

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABESSIDI BEL ABBES



FACULTE DES TECHNOLOGIES  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL  
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



**THESE**

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & matériaux**

Soutenu par

**MENASRIA Abderrahmane**

Sujet de thèse :

---

---

**Etude de l'effet de la Microstructure Sur le  
Flambement Thermique des Plaques  
Fonctionnellement Graduées**

---

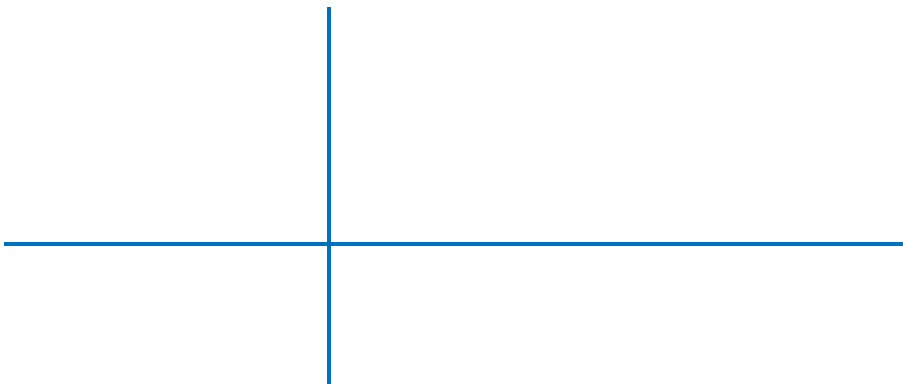
---

Soutenu le : -- / -- / 2018, devant le Jury composé de :

M. BENYOUCEF Samir	Professeur UDL SBA	Président
M. TOUNSI Abdelouahed	Professeur UDL SBA	Directeur de la thèse
M. BOURADA Mohamed	MCA UDL SBA	Examinateur
M. HOUARI Mohammed Sid Ahmed	MCA U. MASCARA	Examinateur
M. KACI Abdelhakim	MCA U. SAIDA	Examinateur
Mme. BESSAIM Aicha	MCA U. MASCARA	Examinateur

Année universitaire : 2018-2019



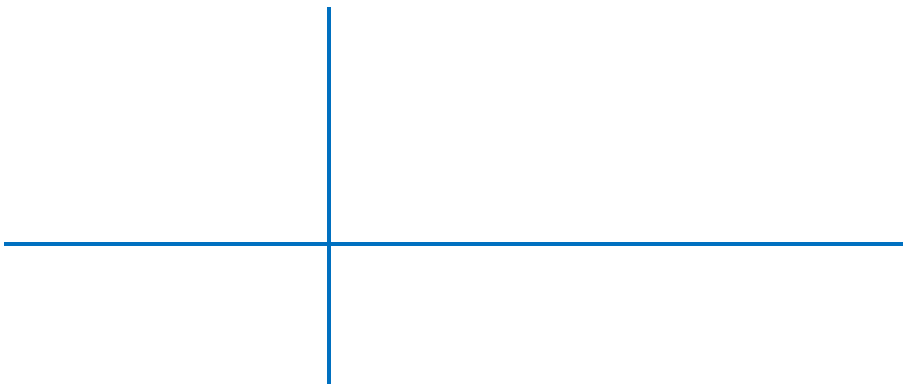


DEDICACES

## Dédicaces

*À tous ceux qui me sont chers*

---



REMERCIEMENTS

## Remerciement

Mes remerciements vont tout d'abord à **Allah** tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance, qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Le présent travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbès, sous la direction de Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès.

En premier lieu, je remercie chaleureusement mon encadreur qui a été attentif à l'évolution de ma recherche et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

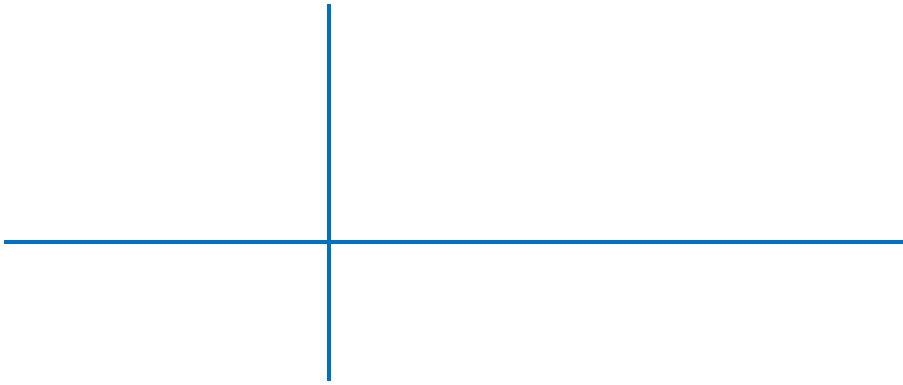
J'adresse mes sincères et profondes reconnaissances pleines d'affection à mon ami Dr. **BOUHADRA Abdelhakim**, Maître de conférences classe B à l'université de Khenchela pour sa participation et sa collaboration à résoudre tous les problèmes techniques et morales, que j'ai rencontrés au cours de la réalisation de ce travail du début jusqu'à la fin.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur, **BENYOUCEF Samir**, Professeur à l'Université DJELALI Liabes de Sidi Bel Abbès, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à : Monsieur **BOURADA Mohamed**, Maître de conférences classe A à l'Université DJELALI Liabes de Sidi Bel Abbès, Monsieur **HOUARI Mohammed Sid Ahmed**, Maître de conférences classe A à l'Université de Mascara, Monsieur **KACI Abdelhakim**, Maître de conférences classe A à l'Université de Saida, Madame **BESSAIM Aicha**, Maître de conférences classe A à l'Université de Mascara, de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur **Adda Bedia El Abass**, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès, Je le remercie pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce travail.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du laboratoire **LM&H** et aux personnels du département de Génie Civil de l'Université de Abbes LAGHROUR à Khenchela, et également aux membres de ma famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse.



# TABLE DES MATIERES

# Table des Matières

Table des Matières .....	I
Liste des Figures .....	V
Liste des Tableaux .....	VIII
Liste des Notations .....	IX
Résumé .....	XII
Abstract .....	XIII
ملخص .....	XIV
<b>Introduction Générale</b> .....	<b>1</b>
 <b>Chapitre I : Généralités sur les composites &amp; les structures sandwiches</b>	
I.1- Introduction .....	4
I.2- Matériaux composites .....	4
I.2.2- Caractéristiques générales .....	4
I.2.3- Les grandes familles de composites .....	6
I.2.4- Les constituants des matériaux composites .....	6
I.2.4.1- Les renforts .....	6
I.2.4.2- La matrice .....	8
I.2.4.2.1- Résines thermodurcissables .....	9
I.2.4.2.2- Résines thermoplastiques .....	9
I.2.4.2.3- Les matrices naturelles .....	10
I.2.4.2.4- Résines époxydes .....	10
I.2.4.2.5- Phénoplastes ou phénols-formols .....	10
I.2.4.2.6- Les résines thermostables .....	10
I.2.4.3- Les charges et additifs .....	10
I.2.4.4- Les gelcoats .....	11
I.2.4.5- Les âmes .....	12
I.2.4.6- Interface .....	12

I.2.5- La structure des pièces composites .....	13
I.2.5.1- Les structures monolithiques .....	13
I.2.5.2- Les stratifiés .....	13
I.2.5.3- Les sandwichs .....	14
I.2.5.4- Autres architectures (structures 3D) .....	15
I.2.5.5- Conséquences sur l'étude du comportement mécanique des matériaux composites .....	15
I.3- Les structures sandwichs .....	17
I.3.1- Définition .....	17
I.3.2- Les éléments constituant les matériaux sandwichs .....	18
I.3.2.1- Les peaux .....	18
I.3.2.2- L'âme .....	18
I.3.2.3 L'interface .....	19
I.3.3- Intérêt des structures sandwichs .....	19
I.3.4- Modes de dégradations des sandwichs .....	20
I.3.4.1- Flambement généralisé des peaux .....	20
I.3.4.2- Rupture des peaux en traction ou en compression .....	20
I.3.4.3- Modes locaux de rupture .....	21
I.3.4.4- Rupture de l'âme par cisaillement .....	21
I.3.4.5- Flambement généralisé de l'âme ou « crimping » .....	21
I.3.4.6- Flambement localisé, « wrinkling » .....	22
I.3.4.7- Dégradation de l'adhésif .....	22
I.4- Conclusion .....	23

## **Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM »**

II.1- Introduction .....	24
II.2- Histoire et concept des matériaux FGM .....	24
II.3- Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels .....	28
II.4- Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation) .....	30
II.5- Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés .....	30

II.5.1- Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....	31
II.5.2- Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	31
II.5.3- Compaction sèche des Poudre .....	32
II.5.4- Projection plasma .....	32
II.5.5- Frittage et Infiltration .....	32
II.6- Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	32
II.6.1- Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	33
II.6.2- Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	34
II.6.3- Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM .....	35
II.7. Conclusion .....	36

### **Chapitre III : Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM**

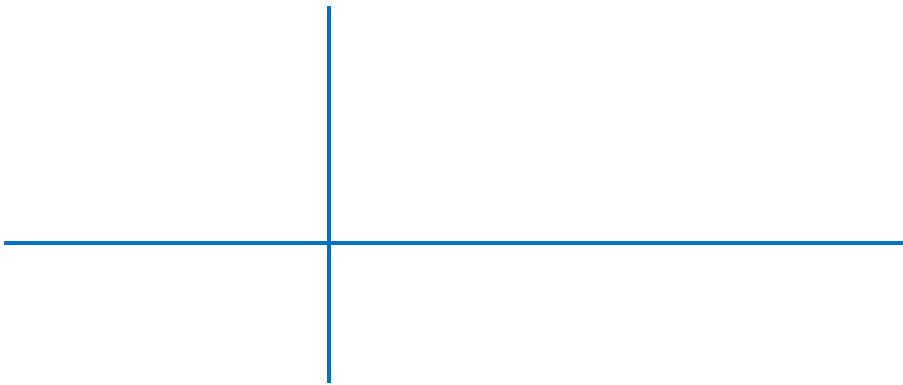
III.1- Introduction .....	37
III.2- Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles .....	37
III.2.1- Approche monocouche équivalente .....	37
III.2.1.1- La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) ....	37
III.2.1.2- La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)...	38
III.2.1.3- La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	40
III.2.2- Approche par couche .....	42
III.2.2.1. Les modèles zig-zag .....	43
III.2.2.2- Les modèles en couches discrètes .....	45
III.3- Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés .....	46
III.4- Modèles éléments finis des structures composites .....	47
III.4.1- Modèles éléments finis 2D .....	48
III.4.2- Modèles éléments finis 3D .....	49
III.5- Etudes sur les contraintes résiduelles .....	51
III.6- Etudes sur les problèmes du flambement et flexion des plaques FGM .....	52
III.7- Conclusion .....	55

**Chapitre IV : Résultats et discussions de l'analyse du comportement des plaques sandwiches en FGM**

IV.1- Introduction .....	56
IV.2- Formulation du problème .....	56
IV.2.1- Cinématique et déformations... ..	58
IV.2.2- Équations de stabilité .....	60
IV.3- Solution analytique .....	62
IV.3.1- Variation uniforme de la température .....	64
IV.3.2- Distribution linéaire de la température à travers l'épaisseur .....	64
IV.3.3- Distribution de température non linéaire à travers l'épaisseur .....	64
IV.4- Conclusions .....	65

**Chapitre V : Résultats et discussions de l'analyse du comportement des plaques sandwiches en FGM**

V.1- Introduction .....	66
V.2- Résultats et discussion .....	66
V.2.1- Etude comparative .....	67
V.2.2- Etude paramétrique .....	73
V.3- Conclusion .....	78
<b>Conclusion Générale</b> .....	79
<b>Références</b> .....	81



## LISTE DES FIGURES

## Liste des Figures

### Chapitre I : Généralités sur les composites & les structures sandwiches

Figure I.1 : Matériau composite .....	4
Figure I.2 : Les structures géométriques des composites .....	7
Figure I.3 : Différentes familles du renfort .....	7
Figure I.4 : Exemples des fibres du renfort .....	8
Figure I.5 : Différentes familles de matrice .....	9
Figure I.6 : Exemples des âmes .....	12
Figure I.7 : Matériau composite monolithique .....	13
Figure I.8 : Constitution d'un stratifié .....	14
Figure I.9 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés .....	14
Figure I.10 : Renforts 3D et renfort Parabeam® avant et après imprégnation .....	15
Figure I.11 : Schéma d'étude du comportement mécanique d'une structure en matériau composite .....	16
Figure I.12 : Schéma représentatif d'une structure sandwich .....	17
Figure I.13. Panneau sandwich comparée à une poutre sous forme I .....	18
Figure I.14 : Différentes natures d'âmes .....	19
Figure I.15 : Flambement généralisé des peaux du sandwich .....	20
Figure I.16 : Rupture des peaux en traction ou en compression .....	20
Figure I.17 : Modes locaux de rupture par indentation .....	21
Figure I.18 : Rupture de l'âme par cisaillement .....	21
Figure I.19 : Flambement généralisé de l'âme du sandwich .....	21
Figure I.20 : Flambement localisé « wrinkling » .....	22
Figure I.21 : Type de dégradation de l'adhésif .....	22

### Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM »

Figure II.1 : Microstructure de FGM céramique-métal .....	25
Figure II.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale .....	26

Figure II.3 : Concept des matériaux à gradient de propriétés .....	27
Figure II.4 : Protection thermique .....	27
Figure II.5 : Les principaux domaines d'application des FGM .....	28
Figure II.6 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels .....	29
Figure II.7 : La distribution composante des matériaux .....	29
Figure II.8 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel	30
Figure II.9 : Principe de la méthode coulage en bande .....	31
Figure II.10 : Géométrie d'une plaque en FGM .....	33
Figure II.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM .....	34
Figure II.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM .....	35

### Chapitre III : Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM

Figure III.1 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques .....	38
Figure III.2 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre .....	39
Figure III.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur .....	39
Figure III.4 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques .....	40
Figure III.5 : Variation de la Fonction de Forme $\Psi(z)$ des Différents Modèles en Fonction de l'Épaisseur .....	41
Figure III.6 : Variation de la Dérivée de la Fonction de Forme $\Psi'(z)$ des Différents Modèles Suivant l'épaisseur .....	42
Figure III.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique .....	43
Figure III.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique ....	43
Figure III.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre .....	43
Figure III.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur .....	44
Figure III-11 : Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenue par le modèle développé par Yin et al [Yin et al, 2004] et le modèle de Mori-Tanaka .....	47
Figure III.12 : Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds .....	49

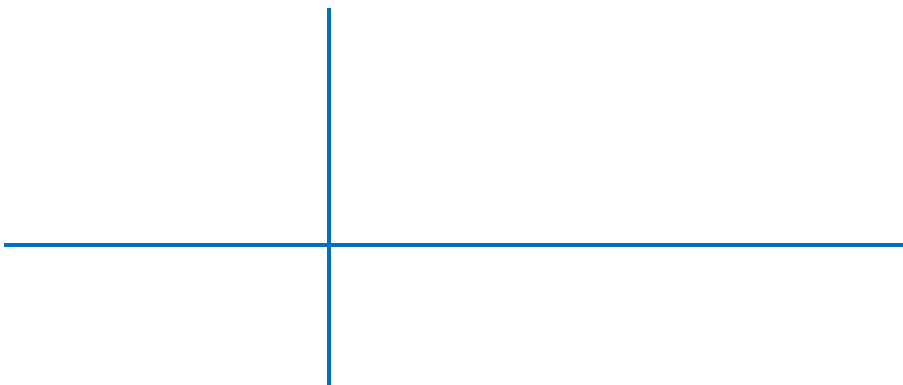
Figure III.13 : Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds .....	49
Figure III.14 : Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds .....	49
Figure III.15 : Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant Z	49
Figure III.16 : Elément brique à 20 nœuds .....	50
Figure III.17 : Elément singulier à 15 nœuds .....	50
Figure III.18 : Etudes du problème de bord libre par EF 3D .....	50
Figure.III.19 : Elément brique mixte à 18 nœuds. ....	51
Figure III.20 : Elément d'interface. ....	51

**Chapitre IV : Résultats et discussions de l'analyse du comportement des plaques sandwiches en FGM**

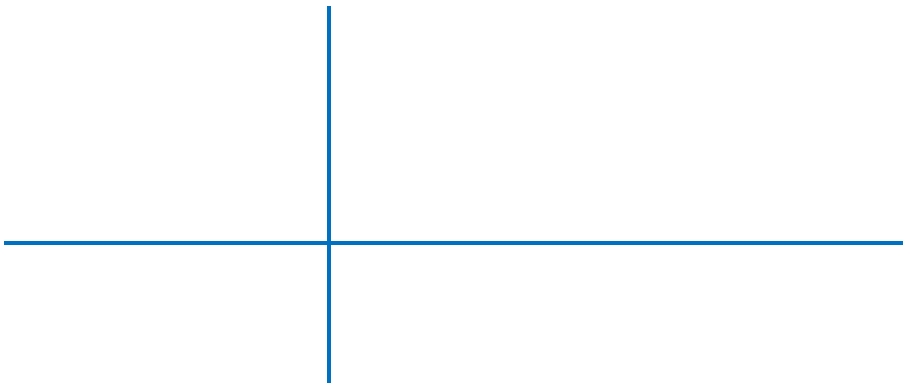
Figure IV.1 : Géométrie de la plaque sandwich FGM .....	57
---	----

**Chapitre V : Résultats et discussions de l'analyse du comportement des plaques sandwiches en FGM**

Figure V. 1 : Variation de la température critique $T_{cr}$ en fonction de l'indice matériel $k$ pour différents types de température $\gamma=2$ , $a/b=1$ et $a/h=10$ .....	73
Figure V.2 : Variation de la température critique $T_{cr}$ par rapport au rapport géométrique de la plaque ( $b/a$ ) pour divers types de température ( $k=1$ , $a/h=10$ ) .....	74
Figure V.3 : Variation de la température critique de flambement $T_{cr}$ des plaques sandwich par rapport au rapport ( $a/h$ ) pour différents types de température ( $k=1$ , $a/b=1$ ) .....	75
Figure V.4 : Variation de la température critique $T_{cr}$ des plaques sandwichs(Ti-6Al-4V / ZrO2) et (Al / Al2O3) FG en fonction de ( $b/a$ ) avec $k=1$ , $a/h=10$ et $\gamma=5$ .....	76
Figure V.5 : Variation de la température critique $T_{cr}$ des plaques carrées sandwiches (Ti-6Al-4V / ZrO2) et (Al / Al2O3) FG par rapport ( $a/h$ ) avec $k=1$ et $\gamma=5$	77



## LISTE DES NOTATIONS



## LISTE DES TABLEAUX

## Liste des Tableaux

### **Chapitre I : Généralités sur les composites & les structures sandwiches**

Tableau I.1 : Des exemples de matériaux composites pris au sens large .....	5
Tableau I.2 : Les propriétés mécaniques de différentes fibres .....	8
Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermodurcissables .....	9
Tableau I.4 : Caractéristiques des résines thermoplastiques .....	9
Tableau I.5 : Caractéristiques des principales charges et additifs utilisés .....	11

### **Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM »**

Tableau II.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal .....	26
--	----

### **Chapitre V : Résultats et discussions de l'analyse du comportement des plaques sandwiches en FGM**

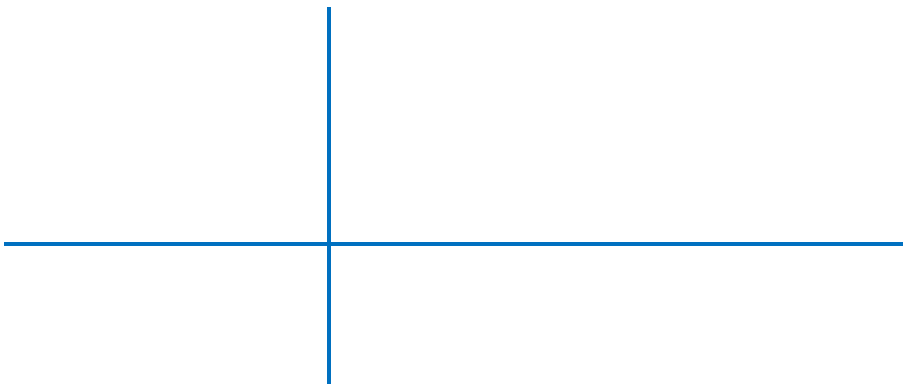
Tableau V.1 : Caractéristiques mécaniques des matériaux constituants des plaques sandwiches en FGM .....	66
Tableau V.2 : Le paramètre $\alpha T_{cr}$ de la charge critique minimale de flambement pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée ( $\alpha_0=1,0 \times 10^{-6}/K$ , $E=1,0 \times 10^{-6}N/m^2$ , $\nu=0,3$ ) .....	67
Tableau V.3 : La charge critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque carrée simplement appuyée en sandwich en FGM sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k », l'épaisseur des couches et ( $a=5.h$ ) .....	68
Tableau V.4 : La charge critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque carrée simplement appuyée en sandwich en FGM sous une élévation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k », l'épaisseur des couches et ( $a=5.h$ ) .....	70
Tableau V.5 : La charge critique de flambement $T_{cr}$ d'une plaque carrée simplement appuyée en sandwich en FGM sous une élévation non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k », l'épaisseur des couches, ( $a=5.h$ ) et ( $\gamma=5$ ) .....	71

## Liste des Notations

$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$\alpha(z)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de « z »
$\alpha_c, \alpha_m$	Coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal
$E_c, E_m$	Module de Young de la céramique et du métal
$V(z)$	Fraction volumique
$\gamma$	Exposant de la température
$k$	Indice matériel
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$ .
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\theta$	Angle de déplacement transversal
$u_b, v_b$	Composante de flexion
$k_1, k_2$	Composante de flexion
$u_s, v_s$	Composante de cisaillement

$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\Psi''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$U$	Energie potentielle totale
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moment supplémentaire du à la flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$N_x^T, N_y^T$	Contraintes résultants due aux chargements thermique
$M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT} et M_y^{sT}$	Moment résultants due aux chargements thermique
$Q_{ij}, Q_{ji}$	Coefficients de rigidité
$\partial$	Dérivée partielle
$i et j$	Sont des nombres naturels.
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion

$A_{ij}^a$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^a$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^a$	Termes de rigidité de la matrice
$F_{ij}^a$	Termes de rigidité de la matrice
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Opérateurs différentiels
$X_m(x), Y_n(y)$	Fonctions admissibles
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ et $X_{mn}$	Paramètres arbitraires
$N_{cr}$	La charge critique de flambement
$T_C, T_M$	Températures de la surface supérieure et inférieure (céramique et métal)
$T_f, T_i$	température initiale et finale respectivement
$\Delta T$	Différence de température de flambement
$T(z)$	Chargement thermique
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice



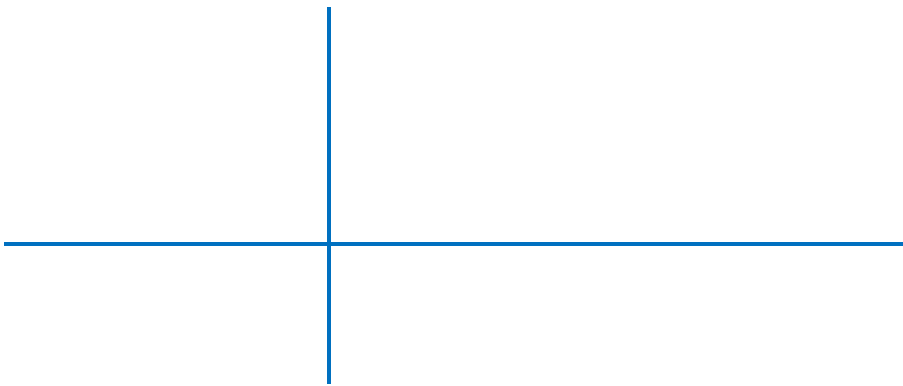
RESUME

## Résumé

La nouveauté de ce travail est l'utilisation d'un nouveau champ de déplacement qui comprend des termes d'intégrale indéterminé pour l'analyse de la réponse au flambement thermique des plaques sandwiches en matériau à gradient fonctionnel (FGM). La cinématique proposée utilise seulement quatre variables, ce qui est encore moins que la première théorie de déformation de cisaillement (FSDT) et les théories conventionnelles de déformation de cisaillement d'ordres élevés (HSDT). La théorie considère une variation trigonométrique de la contrainte de cisaillement transverse et vérifie les conditions de contrainte nulle sur les bords libres de la plaque sans employer les facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles de la plaque sandwich sont considérées comme étant graduées à travers l'épaisseur selon une simple variation de la loi de puissance en fonction des fractions volumiques des constituants.

La couche centrale est encore homogène et faite d'un matériau isotrope. Les charges thermiques sont considérées comme étant uniformes, linéaires et non linéaires à travers l'épaisseur. La validation du présent travail est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature. Les influences des rapports d'aspect et d'épaisseur, de l'indice matériel, du type de chargement et du type de plaque sandwich sur le flambement critique sont toutes discutées.

**Mots-clés :** flambement thermique ; assiette à sandwich ; matériaux fonctionnellement calibrés ; théorie des plaques

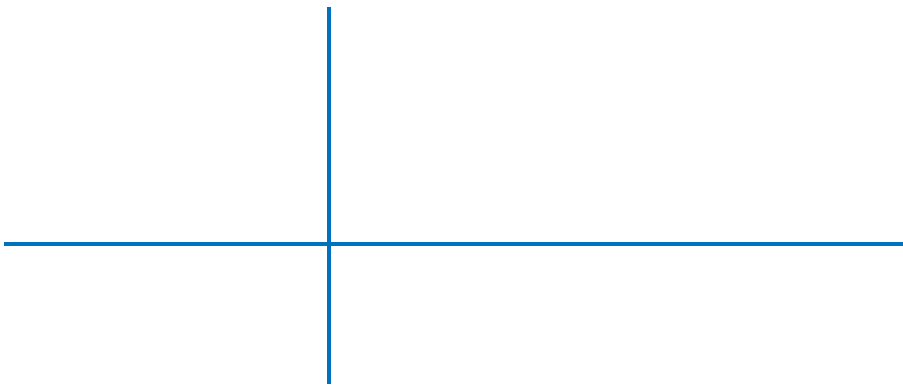


ABSTRACT

## **Abstract**

The novelty of this work is the use of a new displacement field that includes undetermined integral terms for analysing thermal buckling response of functionally graded (FG) sandwich plates. The proposed kinematic uses only four variables, which is even less than the first shear deformation theory (FSDT) and the conventional higher shear deformation theories (HSDTs). The theory considers a trigonometric variation of transverse shear stress and verifies the traction free boundary conditions without employing the shear correction factors. Material properties of the sandwich plate faces are considered to be graded in the thickness direction according to a simple power-law variation in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic material. The thermal loads are assumed as uniform, linear and non-linear temperature rises within the thickness direction. An energy based variational principle is employed to derive the governing equations as an eigenvalue problem. The validation of the present work is checked by comparing the obtained results the available ones in the literature. The influences of aspect and thickness ratios, material index, loading type, and sandwich plate type on the critical buckling are all discussed.

**Keywords:** thermal buckling; sandwich plate; functionally graded materials; plate theory



ملخص

## ملخص

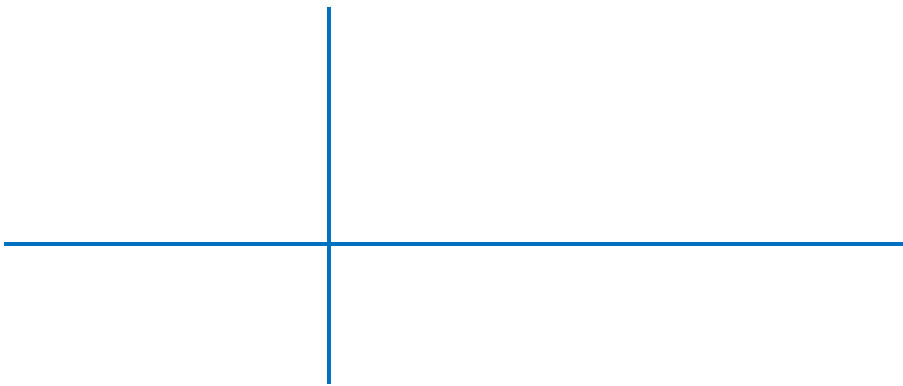
تكمن جدوى هذا العمل في استخدام حقل جديد للإزاحة يشتمل على تكاملات غير محدودة، لتحليل استجابة ألواح ساندويتش المتدرجة وظيفياً للانحناء الحراري. الحركية المقترحة تستخدم أربع متغيرات فقط، وهو أقل من النظرية الأولى لتشوّه القصد (FSDT) ونظرية تشوّه القصد العليا (HSDT).

وتنظر هذه النظرية إلى تباين المثلية لإجهاد القصد العرضي وتحقق شروط الاجهاد المعلوم عند الحواف الحديدية للوحة دون استخدام عوامل تصحيح القصد. خصائص المواد لوحة شطيرة تصنف كتدرج في اتجاه السمك اللوحة وفقاً لتغير بسيط في قانون القوة اعتماداً على حجم أجزاء المكونات.

لا تزال الطبقة المركزية أساسياً متجانسة ومن مادة متناحة. يفترض أن الأحمال الحرارية المطبقة تكون منتظمة، خطية وغير خطية في اتجاه سمك اللوحة، يتم التحقق من صحة العمل الحالي عن طريق المقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها والنتائج المتاحة في مختلف الأبحاث ذات الصلة. يتم مناقشة كل من التأثيرات الخاصة بنسب للأبعاد والسمك ومؤشر المواد ونوع التحميل ونوع لوحة الصفيحة على التواء الحرج.

**كلمات بحث :** انحناء الحراري. لوحة شطيرة، مواد متدرجة وظيفياً؛ نظرية اللوحة





# INTRODUCTION GENERALE

## Introduction Générale

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.).

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des structures sandwiches sous la forme de plaques et poutres s'est considérablement développé jusqu'à nos jours que ce soit dans plusieurs domaines, elles présentent des avantages de réduction des coûts, de légèreté, de résistance mécanique et à la corrosion et permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application souhaitée.

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : *Functionally Graded Materials*) qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique comblera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Ce sont les Japonais qui, en 1984, ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants. Depuis, des recherches dans le domaine des FGM sont activement menées dans différents pays du monde. La promotion au rang de matériau de toute matière inerte «

découverte » par l'homme implique une maîtrise de l'élaboration, mais aussi un contrôle parfait des propriétés en relation avec la structure et son comportement. Ainsi, ces recherches sont conduites dans différents axes tels que :

- Les procédés d'élaboration et de fabrication des matériaux FGM,
- L'établissement des algorithmes de simulation 3D des procédés de fabrication, la détermination expérimentale des propriétés thermomécaniques des FGM,
- L'établissement des bases mathématiques et modélisation des structures FGM,
- L'étude des comportements statique et dynamique des structures FGM,
- L'établissement des modèles de conception 3D des FGM,
- L'établissement de nouveaux modèles d'éléments finis tenant compte des variations continues des propriétés thermomécaniques.

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier le comportement de flambement thermique des structures sandwichs en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution de la charge critique de flambement, des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles. La détermination des contraintes (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différence entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées.

L'objectif principal de ce travail est l'utilisation d'un nouveau modèle analytique basé sur la théorie d'ordre élevé pour l'analyse de l'instabilité thermique des plaques sandwichs en FGM soumises à un chargement thermique et de comparer les résultats obtenus aux résultats des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues pour la théorie utilisée est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Une attention particulière sera portée aux facteurs influant la température critique de flambement.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres :

**Le premier chapitre** présente une synthèse bibliographique très concise sur les matériaux composites et plus particulièrement sur les structures sandwichs. Les différents types, les propriétés mécaniques.

**Le deuxième chapitre** est consacré à donner une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs), l'histoire de leur développement, applications de ces structures ainsi que les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives.

**Le troisième chapitre** rassemble une étude bibliographique sur les différents travaux réalisés sur le comportement de flambement thermique des plaques à gradient de propriétés (FGMs), suivie une appréciation des différentes théories des plaques majoritairement employées pour les modéliser.

**Le quatrième chapitre**, est réservé en modélisation analytique du comportement de flambement thermique de la plaque FGMs en considérant que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, ses propriétés sont distribuées graduellement à travers l'épaisseur selon de la loi de puissance.

**Le dernier chapitre** est consacré pour les résultats des études comparatives réalisées et les commentaires sur les résultats.

A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux qui permet de revenir sur les résultats importants de ce travail, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

**CHAPITRE**

**I**

**GENERALITES SUR LES COMPOSITES  
&  
LES STRUCTURES SANDWICHES**

## Chapitre I :

# Généralités sur les Composites & les Structures Sandwiches

## I.1. Introduction

La technologie moderne essaie à plusieurs fois de concevoir aux matériaux de construction une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Dans ce même contexte l'ingénieur désire, dans un grand nombre de situation, concevoir des structures présentant un rapport performance /masse, le plus élevé possible pour atteindre ces performances, il recherche toujours des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées.

Les matériaux répondant à ce critère tels que le verre, le carbone, le bore, etc., sont très fragiles, un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure. Pour pouvoir réaliser des structures suffisamment tolérantes aux dommages, il est nécessaire d'utiliser des matériaux renforcés par des fibres qui sont liées entre elles par une résine. Aucun matériau classique ne permet de combiner ces caractéristiques d'où la nécessité de l'utilisation des matériaux composites, les matériaux sandwichs et les matériaux Intelligents [Bourouis, 2009].

## I.2. Matériaux composites

### I.2.1. Caractéristiques générales

Un matériau composite ou composite est constitué essentiellement de matrice et de renfort ou matériau renforçant (Figure I.1). Ses propriétés mécaniques et physiques se trouvent alors fortement influencées par :

- La nature des constituants et leurs propriétés ;
- La géométrie du renfort et de sa distribution ;
- Le processus de fabrication, qui joue un rôle essentiel notamment sur l'interface renfort/matrice [Berthelot, 1999].

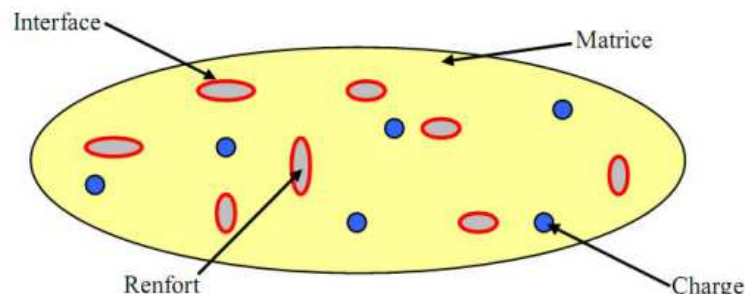


Figure I.1 : Matériau composite [Boudenne, 2003]

Une exception importante à la description précédente est le cas de polymères modifiés par des élastomères, pour lesquels une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères. Pour ce type de matériau, les caractéristiques statiques du

polymère (module d'Young, contrainte à la rupture, etc.) ne sont pratiquement pas modifiées par l'adjonction de particules élastomères, alors que les caractéristiques au choc sont améliorées, Des exemples de matériaux composites pris au sens large sont donnés au tableau I.1 [Berthelot, 1999].

Ainsi une résine chargée de fibres de carbone possède une résistance à la traction plus importante que la résine seule. Au contraire, les fibres seules n'auraient pas de cohésion entre elles, par exemple un bloc de graphite présenterait un mauvais comportement en traction ou en cisaillement.

On distinguera ici deux types de composites:

- Les matériaux à fibres continues ou laminés ;
- Les matériaux à phases dispersées (fibres discontinues ou charges, de nature minérale ou organique, dispersées dans une matrice) [Maurice, 1995].

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. <i>Composites à matrice organique</i> Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres cellulosiques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiment Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. <i>Composites à matrice minérale</i> Béton Composite carbone-carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, biomédecine, etc. Pièces thermomécaniques
3. <i>Composites à matrice métallique</i>	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. <i>Sandwiches</i> { Peaux Ames	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples

**Tableau I.1** : Des exemples de matériaux composites pris au sens large [Berthelot, 1999]

Selon les performances, on distingue deux types de composites: les composites grandes diffusions (GD) et les composites hautes performances (HP).

Les *GD* ont des propriétés mécaniques plutôt faibles mais d'un coût compatible avec une production en grande série. Ils représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés !). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

Les *HP*, principalement utilisés dans l'aéronautique, sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux *GD*.

Il faudra toujours tenir compte du fait que l'élaboration de la structure est liée à celle du matériau. Pour les pièces travaillantes, on utilisera plutôt des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotages on utilisera des plastiques renforcés [Berthelot, 1999].

### **I.2.2. Les grandes familles de composites**

Un matériau composite résulte de l'association d'une matrice, d'un élément renforçant et de différents additifs et adjuvants.

On désigne généralement sous le nom de matrice, un liant polymérique qui, associé à un renfort, permet de le maintenir dans ses formes en assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts. C'est elle qui apporte les propriétés physico-chimiques du produit final. Les matrices peuvent être de différentes sortes permettant ainsi de différencier plusieurs types de composites et notamment [Weiss et Bord, 1983]:

- Les composites à matrice organique (thermoplastique, thermodurcissable) ;
- Les composites à matrice élastomère ;
- Les composites à matrice et renfort métalliques ;
- Les bio-composites.

### **I.2.3. Les constituants des matériaux composites**

Le matériau composite: est constitué d'une protection appelée "matrice" et de l'ossature appelée "renfort". Les renforts fibreux sont disposés de façon judicieuse dans la matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations [Berthelot, 1999].

#### **1.2.3.1. Les renforts**

Les renforts représentent les principales composantes porteuses des matériaux composites, en lui apportant ses hautes performances (rigidité, résistance à la rupture, etc.).

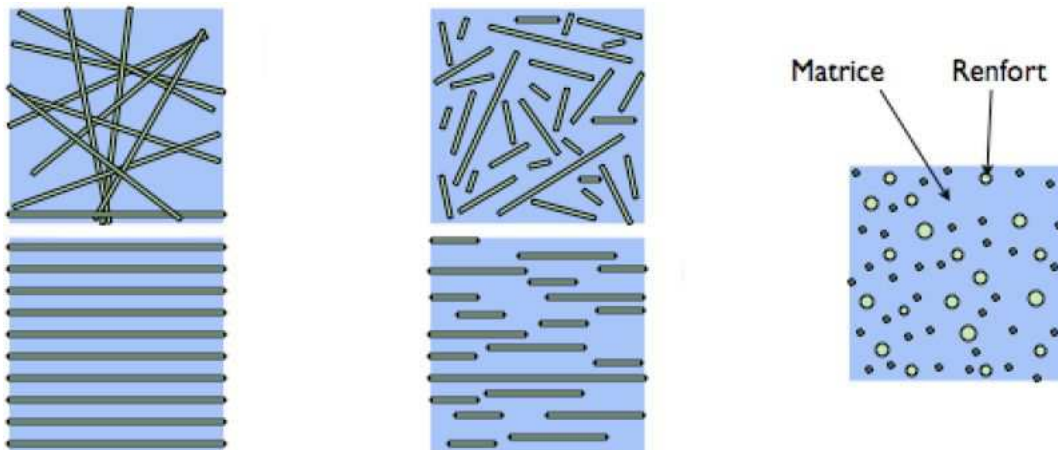
Les qualités recherchées pour le renfort sont surtout des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec la résine ainsi qu'une facilité de mise en œuvre et un faible coût. La concentration du renfort est un paramètre déterminant pour les propriétés du matériau composite. Elle est mesurée par la fraction volumique ou par la fraction massique du renfort (entre 0,3 et 0,7).

L'anisotropie du matériau composite est une caractéristique fondamentale, elle est déterminée par l'orientation des fibres dans le cas où le renfort est constitué de fibres. Il

faut cependant noter qu'au-delà de la concentration et de l'orientation des renforts, leurs distributions plus au moins homogène a une influence sur la résistance du composite. En effet pour une concentration donnée du renfort, une distribution uniforme assure une homogénéité du matériau, par contre une distribution non uniforme engendre l'initiation de la rupture dans les zones pauvres en renfort introduisant ainsi une diminution de la résistance du composite [Bahlouli, 1993].

D'un point de vue géométrique, on peut distinguer trois grands types de renforts :

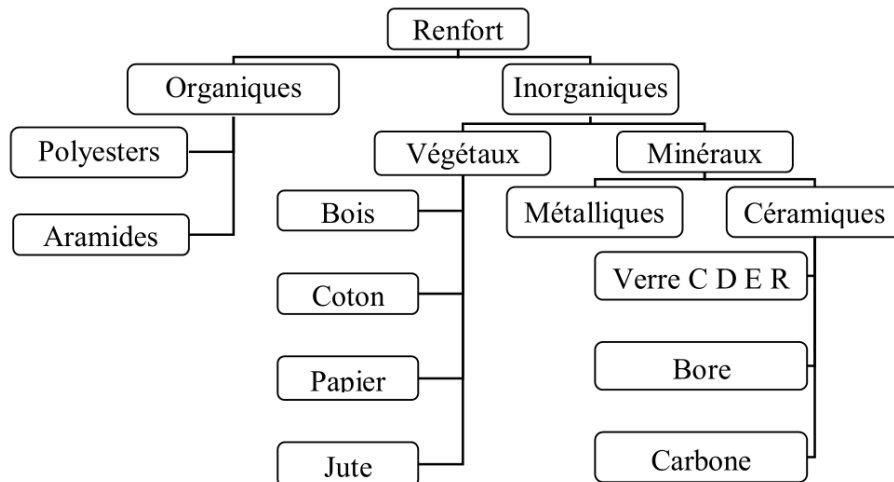
- Les fibres longues (longueur comparable aux dimensions de la pièce, figure I.2 a) ;
- Les fibres courtes (de longueur faible devant les dimensions de la pièce, figure I.2b) ;
- Les particules, ou charges renforçantes (figure I.2c).



**Figure I.2 :** Les structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules. [Medjani, 2016]

Parmi les fibres les plus utilisés (figure I.3), on peut citer :

- Fibres de verre ;
- Fibres de carbone ;
- Fibres de kevlar (d'aramide) ;
- Fibres de bore.



**Figure I.3 :** Différentes familles du renfort



a- Fibre de verre

b- Fibre de carbone

c- Fibre de kevlar

*Figure: I.4 : Exemples des fibres du renfort*

Type de Fibres	Densité	Modules en traction GPA	Résistance à la rupture MPA	Allongement %	Coefficient de dilatation 10 <sup>-6</sup> /°C
Fibre de verre	2.54	72	2800	2	7.2
Fibre de carbone HR	1.76	230	3290	1.4	3
Fibre de carbone HM	1.81	399	2450	0.8	-0.5
Fibre d'aramide	1.44	130	2340	2.8	-4
Fibre de bore	2.6	414	2900	0.8	4.5
Fibre de polyéthylène	0.97	119	2625	4	10
Fibre de basalte	2.8	89	4800	3.15	8
Fibre de sisal	1.4	15	770	2.2	4
Fibre de lin	1.49	10	800	3	4
Fibre de silicium	3.18	428	3100	0.72	5

*Tableau I.2 : Les propriétés mécaniques de différentes fibres [Bahlouli, 1993].*

### 1.2.3.2. La matrice

La matrice est constituée de résine mélangée, pour améliorer ses caractéristiques, à une charge qui facilite aussi la mise en œuvre et diminue le coût de la production. Le mélange est considéré mécaniquement comme une phase homogène, et nous obtenons ainsi un matériau composite formé d'un renfort et d'une matrice. Le rôle de la matrice est d'assurer le lien entre les fibres et de transmettre les sollicitations.

Elle assure la résistance du matériau dans le sens transverse du renfort, ainsi qu'une protection physico-chimique des fibres contre les agents nocifs de l'environnement. De plus elle conditionne directement la tenue thermique, et la résistance à la compression et au cisaillement inter-laminaire [Maurice, 1995].

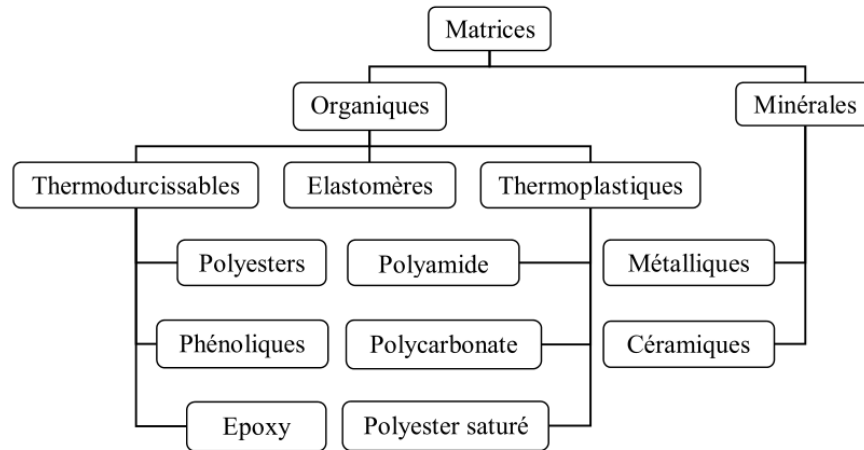


Figure I.5 : Différentes familles de matrice

### 1.2.3.2.1. Résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont 914, 5208, 70, LY556.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau I.3.

résine	$T_f$ (°C)	$P$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\varepsilon_t^R$ (%)	$\sigma_t^R$ (Mpa)	$\sigma_c^R$ (Mpa)	$E$ (Gpa)
polyesters	60 à 100	1140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2.8 à 3.6
phénoliques	120	1200	2.5	40	250	3 à 5
époxydes	290	1100 à 1500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermodurcissables [Maurice, 1995]

### 1.2.3.2.2. Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B.

De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau 1.4.

résine	$T_f$ (°C)	$P$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\varepsilon_t^R$ (%)	$\sigma_t^R$ (Mpa)	$\sigma_c^R$ (Mpa)	$E$ (Gpa)
polyamide	65 à 100	1140		60 à 85		1.2 à 2.5
polypropylène	900	1200		20 à 35		1.1 à 1.4

Tableau I.4 : Caractéristiques des résines thermoplastiques [Maurice, 1995]

### 1.2.3.2.3. Les matrices naturelles

Ce sont des matériaux synthétisés par les êtres vivants, animaux et micro-organismes. La famille la plus importante est celle des polysaccharides comme l'amidon, la cellulose la lignine [BEWA, 2006].

### 1.2.3.2.4. Résines époxydes

Le terme époxyde désigne une grande variété de pré-polymères comportant un ou plusieurs motifs époxydiques dont les principales applications concernent les matériaux composites (matrice époxyde avec des renforts en fibre de verre ou de carbone) [Bardonnnet, 2000].

### 1.2.3.2.5. Phénoplastes ou phénols-formols

Les phénoplastes sont des matières thermodurcissables obtenues par polycondensation d'un phénol et d'un aldéhyde avec élimination d'eau et formation d'un réseau tridimensionnel [Chevalier, 2000].

### 1.2.3.2.6. Les résines thermostables

Elles se distinguent essentiellement des autres résines par leurs performances thermiques. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace [Berthelot, 1999].

### 1.2.3.3. Les charges et additifs

Les charges et additifs sont des matières d'origine minérale, végétale, synthétique ou organique se présentant sous forme pulvérulente ou fibreuse chimiquement pures et inertes vis-à-vis des résines. Mélangées à une résine, elles apportent de nouvelles propriétés et modifient les caractéristiques du produit fini.

Les charges influencent :	Et améliorent :
- L'aspect du produit	- La résistance à l'humidité
- La viscosité	- La résistance aux agents chimiques
- La densité	- La résistance aux intempéries
- L'opacité	- La résistance à l'exothermie
- La thixotropie	- Le retrait
- Le temps de gel	- La résistance au feu
- La conduction calorifique	- La résistance à la chaleur
- Le prix de revient	- La résistance aux chocs

Nature de la charge	Densité réelle	Utilisation
Bisulfure molybdène	10.2	Lubrifiant interne
Carbonate calcium	2.7	Diminue du retrait - Augmente la viscosité - Réduit le coût
Carbone black	3	Pigment pouvant inhiber la polymérisation
Corindon	4	Augmente la dureté - Augmente la résistance à l'abrasion
Dolomie	2.9	Opacifie les Gelcoats
Hydrate d'alumine	5.2	Augmente la tenue au feu
Kaolin	2.6	Réduit le poissant
Mica	2.8	Confèrent des propriétés diélectriques et thermiques pour réaliser des pièces isolantes
Microbille de verre	2.5	Augmente la dureté - Augmente la résistance à l'abrasion Augmente la résistance à la rayure
Microsphère de verre	0.9	Diminue la densité des résines
Oxyde de titane	2.5	Coloration ultra-blanche
Poudre d'alu	2.6	Augmente la conduction thermique
Poudre d'ardoise	2.6	Rend diélectrique
Poudre de Quartz	2.65	Augmente la dureté - Augmente la résistance à l'abrasion Augmente la résistance à la rayure - Confère des propriétés diélectriques
Silice colloïdale	2.2	Agent thixotrope
Talc	2.9	Diminue le retrait - Augmente la viscosité - Augmente la ponçabilité - Réduit le coût - Confère des propriétés diélectriques

**Tableau I.5 :** Caractéristiques des principales charges et additifs utilisés  
[Cognard, 1989]

#### 1.2.3.4. Les gelcoats

Un gelcoat est une couche de surface à base de résine spécialement étudiée pour assurer certaines fonctions telles que : aspect de surface, brillance, coloration, protection des stratifiés, dureté.

Encore, les gelcoats servent de certaines résistances mécaniques telles que : résistance à l'abrasion, résistance à la corrosion, résistance aux chocs, résistance aux UV, résistance à la rayure, résistance aux agressions chimiques, résistance au feu, résistance à l'hydrolyse....

Les gelcoats se présentent sous forme de liquides homogènes onctueux, colorés et thixotropés (propriété qui permet à un fluide d'être très visqueux au repos et très fluide sous agitation). Ils se composent de : charges diverses, une résine de base, pigments, différents additifs (figure I.5).

Il existe différentes qualités de gelcoat en fonction de la nature des résines utilisées dans leur composition :

- Les gelcoats polyesters compatibles avec les stratifiés à base de résine polyester,

- Les gelcoats époxydes compatibles avec les stratifiés à base de résine époxydes,
- Les gelcoats vinylesters compatibles avec les stratifiés à base de résine vinylester, polyester ou époxyde.

Les gelcoats s'appliquent généralement en fond de moule soit à la brosse soit en pulvérisation avec des épaisseurs de 0,4 à 0,6 mm. Dans le secteur automobile, les gelcoats sont principalement utilisés dans la fabrication de carrosseries de véhicules industriels ou de chantier [Cognard, 1989].

### 1.2.3.5. Les âmes

Une âme est un élément renforçant utilisé pour la réalisation de structure sandwich. Elle a pour rôle de maintenir l'écartement entre deux peaux afin de donner une rigidité à l'ensemble de la structure.

Le choix d'une âme sandwich est principalement dicté par les propriétés mécaniques et thermiques imposées par le cahier des charges. Les âmes utilisées pour la fabrication de structures sandwich peuvent être de différentes natures en fonction du cahier des charges de la pièce.

Les plus courantes sont :

- Les plastiques alvéolaires (mousses) : polyuréthane, phénolique, PVC et polystyrène (utilisé avec des résines spéciales) ;
- Les nids d'abeille de : papier kraft, papier aramide, alliage d'aluminium, alliage de titane et polypropylène ;
- Le bois : balsa, contreplaqué, latté ;
- Les feutres type « Coremat » [Gay, 1997].



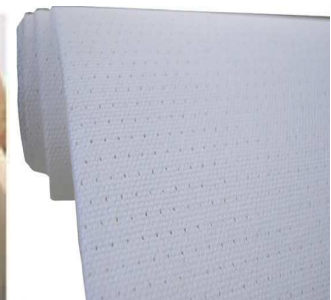
a- Plastique alvéolaire



b- Nids d'abeille



c- Bois



d- Coremat

Figure: I.6 : Exemples des âmes

### 1.2.3.6. Interface

Au cours de l'élaboration du composite il se produit une interaction physico-chimique entre la matrice et la surface de la fibre. Cette interface "fibre-matrice" conditionne largement la résistance globale du matériau composite, notamment, la résistance au cisaillement inter laminaire, la résistance à la corrosion et au vieillissement, et la tenue en fatigue et aux chocs. La qualité et le type de l'interface dépendent essentiellement de la nature et de la morphologie du renfort et de la matrice, de la nature de l'agent de couplage ou de l'ensimage de la fibre et des conditions de mise en œuvre.

### 1.2.4. La structure des pièces composites

Les pièces en matériaux composites peuvent se décliner suivant trois types de structures :

- Les structures monolithiques ;
- Les stratifiés ;
- Les structures sandwich ;
- Autres structures (structures 3D).

#### 1.2.4.1. Les structures monolithiques

Ces structures sont les plus courantes. La pièce est constituée d'un empilage de couches de renfort appelées strates.

Il est possible de mixer différentes couches de renfort en fonction des propriétés mécaniques souhaitées. Ainsi, on peut alterner des couches de mats isotropes dans le plan avec des couches de tissus anisotropes afin de renforcer la résistance de la pièce en fonction des différentes sollicitations mécaniques.

L'orientation des fibres joue aussi un rôle très important dans la résistance de la pièce. Généralement les structures monolithiques sont réservées à des pièces de faibles épaisseurs (entre 3 et 5 mm) mais il est possible d'avoir des épaisseurs de pièces plus importantes en respectant certaines étapes intermédiaires de stratification afin de minimiser au maximum les phénomènes de retrait [Gay, 1997].

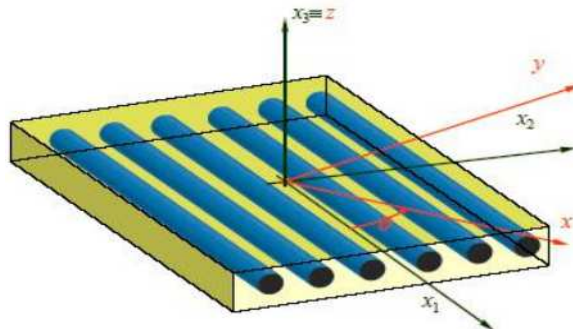


Figure I.7 : Matériau composite monolithique

#### 1.2.4.2. Les stratifiés

Les stratifiés résultent de la superposition de plusieurs couches ou plis, qui peuvent être des nappes unidirectionnelles, de tissus ou des mats, imprégnés de résine (figure I.8). Chaque couche peut avoir une orientation propre. Le choix de la nature et de la séquence d'empilement dépend de l'utilisation, en l'adoptant au mieux au champ de contraintes imposées, à savoir :

- Les couches unidirectionnelles présentent une grande rigidité. Elles constituent un type de stratifié de base au quel peut se ramener, en principe, tout autre type de stratifié ;
- Les mats sont peu résistants en traction ;
- Une stratification croisée est sensible au délaminage inter-laminaire ;
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

En général on a tendance à utiliser une stratification symétrique afin de garantir une bonne planéité du stratifié après démoulage [Berthelot, 1999].

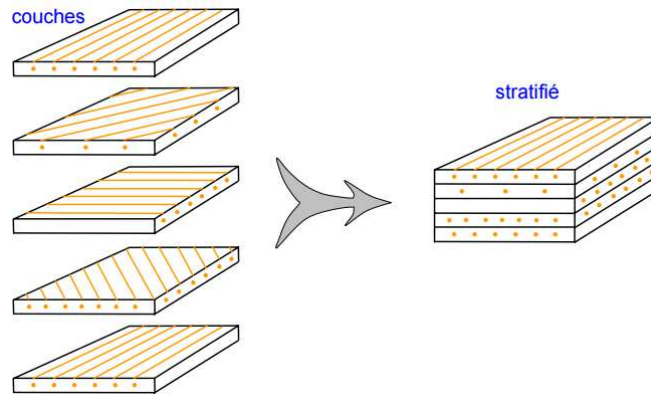


Figure I.8 : Constitution d'un stratifié

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant:

Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.

- Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents ;
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique ;
- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre ;
- Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

La désignation dépend du système d'axes choisi. Un exemple est donné à la figure I.9.

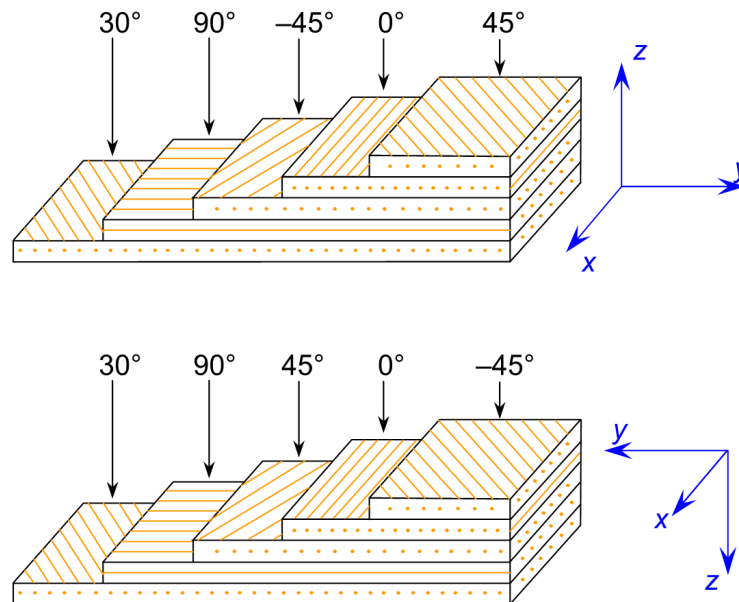


Figure I.9 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

### 1.2.4.3. Les sandwichs

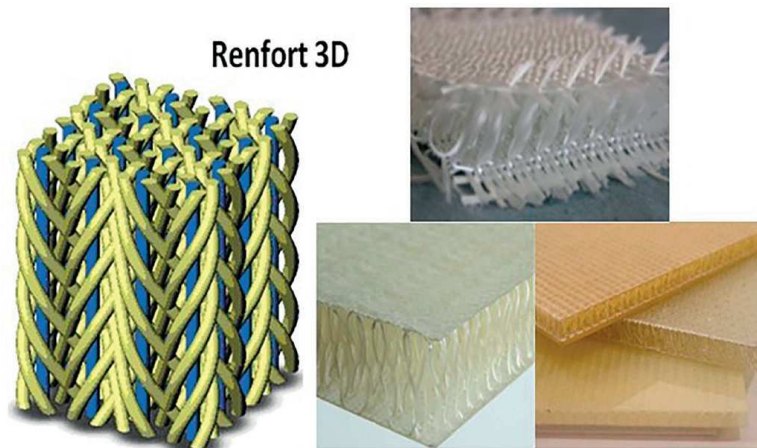
Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression)

deux "feuilles", appelées peaux, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.) (voir I.3).

#### 1.2.4.4. Autres architectures (structures 3D)

Les structures 3D sont obtenues soit par tressage, soit par l'utilisation de renforts tissés en trois dimensions type « *Parabeam* » comme le montre la figure I.10 ci-dessous.



**Figure I.10 :** Renforts 3D et renfort Parabeam® avant et après imprégnation

Le tressage s'effectue sur des métiers à tisser spécifiques qui permettent de réaliser soit des gaines ou chaussettes qui sont utilisées à posteriori, soit directement une préforme de la pièce qui sera ensuite injectée.

Les structures ainsi obtenues possèdent des propriétés mécaniques élevées et restent légères. Très utilisé dans la fabrication des cadres de vélo de compétition, le tressage se retrouve dans la fabrication de pale d'hélice ou de pièce de révolution High Tech.

Les autres architectures des matériaux composites peuvent être schématiquement classées en : plastiques renforcés et composites volumiques.

#### 1.2.4.5. Conséquences sur l'étude du comportement mécanique des matériaux composites

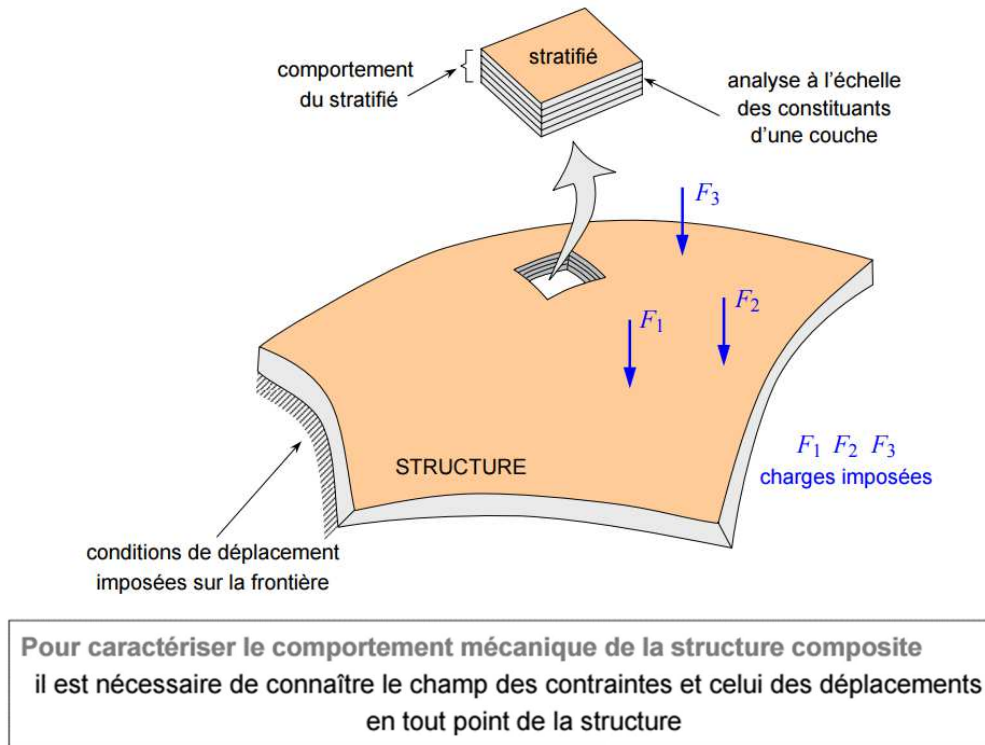
L'étude de la mise en œuvre des matériaux composites a montré l'importance des stratifiés et des matériaux sandwichs. L'architecture de ces matériaux nous permet maintenant de dégager les grandes lignes de l'étude de leur comportement mécanique.

Cette étude comportera deux phases :

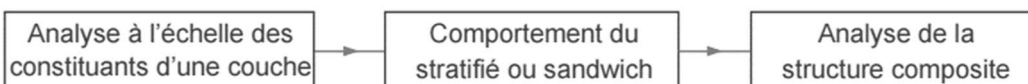
1. L'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est assez souvent désignée par microanalyse du matériau composite.
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites. L'analyse des structures simples (poutres et plaques) peut généralement être abordée par une méthode analytique, alors que l'étude de structures complexes nécessite l'utilisation de la méthode des éléments finis.

L'analyse du comportement mécanique d'une structure en matériau composite est schématisée sur la figure 1.13. [Berthelot, 1999]



#### Processus d'étude



#### Analyse à l'échelle des constituants

Analyse des propriétés élastiques et du comportement à la rupture d'une couche en fonction des constituants

#### Comportement du stratifié ou sandwich

Étude des propriétés élastiques et du comportement à la rupture du matériau stratifié ou sandwich en fonction des couches

**Figure I.11** : Schéma d'étude du comportement mécanique d'une structure en matériau composite.

### I.3. Les structures sandwichs

#### I.3.1. Définition

Une structure sandwich est obtenue à partir de deux peaux ou revêtements, réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques, collées sur une âme réalisée avec un matériau très léger et ayant des faibles caractéristiques mécaniques.

L'objet d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité (Figure I.14) pour de telles structures le rapport des épaisseurs du cœur  $e_c$  et des peaux  $e_p$  doit être limité entre 10 et 100 ( $10 \leq e_c/e_p \leq 100$ ) [Pagano, 1969].

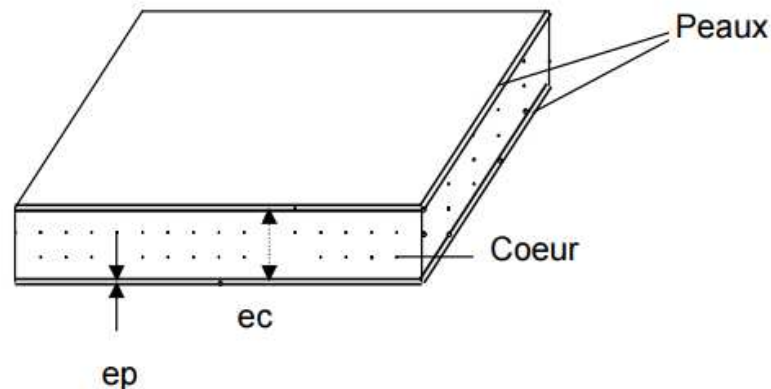


Figure I.12 : Schéma représentatif d'une structure sandwich

Dans les sandwichs, les peaux sont souvent identiques en matériaux et épaisseur. Ces structures sont appelées des sandwichs symétriques. Cependant dans certains cas spéciaux les deux peaux peuvent avoir deux épaisseurs ou deux matériaux différents, ils sont variés suivant les conditions des chargements ou l'environnement du travail. Ces structures sont appelées *des sandwichs asymétriques*.

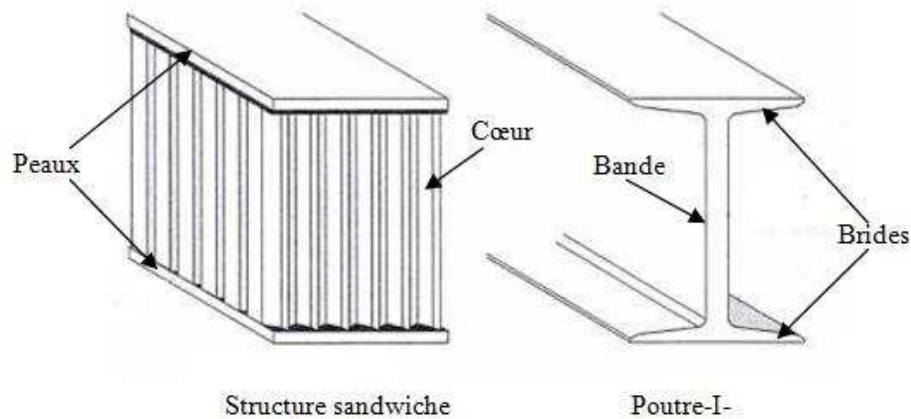
En général les sandwichs sont symétriques; la variété d'élaboration de sandwich dépend de la structure du cœur. Il peut être d'un matériau quelconque ou d'une quelconque forme d'architecture, mais ils sont généralement classés en plusieurs types; cœur en mousse ou solide, cœur en nid d'abeille, cœur en carton ondulé et treillis.

L'adhérence des peaux et le cœur est un autre critère important pour le transfert des charges et pour le fonctionnement de la structure sandwich dans son ensemble [Rocca et Nanni, 2005]. La notion fondamentale d'une structure sandwich est que les peaux supportent les charges de flexion alors que le cœur supporte les charges de cisaillement.

Les semelles sont fortes et rigides en traction et compression comparées à la densité faible du matériau du cœur [Sezgin et al, 2010]. Par conséquent, les panneaux sandwichs sont efficaces dans la flexion. En plus ils offrent une bonne résistance au flambage et au cisaillement. [Maurice, 1995], [Vinson, 1999]

Une structure sandwich fonctionne de la même manière qu'une poutre traditionnelle sous forme I, qui comporte une bande reliée à deux brides (Figure I.17). La bande de liaison permet aux brides d'agir ensemble et de résister à des contraintes de cisaillement. Dans la structure sandwich le cœur et les peaux sont des matériaux différents. Le cœur fournit un support continu plutôt que d'être concentrées dans une bande étroite à la poutre traditionnelle.

Lorsque la structure sandwich est soumise à la flexion, les peaux fonctionnent ensemble pour résister contre le moment de flexion à l'externe, afin qu'une peau est chargée en compression et l'autre en traction. Le cœur résiste aux forces transversales, en même temps, que les peaux supportent et se stabilisent entre eux contre le flambement. [Norlin et , 1995].



**Figure I.13.** *Panneau sandwich comparée à une poutre sous forme I*  
[Norlin et Reuterlöv, 2008]

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

### **I.3.2. Les éléments constituant les matériaux sandwichs**

#### **1.3.4.1. Les peaux**

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

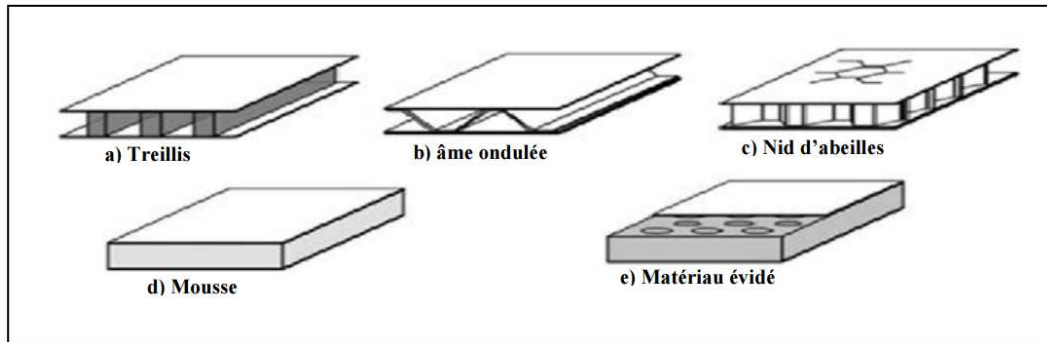
Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers.

#### **1.3.4.2. L'âme**

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. Son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement. Les matériaux d'âme les plus utilisés se présentent principalement sous deux formes (figure I.14) :

- Pour les âmes pleines :
  - le balsa ou bois cellulaire ;
  - diverses mousses cellulaires;
  - des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques ;

- etc.
- Pour les âmes creuses, essentiellement nid d'abeilles et profilés :
  - des alliages métalliques légers ;
  - du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
  - du papier polyamide, type papier Nomex ;
  - etc.



**Figure I.14 :** Différentes natures d'âmes

Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Pour que les structures sandwich jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence [Berthelot, 1999].

#### 1.3.4.3. L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage, lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

#### 1.3.3. Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de  $100 \text{ kg/m}^3$ . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes

à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels, etc.), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. [Arbaoui, 2009]

### 1.3.4. Modes de dégradations des sandwichs

Les modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion sont différents, d'où il est nécessaire de cerner ces modes de ruptures.

#### 1.3.4.1. Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité (Figure I.15). Le flambement généralisé peut avoir lieu si les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. Le flambement du sandwich dépend des paramètres liés à ces dimensions, sa rigidité en flexion, la proportion de l'épaisseur du sandwich (peaux et l'âme) et le module de cisaillement de l'âme.

Afin de remédier au problème du flambement généralisé, il est nécessaire d'avoir des peaux ayant un module d'élasticité élevé, d'augmenter l'épaisseur des peaux et l'épaisseur de l'âme. [Arbaoui, 2009]

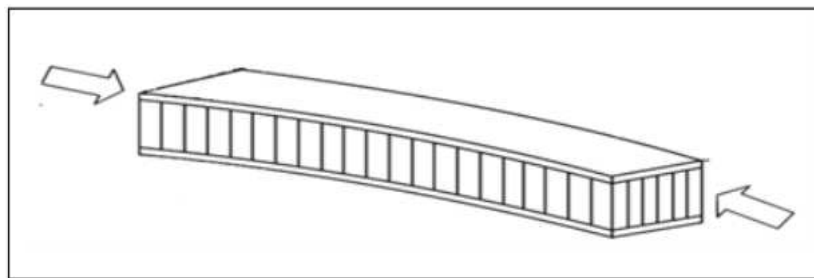


Figure I.15 : Flambement généralisé des peaux du sandwich

#### 1.3.4.2. Rupture des peaux en traction ou en compression

Dans ce cas, les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles du matériau constituant les peaux (Figure I.16). Afin d'éviter ce phénomène, il faudrait utiliser des matériaux dont les contraintes à la rupture sont plus élevées et augmenter l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), ou augmenter l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). En général, on augmente l'épaisseur de l'âme. Par contre, si l'âme est plus rigide, elle n'affecte pas les contraintes dans la peau. [Arbaoui, 2009]

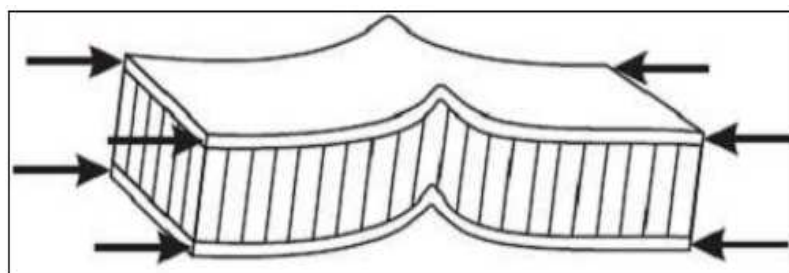


Figure I.16 : Rupture des peaux en traction ou en compression

### 1.3.4.3. Modes locaux de rupture

Le mode de rupture locale est dû à une concentration de contraintes suite à l'application d'une charge localisée ou à l'appui de type ponctuel ou linéique (Figure I.17).

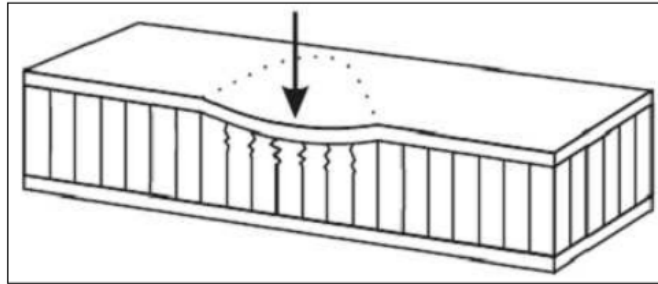


Figure I.17 : Modes locaux de rupture par indentation

### 1.3.4.4. Rupture de l'âme par cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau constituant l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure. I.18). Pour cela, on peut soit utiliser un matériau qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. [Arbaoui, 2009]

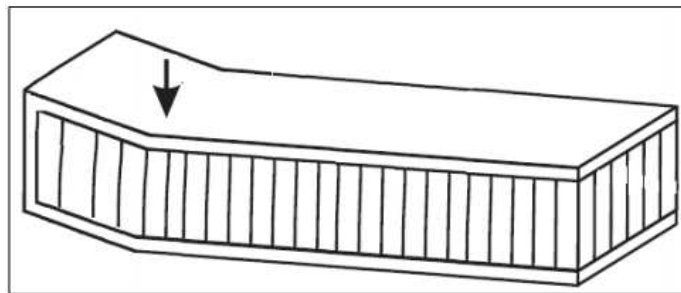


Figure I.18 : Rupture de l'âme par cisaillement

### 1.3.4.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme, Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion. Le flambement de l'âme ne dépend pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé (figure. I.19). [Arbaoui, 2009]

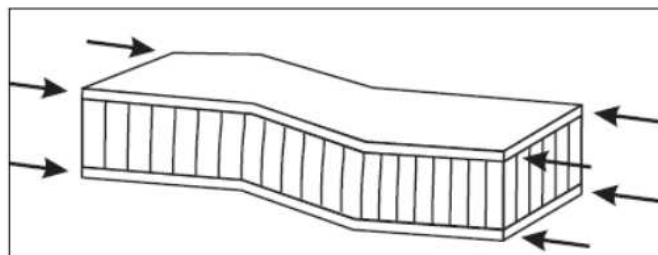


Figure I.19 : Flambement généralisé de l'âme du sandwich

#### 1.3.4.6. Flambement localisé, « wrinkling »

L'âme empêche le flambement du sandwich, car les peaux considérées sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement. Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Figure I.20), se produit. Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne résultent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il dépend des modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. [Arbaoui, 2009]

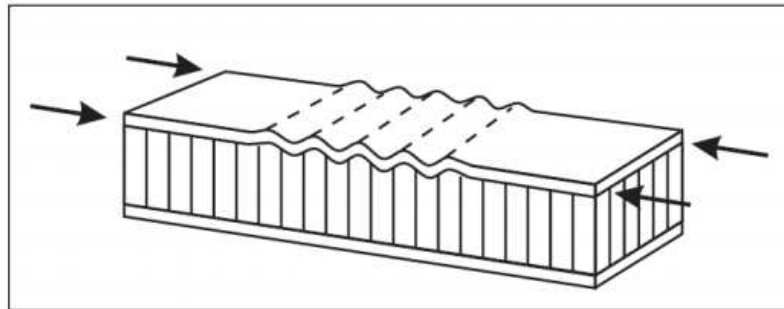


Figure I.20 : Flambement localisé « wrinkling »

#### 1.3.4.7. Dégradation de l'adhésif

La dégradation de l'adhésif est répartie en trois types :

- dégradation de l'adhésif entre les peaux et l'âme ;
- dégradation de l'attachement des cellules de l'âme ;
- dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure I.21 montre les différents modes de dégradation de l'adhésif. Ces modes de dégradation de l'adhésif sont provoqués essentiellement par leurs expositions à l'humidité.

Cette dégradation conduit à la ruine avancée du panneau sandwich. [Arbaoui, 2009]

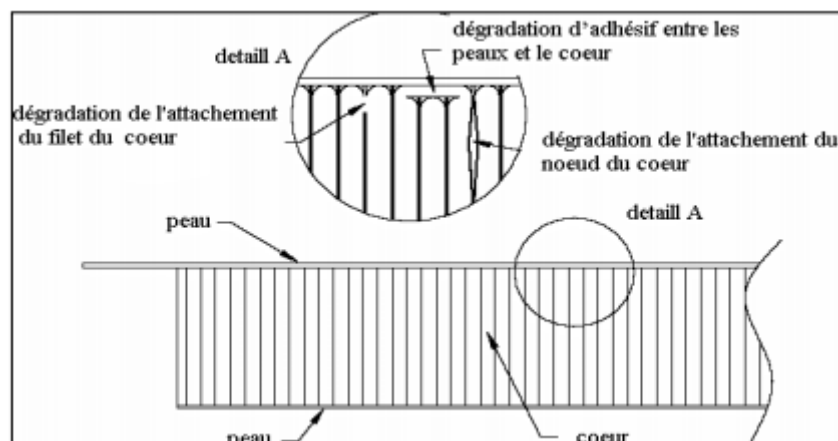


Figure I.21 : Type de dégradation de l'adhésif

#### **I.4. Conclusion**

L'objectif des producteurs des matériaux composites est de concurrencer et de surpasser les métaux qui, de leur côté, ne cessent d'optimiser leurs propres caractéristiques. La diversité des matériaux composites et leur souplesse, qui permet de fabriquer ou de composer des caractéristiques à la carte, rendent cet objectif légitime pour atteindre ces objectifs, ce secteur doit se développer par l'innovation.

Les composites trouvent leurs principales applications dans le transport, le bâtiment, l'aérospatiale, etc. Ces applications nécessitent une connaissance des propriétés thermo-physiques et des méthodes de mesures de ces matériaux, ce qui fait l'objet du prochain chapitre.

**CHAPITRE**

**II**

**GENERALITES SUR LES MATERIAUX  
A GRADIENT DE PROPRIETES  
« FGM »**

**Chapitre II :****Généralités sur les Matériaux  
à Gradient de Propriétés « FGM »****II.1. Introduction**

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes.

La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material* " *F.G.M* "). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [Baron,2008].

Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine.

**II.2. Histoire et concept des matériaux FGM**

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont

également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini,1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

Les matériaux fonctionnellement gradué FGM sont l'un des matériaux avancés résistant à température élevée, capables de résister aux températures extrêmes. FGM sont des nouveaux matériaux microscopiquement hétérogènes dans lesquels les propriétés mécaniques varient régulièrement et de façon continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé par la variation progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs [Samsam,2005].

En réalité, la microstructure des FGM est discrètement et disposées de façon aléatoire comme illustré dans les figures (II.1) et (II.2). La microstructure des FGM se distingue par trois zones différentes : deux zones avec une faible concentration de phases représentent les parties particules- matrice, tandis que la zone intermédiaire est une transition dans laquelle il existe une interface de phases [Nguyen,2004].

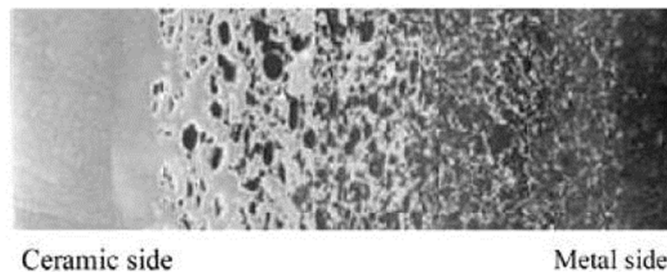


Figure II.1 : Microstructure de FGM céramique-métal [Nguyen,2004]

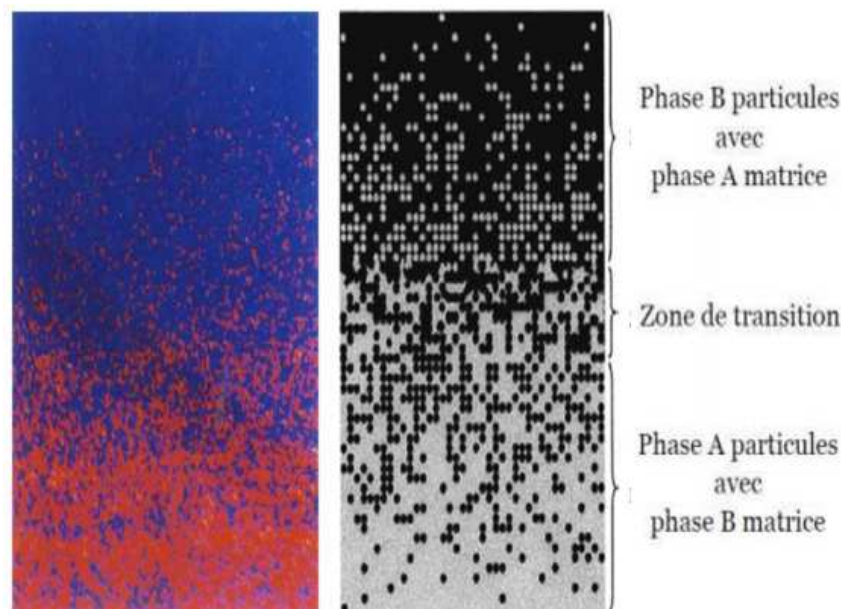


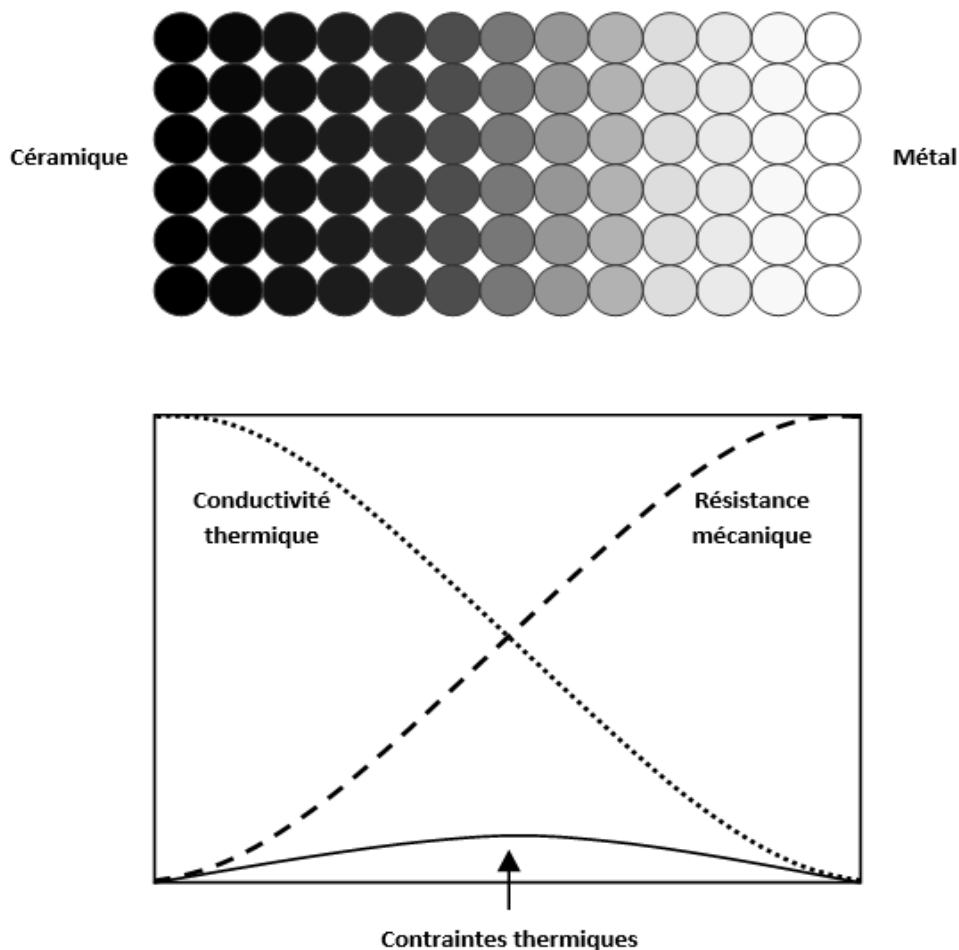
Figure II.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [Yin,2004]

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau II.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	- Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

**Tableau II.1:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

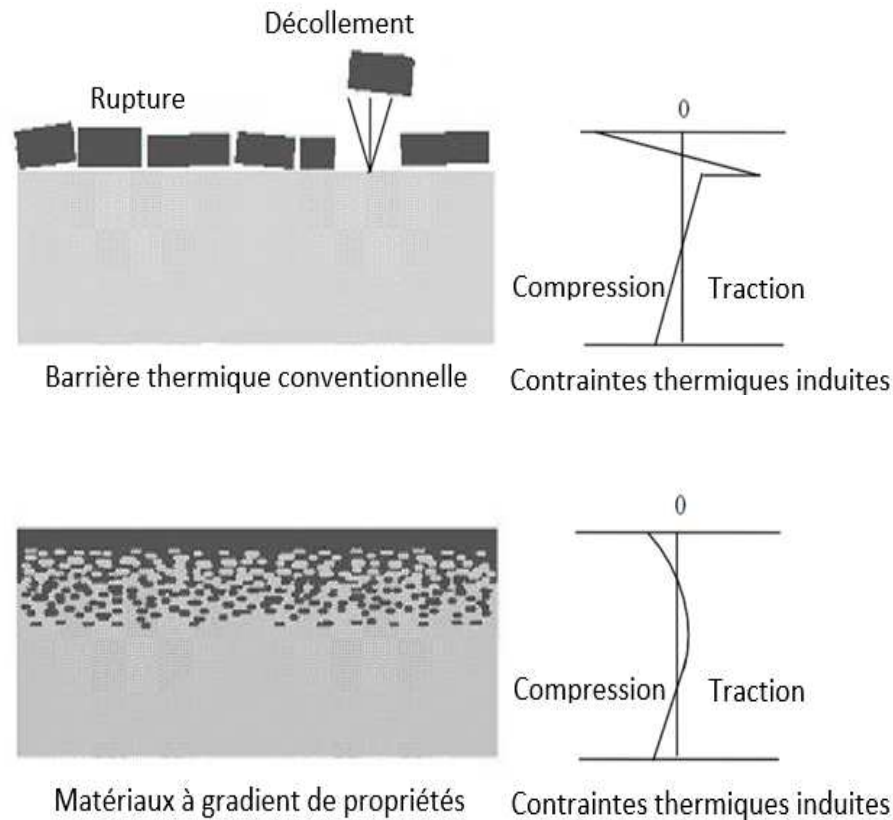
Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch,1986].



**Figure II.3 :** Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en

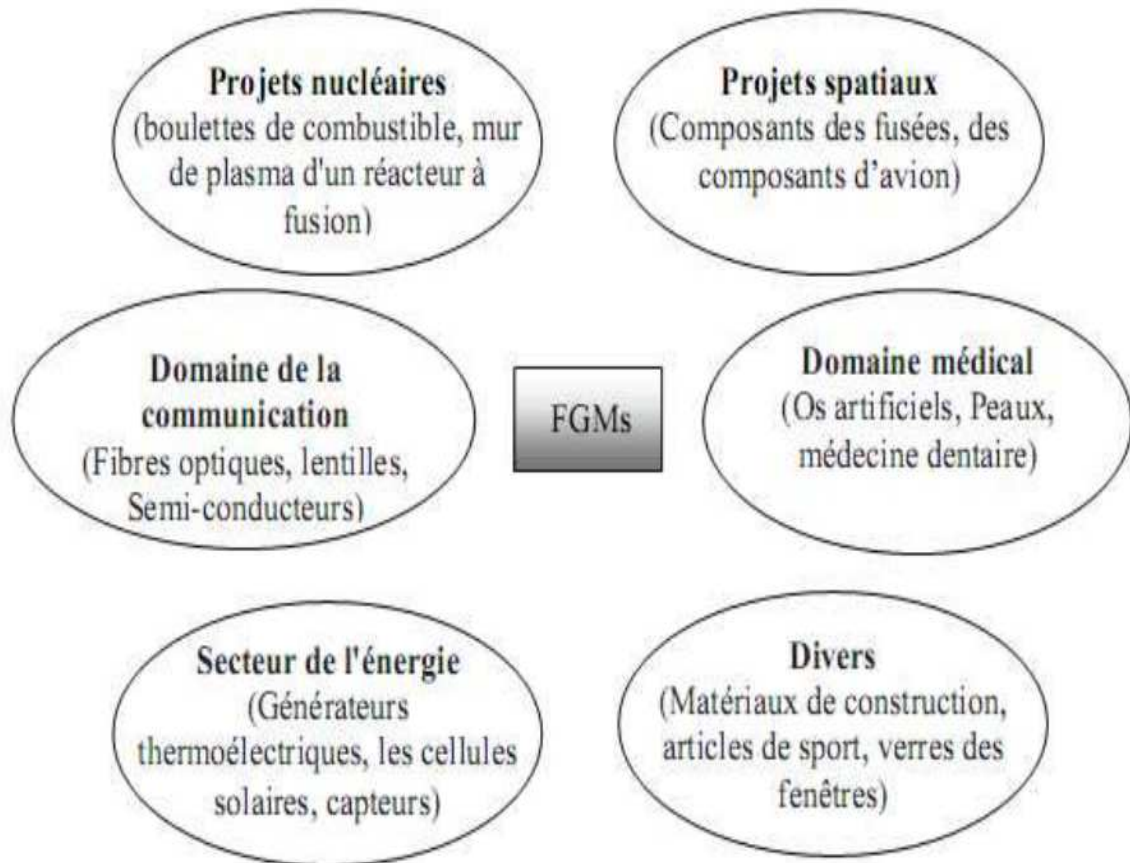
changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



**Figure II.4 :** Protection thermique

Deux systèmes de matériaux de recherche importants dans la technologie de fabrication des FGMs sont : alumine  $Al_2O_3$  [Finot et al, 1996] et zircon  $ZrO_2$  [Nguyen,2004], des couches de protection en céramique extérieur sur un substrat de pose Ni-superalliage 'NiCrAlY'. Par conséquent, les revêtements ont été déposés par diverses techniques métallurgiques. Les FGMs peuvent également trouver des applications dans les techniques de communication et d'information.

Comme une dernière observation concernant Les FGMs, on peut noter que ce concept de matériaux à gradient fonctionnel a démontré que la composition graduelle micro/macro structurale peut non seulement rejeter les effets indésirables tels que la concentration de contrainte, mais peut aussi générer une fonction unique sans pareille Krell [Krell et al, 1999]. Le concept des FGMs est applicable à divers domaines, comme illustré sur la Figure II.5.



*Figure II.5 : Les principaux domaines d'application des FGM.*

### II.3. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.6) [Koizumi, 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM.

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch,1986].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

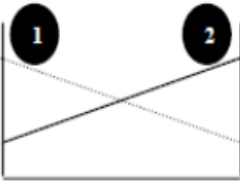
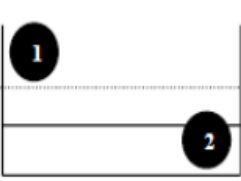
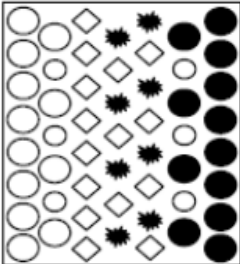
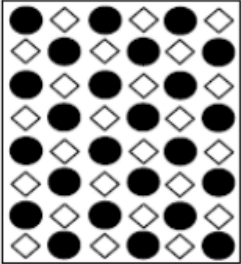
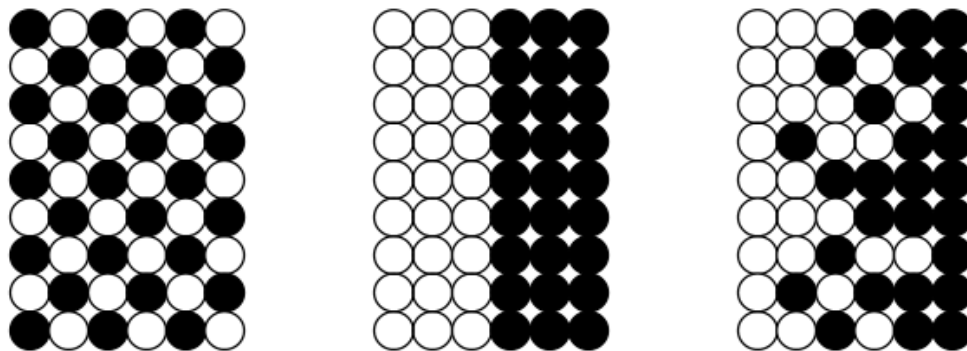
<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure II.6 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi et al, 1996]

Yoshihisa (2004) a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure I-7). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en terme de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c)

Figure II.7 : La distribution composante des matériaux [Yoshihisa, 2004]

#### II.4. Les propriétés matérielles effectives des FGMs (homogénéisation)

Les FGMs sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser comme continua avec leurs propriétés mécaniques variant continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace.

Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi il aidera à l'évolution et le développement de modèles numériques des structures faites par les FGMs. Il est à noter que la répartition de matière dans les structures des FGMs peut être conçue pour diverses spécifications spatiales.

Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure II.8.a);
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure II.8.b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ).

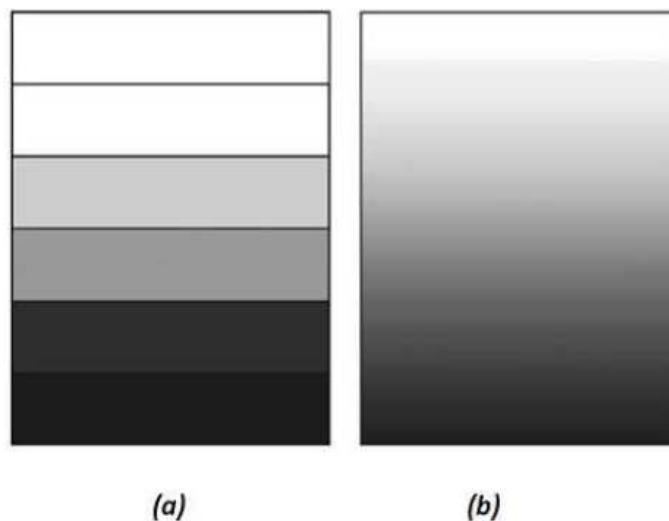


Figure II.8 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

#### II.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés

d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

### II.5.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec, 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

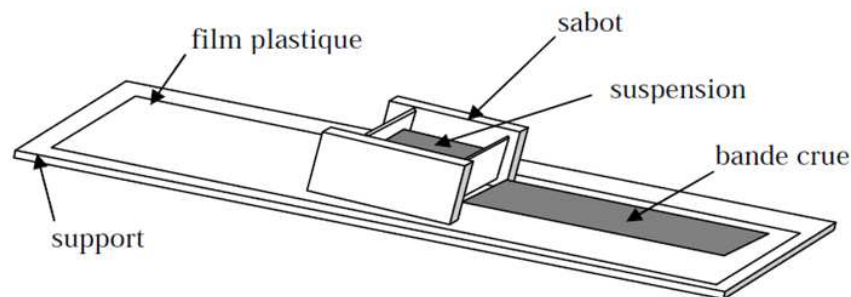


Figure II.9 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997]

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler, 1973]; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermocompression [Boch et al, 1986].

### II.5.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise" ;
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet de :

- Pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) [Moya et al, 1992] ;
- Une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **II.5.3. Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop et al, 1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### **II.5.4. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens et al, 1990].

### **II.5.5. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi et al, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

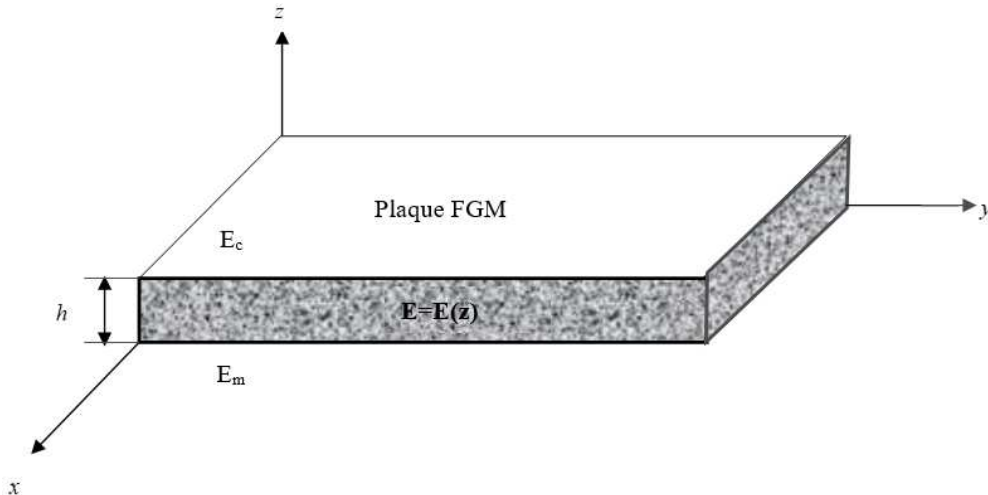
## **II.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM**

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de

puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure II.10 :** Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### II.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

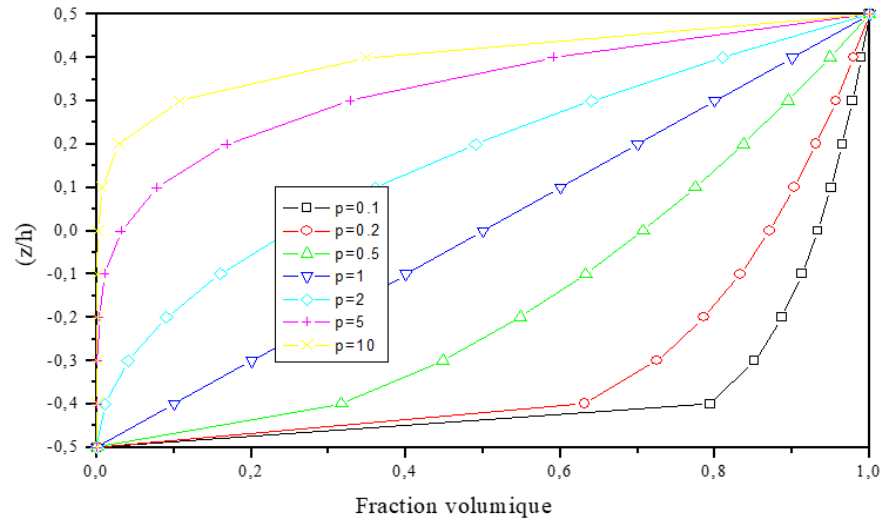
$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{II.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang, 1995]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{II.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparait

clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .



**Figure II.11 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

Comme il est présenté sur la figure II.11, le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites (modèle de Voigt). Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young  $E$ , et la densité  $\rho$  et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} (s_j * g_j) \quad (\text{II.3})$$

Là où le  $S_j$  et le  $g_j$  sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche  $jj$  (Figure II.8.a), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \quad (\text{II.4})$$

## II.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao et Wang, 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Chi et al, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.5.a})$$

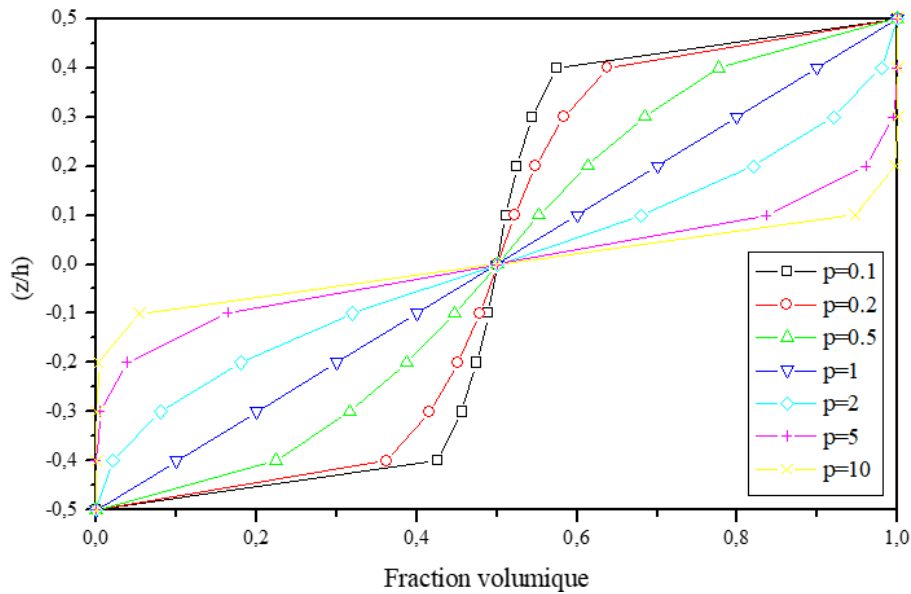
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.6.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.6.b})$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (II.6.a) et (II.6.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).



**Figure II.12:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### II.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [Delale et Erdogan, 1983] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{II.7.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{II.7.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.13.

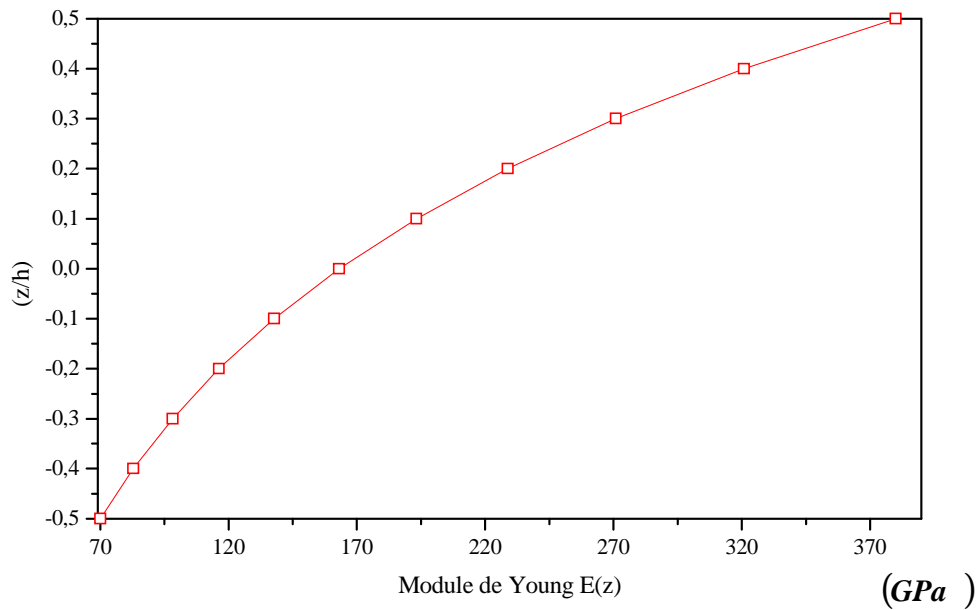


Figure II.13 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

## II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs principales méthodes d'élaboration, leurs domaines d'application et les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

**III** ————— **CHAPITRE**

REVUE SUR LES ETUDES REALISEES  
SUR LES MATERIAUX  
« FGM »

**Chapitre III :****Revue sur les Etudes Réalisées sur  
les Matériaux FGM****III.1. Introduction :**

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives avec une composition variable et continue dans l'espace. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressants dans des applications potentielles, une réduction importante des contraintes dans le plan et à travers l'épaisseur, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, une grande ténacité, et une réduction du facteur d'intensité de contrainte.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés à ces matériaux et il est prudent de réduire la recherche bibliographique dans ce chapitre en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes liés aux plaques en FGM. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermique et/ou thermomécanique du flambage. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

**III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles****III.2.1. Approche monocouche équivalente**

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

**III.2.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)**

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $l/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure III.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

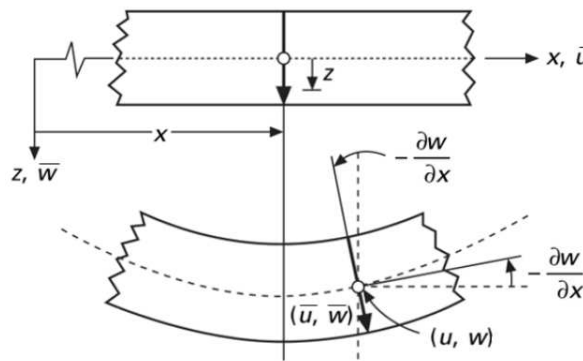
Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger. [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959], et Reddy. ([Reddy, 1997] et [Reddy, 1999]), En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{III.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{III.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.1.c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



*Figure III.1 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques*

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### III.2.1.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans ([Reissner, 1945], [Mindlin, 1951]) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959], [Reddy, 1997] et [Reddy, 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (\text{III.2.a})$$

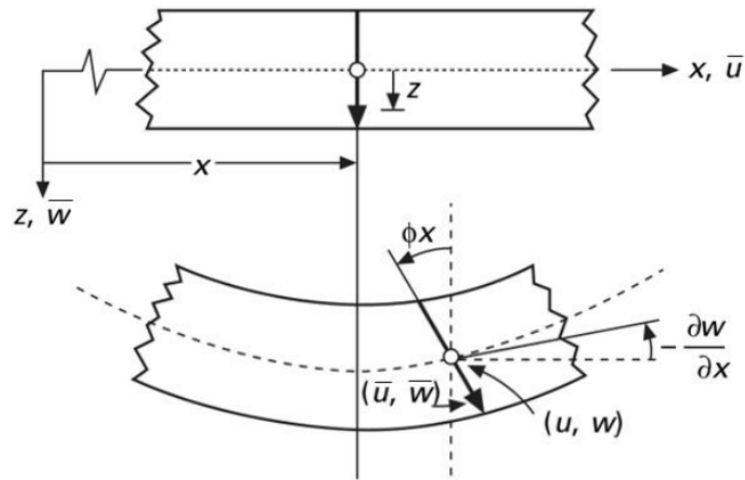
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (\text{III.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.2.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

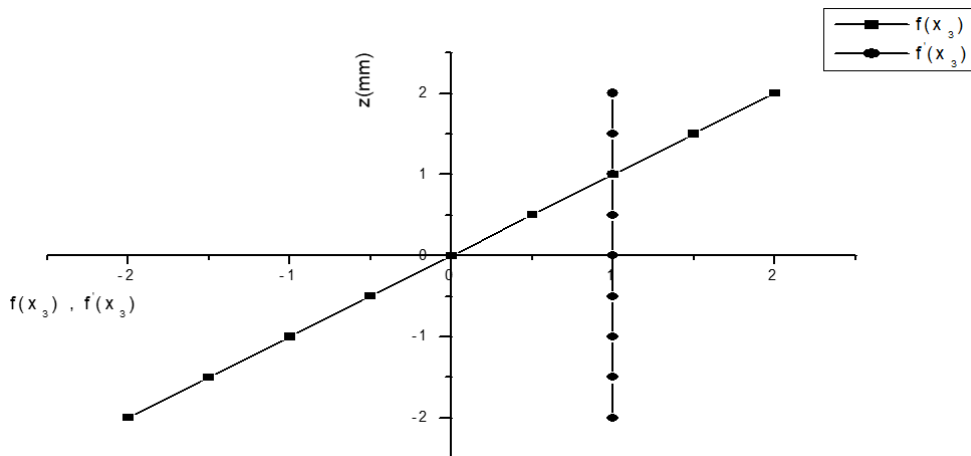
Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,

$$\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$



**Figure III.2 :** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [Whitney ,1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.



**Figure III.3 :** Variation de la fonction de gauchissement  $f(z) = z$  et  $f'(z)$  en fonction de l'épaisseur.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### III.2.1.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans ([Hildebrand et al, 1949], [Naghdi, 1957], [Reissner, 1975], [Reddy, 1984], [Kant et Swaminathan, 2002]). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

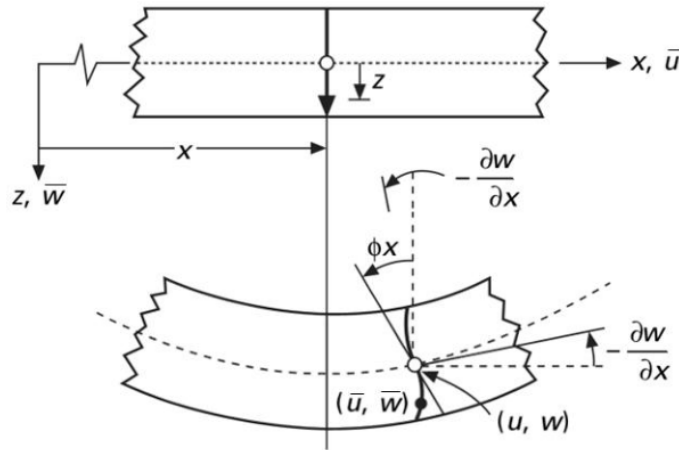


Figure III.4 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (III.3.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (III.3.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (III.3.c)$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement  $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .

La théorie de déformation en cisaillement d'ordre trois de Reddy (TSDT) ([Reddy, 1997], [Reddy, 1999]) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (III.4)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier. [Touratier, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (III.5)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory **ESDPT**) développée par Karama et al. [Karama et al, 2003] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (III.6)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory **HSDPT**) développée par Ait Atmane et al. [Ait Atmane et al, 2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (III.7)$$

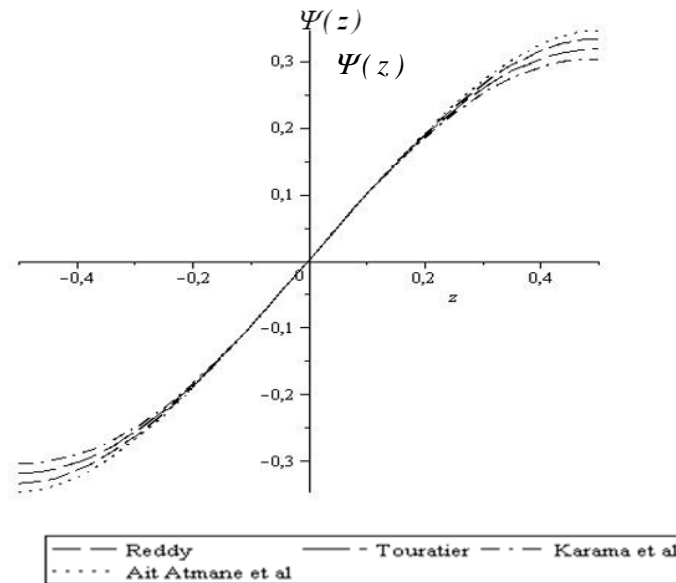
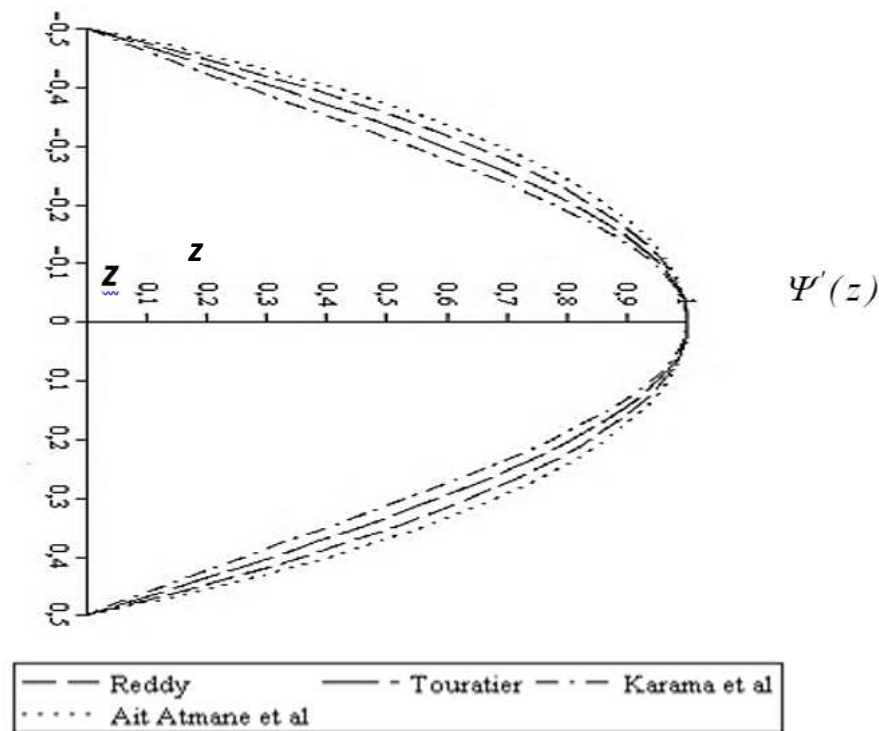


Figure III.5 : Variation de la Fonction de Forme  $\Psi(z)$  des Différents Modèles en Fonction de l'Epaisseur.



**Figure III.6 :** Variation de la Dérivée de la Fonction de Forme  $\Psi'(z)$  des Différents Modèles Suivant l'épaisseur.

### III.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La figure I.5 et les Equations (III.3) et (III.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par (Chabot. [Chabot, 1997], Carrera. [Carrera, 2000], Afaq et al. [Afaq et al, 2003], Reddy. [Reddy, 1984], Di Sciuva. [Di Sciuva, 1987]). Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact sont indépendantes du nombre de couches. (Figures. III.7 et III.8).

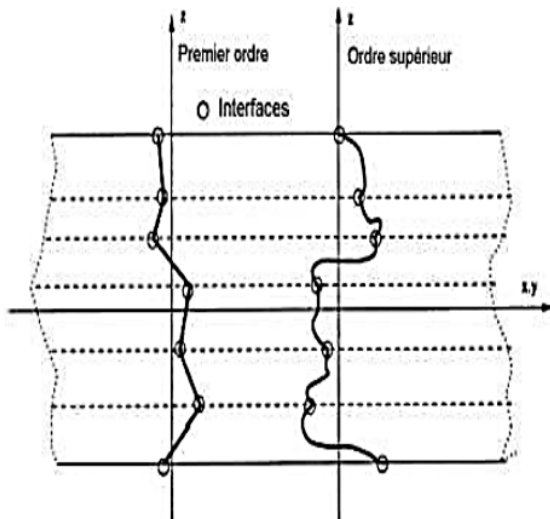


Figure III.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen, 2004]

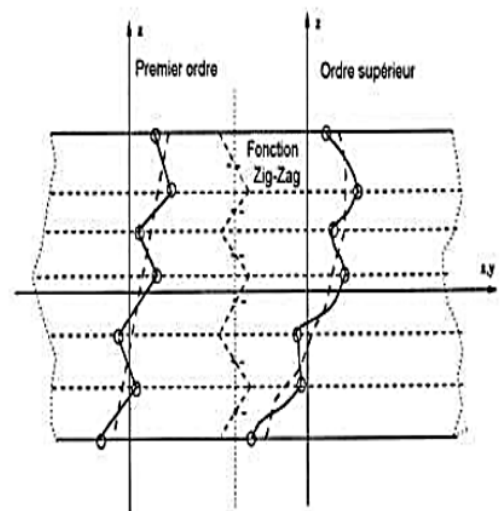


Figure III.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Nguyen, 2004]

### III.2.2.1. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva, 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside).

La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

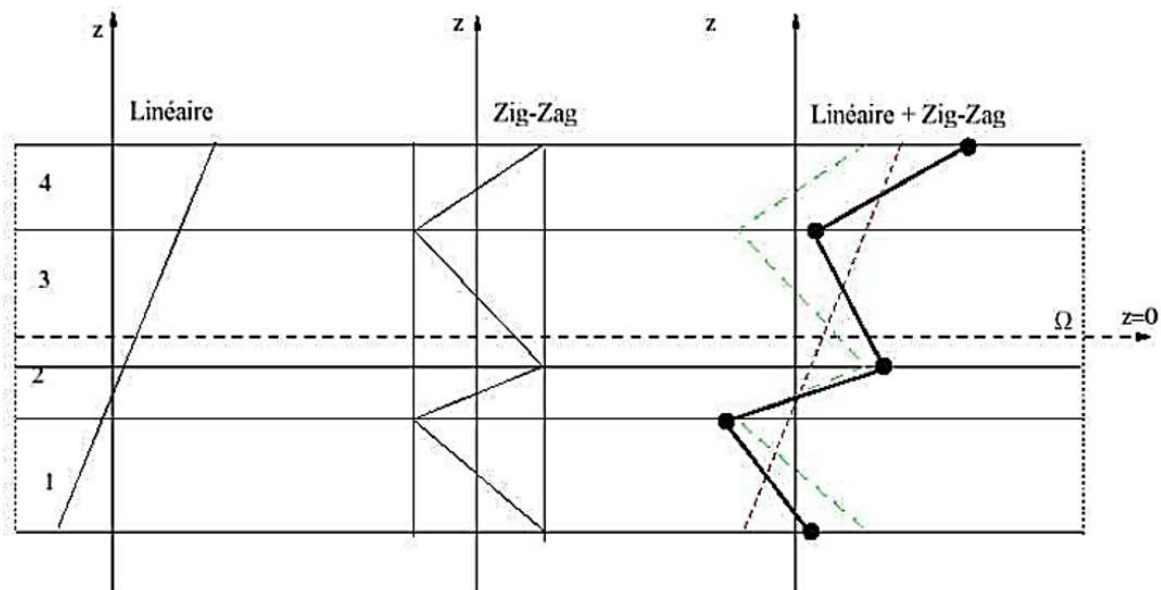
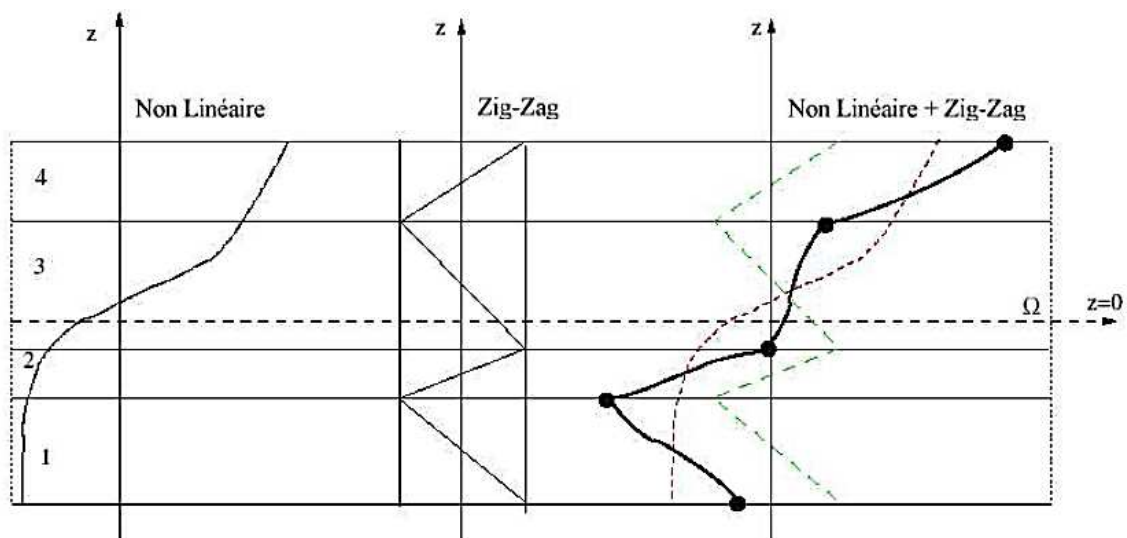


Figure. III.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Nguyen, 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction en se basant sur le concept de plusieurs auteurs a réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag, [Nguyen, 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



*Figure. III.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur  
[Nguyen, 2004]*

Dans les travaux de Karama et al. [Karama et al, 1998], Ossadzow et Touratier. [Ossadzow et Touratier, 2001], la fonction sinus de Touratier. [Touratier, 1991] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [Afaq, 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [Icardi et Bertetto, 1995]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type «  $C^1$  » demandée qui complique leur implémentation numérique.

### III.2.2.2. Les modèles en couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. III.7). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couples par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (Srinivas. [Srinivas, 1973], Reddy. [Reddy, 1987], Tahani et Nosier. [Tahani et Nosier, 2003]), on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de (Ren. [Ren, 1986], Kassapoglou et Lagace. [Kassapoglou et Lagace, 1987], Yin. [Yin, 1994]) Utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi Ren. [Ren, 1986] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou et Lagace, 1987], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [Yin, 1994], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [Pagano, 1978]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouche à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen, 2004].

### III.3. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes.

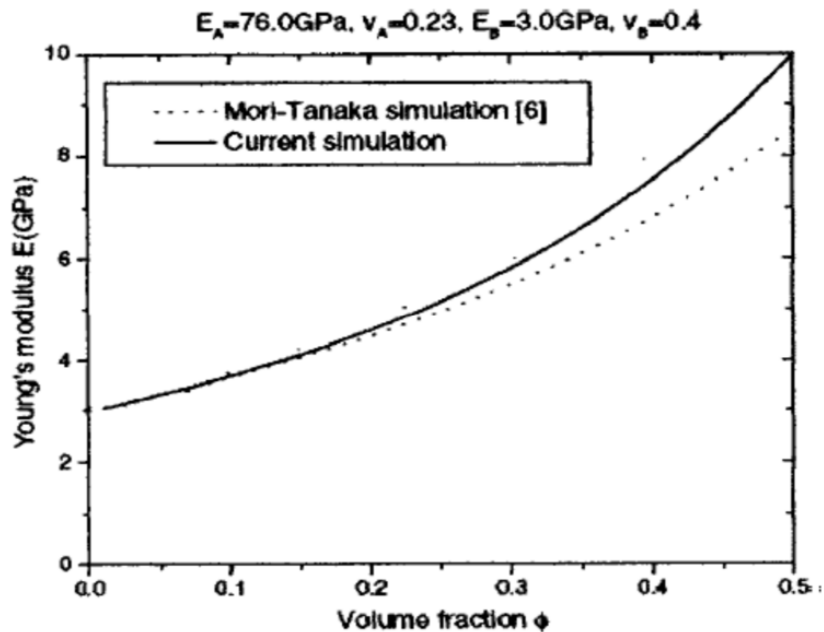
Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [Zuiker, 1995] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent, le modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations de la fraction volumique. Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références (Reuter) [Reuter et al, 1997]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et ha [Cho et Ha, 2001] ont comparé la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [Pal, 2005] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogènes mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant compte de l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publiée [Yin et al, 2004]. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans la figure III.4, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [Yin et al, 2004] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérés exacts. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.



**Figure III-11 :** Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenue par le modèle développé par Yin et al [Yin et al, 2004] et le modèle de Mori-Tanaka.

#### III.4. Modèles éléments finis des structures composites

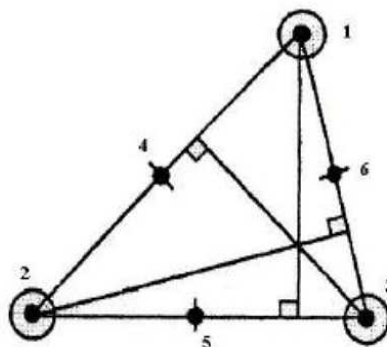
Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides). Ci-dessous, nous passons en revue différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

### III.4.1. Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction, Reddy. [Reddy, 1980], Ganapathi et Touratier. [Ganapathi et Touratier, 1997]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité  $C_0$ , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeurs de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans [Nguyen, 2004] une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Nguyen, 2004].

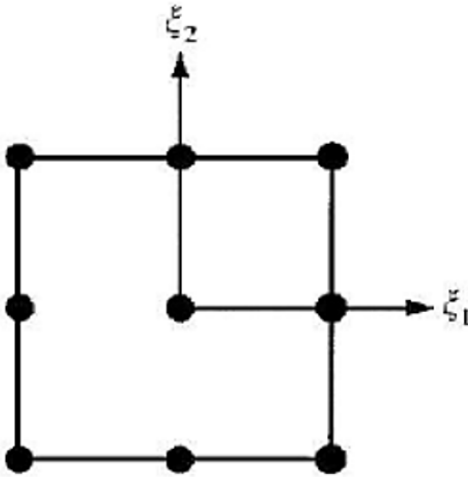
Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux «  $w$  » mais encore leurs dérivées normales doivent être continus à travers des frontières inters éléments [Reddy, 1999]. Dans [Ren, 1986], un élément de continuité «  $C^1$  » basé sur le modèle cubique de Reddy. [Reddy, 1984] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse. En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier. [Touratier, 1991], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité «  $C^1$  » sont développés (Nguyen. [Nguyen, 2004] et Polit et Touratier. [Polit et Touratier, 2002]). L'élément triangulaire développé par Polit et al. Est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds.

La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurés. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure. III.12.

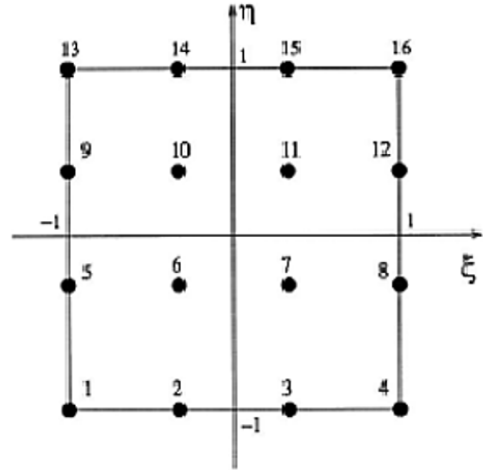


**Figure III.12 :** Elément « sinus » triangulaire 6 nœuds de [Polit, 2002].

Les travaux de Khare. [Khare et al, 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures. III.13 et III.14). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:



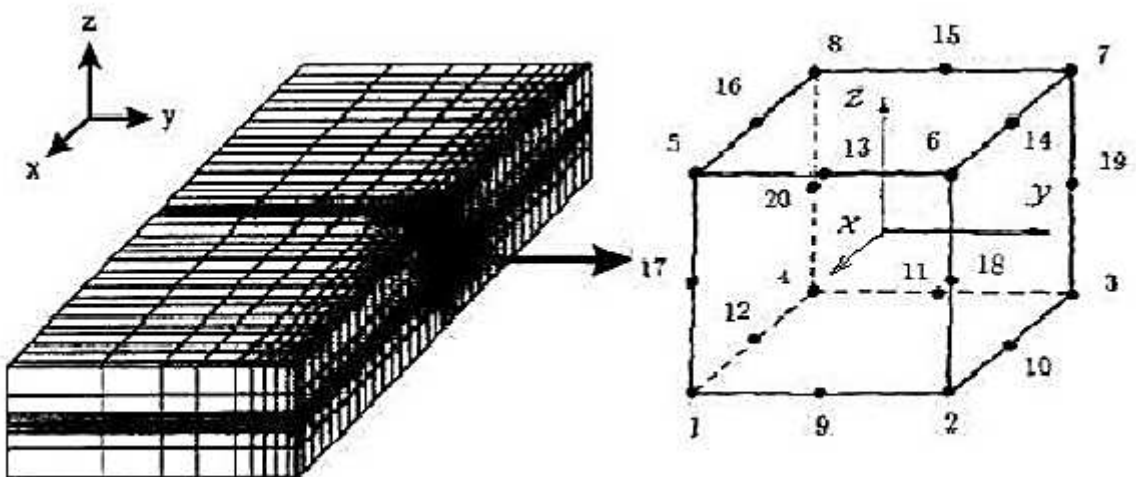
**Figure III.13 :** Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [Nguyen, 2004]



**Figure III.14 :** Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [Nguyen, 2004]

### III.4.2. Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso paramétrique 20 nœuds de Raju et Crews. [Raju et Crews, 1981] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure. III.15.



**Figure III.15 :** Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant Z [Nguyen ,2004].

Icardi et al. [Icardi et al, 1995] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 nœuds (Figure. III.16) et un élément singulier 15 nœuds (Figure. III.17) généré à partir d'un élément de brique 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases "prédicteur-correcteur" est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la Figure. III.18.

Cho et al. [Cho et Averill, 2000] développe un élément fini brique zig-zag à 8 nœuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans [Desai et al, 2003] un élément mixte à 18 nœuds est proposé (Figure. III.19). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément est à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux nœuds sont les contraintes inter laminaires.

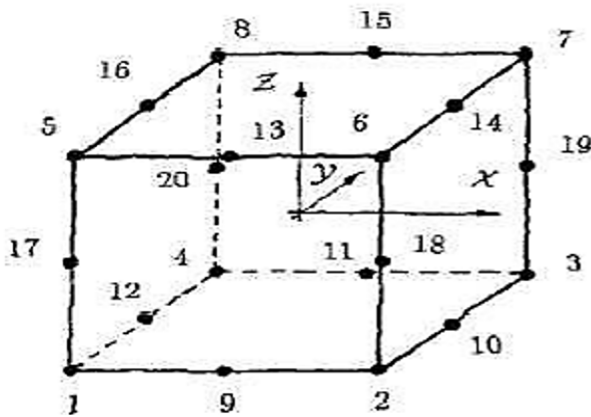


Figure III.16 : Élément brique à 20 nœuds

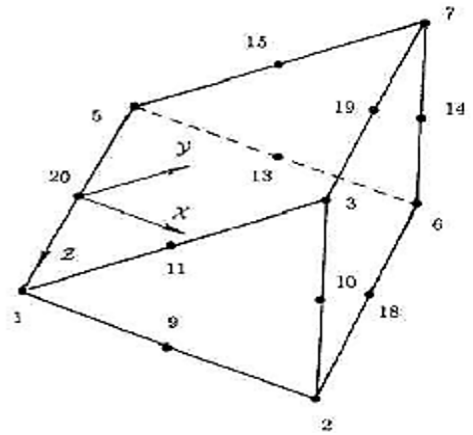


Figure III.17 : Élément singulier à 15 nœuds

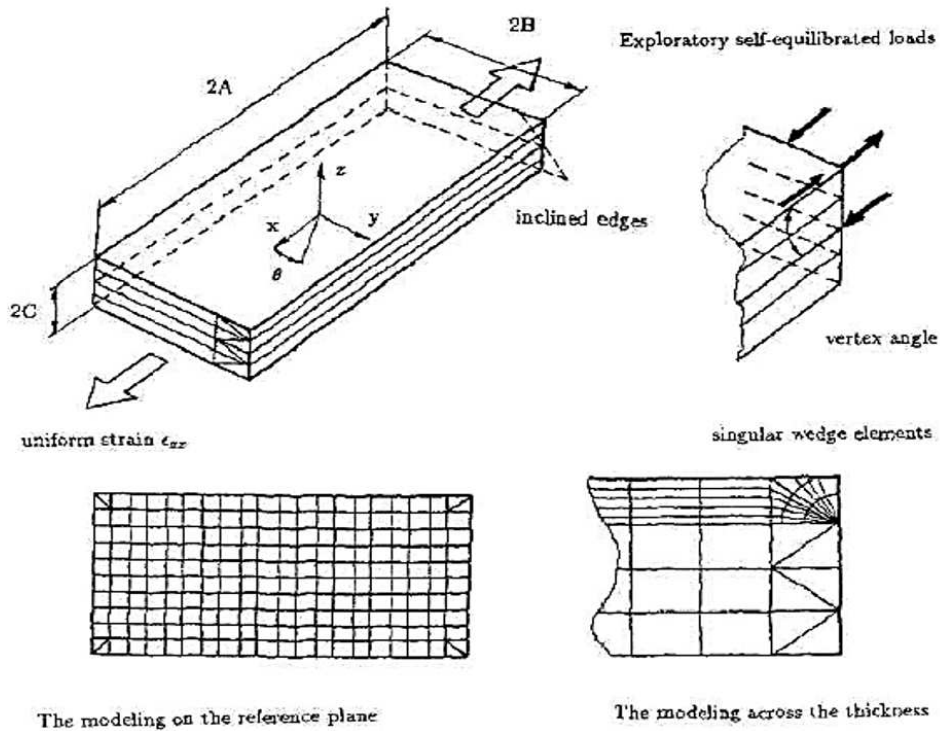


Figure III.18 : Etudes du problème de bord libre par EF 3D.

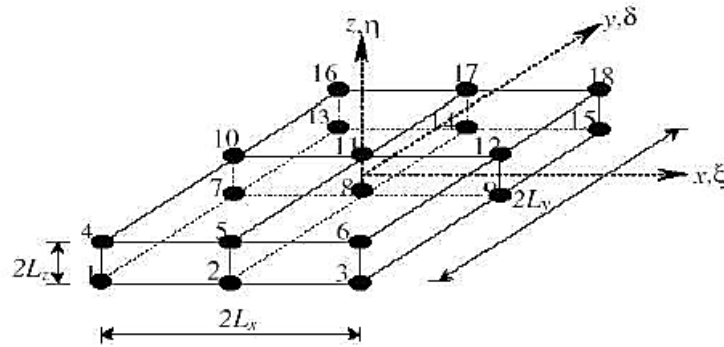


Figure.III.19 : Elément brique mixte à 18 nœuds.

Dans [Bui et al, 2000] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (voir Figure. III.20). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

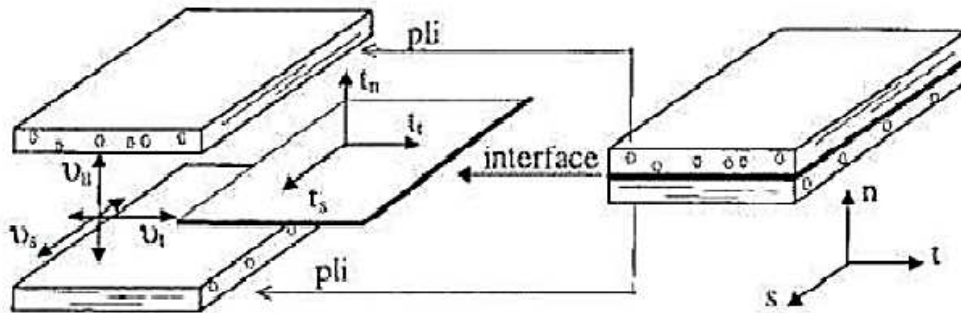


Figure III.20 : Elément d'interface.

Cette méthode évite un écueil classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les l'élément finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singulières et dépendent du raffinement du maillage.

### III.5. Etudes sur les contraintes résiduelles

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux micromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujéti à un environnement haute-température.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drake et al [Drake et al, 1993] et Williamson et al [Williamson et al, 1993]. Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Ni) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos, Suresh et al. [Giannakopoulos et al, 1995] ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson et al. [Williamson et al, 1993] Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Ni. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques.

Finot et al. [Finot et al, 1996] complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran. [Ravichandran, 1995] a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin. [Hill et Lin, 2002] qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

### III.6. Etudes sur les problèmes du flambement et flexion des plaques FGM

Le flambement et la flexion des plaques de FGM sous des charges thermiques ou thermomécaniques ont été étudiés par de nombreux chercheurs. Cheng et Batra [Cheng et Batra, 2000] ont examiné les déformations thermomécaniques d'une plaque elliptique FG élastique linéaire avec des bords rigidement serrés. Reddy et Cheng [Reddy et Cheng 2001] ont étudié les déformations thermomécaniques 3D de plaques rectangulaires FG simplement supportées en utilisant une approche asymptotique. Vel et Batra [Vel et Batra, 2002] ont proposé une solution exacte pour les déformations 3D d'une plaque épaisse de FG supportée simplement soumise à des charges mécaniques et thermiques. Feldman et Aboudi [Feldman et Aboudi, 1997] ont étudié la bifurcation élastique des plaques FG sous chargement en compression dans le plan, en se basant sur une combinaison d'approches micromécaniques et structurelles.

[Bouhadra et al, 2015] ont étudié du comportement mécanique des plaques FGM ayant des coefficients de dilatation thermique variables à travers l'épaisseur. Matsunaga [Matsunaga, 1997] a montré les instabilités de flambement d'une plaque élastique épaisse

simplement supportée soumise à des contraintes dans le plan. Najafizadeh et Eslami [Najafizadeh et Eslami, 2002] ont analysé la réponse de flambement de la plaque circulaire solide chargée radialement en matériau gradué fonctionnellement. En employant le HSDT, Najafizadeh [Najafizadeh et al, 2008] ont également présenté une solution exacte pour le flambement des plaques circulaires FG sous compression radiale uniforme. Ganapathi et Prakash [Ganapathi et Prakash, 2006] ont étudié la stabilité thermique d'une plaque asymétrique FG supportée simplement en employant le FSDT en conjonction avec la méthode des éléments finis. Sur la base de la théorie classique des plaques (CPT), Ma et Wang [Ma et Wang, 2003] ont examiné la flexion axisymétrique de grande flexion d'une plaque circulaire FG qui est étudiée sous des charges mécaniques et thermiques.

Bui [Bui et al, 2013] ont étudié les réponses transitoires et les fréquences propres des faisceaux sandwich avec un noyau non homogène à gradient fonctionnel en proposant une nouvelle méthode sans maillage dans laquelle le champ de déplacement est approché par la méthode d'interpolation radiale ponctuelle (RPIM) indépendamment des mailles prédéfinies. Ils sont évalués par la méthode de transformation dite cartésienne (CTM) pour éviter le besoin d'une cellule de fond. Kar et Panda [Kar et Panda, 2015a] ont analysé le comportement de flexion à grande déformation de la coque sphérique FG en utilisant la méthode des éléments finis. Kar et Panda [Kar et Panda, 2015b] ont également étudié la vibration non linéaire en flexion du panneau de calotte sphérique FG déformable par cisaillement. Morimoto [Morimoto et al, 2006] ont discuté du comportement au flambement thermique des plaques rectangulaires FG soumises à un chauffage partiel dans un plan et à une élévation de température uniforme dans son épaisseur.

Na et Kim [Na et Kim, 2006] ont étudié les structures composites FG composées de céramique, de matériaux fonctionnalisés (FGM) et de couches métalliques. En utilisant la méthode des éléments finis, Na et Kim [Na et Kim, 2004] ont également étudié le flambement thermique 3D des plaques FG. Lee [Lee et al, 2010] ont étudié la réponse post-flambement des plaques FG dans des conditions de compression de bord et de champ de température en utilisant la méthode kp-Ritz sans élément. Basé sur la surface neutre des structures, Lee [Lee et al, 2016] ont également examiné le comportement de stabilité thermique des plaques FG. Le flambement des plaques FG piézoélectriques sous chargement thermo-électromécanique est étudié par Liew [Liew et al, 2013] en employant le HSDT. Bourada [Bourada et al, 2012] ont proposé une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich FG. Tran [Tran et al, 2013] ont proposé une approche par éléments finis isométriques (IGA) en combinaison avec la théorie de la plaque de déformation de troisième ordre pour l'analyse de la stabilité thermique des plaques de FG.

Yaghoobi [Yaghoobi et al, 2014] ont présenté une étude analytique sur l'analyse postbœuf et non linéaire des vibrations des poutres FG reposant sur des fondations élastiques non linéaires sous chargement thermomécanique. En utilisant une méthode locale sans mailles de Kriging, Zhang [Zhang et al, 2014] ont examiné les comportements de flambement mécanique et thermique des plaques FG. Tung [Tung, 2015] a étudié la réponse en flexion et en post-flambement non linéaire de plaques sandwich FG reposant sur des fondations élastiques et soumises à une pression externe uniforme. En utilisant la théorie 3D

exacte de l'élasticité, Asemi et Shariyat [Asemi et Shariyat, 2016], à la place des modèles de plaques approchées, étudient les influences de l'auxétiq ue hétérogène des matériaux dans les réponses uniaxiales et biaxiales post-flambement des plaques FG. Yu et al. (2016a) ont étudié les résultats numériques de la stabilité thermique des plaques FG avec des défauts internes (par exemple, fissure ou découpe) en utilisant l'étude isogéométrique étendue (XIGA). Basé sur le FSDT, Yaghoobi et Yaghoobi [Yaghoobi et Yaghoobi, 2013] ont étudié la réponse de stabilité des plaques sandwich avec des feuilles faciales FG reposant sur une fondation élastique. Sobhy [Sobhy, 2013] a examiné la stabilité et la vibration libre de plaques sandwich à gradations exponentielles reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. Ait Amar Meziane [Ait Amar Meziane et al, 2014] ont discuté du comportement de flambement et du comportement dynamique des plaques sandwich FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement raffinée simple et efficace. Swaminathan et Naveenkumar [Swaminathan et Naveenkumar, 2014] ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse de stabilité des plaques FG en utilisant des modèles de calcul raffinés d'ordre supérieur.

Adda Bedia [Adda Bedia et al, 2015] ont examiné les caractéristiques de flambement thermique d'un nanotube de carbone à paroi simple encastré dans un milieu élastique basé sur l'élasticité du continuum non local. Nguyen [Nguyen et al, 2015] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur raffinée pour l'analyse de flexion, de vibration et de flambement des plaques sandwich FG. Bouguenina [Bouguenina et al, 2015] ont présenté une analyse numérique de plaques FGM d'épaisseur variable soumises à un flambement thermique. Bakora et Tounsi [Bakora et Tounsi, 2015] ont étudié le comportement post-flambement thermo-mécanique de plaques FG épaisses reposant sur des fondations élastiques. Barati et Shahverdi [Barati et Shahverdi, 2016] ont présenté une théorie des plaques à quatre variables pour la vibration thermique des nanoplaques FG incorporées sous des distributions de température non uniformes avec différentes conditions aux limites. Beldjelili [Beldjelili et al, 2016] ont étudié la flexion hygro-thermo-mécanique de plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables à l'aide d'une théorie des plaques trigonométriques à quatre variables.

Ahouel [Ahouel et al, 2016] ont discuté du comportement mécanique dépendant de la taille de nanofaisceaux déformables trigonométriques à gradient fonctionnel, y compris le concept de position de surface neutre. Abdelhak [Abdelhak et al, 2016] ont examiné la réponse au flambement thermique de plaques sandwich à gradient fonctionnel avec des conditions aux limites serrées. Barka [Barka et al, 2016] ont discuté du comportement de post-flambement thermique de plaques de FGM sandwich dépendant de la température imparfaite reposant sur la fondation élastique Pasternak. El-Hassar [El-Hassar et al, 2016] ont analysé la stabilité thermique de plaques fonctionnelles à gradient solaire sur une fondation élastique en utilisant une théorie de déformation par cisaillement hyperbolique efficace. Ghorbanpour Arani [Ghorbanpour Arani et al, 2016] ont étudié le flambement dynamique de nano-plaques viscoélastiques FGM reposant sur un milieu élastique orthotrope basé sur la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal. Trinh [Trinh et al, 2016] ont analysé les réponses post-flambement des faisceaux de FGM élastoplastiques sur des fondations élastiques non linéaires. Chikh [Chikh et al, 2016] ont étudié le

postboucillement thermo-mécanique de plaques S-FGM symétriques reposant sur des fondations élastiques de Pasternak à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique.

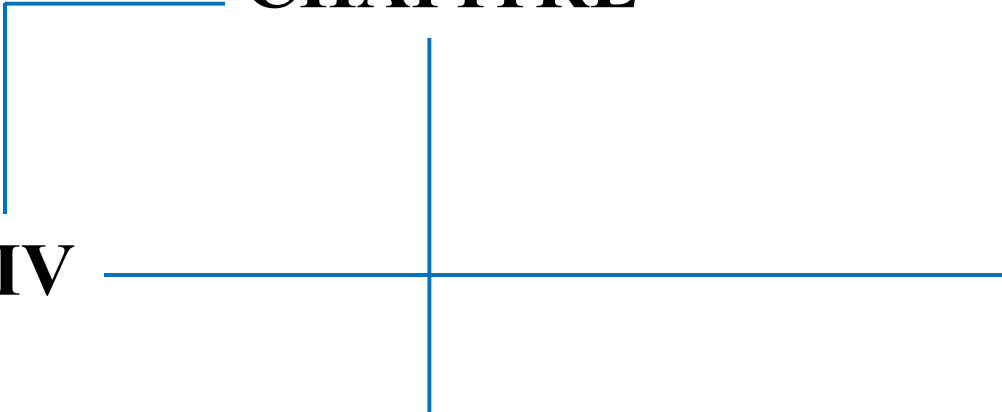
Bouderba [Bouderba et al, 2016] ont analysé la réponse au flambement thermique des plaques sandwich FG en utilisant une théorie simple de la déformation par cisaillement. Laoufi [Laoufi et al, 2016] ont analysé le comportement mécanique et hygrothermique des plaques FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Khetir [Khetir et al, 2017] ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique non locale pour l'analyse du flambement thermique de plaques FG nanométriques incorporées. Klouche [Klouche et al, 2017] ont présenté une théorie originale de déformation de cisaillement à simple variable pour l'analyse de flambement de plaques isotropes épaisses. Meksi [Meksi et al, 2017] ont présenté une solution analytique pour les réponses en flexion, flambement et vibration des plaques sandwiches FGM. Liu [Liu et al 2017] ont analysé les plaques FG par une méthode isogéométrique hyperbolique quasi-3D sans verrouillage. Yu [Yu et al, 2017] ont utilisé l'analyse isogéométrique (IGA) basée sur le FSDT sans effet de cisaillement pour présenter les nouveaux résultats numériques du flambement thermo-mécanique des plaques rectangulaires et inclinées FG sous des charges thermiques et mécaniques combinées.

El-Haina [El-Haina et al, 2017] ont proposé une approche analytique simple pour le flambement thermique des plaques sandwich FG épaisses. Bellifa [Bellifa et al, 2017] ont proposé une théorie non linéaire de la déformation de cisaillement d'ordre zéro pour le post-pincement non linéaire des nanofaisceaux. Yin [Yin et al, 2016] ont présenté une étude numérique du flambement et de la vibration libre de plaques à gradient fonctionnel considérant l'inhomogénéité des matériaux dans le plan en utilisant une approche nouvelle et efficace basée sur l'analyse isogéométrique (IGA) et le HSDT. Bui [Bui et al, 2016] ont présenté une formulation d'éléments finis pour une plaque de FG chauffée prenant les avantages d'une nouvelle théorie simple de plaque de déformation de cisaillement du troisième ordre. L'avantage de cette nouvelle théorie est qu'elle fournit sensiblement plus de précision que d'autres théories de plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Cela peut être dû au fait que la cinématique des déplacements est dérivée d'une formulation d'élasticité plutôt que de l'hypothèse de déplacements comme cela est décrit par Shi [Shi, 2007]. Bien que la théorie présentée par Bui [Bui et al, 2016] n'a que cinq variables, le développement d'autres théories avec moins de variables est intéressant pour le présent travail.

### III.7. Conclusion

Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau, que depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire.

**CHAPITRE**



**IV**

**ANALYSE DE STABILITE THERMIQUE  
DES PLAQUES SANDWICHES  
EN « FGM »**

**Chapitre IV :**

# **Analyse de Stabilité Thermique des Plaques Sandwiches en FGM**

**IV.1. Introduction**

Les structures sandwiches, en raison de leurs caractéristiques exceptionnelles, telles qu'une rigidité élevée et un faible poids, ont été largement utilisées dans les domaines aéronautique, aérospatial, naval / maritime, de la construction, du transport et de l'énergie éolienne [Vinson, 2001] et [Vinson, 2005]. Cependant, la variation brusque des caractéristiques du matériau au sein des interfaces entre les feuilles de face et le noyau peut entraîner des contraintes d'interfaces importantes induisant une délamination, ce qui est un problème important dans les structures sandwiches classiques. De plus, la différence des coefficients thermiques des matériaux peut induire des contraintes résiduelles. Afin de résoudre ces problèmes, le concept de matériau (FGM) est introduit dans la conception des plaques sandwiches. Les FGM sont des matériaux composites avancés hétérogènes où les propriétés mécaniques varient de façon continue et graduelle d'une surface à l'autre. L'utilisation de tels matériaux nous aide à éliminer mécaniquement et thermiquement les contraintes induites par la distribution non graduelle des propriétés matérielles et à améliorer l'adhérence.

Ce chapitre présente une solution analytique pour étudier la stabilité thermique des plaques sandwiches FGM sous une élévation de température uniforme, linéaire et non linéaire en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement trigonométrique. La nouvelle théorie des plaques est construite en incluant le terme intégral dans le champ de déplacement conduisant à une réduction du nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes. Ainsi, on peut noter que la nouveauté de cette théorie est l'utilisation du terme intégral dans les déplacements dans le plan contrairement à d'autres théories simples similaires avec quatre variables [Vu et al, 2017], [Yu et al, 2015], [Yu et al, 2016b], où nous n'utilisons pas ce terme. Les formulations mathématiques comprennent les influences des charges thermiques et la non-linéarité de Von-Karman. Les effets de l'indice matériel, les paramètres géométriques et les variations de température sur la réponse de la plaque sandwich FGM sont discutés en détails. Les résultats de ce travail sont comparés avec les données disponible dans la littérature.

**IV.2. Formulation du problème**

La géométrie et les dimensions de la plaque sandwich FG sont représentées sur la figure IV.1. Le système des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  est utilisé pour décrire des déformations infinitésimales d'une plaque élastique sandwich à trois couches occupant la région  $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$  dans la configuration de référence, et les axes sont parallèles aux bords de la plaque. La plaque a la longueur, la largeur et l'épaisseur uniforme. Le plan médian de la plaque sandwich FG est défini par  $z = 0$  et ses surfaces

externes étant définies par  $z = \pm h/2$ . Les coordonnées suivant l'axe  $z$  de la surface inférieure, les deux interfaces entre les couches de l'âme et la surface supérieure sont respectivement notées :  $h_0 = -h/2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3 = +h/2$ .

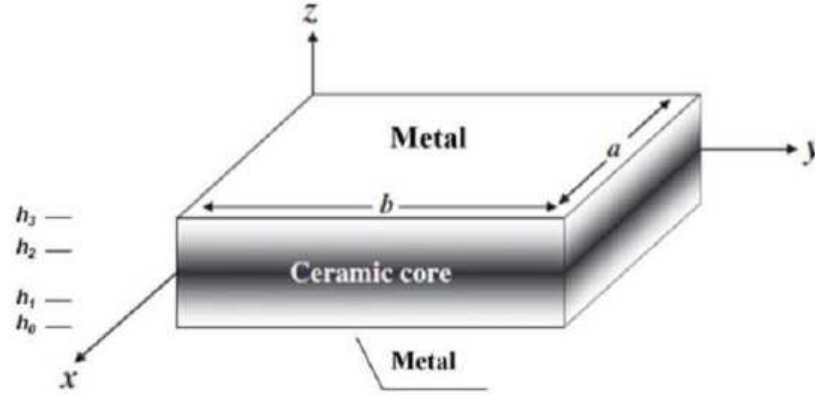


Figure IV.1 : Géométrie de la plaque sandwich FGM

Les propriétés matérielles effectives pour chaque couche, telles que le module de Young, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique, peuvent être définies selon : [Ait Atmane et al, 2015], [Mahi et al, 2015], [Meksi et al, 2015], [Attia et al, 2015], [Tounsi et al, 2016].

$$P^{(j)}(z) = (P_c - P_m)V^{(j)}(z) + P_m \quad (IV.1)$$

où  $P^{(j)}$  est la propriété matérielle effective de FGM de couche  $j$ .  $P_m$  et  $P_c$  sont le module de Young ( $E$ ), le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) et le coefficient de dilatation thermique ( $\alpha$ ) des faces inférieure et supérieure de la couche 1 ( $h_0 \leq z \leq h_1$ ), respectivement, et vice versa pour la couche 3 ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ) en fonction de la fraction volumique  $V^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Notez que  $P_m$  et  $P_c$  sont, respectivement, les propriétés correspondantes du métal et de la céramique de la plaque sandwich FG. On suppose que la fraction volumique  $V^{(j)}$  des FGM obéit à une fonction de loi de puissance à travers l'épaisseur [Bourada et al, 2012], [Tounsi et al, 2013], [Taibi et al, 2015], [Bennoun et al, 2016].

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k & \text{for } z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)}(z) = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k & \text{for } z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (IV.2)$$

où  $k$  est l'indice matériel, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La couche centrale est indépendante de la valeur de  $k$ , qui est une couche entièrement en céramique, par conséquent, cette valeur est égale à zéro. Ainsi, ce paramètre permet de contrôler le mélange céramique - métal.

### IV.2.1. Cinématique et déformations

Dans ce travail, le HSDT classique est modifié en prenant en compte certaines hypothèses simplificatrices afin de réduire le nombre d'inconnues. La théorie HSDT classique est définie par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{IV.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{IV.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.3.c})$$

où  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque,  $f(z)$  représente la fonction de gauchissement définissant la variation des déformations transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur. En considérant cela  $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$  et  $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$ , le champ de déplacement du HSDT proposé peut être écrit sous une forme plus simple [Merdaci et al, 2016], [Bourada et al, 2016], [Hebali et al, 2016], [Besseglier et al, 2017], [Fahsi et al, 2017] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV.4.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.4.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.4.c})$$

Dans ce travail, la fonction de gauchissement est définie par :

$$f(z) = \frac{z \left( \pi + 2 \cos \left( \frac{\pi}{h} z \right) \right)}{(2 + \pi)} \quad (\text{IV.5})$$

On peut voir que la cinématique dans l'équation (IV.4), utilise seulement quatre inconnues ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  et  $\theta$ ). Les équations déplacements-déformations non linéaires de Von Karman, sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Où

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} \quad (\text{IV.7.a})$$

$$\left\{ \begin{matrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{matrix} \right\} \quad (\text{IV.7.b})$$

et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.7.c})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de Navier et peuvent être exprimées par :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.8})$$

Dans lequel les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont exprimés en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas via Navier. Par conséquent, ils sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\mu^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \mu^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.9})$$

Où,  $\mu$  et  $\beta$  sont utilisés dans l'expression (IV.20).

Il est à noter que contrairement à la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT, ce modèle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement.

Les relations constitutives d'une plaque sandwich FG peuvent être exprimées par :

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\}^{(j)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(j)} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \right\}^{(j)} \quad (\text{IV.10})$$

Où,  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$ ) sont les coefficients de rigidité de la plaque sandwich FG définies par :

$$C_{11}^{(j)} = C_{22}^{(j)} = \frac{E^{(j)}(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12}^{(j)} = \frac{\nu E^{(j)}(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{44}^{(j)} = C_{55}^{(j)} = C_{66}^{(j)} = \frac{E^{(j)}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.11})$$

et  $T(x, y, z)$  est la variation de la température à travers l'épaisseur.

### IV.2.2. Équations de stabilité

Les équations d'équilibre des plaques sandwiches FG soumises à des charges thermiques peuvent être déterminées sur la base de l'énergie potentielle stationnaire [Reddy, 1984], [Bellifa et al, 2016], [Draiche et al, 2016]. Ces équations sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0 \\
 \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.12}$$

En utilisant les relations constitutives, les efforts et les moments résultants sont définies par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (1, z, f) \sigma_i^{(j)} dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{et} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} g(\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(j)} dz \tag{IV.13}$$

Après la substitution de l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.10) et les remplacer dans l'équation (IV.13), les résultantes des efforts sont obtenues sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \\ 0 \\ M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV.14.a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{IV.14.b}$$

Où les composantes de rigidité sont exprimés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} C_{11}^{(j)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \tag{IV.15.a}$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV.15.b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} C_{44}^{(j)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{IV.15.c})$$

Les efforts et les moments résultants,  $N_x^T = N_y^T$ ,  $M_x^{bT} = M_y^{bT}$  et  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ ; dus au chargement thermique, sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{E^{(j)}(z)}{1-\nu} \alpha^{(j)} T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.16})$$

Afin de déterminer les équations de stabilité et d'étudier la réponse de stabilité thermique de la plaque sandwich FG, le critère d'équilibre adjacent est utilisé [Brush et Almroth, 1975]. En utilisant cette approche, les équations de stabilité obtenues sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} &= 0 \\ -k_1 M_x^{s1} - k_2 M_y^{s1} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

où,  $N_x^0$ ,  $N_{xy}^0$  et  $N_y^0$  sont les efforts de pré-flambement. Eq. (IV.17) peut être exprimé en termes de déplacements ( $u_0^1, v_0^1, w_0^1, \theta^1$ ) en substituant les résultantes des efforts Eq. (IV.14). Pour la plaque sandwich FG, les équations de stabilité Eq. (IV.17) prendre la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x \partial y^2} + B_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x^3} \quad (\text{IV.18.a})$$

$$B_{12}^s B' k_2 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x \partial y^2} + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$A_{12} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial y^2} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x^2} \right) - B_{12} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0^1}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}^s A' k_1 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x^2 \partial y} \quad (\text{IV.18.b})$$

$$B_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial y^3} + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 \theta^1}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x^3} + B_{12} \left( \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial y^3} + 2B_{66} \left( \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^4} \\ - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial y^4} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^4} + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.18.c})$$

$$+ D_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial y^4} + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -B_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x^3} - B_{12}^s \left( A' k_1 \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} + B' k_2 \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} \right) - B_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial y^3} \\
& - D_{66}^s \left( (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 u_0^1}{\partial x \partial y^2} + (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 v_0^1}{\partial x^2 \partial y} \right) + D_{11}^s A' k_1 \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^4} + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& D_{22}^s B' k_2 \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial y^4} + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 w_0^1}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11}^s (A' k_1)^2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^4} - 2H_{12}^s A' k_1 B' k_2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s (B' k_2)^2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial y^4} \\
& - H_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)^2 \frac{\partial^4 \theta^1}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s (A' k_1)^2 \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial x^2} + A_{44}^s (B' k_2)^2 \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{IV.18.d}$$

### IV.3. Solution analytique

Les plaques sandwiches rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appui utilisé. Ici, nous sommes concernés par les solutions exactes de l'équation (IV.18) correspondantes à une plaque simplement appuyée.

Basé sur la solution de Navier, les expansions suivantes de déplacements  $u_0^1$ ;  $v_0^1$ ;  $w_0^1$  et  $\theta^1$  sont choisis pour satisfaire les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \\ \theta^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\mu x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\mu x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\mu x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\mu x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{IV.19}$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{mn}$ ,  $X_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer  $\mu$  et  $\beta$  sont définis comme suit :

$$\mu = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \tag{IV.20}$$

Substituer l'équation (IV.19) dans l'équation (IV.18), la solution exacte de la charge de flambement peut être obtenue par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + N_x^0 \mu^2 + N_y^0 \beta^2 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV.21}$$

Où ;

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -(A_{11} \mu^2 + A_{66} \beta^2) \\
a_{12} &= -\mu \beta (A_{12} + A_{66}) \\
a_{13} &= \mu (B_{11} \mu^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \beta^2) \\
a_{14} &= -\mu (B_{11}^s A' k_1 \mu^2 + B_{12}^s B' k_2 \beta^2 + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2) \\
a_{22} &= -\mu^2 A_{66} - \beta^2 A_{22} \\
a_{23} &= \beta (B_{22} \beta^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2) \\
a_{24} &= -\beta (B_{22}^s B' k_2 \beta^2 + \mu^2 (B_{12}^s A' k_1 + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)))
\end{aligned} \tag{IV.22}$$

$$a_{33} = -\mu^2 (D_{11}\mu^2 + (2D_{12} + 4D_{66})\beta^2) - D_{22}\beta^4$$

$$a_{34} = D_{11}^s A' k_1 \mu^4 + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2 \mu^2 + D_{22}^s B' k_2 \beta^4 + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2 \mu^2$$

$$a_{44} = -(H_{11}^s \mu^2 k_1 + 2k_1 \beta^2 H_{66}^s + 2H_{66}^s \mu^2 k_2 + H_{12}^s \mu^2 k_2 + k_1 \beta^2 H_{12}^s + k_2 \beta^2 H_{22}^s + A_y^{44} k_1 + A_y^{55} k_2)$$

En utilisant la technique de condensation pour éliminer les déplacements axiaux et l'équation (IV.21) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{33} + N_x^0 \mu^2 + N_y^0 \beta^2 & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mm} \\ X_{mm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

Où ;

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= a_{33} - \frac{a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \bar{a}_{34} &= a_{34} - \frac{a_{14}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{24}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \bar{a}_{43} &= a_{34} - \frac{a_{13}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) - a_{23}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \bar{a}_{44} &= a_{44} - \frac{a_{14}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) - a_{24}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Le système de l'équation homogène. (IV.23) a une solution non triviale uniquement pour les valeurs discrètes de la charge de flambement. Pour une solution non triviale, le déterminant des coefficients  $(W_{mm}, X_{mm})$  doit être égal à zéro.

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{33} + N_x^0 \mu^2 + N_y^0 \beta^2 & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

L'équation obtenue peut être résolue pour la charge de flambement. Ceci donne la relation suivante pour la charge de flambement :

$$N_x^0 \mu^2 + N_y^0 \beta^2 = \frac{\bar{a}_{34} \bar{a}_{43} - \bar{a}_{33} \bar{a}_{44}}{a_{44}} \quad (\text{IV.26})$$

Dans ce cas, une plaque sandwich rectangulaire soumise à des charges thermiques est examinée. Pour obtenir la température critique de flambement, les charges thermiques de pré-flambement doivent être déterminées. Par conséquent, en résolvant la forme membranaire des équations d'équilibre et en utilisant la technique proposée par [Meyers et Hyer, 1991], les résultats de la charge de pré-flambement de la plaque sandwich FG exposée à la variation de température dans l'épaisseur sont trouvés.

$$N_x^0 = -\sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{E^{(j)}(z)}{1-\nu} \alpha^{(j)}(z) T(z) dz, \quad N_y^0 = -\sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{E^{(j)}(z)}{1-\nu} \alpha^{(j)}(z) T(z) dz, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{IV.27})$$

Dans ce travail, pour étudier l'influence du type considéré de variation de température à travers l'épaisseur sur la réponse de flambement thermique de la plaque sandwich FG, trois types de variation de chargement thermique sont considérés.

### IV.3.1. Variation uniforme de la température

On considère que la température initiale uniforme de la plaque sandwich FG est élevée et que la température est uniformément élevée à une valeur finale telle que la plaque flambe. Ainsi, la variation de température est donnée par :

$$T(z) = T_f - T_i = \Delta T \quad (IV.28)$$

En considérant les équations (IV.26), (IV.27) et (IV.28), on obtient l'équation suivante pour la charge thermique de stabilité :

$$\Delta T(m, n) = \frac{1}{\mu^2 + \beta^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{44}} \frac{1}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z)}{1-\nu} dz} \quad (IV.29)$$

### IV.3.2. Variation linéaire de la température

La distribution de température linéaire suivant l'épaisseur de la plaque sandwich FG est considérée :

$$T(z) = \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + T_m, \quad \Delta T = T_c - T_m \quad (IV.30)$$

Identique à la variation uniforme de la température, l'expression suivante pour la charge thermique de flambement est déduite :

$$\Delta T(m, n) = \frac{1}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)}{1-\nu} dz} \left( \frac{1}{\mu^2 + \beta^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{44}} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) T_M}{1-\nu} dz \right) \quad (IV.31)$$

### IV.3.3. Variation non linéaire de température

La distribution non linéaire de température suivant l'épaisseur de la plaque sandwich FG est considérée :

$$T(z) = \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_m, \quad \Delta T = T_c - T_m \quad (IV.32)$$

Identique à la variation uniforme de la température, l'expression suivante pour la charge thermique de flambement est déduite :

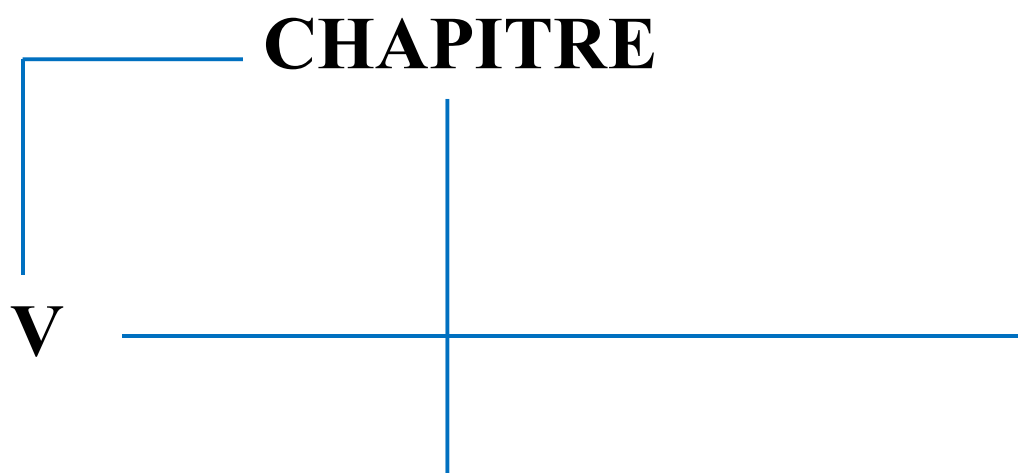
$$\Delta T(m, n) = \frac{1}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma}{1-\nu} dz} \left( \frac{1}{\mu^2 + \beta^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{44}} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) T_M}{1-\nu} dz \right) \quad (IV.33)$$

où  $\gamma$  est l'exposant de température ( $0 < \gamma < \infty$ ). Notez que la valeur de  $\gamma$  égale à l'unité représente une variation linéaire de température à travers l'épaisseur. Tandis que la valeur de  $\gamma$  différente de l'unité représente une variation non linéaire de température à travers l'épaisseur.

#### **IV.4. Conclusions**

Dans ce chapitre, un nouveau HSDT est utilisé pour étudier les réponses au flambement thermique des plaques sandwiches FG exposées à des variations de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. En considérant davantage de suppositions simplifiées aux HSDT classiques et en incorporant le terme intégral indéterminé, le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes du HSDT utilisée est réduit d'un, et rend ainsi ce modèle simple et efficace à utiliser. Les équations de stabilité sont obtenues en utilisant le principe variationnel basé sur l'énergie et le principe de l'équilibre adjacent. Ensuite résolues via la méthode de Navier.

**CHAPITRE**



V

RESULTATS ET DISCUSSIONS DE  
L'ANALYSE DU COMPORTEMENT  
DES PLAQUES SANDWICHES  
EN « FGM »

## Chapitre V :

## Résultats et Discussions de l'Analyse du Comportement des Plaques Sandwiches en FGM

### V.1. Introduction

L'importance de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de la réponse des plaques sandwichs en matériau à gradient évaluée (FGM) au flambement thermique sous variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles de la plaque sandwich FGM sont supposées variables à travers l'épaisseur selon une distribution en simple loi de puissance, en termes des fractions volumiques des constituants. La variation de température est supposée être uniforme, linéaire et non-linéaire à travers l'épaisseur. Des exemples sont présentés afin de démontrer l'efficacité du modèle actuel. L'effet de diverses variables sur la charge thermique résultante, tel que le rapport « a/h » et « a/b », l'indice matériel « k » et le chargement sont tous traités. En commençant en premier lieu par la validation des résultats, utilisée dans le cadre de ce travail, en confrontant nos résultats avec différents résultats des autres auteurs. Nous montrons par la suite des tableaux de valeurs et des courbes concernant la plaque sandwich en FGM soumise à une élévation uniforme, linéaire et non linéaire de la température.

### V.2. Résultats et discussion

Pour vérifier la formulation proposée, une plaque sandwich céramique-métal fonctionnalisée est examinée. A cet effet, deux matériaux différents de plaques fonctionnellement graduées sont utilisés pour le présent travail. Ce sont l'alliage de titane (Ti-6Al-4V) -Zirconia ( $ZrO_2$ ) et l'aluminium (Al) -Alumina ( $Al_2O_3$ ). Les propriétés matérielles des constituants de ces FGM sont indiquées dans le tableau V.1 ci-dessous.

Propriétés	Metal: Ti-6Al-4V	ZrO <sub>2</sub>	Al	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
<i>E</i> (GPa)	66,2	244,27	70	380
<i>v</i>	0,3	0,3	0,3	0,3
<i>α</i> (10 <sup>-6</sup> /K)	10,3	12,766	23	7,4

*Tableau V.1 : Caractéristiques mécaniques des matériaux constituants des plaques sandwichs en FGM*

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes normales et tangentielles :

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_z = \sigma_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, \bar{z}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right).$$

### V.2.1. Etude comparative

Afin de démontrer la validité de la présente méthode, quelques comparaisons des résultats issus du présent modèle avec ceux différents auteurs de la littérature sont réalisés.

a/h	Présente	[Matsunaga, 2005]
10	0.1198 x 10 <sup>-1</sup>	0.1183 x 10 <sup>-1</sup>
20	0.3119 x 10 <sup>-2</sup>	0.3109 x 10 <sup>-2</sup>
100	0.1265 x 10 <sup>-3</sup>	0.1264 x 10 <sup>-3</sup>

**Tableau V.2 :** Le paramètre  $\alpha T_{cr}$  de la charge critique minimale de flambement pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée ( $\alpha_0=1,0 \times 10^6/K$ ,  $E=1,0 \times 10^6 N/m^2$ ,  $\nu=0,3$ )

k	Théories	$T_{cr}$			
		(1-0-1)	(1-1-1)	(2-1-2)	(3-1-3)
0 (Céramique)	Présente	3,24034	3,24034	3,24034	3,24034
	Bourada et al. (2012)	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652
	SSDPT	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775
	TSDPT	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652
	FSDPT	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493
	CPT	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470
0.2	Présente	3,07450	3,05802	3,05834	3,06119
	Bourada et al. (2012)	3.07042	3.05484	3.05461	3.05729
	SSDPT	3.07198	3.05591	3.05598	3.05875
	TSDPT	3.07042	3.05484	3.05461	3.05729
	FSDPT	3.04858	3.03637	3.03394	3.03603
	CPT	3.66606	3.65640	3.64978	3.65144
0.5	Présente	2,87541	2,83512	2,83423	2,84099
	Bourada et al. (2012)	2.87074	2.83224	2.83030	2.83673
	SSDPT	2.87277	2.83331	2.83194	2.83855

	TSDPT	2.87074	2.83224	2.83030	2.83673
	FSDPT	2.83507	2.80230	2.79675	2.80218
	CPT	3.34559	3.31343	3.30066	3.30593
1	Présente	2,69376	2,59191	2,59707	2,61374
	Bourada et al. (2012)	2.68781	2.58882	2.59241	2.60856
	SSDPT	2.69065	2.59015	2.59458	2.61100
	TSDPT	2.68781	2.58882	2.59241	2.60856
	FSDPT	2.64222	2.55161	2.55053	2.56519
	CPT	3.06734	2.96299	2.95538	2.97216
2	Présente	2,63896	2,36407	2,39953	2,44692
	Bourada et al. (2012)	2.63018	2.36000	2.39637	2.43977
	SSDPT	2.63460	2.36196	2.39953	2.44337
	TSDPT	2.63018	2.36000	2.39637	2.43977
	FSDPT	2.57355	2.31737	2.34734	2.38823
	CPT	2.96200	2.64806	2.68016	2.72994
5	Présente	2,94934	2,21632	2,35871	2,47451
	Bourada et al. (2012)	2.93446	2.21009	2.34898	2.46321
	SSDPT	2.94205	2.21327	2.35401	2.46905
	TSDPT	2.93446	2.21009	2.34898	2.46321
	FSDPT	2.86226	2.16069	2.28926	2.39882
	CPT	3.32950	2.44274	2.59922	2.73600
10	Présente	3,32102	2,20243	2,43404	2,60902
	Bourada et al. (2012)	3.30340	2.19469	2.42186	2.59474
	SSDPT	3.31230	2.20150	2.42733	2.60199
	TSDPT	3.30340	2.19469	2.42186	2.59474
	FSDPT	3.23289	2.14099	2.35529	2.52271
	CPT	3.82441	2.41650	2.68184	2.89384
$\infty$ (métal)	Présente	4,01613	4,01613	4,01613	4,01613
	Bourada et al. (2012)	4.01293	4.01293	4.01293	4.01293
	SSDPT	4.01141	4.01141	4.01141	4.01141
	TSDPT	4.01293	4.01293	4.01293	4.01293
	FSDPT	4.00943	4.00943	4.00943	4.00943
	CPT	4.91392	4.91392	4.91392	4.91392

**Tableau V.3 :** La charge critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée en FGM sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  », avec ( $a=5.h$ ).

$k$	Théories	$T_{cr}$			
		(1-0-1)	(1-1-1)	(2-1-2)	(3-1-3)
0 (Céramique)	Présente	6,43068	6,43068	6,43068	6,43068
	Bourada et al. (2012)	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305
	SSDPT	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550
	TSDPT	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305
	FSDPT	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986
	CPT	7.87940	7.87940	7.87940	7.87940
0.2	Présente	6,09901	6,06604	6,06668	6,07237
	Bourada et al. (2012)	6.09084	6.05968	6.05922	6.06459
	SSDPT	6.09396	6.06183	6.06197	6.06751
	TSDPT	6.09084	6.05968	6.05922	6.06459
	FSDPT	6.04716	6.02273	6.01789	6.02207
	CPT	7.28211	7.26279	7.24955	7.25287
0.5	Présente	5,70082	5,62023	5,61846	5,63198
	Bourada et al. (2012)	5.69148	5.61449	5.61059	5.62346
	SSDPT	5.69554	5.61663	5.61389	5.62710
	TSDPT	5.69148	5.61449	5.61059	5.62346
	FSDPT	5.62014	5.55460	5.54350	5.55435
	CPT	6.64118	6.57686	6.55131	6.56187
1	Présente	5,33752	5,13382	5,14414	5,17747
	Bourada et al. (2012)	5.32562	5.12765	5.13482	5.16711
	SSDPT	5.33130	5.13030	5.13918	5.17201
	TSDPT	5.32562	5.12765	5.13482	5.16711
	FSDPT	5.23443	5.05323	5.05105	5.08038
	CPT	6.08468	5.87599	5.86076	5.89431
2	Présente	5,22793	4,67814	4,75538	4,84385
	Bourada et al. (2012)	5.21036	4.66999	4.74275	4.82954
	SSDPT	5.21920	4.67392	4.74908	4.83673
	TSDPT	5.21036	4.66999	4.74275	4.82954
	FSDPT	5.09711	4.58475	4.64468	4.72645
	CPT	5.87400	5.24612	5.31032	5.40989
5	Présente	5,84868	4,38263	4,66742	4,89903
	Bourada et al. (2012)	5.81891	4.37017	4.64797	4.87641
	SSDPT	5.83411	4.37654	4.65805	4.88811
	TSDPT	5.81891	4.37017	4.64797	4.87641
	FSDPT	5.67452	4.27139	4.52851	4.74763
	CPT	6.60901	4.83549	5.14843	5.42200

10	Présente	6,59203	4,35486	4,80636	5,16805
	Bourada et al. (2012)	6.55680	4.33937	4,81805	5.13948
	SSDPT	6.57459	4.35224	4.80638	5.15396
	TSDPT	6.55680	4.33937	4.79372	5.13948
	FSDPT	6.41578	4.23198	4.66058	4.99542
	CPT	7.59882	4.78299	5.31369	5.73769
$\infty$ (métal)	Présente	7,98226	7,98226	7,98226	7,98226
	Bourada et al. (2012)	7.97281	7.97281	7.97281	7.97281
	SSDPT	7.97585	7.97585	7.97585	7.97585
	TSDPT	7.97281	7.97281	7.97281	7.97281
	FSDPT	7.96885	7.96885	7.96885	7.96885
	CPT	9.77784	9.77784	9.77784	9.77784

**Tableau V.4 :** La charge critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée en FGM sous élévation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  », avec ( $a=5.h$ ).

$k$	Théories	$T_{cr}$			
		(1-0-1)	(1-1-1)	(2-1-2)	(3-1-3)
0 (Céramique)	Présente	19,29203	19,29203	19,29203	19,29203
	Bourada et al. (2012)	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915
	SSDPT	19.27651	19.27651	19.27651	19.27651
	TSDPT	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915
	FSDPT	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957
	CPT	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820
0.2	Présente	20,59236	20,33007	20,44976	20,49461
	Bourada et al. (2012)	20.56479	20.30876	20.42463	20.46833
	SSDPT	20.57531	20.31595	20.43388	20.47819
	TSDPT	20.56479	20.30876	20.42463	20.46833
	FSDPT	20.41729	20.18492	20.28528	20.32483
	CPT	24.58692	24.34093	24.43703	24.47887
0.5	Présente	21,64883	21,14600	21,36814	21,45395
	Bourada et al. (2012)	21.61337	21.12438	21.33822	21.42148
	SSDPT	21.62878	21.13244	21.35073	21.43534
	TSDPT	21.61337	21.12438	21.33822	21.42148
	FSDPT	21.34246	20.89907	21.08307	21.15824
	CPT	25.21986	24.74530	24.91598	24.99617

1	Présente	22,46081	21,71806	22,02269	22,12553
	Bourada et al. (2012)	22.41074	21.69196	21.98279	22,14890
	SSDPT	22.43462	21.70318	22.00140	22.12553
	TSDPT	22.41074	21.69196	21.98279	22.10459
	FSDPT	22.02700	21.37713	21.62417	21.73355
	CPT	25.60494	24.85771	25.09061	25.21549
2	Présente	23,10689	22,02137	22,41227	22,59731
	Bourada et al. (2012)	23.02926	21.98304	22.35275	22.53055
	SSDPT	23.06831	22.00152	22.38252	22.56412
	TSDPT	23.02926	21.98304	22.35275	22.53055
	FSDPT	22.52869	21.58175	21.89055	22.04964
	CPT	25.96247	24.69501	25.02775	25.23797
5	Présente	23,83092	22,12608	22,70953	23,01642
	Bourada et al. (2012)	23.70963	22.06317	22.61489	22.91015
	SSDPT	23.77153	22.09533	22.66384	22.96510
	TSDPT	23.70963	22.06317	22.61489	22.91015
	FSDPT	23.12129	21.56445	22.03367	22.30513
	CPT	26.92893	24.41235	25.04991	25.47341
10	Présente	24,14028	22,18585	22,92909	23,30857
	Bourada et al. (2012)	24.01127	22.10708	22.81317	23.17972
	SSDPT	24.07633	22.17208	22.86373	23.24502
	TSDPT	24.01127	22.10708	22.81317	23.17972
	FSDPT	23.49484	21.55996	22.17958	22.52996
	CPT	27.82720	24.36712	25.28770	25.87769
$\infty$ (métal)	Présente	23,94679	23,94679	23,94679	23,94679
	Bourada et al. (2012)	23.91843	23.91843	23.91843	23.91843
	SSDPT	23.92755	23.92755	23.92755	23.92755
	TSDPT	23.91843	23.91843	23.91843	23.91843
	FSDPT	23.90656	23.90656	23.90656	23.90656
	CPT	29.33351	29.33351	29.33351	29.33351

**Tableau V.5 :** La charge critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée en FGM sous élévation non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  », avec ( $a=5.h$ ) et ( $\gamma=5$ ).

- *La plaque sandwich en FGM (1-0-1)* : La plaque est symétrique et composée de seulement deux couches FGM d'épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale,  $h_1=h_2=0$ .
- *La plaque sandwich en FGM (1-1-1)* : la plaque est symétrique et constituée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, on trouve que,  $h_1=-h/6$ ,  $h_2=h/6$ .
- *La plaque sandwich en FGM (2-1-2)* : La plaque est symétrique, où :  $h_1=-h/10$ ,  $h_2=h/10$ .
- *La plaque sandwich en FGM (3-1-3)* : la plaque est également symétrique et l'épaisseur de l'âme est la moitié de l'épaisseur de la face. Dans ce cas, on trouve que,  $h_1=-h/14$ ,  $h_2=h/14$ .

Le facteur de correction de cisaillement pour FSDT est égal à  $5/6$ , pour la température linéaire et non linéaire augmente à travers l'épaisseur,  $Tt = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

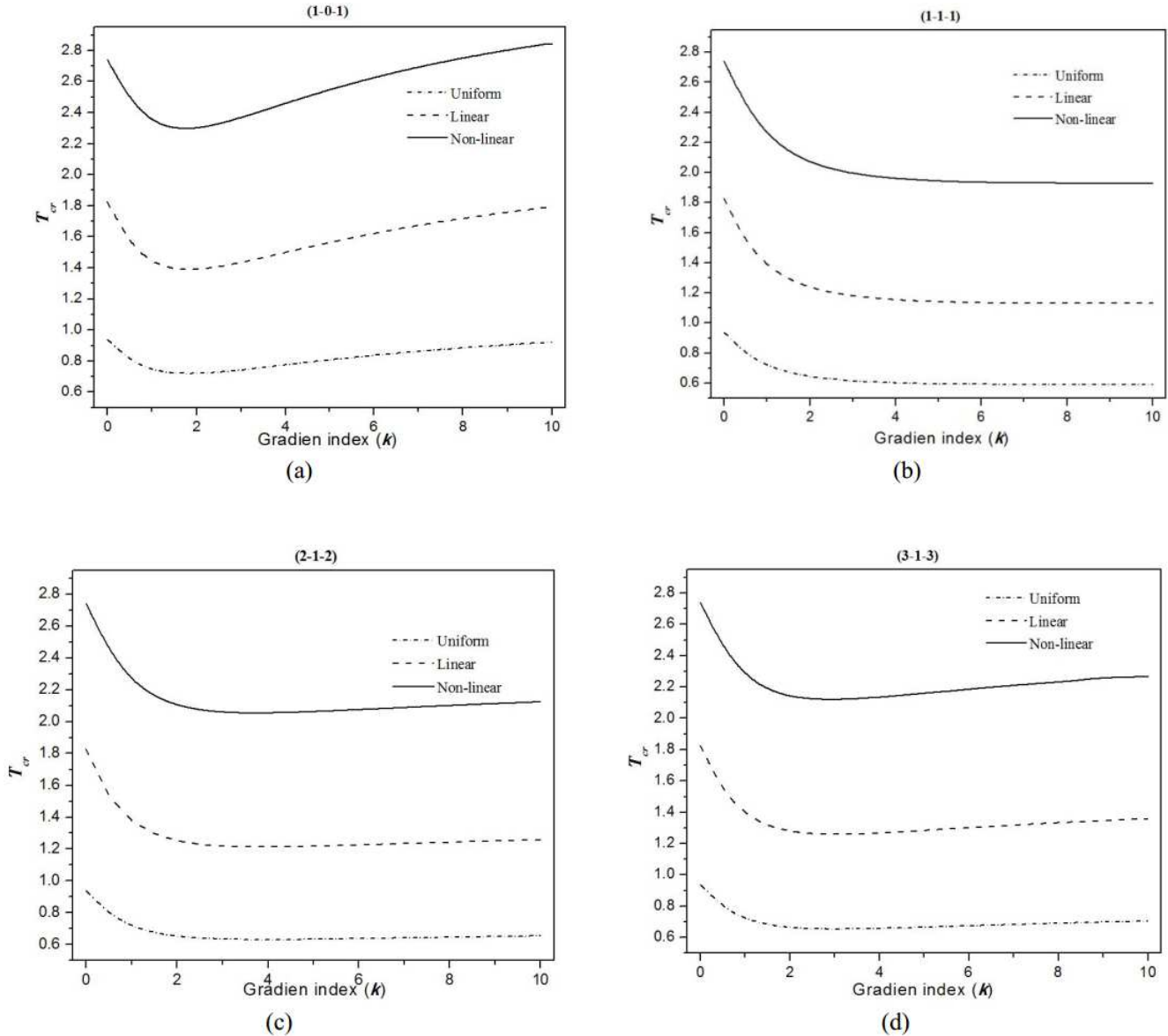
Pour vérifier l'exactitude du HSDT proposé, des comparaisons sont effectuées entre les résultats de charge critique de flambement calculés à partir de la présente théorie et ceux calculés par [Matsunaga, 2005] comme le montre le tableau V.2. On peut observer que les résultats obtenus sont en accord avec les résultats publiés pour les plaques isotropes simplement supportées.

Afin de vérifier également la validité de la théorie utilisée, les résultats ont été comparés pour des plaques sandwiches FGM soumises à une charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire en comparant avec toutes les théories des plaques. La variation de température critique ( $T_{cr} = 10^{-3}\Delta T_{cr}$ ) est déterminée pour  $k = 0, 1, 2, 5, 10$  et  $\infty$  (métal) et pour différents types de distribution de température, comme indiqué dans les tableaux V.3-5. On peut voir dans les tableaux V.3-5 qu'il existe une très bonne corrélation entre la nouvelle théorie des plaques proposée et les autres HSDT. On observe que la température de la charge critique augmente avec l'augmentation de l'épaisseur des couches et surtout pour  $k \geq 1$ . Pour différentes valeurs d'indice matériel  $k$ , les valeurs de la charge critique de flambement sont celles des plaques en céramique ( $ZrO_2$ ) et en métal ( $Ti-6Al-4V$ ). Comme la plaque devient de plus en plus métallique, la charge critique de flambement augmente.

On peut remarquer à partir des résultats rapportés dans les tableaux V.3-5 que la température de stabilité thermique de la plaque entièrement métallique est plus élevée que celle de la plaque entièrement céramique. Ceci est dû au module de Young de la céramique ( $ZrO_2 = 244,27 \text{ GPa}$ ) qui est supérieur à celui du métal ( $Ti-6Al-4V = 66,2 \text{ GPa}$ ). Il est

intéressant de noter que les températures critiques de flambement déterminées à partir du CPT sont nettement supérieures aux celles déterminées par HSDT.

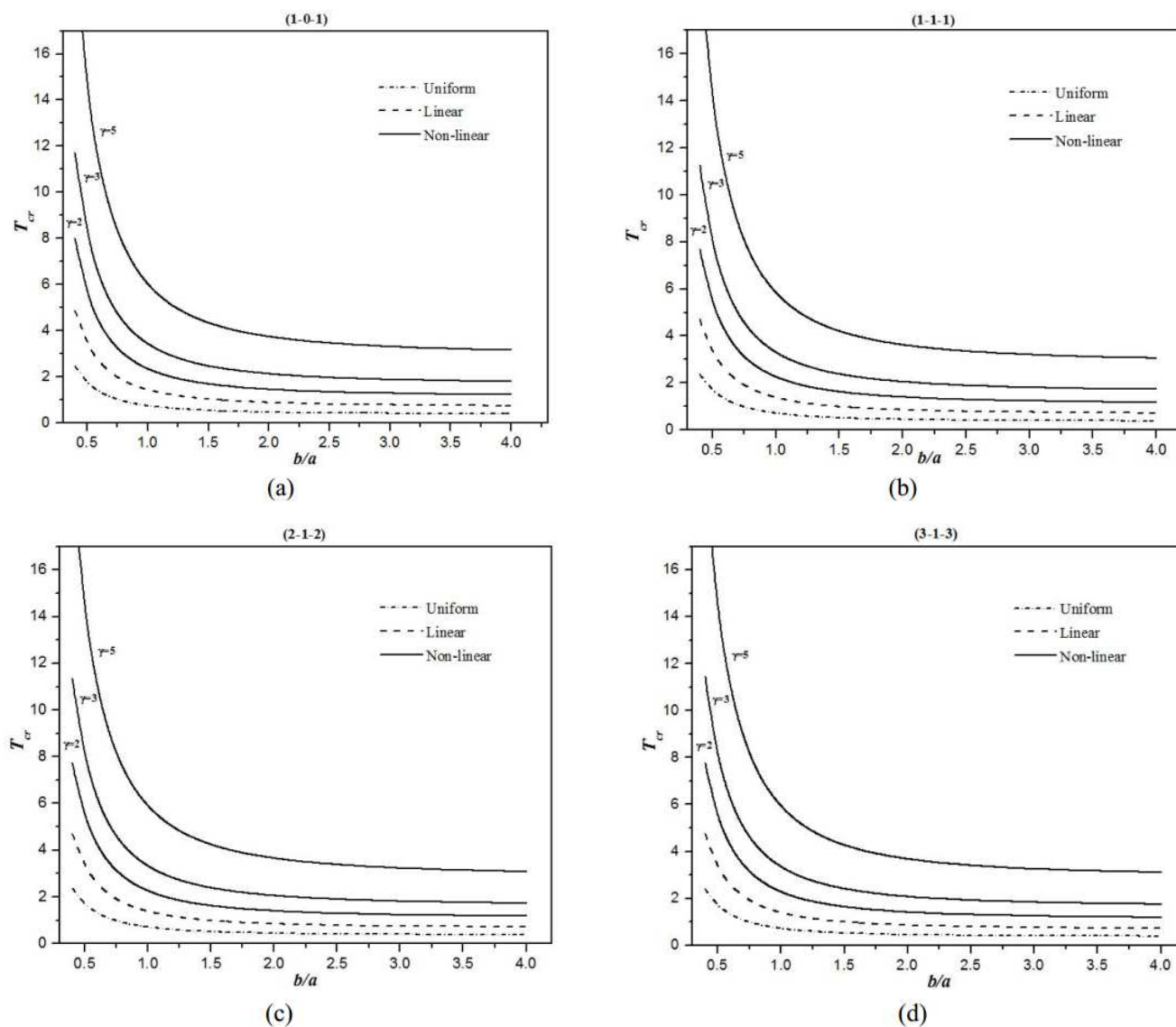
### V.2.2. Etude paramétrique



**Figure V. 1** : Variation de la température critique  $T_{cr}$  en fonction de l'indice matériel  $k$  pour différents types de température  $\gamma=2$ ,  $a/b=1$  et  $a/h=10$

La figure V.2 présente les influences de l'indice matériel  $k$  et les types de charges thermiques sur la température critique de flambement  $T_{cr}$  en utilisant la théorie proposée. Il est clair que la température critique de flambement  $T_{cr}$  pour les plaques soumises à une charge thermique non linéaire est supérieure à celle des plaques soumises à une charge thermique uniforme. Alors que  $T_{cr}$  pour les plaques soumises à une charge thermique linéaire est intermédiaire aux deux cas de charge thermique précédents. On observe

également que, pour la plaque sans noyau, la charge critique  $T_{cr}$  diminue rapidement pour atteindre des valeurs minimales et augmente ensuite progressivement à mesure que l'indice matériel  $k$  augmente comme indiquer sur la figure V.1 (a). Cependant, pour les autres cas (voir les figures V.1 (b), (c) et (d)),  $T_{cr}$  diminue progressivement lorsque l'indice matériel  $k$  augmente.

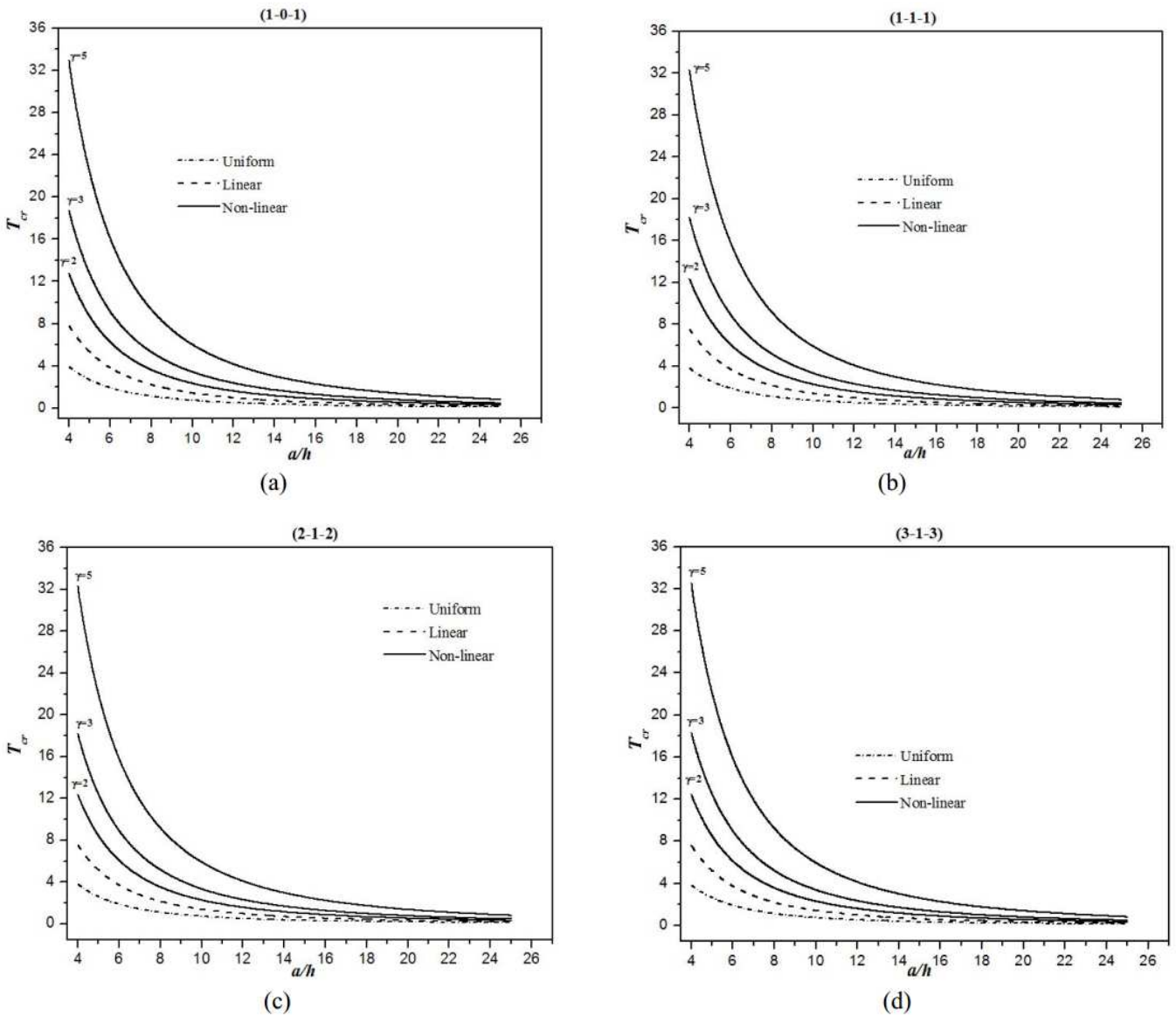


**Figure V.2 :** Variation de la température critique  $T_{cr}$  par rapport au rapport géométrique de la plaque ( $b/a$ ) pour divers types de température ( $k=1$ ,  $a/h=10$ )

La figure V.2 présente l'influence du rapport géométrique ( $b/a$ ) sur la charge critique de flambement  $T_{cr}$  des plaques sandwiches en FGM soumises à divers variation de température.

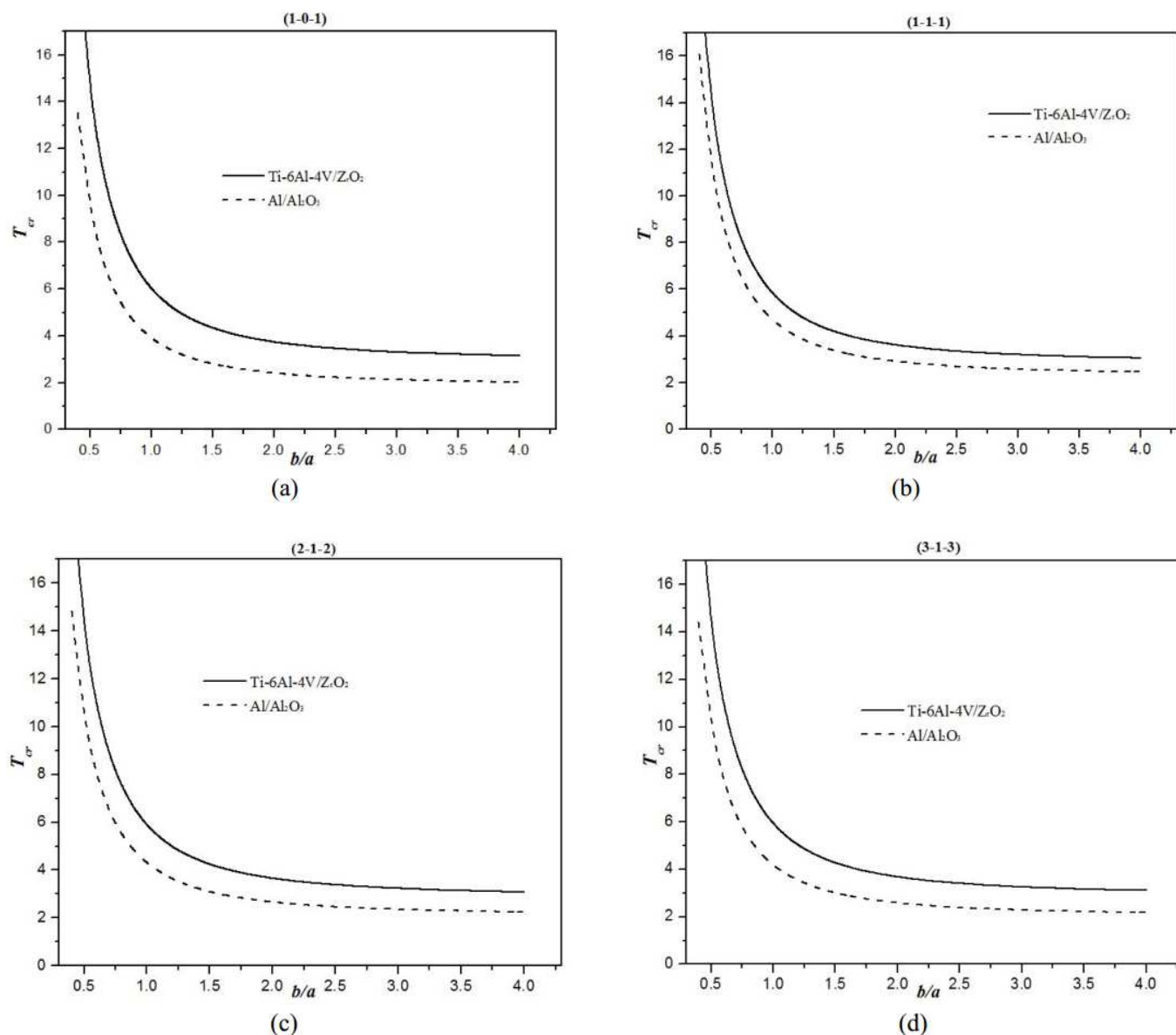
On remarque que, quel que soit le type de plaque sandwich, la température critique  $T_{cr}$  diminue progressivement avec l'augmentation du rapport géométrique de la plaque

( $b/a$ ) quel que soit le type de chargement. On observe également à partir de la figure V.2 que le  $T_{cr}$  augmente avec l'augmentation du paramètre de non-linéarité  $\gamma$ .



**Figure V.3 :** Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  des plaques sandwich par rapport au rapport ( $a/h$ ) pour différents types de température ( $k=1$ ,  $a/b=1$ )

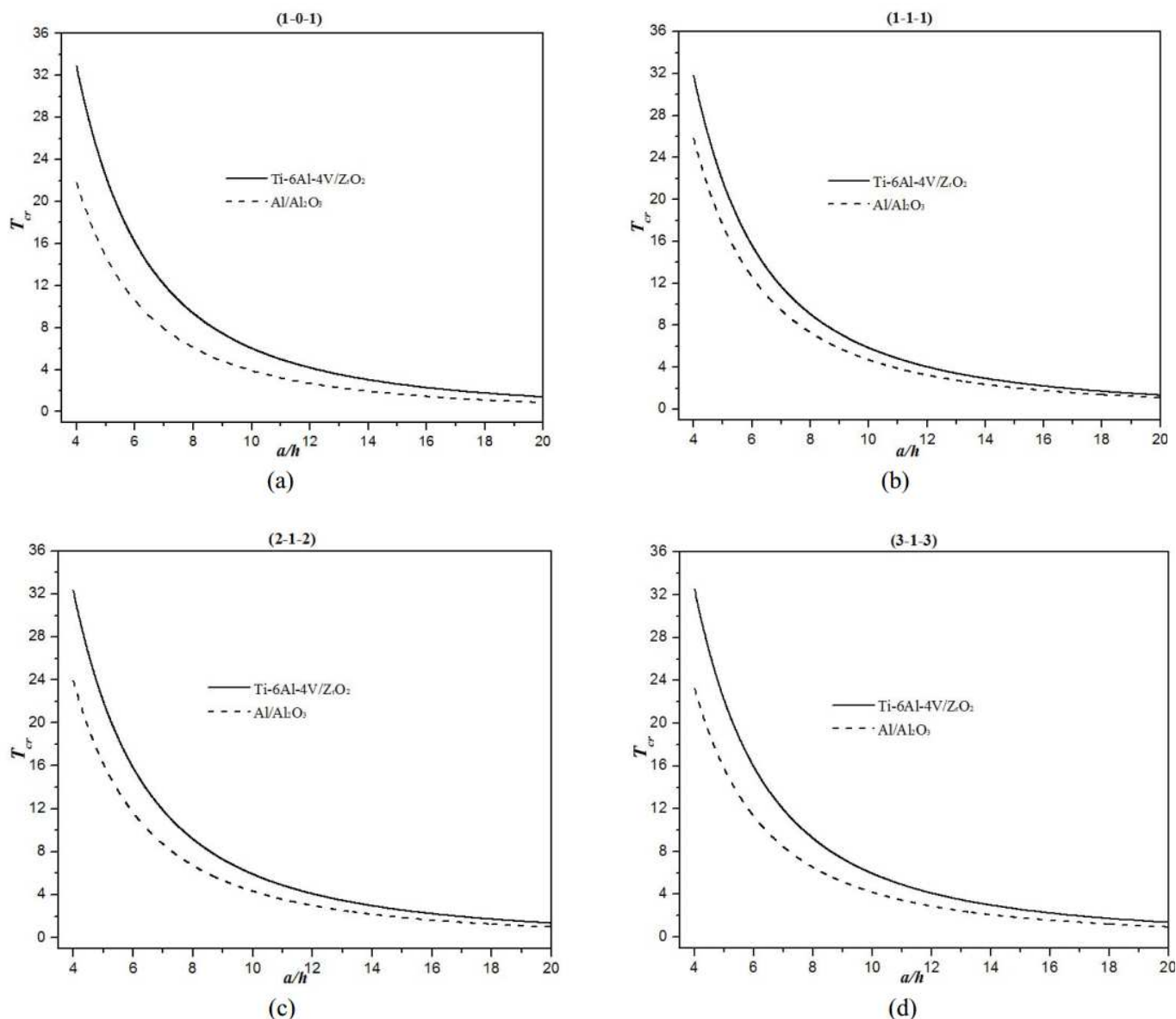
La figure V.4 montre la variation des températures critiques  $T_{cr}$  des plaques carrées sandwiches FG soumises à divers types de charges thermiques par rapport au ( $a/h$ ). On observe que la variation de la charge critique de flambement diminue de façon monotone simultanément que le rapport ( $a/h$ ) augmente. On remarque également sur la figure V.4 que les variations de la charge critique de flambement  $T_{cr}$  de la plaque FG sous élévation uniforme de la température sont inférieures à celles de la plaque sous charge thermique linéaire et que celle-ci est inférieure à celle de la plaque sous charge thermique non linéaire. De plus, on observe que  $T_{cr}$  augmente lorsque le paramètre  $\gamma$  augmente.



**Figure V.4 :** Variation de la température critique  $T_{cr}$  des plaques sandwichs (Ti-6Al-4V / ZrO<sub>2</sub>) et (Al / Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) FG en fonction de  $(b/a)$  avec  $k=1$ ,  $a/h=10$  et  $\gamma=5$

La variation de la charge critique de flambement en fonction au rapport géométrique  $(b/a)$  est représentée sur les Fig. V.4 (a) - (d) pour les plaques sandwichs (Ti-6Al-4V / ZrO<sub>2</sub>) et (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) FG exposées à des variations de température non linéaires en considérant différents types de plaques sandwich.

Les plaques (Ti-6Al-4V / ZrO<sub>2</sub>) présentent des charges critiques élevées  $T_{cr}$  du fait de la rigidité flexionnelle de ces plaques.



**Figure V.5 :** Variation de la température critique  $T_{cr}$  des plaques carrées sandwiches ( $Ti-6Al-4V/ZrO_2$ ) et ( $Al/Al_2O_3$ ) FG par rapport ( $a/h$ ) avec  $k=1$  et  $\gamma=5$

La température critique de flambement par rapport ( $a/h$ ) dans un plan ( $T_{cr} - a/h$ ) est présentée aux Fig. V.6 (a) - (d). Dans chacune des figures, le comportement au flambement thermique est indiqué pour les plaques sandwiches ( $Ti-6Al-4V/ZrO_2$ ) et ( $Al/Al_2O_3$ ) FG.

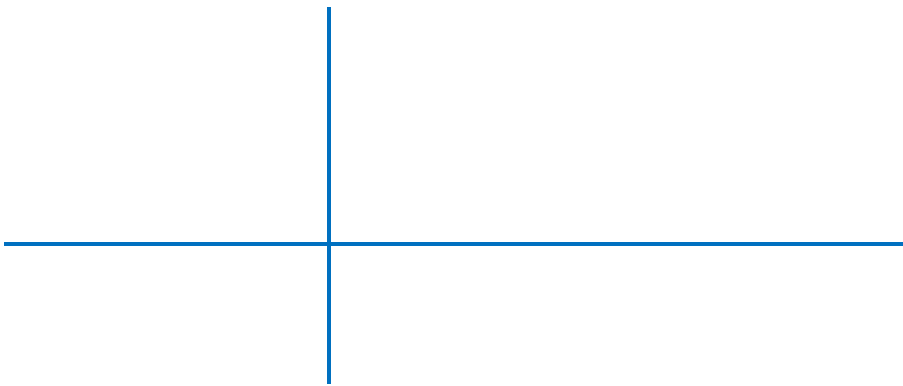
En général, La température critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport  $a/h$  à cause de l'effet de cisaillement accru. De nouveau, dans tous les types de plaques sandwich considérées, la rigidité présentée par la plaque sandwich  $Ti-6Al-4V/ZrO_2$  est la plus élevée.

### **V.3. Conclusions**

Dans ce chapitre, la théorie présentée à une bonne corrélation avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Les résultats déterminés par la théorie proposée peuvent être résumés comme suit :

- La température critique calculée en utilisant la théorie proposée (avec quatre variables) et d'autres TSDT (avec cinq variables) sont presque identiques ;
- La variation de température critique diminue au fur et à mesure que le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) et le rapport d'aspect géométrique ( $b/a$ ) de la plaque augmentent ;
- Les variations de température critique des plaques sandwichs en FGM sont généralement inférieures aux valeurs correspondantes pour les plaques céramiques homogènes ;
- La température critique de la plaque sandwich en FGM sous l'augmentation non linéaire de la température augmente à mesure que l'exposant de température  $\gamma$  augmente.



CONCLUSION GENERALE

## **Conclusion Générale**

Les structures sandwich en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de la réponse et de comportement mécanique au flambement thermique des plaques sandwiches FG sous divers condition d'appuis.

Nous avons utilisé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé pour l'analyse de la réponse et de comportement mécanique des plaques FGM soumises à un chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur sous diverses conditions aux limites. Pour valider ce modèle, nous l'avons comparé avec d'autres issus de la littérature. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues pour la théorie proposée est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

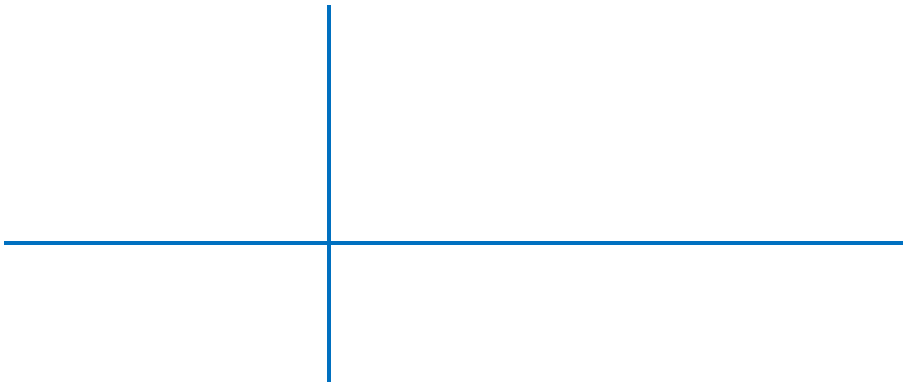
Toutes les études comparatives ont démontré que les charges critiques de flambement obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie utilisée est précise et simple pour résoudre les problèmes d'instabilité des plaques FGM.

Dans l'application de technologie, l'étude de ce phénomène est très essentielle pour choisir des paramètres de matériau appropriés pour s'assurer que ces plaques FGM ne remet pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à champ de température élevé.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé incluant des termes d'intégrale indéterminé pour le calcul de différentes formes de structures FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des plaques FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements thermiques.



REFERENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES

## Références bibliographiques

### Chapitre I : Généralités sur les composites & les structures sandwiches

- [Berthelot, 1999] BERTHELOT.J.-M, « Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures»,1999.
- [Boudenne, 2003] BOUDENNE.A, « Etude expérimentale et théorique des propriétés thermo-physiques de matériaux composite à matrice polymère », Université PARIS XII,2003.
- [Maurice, 1995] Maurice Reyne R Hermès, «Technologie des Composites», 1995
- [Bahlouli, 1993] N. Bahlouli « Cours Composites sur le site Internet, “<http://www.ipst.u-strasbg.fr/cours/matériaux-composites> “ », 1993
- [BEWA, 2006] BEWA.H, « Matériaux polymères biodégradables et applications Note de Synthèse II », Direction des Energies Renouvelables, des Réseaux et des Marchés Energétiques, p1-16,2006.
- [Bardonnnet, 2000] BARDONNET.P, « Résines époxydes (EP) », Techniques de l’Ingénieur, vol. A3465.
- [Chevalier, 2000] CHEVALIER.M, « *Phénoplastesouphénols-formols PF* », Techniques de l’Ingénieur, vol. A3435.
- [Weiss et Bord, 1983] JEAN WEISS ET CLAUDE BORD, Les matériaux composites, Tomes 1 et 2, Edition du Cetim, 1983.
- [Cognard, 1989] PHILIPPE COGNARD, Les applications industrielles des matériaux composites. Tomes 1 et 2, Edition du Moniteur, 1989
- [Gay, 1997] DANIEL GAY, Matériaux composites, Edition Hermès, 1997.
- [Medjani, 2016] MEDJANI Souhila, Elaboration et caractérisation des matériaux compositions sandwichs multicouches, Mémoire de master, université boumerdes, 2016
- [Pagano, 1969] N.J.PAGANO," Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending", Journal of composite materials, 1969, PP 398-411
- [Rocca et Nanni, 2005] Rocca SV., Nanni A., 2005, “Mechanical characterization of sandwich structure comprised of glass fiber reinforced” core: Part 1 Third International Conference Composites in Construction Lyon, France, July 11 – 13, 2005.
- [Sezgin et al, 2010] Sezgin FE., Tanoglu M., Egilmez OO. Donmez C., 2010, “Mechanical Behavior of Polypropylene-based Honeycomb-Core Composite Sandwich Structures“. Reinforced Plastics and Composites, 10: 1569-157
- [Vinson, 1999] Vinson JR., 1999, “the Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials”, Technomic Publishing USA.
- [Norlin et , 1995] Norlin P., Reuterlöf S., 2002, “the role of sandwich composites in

- turbine blades'', Reinforced Plastics. 3: 32-34.
- [Norlin et Reuterlöf, 2008] Sezgin FE., 2008, "Mechanical behavior and molding of honeycomb laminated fiber/polymer sandwich structures'', thèse de doctorat, Université Urla-Izmir, Turkey.
- [Arbaoui, 2009] Jamal Eddine ARBAOUI, Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches, thèse de doctorat, Université de Metz, France, 2009.
- [Bourouis, 2009] Fairouz BOUROUIS, Etude du comportement mécanique de structures sandwiches à différents matériaux de revêtements, Mémoire de Magister, Université de Constantine, 2009.

## **Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM »**

- [Baron et al, 2008] C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [Kokini et al, 1990] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990,
- [Samsam et al, 2005] B.A.Samsam Shariat, R.Javaheri,M.R.Eslami,buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading,thin-walled structure 43 (2005) 1020-1036.
- [Nguyen,2004] Trung-Kien Nguyen, quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, thèse de doctorat université paris-est ,2008 page 30-31.
- [Yin et al, 2004] Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543
- [Boch et al, 1986] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192, 1986.
- [Finot et al, 1996] Finot M, Suresh S. Small and large deformation of thick and thin-film multilayers: effect of layer geometry, plasticity and compositional gradients. *J MechPhys Solids* 1996; 44:683–721.
- [Krell et al, 1999] Krell T, Schulz U, Peters M, Kaysser WA. Graded EB-PVD alumina–zirconia thermal barrier coatings-an experimental approach. *Mater Sci Forum* 1999; 311: 396–401.
- [Koizumi, 1996] Koizumi, M. (1996),—FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- [Yoshihisa, 2004] Yoshihisa Uchida (2004), —Properties of functionally graded materials, *Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications*, 39-51-B, Vol. 39-B.
- [Moya et al, 1992] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO,

- Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [Steffens et al, 1990] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [Bishop et al, 1993] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Takahashi, 1990] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [Bao et Wang, 1995] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Delale et Erdogan, 1983] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.

### **Chapitre III : Revue sur les études réalisées sur les matériaux FGM**

- [Timoshenko , 1959] S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [Reddy, 1997] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [Reddy, 1999] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Reissner, 1945] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77, 1945.
- [Mindlin, 1951] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [Whitney, 1973] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [Hildebrand et al , 1949] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*,

- 1949.
- [Naghdi, 1957] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380 1957.
- [Reddy, 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.
- [Kant et Swaminathan, 2002] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344, 2002.
- [Touratier, 1991] M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.
- [Karama et al, 2003] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [Ait Atmane et al, 2010] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121, 2010.
- [Chabot, 1997] A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [Carrera, 2000] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [Afaq et al, 2003] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 émes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Reddy, 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.
- [Di Sciuva, 1987] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 54,pages 589(596, 1987).
- [Nguyen, 2004] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures

- multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Karama et al, 1998]** M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [Ossadzow et Touratier, 2001]** C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [Icardi et Bertetto, 1995]** U. Icardi & A.M. Bertetto. An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 4, pages 555,571, 1995.
- [Srinivas, 1973]** S. Srinivas. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 30, no. 4, pages 495,507, 1973.
- [Tahani et Nosier, 2003]** M. Tahani & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [Ren, 1986]** J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- [Kassapoglou et Lagace, 1987]** C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [Yin, 1994]** W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549,1564, 1994.
- [Pagano, 1978]** N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.
- [Zuiker, 1995]** J. R. Zuiker, Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations," *Composites Eng*, 5 (7): 807–819, 1995.
- [Cho et Ha, 2001]** J. R. Cho., D.Y. Ha, Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196, 2001.
- [Pal, 2005]** R. Pal, New Models for Effective Young's modulus of particulate composites, *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523. 2005.
- [Reuter et al, 1997]** T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302,1997.
- [Yin et al, 2004]** H. M. Yin., Z.L. Sun., G.H. Paulino, Micromechanics-based elastic

- model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Mater*; 52 (12):3535– 3543, 2004.
- [Ganapathi et Touratier, 1997]** M. Ganapathi & M. Touratier. A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-exible finite element. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 28, pages 115,135, 1997.
- [Polit et Touratier, 2002]** O. Polit & M. Touratier. A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses. *Composite Structures*, vol. 58, pages 121,128, 2002.
- [Khare et al, 2004]** R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405,418, 2004.
- [Raju et Crews, 1981]** I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21, 1981.
- [Cho et Averill, 2000]** Y.B. Cho & R.C. Averill. First-order zigzag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels. *Composite Structures*, vol. 50, pages 1,15, 2000.
- [Desai et al, 2003]** Y.M. Desai, G.S. Ramtekkar & A.H. Shah. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. *Composite Structures*, vol. 59, pages 237,249, 2003.
- [Bui et al, 2000]** V.Q. Bui, E. Marechal & H. Nguyen-Dang. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites: interlaminar stresses and strain-energy release rates. *Composites Science and Technology*, vol. 60, pages 131,143, 2000.
- [Drake et al, 1993]** Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H. (1993), "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", *Journal of Applied Physics*, 74, 1321-1326.
- [Williamson et al, 1993]** Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T. (1993)"Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, 74, 1310-1320.
- [Giannakopoulos et al, 1995]** Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson, M. (1995), "Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients", *Acta Metallurgica et Materialia*, 43, 1335-

- 1354.
- [Finot et al, 1996] Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S. (1996), "Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al  $2 O_3$  Multi-Layered Material", *Materials Science and Engineering*, 205, 59-71.
- [Ravichandran, 1995] Ravichandran, K.S. (1995), "Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System", *Materials Science and Engineering*, A-201, 269-276.
- [Hill et Lin, 2002] Hill, R. et Lin, W. (2002), "Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, 185-191.
- [Cheng et Batra, 2000] Cheng, Z.Q. and Batra, R.C. (2000), "Three-dimensional thermo-elastic deformations of a functionally graded elliptic plate", *Compos. Pt. B-Eng.*, 31(2), 97-106.
- [Reddy et Cheng 2001] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001), "Three-dimensional thermo-mechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Eur. J. Mech. A-Solids*, 20(5), 841-855.
- [Vel et Batra, 2002] Vel, S.S. and Batra, R.C. (2002), "Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates", *AIAA J.*, 40(7), 1421-1433.
- [Feldman et Aboudi, 1997] Feldman, E. and Aboudi, J. (1997), "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", *Compos. Struct.*, 38, 29-36.
- [Bouhadra et al, 2015]
- [Matsunaga, 1997] Matsunaga, H. (1997), "Buckling instabilities of thick elastic plates subjected to in-plane stresses", *Comput. Struct.*, 62(1), 205-214.
- [Najafizadeh et Eslami, 2002] Najafizadeh, M.M. and Eslami, M.R. (2002), "Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression", *Int. J. Mech. Sci.*, 44(12), 2479-2493.
- [Najafizadeh et al, 2008] Najafizadeh, M.M. and Heydari, H.R. (2008), "An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression", *Int. J. Mech. Sci.*, 50(3), 603-612.
- [Ganapathi et Prakash, 2006] Ganapathi, M. and Prakash, T. (2006), "Thermal buckling of simply supported functionally graded skew plates", *Compos. Struct.*, 74(2), 247-250.
- [Ma et Wang, 2003] Ma, L.S. and Wang, T.J. (2003), "Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings", *Int. J. Solids Struct.*, 40(13),
- [Bui et al, 2013] Bui, T.Q., Khosravifard, A. Zhang, Ch., Hematiyan, M.R. and Golub, M.V. (2013), "Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point

- interpolation method”, Eng. Struct., 47, 90-104.
- [Kar et Panda, 2015a] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015a), “Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM”, Struct. Eng. Mech., Int. J., 53(4), 661-679.
- [Kar et Panda, 2015b] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015b), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, Steel Compos. Struct., Int. J., 18(3), 693-709.
- [Morimoto et al, 2006] Morimoto, T., Tanigawa, Y. and Kawamura, R. (2006), “Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating”, Int. J. Mech. Sci., 48(9), 926-937.
- [Na et Kim, 2006] Na, K.-S. and Kim, J.-H. (2006), “Three-dimensional thermo-mechanical buckling analysis for functionally graded composite plates”, Compos. Struct., 73(4), 413-422.
- [Na et Kim, 2004] Na, K.-S. and Kim, J.-H. (2004), “Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials”, Compos., Part B, Eng., 35(5), 429-437.
- [Lee et al, 2010] Lee, Y.Y., Zhao, X. and Reddy, J.N. (2010), “Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads”, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 199(25), 1645-1653.
- [Lee et al, 2016] Lee, Y.-H., Bae, S.-I. and Kim, J.-H. (2016), “Thermal buckling behavior of functionally graded plates based on neutral surface”, Compos. Struct., 137, 208-214.
- [Liew et al, 2013] Liew, K.M., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2013), “Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading”, Int. J. Solids Struct., 40(15), 3869-3892.
- [Bourada et al, 2012] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, J. Sandw. Struct. Mater., 14(1), 5-33.
- [Tran et al, 2013] Tran, L.V., Thai, C.H. and Nguyen-Xuan, H. (2013), “An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates”, Finite Elem. Anal. Des., 73, 65-76.
- [Yaghoobi et al, 2014] Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P. (2014), “Analytical study on postbuckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM”, Steel Compos. Struct., Int. J., 17(5), 753-776.
- [Zhang et al, 2014] Zhang, L.W., Zhu, P. and Liew, K.M. (2014), “Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method”, Compos. Struct., 108, 472-492.
- [Tung, 2015] Tung, H.V. (2015), “Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties”, Compos. Struct., 131, 1028-1039.

- [Asemi et Shariyat, 2016] Asemi, K. and Shariyat, M. (2016), “Three-dimensional biaxial post-buckling analysis of heterogeneous auxetic rectangular plates on elastic foundations by new criteria”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 302, 1-26.
- [Yaghoobi et Yaghoobi, 2013] Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach”, *Meccanica*, 48, 2019-2035.
- [Sobhy, 2013] Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos. Struct.*, 99, 76-87.
- [Ait Amar Meziane et al, 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- [Swaminathan et Naveenkumar, 2014] Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T. (2014), “Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions”, *Eur. J. Mech. A/Solid.*, 47, 349-361.
- [Adda Bedia et al, 2015] Adda Bedia, W., Benzair, A., Semmah, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On the thermal buckling characteristics of armchair single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal continuum elasticity”, *Brazil. J. Phys.*, 45(2), 225-233.
- [Nguyen et al, 2015] Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), “A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 91-120.
- [Bouguenina et al, 2015] Bouguenina, O., Belakhdar, K., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 679-695.
- [Bakora et Tounsi, 2015] Bakora, A. and Tounsi, A. (2015), “Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Struct. Eng. Mech.*, 56(1), 85-106.
- [Barati et Shahverdi, 2016] Barati, M.R. and Shahverdi, H. (2016), “A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 707-727.
- [Beldjelili et al, 2016] Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(4), 755-786.
- [Ahouel et al, 2016] Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 20(5), 963-

- 981.
- [Abdelhak et al,2016] Abdelhak, Z., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Thermal buckling response of functionally graded sandwich plates with clamped boundary conditions”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(2), 267-291.
- [Barka et al, 2016] Barka, M., Benrahou, K.H., Bakora, A. and Tounsi, A. (2016), “Thermal post-buckling behavior of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on Pasternak elastic foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 22(1), 91-112.
- [El-Hassar et al, 2016] El-Hassar, S.M., Benyoucef, S., Heireche, H. and Tounsi, A. (2016), “Thermal stability analysis of solar functionally graded plates on elastic foundation using an efficient hyperbolic shear deformation theory”, *Geomech. Eng., Int. J.*, 10(3), 357-386.
- [Ghorbanpour Arani et al, 2016] Ghorbanpour Arani, A., Cheraghbak, A. and Kolahchi, R. (2016), “Dynamic buckling of FGM viscoelastic nano-plates resting on orthotropic elastic medium based on sinusoidal shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(3), 489-505.
- [Trinh et al, 2016] Trinh, T.H., Nguyen, D.K., Gan, B.S. and Alexandrov, S. (2016), “Post-buckling responses of elastoplastic FGM beams on nonlinear elastic foundation”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 58(3), 515-532.
- [Chikh et al, 2016] Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(4), 617-639.
- [Laoufi et al, 2016] Laoufi, I., Ameer, M., Zidi, M., Adda Bedia, E.A. and Bousahla, A.A. (2016), “Mechanical and hygrothermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 20(4), 889-911.
- [Bouderba et al, 2016] Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermo-mechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.
- [Khetir et al, 2017] Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.* [In press]
- [Klouche et al, 2017] Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.* [In press]
- [Meksi et al, 2017] Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 1099636217698443.

- [Liu et al 2017] Liu, S., Yu, T., Bui, T.Q., Yin, S., Thai, D.K. and Tanaka, S. (2017), “Analysis of functionally graded plates by simple locking-free quasi-3D hyperbolic plate isogeometric method”, *Compos. Part B: Eng.*, 120, 182-196.3311-3330.
- [Yu et al, 2017] Yu, T., Yin, S., Bui, T.Q., Liu, C. and Wattanasakulpong, N. (2017), “Buckling isogeometric analysis of functionally graded plates under combined thermal and mechanical loads”, *Compos. Struct.*, 162, 54-69.
- [El-Haina et al, 2017] El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 63(5), 585-595.
- [Bellifa et al, 2017] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 62(6), 695-702.
- [Yin et al, 2016] Yin, S., Yu, T., Bui, T.Q., Zheng, X. and Tanaka, S. (2016), “In-plane material inhomogeneity of functionally graded plates: A higher-order shear deformation plate isogeometric analysis”, *Compos. Part B*, 106, 273-284.
- [Bui et al, 2016] Bui, T.Q., Do, T.V., Ton, L.H.T., Doan, D.H., Tanaka, S., Pham, D.T., Nguyen-Van, T.A., Yu, T. and Hirose, S. (2016), “On the high temperature mechanical behaviors analysis of heated functionally graded plates using FEM and a new third-order shear deformation plate theory”, *Compos. Part B*, 92, 218-241.
- [Shi, 2007] Shi, G. (2007), “A new simple third-order shear deformation theory of plates”, *Int. J. Solids Struct.*, 44(13), 4399-4417.

#### **Chapitre IV : Résultats et discussions de l'analyse du comportement des plaques sandwichs en FGM**

- [Vinson, 2001] Vinson, J.R. (2001), “Sandwich structures”, *Appl. Mech. Rev.*, 54(3), 201-214.
- [Vinson, 2005] Vinson, J.R. (2005), “Sandwich Structures: Past, Present, and Future”, In: *Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials*, (O.T. Thomsen, E. Bozhevolnaya, A. Lyckegaard Eds.), Chapter 1, Springer, Netherlands.
- [Vu et al, 2017] Vu, T.V., Nguyen, N.H., Khosravifard, A., Hematiyan, M.R., Tanaka, S. and Bui, T.Q. (2017), “A simple FSDT-based meshfree method for analysis of functionally graded plates”, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 79, 1-12.
- [Yu et al, 2015] Yu, T., Yin, S., Bui, T.Q. and Hirose, S. (2015), “A simple FSDT-based isogeometric analysis for geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates”, *Finite Elem. Anal. Des.* 96, 1-10.
- [Yu et al, 2016b] Yu, T., Yin, S., Bui, T.Q., Xia, S., Tanaka, S. and Hirose, S. (2016b), “NURBS-based isogeometric analysis of buckling and free

- vibration problems for laminated composites plates with complicated cutouts using a new simple FSDT theory and level set method”, *Thin-Wall. Struct.*, 101, 141-156.
- [Ait Atmane et al, 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(2), 369-384.
- [Mahi et al, 2015] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39 (9), 2489-2508.
- [Meksi et al, 2015] Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1215-1240.
- [Attia et al, 2015] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212.
- [Tounsi et al, 2016] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547-565.
- [Bourada et al., 2012] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2012), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 409-423.
- [Tounsi et al, 2013] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- [Taibi et al, 2015] Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 17(2), 99-129.
- [Bennoun et al, 2016] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [Merdaci et al, 2016] Merdaci, S., Tounsi, A. and Bakora, A. (2016), “A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 22(4), 713-732.
- [Bourada et al, 2016] Bourada, F., Amara, K. and Tounsi, A. (2016), “Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable

- refined plate theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 21(6), 1287-1306.
- [Hebali et al, 2016] Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A. and Kaci, A. (2016), “A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 22(3), 473-495.
- [Besseghier et al, 2017] Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 19(6), 601-614.
- Fahsi et al, 2017] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Geomech. Eng., Int. J.* [In press]
- [Reddy, 1984] Reddy, J.N. (1984), *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, New York, NY, USA.
- [Bellifa et al, 2016] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38(1), 265-275.
- [Draiche et al, 2016] Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates”, *Geomech. Eng., Int. J.*, 11(5), 671-690.
- [Brush et Almroth, 1975] Brush, D.O. and Almroth, B.O. (1975), *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill, New York, NY, USA.
- [Meyers et Hyer, 1991] Meyers, C.A. and Hyer, M.W. (1991), “Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates”, *J. Therm. Stress.*, 14(4), 519-540.

## **Chapitre V : Résultats et discussions de l’analyse du comportement des plaques sandwiches en FGM**

- [Matsunaga, 2005] Matsunaga, H. (2005), “Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher- order deformation theory”, *Compos. Struct.*, 68(4), 439-454.
- [Bourada et al, 2012] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 14(1), 5-33.