergence presque complète uniforme pour un estimateur récursif et données ergodiques :

Théorème 1.5 *Sous certaines hypothèses, on a :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| =$$

$$O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}}\right) \text{ p.co.}$$

1.5 Plan de la thèse

Notre principale étude est celle de l'estimation nonparamétrique fonctionnelle de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode du noyau récursif lorsqu'on dispose d'une variable réponse réelle conditionnée à une variable explicative fonctionnelle dans le but par la suite est d'étudier et comparer les propriétés asymptotiques de notre estimateur à celle des autres estimateurs. Les propriétés asymptotiques sont énoncées en termes de convergence presque complète qui est connue pour impliquer à la fois la convergence presque sûre et la convergence en probabilité.

Nous avons partagé notre travail en cinq chapitres. Le premier chapitre est un chapitre introductif consacré à la présentation des différents thèmes abordés dans notre axe de recherche. Nous commençons par un contexte général sur l'estimation nonparamétrique fonctionnelle et un contexte bibliographique sur les données ergodique et une brève présentation de l'estimation récursive.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle pour une variable de réponse réelle et une variable exogène fonctionnelle. Sous des conditions générales moins restrictives, nous établissons la convergence presque complète avec précision dans le cas i.i.d. et le cas α -mélangeant. Ces propriétés asymptotiques sont étroitement liées au phénomène de concentration de la mesure de probabilité de la variable explicative sur des petites boules.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la convergence presque sûre et à la normalité asymptotique de l'estimateur de notre fonction de hasard conditionnelle. Ce chapitre est composé de quatre sections, modèle de notre estimation fait la première section. Nous introduisons nos hypothèses dans la deuxième section. Dans la suivante section, nous énonçons nos principaux résultats et on laisse les démonstrations à la dernière section.

Le quatrième chapitre fait l'objet d'une publication acceptée dans le journal *International Journal of Statistics and Economics*. Le chapitre est présenté comme suit. Nous construisons un estimateur de la fonction de hasard conditionnelle à partir des estimateurs de la fonction de répartition conditionnelle et la densité conditionnelle, l'estimateur considéré est à base du noyau récursif. Nous établissons la convergence presque complète de notre estimateur sous des conditions de régularités et sous l'hypothèse d'ergodicité des données. Nous présentons à la fin une application à travers une estimation du point à haut risque.

Pour Compléter ce travail nous avons mis en œuvre au cinquième chapitre une étude par simulation.

Enfin, nous concluons la thèse par une conclusion et des perspectives dans lesquelles nous présenterons les extensions possibles de nos travaux dans les recherches futures.

Bibliographie du chapitre 1

- [1] S.E. Ahmed, Penalty, shrinkage and pretest strategies. Variable Selection and Estimation, in : Springer Briefs in Statistics, Springer, Cham, 2014.
- [2] A. Amiri, C. Crambes, B. Thiam, Recursive estimation of nonparametric regression with functional covariate. *Comput. Statist. Data Anal.* 69 (2014), 154-172.
- [3] E. Bongiorno, A. Goia, E. Salinelli, P. Vieu, Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics, Esculapio, Bologna, 2014.
- [4] D. Bosq, Linear Processes in Functional Spaces, Springer-Verlag, New-York, 2000.
- [5] D. Bosq, Inférence et prévision en grandes dimensions, in : Collection Economie et Statistiques Avancées. Economica, Paris, 2005.
- [6] D. Bosq, D. Blanke, Inference and Prediction in Large Dimensions, in : Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, 2007.
- [7] C. Bouveyron, Statistique en grande dimension : problématiques et enjeux, *J. SFdS* 155 (2) (2014) 36-37.
- [8] C. Bouveyron, C. Brunet-Saumard, Model-based clustering of high-dimensional data : A review, *Comput. Statist. Data Anal.* 71 (2014) 52-78.
- [9] P. Bühlmann, S. van de Geer, Statistics for High-dimensional Data. Methods, Theory and Applications, in : Springer Series in Statistics, Springer, Heidelberg, 2011.
- [10] A. Cuevas, A partial overview of the theory of statistics with functional

data, J. Statist. Plann. Inference 147 (2014) 1-23.

[11] P. Debashis, A. Aue, Random matrix theory in statistics : A review, J. Statist. Plann. Inference 150 (2014) 1-29.

[12] G. Estévez-Pérez, On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation, Statist. Probab. Lett. 57 (2002) 231-241.

[13] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Río, P. Vieu, Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples, J. Statist. Plann. Inference. 104 (2002) 1-30.

[14] F. Ferraty, A. Goia, E. Salinelli, P. Vieu, Functional projection pursuit regression, Test 22 (2013) 293-320.

[15] F. Ferraty, P. Hall, P. Vieu, Most-predictive design points for functional data predictors, Biometrika 97 (2010) 807-824.

[16] F. Ferraty, A. Laksaci, A. Tadj, P. Vieu, Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables, J. Statist. Plann. Inference 140 (2) (2010) 335-352.

[17] F. Ferraty, A. Rabhi, P. Vieu, Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic El Nino Phenomenon, Sankhya 67 (2) (2005) 378-398.

[18] F. Ferraty, Y. Romain, The Oxford handbook of functional data analysis, Oxford University Press. 2011.

[19] F. Ferraty, P. Vieu, The functional nonparametric model and application to spectrometric data, Comput. Statist. and Data Anal. 17 (2002) 545-564.

[20] F. Ferraty, P. Vieu, Nonparametric Functional Data Analysis, in : Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2006.

[21] F. Ferraty, P. Vieu, Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés, C. R. Acad. Sci., Paris, 330 (2000) 139-142.

-
- [22] F. Ferraty, P. Vieu, Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination, *J. Nonparametric Statist.* 16 (2004) 111-127.
- [23] W. Gonzalez-Manteiga, P. Vieu, Methodological richness of functional data analysis, in : *Statistical Learning and Data Science*, in : *Series : Chapman & Hall/CRC Computer Science & Data Analysis*, 2011.
- [24] L. Horváth, P. Kokoszka, *Inference for Functional Data with Applications*, in : *Springer Series in Statistics*, Springer, New York, 2012.
- [25] L. Horváth, G. Rice, An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves, *Rev. Mat. Complut.* 28 (3) (2015) 505-548.
- [26] T. Hsing, R. Eubank, *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators*, in : *Wiley Series in Probability and Statistics*, John Wiley & Sons, Chichester, 2015.
- [27] N. Laib, D. Louani, Nonparametric Kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprieties, *J. Multivariate Anal.* 101 (2010), 2266-2281.
- [28] N. Laib, D. Louani, Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data, *J. Statist. Plann. Inference.* 141 (2011), 359-372.
- [29] E. Masry, Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality, *Stoch. Proc. and their Appl.* 115 (2005) 155-177.
- [30] H. G. Müller, Functional modelling and classification of longitudinal data, *Scand. J. Stat.* 3 (2005) 223-240.
- [31] A. Quintela-del-Río, Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions, *Statist. Probab. Lett.* 76 (2006) 1117-1124.
- [32] A. Quintela-del-Río, Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions, *J. Nonparametr. Stat.*

20 (2008) 413-430.

[33] J. Ramsay, B. Silverman, Functional data analysis. Springer. 1997.

[34] J. Ramsay, B. Silverman, Applied Functional Data Analysis. Methods and Case Studies, in : Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2002.

[35] J. Ramsay, B. Silverman, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2005.

[36] P. Vieu, Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence, Journal of Multivariate Analysis. 39 (1991) 324-347.

[37] G. S. Watson, Smooth regression analysis, Sankhya. 26 (1964a) 359-372.

[38] G. S. Watson, M. R. Leadbetter, Hazard analysis. I. Biometrika. 51 (1964b) 175-184.

[39] E. Youndjé, Estimation non-paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau, Thèse 3eme cycle, Université de Rouen. 1993.

[40] E. Youndjé, P. Sarda, P. Vieu, Optimal smooth hazard estimates, Test. 5 (1996) 379-394.

[41] J. Zhang, Analysis of Variance for Functional Data, in : Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, 2013.

Chapitre 2

Estimation fonctionnelle de la fonction de hasard conditionnelle : Cas i.i.d. et cas de mélange

L'essentiel de ce chapitre est de traiter l'estimation non paramétrique de la fonction de risque d'une variable aléatoire réelle conditionnellement à une variable fonctionnelle. En commençant par la présentation de notre modèle dans la première Section. Ensuite, dans la deuxième Section, on suppose que nos observations sont i.i.d. et on démontre la convergence presque complète de notre estimateur fonctionnel. Dans la troisième Section, on étend nos résultats obtenus dans la section précédente au cas dépendant.

2.1 Modèle

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{F}$ est un espace semi-métrique de semi-métrique d .

Étant donné une suite d'observations $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ de même loi de probabilité que (X, Y) , on définit un estimateur de la fonction de répartition conditionnelle F^x par la méthode du noyau comme suit :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

où K est un noyau, H est une fonction de répartition et $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs. On pose :

$$K_i(x) = K(h_K^{-1}d(x, X_i)) \text{ et } H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i)).$$

Ce qui nous permet d'exprimer $\widehat{F}^x(y)$ par

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\widehat{F}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x}$$

avec

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n K_i H_i(y) \text{ et } \widehat{F}_D^x = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n K_i.$$

De cet estimateur, on déduit un estimateur pour la densité conditionnelle, noté $\widehat{f}^x$, défini par :

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{h_H^{-1} \sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))}.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\widehat{f}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x}$$

où

$$\widehat{f}_N^x(y) = \frac{1}{nh_H\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n K_i H_i^{(1)}(y).$$

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de la convergence presque complète de l'estimateur $\widehat{h}^x = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)}$ vers $h^x = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)}$ quelque soit la corrélation des observations.

2.2 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas i.i.d.

Dans cette Section, les observations $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ sont supposées de type indépendantes identiquement distribuées.

2.2.1 Notations et hypothèses

On fixe un point x dans $\mathcal{F}$ dont on note N_x un voisinage de ce point et on pose $B(x, h) = \{x' \in \mathcal{F} / d(x', x) < h\}$ la boule de centre x et de rayon h . On introduit les hypothèses suivantes :

$$(H1) \quad \forall x \in \mathcal{F}, \forall h > 0, \mathbb{P}(x \in B(x, h)) = \phi_x(h) > 0,$$

$$(H2) \quad \forall y \in \mathcal{S}, F^x(y) < 1, \forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x, \\ |F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq A_x(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}). \quad b_1, b_2 > 0,$$

$$(H3) \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x, \\ |f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq A_x(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}). \quad b_1, b_2 > 0,$$

$$(H4) \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq A|y_1 - y_2|, \\ \int |t|^{b_2} H^{(1)}(t) dt < \infty \text{ et } \exists \nu > 0, \forall j' \leq j + 1 \lim_{y \rightarrow +\infty} |y|^{1+\nu} |H^{(j')}(y)| = 0, \\ \text{pour } j = 0, 1.$$

$$(H5) \quad K \text{ un noyau à support compact } (0, 1) \text{ vérifiant } 0 < A_1 < K(t) < A_2 < \infty,$$

$$(H6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_K = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{nh_H^j \phi_x(h_K)} = 0, \quad j = 0, 1.$$

$$(H7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_H = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta h_H = \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

2.2.2 Propriétés asymptotiques

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (H1) – (H7) on a :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}}\right) \text{ p.co.} \quad (2.1)$$

Preuve du théorème 2.1 On peut écrire $\hat{h}^x(y) - h^x(y)$ sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{h}^x(y) - h^x(y) &= \frac{\hat{f}^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)} - \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)} \\ &= \frac{\hat{f}^x(y) - \hat{f}^x(y)F^x(y) - f^x(y) + f^x(y)\hat{F}^x(y)}{(1 - \hat{F}^x(y))(1 - F^x(y))} \\ &= \frac{1}{1 - \hat{F}^x(y)} \left[(\hat{f}^x(y) - f^x(y)) + \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)} (\hat{F}^x(y) - F^x(y)) \right].\end{aligned}\tag{2.2}$$

D'après la décomposition précédente, il suffit de montrer que

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{F}^x(y) - F^x(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \text{ p.co.} \tag{2.3}$$

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{f}^x(y) - f^x(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right), \text{ p.co.} \tag{2.4}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \hat{F}^x(y)| < \delta \right\} < \infty. \tag{2.5}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\hat{F}^x(y) - F^x(y) &= \frac{1}{\hat{F}_D^x} \left\{ \left(\hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E} \hat{F}_N^x(y) \right) - \left(F^x(y) - \mathbb{E} \hat{F}_N^x(y) \right) \right\} + \\ &\quad \frac{F^x(y)}{\hat{F}_D^x} \left\{ \hat{F}_D^x - \mathbb{E} \hat{F}_D^x \right\}\end{aligned}\tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{f}^x(y) - f^x(y) &= \frac{1}{\hat{F}_D^x} \left\{ \left(\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N^x(y) \right) - \left(f^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N^x(y) \right) \right\} + \\ &\quad \frac{f^x(y)}{\hat{F}_D^x} \left\{ \hat{F}_D^x - \mathbb{E} \hat{F}_D^x \right\}\end{aligned}\tag{2.7}$$

Ce qui nous permet de conclure que la preuve du théorème est basée sur les résultats ci-dessous.

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses (H1), (H4) et (H6), on a :*

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \text{ p.co.} \quad (2.8)$$

Corollaire 2.1 *Sous les hypothèses du lemme 2.1, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^x < 1/2) < \infty. \quad (2.9)$$

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses (H1)-(H7) on a,*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \text{ p.co.} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y) \right| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \text{ p.co.} \quad (2.11)$$

Lemme 2.3 *Sous les hypothèses (H1)-(H6), on a :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| F^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}). \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| f^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}). \quad (2.13)$$

Lemme 2.4 *Sous les conditions du théorème précédent*

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\right\} < \infty.$$

2.3 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas dépendant

On se propose dans cette section de généraliser les résultats obtenus dans la section précédente sur les observations i.i.d. au cas dépendant.

2.3.1 Notations et hypothèses

Nous gardons les mêmes notations ainsi que les mêmes hypothèses du cas indépendant on introduit aussi,

- $H'1)$ La suite $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ est algébriquement α -mélangeante avec $a > \frac{5+\sqrt{17}}{2}$,
- $H'2)$
$$\frac{\sup_{i \neq j} \mathbb{P}((X_i, X_j) \in B(x, h) \times B(x, h))}{\mathbb{P}(X_i \in B(x, h))} = O\left((n^{-1}\phi_x(h))^{1/a}\right),$$
- $H'3)$

$$\exists \eta > 0, \quad An^{\frac{4-a+3\beta}{a+1}+\eta} \leq h_H \phi_x(h_K) \quad \text{et} \quad \phi_x(h_K) \leq A' n^{\frac{1}{1-a}}.$$

2.3.2 Propriétés asymptotiques

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et $(H'1) - (H'3)$ on a :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}}\right). \quad (2.14)$$

Preuve du théorème 2.2

En utilisant les décompositions (2.2) et (2.6). La preuve sera une conséquence du lemme 2.3, 2.4 et le lemme suivant.

Lemme 2.5 *Sous les conditions du théorème 2.2 on a :*

$$\hat{F}_D^x - \mathbb{E}\hat{F}_D^x = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right). \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(y) \right| = O \left(\sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right). \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(y) \right| = O \left(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}} \right). \quad (2.17)$$

2.4 Preuves

Preuve du lemme 2.1 On a

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\mathbb{E} K_1} - \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\mathbb{E} K_1} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\mathbb{E} K_1} - \frac{\mathbb{E} K_i}{\mathbb{E} K_1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \end{aligned}$$

où $\Delta_i = \frac{K_i}{\mathbb{E} K_1} - \mathbb{E} \frac{K_i}{\mathbb{E} K_1}$ (Δ_i est une variable centrée). En appliquant l'Inégalité de Hoeffding (voir[5]) sur les variables Δ_i , pour cela il faut majorer $|\Delta_i|$ et $\mathbb{E} \Delta_i^2$. En effet, les hypothèses (H1) et (H5) permettent d'écrire

$$0 < \frac{A'}{\phi_x(h_K)} < \mathbb{E}(K_1) < \frac{A}{\phi_x(h_K)},$$

d'où,

$$|\Delta_i| < \frac{A}{\phi_x(h_K)} = \theta_1.$$

D'après l'hypothèse (H5), on montre de la même manière que

$$0 < \frac{A'}{\phi_x(h_K)} < \mathbb{E}(K_1^2) < \frac{A}{\phi_x(h_K)}$$

alors, il existe A' telle que

$$\mathbb{E}\Delta_i^2 < \frac{A'}{\phi_x(h_K)} = \theta_2.$$

Donc, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\theta_1}{\theta_2}[$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) &\leq 2 \exp \left(\frac{-\varepsilon^2 \log n}{4\phi_x(h_K)\theta_2} \right) \quad (2.18) \\ &= 2n^{-\varepsilon^2/4\phi_x(h_K)\theta_2} \\ &= 2n^{-A\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Pour un choix convenable de ε^2 , la série de terme général $n^{-A\varepsilon^2}$ converge. On peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2n^{-A\varepsilon^2} < +\infty.$$

C.Q.F.D.

Preuve du corollaire 2.1

On a

$$\{|\widehat{F}_D^x| \leq 1/2\} \subseteq \{|\widehat{F}_D^x - 1| > 1/2\}$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^x| \leq 1/2\} &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^x - 1| > 1/2\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x| > 1/2\} \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\widehat{F}_D^x = 1$, on applique le résultat du lemme 2.1 on montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^x < 1/2) < \infty.$$

C.Q.F.D.

Preuve du lemme 2.2

L'idée est de recouvrir le compact $\mathcal{S}$ par des intervalles S_k de longueurs égales. Cependant, La compacité de $\mathcal{S}$ implique qu'on peut extraire de cet recouvrement un recouvrement fini dont le nombre des intervalles sera noté s_n . Autrement dit, $\mathcal{S} \subset \cup_{k=1}^{s_n} S_k$ où $S_k = (m_k - l_n, m_k + l_n)$. Posons $m_y = \arg \min_{k \in \{1, \dots, s_n\}} |y - m_k|$

En ajoutant et retranchant le terme $\widehat{F}_N^x(m_y) + \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)$ et appliquant l'inégalité trigonométrique. On montre que :

$$\begin{aligned} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right| &\leq \left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y) \right| + \left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y) \right| \\ &+ \left| \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right| &\leq \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y) \right|}_{T_1} + \\ &\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y) \right|}_{T_2} + \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right|}_{T_3}. \end{aligned}$$

— **En ce qui concerne (T_1)**

L'hypothèse (H4) entraîne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y) \right| &\leq \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n |H_i(y) - H_i(m_y)| K_i, \\ &\leq \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \frac{A|y - m_y|}{h_H} \left(\frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n K_i \right), \\ &\leq \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \frac{A|y - m_y|}{h_H} \widehat{F}_D^x, \\ &\leq A \frac{l_n}{h_H}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

En prenant $l_n = n^{-\beta - \frac{1}{2}}$ et on montre que

$$l_n/h_H = o\left(\sqrt{\log n(n\phi_x(h_K))^{-1}}\right),$$

en effet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_n}{h_H} \sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{\log n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h_H n^\beta} \sqrt{\frac{\phi_x(h_K)}{\log n}}$$

d'après (H7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h_H n^\beta} \sqrt{\frac{\phi_x(h_K)}{\log n}} = 0,$$

et cela montre que

$$l_n/h_H = o\left(\sqrt{\log n(n\phi_x(h_K))^{-1}}\right).$$

D'après la définition de la limite, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0$ pour $n > N_\varepsilon$

$$\frac{l_n}{h_H} \sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{\log n}} \leq \varepsilon,$$

donc pour $\varepsilon/3, \exists N_0$, pour $n > N_0$

$$\frac{l_n}{h_H} \sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{\log n}} \leq \varepsilon/3,$$

et d'après (2.19) on déduit que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y) \right| \leq \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}},$$

et il résulte que, pour $n > N_0$

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) = 0. \quad (2.20)$$

Ainsi, on peut écrire $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq$

$$\sum_{n=1}^{N_0} \mathbb{P} \left(T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right),$$

le premier terme du membre de droit est fini, et le second est nul d'après (2.20). D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) < \infty. \quad (2.21)$$

— **En ce qui concerne $(\mathbf{T}_2)$**

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{s_n} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \\ &\leq s_n \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \\ &\leq \frac{A}{l_n} \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right). \end{aligned}$$

On a

$$\left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{H_i(m_k)K_i}{\mathbb{E}(K_1)} - \frac{\mathbb{E}(H_i(m_k)K_i)}{\mathbb{E}(K_1)}}_{\Lambda_i},$$

d'après (H5) et comme $H \leq 1$, on en déduit que $|\Lambda_i| \leq A/\phi_x(h_K)$ et $\mathbb{E}(\Lambda_i^2) \leq \frac{A'}{\phi_x(h_K)}$. On applique l'Inégalité de Hoeffding (voir[5]) on trouve

$$\mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \Lambda_i \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right), \\
&\leq 2 \exp \left(-An \frac{\varepsilon^2 \log n}{n\phi_x(h_K)} h_H^j \phi_x(h_K) \right), \\
&\leq 2n^{-A\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

En choisissant ε tel que $A\varepsilon^2 = 3/2 + 2\beta$, nous obtenons

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq Al_n^{-1} n^{-3/2-2\beta},$$

pour $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$, on déduit que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq An^{-1-\beta}.$$

Finalement, on utilise le corollaire 2.1, on obtient

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq An^{-1-\beta}.$$

Et cela montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_2 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) < \infty. \quad (2.22)$$

— **En ce qui concerne $(\mathbf{T}_3)$**

Nous avons

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(y) \right| \leq \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y) \right|,$$

et d'après (2.19) il résulte que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(y) \right| \leq A \frac{l_n}{h_H}.$$

On a

$$\left\{ T_3 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right\} \subseteq \left\{ T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right\},$$

ce qui implique

$$\mathbb{P} \left\{ T_3 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right\},$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_3 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_1 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right).$$

Et finalement grâce à (2.21) nous aurions alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(T_3 > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) < \infty. \quad (2.23)$$

Ce qui prouve l'équation (2.10) du lemme 2.2. Il nous reste, maintenant, l'équation (2.11), en effet, remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(y) \right| &\leq \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(m_y) \right|}_{F_1} + \\ &\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right|}_{F_2} + \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(y) \right|}_{F_3}. \end{aligned}$$

• **Concernant F_1 et F_3** : on utilise les mêmes arguments employés dans la démonstration de T_1 et T_3 , on montre que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(m_y) \right| \leq A \frac{l_n}{h_H^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(y) \right| \leq A \frac{l_n}{h_H^2}.$$

On choisit maintenant l_n sous la forme $l_n = n^{-\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}}$ et d'après (H7), on déduit

$$l_n/h_H^2 = o \left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}} \right).$$

• Concernant F_2 :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{s_n} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \\
&\leq s_n \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \\
&\leq \frac{A}{l_n} \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) .
\end{aligned}$$

On a

$$\left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{H_i^{(1)}(m_k) K_i}{h_H \mathbb{E}(K_1)} - \frac{\mathbb{E} \left(H_i^{(1)}(m_k) K_i \right)}{h_H \mathbb{E}(K_1)}}_{\Lambda_i^*},$$

il est clair d'après (H1) et (H5) que $|\Lambda_i^*| \leq A/h_H \phi_x(h_K)$.

Cherchons un majorant pour $\mathbb{E} \Lambda_i^{*2}$,

on a $\mathbb{E} \left(\Lambda_i^{*2} \right) \leq \frac{\mathbb{E} (H_1^{(1)}(m_k)^2 K_1^2)}{(h_H \mathbb{E}(K_1))^2}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(H_1^{(1)}(m_k)^2 K_1^2 \right) &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left(H_1^{(1)}(m_k)^2 K_1^2 / X \right) \\
&= \mathbb{E} \left(K_1^2 \mathbb{E} H_1^{(1)}(m_k)^2 / X \right),
\end{aligned}$$

d'après (H4) $\int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(y) dy < +\infty$, donc

$$\begin{aligned}
I &= \left| \frac{1}{h_H} \mathbb{E} \left(H_1^{(1)}(m_k)^2 / X \right) - f^X(m_k) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(y) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H} H^{(1)2} \left(\frac{m_k - z}{h_H} \right) f^X(z) dz - f^X(m_k) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(y) dy \right|,
\end{aligned}$$

par changement de variable $m_k - z = u$ dans le premier intégrale et $y = \frac{u}{h_H}$ dans le deuxième intégrale on trouve

$$\begin{aligned}
I &= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H} H^{(1)^2} \left(\frac{u}{h_H} \right) f^X(m_k - u) du - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H} H^{(1)^2} \left(\frac{u}{h_H} \right) f^X(m_k) du \right|, \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H} H^{(1)^2} \left(\frac{u}{h_H} \right) (f^X(m_k - u) - f^X(m_k)) du \right|, \\
&\leq \left| \int_{|u| \leq M} \frac{1}{h_H} H^{(1)^2} \left(\frac{u}{h_H} \right) (f^X(m_k - u) - f^X(m_k)) du \right| + \\
&\quad \left| \int_{|u| > M} \frac{1}{h_H} H^{(1)^2} \left(\frac{u}{h_H} \right) f^X(m_k - u) du \right| \\
&\quad + \left| \int_{|u| > M} \frac{1}{h_H} H^{(1)^2} \left(\frac{u}{h_H} \right) f^X(m_k) du \right|, \\
I &\leq \underbrace{A' \sup_{|u| \leq M} f^X(m_k - u) - f^X(m_k)}_{c_1} + \underbrace{\sup_{|y| > M/h_H} H^{(1)^2}(y)}_{c_2} \\
&\quad + \underbrace{f^X(m_k) \int_{|y| > M/h_H} H^{(1)^2}(y) dy}_{c_3}.
\end{aligned}$$

Comme f^X est continue sur le compact $\{|u| \leq M\}$ alors elle est bornée et on peut écrire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon, \forall M \leq M_\varepsilon, \quad c_1 < \varepsilon/3,$$

et d'après (H4) on déduit que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon, \exists n_{M,\varepsilon}, \forall n > n_{M,\varepsilon}, c_1 + c_2 < 2\varepsilon/3.$$

Finalement quand $n \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{E} \left(H_1^{(1)}(m_k)^2 / X \right) \leq h_H f^X(m_k) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(y) dy < +\infty,$$

comme $\mathbb{E} K_1 > A \phi_x(h_K)$ et $\mathbb{E} K_1^2 < A' \phi_x(h_K)$, on déduit

$$\mathbb{E} \left(\Lambda_i^{*^2} \right) \leq \frac{A'}{h_H \phi_x(h_K)}.$$

On applique l'Inégalité de Hoeffding (voir[5])on trouve

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_i^* \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right), \\
&\leq 2 \exp \left(-An \frac{\varepsilon^2 \log n}{nh_H \phi_x(h_K)} h_H \phi_x(h_K) \right), \\
&\leq A' n^{-A\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \leq A' l_n^{-1} n^{-A\varepsilon^2},$$

En choisissant ε de façon que $A\varepsilon^2 = \frac{5}{3}\beta + \frac{3}{2}$, on obtient

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_k) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_k) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \leq An^{-\beta-1},$$

en appliquant le corollaire 2.1, on déduit

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \leq An^{-\beta-1},$$

Ce qui achève finalement le lemme 2.2.

C.Q.F.D.

Preuve du lemme 2.3

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \widehat{F}_N^x(y) - F^x(y) &= \frac{1}{n \mathbb{E} K_1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} K_i H_i(y) - F^x(y) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} K_1} \left[\mathbb{E} K_1 H_1 \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right) - F^x(y) \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} K_1} \mathbb{E} (K_1 [\mathbb{E} (H_1 (h_H^{-1}(y - Y_i)) / X) - F^x(y)])
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(H_1 \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) &= \int_{\mathbb{R}} H \left(\frac{y - u}{h_H} \right) f^X(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) F^X(y - h_H t) dt.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E} \left(H_1 \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) - F^x(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) F^X(y - h_H t) dt - F^x(y) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) |F^X(y - h_H t) - F^x(y)| dt.\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à (H2) on obtient

$$|\mathbb{E} \left(H_1 \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) - F^x(y)| \leq A_x \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) (h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2}) dt. \quad (2.25)$$

Cette inégalité est uniforme en y , en remplaçant dans (2.24) et simplifiant le terme $(\mathbb{E} K_1)$ on trouve

$$\mathbb{E} \widehat{F}_N^x(y) - F^x(y) \leq A_x \left(h_K^{b_1} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) dt + h_H^{b_2} \int_{\mathbb{R}} |t|^{b_2} H^{(1)}(t) dt \right).$$

Finalement, l'hypothèse (H4) et le corollaire 2.1 entraînent la preuve de l'équation (2.12).

Il nous reste à montrer l'équation (2.13), en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \widehat{f}_N^x(y) - f^x(y) &= \frac{1}{h_H \mathbb{E} K_1} \left[\mathbb{E} K_1 H_1^{(1)} \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right) - h_H f^x(y) \right] \\ &= \frac{1}{h_H \mathbb{E} K_1} \mathbb{E} \left(K_1 \left[\mathbb{E} \left(H_1^{(1)} \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) - h_H f^x(y) \right] \right)\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(H_1^{(1)} \left(h_H^{-1}(y - Y_i) \right) / X \right) &= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)} \left(\frac{y - u}{h_H} \right) f^X(u) du \\ &= h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) f^X(y - h_H t) dt.\end{aligned}$$

Et par suite

$$|\mathbb{E} (H_1 (h_H^{-1}(y - Y_i)) / X) - h_H f^x(y)| \leq h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) |f^X(y - h_H t) - f^x(y)| dt.$$

l'hypothèse (H3) entraîne que

$$|\mathbb{E} (H_1 (h_H^{-1}(y - Y_i)) / X) - h_H f^x(y)| \leq A_x h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) (h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2}) dt.$$

l'hypothèse (H4) et le corollaire 2.1 entraînent la preuve de l'équation (2.13).
Ce qui achève la preuve du lemme 2.3.

C.Q.F.D.

Preuve du lemme 2.4

Dès lemmes précédents on déduit que

$$\widehat{F}^x(y) \xrightarrow{p.co.} F^x(y).$$

Ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| > \varepsilon\} < \infty.$$

D'autre part, nous aurions par l'hypothèse $F^x < 1$

$$\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| \leq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2 \Rightarrow \sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2.$$

Ce qui implique

$$\mathbb{P}\{\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\} \leq \mathbb{P}\{\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2\} < \infty.$$

On prend $\delta = (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2$.

C.Q.F.D.

Preuve du lemme 2.5

• **En ce qui concerne (2.15)** : notre objectif est de démontrer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq \infty. \quad (2.26)$$

On a

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

où $\Delta_i(x) = K_i - \mathbb{E}K_i$. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Fuc-Nagaev. Pour cela, on doit d'abord calculer asymptotiquement s_n^2 . En effet

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)| = s_n^{*2} + \sum_{i=1}^n \text{Var}(\Delta_i) \quad (2.27)$$

où

$$s_n^{*2} = \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} |\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)|$$

ainsi pour tout $i \neq j$ on a

$$\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j) = \mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) - \mathbb{E}(\Delta_i) \mathbb{E}(\Delta_j).$$

Par définition

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)| &\leq A \mathbb{E}(I_{B(x, h_K) \times B(x, h_K)}(X_i, X_j)) + A \mathbb{E}(I_{B(x, h_K)}(X_i)) \mathbb{E}(I_{B(x, h_K)}(X_j)) \\ &\leq A \mathbb{P}((X_i, X_j) \in B(x, h_K) \times B(x, h_K)) + \\ &\quad A \mathbb{P}(X_i \in B(x, h_K)) \mathbb{P}(X_j \in B(x, h_K)) \\ &\leq A' \phi_x(h_K) \left((n^{-1} \phi_x(h))^{1/a} + \phi_x(h_K) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

En utilisant les techniques de Masry (1986) et on définit les ensembles S_1, S_2 ,

$$S_1 = \{(i, j) \text{ tel que } 1 \leq j - i \leq m_n\} ;$$

$$S_2 = \{(i, j) \text{ tel que } m_n + 1 \leq j - i \leq n - 1\}$$

où $(m_n)_n$ est une suite arbitraire d'entier positive vérifiant $m_n \rightarrow \infty$. Donc pour n assez grand on obtient

$$s_n^{*2} = \sum_{S_1} |\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)| + \sum_{S_2} |\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)|.$$

D'après la définition de S_1 et (2.28) on déduit que

$$\sum_{S_1} |\text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)| \leq A' n m_n \phi_x(h_K) (n^{-1} \phi_x(h))^{1/a},$$

il découle du l'Inégalité de covariance pour variables bornées (voir [7]) que

$$|Cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq A\alpha(|i - j|),$$

donc on obtient

$$\sum_{S_2} |Cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq An^2\alpha(m_n) \leq A'n^2m_n^{-a}.$$

On prend $m_n = \left(\frac{n}{\phi_x(h_K)}\right)^{1/a}$, il résulte que

$$s_n^{*2} = O(n\phi_x(h_K)).$$

Dans un second temps, on a, pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n Var(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\Delta_i^2) - (\mathbb{E}(\Delta_i))^2.$$

On montre par la même méthode utiliser dans le calcul de la $Cov(\Delta_i, \Delta_j)$ que

$$Var(\Delta_i) \leq A'\phi_x(h_K)$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^n Var(\Delta_i) = O(n\phi_x(h_K)). \quad (2.29)$$

Finalement, d'après (2.27) on combine (2.28) et (2.29) on trouve

$$s_n^2 = O(n\phi_x(h_K)). \quad (2.30)$$

L'inégalité **Fuk-Nagaev**(voir[5]) sur la variable Δ_i entraîne pour $\varepsilon > 0$ et $r > 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n \Delta_i\right| > \varepsilon n \mathbb{E}K_1\right) \\ &\leq 4\left(1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1}{16r s_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1} \left(\frac{8r}{\varepsilon n \mathbb{E}K_1}\right)^{a+1} \end{aligned}$$

Ainsi on arrive à $\mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq$

$$\begin{aligned}
& 4 \left(1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1 \frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}}{16 r s_n^2} \right)^{\frac{-r}{2}} + 2 n c r^{-1} \left(\frac{8 r}{\varepsilon n \mathbb{E} K_1 \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}}} \right)^{a+1} \\
& \leq 4 \left(1 + \frac{\varepsilon^2 n \log n \phi_x(h_K)}{16 r s_n^2} \right)^{\frac{-r}{2}} + A n r^a \varepsilon^{-(a+1)} (n \log n \phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
& \leq 4 \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \log n}{16 r} \right)^{\frac{-r}{2}} + A n^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \varepsilon^{-(a+1)} (\log n \phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
& \leq A e^{\frac{-r}{2} \log \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \log n}{16 r} \right)} + A n^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \varepsilon^{-(a+1)} (\log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}
\end{aligned}$$

On peut toujours choisir r sous la forme $r = C(\log n)^2$, où C est une constante

$$\mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq A n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A (\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

Grâce à l'inégalité de gauche en (H'3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) & \leq A n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A (\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{\frac{-(a+1)}{2} \left(\frac{3+a}{a+1} + \eta \right)} \\
& \leq A n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A n^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{\frac{-(a+1)}{2} \left(\frac{3+a}{a+1} + \eta \right)} \\
& \leq A n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A n^{-1-\left(\frac{1-a}{2} + \frac{a+1}{2} \eta \right)}
\end{aligned}$$

pour ε suffisamment grand et $\nu > 0$ on aboutira,

$$\mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq A' n^{-1-\nu}. \quad (2.31)$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_D^x - \mathbb{E} \widehat{F}_D^x \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A' n^{-1-\nu} < \infty.$$

Ce qui montre (2.15) qui est la première partie du lemme 2.5.

• **En ce qui concerne** (2.16) : en suivant la même démarche celle de la preuve (2.10), pour T_1 et T_3 le calcul reste le même. Cependant, pour T_2 , on a,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right) \leq \frac{A}{l_n} \max_{m_y \in \{m_1, \dots, m_{s_n}\}} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}} \right).$$

On a aussi

$$\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) = \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1)} \sum_{i=1}^n \underbrace{H_i(m_y)K_i - \mathbb{E}(H_i(m_y)K_i)}_{\Lambda_i^*}.$$

Laquelle nécessite le calcul de $s_n'^2$ où

$$s_n'^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |Cov(\Lambda_i^*, \Lambda_j^*)|.$$

En utilisant la même méthode que dans s_n^2 de (2.27) et en prenant

$$m_n = \frac{1}{\phi_x(h_K)}$$

on montre que

$$s_n'^2 = o(n\phi_x(h_K)) + O(n\phi_x(h_K)).$$

L'inégalité de Fuk-Nagaev sur la variable Λ_i^* entraîne pour $\delta > 0$ et $r > 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \delta \right) &= \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n \Lambda_i^* \right| > \delta n \mathbb{E} K_1 \right) \\ &\leq 4 \left(1 + \frac{\delta^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1}{16 r s_n'^2} \right)^{\frac{-r}{2}} + 2 n c r^{-1} \left(\frac{8 r}{\delta n \mathbb{E} K_1} \right)^{a+1} \end{aligned}$$

Ainsi on arrive à

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq \\
& 4 \left(1 + \frac{\delta^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1 \frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}}{16 r s_n'^2} \right)^{\frac{-r}{2}} + 2 n c r^{-1} \left(\frac{8 r}{\delta n \mathbb{E} K_1 \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}}} \right)^{a+1} \\
& \leq 4 \left(1 + \frac{\delta^2 n \log n \phi_x(h_K)}{16 r s_n'^2} \right)^{\frac{-r}{2}} + A n r^a \delta^{-(a+1)} (n \log n \phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
& \leq 4 \left(1 + \frac{\delta^2 \log n}{16 r} \right)^{\frac{-r}{2}} + A n^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)} (\log n \phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
& \leq A e^{\frac{-r}{2} \log \left(1 + \frac{\delta^2 \log n}{16 r} \right)} + A n^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)} (\log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

On peut toujours choisir r sous la forme $r = C(\log n)^2$, où C est une constante. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq A n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + \\
& A (\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de gauche en (H'3)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \\
& \leq A n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A (\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{\frac{-(a+1)}{2} \left(\frac{4-a+3\beta}{a+1} + \eta \right)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) \leq \\
& A l_n^{-1} \left(n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + n^{-1-\frac{a+1}{2}\eta} \right).
\end{aligned}$$

On applique le corollaire 2.1, sous un choix convenable de ε , on montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{F}_N^x(m_y) \right| > \varepsilon / 3 \sqrt{\frac{\log n}{n \phi_x(h_K)}} \right) < +\infty$$

• **En ce qui concerne** (2.17) : en suivant la même démarche celle de la preuve (2.11), pour F_1 et F_3 le calcul reste le même. Cependant, pour F_2 , on a,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}} \right) \leq \frac{A}{l_n} \max_{m_y \in \{m_1, \dots, m_{s_n}\}} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}} \right).$$

aussi que

$$\widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) = \frac{1}{n h_H \mathbb{E}(K_1)} \sum_{i=1}^n \underbrace{H_i^{(1)}(m_y) K_i - \mathbb{E} \left(H_i^{(1)}(m_y) K_i \right)}_{\Gamma_i^*}.$$

On pose

$$S_n'^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |Cov(\Gamma_i^*, \Gamma_j^*)|.$$

En utilisant la même méthode que dans s_n^2 de (2.27) et en prenant

$$m_n = \frac{1}{h_H \phi_x(h_K)}$$

on montre que

$$S_n'^2 = O(n h_H \phi_x(h_K)).$$

d'après l'inégalité de Fuk-Nagaev, on a

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}} \right) \leq A_1 A_2.$$

où

$$A_1 = Ae^{\frac{-r}{2} \log \left(1 + \frac{\delta^2 \log n}{16r} \right)} \text{ et } A_2 = An^{1 - \frac{(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)} (h_H \log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}.$$

On applique l'hypothèse $(H'3)$ et un choix de $r = C(\log n)^2$ et $l_n = n^{-\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}}$, on montre qu'il existe $\nu > 0$ pour η assez grand, on a

$$l_n^{-1}(A_1 + A_2) \leq An^{-1-\nu}$$

d'après le corollaire 2.1, on en déduit

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E} \widehat{f}_N^x(m_y) \right| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \phi_x(h_K)}} \right) \leq An^{-1-\nu}.$$

C.Q.F.D.

Bibliographie

- [1] Dabo-Niang, S. ; Laksaci, A. (2007), Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344, 49-52.
- [2] Estévez-Pérez, G. (2002), On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation. *Statist. Probab. Lett.* **57**, 231–241.
- [3] Estévez-Pérez, G. ; Quintela-del-Río, A. ; Vieu, P. (2002), Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples. *J. Statist. Plann. Inference.*, **104**, 1–30.
- [4] Ezzahrioui, M. ; Ould-Saïd, E. (2005), Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional mode for functional data, Preprint, LMPA No 249, Aout 2005, Univ. du Littoral. (In revision).
- [5] Ferraty, F. ; Vieu, P. (2004), Modèle de régression pour variables aléatoires uni, multi et ∞ –dimensionnées. Cours de DEA.
- [6] Ferraty, F. ; Laksaci, A. ; Vieu, P. (2005), Functional times series prediction via conditional mode estimation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340, 389-392.
- [7] Ferraty, F. ; Laksaci, A. ; Vieu, P. (2006), Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, *Statist. Inf. for Stoch. Proc.*, 9, 47-76.
- [8] Ferraty, F. ; Vieu, P. (2006), *Nonparametric functional data analysis, Theory and Practice*. Springer-Verlag.
- [9] Quintela-del-Río, A. (2006), Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. *Statist. Probab. Lett.*, **76**, 1117–1124.
- [10] Lecoutre, J. P. ; Ould-Saïd, E. (1993), Estimation de la fonction de hazard pour un processus fortement mélangeant avec censure. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* , **37**, 59–69.

- [11] Laksaci, A. (2007), Erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle à variable explicative fonctionnelle. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.*, 345, 149-154.
- [12] Masry, E. (1986), Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processus, *IEEE. Trans. Inform. Theory*, 32, 254-267.
- [13] Masry, E. (2005), Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. *Stoch. Proc. and their Appl.*, 115, 155-177.
- [14] Rio, E. (2000), *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendant* (in french). Mathématiques & Applications, 31, Springer Verlag.
- [15] Roussas, G. (1989), Hazard rate estimation under dependence conditions. *J. Statist. Plann. Inference*, **22**, 81-93.
- [16] Roussas, G. (1990), Asymptotic normality of the kernel estimate under dependence conditions : application to hazard rate. *J. Statist. Plann. Inference*. **25**, 81-104.
- [17] Vieu, P., (1991), Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence. *J. Multivariate Anal.*, **39**, 324-347.
- [18] Watson, G. S. ; Leadbetter, M. R. (1964), Hazard analysis, *Sankhyia* **26**, 101-116.
- [19] Youndjé, É. ; Sarda, P. ; Vieu, P. (1996), Optimal smooth hazard estimates. *Test*, **5**, 379-394.

Chapitre 3

Estimation fonctionnelle de la fonction hasard conditionnelle avec données ergodiques

L'estimation des données fonctionnelles a suscité beaucoup d'intérêt dans le domaine des statistiques, dans la mesure où elle a fait l'objet de divers travaux (Bosq, 2000) et (Ramsay et Silverman, 2005) pour un modèle paramétrique et une monographie de (Ferraty et Vieu, 2006) pour un modèle non paramétrique. L'estimation de la fonction de risque joue un rôle important dans les statistiques. En effet, elle est utilisée dans l'analyse des risques ou dans l'étude des phénomènes de survie et elle s'applique dans divers domaines, notamment l'économétrie, l'épidémiologie, les sciences de l'environnement et bien d'autres. Donc, les premiers résultats sur le sujet ont été établis au début des années 60 (voir Watson et Leadbetter, 1964). (Roussas, 1989) a utilisé la méthode du noyau pour estimer la fonction de risque comme le rapport entre l'estimateur de la densité du noyau et l'estimateur empirique de la fonction de distribution. Ainsi, dans des conditions de mélange faibles, ils ont établi la convergence presque sûre, un an plus tard, il a obtenu la normalité asymptotique de cet estimateur. (Youndjé, Sarda et Vieu, 1996) ont construit un estimateur pour la fonction de risque et ont mis au point une méthode permettant de choisir le paramètre de lissage optimal lorsque les observations sont effectuées i.i.d. Ce dernier résultat a été généralisé par (Estévez-Pérez, 2002) dans le cas du mélange. La même année (Estévez-Pérez, Quintela-del-Río et Vieu, 2002) ont établi les résultats de (Vieu, 1991) en précisant le taux de convergence en moyenne quadratique de l'estimateur du noyau de la

fonction de risque, pour des données dépendantes.

3.1 Modèle

Soient (X, Y) deux variables aléatoires dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{F}$ est un espace semi-métrique de semi-métrique d . Étant donné une suite d'observations $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$ de même loi de probabilité que (X, Y) et supposé être stationnaire et ergodique.

Pour ce modèle, on considère $F^x(y)$ la fonction de répartition conditionnelle de y tel que $X = x$, l'estimateur de $F^x(y)$ est donné par

$$\hat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

où K est un noyau, H est une fonction de répartition associé à la variable Y , $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs. on pose $\Delta_i(x) = K(h_K^{-1}d(x, X_i))$, ce qui nous permet d'écrire

$$\hat{F}^x(y) = \frac{\hat{F}_N^x(y)}{\hat{F}_D(x)}.$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{F}_N^x(y) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n H(h_H^{-1}(y - Y_i))\Delta_i(x), \\ \hat{F}_D(x) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \Delta_i(x). \end{aligned}$$

A partir de cet estimateur, on déduit un estimateur pour la densité conditionnelle noté $\hat{f}^x(y)$, défini par :

$$\hat{f}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n h_H^{-1}K(h_K^{-1}d(x, X_i))H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \quad (3.2)$$

où $H^{(1)}$ est la dérivée de H ,

et

$$\hat{f}^x(y) = \frac{\hat{f}_N^x(y)}{\hat{F}_D(x)}.$$

avec

$$\hat{f}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) \Delta_i(x).$$

par definition, l'estimateur de la fonction hasard conditionnelle, noté $\hat{h}^x$ est :

$$\hat{h}^x(y) = \frac{\hat{f}^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

3.2 Hypothèses

On fixe un point x dans $\mathcal{F}$ dont on note N_x le voisinage de ce point. De plus, pour $i = 1, \dots, n$, on pose $\mathcal{F}_i$ la σ -algèbre engendrée par $((X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k))$ et $\mathcal{G}_i$ la σ -algèbre engendrée par $((X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k), X_{k+1})$ et on écrit $\phi_x(h) = \mathbb{P}(d(x, x') \leq h) = \mathbb{P}(x' \in B(x, h))$ et $\phi_x^{\mathcal{F}_{i-1}}(h) = \mathbb{P}(d(x, x') \leq h | \mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{P}(x \in B(x, h) | \mathcal{F}_{i-1})$ pour tout $x \in \mathcal{F}$ (respectivement, le compact $\mathcal{S} \in \mathbb{R}$) et $h > 0$, où $B(x, h)$ la boule de centre x et de rayon h .

Sous les hypothèses citées ci-dessous, on présente nos résultats :

(H1) K est un noyau non négatif borné de class C^1 à support $[0, 1]$. La dérivée $K'(t) < 0$, $|\int_0^1 (K^j)'(u) du| < \infty$ pour $j = 1, 2$.

(H2) Il existe une suite de variables aléatoires fonctionnelles non-négatives $(f_{i,1}(x))_{i \geq 1}$ borné p.s par une suite de quantités déterministes $(b_i(x))_{i \geq 1}$ par conséquence, la suite de fonctions aléatoires $(g_{i,x})_{i \geq 1}$. la fonction f_1 et la fonction ψ tendent vers zéro lorsque leurs arguments tendent vers zéro. De sorte que

(i) $\phi_x(h) = \psi(h)f_1(x) + o(\psi(h))$, quand $h \rightarrow 0$.

(ii) Pour tout $i \in N$, $F_x^{\mathcal{F}_{i-1}}(h) = \psi(h)f_{i,1}(x) + g_{i,x}(h)$ avec $g_{i,x}(h) =$

$$o_{p.s}(\psi(h)) \text{ quand } h \rightarrow 0. g_{i,x}(h)/\psi(h) \text{ borné p.s et } n^{-1} \sum_{i=1}^n g_{i,x}^j(h) =$$

$$o_{p.s}(\psi^j(h)) \text{ quand } n \rightarrow \infty, j = 1, 2.$$

- (iii) $n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{i,1}^j(x) \longrightarrow f_1^j(x)$ p.s. quand $n \longrightarrow \infty$, $j = 1, 2$.
- (iv) IL existe une fonction borné non-décroissante τ_0 uniformément dans $t \in [0, 1]$,
 $\frac{\psi(ht)}{\psi(h)} = \tau_0(t) + o(1)$ quand $h \downarrow 0$ et $\int_0^1 (K^j)'(t) \tau_0(t) dt < \infty$ pour $j \geq 1$.
- (v) $n^{-1} \sum_{i=1}^n b_i(x) \longrightarrow D(x) < \infty$. quand $n \longrightarrow \infty$
- (H3) Pour tout $m \geq 1$, $\mathbb{E}(|H^{(l)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|^m | \mathcal{G}_{i-1}) = \mathbb{E}(|H^{(l)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|^m | X_i)$, p.s. pour $l = 0, 2$.
- (H4) $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$, il existe quelques constantes $C_x > 0$, $b_1, b_2 > 0$, tel que

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C_x(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}).$$

- (H5) (i) $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$, il existe quelques constantes $C_x > 0$, $b_1, b_2 > 0$, tel que

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C_x(d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}).$$

(ii) $\int |t| f^x(t) dt < \infty$.

- (H6) Le noyau $H^{(1)}$ est borné de sorte que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \exists C > 0, |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|, \int (H^{(1)})^2(v) dv < \infty \text{ et } \int |v|^{b_2} H^{(1)}(v) dv < \infty, \text{ pour } j = 0, 1.$$

- (H7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n h_H^j \psi(h_K) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n h_H^j \psi(h_K)} = 0$, pour $j = 0, 1$.

- (H8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta h_H = \infty$, $\forall \beta > 0$.

3.3 Principaux résultats

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses (H1) – (H8) sont vraies, on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{p.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \psi(h_K)}}\right).$$

3.3.1 Normalité asymptotique

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (H1) – (H8), on a*

$$\sqrt{nh_H\psi(h)}(\hat{h}^x(y) - h^x(y)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_h^2(x, y)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

avec

$$\sigma_h^2(x, y) = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{h^x(y)}{f_1(x)(1 - F^x(y))} \int_R H^{(1)2}(v) dv.$$

et

$$M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(t) \tau_0(t) dt \quad \text{pour } j = 1, 2$$

Preuve de théorème 3.1 On peut écrire $\hat{h}^x(y) - h^x(y)$ sous la forme

$$\hat{h}^x(y) - h^x(y) = \frac{1}{1 - \hat{F}^x(y)} [\hat{f}^x(y) - f^x(y)] + \frac{h^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)} [\hat{F}^x(y) - F^x(y)] \quad (3.5)$$

La preuve de théorème 3.1 est basé sur la décomposition précédente et les proposition suivantes :

Proposition 3.1 *Supposons que les hypothèses (H1) – (H4) et (H6) – (H8) sont vraies, alors on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{F}^x(y) - F^x(y)| = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{p.s.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h_K)}} \right).$$

Proposition 3.2 *Sous les hypothèses (H1) – (H3) et (H5) – (H8), on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{f}^x(y) - f^x(y)| = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{p.s.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\psi(h_K)}} \right).$$

Proposition 3.3 *Sous les hypothèses de la proposition 3.1, on a*

$$|1 - \hat{F}^x(y)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} |1 - F^x(y)|.$$

Preuve de théorème 3.2

D'après 3.3 et en utilisant la décomposition 3.5 et en combinant entre la proposition 3.3 et les propositions suivantes :

Proposition 3.4 *sous les hypothèses (H1) – (H4) et (H6) – (H8) et en ajoutant l'hypothèse suivante*

$$\sqrt{n\psi(h)}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.6)$$

Alors, on a

$$\sqrt{n\psi(h)}(\hat{F}^x(y) - F^x(y)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_F^2(x, y)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

où $\xrightarrow{L}$ signifie la convergence en loi.

et

$$\sigma_F^2(x, y) = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{F^x(y)(1 - F^x(y))}{f_1(x)}.$$

et $M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(t) \tau_0(t) dt$ pour $j = 1, 2$.

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses (H1) – (H3) et (H5) – (H8) et en ajoutant*

$$\sqrt{nh_H\psi(h)}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.8)$$

On a,

$$\sqrt{nh_H\psi(h)}(\hat{f}^x(y) - f^x(y)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_f^2(x, y)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

où $\xrightarrow{L}$ signifie la convergence en loi.

et

$$\sigma_f^2(x, y) = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{f^x(y)}{f_1(x)} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(v) dv.$$

avec $M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(t) \tau_0(t) dt$ pour $j = 1, 2$.

3.4 Les lemmes techniques

Afin de prouver nos principaux résultats, on a besoin des notations et des lemmes suivants :

Preuve des propositions 3.1 et 3.2

On introduit quelques notations supplémentaires

$$\begin{aligned}\bar{F}_N^x(y) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[H(h_H^{-1}(y - Y_i))\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]. \\ \bar{f}_N^x(y) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]. \\ \bar{F}_D(x) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}].\end{aligned}$$

On peut écrire,

$$\hat{F}^x(y) - F^x(y) = B_{n,1}(x, y) + \frac{R_{n,1}(x, y)}{\hat{F}_D(x)} + \frac{Q_{n,1}(x, y)}{\hat{F}_D(x)}. \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned}Q_{n,1}(x, y) &= (\hat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)) - F^x(y)(\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)), \\ B_{n,1}(x, y) &= \frac{\bar{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} - F^x(y), \\ R_{n,1}(x, y) &= -B_{n,1}(x, y)(\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)).\end{aligned}$$

Et

$$\hat{f}^x(y) - f^x(y) = B_{n,2}(x, y) + \frac{R_{n,2}(x, y)}{\hat{F}_D(x)} + \frac{Q_{n,2}(x, y)}{\hat{F}_D(x)}. \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned}Q_{n,2}(x, y) &= (\hat{f}_N^x(y) - \bar{f}_N^x(y)) - f^x(y)(\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)), \\ B_{n,2}(x, y) &= \frac{\bar{f}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} - f^x(y), \\ R_{n,2}(x, y) &= -B_{n,2}(x, y)(\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)).\end{aligned}$$

Lemme 3.1 *Supposons que les hypothèses (H1) – (H8) sont vraies, on a*

$$\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) = O_{p.s.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h_K)}} \right), \quad (3.12)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_D(x) = 1. \quad p.s. \quad (3.13)$$

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses (H1) – (H4), (H6) et (H7) on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |B_{n,1}(x, y)| = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}), \quad (3.14)$$

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |R_{n,1}(x, y)| = O_{p.s.} \left((h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h_K)}} \right) \right). \quad (3.15)$$

Lemme 3.3 *Sous les hypothèses (H1) – (H3) et (H5) – (H7), on obtient*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |B_{n,2}(x, y)| = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}), \quad (3.16)$$

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |R_{n,2}(x, y)| = O_{p.s.} \left((h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h_K)}} \right) \right). \quad (3.17)$$

Lemme 3.4 *Supposons que les hypothèses (H1) – (H4) et (H6) – (H8) sont vraies. Alors, on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)| = O_{p.s.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h_K)}} \right). \quad (3.18)$$

Lemme 3.5 *Sous les hypothèses (H1) – (H3) et (H5) – (H8), on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{f}_N^x(y) - \bar{f}_N^x(y)| = O_{p.s.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\psi(h_K)}} \right). \quad (3.19)$$

Lemme 3.6 *Soit $(Z_n)_n \geq 1$ est une suite de différentes martingales réelles par rapport à la suite de σ -algèbres $(\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_n))_{n \geq 1}$, où $\sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ est les σ -algèbres engendrée par les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. En*

fixant $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Pour tout $p \geq 2$, $n \geq 1$ supposons qu'il existe des constantes non-négative C et d_n tel que $\mathbb{E}(Z_n^p | \mathcal{F}_{n-1}) \leq C^{p-2} p! d_n^2$, p.s. Alors, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > \epsilon) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\epsilon^2}{2(D_n + C\epsilon)} \right\},$$

où $D_n = \sum_{i=1}^n d_i^2$.

Lemme 3.7 *Pour tout nombre réel $1 \leq j \leq k$. quand $n \rightarrow \infty$.*

$$(i) \quad (1/\psi(h))\mathbb{E}[\Delta_i^j(x)|\mathcal{F}_{i-1}] = M_j f_{i,1}(x) + O_{p.s.}(g_{i,x}(h)/\psi(h)),$$

$$(ii) \quad (1/\psi(h))\mathbb{E}[\Delta_1^j(x)] = M_j f_1(x) + o(1).$$

$$(iii) \quad (1/\psi^k(h))(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^k = M_1^k f_1^k(x) + o(1).$$

où M_j est défini dans la Proposition 3.4.

Lemme 3.8 *Supposons que (H1) – (H4) et (H6) – (H8) sont vraies, on a*

$$\sqrt{n\psi(h_K)}Q_{n,1}(x, y) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_F^2(x, y)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

où $\sigma_F^2(x, y)$ est défini dans la proposition 3.4

Lemme 3.9 *sous les hypothèses (H1) – (H3) et (H6) – (H8), on a*

$$\sqrt{nh_H\psi(h_K)}Q_{n,2}(x, y) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_f^2(x, y)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

où $\sigma_f^2(x, y)$ est défini dans la proposition 3.5

Remarque : Les lemmes 3.6 et 3.7 sont des lemmes de technique qu'on l'utilise pour la demonstration des autres lemmes. leurs preuves sont données par lemme 1 dans laib et louani (2011) et par lemme 1 dans laib et louani (2010).

3.5 Appendice

Preuve du Lemme 3.1

$$\begin{aligned} \widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n [\Delta_i(x) - \mathbb{E}[\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n L_{n,i}(x). \end{aligned}$$

où $L_{n,i}(x)$ forme un tableau triangulaire de suite de martingales associé à la σ -algèbre $\mathcal{F}_{i-1}$, en utilisant l'inégalité C_r , il en résulte que

$$\mathbb{E}[L_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}] \leq 2\mathbb{E}[\Delta_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}].$$

En combinant le lemme 3.7 et l'hypothèse (H2), on obtient

$$\mathbb{E}[L_i^2(x)|\mathcal{F}_{i-1}] \leq 2\psi(h)[M_2 b_i(x) + 1] = d_i^2. \quad \text{p.s.}$$

Par conséquent, en utilisant le lemme 3.6, le lemme 3.7 et $(H2)(v)$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)| > \epsilon) &= \mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^n L_{n,i}(x)\right| > n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x))\right] \\
&\leq 2\exp\left(-\frac{(n\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^2}{2(D_n + Cn\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x)))}\right) \\
&= 2\exp\left\{-n\epsilon^2\frac{(\mathbb{E}\Delta_1(x))^2}{2D_n/n}\left[\frac{1}{1 + \frac{C\epsilon\mathbb{E}(\Delta_1(x))}{D_n/n}}\right]\right\} \\
&= 2\exp\left\{-n\epsilon^2\psi(h)\left(\frac{M_1^2 f_1^2(x)}{4[M_2 D(x) + 1]} + o(1)\right)\right. \\
&\quad \left.\frac{1}{1 + \frac{C\epsilon M_1 f_1(x)}{2(M_2 D(x) + 1)} + o(1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Alors, en prenant

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{4[M_2 D(x) + 1] \log n}{M_1^2 f_1^2(x) n \psi(h)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avec $\epsilon_0 > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)| > \epsilon) &\leq 2\exp\left\{-\epsilon_0^2 \log n \frac{1}{1 + \epsilon_0 \left(\frac{\log n}{n\psi(h)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{C}{([M_2 D(x) + 1])^{\frac{1}{2} + o(1)}}}\right\} \\
&\leq 2\exp\{-C\epsilon_0^2 \log n\} \leq 2n^{-C\epsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

Donc, pour ϵ_0 assez grand, on obtient par le lemme de Borel-Cantelli

$$\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x) = O_{p.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h)}}\right).$$

De plus, pour l'équation 3.13 il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{F}_D(x) = 1. \quad p.s.$$

En appliquant le lemme 3.7 il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\bar{F}_D(x) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n [\mathbb{E}[\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= \frac{1}{\psi(h)M_1f_1(x) + o(\psi(h))} \psi(h)M_1f_1(x) + O_{p.s}(\psi(h)) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \quad \text{p.s.}\end{aligned}$$

Preuve du Lemme 3.3 Rappelons que

$$B_{n,2}(x, y) = \frac{\bar{f}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} - f^x(y) = \frac{\bar{f}_N^x(y) - \bar{F}_D(x)f^x(y)}{\bar{F}_D(x)}.$$

par l'hypothèse (H3) et en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle par rapport à σ -algèbre $\mathcal{G}_{i-1}$, on obtient

$$\bar{f}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))\Delta_i(x)|\mathcal{F}_{i-1}] \quad (3.22)$$

Donc, par un double conditionnement par rapport à $\mathcal{G}_{i-1}$, on a

$$\begin{aligned}\bar{f}_N^x(y) - \bar{F}_D(x)f^x(y) &= \\ \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\Delta_i(x)[\mathbb{E}(h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|X_i) - f^x(y)]|\mathcal{F}_{i-1}\}.\end{aligned}$$

où

$$\mathbb{E}(h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|X_i) = \frac{1}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - u))f^{X_i}(u)du.$$

Et en changeant les variables, on obtient

$$\mathbb{E}(h_H^{-1}H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|X_i) = \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z)f^{X_i}(y - h_H z)dz.$$

Par conséquent, par les hypothèses (H5) et (H6) et l'équation 3.13, on a

$$|\bar{f}_N^x(y) - \bar{F}_D(x)f^x(y)| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left\{ \Delta_i(x) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) |f^{X_i}(y - h_H z) - f^x(y)| dz \mid \mathcal{F}_{i-1} \right\} \right| \\
& \leq C(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\Delta_i(x) \mid \mathcal{F}_{i-1}] \\
& = O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie du Lemme 3.3, comme $R_{n,2}(x, y) = -B_{n,2}(x, y)(\widehat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x))$, et par l'équation 3.16 et le lemme 3.1, on obtient

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |R_{n,2}(x, y)| = O_{p.s.} \left((h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\psi(h_K)}} \right) \right).$$

Preuve du Lemme 3.5 La compacité de S permet d'écrire $S \subset \cup_{k=1}^{s_n} S_k$, où $S_k = (t_k - l_n, t_k + l_n)$ et la suite (l_n, s_n) tel que $l_n s_n \leq C$, on pose $t_y = \arg \min_{\{k \in 1, \dots, s_n\}} |y - t_k|$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \bar{f}_N^x(y) \right| & \leq \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(t_y) \right|}_{T_1} + \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right|}_{T_2} \\
& + \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \bar{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(y) \right|}_{T_3}.
\end{aligned}$$

Pour T_1 on utilise les hypothèses (H6) et (H8), et on dénote $H_i(y) = H^{(1)}\left(\frac{t - Y_i}{h_H}\right)$

$$\begin{aligned}
T_1 & \leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n h_H^{-1} \Delta_i(x) |H_i(y) - H_i(t_y)| \\
& \leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sup_{y \in \mathcal{S}} |y - t_y| \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i(x)}{h_H^2} \\
& \leq A \frac{l_n}{h_H^2}.
\end{aligned}$$

en choisissant $l_n = n^{-\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}}$, on a

$$\frac{l_n}{h_H^2} = o \left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}} \right).$$

Pour T_3 on utilise des arguments analogues comme T_1 on a

$$\begin{aligned}
T_3 &\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h_H^{-1}\Delta_i(x)|H_i(y) - H_i(t_y)||\mathcal{F}_{i-1}] \\
&\leq \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sup_{y \in \mathcal{S}} |y - t_y| \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{|\Delta_i(x)|}{h_H^2} |\mathcal{F}_{i-1} \right] \\
&\leq A \frac{l_n}{h_H^2} \longrightarrow 0 \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Concernant T_2 en observant que

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n \Delta_i(x) h_H^{-1} H_i(t_y) - \mathbb{E}(\Delta_i(x) h_H^{-1} H_i(t_y) | \mathcal{F}_{i-1}) \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\Delta_1(x)} \sum_{i=1}^n L_{i,n}(x, t_y)
\end{aligned}$$

où $L_{i,n}(x, t_y)$ est une martingale associé à la σ -algèbre $\mathcal{F}_{i-1}$. Similaire à la preuve du Lemme 5 dans Laïb et Louani (2011), sous (H1) – (H3) et pour $p \geq 2$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_{i,n}^p(x, t_y) | \mathcal{F}_{i-1}) &= p! C^{p-2} [M\psi(h)f_{i,1}(x) + O_{p.s}(g_{i,x}(h))] / h_H^{p-1} \\
&\leq p! C^{p-2} \psi(h) [Mb_i(x) + 1] / h_H^{p-1}.
\end{aligned}$$

où $C = 2 \max(1, a_1^2)$ et $M = (c_2 C)^2$. Ensuite, en prenant $d_i^2 = \psi(h)[Mb_i(x) + 1] / h_H^{p-1}$, $D_n = \sum_{i=1}^n d_i^2$, sous (H2)(ii) et (H2)(v), on obtient $n^{-1} D_n = \psi(h)[MD(x) + o(1)/h_H^{p-1}]$ quand $n \rightarrow \infty$.

Ainsi, en appliquant le lemme 3.6, pour tout $\epsilon_0 > 0$ et $p = 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sup_{t \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}} \right) \\
& \leq s_n \max_{k=1, \dots, s_n} \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n L_{i,n}(x, t_k) \right| > n \epsilon_0 \mathbb{E}(\Delta_1(x)) \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}} \right) \\
& \leq 2s_n \exp \left\{ - \frac{(n \epsilon_0 \mathbb{E}(D_1(x)))^2 \frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}}{2D_n + 2Cn \epsilon_0 \mathbb{E}(D_1(x)) \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}}} \right\} \\
& \leq 2s_n \exp \{ -C_1 \epsilon_0^2 \log n \} \\
& \leq 2n^{\frac{3\beta}{2} + \frac{1}{2} - C_1 \epsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

où C_1 est une constante positive, ainsi, en prenant ϵ_0 assez grand, il en résulte que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_H \psi(h_K)}} \right) < \infty.$$

Alors, en utilisant le lemme de Borel-Cantelli la preuve est terminée.

Preuve du Lemme 3.9 Désignons par

$$\eta_{n,i} = \left(\frac{h_H \psi(h_K)}{n} \right)^{1/2} (h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) - f^x(y)) \frac{\Delta_i(x)}{\mathbb{E}(\Delta_1(x))}.$$

et déterminant $\xi_{n,i} = \eta_{n,i} - \mathbb{E}[\eta_{n,i} | \mathcal{F}_{i-1}]$. Il est visible que

$$\sqrt{nh_H \psi(h_K)} Q_{n,2}(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}. \quad (3.24)$$

donc, les sommets dans l'équation 3.24 forme un tableau triangulaire de martingale stationnaire associé à la σ -algèbre $\mathcal{F}_{i-1}$. en appliquant le théorème central limite pour les tableaux des martingales (à valeur réelle) en temps discret (voir Hall et Heyde), la normalité asymptotique de $Q_{n,2}(x, y)$ peut être obtenir en démontrant les affirmations suivantes :

- (a) $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_f^2(x, y).$
- (b) $n \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \mathbb{I}_{|\xi_{n,i}| > \epsilon}) = o(1)$ pour tout $\epsilon > 0$.

Preuve de la partie (a) :

On observe que

$$\left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n [|\mathbb{E}(\eta_{n,i}) | \mathcal{F}_{i-1}|]^2. \quad (3.25)$$

En utilisant le lemme 3.7 et les équations 3.22 et 3.23, on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\eta_{n,i} | \mathcal{F}_{i-1})| &= \\ \frac{1}{\mathbb{E}(\Delta(x))} \left(\frac{h_H \psi(h_K)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} |\mathbb{E}[\Delta_i(x) (h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) - f^x(y)) | \mathcal{F}_{i-1}]| &= \\ O_{p.s}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) \left(\frac{h_H \psi(h_K)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f_{i,1}(x)}{f_1(x)} + O_{p.s} \left(\frac{g_{i,x}(h)}{\psi(h)} \right) \right). \end{aligned}$$

En conséquent, par (H2)(ii)(iii), on a

$$\sum_{i=1}^n [|\mathbb{E}(\eta_{n,i}) | \mathcal{F}_{i-1}|]^2 = O_{p.s}(h_H \psi(h_K)(h_K^{b_1} + h_H^{b_2})^2).$$

Donc, maintenant on doit montrer que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_f^2(x, y), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Pour prouver l'équation 3.26 on procède aussi bien

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{i-1}) &= \\ \frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left\{ \Delta_i^2(x) (h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) - f^x(y))^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right\} &= \\ \frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left\{ \Delta_i^2(x) \mathbb{E} \left[(h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) - f^x(y))^2 | X_i \right] | \mathcal{F}_{i-1} \right\}. \end{aligned}$$

Donc, par définition de la variance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[(h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) - f^x(y))^2 | X_i \right] \\ &= \text{Var} [h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i] + [\mathbb{E} (h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i) - f^x(y)]^2. \\ &= M_{n1} + M_{n2}. \end{aligned}$$

Concernant M_{n2} , similaire à 3.22 et 3.23 et le lemme 3.7, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \{ \Delta_i^2(x) M_{n2} | \mathcal{F}_{i-1} \} = \\ &O_{p.s}(h_H(h_K^{b_1} + h_H^{b_2})^2) \left[\frac{M_2}{M_1^2} \frac{1}{f_1(x)} + o_{p.s.}(1) \right] \end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \{ \Delta_i^2(x) M_{n2} | \mathcal{F}_{i-1} \} = 0, \quad p.s.$$

Concernant M_{n1} ,

$$\begin{aligned}
M_{n1} &= \text{Var} [h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) \right)^2 | X_i \right] - [\mathbb{E} (h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i)]^2 \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{h_H^2} H^{(1)2}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i \right] - [\mathbb{E} (h_H^{-1} H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i)]^2 \\
&= T_1 + T_2
\end{aligned}$$

On examine T_1 comme suit :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{h_H^2} H^{(1)2}(h_H^{-1}(y - Y_i)) | X_i \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H^2} H^{(1)2}(h_H^{-1}(y - u)) f^x(u) du.
\end{aligned}$$

Par un changement de variable, on a :

$$T_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H} H^{(1)2}(v) dF^x(y - h_H v).$$

Sous l'hypothèse (H5) on a

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(v) f^x(y - h_H v) dv \\
&= \frac{1}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(v) [f^x(y - h_H v) - f^x(y)] dv + \frac{1}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(v) f^x(y) dv \\
&= O_{p.s.}(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + \frac{f^x(y)}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(v) dv.
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\Delta_i^2(x) M_{n1} | \mathcal{F}_{i-1}\} \\
&= \left(O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + \frac{f^x(y)}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)2}(v) dv + O(h_H) - (O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + f^x(y))^2 \right) \\
&\times \frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\Delta_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}\}.
\end{aligned}$$

Finalement, sous le lemme 3.7, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_H \psi(h_K)}{n(\mathbb{E}(\Delta(x)))^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\Delta_i^2(x) M_{n1} | \mathcal{F}_{i-1}\} = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{f^x(y)}{f_1(x)} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v) dv.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \frac{M_2}{M_1^2} \frac{f^x(y)}{f_1(x)} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(v) dv = \sigma_f^2(x, y).$$

Alors on arrive à démontrer la partie (a).

Preuve de le partie (b) La lindeberg condition implique que $n\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\xi_{n,i}| > \epsilon]}) \leq 4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}| > \frac{\epsilon}{2}]})$, où $\mathbb{I}$ est la fonction de l'ensemble A . Soit $a > 1$ et $b > 1$ tel que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. En utilisant les inégalités de Hölder et Markov, on peut écrire pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}| > \frac{\epsilon}{2}]}) \leq \frac{\mathbb{E}|\eta_{n,i}|^{2a}}{(\epsilon/2)^{2a/b}}$. prenant C_0 une constante positive et $2a = 2 + \delta$ pour tout $\delta > 0$, il en résulte que

$$\begin{aligned} 4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}| > \frac{\epsilon}{2}]}) &\leq C_0 \left(\frac{h_H \psi(h_K)}{n} \right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^{2+\delta}} \\ &\times \mathbb{E} \left(\left[\left| \frac{1}{h_H} H^{(1)} \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right) - f^x(y) \right| \Delta_i(x) \right]^{2+\delta} \right) \\ &\leq C_0 \left(\frac{h_H \psi(h_K)}{n} \right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n}{(\mathbb{E}(\Delta_1(x)))^{2+\delta}} \\ &\times \mathbb{E} \left((\Delta_i(x))^{2+\delta} \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{h_H} H^{(1)} \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right) - f^x(y) \right|^{2+\delta} | X_i \right] \right) \end{aligned}$$

en changeant les variables, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{h_H} H^{(1)} \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right) - f^x(y) \right|^{2+\delta} | X_i \right] \\ &= C_0 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(h_H)^{1+\delta}} H^{(1)^{2+\delta}}(v) f^x(y - h_H v) dv + f^{2+\delta}(y|x) \right) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.7, on obtient

$$\begin{aligned}
4n\mathbb{E}(\eta_{n,i}^2 \mathbb{I}_{[|\eta_{n,i}| > \frac{\varepsilon}{2}]}]) &\leq C_0 \left(\frac{h_H \psi(h_K)}{n} \right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{n\mathbb{E}(\Delta_i(x))^{2+\delta}}{h_H^{1+\delta}(E(\Delta_1(x)))^{2+\delta}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^{2+\delta}}(v) f^x(y - h_H v) dv + f^{2+\delta}(y|x) \\
&\leq C_0 (nh_H \psi(h_K))^{\frac{-\delta}{2}} \frac{M_{2+\delta} f_1(x) + o(1)}{M_1^{2+\delta} f_1^{2+\delta}(x) + o(1)} \\
&= O((nh_H \psi(h_K))^{\frac{-\delta}{2}}).
\end{aligned}$$

Cela donne la preuve.

Preuve de proposition 3.3 D'après la proposition 3.1 on a

$$\mathbb{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{F}^x(y) = F^x(y)\} = 1.$$

D'autre part, en prenant compte que $F^x(y) < 1$, on a

$$\left| (1 - \widehat{F}^x(y)) - (1 - F^x(y)) \right| = \left| \widehat{F}^x(y) - F^x(y) \right|.$$

Cela implique,

$$1 - \widehat{F}^x(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} |1 - F^x(y)|.$$

Preuve de proposition 3.4

En combinant la décomposition 3.10 et le lemme 3.1, avec le fait que $\sqrt{n\psi(h_K)}B_{n,1}(x, y) \rightarrow 0$ et $\sqrt{n\psi(h_K)}R_{n,1}(x, y) \rightarrow 0$, p.s. quand $n \rightarrow \infty$ donc on conclut que la normalité asymptotique sera traitée par le terme $Q_{n,1}(x, y)$ qui est étudié dans le lemme 3.8. cependant, la preuve de proposition est terminée.

Preuve de proposition 3.5

En combinant la décomposition 3.11 et le lemme 3.1, avec le fait que $\sqrt{nh_H \psi(h_K)}B_{n,2}(x, y) \rightarrow 0$ and $\sqrt{nh_H \psi(h_K)}R_{n,2}(x, y) \rightarrow 0$, p.s. quand $n \rightarrow \infty$ donc on conclut que la normalité asymptotique sera traitée par le terme $Q_{n,2}(x, y)$ qui est étudié dans le lemme 3.9. cependant, la preuve de proposition est terminée.

Bibliographie

- [1] F. Z. Ardjoun, L. Ait Hennani, A. Laksaci, A recursive kernel estimate of the functional modal regression under ergodic dependence condition, *Journal of Statistical Theory and Practice*. 10 (2016) 475-496.
- [2] F. Benziadi, A. Laksaci, F. Tebboune, Note on conditional quantiles for functional ergodic data, *C. R. Acad.Sci.Paris,Ser.I* 354 (2016) 628-633.
- [3] F. Benziadi, A. Gheriballah, A. Laksaci, Asymptotic normality of kernel estimator of ψ -regression function for functional ergodic data, *New Trends in Mathematical Sciences*. 4 (2016) 268-282.
- [4] D. Bosq, *Linear Processes in Functional Spaces*, Springer-Verlag, New-York, 2000.
- [5] G. Estévez-Pérez, On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation, *Statist. Probab. Lett.* 57 (2002) 231-241.
- [6] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Río, P. Vieu, Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples, *J. Statist. Plann. Inference*. 104 (2002) 1-30.
- [7] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric Functional Data Analysis*, in : Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [8] N. Laib, D. Louani, Nonparametric Kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprties, *J. Multivariate Anal.* 101 (2010), 2266-2281.
- [9] N. Laib, D. Louani, Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data, *J. Statist. Plann. Inference*. 141 (2011), 359-372.
- [10] J. P. Lecoutre, E. Ould-Said, Estimation de la fonction de hasard pour un processus fortement mélangeant avec censure. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 37 (1993) 59-69.
- [11] J. Ramsay, B. Silverman, *Applied Functional Data Analysis*.

Methods and Case Studies, in : Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2002.

[12] E. Rio, Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendant, Mathématiques & Applications, 31, Springer Verlag. 2000.

[13] G. Roussas, Hazard rate estimation under dependence conditions, J. Statist. Plann. Inference. 22 (1989) 81-93.

[14] P. Vieu, Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence, Journal of Multivariate Analysis. 39 (1991) 324-347.

[15] G. S. Watson, M. R. Leadbetter, Hazard analysis. I. Biometrika. 51 (1964) 175-184.

[16] E. Youndjé, P. Sarda, P. Vieu, Optimal smooth hazard estimates, Test. 5 (1996) 379-394.

Chapitre 4

Recursive kernel estimate of the conditional hazard function for functional ergodic data

Ce chapitre fait l'objet d'une publication acceptée dans *International Journal of Statistics & Economics*

Recursive kernel estimate of the conditional hazard function for functional ergodic data

H. Kebir¹ and B. Mechab²

Laboratory of Statistics and Stochastic Processes

Department of Probability and Statistics

Djillali Liabes University

Sidi Bel Abbes 22000, Algeria

¹kebir.hadjer@yahoo.com,

²mechaboub@yahoo.fr

Abstract

In this paper, we propose a recursive kernel estimator of the conditional hazard function in the context of functional stationary ergodic process with the explanatory variable taking values in a semi-metric space and a scalar response, then we study the uniform almost complete convergence of this estimator.

Keywords : Conditional hazard function, dependent data, functional data, recursive kernel estimates.

2000 Mathematics Subject Classification : 62G05, 62G20.

4.1 Introduction

The functional estimate has attracted a lot of attention in the statistical literature. For an overview of the present state on nonparametric functional data (FDA), we refer to the works of (Ferraty and Vieu, 2006) and (Ramsay and Silverman, 2002), and the references therein. The conditional hazard rate plays an important role in the statistics, it arise in a variety of fields including econometrics, epidemiology, environmental science and many others. There is extensive documentation on the estimation of hasard function for independent mixing data as well as for dependent mixing data (see, for example,

(Watson and Leadbetter, 1964), (Roussas, 1989)). One of the important work about the conditional hazard rate in infinite dimensional space for functional covariates is of (Ferraty, Rabhi and Vieu, 2008), where they introduce a kernel estimator and they prove some asymptotic properties (with rates) in various situations including censored and/ or dependent variables. Recently, another approach has been proposed by (Massim and Mechab, 2016) based on the local linear method, they have established the almost complete convergence of the proposed estimator. In this paper we consider the case of functional ergodic data. There has been an increasing interest in this area in recent year. The ergodicity hypothesis is a fundamental axiom of statistical physics in order to examine the thermodynamic properties of gases, atoms, electrons or plasmas. This ergodic hypothesis also makes it possible to avoid complicated probabilistic calculations of the mixing condition. (Laib and Louani, 2011) have studied the rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data. In the same field of ergodic data, (Gheriballah, Laksaci and Sekkal, 2013) have established the asymptotic property for an alternative estimator of the functional nonparametric regression. More recently, (Ardjoun, Ait Hennani and Laksaci, 2016) treated the almost complete convergence and the asymptotic normality of the estimator of conditional mode, (Benziadi, Laksaci and Tebboune, 2016) studied the almost complete rate convergence of functional recursive kernel of the conditional quantile. In our setting, we study the almost complete convergence (with rate) of the kernel estimator of the conditional hazard function, we consider a recursive estimate when the observations are strictly stationary ergodic data. It should be noted that, The advantage of the recursive estimate is that the smoothing parameter is linked to the observation (X_i, Y_i) , which permits to update our estimator for each additional observation.

The organization of the paper is as follows : Section 2 introduces the estimator of the conditional hazard function and we define some notations. In Section 3, we list some assumptions. Main results are given in Section 4. An application to estimate the point of high risk is given in Section 5. The proofs of our results are provided in Section 6.

4.2 Model and Notations

Let $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ be a sequence of strictly stationary ergodic processes. We also assume X_i take values on a semi-metric space $(\mathcal{F}, d)$ whereas Y_i are real-

valued random variables. In this setting, we adopt the definition introduced by (Laïb and D. Louani, 2010). In addition, for insuring good mathematical properties of the functional nonparametric methods. We establish our asymptotic results on the concentration properties on small balls of the probability measure of the functional variable.

In the sequel, let $C, C_1, C_2, \dots$ denote some positive constants. x will be a fixed point in $\mathcal{F}$, N_x will denote a fixed neighborhood of x and $\mathcal{S}$ will be fixed compact subset of $\mathbb{R}$.

We intend to estimate the conditional hazard function h^x where the regular version F^x of the conditional distribution function of Y given $X = x$ exists for any $x \in N_x$. Moreover we suppose that F^x has a continuous density f^x with respect to (w.r.t) Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$. we define the function hazard h^x , for $y \in \mathbb{R}$ and $F^x(y) < 1$, by

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)},$$

To this aim, we first introduce the recursive double kernels type estimator $\widehat{F}^x$ of F^x defined by

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i))H(b_i^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

where K is the kernel, H is a strictly increasing distribution function and a_i, b_i are a sequences of positive real numbers such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

We define the recursive double kernels estimator $\widehat{f}^x$ of f^x by

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i^{-1}K(a_i^{-1}d(x, X_i))H'(b_i^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

where H' is the derivative of H .

We estimate the hazard function $\widehat{h}^x$ by

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)}. \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

4.3 Assumptions

To establish the almost complete convergence of $\widehat{h}^x$, we need to include the following assumptions :

The functional ergodic data is carried out by the following consideration : for $i = 1, \dots, n$, we put $\mathfrak{F}_k$ is the σ -field generated by $((X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k))$, we pose $\mathfrak{B}_k$ is the σ -field generated by $((X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k), X_{k+1})$ and we suppose that the strictly stationary ergodic process $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfies (H1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) The function } \phi(x, h) := \mathbb{P}(X \in B(x, h)) > 0, \forall h > 0. \\ \text{(ii) For all } i = 1, \dots, n \text{ there exist a deterministic function } \phi_i(x, \cdot) \text{ such that almost surely} \\ 0 < \mathbb{P}(X_i \in B(x, h) | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \phi_i(x, h), \forall h > 0. \\ \text{and } \phi_i(x, h) \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0. \\ \text{(iii) For all sequence } (h_i)_{i=1, \dots, n} > 0, \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, h_i) | \mathcal{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \phi(x, h_i)} \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

where $B(x, h) := \{x' \in \mathcal{F} / d(x', x) < h\}$.

(H2) (i) The conditional distribution function F^x is such that, $\forall y \in \mathcal{S}$, $\exists \beta > 0$, $\inf_{y \in \mathcal{S}} (1 - F^x(y)) > \beta$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$,

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C_1(d(x_1, x_2)^{\beta_1} + |y_1 - y_2|^{\beta_2}), \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0.$$

(ii) The density f^x is such that, $\forall y \in \mathcal{S}$, $\exists \alpha > 0$, $f^x(y) < \alpha$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, $\forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$,

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C_1(d(x_1, x_2)^{\beta_1} + |y_1 - y_2|^{\beta_2}), \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0.$$

(H3) $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$, for $j = 0, 1$.

$$\int |t|^{\beta_2} H^{(1)}(t) dt < \infty, \quad \int H^{(2)}(t) dt < \infty.$$

(H4) K is a function with support $(0, 1)$ such that $0 < C_1 \mathbb{I}_{[0, 1]} < K(t) < C_2 \mathbb{I}_{[0, 1]} < \infty$, where $\mathbb{I}_A$ is the indicator function.

(H5) (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)} = 0$, (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)} = 0$.

(H6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_{n,j}(x) \log n}{n^2} = 0$ where, $\varphi_{n,j}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{-j} \phi_i(x, a_i)}{\phi^2(x, a_i)}$, for

$$j = 0, 1.$$

$$(H7) \quad n^{-\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i^j \phi(x, a_i)} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \gamma > 1.$$

Comments on hypotheses : The condition (H1) involves the ergodic nature of the data and the small ball techniques used in this paper, the hypothesis (H1)(iii) is a direct consequence of Beck's theorem. The assumption (H2) presents the Lipschitz's condition to the conditional distribution function and conditional density function, it means that the both functions are continuous with respect to each variable and permits us to evaluate the bias term without using the differentiability. Hypothesis (H3) impose some regularity conditions upon the kernel H used in our estimates. The condition (H4) is very standard in nonparametric function estimation. The assumptions (H5)-(H7) are a technical conditions.

4.4 Main Results

Theorem 4.1 *under hypotheses (H1)-(H7), we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{h}^x(y) - h^x(y)| =$$

$$O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}}\right) \quad a.co(4.1)$$

Proof

The proof of theorem is based on the following decomposition and lemmas below :

$$\hat{h}^x(y) - h^x(y) = \frac{1}{1 - \hat{F}^x(y)} [\hat{f}^x(y) - f^x(y)] + \frac{h^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)} [\hat{F}^x(y) - F^x(y)] \quad (4.2)$$

Lemma 4.1 *Under hypotheses (H1), (H2)(i) and (H3)-(H7), we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{F}^x(y) - F^x(y)| =$$

$$O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}}\right) \quad a.co(4.3)$$

Lemma 4.2 *Under hypotheses (H1), (H2)(ii) and (H3)-(H7), we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\hat{f}^x(y) - f^x(y)| = O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}}\right) \quad a.co(4.4)$$

Lemma 4.3 *Under hypotheses of Lemma 4.1, we have :*

$$\exists \delta > 0 \text{ such that } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \hat{F}^x(y)| \leq \delta\right\} < \infty. \quad (4.5)$$

We introduce some additional notation

$$\begin{aligned} \hat{F}_N^x(y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K(a_i^{-1}d(x, X_1))H(b_i^{-1}(y - Y_i))}{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_i))]}, \\ \bar{F}_N^x(y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_1))H(b_i^{-1}(y - Y_i))|\mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_i))]}, \\ \hat{f}_N^x(y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{-1}K(a_i^{-1}d(x, X_1))H'(b_i^{-1}(y - Y_i))}{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_i))]}, \\ \bar{f}_N^x(y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[b_i^{-1}K(a_i^{-1}d(x, X_1))H'(b_i^{-1}(y - Y_i))|\mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_i))]}, \\ \hat{F}_D(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K(a_i^{-1}d(x, X_1))}{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_i))]}, \\ \bar{F}_D(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_1))|\mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}[K(a_i^{-1}d(x, X_i))]}, \end{aligned}$$

we can write,

$$\hat{F}^x(y) - F^x(y) = \hat{B}_{n,1}(x, y) + \frac{\hat{R}_{n,1}(x, y)}{\hat{F}_D(x)} + \frac{\hat{Q}_{n,1}(x, y)}{\hat{F}_D(x)} \quad (4.6)$$

where

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{n,1} &= (\hat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y)) - F^x(y)(\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)), \\ \hat{B}_{n,1}(x, y) &= \frac{\bar{F}_N^x(y)}{\bar{F}_D(x)} - F^x(y), \end{aligned}$$

$\widehat{R}_{n,1}(x, y) = -\widehat{B}_{n,1}(x, y)(\widehat{F}_N^x(y) - \overline{F}_N^x(y))$.
and

$$\widehat{f}^x(y) - f^x(y) = \widehat{B}_{n,2}(x, y) + \frac{\widehat{R}_{n,2}(x, y)}{\widehat{F}_D(x)} + \frac{\widehat{Q}_{n,2}(x, y)}{\widehat{F}_D(x)} \quad (4.7)$$

where

$$\widehat{Q}_{n,2} = (\widehat{f}_N^x(y) - \overline{f}_N^x(y)) - f^x(y)(\widehat{F}_D(x) - \overline{F}_D(x)),$$

$$\widehat{B}_{n,2}(x, y) = \frac{\overline{f}_N^x(y)}{\overline{F}_D(x)} - f^x(y),$$

$$\widehat{R}_{n,2}(x, y) = -\widehat{B}_{n,2}(x, y)(\widehat{f}_N^x(y) - \overline{f}_N^x(y)).$$

Thus, we show the previous lemmas 4.1 and 4.2 by the following intermediate results

Lemma 4.4 *Under hypotheses (H1), (H4), (H5)(i) and (H6), we have :*

$$\widehat{F}_D(x) - \overline{F}_D(x) = O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}}\right) \text{ a.co.} \quad (4.8)$$

Corollary 4.1 *Under hypotheses of Lemma 4.4, we have :*

$$\exists C > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D(x) < C) < \infty. \quad (4.9)$$

Lemma 4.5 *Under hypotheses of Lemma 4.1, we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{B}_{n,1}(x, y)| = O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) \text{ a.co.} \quad (4.10)$$

Lemma 4.6 *Under hypotheses of Lemma 4.2, we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{B}_{n,2}(x, y)| = O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) \text{ a.co.} \quad (4.11)$$

Lemma 4.7 *Under hypotheses of Lemma 4.1, we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}_N^x(y) - \overline{F}_N^x(y)| = O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}}\right), \text{ a.co.} \quad (4.12)$$

Lemma 4.8 *Under hypotheses of Lemma 4.2, we have :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{f}_N^x(y) - \overline{f}_N^x(y)| = O\left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}}\right), \text{ a.co.} \quad (4.13)$$

4.5 Application : estimate the point at high risk

In this Section, we try to estimate the point at high risk in $\mathcal{S}$, denoted by $\theta(x)$, defined by

$$h^x(\theta(x)) = \max_{y \in \mathcal{S}} h^x(y). \quad (4.14)$$

This model has a great interest in statistics, this is mainly due to its application in various disciplines. Indeed, this is the tool used in seismic risk analysis. In our context functional, we assume that there is a single point $\theta(x)$ in $\mathcal{S}$ satisfying (4.14). The estimator natural of $\theta(x)$, denoted by $\widehat{\theta}(x)$, is as :

$$\widehat{h}^x(\widehat{\theta}(x)) = \max_{y \in \mathcal{S}} \widehat{h}^x(y). \quad (4.15)$$

In general, this estimator is not unique. thus, throughout the rest of this article $\widehat{\theta}(x)$ mean any random variable satisfying (4.15). We keep the assumptions of the previous section to state precisely the rate of convergence of the estimator $\widehat{\theta}(x)$, and we assume that h^x is 2-times continuously differentiable around y with :

$$h^{x'}(\theta(x)) = 0 \quad \text{and} \quad h^{x''}(\theta(x)) < 0. \quad (4.16)$$

Finally, our main result allows us to conclude this corollary

Corollary 4.2 *Under the conditions of conditions (H1)-(H7), if (4.16) is holds, we have*

$$\widehat{\theta}(x) - \theta(x) = O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1/2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2/2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(\left(\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right), \text{ a.co.}$$

4.6 Appendix

In all our proofs, We define the quantities

$$K_i(x) = K(a_i^{-1}d(x, X_i)), \quad H_i(y) = H(b_i^{-1}(y - Y_i)) \quad \text{and} \quad \Delta_i(x) = K_i - \mathbb{E}[K_i(x) | \mathfrak{F}_{i-1}].$$

Proof of lemma 4.4

The demonstration of this lemma is based on the utilization of the exponential type inequality given by (Laib and Louani, 2011). We have

$$\widehat{F}_D(x) - \overline{F}_D(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i(x)}{\mathbb{E}[K_i(x)]}$$

where Δ_i is a triangular array of martingale differences according the σ -algebra $(\mathfrak{F}_{i-1})_i$.

We use Jenson inequality, (H1)(ii) and (H5)(i) to write

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta_i^2(x)|\mathfrak{F}_{i-1}] &\leq 2(\mathbb{E}[K_i(x)])^{-2}\mathbb{E}[K_i^2(x)|\mathfrak{F}_{i-1}] \\ &< C(\mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)))^{-2}\mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1}) \\ &\leq C \frac{\phi_i(x, a_i)}{\phi^2(x, a_i)}. \end{aligned}$$

Now, we apply the exponential inequality to get for all $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{|\widehat{F}_D(x) - \overline{F}_D(x)| > \varepsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i(x)}{\mathbb{E}[K_i(x)]}\right| > \varepsilon\right\} \\ &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^2}{2(\varphi_{n,0} + C\varepsilon n)}\right\} \\ &\leq 2 \exp\left\{\frac{-\varepsilon^2 n^2}{C\varphi_{n,0}} \left(\frac{1}{1 + \frac{Cn\varepsilon}{\varphi_{n,0}}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

By taking $\varepsilon = \epsilon_0 \frac{\sqrt{\varphi_{n,0} \log n}}{n}$ and using the fact $\frac{1}{\varphi_{n,0}} = o(1)$ to show that

$$\mathbb{P}\left\{|\widehat{F}_D(x) - \overline{F}_D(x)| > \epsilon_0 \frac{\sqrt{\varphi_{n,0} \log n}}{n}\right\} \leq n^{-C\epsilon_0^2}.$$

So, an appropriate choice of ϵ_0 complete the proof of this lemma.

Proof of Corollary 4.1

Observe that, under (H1), we have $0 < C < C' < \infty$

$$0 < \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r)|\mathfrak{F}_{i-1})}{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r))} < \overline{F}_D(x) < |\widehat{F}_D(x) - \overline{F}_D(x)| + \widehat{F}_D(x).$$

Therefore,

$$\frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r) | \mathfrak{F}_{i-1})}{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r))} - |\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)| < \hat{F}_D(x).$$

So,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{F}_D(x) \leq \frac{C}{2}) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r) | \mathfrak{F}_{i-1})}{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r))} - |\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)| < \frac{C}{2}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r) | \mathfrak{F}_{i-1})}{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r))} - |\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)| - C\right| > \frac{C}{2}\right). \end{aligned}$$

It is obvious that the previous Lemma and (H1)(iii) allows to get

$$\sum_n \mathbb{P}\left(\left|\frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r) | \mathfrak{F}_{i-1})}{\mathbb{P}(X_i \in B(x, r))} - |\hat{F}_D(x) - \bar{F}_D(x)| - C\right| > \frac{C}{2}\right) < \infty.$$

Which gives the result.

Proof of lemma 4.5

we obtain successively

$$\begin{aligned} \hat{B}_{n,1}(x, y) &= \frac{\bar{F}_N^x(y) - F^x(y)\bar{F}_D(x)}{\bar{F}_D(x)} \\ &= \frac{1}{n\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} [\mathbb{E}[K_i(x)\mathbb{E}[H_i(y)|\mathfrak{B}_{i-1}]|\mathfrak{F}_{i-1}] - F^x(y)\mathbb{E}[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}]] \\ &= \frac{1}{n\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} [\mathbb{E}[K_i(x)\mathbb{E}[H_i(y)|X_i]|\mathfrak{F}_{i-1}] - F^x(y)\mathbb{E}[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}]] \\ &\leq \frac{1}{n\bar{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} [\mathbb{E}[K_i(x)[\mathbb{E}[H_i(y)|X_i] - F^x(y)]|\mathfrak{F}_{i-1}]] \end{aligned}$$

we have by integration by parts and changing variables

$$\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) = \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) F^{X_i}(y - b_i t) dt.$$

Hence,

$$|\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) - F^x(y)| = \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) |F^{X_i}(y - b_i t) - F^x(y)| dt.$$

Moreover, it follows by (H2)(i) that

$$|\mathbb{E}(H_i(y)|X_i) - F^x(y)| = C \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)(a_i^{\beta_1} + |t|^{\beta_2} b_i^{\beta_2}) dt.$$

This last inequality is uniform on y , then

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{n,1}(x, y) &\leq \frac{C}{n\overline{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}[X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{P}[X_i \in B(x, a_i)]} \left[\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)(a_i^{\beta_1} + |t|^{\beta_2} b_i^{\beta_2}) dt \right] \\ &\leq \frac{C}{n\overline{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)} \left[\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)(a_i^{\beta_1} + |t|^{\beta_2} b_i^{\beta_2}) dt \right]. \end{aligned}$$

Combining Lemma 4.4 with condition (H3) to obtain our result.

Proof of lemma 4.6

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{n,2}(x, y) &= \frac{\overline{f}_N^x(y) - f^x(y)\overline{F}_D(x)}{\overline{F}_D(x)} \\ &= \frac{1}{n\overline{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} [\mathbb{E}[b_i^{-1} K_i(x) \mathbb{E}[H'_i(y)|\mathfrak{B}_{i-1}]]|\mathfrak{F}_{i-1}] - f^x(y) \mathbb{E}[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}] \\ &= \frac{1}{n\overline{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} [\mathbb{E}[b_i^{-1} K_i(x) \mathbb{E}[H'_i(y)|X_i]]|\mathfrak{F}_{i-1}] - f^x(y) \mathbb{E}[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}] \\ &\leq \frac{1}{n\overline{F}_D(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} [\mathbb{E}[b_i^{-1} K_i(x) [\mathbb{E}[H'_i(y)|X_i] - b_i f^x(y)]]|\mathfrak{F}_{i-1}]. \end{aligned}$$

We have

$$\mathbb{E}(H'_i(y)|X_i) = b_i \int_{\mathbb{R}} H'(t) f^{X_i}(y - b_i t) dt.$$

Then

$$|\mathbb{E}(H'_i(y)|X_i) - b_i f^x(y)| = b_i \int_{\mathbb{R}} H'(t) |F^{X_i}(y - b_i t) - f^x(y)| dt.$$

Moreover, it follows by (H2)(ii) that

$$|\mathbb{E}(H'_i(y)|X_i) - b_i f^x(y)| = C b_i \int_{\mathbb{R}} H'(t)(a_i^{\beta_1} + |t|^{\beta_2} b_i^{\beta_2}) dt.$$

With the same steps used in Lemma 4.5, we show our Lemma.

Proof of lemma 4.7

The compactness of $\mathcal{S}$ permits to write $\mathcal{S} \subset \bigcup_{k=1}^{s_n} S_k$ where $S_k = (t_k - l_n, t_k + l_n)$, with $l_n = n^{-\frac{1}{2}\beta_2}$, $s_n = O(n^{\frac{1}{2}\beta_2})$. We put $t_y = \arg \min_{k \in \{1, \dots, s_n\}} |y - t_k|$, we have

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \bar{F}_N^x(y) \right| &\leq \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^x(t_y) \right|}_{T_1} + \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{F}_N^x(t_y) - \bar{F}_N^x(t_y) \right|}_{T_2} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \bar{F}_N^x(t_y) - \bar{F}_N^x(y) \right|}_{T_3}. \end{aligned}$$

• Concerning T_1 :

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^x(t_y) \right| &\leq \sup_{y \in \mathcal{S}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n\mathbb{E}[K_i]} |H_i(y) - H_i(t_y)| K_i \\ &\leq \sup_{y \in \mathcal{S}} |y - t_y| \left(\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{nb_i\mathbb{E}[K_i]} \right) \\ &\leq Cl_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{nb_i\phi(x, a_i)} \right). \end{aligned}$$

By taking $l_n = n^{1-\gamma}$ we obtain that

$$l_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{nb_i\phi(x, a_i)} \right) = o \left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right).$$

So, for n large enough, we can found a $\eta > 0$ such that

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right) = 0. \quad (4.17)$$

• Concerning T_2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(T_2 > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \left| \hat{F}_N^x(t_k) - \bar{F}_N^x(t_k) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right) \\ &\leq s_n \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \hat{F}_N^x(t_k) - \bar{F}_N^x(t_k) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right) \\ &\leq Cl_n^{-1} \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \hat{F}_N^x(t_k) - \bar{F}_N^x(t_k) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right). \end{aligned}$$

We put for $t_y \in S_k$

$$\Gamma_i(x, t_y) = \frac{K_i(x)H_i(t_y) - \mathbb{E}[K_i(x)H_i(t_y)|\mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}K_i(x)},$$

we have $\mathbb{E}[K_i^2(x)|\mathfrak{F}_{i-1}] \leq C\phi_i(x, a_i)$ and $H \leq 1$, then

$$\mathbb{E}[\Gamma_i^2(x, t_y)|\mathfrak{F}_{i-1}] \leq C \frac{\phi_i(x, a_i)}{\phi^2(x, a_i)},$$

we applying the same exponential inequality used in Lemma 4.4 to obtain that

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(t_y) - \overline{F}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right) \leq 2 \exp\{-C\eta^2 \log n\}.$$

Consequently, an appropriate choice of η done

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{F}_N^x(t_y) - \overline{F}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,0}(x) \log n}{n^2}} \right) < \infty. \quad (4.18)$$

• Concerning T_3 : Using analogous arguments as for T_1 , we obtain under the fact that

$$\mathbb{E}[K_i(x)|\mathfrak{F}_{i-1}] < \mathbb{P}(X_i \in B(x, a_i)|\mathfrak{F}_{i-1}) \leq 1.$$

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \overline{F}_N^x(t_y) - \overline{F}_N^x(y) \right| \leq Cl_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{nb_i \phi(x, a_i)} \right). \quad (4.19)$$

The proof of lemma follows from (4.17), (4.18) and (4.19).

Proof of lemma 4.8

This Lemma can be proved along the similar lines that of Lemma 4.7. Indeed

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \overline{f}_N^x(y) \right| &\leq \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(t_y) \right|}_{Q_1} + \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(t_y) - \overline{f}_N^x(t_y) \right|}_{Q_2} + \\ &\quad \underbrace{\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \overline{f}_N^x(t_y) - \overline{f}_N^x(y) \right|}_{Q_3}. \end{aligned}$$

• Concerning Q_1 and Q_3 : by the same proof of T_1 and T_3 , it follows that

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(t_y) \right| \leq Cl_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{nb_i^2 \phi(x, a_i)} \right),$$

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \bar{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(y) \right| \leq Cl_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{nb_i^2 \phi(x, a_i)} \right).$$

By taking $l_n = n^{1-\gamma}$ we obtain that

$$l_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{nb_i^2 \phi(x, a_i)} \right) = o \left(\sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right).$$

So, for n large enough, we can found a $\eta > 0$ such that

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right) = 0. \quad (4.20)$$

• Concerning Q_2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(Q_2 > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \left| \hat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right) \\ &\leq s_n \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \hat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right) \\ &\leq Cl_n^{-1} \max_{k \in \{1, \dots, s_n\}} \mathbb{P} \left(\left| \hat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right). \end{aligned}$$

We put for $t_y \in S_k$

$$\Gamma_i(x, t_y) = \frac{b_i^{-1} K_i(x) H_i'(t_y) - \mathbb{E}[b_i^{-1} K_i(x) H_i'(t_y) | \mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}[K_i(x)]},$$

we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Gamma_i^2(x, t_y) | \mathfrak{F}_{i-1}] &\leq \frac{\mathbb{E}[b_i^{-2} K_i^2(x) H_i'^2(t_y) | \mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}^2[K_i(x)]} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[b_i^{-2} K_i^2(x) \mathbb{E}[H_i'^2(t_y) | \mathfrak{B}_{i-1}] | \mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}^2[K_i(x)]} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[b_i^{-2} K_i^2(x) \mathbb{E}[H_i'^2(t_y) | X_i] | \mathfrak{F}_{i-1}]}{\mathbb{E}^2[K_i(x)]}, \end{aligned}$$

on the other hand,

under (H4) we deduce that $\int_{\mathbb{R}} H'^2(y)dy < +\infty$, then

$$\begin{aligned} \left| b_i^{-1} \mathbb{E}[H_i'^2(t_y)|X_i] - f^{X_i}(t_y) \int_{\mathbb{R}} H'^2(y)dy \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} b_i^{-1} H'^2(b_i^{-1}u) (f^{X_i}(t_y - u) - f^{X_i}(t_y)) du \right| \\ &\leq C_1 \sup_{|u| \leq C} |f^{X_i}(t_y - u) - f^{X_i}(t_y)| + \sup_{|u| > C} H'^2(b_i^{-1}y) + \\ &\quad f^{X_i}(t_y) \int_{|u| > C} H'^2(b_i^{-1}y)dy. \end{aligned}$$

The continuity of f^{X_i} and the condition (H4), permit to get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_i^{-1} \mathbb{E}[H_i'^2(t_y)|X_i] = f^{X_i}(t_y) \int_{\mathbb{R}} H'^2(y)dy.$$

Thus, we obtain that

$$\mathbb{E}[\Gamma_i^2(x, t_y)|\mathfrak{F}_{i-1}] \leq \frac{C b_i^{-1} \phi_i(x, a_i)}{\phi^2(x, a_i)},$$

we are in the position to apply once again the exponential inequality used in Lemma 4.4, this inequality gives directly

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right) \leq 2 \exp\{-C\eta^2 \log n\}.$$

Consequently, an appropriate choice of η done

$$\mathbb{P} \left(\sup_{y \in \mathcal{S}} \left| \hat{f}_N^x(t_y) - \bar{f}_N^x(t_y) \right| > \eta \sqrt{\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}} \right) < \infty. \quad (4.21)$$

The combination of (4.20) and (4.21) allows us to finish the proof of this lemma. The Lemma 4.4, Corollary 4.1, Lemma 4.5 and Lemma 4.7 are enough to prove Lemma 4.1. The Lemma 4.4, Corollary 4.1, Lemma 4.6 and Lemma 4.8 are enough to prove Lemma 4.2.

Proof of lemma 4.3

We have directly from Lemma 4.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\hat{F}^x(y) - F^x(y)| > \varepsilon\} < \infty.$$

On the other hand, under the condition $\inf_{y \in \mathcal{S}} (1 - F^x(y)) > \beta$, we choose $\delta = \frac{\beta}{2}$, to show

$$\mathbb{P}\{\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \hat{F}^x(y)| \leq \delta\} < \infty.$$

This yields the proof.

Proof of Corollary 4.2

Taylor expansion of the function h^x leads to the existence of some θ^* between $\widehat{\theta}(x)$ and $\theta(x)$ such that :

$$h^x(\widehat{\theta}(x)) = h^x(\theta(x)) + (\widehat{\theta}(x) - \theta(x))^2 \frac{h^{x''}(\theta^*)}{2!},$$

because of (4.16), θ^* it is necessarily in the compact $\mathcal{S}$. So

$$|\widehat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 \leq \frac{2!}{\min_{y \in \mathcal{S}} h^{x''}(y)} |h^x(\widehat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))|$$

and using analytical arguments we show that

$$|h^x(\widehat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))| \leq 2 \sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)|.$$

Hence

$$|\widehat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 \leq \frac{C}{\min_{y \in \mathcal{S}} h^{x''}(y)} \sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)|.$$

By Theorem 4.1, we show that

$$|\widehat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 = O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\beta_1} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^{\beta_2} \phi_i(x, a_i)}{\phi(x, a_i)}\right) + O\left(\left(\frac{\varphi_{n,1}(x) \log n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

The proof of corollary is finished.

Acknowledgment

The authors wish to thank the anonymous reviewers and the Editor, Associate Editor for insightful comments and suggestions that greatly helped to improve this paper.

References

Ardjoun, F.Z., Ait Hennani, L. and Laksaci, A. 2016. A recursive kernel estimate of the functional modal regression under ergodic dependence condition, *Journal of Statistical Theory and Practice* **10** : 475-496.

Benziadi, F., Laksaci, A. and Tebboune, F. 2016. *Note on conditional quantiles for functional ergodic data*, *C. R. Acad.Sci.Paris,Ser.I* **354** : 628-633.

Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. 2008. *Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle*, *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées* **53** : 1-18.

Ferraty, F. and Vieu, P. 2006. *Nonparametric Functional Data Analysis*, *Springer Series in Statistics*, Vol. 1, Springer Science+Business Media, Inc., 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA 260.

Gheriballah, A., Laksaci, A. and Sekkal, S. 2013. *Nonparametric M-regression for functional ergodic data*, *Statist. Probab. Lett.* **83** : 902-908.

Laib, N. and D. Louani, D. 2010. *Nonparametric Kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprties*, *J. Multivariate Anal.* **101** : 2266-2281.

Laib, N. and Louani, D. 2011. *Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data*, *J. Statist. Plann. Inference* **141** : 359-372.

Massim, I. and Mechab, B. 2016. *Local linear estimation of the conditional hazard function*, *International Journal of Statistics & Economics* **17** : 1-11.

Quintela-del-Río, A. 2008. *Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions*, *Journal of Nonparametric Statistics* **20** : 413-430.

Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. 2002. *Applied functional data analysis : Methods and case studies*, *Springer series in statistics*, Vol. 1, Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA.

Roussas, G. 1989. *Hazard rate estimation under dependence conditions*, *Journal of Statistical Planning and Inference* **22** : 81-93.

Watson, G. S. and Leadbetter, M. R. 1964. *Hazard analysis*, *Sankhyia* **26** : 101-116.

Chapitre 5

Simulation

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents à des données simulées. Plus précisément, l'objectif principal est de montrer la performance de notre estimateur et qu'il admet de bonnes propriétés par rapport à la méthode du noyau classique. Ce chapitre est présenté en deux sections, la première section est consacrée à la description des données traitées. Tandis que, les résultats numériques sont donnés et commentés dans la deuxième section.

5.1 Données

Dans cette section, une simulation simple est présentée pour illustrer la performance de notre estimateur sur des échantillons finis, on considère le modèle suivant :

$$Y_i = r(X_i) + \varepsilon_i, \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

où la variable aléatoire ε_i suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$r(x) = 4 \exp \left(\frac{1}{1 + x^2(t)dt} \right).$$

$$X_i(t) = a_i \sin(4(b_i - t)) + b_i \quad \forall t \in [0, 1] \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

où b_i sont générées selon la loi $N(0, 3)$ et les variables a_i sont générées selon la loi $N(-3, 0.5)$.

En ce qui concerne les régresseurs fonctionnels, nous précisons que nous avons utilisé un processus autorégressif fonctionnel avec bruit de Wiener. Ce dernier est généré par la routine `R simul.far.wiener` du paquet `far` en `R`. Cette routine utilise l'extension du bruit de Karhunen-Loève. L'opérateur linéaire p est exprimé dans

la base de Karhunen-Loève, en utilisant une matrice diagonale dp et un coefficient de perturbation $c = 0,05$. Nous notons que ce processus satisfait à la condition d'ergodicité (voir Laib et Louani (2011) pour plus de détails). Les courbes X_i sont discrétisées dans la même grille composée de 100 points et sont tracées à la figure 1.

Il est clair que la distribution conditionnelle de Y sachant $X = x$ est explicitement donnée par la distribution de $r(x)$. L'efficacité des prédicteurs est évaluée par l'erreur quadratique moyenne empirique :

$$MSE(\hat{h}_{RKM}^X(y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(h^{X_i}(Y_i) - \hat{h}_{RKM}^{X_i}(Y_i) \right)^2$$

et

$$MSE(\hat{h}_{KM}^X(y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(h^{X_i}(Y_i) - \hat{h}_{KM}^{X_i}(Y_i) \right)^2.$$

où

$$\hat{h}_{RKM}^x(y) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} b_i^{-1} K(a_i^{-1}(x - X_j)) H'(b_i^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{1 \leq i \leq n} K(a_i^{-1}(x - X_j)) - \sum_{1 \leq i \leq n} K(a_i^{-1}(x - X_j)) H(b_i^{-1}(y - Y_j))}. \quad (5.1)$$

pour $n \geq 1, y \in \mathbb{R}$

$$\hat{h}_{KM}^x(y) = \frac{h_H^{-1} \sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}(x - X_j)) H'(h_H^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}(x - X_j)) - \sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}(x - X_j)) H(h_H^{-1}(y - Y_j))}. \quad (5.2)$$

Les courbes sont discrétisées sur la même grille qui est composée de 100 valeurs équidistantes.

L'objectif principal de cet exemple de simulation est de montrer que l'approche récursive est facilement implémentée par un algorithme rapide sur des échantillons finis, en particulier pour l'analyse de prédiction.

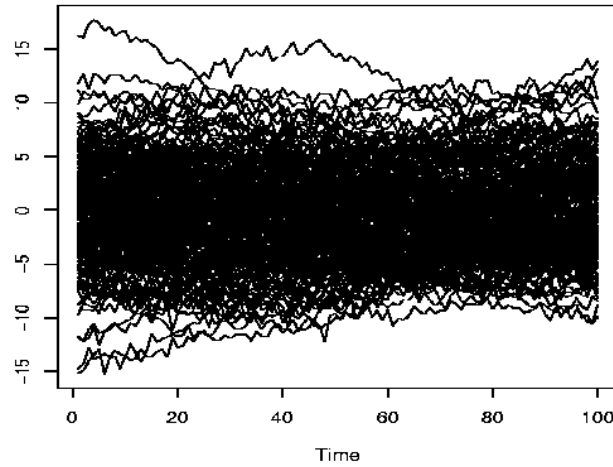


Fig.1. Les courbes X_i

5.2 Résultats

L'objectif de cette illustration est de montrer l'utilité de la fonction de hasard conditionnelle dans un contexte de prévision.

On fait varier le n et on compare les MSE. Les résultats sont données dans le tableau suivant :

n	$MSE(KM)$	$MSE(RKM)$
50	0.36	0.32
100	0.31	0.29
200	0.28	0.24
500	0.20	0.18

On voit clairement que l'erreur quadratique présentée par un estimateur récursif est bien améliorée que l'estimateur classique même en temps d'exécution.

Conclusion et Perspectives

1. Conclusion

Cette contribution porte sur l'estimation non paramétrique réursive de la fonction de hasard conditionnelle dans la présence d'une variable explicative fonctionnelle, dont nous avons considéré une comparaison entre les différents estimateurs de la fonction de hasard conditionnelle un estimateur réursive vs un estimateur non réursive avec des données dans plusieurs situations (données i.i.d., ergodiques et mélangeantes). Comme résultats asymptotiques nous avons établi la convergence presque complète. Il est clair que nos résultats théoriques obtenus couvrent tous les différents types de convergence stochastique comme il s'agit d'une convergence presque complète qui est la plus forte des convergences. De plus, notre estimateur possède de bonnes propriétés asymptotiques dans tous les cas de notre étude. Ainsi, l'aspect non paramétrique est bien exploité dans ce travail par les hypothèses précédentes. Concernant les hypothèses, on peut les diviser en trois catégories, des hypothèses structurales, des hypothèses sur la variable explicative et des hypothèses techniques. Nos vitesses de convergence sont en deux parties : partie biais et partie dispersion. On trouvera les conditions sur la dimensionnalité du modèle dans la partie biais. Tandis que, la dimensionnalité de la variable explicative est juste dans la partie dispersion.

2. Perspectives

Les méthodes d'estimation non paramétrique ont été proposés comme alternative à la méthode de prévision. Cependant, les résultats théoriques de l'estimation (à noyau classique et/ou noyau réursif) sont montrés et utilisés dans le domaine de statistique, mais reste encore beaucoup d'étude à faire, nous proposons quelques questions ouvertes qui restent à développer dans le future.

— *Tout d'abord, nous procédons actuellement à la finalisation d'un travail de*

recherche sur la convergence de l'estimateur récursif de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire.

- *Tous les résultats obtenus dans cette thèse reposent sur l'hypothèse que les observations sont α -mélangeantes ou ergodiques. Il pourrait être possible de considérer d'autre type de dépendance tel que le quasi-associé.*
- *Le travail sur les données incomplètes pour un estimateur récursif fonctionnel n'est pas encore abordé, ce qui nous permettra d'adapter nos résultats pour le cas de censure.*
- *L'importance du choix de la semi métrique et le paramètre de lissage pour améliorer les vitesses de convergence et optimiser les intervalles de confiance respectivement, nous poussera à généraliser les résultats existants en utilisant d'autres familles de semi métriques et l'étude du choix de la fenêtre de lissage.*
- *Il sera important de traiter la normalité asymptotique de notre estimateur pour motiver la partie pratique (simulation) en considérant des intervalles de confiance.*

Bibliographie Générale

- [1] *S.E. Ahmed, Penalty, shrinkage and pretest strategies. Variable Selection and Estimation, in : Springer Briefs in Statistics, Springer, Cham, 2014.*
- [2] *A. Amiri, C. Crambes, B. Thiam, Recursive estimation of nonparametric regression with functional covariate. Comput. Statist. Data Anal. 69 (2014), 154-172.*
- [3] *F. Z. Ardjoun, L. Ait Hennani, A. Laksaci, A recursive kernel estimate of the functional modal regression under ergodic dependence condition, Journal of Statistical Theory and Practice. 10 (2016) 475-496.*
- [4] *M. K. Attouch, F. Z. Belabed, The k Nearest Neighbors estimation of the conditional hazard function for functional data, REVSTAT Statistical Journal. 12 (2014) 273-297.*
- [5] *F. Benziadi, A. Laksaci, F. Tebboune, Note on conditional quantiles for functional ergodic data, C. R. Acad.Sci.Paris,Ser.I 354 (2016) 628-633.*
- [6] *F. Benziadi, A. Gheriballah, A. Laksaci, Asymptotic normality of kernel estimator of ψ -regression function for functional ergodic data, New Trends in Mathematical Sciences. 4 (2016) 268-282.*
- [7] *E. Bongiorno, A. Goia, E. Salinelli, P. Vieu, Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics, Esculapio, Bologna, 2014.*
- [8] *D. Bosq, Linear Processes in Functional Spaces, Springer-Verlag, New-York, 2000.*
- [9] *D. Bosq, Inférence et prévision en grandes dimensions, in : Collection Economie et Statistiques Avancées. Economica, Paris, 2005.*

[10] D. Bosq, D. Blanke, *Inference and Prediction in Large Dimensions*, in : *Wiley Series in Probability and Statistics*, John Wiley & Sons, 2007.

[11] C. Bouveyron, *Statistique en grande dimension : problématiques et enjeux*, *J. SFdS* 155 (2) (2014) 36-37.

[12] C. Bouveyron, C. Brunet-Saumard, *Model-based clustering of high-dimensional data : A review*, *Comput. Statist. Data Anal.* 71 (2014) 52-78.

[13] P. Bühlmann, S. van de Geer, *Statistics for High-dimensional Data. Methods, Theory and Applications*, in : *Springer Series in Statistics*, Springer, Heidelberg, 2011.

[14] A. Cuevas, *A partial overview of the theory of statistics with functional data*, *J. Statist. Plann. Inference* 147 (2014) 1-23.

[15] S. Dabo-Niang, A. Laksaci, *Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344 (2007) 49-52.

[16] P. Debashis, A. Aue, *Random matrix theory in statistics : A review*, *J. Statist. Plann. Inference* 150 (2014) 1-29.

[17] G. Estévez-Pérez, *On convergence rates for quadratic errors in kernel hazard estimation*, *Statist. Probab. Lett.* 57 (2002) 231-241.

[18] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Río, P. Vieu, *Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples*, *J. Statist. Plann. Inference*. 104 (2002) 1-30.

[19] M. Ezzahrioui, E. Ould-Saïd, *Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional mode for functional data*, *LMPA No 249*, Univ. du Littoral. 2005.

[20] F. Ferraty, A. Goia, E. Salinelli, P. Vieu, *Functional projection pursuit regression*, *Test* 22 (2013) 293-320.

[21] F. Ferraty, P. Hall, P. Vieu, *Most-predictive design points for functional data predictors*, *Biometrika* 97 (2010) 807-824.

[22] F. Ferraty, A. Laksaci, A. Tadj, P. Vieu, *Rate of uniform consistency for*

nonparametric estimates with functional variables, J. Statist. Plann. Inference 140 (2) (2010) 335-352.

[23] F. Ferraty, A. Laksaci, P. Vieu, *Functional times series prediction via conditional mode estimation, C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340 (2005) 389-392.

[24] F. Ferraty, A. Laksaci, P. Vieu, *Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, Statist. Inf. for Stoch. Proc.* 9 (2006) 47-76.

[25] F. Ferraty, A. Rabhi, P. Vieu, *Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic El Nino Phenomenon, Sankhya* 67 (2) (2005) 378-398.

[26] F. Ferraty, Y. Romain, *The Oxford handbook of functional data analysis, Oxford University Press*. 2011.

[27] F. Ferraty, P. Vieu, *Modèle de régression pour variables aléatoires uni, multi et ∞ -dimensionnées. Cours de DEA*. 2004.

[28] F. Ferraty, P. Vieu, *The functional nonparametric model and application to spectrometric data, Comput. Statist. and Data Anal.* 17 (2002) 545-564.

[29] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric Functional Data Analysis, in : Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2006*.

[30] F. Ferraty, P. Vieu, *Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés, C. R. Acad. Sci., Paris*, 330 (2000) 139-142.

[31] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination, J. Nonparametric Statist.* 16 (2004) 111-127.

[32] A. Gheriballah, A. Laksaci, S. Sekkal, *Nonparametric M-regression for functional ergodic data, Statist. Probab. Lett.* 83 (2013) 902-908.

[23] W. Gonzalez-Manteiga, P. Vieu, *Methodological richness of functional data analysis, in : Statistical Learning and Data Science, in : Series : Chapman & Hall/CRC Computer Science & Data Analysis, 2011*.

[33] L. Horváth, P. Kokoszka, *Inference for Functional Data with Applications*, in : Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2012.

[34] L. Horváth, G. Rice, *An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves*, Rev. Mat. Complut. 28 (3) (2015) 505-548.

[35] T. Hsing, R. Eubank, *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators*, in : Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester, 2015.

[36] N. Laïb, D. Louani, *Nonparametric Kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic proprieties*, J. Multivariate Anal. 101 (2010), 2266-2281.

[37] N. Laïb, D. Louani, *Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data*, J. Statist. Plann. Inference. 141 (2011), 359-372.

[38] A. Laksaci, *Erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle à variable explicative fonctionnelle*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 345 (2007) 149-154.

[39] A. Laksaci, B. Mechab, *Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 55 (2010) 35-51.

[40] A. Laksaci, B. Mechab, *Conditional hazard estimate for functional random fields*, Journal of Statistical Theory and Practice. 8 (2014) 192-200.

[41] J. P. Lecoutre, E. Ould-Said, *Estimation de la fonction de hasard pour un processus fortement mélangeant avec censure*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 37 (1993) 59-69.

[42] I. Massim, B. Mechab, *Local linear estimation of the conditional hazard function*, International Journal of Statistics & Economics. 17 (2016) 1-11.

[43] E. Masry, *Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processus*, IEEE. Trans. Inform. Theory. 32 (1986) 254-267.

- [44] E. Masry, *Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality*, *Stoch. Proc. and their Appl.* 115 (2005) 155-177.
- [45] H. G. Müller, *Functional modelling and classification of longitudinal data*, *Scand. J. Stat.* 3 (2005) 223-240.
- [46] A. Quintela-del-Río, *Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions*, *J. Nonparametr. Stat.* 20 (2008) 413-430.
- [47] J. Ramsay, B. Silverman, *Functional data analysis*. Springer. 1997.
- [48] J. Ramsay, B. Silverman, *Applied Functional Data Analysis. Methods and Case Studies*, in : *Springer Series in Statistics*, Springer, New York, 2002.
- [49] J. Ramsay, B. Silverman, *Springer Series in Statistics*, Springer, New York, 2005.
- [50] E. Rio, *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendant*, *Mathématiques & Applications*, 31, Springer Verlag. 2000.
- [51] G. Roussas, *Hazard rate estimation under dependence conditions*, *J. Statist. Plann. Inference.* 22 (1989) 81-93.
- [52] G. Roussas, *Asymptotic normality of the kernel estimate under dependence conditions : application to hazard rate*, *J. Statist. Plann. Inference.* 25 (1990) 81-104.
- [53] P. Vieu, *Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence*, *Journal of Multivariate Analysis.* 39 (1991) 324-347.
- [54] G. S. Watson, *Smooth regression analysis*, *Sankhya.* 26 (1964a) 359-372.
- [55] G. S. Watson, M. R. Leadbetter, *Hazard analysis. I. Biometrika.* 51 (1964b) 175-184.
- [56] E. Youndjé, *Estimation non-paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau*, Thèse 3eme cycle, Université de Rouen. 1993.
- [57] E. Youndjé, P. Sarda, P. Vieu, *Optimal smooth hazard estimates*, *Test.* 5

(1996) 379-394.

[58] J. Zhang, *Analysis of Variance for Functional Data*, in : Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, 2013.

ملخص

في هذه الرسالة ، نحن مهتمون بشكل رئيسي في دراسة مقارنة بين طرق التقدير اللامعلمي لوظيفة الصدفة الشرطية بواسطة طريقة متغير توضيحي وظيفي مشروط لمتغير الاستجابة حقيقي.

في البداية ، ندرس التقارب شبه الكامل لمقدار الدالة الشرطية الشرطية في كلتا الحالتين: حالة بيانات مستقلة موزعة بشكل متماثل وحالة الخلط . سيتم النظر في نوع آخر من الاعتماد حالة الخلط الضعيف لدراستنا وننشئ في ظل هذه الحالة الخصائص التقريبية لمقدرنا الموضوع على وظيفة الصدفة الشرطية.

بعد ذلك ، مع الأخذ في الاعتبار ميزة التقديرات المتكررة في الممارسة ، فإننا مهتمون بالمقدّر التراجعي لوظيفتنا وتعميم النتائج التي تم الحصول عليها سابقاً نبرهن التقارب شبه الكامل. أخيراً ، للتحقق من صحة نتائجنا ، سيتم إعطاء دراسة على بيانات المحاكاة ، يتم أيضاً النظر في تطبيق لتقدير نقطة الخطر العالية.

Résumé

Dans cette thèse, nous intéressons essentiellement à une étude comparative entre les méthodes d'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode du noyau pour une variable explicative fonctionnelle conditionnée à une variable réponse réelle.

Dans un premiers temps, Nous étudions la convergence presque complète de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle dans les deux cas : cas des données indépendantes identiquement distribuées i.i.d. et le cas de mélange fort. D'autre type de dépendance faible sera considéré pour notre étude et nous établissons sous la condition d'ergodicité les propriétés asymptotique de notre estimateur construit de fonction de hasard conditionnelle.

Dans un second temps, vu l'avantage de l'estimation récursive en pratique, nous intéressons à un estimateur récursive pour notre fonction et nous généralisons les résultats obtenus précédemment. Nous établissons la convergence presque complète sous des conditions générales. Ainsi, une application à l'estimation du point à haut risque est également considérée. Finalement, pour valider notre résultat, une étude sur des données simulées sera donnée.

Abstract

In this thesis, we are mainly interested in a comparative study between non-parametric methods of estimation of the conditional hazard function by the kernel method for a functional explanatory variable conditioned to a real response variable.

First, we study the almost complete convergence of the estimator of the conditional hazard function in both cases: the case of identically distributed independent data i.i.d. and the case of strong mixing. Other types of low dependency will be considered for our study and we under the condition of ergodicity, we establish the asymptotic properties of our estimator constructed as a conditional hazard function.

Secondly, because of the advantage of recursive estimation in practice, we are interested in a recursive estimator for our function and we generalize the results obtained previously. We establish the almost complete convergence under general conditions. Thus, an application to the estimation of the point at high-risk is also considered. Finally, in order to validate our results, a study on simulated data will be given.