MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE DE DJILALI LIABES

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et matériaux

# Etude analytique et numérique du comportement dynamique des structures composites sur fondations viscoélastique

Présenté par : *Melle KHETIB Mounia*

Devant le jury :

| | | | |
|---|---|---|---|
| BAAHMED Djelloul | *MCA* | *UDL – Sidi bel abbés* | Président |
| ELMEICHE Nourredine | *Pr* | *UDL – Sidi bel abbés* | Directeur de thèse |
| ABBAD Hichem | *Pr* | *UDL – Sidi bel abbés* | Co- Directeur de thèse |
| AMARA Khaled | *Pr* | *UBB – Ain Témouchent* | Examinateur |
| GHAZI Abdelkader | *MCA* | *UMS – Mascara* | Examinateur |
| ZOUAMBI Leila | *MCA* | *UAZ–Relizane* | Examinateur |

Année universitaire 2021-2022

*A toutes et à tous*

# REMERCIEMENTS

*Je suis extrêmement reconnaissante à mon superviseur, le Professeur N. ELMICHE pour avoir accepté de diriger mon travail, ses encouragements à chaque instant de ma recherche universitaire.*

*Un merci plein de respect pour le professeur H. ABBED pour m'avoir accepté au sein du laboratoire de Génie Civil et Environnement (LGCE), pour les conseils scientifiques et techniques qu'il m'a apporté pour mener à bien ce travail.*

*Mes sincères remerciements vont également à : Monsieur le Professeur AMARA Khaled de l'Université Belhadj Bouchaib de l'Université d'Ain Témouchent, Monsieur le Maître de conférence GHAZI Abdelkader de l'Université de Mustapha Stambouli de Mascara, Madame le Maître de conférence ZOUAMBI Leila de l'Université de Ahmed Zabana de Relizane d'avoir accepté de juger mon travail.*

*Je tiens à exprimer avec fierté ma gratitude à Monsieur BAAHMED Djelloul Maître de conférence de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

# SOMMAIRE

# SOMMAIRE

## Chapitre III : Théories des plaques



## Chapitre IV : Etude analytique de la vibration d'une plaque en FGM sur fondation viscoélastique



## Chapitre V : Résultats et interprétation

# LISTE DES NOTATIONS

# LISTE DES NOTATIONS

| | | |
|---|---|---|
| F.G.M | : | Matériaux a gradient de propriétés (Functionally Graded Material); |
| CPT | : | Théorie classique des plaques ; |
| FSDT | : | Théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (théorie des plaques Mindlin) ; |
| TSDT | : | Théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur ; |
| SSDT | : | Théories de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur par Reddy et Touratier ; |
| BC | : | Conditions aux limites ; |
| HSDT | : | Théorie de la déformation par cisaillement d'ordres supérieurs ; |
| RPT | : | Théorie des plaques raffinées ; |
| FGP | : | Plaque à gradation fonctionnelle (FG) basées sur la théorie du gradient de déformation non local ; |
| SIC/C par C.V.D | : | Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur ; |
| PSZ/Mo | : | Technique de la compaction sèche des poudres ; |
| TIB2/Cu | : | Synthèse par auto-propagation à haute température ; |
| P-FGM | : | Poutre FGM varie en fonction de la loi de puissance ; |
| E-FGM | : | Poutre FGM varie en fonction de la fonction exponentielle ; |
| ESL | : | Modèle couche équivalente (modèles équivalent single layer); |
| LW | : | Modèles layer-wise (par couche) ; |
| LMT | : | Théorie des multicouches de lekhnitskii (lekhnitskii multi layered theory) ; |
| AMT | : | Théorie des multicouches de Ambartsumian (Ambartsumian multilayered theory); |
| CLT | : | Théorie classique des stratifies ; |
| ZZ | : | Effet Zig-Zig ; |
| RMT | : | Modèle Reissner multi-layered theory (théorie de Reissner multi-couche); |
| S-FGM | : | Poutre FGM varie en fonction de la fonction sigmoïde ; |
| DE | : | Equation d'équilibre ; |
| CT | : | Déformations dites de cisaillement transversal ; |
| $\xi$ | : | Variation du rapport d'amortissement de la plaque ; |

| | | |
|---|---|---|
| $\nabla^2$ | : | Operateur de Laplace en x et y; |
| $q(x, y)$ | : | Charge latérale repartie ; |
| $p(x, y)$ | : | Pression d'interface de fondation ; |
| $m_{sx}\ et m_{sy}$ | : | Moments proportionnels aux pentes (angles de rotation); |
| $\sigma$ | : | Energie de déformation ; |
| $H$ | : | Epaisseur de la couche de fondation ; |
| $x, y\, et\, z$ | : | Coordonnées d'un point de la plaque dans un repère cartésien et galiléen ; |
| $t$ | : | Variable temps ; |
| $V_c$ | : | Fraction volumique de la céramique ; |
| $V_m$ | : | Fraction volumique du métal inoxydable ; |
| $x\ et y$ | : | Coordonnées définissent le plan de la poutre ; |
| $z$ | : | Origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur ; |
| $E(z)$ | : | Module de Young ; |
| $E_m$ | : | Module de Young du métal ; |
| $E_c$ | : | Module de Young de la céramique ; |
| $h$ | : | Epaisseur de la plaque ; |
| $h_n$ | : | Epaisseur de la couche n ; |
| $D$ | : | Rigidité en flexion de la plaque ; |
| $D_n$ | : | Module de rigidité en flexion de la couche n du matériau ; |
| $D_{12}$ | : | Rigidité de flexion complexe ; |
| $k\ et\ k_1$ | : | Facteurs de proportionnalité correspondants ; |
| $k$ | : | Module de fondation ou le poids spécifique de la base liquide ; |
| $k_y$ | : | Nombre d'onde associe a la direction $(o_y)$ ; |
| $k_w$ | : | Paramètre de Winkler ; |
| $k_p$ | : | Paramètre de Pasternak ; |
| $c_d$ | : | Coefficient d'amortissement ; |
| $k$ | : | Nombre d'onde, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$; |
| $\nu(z)$ | : | Coefficient de poisson ; |
| $p$ | : | Exposant de la fraction volumique qui règle la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche FGM ($0 \leq p \leq \infty$) ; |
| $w_b(x, y)$ | : | Déplacement dû au moment fléchissant $w_b$; |

| | | |
|---|---|---|
| $w_s(x,y)$ | : | Déplacement dû au moment fléchissant $w_s$; |
| $w$ | : | Déplacement de la surface de fondation dans la direction z ; |
| $w_1$ | : | Fleche due à la contraction ou à l'extension de la couche supérieure du ressort ; |
| $w_2$ | : | Fleche au reste de la fondation ; |
| $w_{elastic}$ | : | Travail élastique ; |
| $E_f$ et $G_f$ | : | Constantes élastiques du matériau de fondation ; |
| $n$ | : | Direction quelconque en un point du plan de la surface de la fondation ; |
| $\tau_{zx}$ et $\tau_{zy}$ | : | Contraintes de cisaillement ; |
| $G$ | : | Module de cisaillement ; |
| $\rho$ | : | Densité de masse ; |
| $M$ | : | Coefficient de viscosité ; |
| $\eta$ | : | Coefficient de visco compressibilité ; |
| $\frac{\partial w}{\partial t}$ | : | Vitesse descendante de la surface de fondation ; |
| $\sigma_z$ | : | Contrainte dans la direction transversale ; |
| $\psi_x$ | : | Rotation en flexion de normales transverses à l'axe x ; |
| $\psi_y$ | : | Rotation en flexion de normales transverses à l'axe y ; |
| $u$ et $v$ | : | Déplacements dans le plan xy de la plaque ; |
| $C_s(k^2)$ | : | Facteur de correction des effets de cisaillement sur le module de rigidité en flexion. Ce facteur dépendant du nombre d'onde et de la fréquence ; |
| $\rho_n$ | : | Masse volumique ; |
| $\eta_{12}$ | : | Facteur de perte structurale du système ; |
| $\zeta$ | : | Rapport d'amortissement ; |
| $K$ | : | Matrice de rigidité ; |
| $C$ | : | Matrice d'amortissement globale ; |
| $M$ | : | Matrice de masse ; |
| $\upsilon$ | : | Coefficient de poisson ; |
| $Al$ | : | Aluminium ; |
| $Al_2O_3$: | : | Alumine ; |
| $\omega^*$ | : | Fréquence non amortie sans dimension ; |
| $U$ | : | Energie de déformation ; |
| $W$ | : | Travail des forces extérieures ; |

| | | |
|---|---|---|
| $u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y)$ | : | Déplacement au milieu de la plaque ; |
| $\theta_x(x,y), \theta_y(x,y)$ | : | Rotations selon les plans de flexion yz et $xz$; |
| $\psi(z)$ | : | Fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des efforts de cisaillement le long de l'épaisseur ; |
| (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) | : | Projection plasma à double torches ; |
| $U(x,y,z)$ | : | Déplacement suivant x ; |
| $V(x,y,z)$ | : | Déplacement suivant y ; |
| $W(x,y,z)$ | : | Déplacement suivant z ; |
| $U_f$ | : | Energie de déformation de fondation ; |
| $K$ | : | Energie cinétique ; |
| $\sigma_{xx}$ ; $\sigma_{yy}$ ; $\sigma_{zz}$ ; $\tau_{xy}$ ; $\tau_{yz}$ ; $\tau_{xz}$ | : | Composantes des contraintes ; |
| $\varepsilon_{xx}$ ; $\varepsilon_{yy}$ ; $\varepsilon_{zz}$ ; $\gamma_{xy}$ ; $\gamma_{yz}$ ; $\gamma_{xz}$ | : | Composantes des déformations ; |
| $Q_{ij}$ | : | Constantes élastiques ; |
| $\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\}$; $\{B_{ij}^f, D_{ij}^f, F_{ij}^f\}$; $\{A_{ij}^f\}$ | : | Paramètres de rigidité ; |
| $F_{ressort}$ | : | Forces verticales du ressort ; |
| $F_e$ | : | Force de réaction des fondations sur la structure ; |
| $U_{ij}, V_{ij}, W_{bij}$ $et$ $W_{sij}$ | : | Paramètres arbitraires pour la détermination de la fréquence propre associée au $(m,n)^{th}$mode propre $\omega$; |
| $F_{amortisseur}$ | : | Forces verticales des éléments amortisseurs ; |
| $K_0(\beta r) et I_0(\beta r)$ | : | Fonctions de Bessel ; |
| $\{\Delta\}$ | : | Grandeur désigne les colonnes : |
| $A$ | : | Longueur de la plaque ; |
| $B$ | : | Largeur de la plaque ; |
| $X_m(x), Y_n(y)$ | : | Fonction admissible ; |
| $\kappa = 5/6$ | : | Facteur de correction. |

# LISTE DES FIGURES

# LISTE DES FIGURES

# LISTE DES TABLEAUX

# LISTE DES TABLEAUX

# RÉSUMÉ

# ملخص

العمل الحالي يخص بالدراسة الاهتزازات الحرة للصفائح من مواد ذات الخصائص المتدرجة المستندة على أساسات لزوجة-مرنة من نوع وينكلر- باسترناك باستخدام نظرية الصفائح المنقحة ذات المتغيرين، حيث تم عرض مجال القص العرضي من خلال سمك الصفيحة بدالة جديدة خاصة بتشوه القص العرضي. يتم الحصول على معادلات التوازن من خلال مبدأ هاملتون. يتم فحص دراسة تحليلية ورقمية بالتفصيل تحت تأثير شروط حدودية مختلفة لحل مشكلة الاهتزاز مع تخميد الأساس، مع الأخذ في الاعتبار العوامل الهندسية والميكانيكية المختلفة، والنتائج التي تم الحصول عليها باستخدام الدالة الجديدة الخاصة بتشوه القص العرضي تتوافق جيدًا مع النتائج الأخرى المدرجة بالمراجع العلمية، وتعطي الدالة الجديدة المقترحة نتائج موثوقة يمكن استخدامها بسهولة لحل مشاكل الاهتزازات الحرة للصفائح المصنوعة من مواد ذات الخصائص المتدرجة.



**مفاتيح:** الاهتزازات الحرة، مواد ذات الخصائص المتدرجة، أساسات لزوجة-مرنة، وينكلر- باسترناك، نظرية الصفائح المنقحة، تشوه القص العرضي، مبدأ هاملتون، تخميد الأساس.

# RESUME

Le présent travail, consiste à étudier les vibrations libres des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM) reposant sur des fondations viscoélastiques de type Winkler-Pasternak en utilisant la théorie des plaques raffinée à deux variables, le champ de cisaillement transversale à travers l’épaisseur de la plaque est présenté avec une nouvelle fonction de forme de déformation en cisaillement. Les équations d’équilibre sont obtenues par le principe d’Hamilton. Une étude analytique et numérique est examinée en détail avec différentes conditions aux limites pour résoudre le problème de la vibration avec amortissement de la fondation, en tenant compte de divers paramètres géométriques et mécaniques, les résultats obtenus avec la nouvelle fonction de forme de cisaillement sont en bon accord avec d'autres résultats trouvés dans la littérature, la fonction de forme proposée donne des résultats fiables et peut facilement être utilisée pour résoudre les problèmes de vibration libre des plaques en FGM.



**Mot clés :** Vibrations libres, FGM, Fondations viscoélastiques, Winkler-Pasternak, Théorie des plaques raffinées, Cisaillement transversale, Principe d’Hamilton, Amortissement de la fondation.

# ABSTRACT

The present work consists in studying the free vibrations plates of the functionally graded materials (FGM) based on viscoelastic foundations of type Winkler-Pasternak using of the refined two variables plates theory, the transverse shear field through the plate thickness is presented with a new shear deformation shape function. The equilibrium equations are obtained by Hamilton principle. An analytical and numerical study is examined in detail with different boundary conditions to solve the vibration problem with foundation damping, taking into account various geometrical and mechanical parameters, the obtained results with the new shear shape function are in good agreement with other results found in the literature, and the proposed shape function gives reliable results and can be easily used to solve the free vibration problems of plates in FGM.

**Keywords**: Free vibration, FGM, Viscoelastic foundations, Winkler-Pasternak, Refined plate theory, Transverse shear, Hamilton principle, Foundation damping.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La technologie moderne essaie à plusieurs fois d'avoir des matériaux de construction avec une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Il est donc du ressort de l'ingénieur de concevoir des structures tout en plaçant le bon matériau sous la bonne forme et au bon endroit.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par l'association d'un matériau de haute dureté pose le problème de l'interface. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets, peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou à une fissuration. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés [1] (Functionally Graded Material " F.G.M ").

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des composites sophistiqués, dont la microstructure est hétérogène, mais les caractéristiques demeurent préservées. Généralement ces matériaux sont fabriqués de composants isotropes tels que les métaux et la céramique. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des leurs avantages, puisqu'ils réduisent la disparité dans les propriétés matérielles et les contraintes thermiques pour cela leur application est propagée dans divers domaines tels que les avions, les secteurs biomédicaux et les constructions civiles et industrielles.

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'évaluer les déplacements, les déformations et les contraintes normales et tangentielles liés aux différents chargements. Alors, plusieurs études sur les structures en FGM ont été réalisées et rapportées dans la littérature, au cours des dernières années.

La théorie classique des plaques, basée sur les hypothèses de Kirchhoff, est inexacte pour l'analyse de la distribution des déplacements et des contraintes dans les plaques FGM car on néglige les effets de cisaillement transversal.

De même, la théorie classique des plaques (CPT) ne peut être appliquée qu'à l'analyse des plaques relativement minces lorsque les déformations transversales peuvent être négligées. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), également connue sous le nom de théorie des plaques Mindlin [2] est inadéquate pour prédire les solutions exactes des plaques FGM car elle est fortement liée à la meilleure estimation des facteurs de correction de cisaillement qui dépend du chargement et des conditions aux limites (BC), et qui sont introduites dans le but de contourner le problème de la distribution des déformations de cisaillement transversal qui est supposé uniforme à travers l'épaisseur.

Reddy [3] a étudié le comportement statique des plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle en se basant sur sa théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre. Carrera et al. [4] se sont enquis de l'influence de l'effet d'étirement sur les réponses statiques des éléments coques en FGM. Pour leur part, Neves et al. [5-6] et Ferreira et al. [7] ont développé une théorie hybride de déformation par cisaillement quasi-3D pour l'analyse statique des vibrations libres des plaques FGM en utilisant les deux méthodes numériques sans maillage. De même, Mantari et Zenkour ont développé des modèles bidimensionnels et tridimensionnels pour une plaque à gradation fonctionnelle (FGM) soumise à des charges mécaniques et thermiques, toutes deux appliquées sur son sommet [8, 9].

La théorie des plaques de cisaillement d'ordre supérieur a été développée dans le but d'affiner la cinématique simplifiée du modèle Reissner – Mindlin en exprimant les relations à l'aide de polynômes ou de fonctions trigonométriques d'ordre supérieur [10-14]. lors de l'utilisation de la théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSPT) ou de toute autre théorie de la plaque de déformation par cisaillement, car les équations gouvernantes sont plus compliquées que celles utilisées dans le FSDT; en fait, l'HSDT et d'autres théories affinées de déformation par cisaillement donnent des contraintes de cisaillement transversales plus précises et plus stables. Dans ce contexte, ElMeiche et al. [15] ont examiné le comportement statique et vibratoire des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie de HSDT pour le flambage et la vibration des plaques. De même, Nedri et ElMeiche [16] ont étudié les vibrations libres de plaques composites stratifiées supportées sur des fondations élastiques en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement.

Shimpi [17-19] a développé une théorie des plaques raffinées (RPT) à deux variables plus simple qui est assez facile à utiliser. De plus, Kim et al. [20] ont étudié le comportement en flexion des FGP sur la base des quatre inconnus HSDT en utilisant la fonction de forme polynomiale dans la théorie de la déformation par cisaillement. Moradi-Destjerdi et al. [21] ainsi que Mechab et ElMeiche [22] ont étudié l'analyse des vibrations libres des poutres orthotropes en utilisant la formulation locale et non locale ainsi que l'effet de Poisson, basé sur la théorie des ordres élevés. En outre, Abdalla [23] et Zenkour [24] ont indiqué que les plaques sur des fondations élastiques ont une large utilisation dans les domaines de génie civil, l'industrie de la construction, les radeaux, les réservoirs de stockage, les piscines, les automobiles, les navires, les trains et les pistes d'avions.

En ce qui concerne l'analyse des plaques reposant sur des fondations élastiques, un seul paramètre est souvent utilisé pour décrire le comportement de base de ces plaques dans le modèle bien connu de Winkler, ce modèle suppose qu'il existe une interaction proportionnelle entre les forces externes et le déplacement de n'importe quel point de la base. Il convient également de mentionner l'existence d'un autre modèle impliquant un deuxième paramètre, c'est le modèle de Pasternak cité par [24-30]. Ce modèle prend en compte l'effet de l'interaction de cisaillement entre les points adjacents de la fondation.

Certains autres chercheurs ont modélisé les fondations en utilisant des paramètres de fondation viscoélastiques, le comportement viscoélastique des fondations est un paramètre qui provoque la dissipation d'énergie dans les systèmes continus, tels que les poutres et les plaques reposant sur des fondations flexibles. Chen et Sheu [31] ont étudié la poutre Timoshenko soutenue par ces fondations. La fondation viscoélastique sous la poutre a été modélisée au moyen de ressorts continus uniformément répartis sur la longueur. Récemment, Ebrahimi Zenkour ont examiné les effets hygrothermiques sur les caractéristiques de vibration des nano-poutres viscoélastiques à gradation fonctionnelle (FG) basées sur la théorie du gradient de déformation non locale [32-33], en utilisant des théories d'ordre supérieur. Zamani et Kiasat [34-35] ont étudié les vibrations libres de poutres et plaques viscoélastiques sur une fondation viscoélastique avec la condition au limite simplement appuie. De plus, Fan et al. [36-39] ont examiné la réponse transitoire non linéaire de l'impact à faible vitesse des plaques et poutres FGM soumises à une charge transversale reposant sur des fondations Visco-Pasternak dans des environnements thermiques.

Le présent travail a pour but de traiter la réponse dynamique des plaques en FGM reposant sur des fondations viscoélastiques. La plaque est considérée noyée dans un milieu qui se caractérise par trois paramètres, modélisé par, un ressort ayant une rigidité longitudinale de type Winkler, une rigidité en rotation de type Pasternak et un amortisseur dû au sol. Les équations de mouvements ont été obtenus par le principe de Hamilton, les effets des propriétés, géométriques et mécaniques des plaques en FGM sur leurs vibrations libres, les différentes conditions aux limites et les paramètres de rigidité de la fondation élastique ont été examinés et discutés en détail. Les résultats obtenus avec la nouvelle fonction de forme de cisaillement ont une très grande concordance à ceux rapportés par d'autres chercheurs.

Le présent travail est réparti en cinq chapitres. En s'appuyant sur des sources bibliographiques fiables, le premier chapitre présente une vision globale de l'état de l'art dans le domaine des nouveaux matériaux et plus précisément les matériaux composites tels que les nouveaux matériaux à gradient de propriétés évolués F-G-M. Après une brève introduction, nous avons présenté la différence entre les matériaux classiques et les nouveaux matériaux, leurs performances et leurs utilisations dans le domaine de constructions en génie civil.

Le deuxième chapitre présente les différents types de fondations élastiques et viscoélastiques, et les schémas physique et mathématique pour chaque type.

Le troisième chapitre porte sur l'explication de la théorie des plaques pour les différentes hypothèses de calcul avec et sans effet de cisaillement transversal ainsi que les différents types de fonctions de forme de déformation transversale.

Dans le quatrième chapitre, nous formulons mathématiquement le modèle analytique pour l'étude de la vibration d'une plaque en matériau FGM sous fondation viscoélastique en utilisant la théorie raffinée des plaques à quatre variables.

Le cinquième chapitre illustre et interprète plusieurs résultats numériques obtenus pour différents exemples d'application par une étude paramétrique pour voir l'influence des paramètres mécaniques, géométriques, conditions aux limites, rigidités et amortissement visqueux du sol sur la vibration libre.

En conclusion, nous recensons les principales avancées du travail effectué et exposons brièvement les perspectives.

01 CHAPITRE

# *Généralités sur les nouveaux matériaux*

## *I.1 Introduction :*

L'idée d'avoir un abri résistant, très solide et durable c'est le rêve idéal de l'humanité entière. Et afin de l'obtenir, elle a passé par plusieurs étapes en partant de l'utilisation de la paille, la boue, le bois, les briques arrivant maintenant au matériau composite. Commençant par le béton qui n'est qu'un mélange généré de ciment, agrégat et eau. Plus tard, c'est le plastique renforcé de fibres. En réalité ce n'est rien qu'une matrice polymère renforcée de fibres, le composite est devenu un matériau fondamental pour l'industrie aérospatiale, automobile, maritime et pour la construction. Mais l'idée générée pour le moment est la combinaison de deux matériaux d'un pourcentage variable sur la section transversale, en conservant leurs propriétés. Par exemple, l'ancrage d'une surface en céramique sur le dessus et d'une surface en acier sur le dessous avec une zone de transition lisse, appelée matériau à graduation fonctionnelle (FGM).

Donc, le but c'est la préservation des meilleures propriétés, comme la haute résistance, la rigidité élevée, la résistance à haute température, etc. Les FGM sont utilisés dans plusieurs industries et secteurs sous forme d'un produit artificiel, mais dans la nature ils prennent ses formes primitives suivantes : L'os, la peau humaine, il est à noter que l'arbre de bambou peut être considéré comme des formes physiologiques de FGM. La figure 1 illustre plusieurs exemples organiques et artificiels évoquant les FGM.

Les domaines d'application des FGM se résument d'après [40] comme suit :

- L'Aérospatial : Les boucliers thermiques pour engins spatiaux, les tubes échangeurs de chaleur ;
- Le Biomédical : L'os artificiel, la peau et les dents ;
- La Communication : Les fibres optiques, les lentilles et les semi-conducteurs ;
- Le Domaine du nucléaire : Les palettes de combustible, la paroi de plasma des réacteurs de fusion ;
- Le Secteur de l'énergie : Les générateurs thermoélectriques, les cellules solaires et les capteurs ;
- L'Automobile : Les systèmes de transmission de puissance et les systèmes de freinage.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace peut générer localement, par cette transition brutale de composition, de fortes concentrations de contraintes.

La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M "). C'est un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [40].

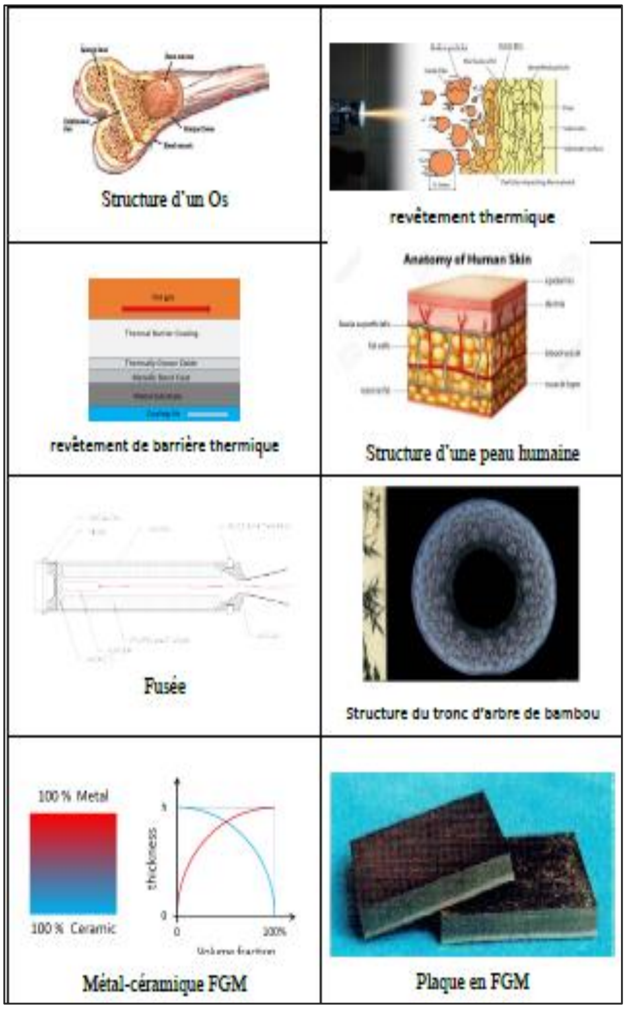



***Figure I.1 :*** *Illustrations structurelles et artificielles pour les FGM [40].*

## *I.2 Concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) :*

Généralement, les FGM sont constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés de ces matériaux.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort.

Donc, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau matériau composite profitant à la fois des propriétés des matériaux céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température) [41].

## *I.3 Evolution des matériaux à gradient de propriétés (FGM) :*

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. Normalement l'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [42].

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales de 1 à 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre, pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; ces techniques sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en
- phase vapeur) ;
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- Le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique. Actuellement, la recherche des FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne où 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications des FGM pendant le 21ème siècle. Par contre en 1996 au Japon, les universités ont traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM [43-44].

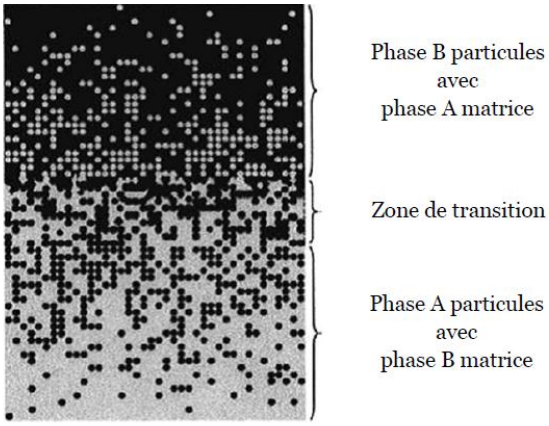



***Figure I.2 :*** *Fractions volumiques des FGM avec des phases constitutives graduées [44].*

## *I.4 Différence entre les matériaux composites classiques et les FGM :*

Les propriétés supérieures de matériaux composites avancés, telles que la résistance spécifique et la rigidité élevée, ont conduit à leur utilisation généralisée dans les avions à haute performance, astronefs, des pièces automobiles et des structures spatiales. Dans les structures classiques de composites stratifiés, lames élastiques homogènes sont liés ensemble pour obtenir des propriétés mécaniques et matérielles améliorées.

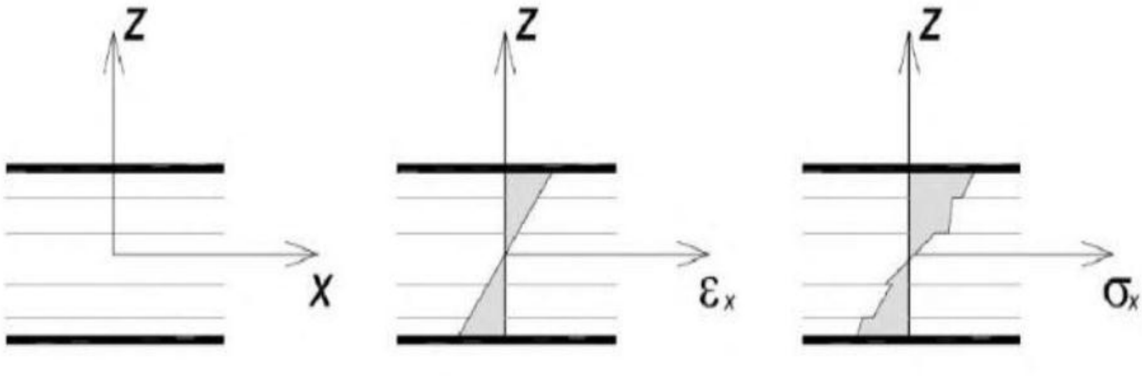



***Figure I.3 :*** *Variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée [44].*

Les matériaux composites sont fabriqués par l'homme et par conséquent, les constituants des matériaux composites peuvent être sélectionnés et combinés de manière à produire un matériau utile qui a les propriétés souhaitées, tels que la haute résistance, une rigidité élevée, une plus grande résistance à la corrosion, une plus grande résistance à la fatigue.

La constitution d'anisotropie des structures composites stratifiées souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques (figure I.3) qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et ainsi des concentrations de contraintes allégées comparativement à celle trouvées dans les composites stratifiés.

La graduation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte. La variation progressive dans un matériau est très efficace elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure. Les FGM sont généralement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, puisqu'ils sont utilisés aussi comme structures de barrière thermique dans des environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Dans de telles applications, la céramique présente une résistance à la chaleur et à la corrosion ; parallèlement le métal fournit la force et la ténacité [45].

## *I.5 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel :*

Généralement, les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes.

Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

- Une variation par tranche de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire, des couches quasi-homogènes de céramique-métal (figure I.4-a) ;

- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.4-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

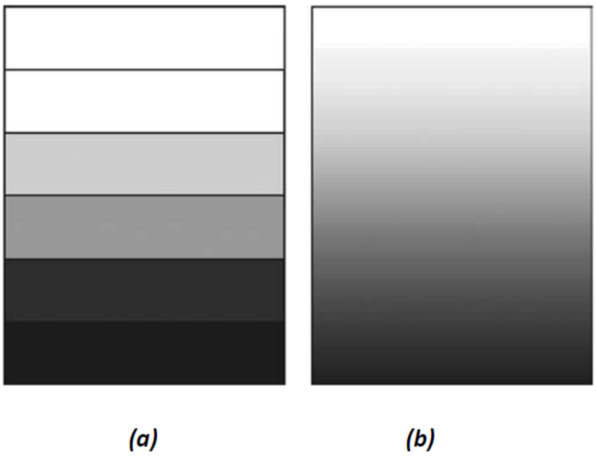



***Figure I.4 :*** *Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel [41]*

L'expression de fraction volumique est donnée par l'équation (I.1.a), à cause de la simple règle de mélange de matériaux composites (modèle de Voigt). Les propriétés effectives des matériaux $P_j$ de la couche de FGM, comme le module de Young $E_j$, peuvent alors être exprimées par l'équation (I.1.b). La somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants est mentionnée dans l'équation (I.1.c) :

$$PV_m = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \qquad (I.1.a)$$

$$V_f = \sum_{j=1} P_j V_{f\,j} \qquad (I.1.b)$$

$$\sum_{j=1} V_{f\,j} = 1 \qquad (I.1.c)$$

Où :

$V_m$ : Fraction volumique ;

$h$ : Epaisseur de la plaque ;

$p$ : ($0 \leq p \leq \infty$) un exposant de la fraction volumique qui règle la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche en FGM ;

$P_j$ : Propriétés du matériau ;

$V_{f\,j}$ : Fraction volumique du matériau constitutif $j$.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure. Les coordonnées $x$ et $y$ définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe $z$ origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (figure I.5) [42].

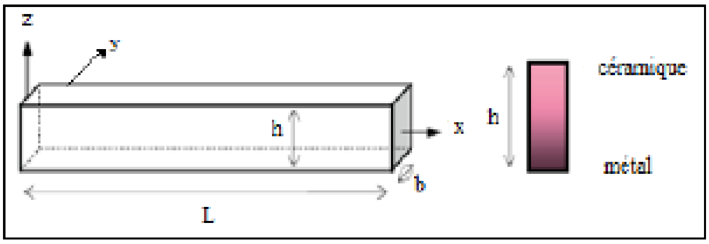



***Figure I.5 :*** *Géométrie d'une poutre FGM [42]*

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe$z$), soit :

$$E = E(z)\,, et\,,\ \ \nu = \nu(z) \tag{I.2}$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont en général à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable (figure I.5). Dans ce cas, la loi de Voigt étudiée par [46-49] se réduit à :

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c \tag{I.3.a}$$

$$V_m + V_c = 1 \tag{I.3.b}$$

Jin and Batra [50], Ziou et al. [51] ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Autrement dit, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant mais le module de Young varie dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM en fonction de la loi de puissance (P-FGM), de la fonction exponentielle (E-FGM) ou de la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.5.1. Propriétés matérielles de la poutre (P-FGM) :

La fraction volumique de la classe des P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^p \tag{I.4}$$

Où :

$p$ : l'exposant (paramètre matériels);

$h$ : Epaisseur de la poutre.

Une fois la fraction volumique locale$V_c(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre en FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \tag{I.5}$$

Où :

$E_c$: Module de Young de la céramique (la surface supérieure$z = +h/2$de la poutre FGM) ;

$E_m$: Module de Young du métal (la surface inférieure $z = -h/2$ de la poutre FGM).

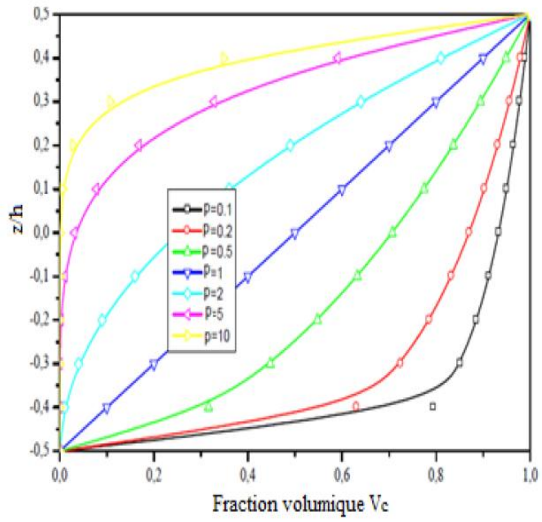



***Figure I.6 :*** *Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une poutre en FGM [42].*

La variation de la fraction volumique dans la direction de l'épaisseur de la poutre en matériau FGM est représentée sur la Figure I.6. Il apparait clairement que cette dernière change rapidement près de la surface inférieure pour $p < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

Il est à noter que $p$ ne prend que des valeurs supérieures ou égales à zéro $(0 \leq p \leq \infty)$. Dans le cas où $p = 0$, cette valeur indique que la plaque est entièrement en céramique. L'hypothèse de la loi de puissance ci-dessus représente une règle simple de mélanges qui est utilisée pour obtenir les propriétés efficaces de la plaque céramique-métal. La règle des mélanges ne peut être appliquée que dans le sens de l'épaisseur.

### *I.5.2. Propriétés matérielles de la poutre en S-FGM :*

Chi et al [52] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes à travers toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 + z}{h/2}\right)^p \; pour - h/2 \leq z \leq 0 \qquad (I.6.a)$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 - z}{h/2}\right)^p \; pour\ 0 \leq z \leq h/2 \qquad (I.6.b)$$

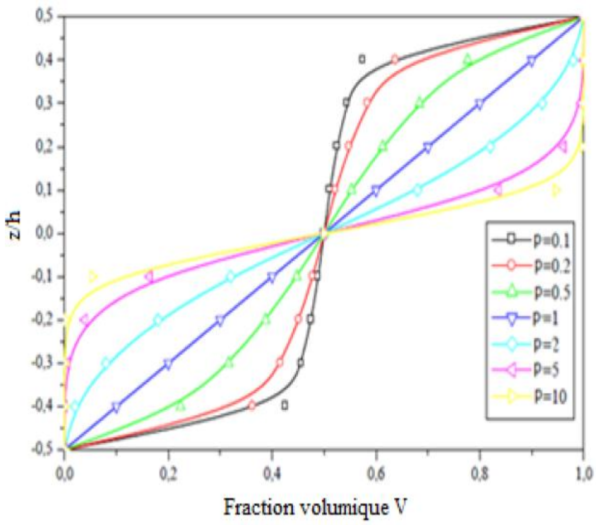



***Figure I.7 :*** *Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une plaque en (S-FGM) [42]*

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \;\; pour \;\; - h/2 \leq z \leq 0 \qquad (I.7.a)$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \;\; pour \;\; 0 \leq z \leq h/2 \qquad (I.7.b)$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.7) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée Poutre S-FGM.

### *I.5.3. Propriétés matérielles de la poutre en E-FGM :*

Pour décrire les propriétés matérielles en E-FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [53] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \qquad (I.8.a)$$

$$\beta = \frac{1}{h}\ln(\frac{E_c}{E_m}) \qquad (I.8.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque en E-FGM est représentée sur la figure I.8.

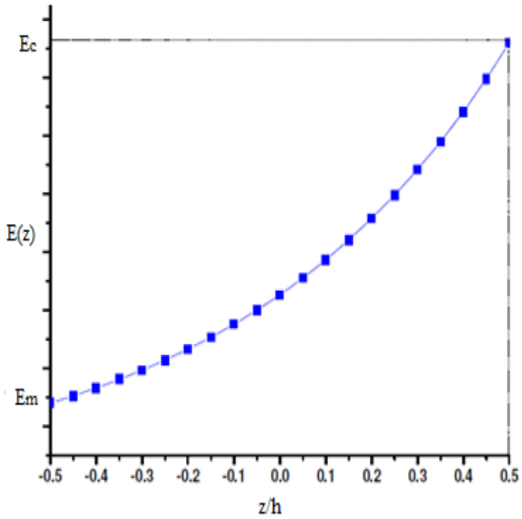



***Figure I.8 :*** *Variation du module de Young à travers l'épaisseur en E-FGM [42].*

## *I.6 Conclusion :*

Dans ce chapitre, nous avons présenté une vue générale sur une variété de matériaux composites, qui ont été la solution adéquate pour le problème d'apparition des contraintes thermiques dans des applications pratiques à haute température dans le cas du collage direct de métaux et céramiques où la contrainte thermique provoque la formation de fissures et le décollement au niveau des interfaces.

Donc un concept de graduation intermédiaire pour le métal et la céramique qui a été proposé pour la première fois par Kawasaki et Watanabe dans lequel la contrainte thermique a été effectivement éliminée par une couche graduée intermédiaire. Ces matériaux gradués possèdent simultanément une propriété super-résistante à la chaleur et une ténacité suffisante pour arrêter la propagation des fissures.

Ce qui a donné naissance à un matériau à gradient de propriétés (FGM) et il a été initialement appliqué pour les applications aéronautiques et les réacteurs à fusions. La réponse optimale des propriétés du matériau dans des conditions d'environnement extrême est la principale exigence dans la conception d'un FGM. Pour remplir cette exigence, la composition et la microstructure sont variées tout au long de la structure. On obtient un gradient de propriété dans les matériaux combinés. En effet, la maintenance des ouvrages du génie civil consiste à les protéger en assurant une meilleure étanchéité ou en limitant la corrosion, les réparer en cherchant à compenser les pertes de rigidité ou de résistance dues à la fissuration et aussi à les renforcer en améliorant les performances et la durabilité des ouvrages.

CHAPITRE

02

# *Modèles sur les différents types des fondations*

## *II.1 Introduction :*

Puisque la fondation demeure assez souvent un médium très complexe, les différentes recherches sont limitées jusqu'à ce jour à l'inclusion de la réaction de fondation dans l'équation différentielle correspondante de la structure (poutre, plaque et coque…), car généralement on se limite dans la recherche des contraintes et des déplacements au niveau de la zone de contact et non à l'intérieur du matériau de la fondation. Le problème se résume à la recherche d'une expression mathématique relativement simple qui devrait décrire la réponse de la fondation à la surface de contact avec un degré raisonnable de précision et un comportement soit élastique ou viscoélastique, avec ce présent chapitre nous tenons à présenter une brève explication du principe de fonctionnement de quelque modèle de base de fondation.

## *II.2 Type des modèles :*

### *II.2.1. Modèle de Winkler :*

Dans un premier temps, la plus simple explication d'une fondation élastique continue a été fournie par Winkler [54] qui a supposé que la base était un ensemble de ressorts linéaires indépendants étroitement espacés. Une telle fondation est équivalente à une base liquide. La relation entre la pression et la flèche de la surface de la fondation, toutes deux parallèles à l'axe z, la figure II.1 montre les déformations de la surface de fondation sous l'effet d'une charge uniforme, ce qui correspond à :

$$p(x,y) = kw(x,y) \tag{II.1}$$

Où :

$k$ : Module de fondation ou le poids spécifique de la base liquide.

Comme on peut voir, les déplacements de la région chargée seront constants dans le cas où la fondation est soumise à un tampon rigide ou bien à une charge uniforme. De plus, pour les deux types de chargement, les déplacements sont nuls en dehors de la région chargée. Il a toutefois été observé que, pour la plupart des matériaux, les déplacements de la surface de la fondation sont ceux illustrés sur la figure II.2 [55] :

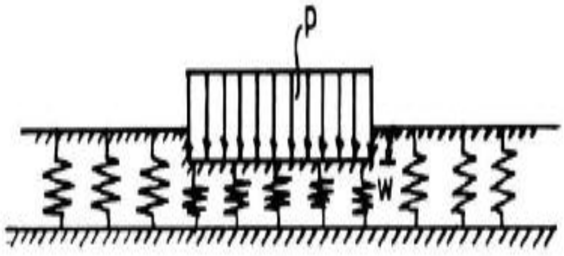



***Figure II.1 :*** *Déformations de la surface de la fondation sous l'effet d'une charge uniforme [55]*

Ensuite, la fondation a été considérée comme une base élastique semi-infinie (continuum), d'où l'apparition d'un problème beaucoup plus difficile du point de vue mathématique surtout pour les cas des structures composites reposant sur un continuum élastique, pour lequel plusieurs solutions étaient disponibles dans la littérature sur la théorie de l'élasticité [56]. Outre, pour certains matériaux, les fondations soumises à des charges se comportaient différemment de celles prédites par la théorie [57], il a été constaté, pour le sol, que les déplacements de surface hors de la région chargée ont diminué plus rapidement. Il est également discutable que des matériaux analogues à du caoutchouc mousse avec un taux de vide relativement grand se comportent comme des milieux isotrope homogène.

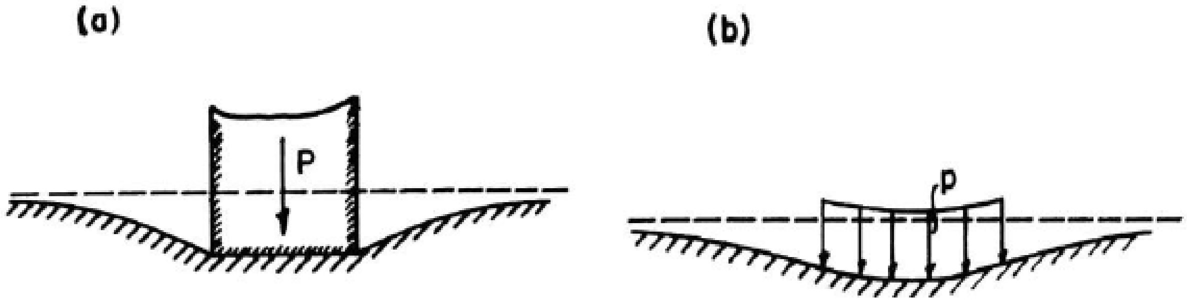



***Figure II.2 :*** *Déformations de la surface de la fondation sous l'effet de deux types de chargement (un tampon rigide et une charge uniforme) [55]*

Donc, dans la pratique, une vaste classe de matériaux de fondation dont le comportement ne peut être représenté par une base de type Winkler constituée d'éléments verticaux indépendants ni par un continuum isotrope.

Pour tenter de trouver une représentation physiquement proche et mathématiquement simple de ces matériaux au niveau de la zone de contact, on peut procéder de deux manières : soit, en commençant par le continuum et en introduisant des hypothèses simplificatrices en ce qui concerne les déplacements et ou les contraintes attendus, ou en partant de la fondation de type Winkler ou en supposant une sorte d'interaction entre les éléments de ressort afin de la rapprocher de la réalité.

### *II.2.2. Fondation du modèle de Filonenko-Borodich :*

Pour obtenir un certain degré d'interaction entre les éléments à ressort, les extrémités supérieures des ressorts sont reliées à une membrane élastique étirée soumise à un champ de tension constante T, comme le montre la figure II.3.

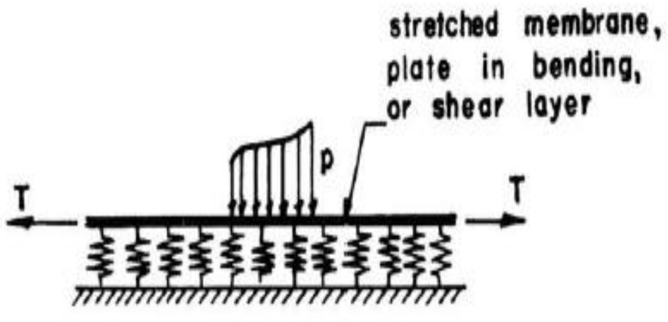



***Figure II.3 :*** *Fondation du Modèle de Filonenko-Borodich [55]*

La condition d'équilibre dans la direction z d'un élément membranaire donne la relation de déplacement de charge :

$$p = kw - T\nabla^2 w \qquad (II.2)$$

Où :

$\nabla^2$: L'opérateur de Laplace en x et y.

Selon l'équation II.2, on peut voir que l'interaction des éléments à ressort est caractérisée par l'intensité du champ de tension T dans la membrane [58-59].

### *II.2.3. Fondation du Modèle de Hetényi :*

Ce modèle propose que l'interaction entre les éléments à ressort indépendants soit réalisée en incorporant dans le cas [60-61] :

Bidimensionnel : une poutre élastique (pour les dérivations et les exemples numériques dans le cas bidimensionnel) ;

Tridimensionnel : une plaque dans le matériau de la fondation de type Winkler, de manière similaire à celle illustrée à la Figure II.3, supposons que la poutre ou la plaque se déforme en flexion uniquement ;

L'interaction des éléments à ressort est caractérisée par la rigidité en flexion de la plaque, et la relation entre la charge p et la flèche w est :

$$p = kw + D\nabla^2\nabla^2 \qquad (II.3)$$

Avec :

$D$: Rigidité en flexion de la plaque.

### *II.2.4. Fondation du modèle de Pasternak :*

Pasternak suppose l'existence d'interactions de cisaillement entre les éléments du ressort. Ceci peut être accompli en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque constituée d'éléments verticaux incompressibles, comme le montre la figure II.3, qui se déforme uniquement par cisaillement transversal [62]. La figure II.4 montre l'équilibre vertical d'un élément "cisaillement par couche" découpé par les surfaces x et $x + dx$ , y et $y + dy$, afin de démontrer la dérivation de la relation charge-flèche. Où on suppose que le matériau de base est homogène et isotrope dans le plan $x - y$, d'où $G_x = G_y = G$, alors :

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G_x\gamma_{xz} = G\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yz} = G_y\gamma_{yz} = G\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \qquad (II.4)$$

Avec :

$w = w(x, y)$ : Flèche de la surface de contact.

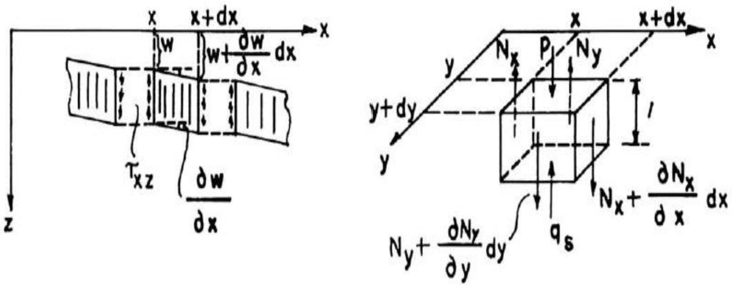



***Figure II.4 :*** *Schéma graphique de la résultante des efforts [55]*

Par contre les forces de cisaillement par unité de longueur au niveau de la couche de cisaillement sont :

$$\begin{cases} N_x = \int_0^1 \tau_{xz}\, dx = G\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ N_y = \int_0^1 \tau_{yz}\, dz = G\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \qquad (II.5)$$

Selon la Figure II.4, l'équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p - q_s = 0 \qquad (II.6)$$

Avec :

$$q_s = kw \qquad (II.7)$$

En substituant l'équation (II.5) à l'équation (II.6), on obtient :

$$p = kw - G\nabla^2 w \qquad (II.8)$$

Le second terme à droite de l'équation (II.8) représente l'effet des interactions de cisaillement des éléments verticaux. On peut voir que l'équation (II.2) est identique à l'équation (II.8) si T est remplacé par G [55].

### *II.2.5. Fondation du modèle Généralisée :*

Pour ce modèle, on suppose en plus de l'hypothèse du modèle Winkler où, à chaque point, la pression p est proportionnelle à la flèchew, le moment également est proportionnel à l'angle de rotation. Analytiquement cela est décrit par [63-70] :

$$\begin{cases} p = kw \\ m_n = k_1\,(dw/dn) \end{cases} \tag{II.9}$$

Où :

$n$: Direction quelconque en un point du plan de la surface de la fondation ;

$k\ et\ k_1$ : Facteurs de proportionnalité correspondants.

Cette hypothèse supplémentaire est relativement arbitraire. Dans une dernière section, il sera montré que le modèle de fondation de Pasternak est un modèle mécanique possible pour la fondation généralisée.

### *II.2.6. Modèle de Vlasov :*

Le modèle de V. Z. Vlasov [71-72] a abordé le problème d'un point de vue "continuum". Il a formulé son problème au moyen d'une méthode variationnelle. Imposant certaines restrictions aux déformations possibles d’une couche élastique, il a obtenu pour un ensemble d’hypothèses une relation charge-flèche qui, après redéfinition des constantes, est identique à l’équation (II.8).

### *II.2.7. Modèle de Reissner :*

Le modèle de E. Reissner [73] a négligé les contraintes dans le plan de la couche de fondation, et que les déplacements horizontaux aux surfaces supérieure et inférieure de la couche de fondation soient nuls. Il obtient pour le cas élastique la relation :

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \tag{II.10}$$

$$c_1 w - c_2 \nabla^2 w = p - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 p \tag{II.11}$$

Avec :

$$c_1 = \frac{E_f}{H};\ c_2 = \frac{H\,G_f}{3} \tag{II.12}$$

Où :

$w$: Déplacement de la surface de fondation dans la direction z ;

$p$: Charge latérale répartie agissant sur la surface de fondation ;

$E_f$ *et* $G_f$ : Constantes élastiques du matériau de fondation ;

$H$: Epaisseur de la couche de fondation.

Mais, il est à noter que l'équation (II.11) est identique à l'équation (II.8), pour une pression p (constante ou linéairement variable), $c_1 = k\ ;\ c_2 = G.$

Par conséquence, pour un point de surface donné (x, y) selon (II.10), les contraintes de cisaillement $\tau_{zx}$ et $\tau_{zy}$ sont indépendantes de z, constantes sur toute la profondeur de la fondation ; c'est un résultat physiquement non réaliste, en particulier pour des couches de fondation relativement épaisses. Cependant, étant donné que des modèles de fondation sont introduits pour étudier la réponse de la surface de la fondation aux charges et non aux contraintes provoquées dans la fondation.

## *II.3 Caractéristiques du modèle de Pasternak :*

Le modèle de J. Ratzersdorfer, a abouti à une expression semblable à l'équation (II.8) pour le cas à deux dimensions en basant sur une proposition de R. Von Mises, et par un développement formel de la relation intégrale de Wieghardt pour la charge et les flèches [74-75]. Bien que sa procédure formelle n'ait pas révélé la signification physique du second terme de l'équation (II.8), indique que cette approximation est supérieure à la réponse de fondation puisque le G "module de cisaillement", entre dans l'analyse, néanmoins la prise en compte du comportement mécanique du modèle et du milieu réel, suggèrent que le modèle de Pasternak c'est l'extension la plus naturelle du modèle de type Winkler pour les fondations homogènes. Etant donné que la relation charge-flexion qui en résulte est relativement simple, elle est choisie comme modèle de base pour les investigations ultérieures. Dans la suite, certaines de ses caractéristiques seront examinées. Dans le cas d'une charge linéaire p le long de l'axe des y, l'équation (II.8) se réduit à :

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \beta^2 w = 0 \qquad \textit{(II.13)}$$

Où :

$$\beta^2 = k/G \qquad \textit{(II.14)}$$

Quand x tend vers l'infini (x → ∞),w est fini, cette solution devient :

$$w(x) = \frac{\bar{P}\beta}{2k} e^{-\beta x} \quad (II.15)$$

Les déviations causées par une charge répartie $p(x)$ peuvent être obtenues en définissant $\bar{P} = p(\xi)d\xi$ et en intégrant sur l'intervalle chargé comme indiqué sur la Figure II.5. Ainsi :

$$w(x) = \frac{\beta}{2k} \int_{-a}^{+b} p(\xi) e^{-\beta|x-\xi|}\, d\xi \quad (II.16)$$

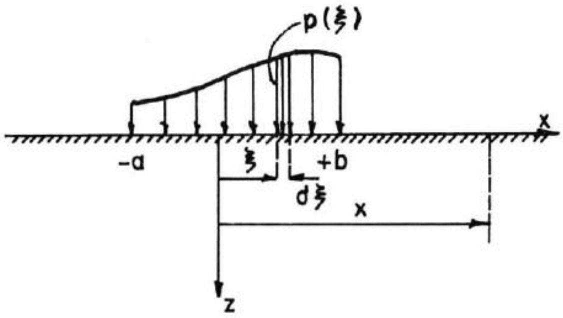



***Figure II.5 :*** *Intégrale de la charge $p(\xi)$ sur un intervalle défini [55].*

Pour une répartition arbitraire de la charge sur la surface de la fondation, le noyau nécessaire est obtenu comme solution du cas d'une charge concentrée $P = 1$ agissant à l'origine du système de coordonnées due à la symétrie axiale [55].

$$\nabla^2 = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \quad (II.17)$$

La solution générale de l'équation (II.8) devient maintenant :

$$w(r) = AK_0(\beta r) + BI_0(\beta r) \quad (II.18)$$

Où :

$K_0(\beta r)$ $et$ $I_0(\beta r)$: Fonctions de Bessel *(II.19)*

Quand $r$ tend vers l'infini $(r \to \infty)$, $w$ est nul, nous obtenons :

$$w(r) = \frac{P}{2\pi G} K_0(\beta r) \quad (II.20)$$

Le noyau de la fondation tridimensionnelle est alors :

$$K(|x-\xi|,|y-\eta|)=\frac{1}{2\pi G}K_0(\beta R) \tag{II.21}$$

Ainsi :

$$R=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2} \tag{II.22}$$

C'est la distance entre $P$ en $(\xi,\eta)$ et le point considéré $(x,y)$, comme indiqué à la Figure. II.6.

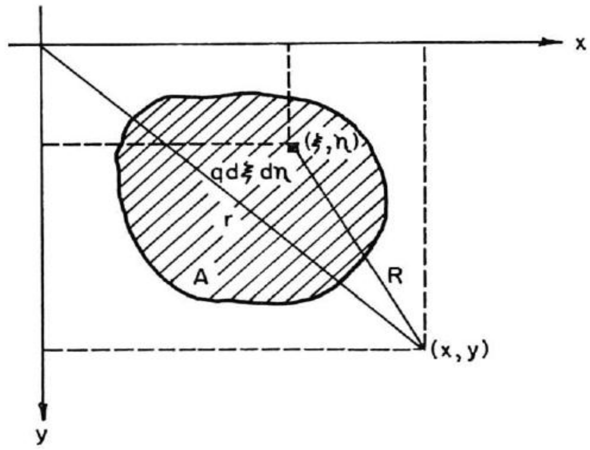



***Figure II. 6 :*** *Représentation géométrique du rayon de la Fonction de Bessel [55].*

Ainsi, pour une charge $p$ arbitrairement répartie sur une zone $A$, la flèche de la surface de la fondation en un point $(x,y)$ est :

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi G}\iint_A p(\xi,\eta)K_0(\beta R)d\xi d\eta \tag{II.23}$$

## *II.4 Plaques sur fondations de type Pasternak :*

Comme indiqué dans la Figure II.7, l'équation d'équilibre d'une plaque mince d'épaisseur constante soumise à une charge latérale répartie $q(x,y)$ et à une pression d'interface de fondation $p(x,y)$ est :

$$D\nabla^2\nabla^2 w=q-p \tag{II.24}$$

Où :

$D$: Rigidité en flexion de la plaque.

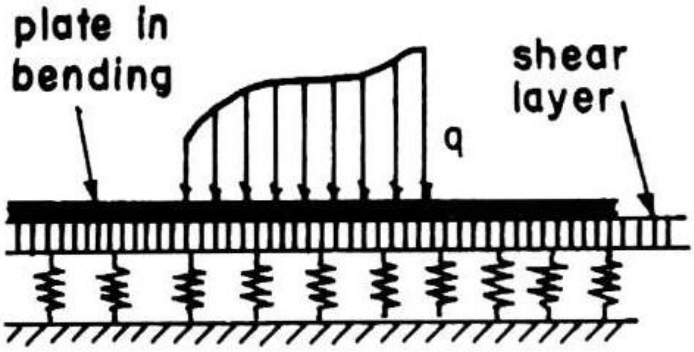



***Figure II.7 :*** *Plaque reposant sur une base de type de Winkler-Pasternak [55].*

La pression d'interface est représentée par l'équation (II.8). En supposant que la plaque reste en contact permanent avec la base et qu'il n'existe pas de forces de cisaillement au niveau de la surface en contact, l'équation d'équilibre de la plaque prend la forme :

$$\nabla^4 w - \frac{G}{D}\nabla^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q}{D} \tag{II.25}$$

On peut voir qu'un champ de compression ou de tension uniforme supplémentaire n'affectera que la constante au terme Laplace. L'opérateur différentiel de l'équation (II.25) peut être scindé en un produit de deux opérateurs du second ordre :

$$(\nabla^2 - \xi_1)(\nabla^2 - \xi_2) w = \frac{q}{D} \tag{II.26}$$

Ainsi :

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left[s \pm (s^2 - 4t)^{1/2}\right] \tag{II.27}$$

Et :

$$s = G/D \quad ; \quad t = k/D \tag{II.28}$$

Dans le cas d'une force concentrée latérale $P$ agissant à l'origine du système de coordonnées, le problème est axialement symétrique, et puisque $s > 0$ et $t > 0$, alors la solution générale de l'équation (II.26) est :

- pour le cas $(s^2 - 4t) \geq 0$ (lorsque les interactions de cisaillement dominent) :

$$\xi_1 = C_1 I_0\left(\xi_1{}^{1/2} r\right) + C_2 K_0\left(\xi_1{}^{1/2} r\right) + C_3 I_0\left(\xi_2{}^{1/2} r\right) + C_4 K_0\left(\xi_2{}^{1/2} r\right) \quad (II.29)$$

- Quand $(s^2 - 4t) < 0$ (cela semble être le cas pour les matériaux de fondation habituels), $\xi_1\ et\ \xi_2$deviennent des conjugués complexes, et la solution peut être exprimée telles que présentées par [64-68] et [72] ou part YY Yu [77]. Une équation du même type a également été discutée par P. M. Naghdi et J. C. Rowley [78].)

Il est intéressant de considérer la condition aux limites appropriée associée à l'équation (II.26), pour les plaques d'étendue finie (Figure II.8). L'équation différentielle (II.26) a conservé son ordre et son type. C'est une équation différentielle partielle elliptique du quatrième ordre et par conséquent, deux conditions aux limites doivent être prescrites le long de la limite de la plaque. Ainsi, par exemple, dans le cas d'encastrement, les conditions aux limites sont identiques que celles d'une plaques sur la fondation de type Winkler :

$$\begin{cases} [w]_\beta = 0 \\ \left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_\beta = 0 \end{cases} \quad (II.30)$$

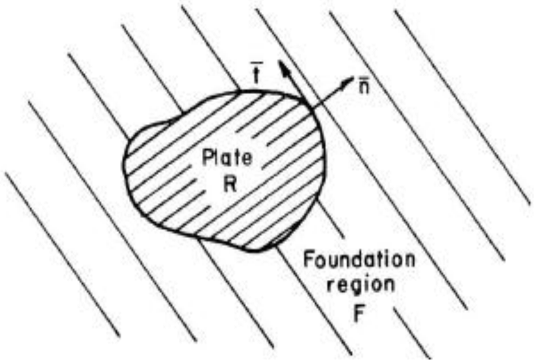



***Figure II.8 :*** *Schéma général d'une plaque reposant sur une fondation [55].*

Pour une plaque reposant sur une fondation continue avec un bord libre, la situation est différente. Dans ce cas, deux régions interagissent au niveau de la frontière B :

- La région de la plaque R présente des déviations $w_p$ régies par l'équation (II.26) et la fondation environnante ;
- la région F avec les déviations $w_F$ décrites par l'équation du second ordre (II.8).

Comme la force de cisaillement dans la couche de cisaillement est :

$$N_n = G\frac{\partial w_F}{\partial n} \tag{II.31}$$

Alors, la force de cisaillement de la plaque selon [55] est :

$$\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{n}} = -\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 w_P + \mathrm{G}\frac{\partial w_P}{\partial n} \tag{II.32}$$

Nous pouvons écrire les trois conditions aux limites nécessaires pour le bord comme suit :

$$[w_P]_\beta = [w_F]_\beta\, ;\ [M_n]_\beta = 0;\ \left[\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{n}} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}\right]_\beta = [\mathrm{N_n}]_\beta \tag{II.33}$$

Le terme $\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}$ est la contribution habituelle des moments de torsion le long du bord libre de la plaque. Ainsi, dans le cas d'une plaque circulaire de rayon a soumise à une charge axialement symétrique, les conditions aux limites le long du bord $r = a$ sont [55] :

$$w_P\langle a\rangle = w_F\langle a\rangle\, ;\ \left[\frac{d^2 w_P}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw_P}{dr}\right]_a = 0 \tag{II.34}$$

$$\left[-D\frac{d}{dr}\nabla^2 w_P + G\frac{dw_P}{dr}\right]_a = G\left[\frac{dw_F}{dr}\right]_a \tag{II.35}$$

Le premier terme dans la troisième condition aux limites est la réaction de ligne concentrée le long de la limite de la plaque B. On peut constater qu'en raison de sa présence, la pente de la surface de la fondation n'est pas continue à travers la limite de la plaque. Une autre fondation de type Pasternak (qui sera mentionnée dans une section ultérieure) est illustrée à la Figure II.9.

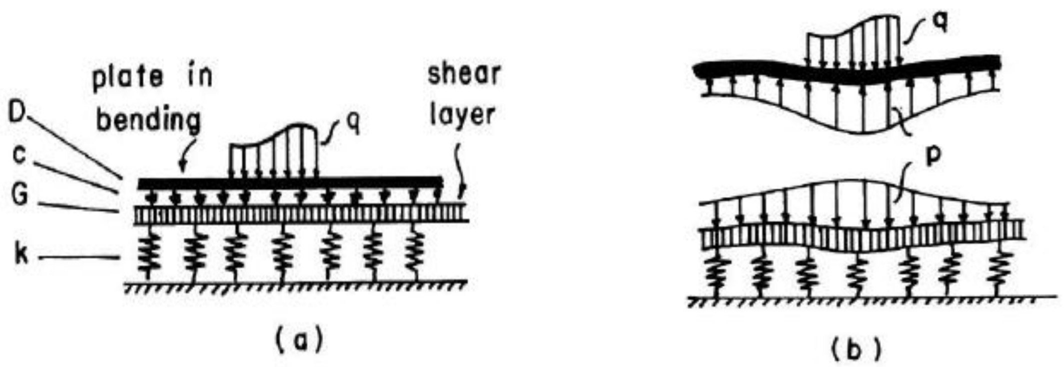



***Figure II.9 :*** *Plaque reposant sur une fondation de type Kerr [55].*

Pour dériver l'équation de la plaque, on considère la flèche de la plaque $w$ constituée de deux parties :

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) \qquad (II.36.a)$$

Où :

$w_1$: Flèche due à la contraction ou à l'extension de la couche supérieure du ressort ;

$w_2$: Flèche au reste de la fondation. Selon la figure II.9.b et les équations (II.1) et (II.8).

$$p(x,y) = cw_1 \qquad (II.36.b)$$

$$p(x,y) = kw_2 - G\nabla^2 w_2 \qquad (II.36.c)$$

Multiplier l'équation (II.36.b) par $\frac{k}{c}$ et$-\frac{\nabla^2 G}{c}$, alors nous aurons :

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{c}}p - \frac{G}{\mathrm{c}}\nabla^2 p = kw_1 - G\nabla^2 w_1 \qquad (II.36.d)$$

La sommation des deux équations (II.36.c) et (II.36.d), nous donne :

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right)p - \frac{G}{c}\nabla^2 p = kw - G\nabla^2 w \qquad (II.36.e)$$

L'équation différentielle (II.24) d'une plaque mince peut être réécrite comme :

$$D\nabla^2\nabla^2 w + p = q \qquad (II.37)$$

Multiplier l'équation (II.37) par$-\frac{\nabla^2 G}{c}$ et $\frac{k}{c}$, nous aurons :

$$-\frac{G}{c}D\nabla^6 w - \frac{G}{c}\nabla^2 p = -\frac{G}{c}\nabla^2 q \qquad (II.38.a)$$

$$\frac{k}{c}\,D\nabla^4 w + \frac{k}{c}\,p = \frac{k}{c}\,q \qquad (II.38.b)$$

Apres la soustraction de l'équation (II.37), nous aurons :

$$\frac{G}{c}D\nabla^6 w - D\left(1 + \frac{k}{c}\right)\nabla^4 w + G\nabla^2 w - kw = \frac{G}{c}\nabla^2 q - (1 + \frac{k}{c})q \qquad (II.39)$$

L'équation (II.39) et une équation différentielle partielle du sixième ordre, qui fait apparaitre trois conditions au limite (encastrement appuie simple). Alors, nous avons deux conditions aux limites dont deux dues à la théorie classique des plaques, le troisième est obtenu en considérant le comportement de la couche de cisaillement [55].

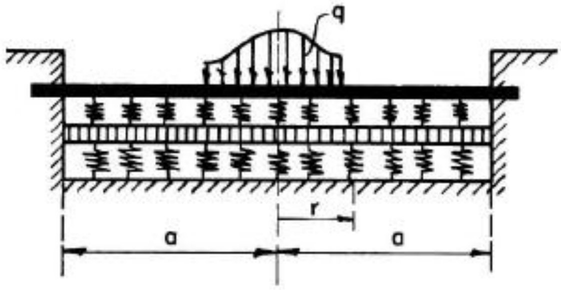



***Figure II.10 :*** *Fondation sur une plaque circulaire encastrée [55].*

En prend le cas d'une plaque circulaire encastrée le long du bord, selon la figure II.10, soit :

- les deux équations (II.39.1) et (II.39.2) présentent le cas des deux conditions aux limites de la théorie classique des plaques ;
- l'équation (II.39.3) montre le cas de la troisième condition aux limites (pour les cas de forte adhérence du matériau de fondation sur le mur rigide) ;
- l'équation (II.39.5) montre le cas de la troisième condition aux limites (pour les cas d'absence de la force de frottement entre le matériau de fondation et le mur d'enceinte présenté par l'équation (II.39.4)).

$$w(a) \quad = 0 \qquad \textit{(II.39.1)}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial r}\right]_{r=a} = 0 \qquad \textit{(II.39.2)}$$

$$w_2(a) \quad = 0 \qquad \textit{(II.39.3)}$$

$$N_r(a) \quad = 0 \qquad \textit{(II.39.4)}$$

$$\left[\frac{\partial w_2}{\partial r}\right]_a = 0 \qquad \textit{(II.39.5)}$$

Afin d'exprimer $w_2$en termes de$w$, notons que selon l'équation (36), nous avons :

$$p(x,y) = c(w - w_2) \qquad \textit{(II.40)}$$

On substitue l'équation (II.39), on obtient par suite :

$$w_2 = \frac{D}{c}\nabla^4 w + w - \frac{q}{c} \tag{II.41}$$

Donc la condition à la limite selon l'équation (II.39.3), assume la forme :

$$[w_2]_a = [D\nabla^4 w + cw - q]_a = 0 \tag{II.42}$$

Mais pour le cas d'une plaque circulaire avec un bord libre soumise à une charge latérale q, nous devons considérer deux régions qui interagissent à la frontière de la plaque B [55] :

- La région de la plaque $R$ avec des déviations $w_p$ régies par l'équation du sixième ordre (II.39) ;
- La région de fondation $F$ environnante avec les déviations $w_F$ décrites par l'équation du second ordre (II.8).

Notant qu'ici, à cause de la couche supérieure qui contient des ressorts, aucune réaction concentrée ne peut se produire sur les bords de la plaque, huit conditions aux limites peuvent être prescrites :

$$[M_r]_a = 0\ ;\ [V_r]_a = 0\ ;\ w_F(\infty) = 0;\ w_2(a) = w_F(a)\ ;\ \left[\frac{dw_2}{dr}\right]_a = \left[\frac{dw_F}{dr}\right]_a \tag{II.42}$$

Trois BC devraient garantir que $w_p, w_2$ et leurs dérivés être finis dans la région de la plaque R

## *II.5 Plaques sur Fondation "Généralisée» :*

Comme mentionné précédemment, le modèle de fondation de type Pasternak illustré dans la Figure II.7 est identique au modèle mécanique possible pour le cas de fondation "généralisé", donc les problèmes résolus par les travaux [63-69] sont également des solutions aux cas correspondants de plaques sur une fondation de Pasternak et vice versa. Afin de prouver l'équivalence de ces deux modèles de fondation, considérons l'équilibre d'un élément en plaque interconnecté avec un élément de la fondation de Pasternak découpé par les surfaces $x$ et $x + dx$, $y$ et $y + dy$, comme le montre la figure II.11.

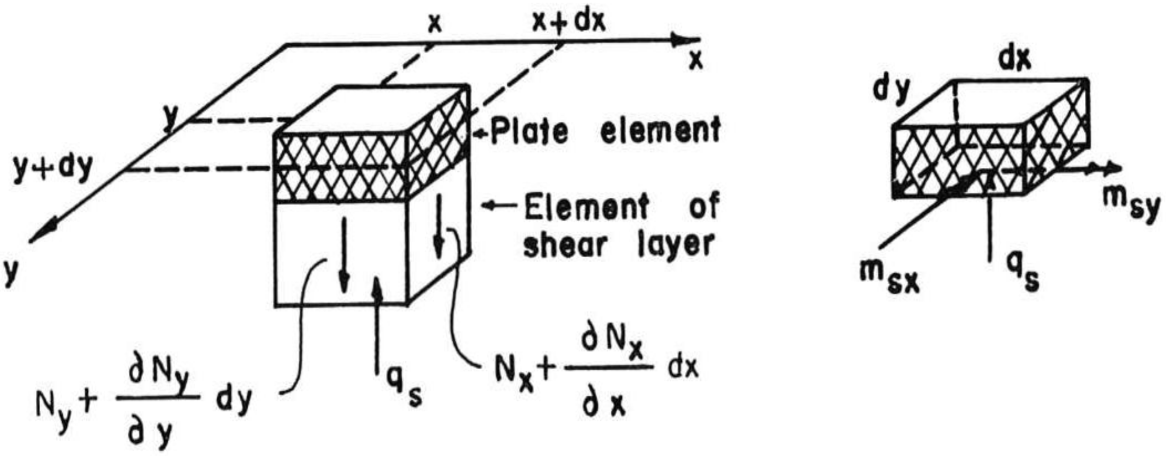



**Figure II.11 :** *Elément de plaque interconnecté avec un élément de la fondation de type Pasternak [55].*

On peut voir que pour un élément de la plaque, les équations d'équilibre du moment sont égales à celles de la théorie des plaques [81] plus les moments $m_{sx}$ et $m_{sy}$, respectivement, causés par les forces de cisaillement $N_x$ et $N_y$ de la couche de cisaillement, où:

$$m_{sx}dxdy = (N_x dy)dx = 0 \;\; et \;\; m_{sy}dxdy = \left(N_y dy\right)dx = 0 \tag{II.43}$$

Selon l'équation (II.5), nous aurons :

$$m_{sx} = G\frac{\partial w}{\partial x} \;\; ; \;\; m_{sy} = G\frac{\partial w}{\partial y} \tag{II.44}$$

Par conséquent, les moments $m_{sx}$ et $m_{sy}$ sont proportionnels aux pentes (ici identiques aux angles de rotation) avec une constante de proportionnalité qui représente le module de cisaillement $G$.ce qui donne une signification physique de la constante $k_1$ de l'équation (II.9).

## *II.6 Plaques sur fondation de Reissner :*

L'équation différentielle pour ce problème est obtenue en éliminant $p$ des équations (II.11) et (II.37) de la même manière que pour obtenir l'équation (II.39). Alors nous aurons :

$$D\frac{c_2}{4c_1}\nabla^6 w - D\nabla^4 w + c_2\nabla^2 w - c_1 w = \frac{c_2}{4c_1}\nabla^2 q - q \tag{II.45}$$

Il est intéressant de noter que pour le cas $c = 3k$, l'équation (II.45) est identique à l'équation (II.39) si l'on pose :

$$\begin{cases} G = \dfrac{4}{9} H G_f \\ k = \dfrac{4}{3} \dfrac{E_f}{H} \end{cases} \tag{II.46}$$

Ainsi établissant un modèle de type Pasternak pour la fondation Reissner. Puisque l'équation (II.45) est du même type et du même ordre que l'équation (II.39) et en raison de la similitude physique du problème, la discussion de la condition aux limites est très similaire à celles correspondantes à l'équation (II.39). À cet égard, il convient de noter que la troisième condition au limite suggéré par E. Reissner [73] qui est également inclus dans l'article de KS Pister et ML Williams [83] n'est valable que dans un très particulier cas où le matériau de fondation sous la plaque finie est séparé le long de la limite cylindrique du matériau de fondation ou des murs environnants, comme dans le cas qui a conduit à la condition au limite présenté par l'équation (II.39.5).

## *II.7 Fondation Viscoélastique Pasternak :*

Pour que le concept de fondation de Pasternak soit étendu aux cas de déformations viscoélastiques, on ajoute des éléments visqueux linéaires aux éléments élastiques du modèle de fondation en parallèle et / ou en série. Donc il est possible de créer un certain nombre de modèles qui dépendront du comportement de la fondation attendu. Pour démontrer la procédure, deux possibilités de ce type seront décrites ci-après. Nous commençons avec un modèle représentant une base de neige semi-infinie [84-85].

On peut constater qu'après une période initiale relativement courte, la relation temps-déplacement est linéaire. Ceci suggère la possibilité d'assumer la loi de Newton pour le comportement visqueux. De plus, étant donné que les déformations élastiques qui se produisent immédiatement après l'application de la charge sont très faibles comparées aux déformations de fluage, il semble justifié de supposer un modèle de fondation comme le montre la Figure (II.12).

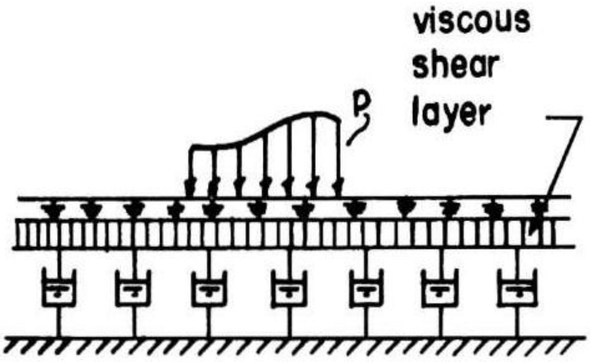



***Figure II.12 :*** *Fondation Visco de type Winkler Pasternak [55].*

La déformation totale est alors :

$$w_{total} = w_{elastic} + w \qquad (II.47)$$

Où :

$w_{elastic}$ : peut être obtenu de la manière habituelle ;

$w$ : Déformation due au fluage.

La formulation mathématique de w est similaire à celle du cas élastique. Cependant, selon la loi de la viscosité de Newton :

$$N_x = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \ ; \ N_y = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \ ; \ q_s = \eta \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (II.48)$$

Avec :

$\frac{\partial w}{\partial t}$ : Vitesse descendante de la surface de fondation ;

μ : Coefficient de viscosité ;

$\eta$ : Coefficient de viscocompressibilité.

En voie que dans cette analyse, en plus de la constante élastique, deux autres constantes matérielles entrent, c'est-à-dire un coefficient de viscosité μ lié aux déformations de cisaillement des éléments de fondation verticaux et $\eta$ qui est coefficient de visco-compressibilité. (L'hypothèse que $\eta$ reste constant semble être justifiée lorsque les dimensions de la fondation sont très grandes par rapport aux dimensions de la zone chargée).

Puisque pour ce cas considéré les mouvements de la fondation sont très lents, les termes d'inertie sont négligés. En substituant les équations (II.48) à (II.6), nous obtenons :

$$\mu\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial t}\right)-\eta\frac{\partial w}{\partial t}+p(x,y,t)=0 \qquad (II.49)$$

La différenciation de l'équation (II.49) par rapport à t pour une charge indépendante du temps $p = p(x, y)$ la réduit à :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2+\lambda^2)w=0 \qquad (II.50)$$

Pour laquelle :

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};\ \ \lambda^2=\frac{\eta}{\mu} \qquad (II.51)$$

L'équation (II.50) représente l'équation différentielle pour le déplacement vertical de la surface de la fondation dû au fluage. Dans le cas d'une charge linéaire $\overline{\mathrm{P}}$ le long de l'axe des y, l'équation (II.50) se réduit à :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda^2\right)w=0 \qquad (II.52)$$

En supposant que la solution prend la forme $w = X(t)T(t)$ et en notant que pour t = 0, les flèches dues au fluage sont nulles, on obtient :

$$w(x,t)=\frac{\bar{P}\lambda}{2\eta}te^{-\lambda x} \qquad x \geqq 0 \qquad (II.53)$$

Pour certaines autres fondations telles que des couches de neige relativement fines ou certaines fondations de pergélisol, où après l'application de la charge que les mouvements devraient cesser, pour le chargement processus, un modèle simple représenté sur la figure II.13 peut être remis en question. Ici, le ressort élastique représente la rigidité de la fondation contre la compression et détermine la valeur finale de la compressibilité de la base.

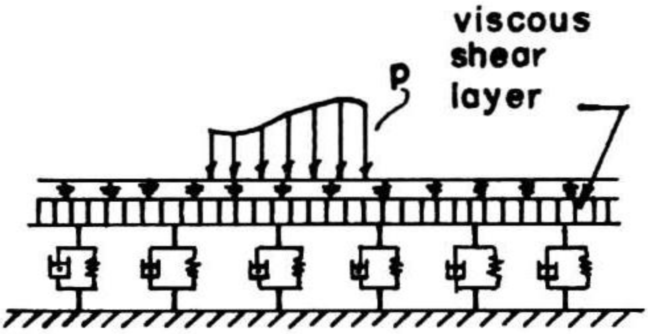



***Figure II.13 :*** *Fondation Visco de type Winkler Pasternak pour le modèle de Kelvin Voigt [55].*

Cela n'a rien à voir avec les propriétés élastiques du matériau de fondation. Cette interprétation semble justifiée puisque nous ne nous intéressons ici qu'à la réponse de la surface de fondation aux charges. La formulation est comme avant. Alors :

$$N_x = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \ ; \ N_y = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \ ; \ q_s = \eta \frac{\partial w}{\partial t} + c \qquad (II.54)$$

En substituant les équations (II.54) à l'équation d'équilibre (II.6), on obtient l'équation suivante :

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - \eta \frac{\partial w}{\partial t} - c = -p \qquad (II.55)$$

Des solutions pour différentes configurations de charge peuvent maintenant être obtenues.

## *II.8 Plaques sur fondation Viscoélastique :*

L'équation différentielle d'une plaque élastique mince chargée latéralement et reposant sur une fondation visqueuse du type Pasternak représenté sur la figure II.14 est obtenu en substituant l'équation (II.49) à l'équation (II.24).

Pour la déformation$w(x, y, t)$, l'équation différentielle résultante pend la forme suivante :

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + \eta \frac{\partial w}{\partial t} = q \qquad (II.56)$$

Mais pour le cas de la fondation représentée sur la figure II.15, l'équation différentielle :

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + \eta \frac{\partial w}{\partial t} + cw = q \qquad (II.57)$$

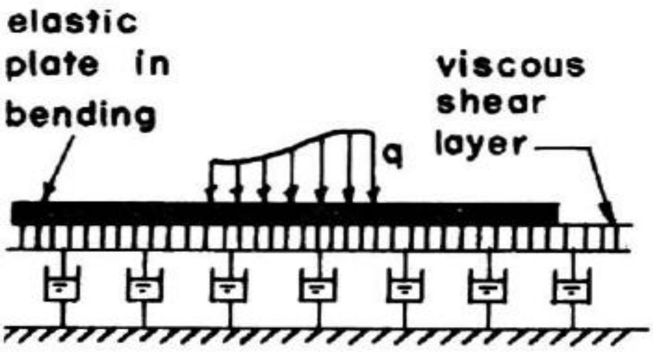



***Figure II.14 :*** *Modèle Visco-élastique de type Pasternak [55].*

Avec les conditions aux limites de la théorie classique des plaques et des conditions initiales, les équations (II.56) et (II.57) constituent les formulations du problème respectif.

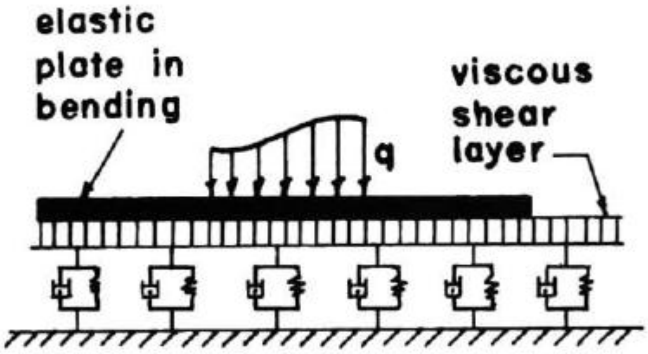



***Figure II.15 :*** *Modèle Visco-élastique de type Pasternak pour le modèle Kelvin Voigt [55].*

Dans les cas où les déformations élastiques instantanées de la fondation causeront des contraintes importantes sur la plaque élastique, la réponse élastique doit être incluse dans la formulation du problème. Ainsi, dans certaines situations, le modèle illustré à la figure II.16 peut constituer une représentation appropriée. L'équation différentielle pour ce problème est obtenu de la même manière que pour obtenir l'équation (II.39).L'équation résultante est :

$$\frac{\mu}{c} D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^6 w - D\left(1 + \frac{\eta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w + \mu \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 w - \eta \frac{\partial}{\partial t} w = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 q - \frac{\eta}{c}\frac{\partial}{\partial t} q - q \qquad (II.58)$$

Il est à noter que cette équation n'est valable que lorsque le changement de q avec le temps est si faible que les termes d'inertie sont négligeables.Pour une charge indépendante du temps$(x, y)$, l'équation (II.58) se réduit à :

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^6 w - \left(1 + \frac{\eta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w + \frac{\mu}{D}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 w - \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial t} w = -\frac{q}{D} \qquad (II.59)$$

La discussion de la condition aux limites est similaire à celle faite en relation avec l'équation (II.39) mais, en raison de la variable de temps, les conditions initiales doivent également être prescrites.

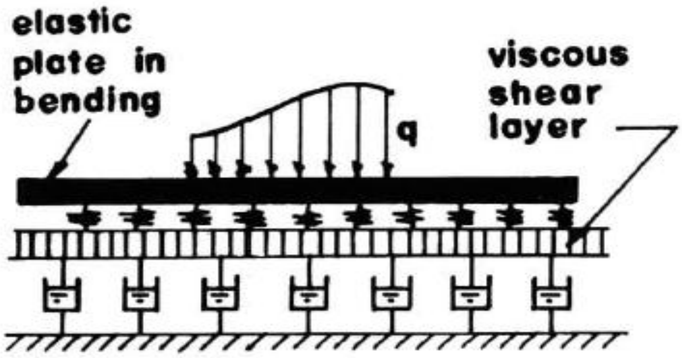



***Figure II.16 :*** *Modèle Visco-élastique de type Winkler Pasternak [55].*

## *II.9 Conclusion :*

Le modèle le plus simple de la fondation élastique est de Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement entre l'un et l'autre, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque. Mais le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle du sol en plus de la rigidité normale, la différence entre le modèle de Winkler et celui du Pasternak n'est que le tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et son aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas du modèle de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak. Par compte le modèle Viscoélastique est caractérisé par trois paramètres homogènes, le module linéaire de Winkler, le module de fondation de Pasternak (cisaillement) et le coefficient de Viscosité, du milieu Viscoélastique qui représente le contact entre la plaque et la fondation.

03 CHAPITRE

# *Théories des plaques*

## *III.1 Introduction :*

L'utilisation de plaque est très répandue dans tous les domaines, l'industrie sous marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), où, on les utilise sous différentes formes, circulaires, rectangulaires et d'autre formes selon leurs utilisations. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

## *III.2 Définition d'une plaque :*

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane $(x, y)$ et par une petite épaisseur $h(x, y)$, par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de $h$ par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques.

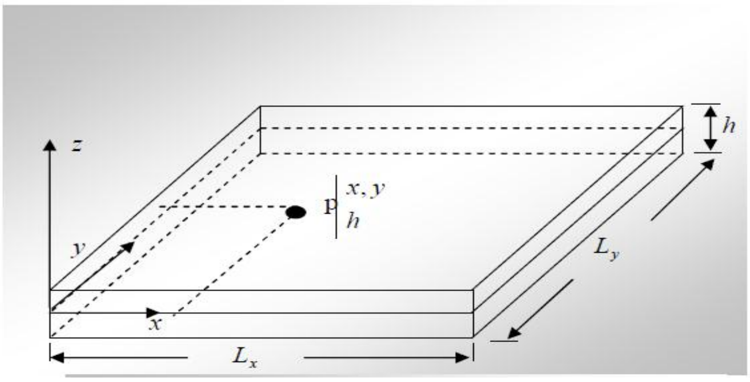



***Figure III.1 :*** *Géométrie d'une plaque à un point quelconque [88-89]*

Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur $h$ varie en sens inverse de l'influence CT. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène.

Nous admettons généralement :

- Les plaques épaisses :$\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{4}$
- Les plaques minces :$\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$

### *III.3 Différents types de plaques :*

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories [88,90] :

- Les plaques isotropes :

  Elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques ($E$: Module d'élasticité; $\nu$ : Coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...) ;
- Les plaques orthotropes :

  Leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédies). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art ;
- Les plaques anisotropes :

  Leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale ;

### *III.4 Différents types de comportements des plaques :*

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en flexion, membrane et cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à 1'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées [91-92] :

- Pour la flexion et la membrane :

  C’est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominant ;
- Pour le cas mixte :

  Aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque (plaque) peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne.

L'espace continu des déplacements extensionnels «avec énergies de membrane et cisaillement nul, est nommé $V_0$» qui joue un rôle fondamental dans le classement évoqué ci-dessus : dans le cas flexion-dominante, le problème limite est formulé dans cet espace qui doit être différent de zéro, tandis que dans le cas membrane-dominante, cet espace est réduit au champ nul.

## *III.5 Etat membranaire et état flexionnel :*

Selon le mode du comportement ; l'état de contrainte par lequel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par les efforts intérieurs définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une section droite s'appelle la ligne moyenne. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites :

- L'état membranaires associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels [93] :
  - L'élément de paroi est défini par sa géométrie plane de surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur : sollicitée par des charges agissant dans son plan moyen, il résiste par un état membranaire (figure. III.2.a) ; les efforts normaux et tangentiel résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte ;
  - L'élément de plaque-membrane est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque (figure.III.2.c) ; bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen ; il constitue la base des structures plissées.
- L'état flexionnel regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants [92] :
  - L'élément de plaque est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen) ; il résiste aux charges agissantes normalement à son plan moyen par un état flexionnel (figure. III.2.b).

  - Enfin l'élément structural de plaque est, par nature, la courbe spatiale ; il utilise les deux états d'effort, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (figure III.2.d) ; exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc...).

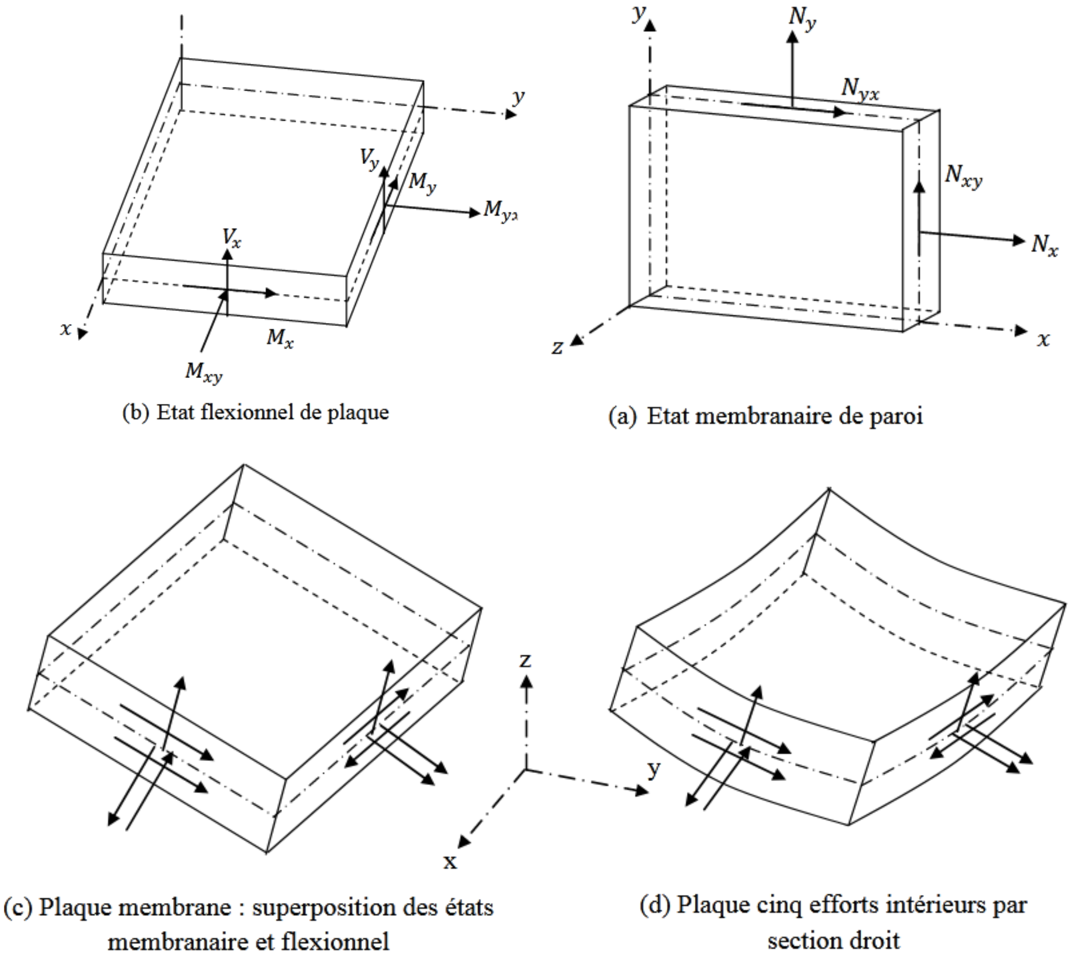



***Figure. III.2 :*** *Efforts intérieurs dans une plaque [88]*

## *III.6 Hypothèses pour l'étude des plaques :*

la modélisation des plaques est un grand point d'interrogation, et pour remédier à cette question, plusieurs travaux ont été mis en place, en premier celles de Kirchhoff [94-95] en 1850 et de Love [96] en 1888 qui établissent un premier modèle en négligeant le cisaillement transversales; il y a le modèle des plaques minces établie pour satisfaire les structures fortement élancées, puisque pour celles-ci, l'importance relative des contraintes de cisaillement transverse reste modérée. Toutefois, les théories classiques ne permettent pas d'atteindre une précision satisfaisante dans trois cas [97] :

- Lorsque l'élancement de la plaque est faible, les contraintes de cisaillement transverse ne peuvent plus être négligées vis à vis des autres composantes, il est alors recommandé d'utiliser un modèle adapté aux "plaques épaisses" ;

- Dans le cas d'une étude dynamique, au voisinage d'un mode d'ordre élevé, le rapport entre la longueur d'onde de flexion et l'épaisseur de la plaque peut se réduire suffisamment pour que le mode de déformation s'apparente à la flexion d'une plaque épaisse ;
- Lorsqu'il y a un fort ratio de module de Young entre les couches de la plaque, la variation des déformations de cisaillement au travers de la plaque est très importante et doit être prise en compte. On retrouve cette situation dans le cas de l'application d'un dispositif amortissant passif qui comporte un matériau viscoélastique à faible module de Young.

## *III.7 Modèles de plaque multicouche :*

Un modèle de plaque, c'est le modèle pour lequel on effectue une approximation de l'estimation des variables du champ de déplacement, généralement sur l'épaisseur de la structure. Il n'est pas rare de rencontrer d'autres définitions d'un modèle de plaque, Carrera [98], définit un modèle de plaque comme un modèle dans lequel le degré d'interpolation au travers de l'épaisseur est au moins d'un degré inférieur à celui des autres directions, on distingue deux grandes familles :

- **Modèles Equivalent Single Layer (ESL – modèle couche équivalente) :** Expriment chaque composante du champ de déplacement en fonction de variables définies sur un plan de référence, décrit par les coordonnées $x, y$ dans le plan, et fonction de $z$ la direction normale au plan $x, y$ traduit ce qui se passe dans l'épaisseur. De manière générale, $z$ est découplée des directions $x$ et $y$. Chaque composante des champs de déplacement, de déformation et de contrainte se développe selon $z$ à l'aide de $P$ fonctions de la façon suivante :

$$f(x, y, z) = f_1(x, y)F_1(z) + \cdots + f_p(x, y)F_p(z) \tag{III.1}$$

De fait, le nombre de variables est alors indépendant du nombre de couches. Les fonctions $F_p(z)$ sont généralement obtenues en posant des conditions cinématiques sur lechamp de déplacement ;

- **Modèles Layer-Wise (LW – par couche) :** Proposent une variation des composantes du champ de déplacement à l'intérieur de chaque couche. Les champs sont alors exprimés pour la couche n de la façon suivante :

$$f^n(x, y, z) = f_1^n(x, y)F_1^n(z) + \cdots + f_P^n(x, y)F_P^n(z) \tag{III.2}$$

Lors de la discrétisation du système, le nombre de degrés de liberté du système est alors directement dépendant du nombre de couches. De ce fait, ce dernier type de modèle ne peut être considéré comme une formulation strictement bidimensionnelle. Bien qu'ils puissent se révéler plus précis, ceux-ci impliquent souvent un plus grand nombre de degrés de liberté, ce qui les rend moins avantageux que les modèles ESL.

## *III.8 Théories classiques des plaques :*

Dans la littérature, plusieurs modèles, qualifiés de modèles de plaque classiques sont souvent cités et utilisés à des fins de comparaison. Nous en faisons ici une brève description :

### a. Théorie classique des stratifiés (CLT) :

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff [94-96]. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane $u_1^0$ et $u_2^0$ et des dérivées de la flèche $w_{,\alpha}^0$ au plan de référence (l'exposant 0 indique que la variable est exprimée au plan de référence).

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (III.3). La figure III.3 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff [97] :

$$u_\alpha(x,y,z) = u_\alpha^0(x,y) - z w_{,\alpha}^0(x,y) \qquad \textit{(III.3.a)}$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) \qquad \textit{(III.3.b)}$$

La section de la poutre déformée reste orthogonale à l'axe neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes.

Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de "plaques minces".

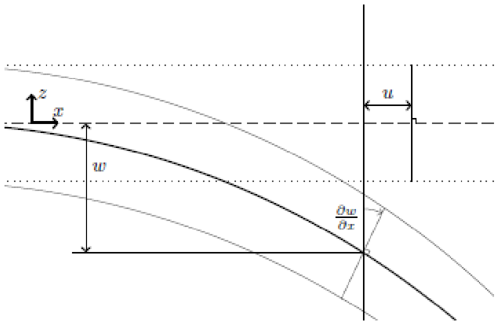



***Figure III.3 :*** *Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff [97].*

### b. Théorie de déformation en cisaillement au premier ordre (FSDT) :

Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de $u_1^0$ et $u_2^0$ des dérivées de la flèche $w_{,\alpha}^0$ et des cisaillements $\gamma_{\alpha 3}^0$. L'équation (III.4) présente le champ de déplacement associé à ce modèle.

Celui-ci, développé par Reissner [99], fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse ; Mindlin [2] développa la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

$$u_\alpha(x,y,z) = u_\alpha^0(x,y) - z\left(\gamma_{\alpha 3}^0(x,y) - w_{,\alpha}^0(x,y)\right) \qquad \textit{(III.4.a)}$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) \qquad \textit{(III.4.b)}$$

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des rotations$\phi_\alpha^0(x,y) = \gamma_{\alpha 3}^0(x,y) - w_{,\alpha}^0(x,y)$. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante :

$$u_\alpha(x,y,z) = u_\alpha^0(x,y) - z\phi_\alpha \qquad \textit{(III.5.a)}$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) \qquad \textit{(III.5.b)}$$

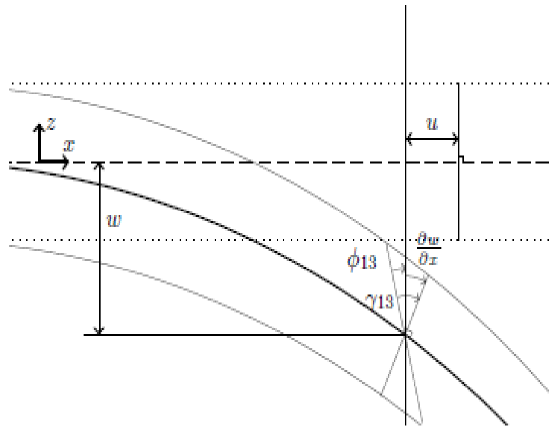



***Figure III.4 :*** *Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Mindlin-Reissner [97].*

### c. Théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs est développé par Reddy [10], ce modèle, reprenant les bases de la théorie de déformations en cisaillement au premier ordre, impose une variation des déformations de cisaillement transverse selon un polynôme du troisième ordre permettant aux contraintes de cisaillement transverses d'être nulles aux limites supérieures et inférieures du stratifié. La formulation proposée par Reddy implique donc le champ de déplacement suivant :

$$u_\alpha(x,y,z) = u_\alpha^0(x,y) - zw_{,\alpha}^0(x,y) + (z - \frac{4z^3}{3h^2})\gamma_{\alpha 3}^0(x,y) \quad \text{(III.6.a)}$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) \quad \text{(III.6.b)}$$

Pour un stratifié défini entre $-h/2$ et $h/2$ avec $h$ l'épaisseur totale du stratifié. Ce modèle est particulièrement efficace pour modéliser la flexion de plaques isotropes [97].

## *III.9 Modèles de plaque de type ZIG-ZAG :*

Selon Carrera [100], les structures multicouches font apparaitre un champ de déplacement continu par morceaux au travers de l'épaisseur du stratifié. Le changement de pente d'une variable du champ de déplacement entre deux couches considérées parfaitement liées est connu sous le nom d'effet Zig-Zag (ZZ).

Cet effet est dû aux conditions de continuité inter laminaires des contraintes de cisaillement transverse. Cette théorie adonné lieu à plusieurs modèles ESL ou encore LW. Parmi les modèles ESL ceux-ci sont divisés par Carrera [101] en tant que :

- Théorie de multicouche de Lekhnitskii (LMT-Lekhnitskii multilayered theory) [102];
- Théorie de multicouche de Ambartsumian (AMT-Ambartsumian multilayered theory)[103].

Qui toutes deux imposent des conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverse, comme proposé par Whitney [104]. Le modèle Reissner multi-layered theory (RMT – théorie de Reissner multicouche) fait quand à lui appel à des hypothèses de déplacements et de contraintes de cisaillement transverse indépendantes.

Dans la continuité des modèles RMT, Murakami [105] propose un jeu de fonctions polynomiales simples capables d'émuler l'effet ZZ. Plusieurs travaux ont ensuite suivi ceux de Murakami, parmi les plus récents, on peut notamment citer ceux de Demassi [106] qui propose des fonctions Zig-Zag d'ordre plus élevées, et de Brischetto [107]qui réalise une étude sur des panneaux sandwichs basée sur des fonctions Zig-Zag .

Il convient aussi de mentionner dans la catégorie des modèles ZZ les articles de Pai [108] et de Kim [109] qui proposent deux autres fonctions polynomiales par morceaux (un polynôme pour chaque couche) de description de la déformation de cisaillement transverse permettant la description de la répartition du cisaillement au travers de l'épaisseur du stratifié. Tous deux respectent les conditions de contraintes nulles aux limites supérieures et inférieures du stratifié ainsi que la continuité des contraintes aux interfaces. Les fonctions en résultant sont alors une série de polynômes du troisième ordre, continus entre chaque couche, permettant d'assurer les conditions de continuité requises.

## *III.10 Théorie des plaques minces :*

La vibration en flexion des plaques est modélisée par essentiellement deux théories (hors théorie des milieux continus) : celle des plaques minces exposée dans ce chapitre et celle des plaques épaisses traitée au chapitre suivant. La théorie des plaques minces énoncée par Love [96] sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli [110].

### *III.10.1. Hypothèses :*

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant [110] :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre) ;
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée ;
- Les termes non linéaires du déplacement sont négliges, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal $w$ est considère ;
- La contrainte $\sigma_z$ dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout $z$.

### *III.10.2. Champs de déplacement :*

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces S'expriment comme figure III.5 [110] :

$$u(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial x} \; ; \; v(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad w(x,y,z,t) = w(x,y,t) \qquad (III.7)$$

Où :

$x, y$ et z : les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère cartésien et galiléen ;

t : la variable temps.

L'écriture de l'équation du mouvement ($w$), dans l'approximation de l'élasticité linéaire :

Pour le cas de la flexion de la plaque

$$D\nabla^4 w + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \qquad (III.8)$$

Pour le cas de la flexion des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$EI\nabla^4 w + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \qquad (III.9)$$

Où :

$D$ : le module de rigidité en flexion ;

$h$ : l'épaisseur de la plaque ;

$\rho$ : la masse Volumique du matériau constituant la plaque ;

$f$ : la force imposée ;

$\nabla$ : l'opérateur $(\partial/\partial x + \partial/\partial y)$.

$E$ : le module d'Young du matériau utilise ;

$I$ : le moment quadratique de la section ;

$S$ : la section de la poutre considérée ;

Du fait de l'operateur du quatrième ordre et du signe $+$ entre les termes du membre de gauche, il ne s'agit pas d'une équation d'onde. En conséquence, les vibrations de flexion transmises dans une poutre ou une plaque seront par nature dispersives (la vitesse de propagation est fonction de la fréquence). Dans le cas d'une plaque simplement supportée sur tous ces bords, en régime de temps harmonique, le déplacement transversal $w(x, y, t)$ est de la forme [110] :

$$w(x, y, t) = w_0\, sin(k_x x)\, sin(k_y x)\, sin(\omega t) \tag{III.10}$$

Où :

$\omega$ : Pulsation ;

$k_x$: Nombre d'onde associé à la direction $(O_x)$ ;

$k_y$: Nombre d'onde associé à la direction $(O_y)$ ;

$k$ : Nombre d'onde, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

En faisant usage de l'équation (III.8), sans terme force, et en utilisant l'expression du déplacement $w(x, y, t)$ précédente, on peut écrire l'équation de dispersion pour cette plaque mince simplement supportée comme [110] :

$$\omega^2 = k^4 \frac{D}{\rho h} \tag{III.11}$$

## *III.11 Théorie des plaques épaisses :*

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Rayleigh en 1877[111] puis Timoshenko en 1921[112-113] montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique [99]. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par UFLYAND en 1948[114]. C'est cependant l'article de Mindlin [2], publié trois ans plus tard qui sera pris en considération.

### *III.11.1. Hypothèses :*

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff mentionnées précédemment dans les hypothèses de la théorie des plaques minces, par contre, les points 2 et 3 ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets [110].

### *III.11.2. Champs de déplacement :*

Dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin [2], les composantes des champs de déplacement sont définies comme figure III.5 [110] :

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = -z\psi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) = -z\psi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) = w(x,y,t) \end{cases} \tag{III.12}$$

Où :

$u$ et $v$ : Déplacements dans le plan de la plaque coordonnées d'un point de la plaque ;

$w$: Déplacement dans transverse ;

$t$ : Variable temps ;

$\psi_x$: Rotation en flexion de normales transverses à l'axe x ;

$\psi_y$: Rotation en flexion de normales transverses au axes y.

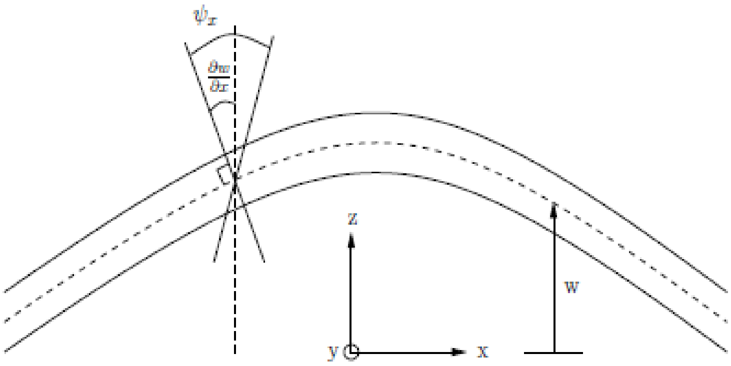



***Figure III.5 :*** *Schéma des déplacements pour la théorie des plaques de Mindlin [110]*

### *III.11.3. Relations contraintes-déformations :*

D'après les 3 relations du système (III.12), les expressions linéaires des déformations s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -z\dfrac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad ; \tau_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -z\left(\dfrac{\partial \psi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -z\dfrac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad ; \tau_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\psi_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \tau_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\psi_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \qquad (III.13)$$

### *III.11.4. L'énergies de déformation :*

L'énergie de déformation due au mouvement de flexion de la plaque est donnée en fonction des tenseurs de contraintes σ et de déformations $\varepsilon$ :

$$T = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon dV \qquad (III.14)$$

Soit en utilisant les relations contraintes-déformations précédentes, les hypothèses des champs de déformations et la loi constitutive de Hooke pour un matériau isotrope et homogène :

$$U = \frac{1}{2}\int_A \left[ D\left\{\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)^2\right)\right]\right\} + \kappa^2 Gh\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right)^2\right\}\right] dA \qquad (III.15)$$

Où :

$\kappa^2$ : Facteur correcteur de cisaillement.

L'énergie cinétique de la plaque s'écrit :

$$T = \frac{\rho h}{2}\int_V \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dV \qquad \textit{(III.16)}$$

En explicitant les champs de déformation et en intégrant sur l'épaisseur $h$ de la plaque, on obtient finalement :

$$T = \frac{\rho h}{2}\int_A \rho\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right)^2\right]dA \qquad \textit{(III.17)}$$

### *III.11.5. Equations du mouvement :*

L'écriture du principe de Hamilton, d'après les fonctions énergétiques obtenues en (III.15) et (III.17), appliqué aux plaques épaisses libres, aboutit aux équations de mouvements [94] :

$$\frac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi_x + (1+\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right)\right] - \kappa^2 Gh\left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \qquad \textit{(III.18.a)}$$

$$\frac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi_y + (1+\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right)\right] - \kappa^2 Gh\left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \textit{(III.18.b)}$$

$$\kappa^2 Gh\left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad \textit{(III.18.c)}$$

Où les termes $\partial^2\psi_i/\partial t^2$ *(i = x, y)* des équations (III.18.a) et (III.18.b) représentent les termes d'inertie de rotation. De ces équations, on peut aisément retrouver les équations des plaques minces (III.7) en posant comme conditions sur les déplacements, et en négligeant les termes liés à l'inertie de rotation :

$$\begin{cases} \psi_x = \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \psi_y = \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \kappa^2 \to \infty \end{cases} \qquad \textit{(III.19)}$$

L'hypothèse de Mindlin-Reissner nécessite l'introduction de coefficients de correction permettant de tenir compte de la distribution réelle des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. Dans le cas des plaques isotropes, le facteur couramment employé est 5/6.

Ce facteur est obtenu par comparaison de la densité d'énergie de déformation de cisaillement obtenue, d'une part, par la théorie d'élasticité, et, d'autre part, à partir des contraintes de cisaillement induites par la théorie de Mindlin-Reissner [99,115].

Certains auteurs [2,116] ont préféré le calcul du facteur correcteur à partir des considérations dynamiques (équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en cisaillement transversal ou vitesse de propagation d'ondes de flexion).

Pour les plaques composites, deux facteurs de correction sont généralement introduits : Owen et Figueiras [117] ont fixé ces facteurs en partant des équations de l'équilibre local et en adoptant l'hypothèse de la flexion cylindrique suivant deux directions orthogonales. Batoz et Dhatt [118] ont eu une démarche similaire. En abandonnant l'hypothèse précédente, ils aboutissent à une matrice de comportement faisant apparaître ces facteurs de correction de manière implicite. Notre démarche s'inscrit dans le même cadre. Elle est basée sur les hypothèses suivantes [119] :

- Equivalence de la densité d'énergie de cisaillement déduite, d'une part, de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, et, d'autre part de la théorie des plaques de Mindlin-Reissner ;
- Utilisation des équations de l'équilibre locale.

D'autres théories ne nécessitant pas de facteur de correction ont été proposées, notamment par J. N. Reddy [120] qui utilise une interpolation polynomiale du troisième ordre pour la déformation en cisaillement. Ces théories d'ordres supérieurs impliquent cependant une mise en œuvre difficile par rapport au faible gain de précision sur les résultats [110].

## *III.12 Plaque multicouche :*

### *III.12.1. Flexion pure :*

Le modèle de plaque équivalente de Ross-Kerwin-Ungar (RKU) [121], couramment utilisé dans l'étude vibratoire de multicouches visco-élastiques, est basé sur la théorie des plaques minces. Appliqué à une bicouche, on écrit pour hypothèse que l'épaisseur $h_1$ de la première couche est supposée faible devant celle de la couche supérieure $h_2$

Négliger l'épaisseur $h_1$ devant $h_2$ impose aux champs de déplacements de cette dernière couche des expressions similaires à celles de la première.

L'origine des cotes - axe $(Oz)$ est alors le plan neutre de la 1ere couche, les modules de rigidités des deux matériaux $D_1$ et $D_2$ doivent être calculés par rapport à ce plan neutre figure III.6. Mathématiquement, tout se passe comme si la bicouche se comportait comme une plaque homogène de masse et de module de rigidité modifiés [110] :

La rigidité de flexion complexe $D_{12}$est la somme des rigidités de flexion des deux couches calculées avec respect par rapport à la position du plan neutre :

$$D_{12} = D_1 + D_2 \tag{III.20.a}$$

L'amortissement structural total en fonction d'une égalité des parties réelle et imaginaire :

$$\eta_{12} = \frac{\eta_1 Re(D_1) + \eta_2 Re(D_2)}{Re(D_1) + Re(D_2)} \tag{III.20.b}$$

Avec :

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{E_1}{1-\nu_1^2}\displaystyle\int_{-d_1/2}^{d_1/2} z^2 dz \\ D_2 = \dfrac{E_2}{1-\nu_2^2}\displaystyle\int_{d_1/2}^{d_1/2+d_2} z^2 dz \end{cases} \tag{III.20.c}$$

La masse volumique du système est calculée en fonction des masses de chaque couche :

$$\rho_{12} = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2} \tag{III.20.d}$$

Où :

$D_n$ : Module de rigidité en flexion du matériau de la couche n ;

$\rho_n$ : Masse volumique ;

$h_n$ : Dénote l'épaisseur de la couche n.

Ce modèle équivalent visco-élastique simple atteint ses limites lorsque la seconde couche est d'épaisseur non négligeable par rapport à la première (on sort de l'hypothèse principale de calcul). La position en fréquence des résonances ainsi que le facteur de pertes $\eta_{12}$, sont surestimés.

Pour remédier à ce désagrément, la prise en compte du cisaillement dans la seconde couche doit être faite. Dauchez et al. [122-123] en donnent un exemple appliqué à l'étude d'un système de plaque en aluminium plus une plaque d'un matériau poro-élastique.

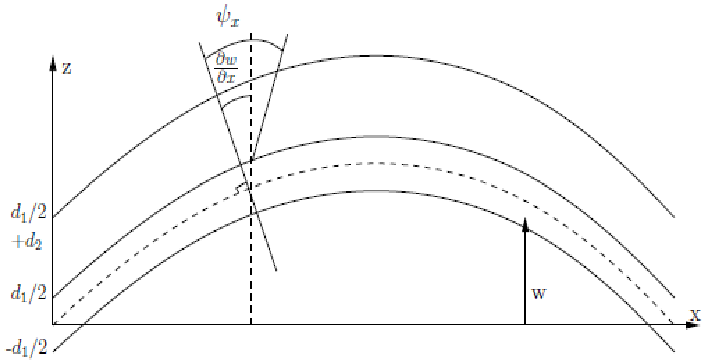



***Figure III.6 :*** *Schéma des déplacements pour une structure en bicouche [110]*

### *III.12.2. Modèle de flexion et cisaillement :*

Le développement de Dauchez l'amène à récrire le module de rigidité en flexion du système comme :

$$D_{12} = D_1 + D_2 C_s(k^2) \qquad \textit{(III.21)}$$

Où :

$C_s(k^2)$ : Facteur de correction des effets du cisaillement sur le module de rigidité en flexion. Ce facteur dépendant du nombre d'onde, il dépend également de la fréquence.

Cette modification du module de rigidité affecte directement l'expression du facteur de perte structural du système $\eta_{12}$, défini comme le rapport de la partie imaginaire sur la partie réelle du module de flexion. Des calculs plus détaillés sont regroupés dans un rapport interne au GAUS remis par S. Rigobert [110].

La nouvelle relation de dispersion du système dans le cas d'une plaque équivalente simplement supportée s'écrit comme :

$$\omega^2 = k^4 \frac{D_{12}}{\rho_{12}(h_1 + h_2)} C_s(k^2) \qquad \textit{(III.22)}$$

Elle est à mettre en relation avec l'équation (III.11) de dispersion typique pour une plaque mince. On peut montrer que $C_s$ est inférieur à 1. Son effet est donc, comme attendu, de diminuer les positions en fréquences des résonances du système [110].

## *III.13 Conclusion :*

Comme on a vue ci-dessus, il existe donc de différents types de plaques (isotropes, anisotropes et orthotropes) qui se comportent avec différents comportements (flexionnel, membrane ou mixte), dont les études se faits dans différents états (statique, dynamique).

Ces études se basent généralement sur différents théories, principalement on utilise celle de Love - Kirchhoff dans le cas des plaques minces, et celle de Reissner Mindlin dans le cas des plaques épaisses.

Diverses théories sur les plaques ont été développées jusqu'à présent, notamment la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (TSDT), les théories de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur par Reddy et Touratier (SSDT). Beaucoup d'entre elles ont été reformulées en utilisant les relations constitutives différentielles de la théorie des plaques raffiné.

Les théories d'ordre supérieur proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique du déplacement. Et je vise à examiner les vibrations libres des plaques en FGM reposant sur des fondations viscoélastiques de Winkler-Pasternak par l'utilisation d'une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur, et en incluant une nouvelle fonction de gauchissement, et j'espère aboutir a un modèle plutôt une fonction de forme de cisaillement qui soit raisonnablement précis et simple à utiliser pour étudier le comportement vibratoire libre de plaques de matériau de calibre fonctionnel reposant sur des fondations viscoélastiques.

04

# CHAPITRE

# *Etude analytique de la vibration d'une plaque en FGM sur fondation viscoélastique*

## IV.1 Introduction :

Notre travail, consiste à présenté une étude de la vibration libre avec la théorie des plaques raffinée à deux variables en cisaillement d'ordre supérieur, en incluant une nouvelle fonction de gauchissement. La plaque utilisée en FGM reposant sur des fondations viscoélastiques de type Winkler-Pasternak. Les équations d'équilibres sont dérivées du principe des déplacements virtuels. Des exemples illustratifs sont donnés pour résoudre le problème de la vibration libre d'une plaque rectangulaire sous différents conditions aux limites. De plus, les effets de l'amortissement sur les vibrations libres sont examinés en détail, en tenant compte de divers paramètres, géométriques et mécaniques. Les résultats obtenus avec la nouvelle fonction de forme de cisaillement des fondations viscoélastiques sont en bon accord avec les autres résultats rapportés dans la littérature, et la méthode proposée peut facilement être utilisée pour résoudre les problèmes de vibration libre des plaques en FGM.

## IV.2 Modélisation :

On considérée une plaque en FGM représenté dans la figure IV.1 reposant sur une fondation élastique de type Visco – Winkler – Pasternak, où $k_w$ , $k_p$ et $c_d$ sont respectivement les paramètres de Winkler, Pasternak et le coefficient d'amortissement.

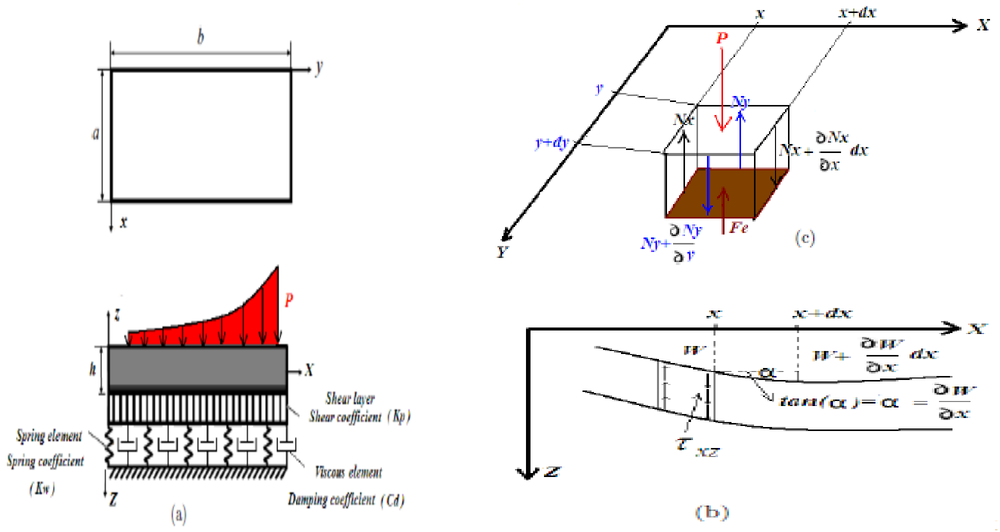



***Figure IV.1 :*** *Modélisation d'une plaque en FGM avec l'effet de membrane de la fondation viscoélastique*

Les caractéristiques mécaniques de la plaque en FGM tel que le module de Young $E$, $\rho$ masse volumique et $\nu$ le coefficient de Poisson varient le long de l'épaisseur. Le système de coordonnés $(x, y, z)$ est placé au milieu de la plaque, les paramètres utilisés sont définie comme suit : $0 \leq x \leq a$ ; $0 \leq y \leq b$ et - $h/2 \leq z \leq +h/2$.

### *IV.3 Hypothèses :*

L'étude analytique est fondée sur les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont faibles en comparaison avec l'épaisseur de la plaque ;
- Les déformations impliquées peuvent être considérées comme infinitésimales ;
- La contrainte normale $\sigma_z$ est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan $\sigma_x$ et $\sigma_y$;
- Les déplacements $U$ et $V$ dans les directions $x$ et $y$ respectivement consistent en des composants d'extension, de flexion et de cisaillement ;
- Le déplacement transversal $W$ inclut les composants de flexion $w_b$ et de cisaillement $w_s$. Ces composants sont des fonctions des coordonnées $x$ et $y$ uniquement ;
- $$\int_{z=-h/2}^{z=h/2} \psi(z)\, dz = 0; \; [\psi'(z)]_{-h/2}^{h/2} = 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

## *IV.4 Analyse :*

Le champ de déplacement pris, est :

$$\begin{cases} U(x,y,z) = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \psi(z)\theta_x(x,y) \\ V(x,y,z) = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \psi(z)\theta_y(x,y) \\ W(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases} \qquad \text{(IV.2.1)}$$

Où :

| | |
|---|---|
| $U(x,y,z), V(x,y,z), W(x,y,z)$ | : Déplacements selon $x, y, z$ ; |
| $u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y)$ | : Déplacement au milieu de la plaque ; |
| $\theta_x(x,y), \theta_y(x,y)$ | : Rotations selon les plans de flexion yz et $xz$ respectivement ; |
| $\psi(z)$ | : Fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des efforts de cisaillement le long de l'épaisseur. |

Le déplacement transversal total $W$ n'est que la somme de deux termes, due au moment fléchissant $w_b$et à l'effort tranchant $w_s$:

$$W(x,y,z) = w_b(x,y) + w_s(x,y) \tag{IV.2.2}$$

Le déplacement $U$ selon x, $V$ selon y est présenté :

$$\begin{cases} U = u_0 + u_b + u_s \\ V = v_0 + v_b + v_s \end{cases} \tag{IV.2.3}$$

Tel que :

$$\begin{cases} u_b = -z(\dfrac{\partial w_b(x,y) + \partial w_s(x,y)}{\partial x})\;;\; \theta_x = \dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial x}; \\ v_b = -z(\dfrac{\partial w_b(x,y) + \partial w_s(x,y)}{\partial y});\; \theta_y = \dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial y}; \end{cases} \tag{IV.2.4}$$

Alors :

$$\begin{cases} u_s = \psi(z)\dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial x} \\ v_s = \psi(z)\dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial y} \end{cases} \tag{IV.2.5}$$

## *IV.5 Etude cinématique :*

Le champ de déplacement ci-dessous satisfait les conditions aux limites de la variation quadratique de la contrainte de cisaillement transversale sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, à travers l'épaisseur. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement transverse comme dans le modèle de Reissner-Mindlin [2]. La nouvelle théorie trigonométrique des plaques de déformation par cisaillement dans le présent modèle n'implique que quatre variables ($u_0$, $v_0$, $w_b$,$w_s$ ). Par conséquent, l'équation (IV.2.1) devient :

$$\begin{cases} U(x,y,z) = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_b(x,y)}{\partial x} + (\psi(z) - z)\dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial x} \\ V(x,y,z) = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_b(x,y)}{\partial y} + (\psi(z) - z)\dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial y} \\ W(x,y,z) = w_b(x,y) + w_s(x,y) \end{cases} \tag{IV.2.6}$$

Et, puisque :

$$f(z) = \psi(z) - z\;;\; \psi'(z) = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = \frac{\partial (f(z)+z)}{\partial z} \tag{IV.3}$$

Alors l'équation (IV.2) devient :

$$\begin{cases} U(x,y,z) = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_b(x,y)}{\partial x} + f(z)\dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial x} \\ V(x,y,z) = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_b(x,y)}{\partial y} + f(z)\dfrac{\partial w_s(x,y)}{\partial y} \\ W(x,y,z) = w_b(x,y) + w_s(x,y) \end{cases} \tag{IV.4}$$

Par conséquence, les déformations, soit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \; ; \; \gamma_{xy} = \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \; ; \; \gamma_{xz} = \dfrac{\partial W(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial W(x,y,z)}{\partial z} \; ; \; \gamma_{yz} = \dfrac{\partial W(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \end{cases} \tag{IV.5.1}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \psi(z)\theta_x(x,y)\right) \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \psi(z)\theta_y(x,y)\right) \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial}{\partial z} w_0(x,y) \end{cases} \tag{IV.5.2.a}$$

Et :

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \psi(z)\theta_y(x,y)\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \psi(z)\theta_x(x,y)\right) \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial}{\partial x} w_0(x,y) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \psi(z)\theta_x(x,y)\right) \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial}{\partial y} w_0(x,y) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \psi(z)\theta_y(x,y)\right) \end{cases} \tag{IV.5.2.b}$$

Elle devient :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} + \psi(z)\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \tag{IV.6.a.1}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} + \psi(z)\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} \tag{IV.6.a.2}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \tag{IV.6.a.3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} + \psi(z)\left(\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y}\right) \tag{IV.6.a.4}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi(z)\theta_x(x,y)\right) \tag{IV.6.a.5}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi(z)\theta_y(x,y)\right) \tag{IV.6.a.6}$$

Alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 0 \\ 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \psi(z)\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \psi(z)\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ \psi(z)(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}) \\ \psi'(z)\theta_x \\ \psi'(z)\theta_y \end{Bmatrix} \tag{IV.6.b}$$

Par suite, les déformations, prennent la forme :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_b(x,y)}{\partial x^2} + f(z)\frac{\partial^2 w_s(x,y)}{\partial x^2} \tag{IV.7.a}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_b(x,y)}{\partial y^2} + f(z)\frac{\partial^2 w_s(x,y)}{\partial y^2} \tag{IV.7. b}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \tag{IV.7. c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_b(x,y)}{\partial x \partial y} + 2f(z)(\frac{\partial^2 w_s(x,y)}{\partial x \partial y}) \tag{IV.7.d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\psi(z)\frac{\partial w_s(x,y)}{\partial x} \tag{IV.7.e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\psi(z)\frac{\partial w_s(x,y)}{\partial y} \tag{IV.7.f}$$

Alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 0 \\ 2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 0 \\ 2f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ g(x)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ g(x)\frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{IV.8}$$

Puisque :

$$g(x) = \psi'(z) \tag{IV.9}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_{0,x} \\ \partial v_{0,y} \\ 0 \\ \partial v_{0,x} + \partial u_{0,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \partial^2 w_{b,xx} \\ \partial^2 w_{b,yy} \\ 0 \\ 2\partial^2 w_{b,xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z)\partial^2 w_{s,xx} \\ f(z)\partial^2 w_{s,yy} \\ 0 \\ 2f(z)\partial^2 w_{s,xy} \\ g(x)\partial w_{s,x} \\ g(x)\partial w_{s,y} \end{Bmatrix} \tag{IV.10}$$

A la fin nous aurons, l'équation (IV.10) prend une simple forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{0,x} - zw_{b,xx} + f(z)w_{s,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{0,y} - zw_{b,yy} + f(z)w_{s,yy} \\ \gamma_{xy} = \left(v_{0,x} + u_{0,y}\right) - 2zw_{b,xy} + 2f(z)w_{s,xy} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \ ; \quad \gamma_{xz} = g(x)w_{s,x} \ ; \gamma_{yz} = g(x)w_{s,y} \end{cases} \tag{IV.11}$$

Alors l'équation (IV.4) devient :

$$\begin{cases} U = u_0 - zw_{b,x} + f(z)\partial w_{s,x} \\ V = v_0 - zw_{b,y} + f(z)\partial w_{s,y} \\ W = w_b + w_s \end{cases} \tag{IV.12}$$

Par l'utilisation du principe de Hamilton :

$$\delta \int_{-h/2}^{h/2} \left(U + U_f + K + W\right) dz = 0 \tag{IV.13.a}$$

Où :

$U$: Energie de déformation,

$K$: Energie cinétique,

$W$: Travail des forces extérieurs,

$U_f$: Energie de déformation de fondation ;

Par l'utilisation du principe de minimisation d'énergie :

$$\left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint \delta\left[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right] dAdz + \int_{\Omega} fe\, \delta w \delta A - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iiint \delta(\frac{1}{2}\rho\left[\ddot{U} + \ddot{V} + \ddot{W}\right]) dAdzdt \right] = 0 \tag{IV.13.b}$$

Par suite :

$$\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\iint[\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}]dAdz+\int_{\Omega} fe\,\delta w\delta A \right. \\ \left. -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\iiint \delta\rho\left[\dot{U}\delta\dot{U}+\dot{V}\delta\dot{V}+\dot{W}\delta\dot{W}\right]dAdzdt\right]=0 \tag{IV.13.c}$$

Remplaçant, l'équation (IV.11) et (IV.12) dans l'équation (IV.13.c), nous obtenons :

$$\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\iint[\sigma_{xx}\delta(u_{0,x}-zw_{b,xx}+f(z)w_{s,xx})+\sigma_{yy}\delta(v_{0,y}-zw_{b,yy}+f(z)w_{s,yy})\right. \\ +\tau_{xy}\delta(\left(v_{0,x}+\partial u_{0,y}\right)-2z\partial^2 w_{b,xy}+2f(z)w_{s,xy})+\tau_{yz}\delta(g(x)w_{s,y}) \\ +\tau_{xz}\delta(g(x)w_{s,x})\big]dAdz+\int_{\Omega} fe\,\delta w\delta A \\ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\iiint \delta\rho\big[\left(\dot{u_0}-z\dot{w_{b,x}}+f(z)\dot{w_{s,x}}\right)\delta\dot{U} \\ \left.+\left(\dot{v_0}-z\dot{w_{b,y}}+f(z)\dot{w_{s,y}}\right)\delta\dot{V}+(\dot{w_b}+\dot{w_s})\delta\dot{W}\big]dAdzdt\right]=0 \tag{IV.13.d}$$

Par suite :

$$\left[\iint \mathrm{N_{xx}}\delta\left(\mathrm{u_{0,x}}\right)\mathrm{dA}-\iint \mathrm{M_{xx}}\delta\left(\mathrm{w_{b,xx}}\right)\mathrm{dA}+\iint \mathrm{R_{xx}}\delta\left(\mathrm{w_{s,xx}}\right)\mathrm{dA}+\iint \mathrm{N_{yy}}\delta\left(\mathrm{v_{0,y}}\right)\mathrm{dA}\right. \\ -\iint \mathrm{M_{yy}}\delta\left(\partial^2\mathrm{w_{b,yy}}\right)\mathrm{dA}+\iint \mathrm{R_{yy}}\delta\left(\mathrm{w_{s,yy}}\right)\mathrm{dA}+\iint \mathrm{N_{xy}}\delta\left(\mathrm{v_{0,x}}+\mathrm{u_{0,y}}\right)\mathrm{dA} \\ -\iint 2\mathrm{M_{xy}}\delta\left(\mathrm{w_{b,xy}}\right)\mathrm{dA}+\iint 2\mathrm{R_{xy}}\delta\left(\mathrm{w_{s,xy}}\right)\mathrm{dA}+\iint \mathrm{Q_{yz}}\delta(\mathrm{w_{s,y}})\,\mathrm{dA} \\ +\iint \mathrm{Q_{xz}}\delta(\mathrm{w_{s,x}})\mathrm{dA}+\int_{\Omega}\mathrm{fe}\,\delta\mathrm{w}\delta\mathrm{A} \\ -\iiint\left(\mathrm{I_1}\delta(\dot{\mathrm{u}_0})-\mathrm{I_2}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,x}}\right)+\mathrm{I_4}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,x}}\right)\right)(\delta\dot{\mathrm{u}_0}) \\ -\left(\mathrm{I_2}\delta(\dot{\mathrm{u}_0})-\mathrm{I_3}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,x}}\right)+\mathrm{I_5}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,x}}\right)\right)\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,x}}\right) \\ +\left(\mathrm{I_4}\delta(\dot{\mathrm{u}_0})-\mathrm{I_5}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,x}}\right)+\mathrm{I_6}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,x}}\right)\right)\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,x}}\right) \\ +\left(\mathrm{I_1}\delta(\dot{\mathrm{v}_0})-\mathrm{I_2}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,y}}\right)+\mathrm{I_4}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,y}}\right)\right)\delta(\dot{\mathrm{v}_0}) \\ -\left(\mathrm{I_2}\delta(\dot{\mathrm{v}_0})-\mathrm{I_3}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,y}}\right)+\mathrm{I_5}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,y}}\right)\right)\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,y}}\right) \\ +\left(\mathrm{I_4}\delta(\dot{\mathrm{v}_0})-\mathrm{I_5}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{b,y}}\right)+\mathrm{I_6}\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,y}}\right)\right)\delta\left(\dot{\mathrm{w}_{s,y}}\right)+\mathrm{I_1}\delta(\dot{\mathrm{w}_b})\delta\dot{\mathrm{w}}_b \\ \left.+\mathrm{I_1}\delta(\dot{\mathrm{w}_b})\left(\delta\dot{\mathrm{w}}_s\right)+\mathrm{I_1}\delta(\dot{\mathrm{w}_s})\delta\dot{\mathrm{w}}_b+\mathrm{I_1}\delta(\dot{\mathrm{w}_s})\delta\dot{\mathrm{w}}_s\,\mathrm{dAdt}\right]=0 \tag{IV.13.e}$$

Puisque :

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2)dz \qquad (IV.14.1)$$

Les efforts prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})dz \\ (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})zdz \\ (R_{xx}, R_{yy}, R_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})f(z)dz \\ (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz})\psi'(z)dz \end{cases} \qquad (IV.\ 14.2)$$

Donc, pour avoir les équations d'équilibres, il faut :

$\delta u_0$:

$$\iint N_{xx}\delta(u_{0,x})dxdy + \iint N_{xy}\delta(u_{0,y})dxdy - \iiint \left(I_1\delta(\dot{u_0}) - I_2\delta(\dot{w_{b,x}}) + I_4\delta(\dot{w_{s,x}})\right)(\delta\dot{u_0})dxdydt = 0 \qquad (IV.15.a)$$

$\delta v_0$:

$$\iint N_{yy}\delta(v_{0,y})dxdy + \iint N_{xy}\delta(v_{0,x})dxdy - \iiint \left(I_1\delta(\dot{v_0}) - I_2\delta(\dot{w_{b,y}}) + I_4\delta(\dot{w_{s,y}})\right)\delta(\dot{v_0})dxdydt = 0 \qquad (IV.15.b)$$

$\delta w_b$:

$$\iint M_{xx}\delta(w_{b,xx})dxdy + \iint M_{yy}\delta(w_{b,yy})dxdy + \iint 2M_{xy}\delta(w_{b,xy})dxdy - \int_\Omega fe\ \delta w\delta dxdy - \iiint (\Big(I_2\big(\delta(\dot{u_0}) + \delta(\dot{v_0})\big) - I_3\left(\delta(\dot{w_{b,x}}) + \delta(\dot{w_{b,y}})\right) + I_5\left(\delta(\dot{w_{s,x}}) + \delta(\dot{w_{s,y}})\right)\Big)\delta(\dot{w_{b,x}}) + I_1\big(\delta(\dot{w_b}) + \delta(\dot{w_s})\big)\delta\dot{w}_b\ )dxdydt = 0 \qquad (IV.15.c)$$

$\delta w_s$:

$$\begin{aligned}\iint R_{xx}\delta\left(w_{s,xx}\right)dxdy + \iint R_{yy}\delta\left(w_{s,yy}\right)dxdy + \iint 2R_{xy}\delta\left(w_{s,xy}\right)dxdy \\ + \iint Q_{yz}\delta(w_{s,y})\,dxdy + \iint Q_{xz}\delta(w_{s,x})dxdy + \int_{\Omega} fe\,\delta w dxdy \\ - \iiint + \left(I_4\left(\delta(\dot{u_0}) + \delta(\dot{v_0})\right) - I_5\left(\delta\left(\dot{w_{b,x}}\right) + \delta\left(\dot{w_{b,y}}\right)\right)\right. \\ \left. + I_6\left(\delta\left(\dot{w_{s,x}}\right) + \delta\left(\dot{w_{s,y}}\right)\right)\right)\delta\left(\dot{w_{s,x}}\right) + I_1\left(\delta(\dot{w}_b) + \delta(\dot{w}_s)\right)\delta\dot{w}_s dxdydt = 0\end{aligned} \qquad (IV.15.d)$$

Donc, après intégration par partie, les équations d'équilibres prendront les formes suivantes :

*Eq1:*

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = I_1\ddot{u_0} - I_2\ddot{w}_{b,x} + I_4\ddot{w}_{s,x} \qquad (IV.16.1)$$

*Eq2:*

$$N_{xy,x} + N_{yy,y} = I_1\ddot{v_0} - I_2\ddot{w}_{0,y} + I_4\ddot{w}_{s,y} \qquad (IV.16.2)$$

Eq3 :

$$\begin{aligned}M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} - fe \\ = I_2(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_3(\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}) + I_5(\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy}) + I_1(\ddot{w}_b \\ + \ddot{w}_s)\end{aligned} \qquad (IV.16.3)$$

Eq4 :

$$\begin{aligned}R_{xx,xx} + R_{yy,yy} + 2R_{xy,xy} + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + \mathrm{fe} \\ = I_4(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_5\left(\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}\right) + I_6\left(\ddot{w}_{s,xx} + \ddot{w}_{s,yy}\right) + I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)\end{aligned} \qquad (IV.16.4)$$

Considérons une plaque FGM contenant du métal et de la céramique uniformément répartis. La règle modifiée des mélanges selon l'équation (I.3.a) [46-49] est :

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c \qquad (\mathrm{I.3.a})$$

La densité de la plaque varie selon une loi de puissance dont l'exposant peut être modifié dans le but d'obtenir des différentes distributions des matériaux sur l'épaisseur de la plaque. La teneur totale en fraction volumique des constituants métalliques et céramiques est :

$$V_m + V_c = 1 \qquad (I.3.b)$$

Et la distribution de la loi de puissance de la fraction volumique céramique peut être exprimée comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \tag{I.4}$$

Où :

$p$: Paramètre matériels ;

$h$: Épaisseur de la poutre.

Par conséquent, toutes les propriétés du matériau à gradation fonctionnelle (FGM) peuvent être écrites comme :

$$P(z) = (P_c - P_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + P_m \tag{IV.17}$$

De plus, les équations exprimant le module de Young $(E)$ et la densité du matériau $(\rho)$ , d'une plaque en matériau FG imparfaite peuvent s'écrire :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \tag{I.5}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + \rho_m \tag{IV.18}$$

Où :

$E_c$: Module de Young de la céramique (la surface supérieure$z = +h/2$ de la poutre en FGM) ;

$E_m$: Module de Young du le métal (la surface inférieure$z = -h/2$ de la poutre en FGM) ;

$p$: Exposant de la fraction volumique ;

$\upsilon$: Coefficient de Poisson est supposé constant.

Afin d'avoir les relations entre contraintes et déformations, soit le tenseur des contraintes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{IV.19}$$

Où :

$\sigma_{xx}$ ; $\sigma_{yy}$ ; $\sigma_{zz}$ ; $\tau_{xy}$ ; $\tau_{yz}$ ; $\tau_{xz}$ : Composantes des contraintes ;

$\varepsilon_{xx}$ ; $\varepsilon_{yy}$ ; $\varepsilon_{zz}$ ; $\gamma_{xy}$ ; $\gamma_{yz}$ ; $\gamma_{xz}$ : Composantes des déformations ;

$Q_{ij}$ : Constantes élastiques.

La représentation des $Q_{\mathrm{ij}}$ en fonction du module d'Young $E$ et de coefficient de Poisson $\upsilon$ se fait comme suit :

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\upsilon^2} \tag{IV. 20.a}$$

$$Q_{12}(z) = Q_{21}(z) = \frac{\upsilon E(z)}{1-\upsilon^2} \tag{IV. 20.b}$$

$$Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\upsilon)} \tag{IV. 20.c}$$

Donc :

$$\sigma_{xx} = Q_{11}(z)\varepsilon_{xx} + Q_{12}(z)\varepsilon_{yy} \tag{IV. 21.a}$$

$$\sigma_{\mathrm{yy}} = Q_{12}(\mathrm{z})\varepsilon_{\mathrm{xx}} + Q_{22}(\mathrm{z})\varepsilon_{\mathrm{yy}} \tag{IV. 21.b}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \tag{IV. 21.c}$$

$$\tau_{xy} = Q_{66}(z)\gamma_{xy} \tag{IV. 21.d}$$

$$\tau_{yz} = Q_{44}(z)\gamma_{yz} \tag{IV. 21.e}$$

$$\tau_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \tag{IV. 21.f}$$

## *IV.6 Equations constitutives :*

L'énergie de déformation totale de la plaque en FGM, comme le montre la figure IV.1, est donnée comme suit :

$$U = \frac{1}{2}\iiint \left[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right]dxdydz \tag{IV.22}$$

En introduisant les équations (IV.21) dans l'équation (IV.22), l'énergie de déformation pour la contrainte plane supposée peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\iiint \Big[ & Q_{11}(z)[\varepsilon_{xx}]^2 + 2Q_{12}(z)\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + Q_{22}(z)\left[\varepsilon_{yy}\right]^2 + Q_{66}(z)\left[\gamma_{xy}\right]^2 \\ & + Q_{44}(z)\left[\gamma_{yz}\right]^2 + Q_{55}(z)[\gamma_{xz}]^2\Big]\, dxdydz \end{aligned} \tag{IV.23}$$

La substitution des expressions de déformation dans l'équation (IV.11) donne l'énergie de déformation comme suit :

$$
\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\iiint \Big[ & Q_{11}(z)\left[u_{0,x} - zw_{b,xx} + f(z)w_{s,xx}\right]^2 \\
& + 2Q_{12}(z)\left[u_{0,x} - zw_{b,xx} + f(z)w_{s,xx}\right]\left[v_{0,y} - zw_{b,yy}\right. \\
& \left. + f(z)w_{s,yy}\right] + Q_{22}(z)\left[v_{0,y} - zw_{b,yy} + f(z)w_{s,yy}\right]^2 \\
& + Q_{66}(z)\left[\left(v_{0,x} + u_{0,y}\right) - 2zw_{b,xy} + 2f(z)w_{s,xy}\right]^2 \\
& + Q_{44}(z)\left[g(x)w_{s,y}\right]^2 + Q_{55}(z)\left[g(x)w_{s,x}\right]^2\Big]\, dxdydz
\end{aligned}
\qquad (IV.24)
$$

Afin d'abréger le volume de calcule on introduite les paramètres de rigidité dans l'équation (IV.24) :

$$\left\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, z^2\} Q_{ij}\, dz \qquad (i, j = 1,2,6) \qquad (IV.\ 25.a)$$

$$\left\{B_{ij}^f, D_{ij}^f, F_{ij}^f\right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{f(z), zf(z), f(z)^2\} Q_{ij}\, dz \qquad (i, j = 1,2,6) \qquad (IV.\ 25.b)$$

$$\left\{A_{ij}^f\right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{g(z)^2\} Q_{ij}\, dz \qquad (i, j = 4,5) \qquad (IV.\ 25.c)$$

En substituant les équations (IV.11), (IV.12) et (IV.25) dans l'équation (IV.24), et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.24) peut être réécrite comme :

$$U = \frac{1}{2}\iint \{V_d\}^t [M_R] \{V_d\}\, dxdy \qquad (IV.26)$$

Où :

$$\{V_d\}^t = \left\{u_{0,x}, v_{0,y}, \left(u_{0,y} + v_{0,x}\right), w_{b,xx}, w_{b,yy}, w_{b,xy}, w_{s,y}, w_{s,x}, w_{s,xx}, w_{s,yy}, w_{s,xy}\right\} \qquad (IV.27.a)$$

$$M_R = \begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & 0 & -B_{11} & -B_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{11}^f & B_{12}^f & 0 \\
A_{12} & A_{22} & 0 & -B_{12} & -B_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{12}^f & B_{22}^f & 0 \\
0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & -2B_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_{66}^f \\
-B_{11} & -B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & -D_{11}^f & -D_{12}^f & 0 \\
-B_{12} & -B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & -D_{12}^f & -D_{22}^f & 0 \\
0 & 0 & -2B_{66} & 0 & 0 & 4D_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & -4D_{66}^f \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^f & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55}^f & 0 & 0 & 0 \\
B_{11}^f & B_{12}^f & 0 & -D_{11}^f & -D_{12}^f & 0 & 0 & 0 & F_{11}^f & F_{12}^f & 0 \\
B_{12}^f & B_{22}^f & 0 & -B_{11}^f & -B_{12}^f & 0 & 0 & 0 & F_{12}^f & F_{22}^f & 0 \\
0 & 0 & 2B_{66}^f & 0 & 0 & -4D_{66}^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 4F_{66}^f
\end{bmatrix} \qquad (IV.27.b)$$

L'énergie cinétique totale d'une plaque FGM peut être exprimée comme suit :

$$K = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{A} \rho(z)\left[\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2\right] dAdz \qquad \text{(IV.28)}$$

En substituant les équations (IV.12) dans l'équation (IV.28), nous aurons :

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{A} \rho(z) \Big[&\left(\dot{u_0} - z\dot{w_{b,x}} + f(z)\dot{w_{s,x}}\right)^2 \\ &+ \left(\dot{v_0} - z\dot{w_{b,y}} + f(z)\dot{w_{s,y}}\right)^2 + (\dot{w_b} + \dot{w_s})^2\Big] dAdz \end{aligned} \qquad \text{(IV.29)}$$

La plaque en FGM repose sur une fondation Visco-Pasternak [31-35]. La fondation visco-élastique Winkler – Pasternak peut être représentée comme un ensemble infini de ressorts, d'amortisseurs et d'éléments visqueux connectés en parallèle. La couche visqueuse est modélisée avec le modèle Kelvin – Voigt. La relation charge-déformation est dérivée en considérant l'équilibre vertical d'un élément de couche de cisaillement découpé par les surfaces $x$ ,$(x + dx), y$ et $y + dy,$ comme le montre la figure IV.1.b. Notez que le matériau de fondation est supposé être homogène et isotrope dans le plan$x - y$.

$$\tau_{xy} = K_p(z)\gamma_{xy} = k_p\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \qquad \text{(IV.30.a)}$$

$$\tau_{yz} = K_p(z)\gamma_{yz} = k_p\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \qquad \text{(IV.30.b)}$$

Les forces de cisaillement par unité de longueur de la couche de cisaillement sont :

$$\begin{cases} N_x = \displaystyle\int_0^l \tau_{xz}dz = k_p\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ N_y = \displaystyle\int_0^l \tau_{yz}dz = k_p\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{(IV.31)}$$

La réaction du sol est :

$$P = F_{ressort} + F_{amortisseur} = k_w w(x,y) + c_d\frac{\partial w(x,y)}{\partial t} \qquad \text{(IV.32)}$$

Où :

$F_{ressort}$ : Forces verticales du ressort ;

$F_{amortisseur}$ : Forces verticales des éléments amortisseurs.

Selon les figures IV.1.b et IV.1.c, l'équation d'équilibre peut être exprimée par :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P + F_e = 0 \qquad \textit{(IV.33)}$$

En substituant les équations (IV.31) et (IV.32) à l'équation (IV.33), on obtient l'intensité de la force de réaction des fondations sur la structure comme :

$$F_e = k_w w(x,y) - k_p\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) + c_d\frac{\partial w(x,y)}{\partial t} \qquad \textit{(IV.34.a)}$$

Par suite, nous aurons :

$$F_e = k_w w(x,y) - k_p\nabla^2 w + c_d\frac{\partial w(x,y)}{\partial t} \qquad \textit{(IV.34.b)}$$

L'énergie de déformation de la fondation élastique à partir de l'équation (IV.13.a), s'écrit :

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2}\iint F_e W dS = \frac{1}{2}\iint F_e(w_b + w_s) \\ &= \frac{1}{2}\iint \big[k_w(w_b + w_s) \\ &\quad - k_p\left[(w_b + w_s)_{,xx} + (w_b + w_s)_{,yy}\right] + c_d(w_b + w_s)_{,t}\big](w_b + w_s)dS \end{aligned} \qquad \textit{(IV.34.c)}$$

Où :

$k_w$ : Paramètre de Winkler ;

$k_p$ : Paramètre de Pasternak ;

$c_d$ : Coefficient d'amortissement.

Les équations d'équilibres du mouvement peuvent être obtenues par dérivation de l'équation générale (IV.13.a) et les conditions aux limites associées des plaques en FGM :

$$\delta u_0 = \delta v_0 = \delta w_b = \delta w_s = \delta\frac{w_b}{\partial x} = \frac{w_b}{\partial y} = \delta\frac{w_s}{\partial x} = \delta\frac{w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } t = t_1, t_2 \qquad \textit{(IV.35)}$$

En intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients $u_0$, $v_0$, $w_b$ et $w_s$ et égaux à zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir l'équation d'équilibre associée à la présente théorie raffinée des plaques (RPT) pour la plaque en FGM [17-19]. L'équation d'équilibre associée à la présente théorie de la déformation par cisaillement peut être exprimée comme suit :

*Eq1 :*

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-B_{11}\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_b}{\partial x\partial y^2}$$
$$+B_{11}^{f}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3}+\left(B_{12}^{f}+2B_{66}^{f}\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x\partial y^2}=I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^3 w_b}{\partial x\partial t^2}+I_4\frac{\partial^3 w_s}{\partial x\partial t^2} \quad (IV.36.1)$$

*Eq2 :*

$$A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2\partial y}+B_{22}^{f}\frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3}$$
$$+\left(B_{12}^{f}+2B_{66}^{f}\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2\partial y}=I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^3 w_b}{\partial y\partial t^2}+I_4\frac{\partial^3 w_s}{\partial y\partial t^2} \quad (IV.36.2)$$

*Eq3 :*

$$B_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+B_{22}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}-D_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}$$
$$-2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}-D_{11}^{f}\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}$$
$$-2\left(D_{12}^{f}+2D_{66}^{f}\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}^{f}\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}-F_e \quad (IV.36.3)$$
$$=I_2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial t^2}\right)-I_3\left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2\partial t^2}\right)+I_5\left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2\partial t^2}\right)$$
$$+I_1\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\right)$$

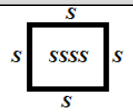
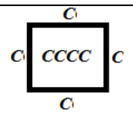
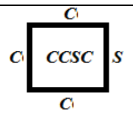
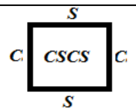
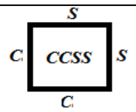
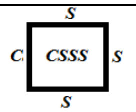
*Eq4 :*

$$B_{11}^{f}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(B_{12}^{f}+2B_{66}^{f}\right)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)+B_{22}^{f}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}-D_{11}^{f}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}$$
$$-2\left(D_{12}^{f}+2D_{66}^{f}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}^{f}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}-F_{11}^{f}\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}-2\left(F_{12}^{f}+2F_{66}^{f}\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-F_{22}^{f}\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}+A_{55}^{f}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+A_{44}^{f}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}+F_e \quad (IV.36.4)$$
$$=I_4\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial t^2}\right)-I_5\left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2\partial t^2}\right)+I_6\left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2\partial t^2}\right)$$
$$+I_1\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\right)$$

## *IV.7 Solutions analytiques aux problèmes de vibration des plaques en FGM :*

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Le travail présenté dans cette thèses à pour but de trouver les solutions analytiques des équations (IV.36) pour diverses conditions aux limites imposées aux bords latéraux, comme présenté par Kiasat [35] dans le tableau IV.1.

*Tableau IV.1 : Fonctions admissibles des fonctions de formes pour différents conditions aux limites [35]*

| BC | | $X_m(x)$ | $Y_n(y)$ |
|---|---|---|---|
| **SSSS** |  | $sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ | $sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$ |
| **CCCC** |  | $1 - cos\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)$ | $1 - cos\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)$ |
| **CCSC** |  | $1 - cos\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)$ | $1 - cos\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)$ |
| **CSCS** |  | $1 - cos\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)$ | $sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$ |
| **CCSS** |  | $cos\left(\frac{3m\pi}{2a}x\right) - cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right)$ | $cos\left(\frac{3n\pi}{2a}y\right) - cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right)$ |
| **CSSS** |  | $cos\left(\frac{3m\pi}{2a}x\right) - cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right)$ | $sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$ |

Notez que la méthode de Navier est utilisée dans les conditions aux limites spécifiées pour la solution analytique de l'équation (IV.36). Les équations de déplacement, qui satisfont aux conditions aux limites, sont sélectionnées comme la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{ij}X'_m(x)Y_n(y)e^{(I\omega t)} \\ V_{ij}X_m(x)Y'_n(y)e^{(I\omega t)} \\ W_{bij}X_m(x)Y_n(y)e^{(I\omega t)} \\ W_{sij}X_m(x)Y_n(y)e^{(I\omega t)} \end{Bmatrix} \qquad (IV.37)$$

Où :

$U_{ij}, V_{ij}, W_{bij} et W_{sij}$ : Paramètres arbitraires pour la détermination de la fréquence propre associée au $(m,n)^{th}$ mode propre : $\omega$ ;

$X_m(x), Y_n(y)$ : Fonction admissible présenté par Kiasat [35] dans le tableau IV.1

La substitution de l'équation (IV.37) dans l'équation du mouvement (IV.36) conduit aux équations aux valeurs propres suivantes pour toutes les valeurs fixes de $m$ et $n$ , dans le cas de problèmes de vibrations libres :

$$([K] + \omega[C] + \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \qquad (IV.38)$$

Où :

$$\text{La matrice de rigidité : } K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \qquad (IV.39.a)$$

$$\text{La matrice d'amortissement globale :} C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{10}c_d i & -e_{10}c_d i \\ 0 & 0 & -e_{10}c_d i & -e_{10}c_d i \end{bmatrix} \qquad (IV.39.b)$$

La matrice de masse dans le cas de vibrations libres :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \qquad (IV.39.c)$$

La grandeur désigne les colonnes :$\{\Delta\}$

Les éléments $K_{ij} = K_{ij}$ ; $C_{ij} = C_{ij}$ ; $M_{ij} = M_{ij}$ des matrices $[K]$; $[C]$ et $[M]$sont donnés par :

$$M \begin{cases} K_{11} = A_{11}e_1 + A_{66}e_2 \, ; \; K_{22} = A_{22}e_4 + A_{66}e_3 \, ; \; K_{12} = (A_{12} + A_{66})e_2 \\ K_{13} = -B_{11}e_1 - (B_{12} + 2B_{66})e_2 \, ; \; K_{14} = -B_{11}^f e_1 - \left(B_{12}^f + 2B_{66}^f\right)e_2 \\ K_{23} = -B_{22}e_4 - (B_{12} + 2B_{66})e_3 \, ; \; K_{24} = -B_{22}^f e_1 - \left(B_{12}^f + 2B_{66}^f\right)e_3 \\ K_{33} = -e_{10}k_w + (e_8 + e_9)k_p - e_5 D_{11} - e_7 D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})e_6 \\ K_{34} = -e_{10}k_w + (e_8 + e_9)k_p - D_{22}^f e_7 + D_{11}^f e_5 + 2\left(D_{12}^f + 2D_{66}^f\right)e_6 \\ K_{44} = e_{10}k_w - (e_8 + e_9)k_p - F_{11}^f e_5 + F_{22}^f e_7 + 2\left(F_{12}^f + 2F_{66}^f\right)e_6 - A_{44}^f e_9 - A_{55}^f e_8 \end{cases} \qquad (IV.\ 40.a)$$

Et

$$\begin{cases} m_{11} = I_1 e_{11};\ m_{12} = 0\ ;\ m_{13} = -I_2 e_{11};\ m_{14} = -I_4 e_{11};\ m_{22} = -I_1 e_{12}; \\ m_{23} = -I_2 e_{12}\ ;\ \ m_{24} = -I_4 e_{12}\ \ ;\ \ m_{31} = -I_2 e_8\ ;\ \ m_{32} = -I_2 e_9 \\ m_{33} = I_1 e_{10} + I_3(e_8 + e_9)\ ;\ m_{34} = -I_1 e_{10} - I_5(e_8 + e_9);\ m_{41} = -I_4 e_8 \\ m_{42} = -I_4 e_9;\ m_{43} = I_1 e_{10} + I_5(e_8 + e_9)\ ;\ m_{44} = I_1 e_{10} - I_6(e_8 + e_9) \end{cases} \qquad \textit{(IV.40.b)}$$

Avec :

$$\{e_1, e_2, e_{11}\} = \int_0^a \int_0^b X'(x)Y(y)\{X'''(x)Y(y), X'(x)Y''(y), X'(x)Y(y)\}dxdy \qquad \textit{(IV.40.c)}$$

$$\{e_3, e_4, e_{12}\} = \int_0^a \int_0^b X(x)Y'(y)\{X''(x)Y'(y), X(x)Y'''(y), X(x)Y'(y)\}dxdy \qquad \textit{(IV.40.d)}$$

$$\{e_5, e_6, e_7\} = \int_0^a \int_0^b X(x)Y(y)\{X''''(x)Y(y), X''(x)Y''(y), X(x)Y''''(y)\}dxdy \qquad \textit{(IV. 40.e)}$$

$$\{e_8, e_9, e_{10}\} = \int_0^a \int_0^b X(x)Y(y)\{X(x)Y(y), X(x)Y''(y), X(x)Y(y)\}dxdy \qquad \textit{(IV.40.f)}$$

Pour les solutions non triviales de l'équation (IV.36), les déterminants suivants doivent être mis à zéro :

$$Det([K] + \omega[C] + \omega^2[M])\{\Delta\} = 0 \qquad \textit{(IV. 41)}$$

## *IV.8 Conclusion :*

Dans cette partie le nouveau modèle développé est présenté pour l'étude des réponses des plaques posées sur des fondations viscoélastiques de type Winkler-Pasternak aux vibrations libres en utilisant une théorie des plaques raffinée à quatre variables. Le champ de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque est présenté avec une nouvelle fonction de forme de gauchissement.

Les équations d'équilibre sont obtenues par le principe d'Hamilton.  Enfin, une étude analytique et numérique est examinée en détail avec différentes conditions aux limites pour résoudre le problème de la vibration avec l'amortissement de la fondation, en tenant compte de divers paramètres géométriques et mécaniques.

05

# CHAPITRE

## *Résultats et interprétation*

# *V.1 Introduction :*

Dans ce chapitre nous présentons les résultats numériques obtenus pour différents exemples d'application. L'étude de l'influence des paramètres mécaniques, géométriques, conditions aux limites, rigidités et amortissement visqueux du sol sur le comportement vibratoire d'une plaque en FGM sur fondation viscoélastique

## *V.2 Propriétés mécaniques des matériaux FGM :*

L'exemple étudié est celui d'une plaque en FGM avec une longueur $a$, une largeur $b$ et une épaisseur constante $h,$ comme le montre la figure IV.1.a, elle est composée de deux matériaux différents, à savoir l'alumine sur la face supérieure et l'aluminium sur la face inférieure ; les propriétés des matériaux sont résumées dans le tableau V.1.

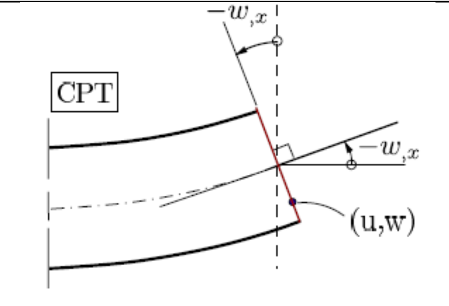
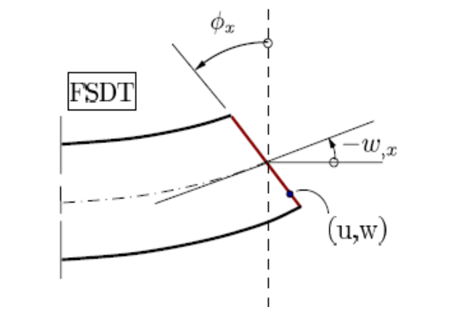
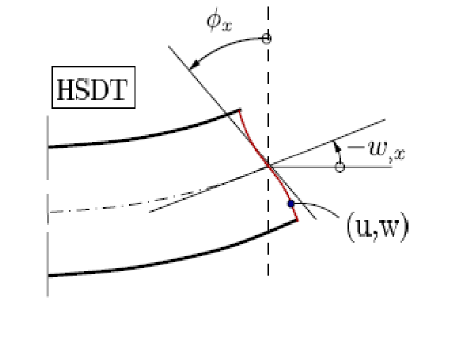
Le système de coordonnées choisi est placé au milieu de la plaque et les paramètres de coordonnées sont tels que $0 \leq x \leq a$ ; $0 \leq y \leq b$ et - $h/2 \leq z \leq +h/2$.

On suppose que la plaque considérée repose sur des fondations élastiques de type Visco – Winkler – Pasternak, tel que $k_w$ , $k_p$ et $c_d$ sont respectivement le paramètre de Winkler, le paramètre de Pasternak et le coefficient d'amortissement. Il est important de noter que le module de Young $E$, $\rho$ la densité de masse et $\upsilon$ le coefficient de Poisson sont supposés constants.

***Tableau V.1 :*** *Propriétés mécaniques des composants de la plaque en FGM*

| Matériel | Propriétés | | |
|---|---|---|---|
| | $E(GPa)$ | $\upsilon$ | $\rho(Kg/m^3)$ |
| Aluminium *(Al)* | 70 | 0.3 | 2702 |
| Alumine *($Al_2O_3$)* | 380 | 0.3 | 3800 |

***Tableau V.2 :*** *Schémas et Fonctions de différentes théories de déformations par cisaillement transversale*

| **Theories** | **Fonction** $\psi(z)$ | |
|---|---|---|
| **CPT** | $\psi(z)=0$ |  |
| **FSDT[2]** | $\psi(z)=z$ |  |
| **TSDT Reddy[10]** | $\psi(z)=z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)$ |  |
| **SSDT Touratier [11]** | $\psi(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\pi\frac{z}{h}\right)$ | |
| **Present model** | $\psi(z)=z\cos\left(\frac{z}{h}\right)-\frac{7z^3\cosh\left(\frac{z}{h}\right)}{10h^2}$ | |

## *V.3 Résultats numériques :*

Le modèle à cisaillement élevé considéré dans ce travail est défini à partir d'une méthodologie variationnelle et sont cohérents en termes de variation. La théorie des plaques de Love-Kirchhoff est un cas particulier d'une telle cinématique enrichie ; il est basé sur $\psi(z)=0$ . La théorie Reissner – Mindlin [2] est simplement obtenue à partir de la relation linéaire$\psi(z)=z$**.** Les théories des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur sont résumées dans le tableau V.2.

De plus, Soldatos [125] et Zenkour [126] ont indiqué que la fonction de forme doit être spécifiée à posteriori. Il peut être choisi comme l'équation (IV.1). La théorie des plaques à ordre élevée ne nécessite aucun facteur de correction de cisaillement et donne la variation parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait les conditions de contrainte de cisaillement aux bords libres. La nouvelle théorie raffinée de la déformation par cisaillement implique quatre fonctions de déplacement inconnues, mais les autres théories de déformation par cisaillement impliquent cinq de ces fonctions, c'est présenté dans le tableau V.3.

Les solutions analytiques de vibration libre exprimées par l'équation (IV.41) sont ainsi évaluées numériquement pour une plaque de matériau à gradation fonctionnelle afin de discuter des effets du paramètre d'amortissement sur la réponse aux vibrations de la plaque. Dans tous les exemples de calculs de vibrations libres des fondations, seuls des paramètres non dimensionnels sont utilisés ; ils sont donnés sous la forme ci-dessous :

$$K_w = k_w a^4 / D\,, K_p = k_p a^2 / D\,, \quad \omega^* = \omega a^2 \sqrt{\rho_c h / D_c}\,, C_d = c_d \sqrt{a^4 / (\rho_c h D)} \;\; et \;\; \hat{\omega} = \omega^* \left( \zeta \pm i \sqrt{1 - \zeta^2} \right),$$

Où :

$D = E_c h^3 / 12 (1 - \nu^2)$: Rigidité en flexion de référence de la plaque ;

$\omega^*$ : Fréquence non amortie sans dimension ;

$\zeta$ : Rapport d'amortissement.

***Tableau V.3 :*** *Fonction de déformation par cisaillement pour la théorie à Cinque et Quatre variables*

| Theories | **Fonction** $\psi(z)$ **(**5 inconnues) | **Fonction** $f(z)$ **(**4 inconnues) |
|---|---|---|
| **TSDT Reddy[10]** | $\psi(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$ | $f(z) = -\frac{4z^3}{3h^2}$ |
| **SSDT Touratier[11]** | $\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\pi \frac{z}{h}\right)$ | $f(z) = \frac{h}{\pi} sin\left(\pi \frac{z}{h}\right) - z$ |
| **Present model** | $\psi(z) = z\, cos\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{7z^3\, cosh\left(\frac{z}{h}\right)}{10h^2}$ | $f(z) = z\, cos\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{7z^3\, cosh\left(\frac{z}{h}\right)}{10h^2} - z$ |

Par ailleurs, les figures V.1a et V.1b illustrent la variation de la fonction de forme $\psi(z)$en fonction de l'épaisseur de la plaque.L'expression de la contrainte de cisaillement pour différents modèles peut être écrite en fonction de $\psi(z)$.

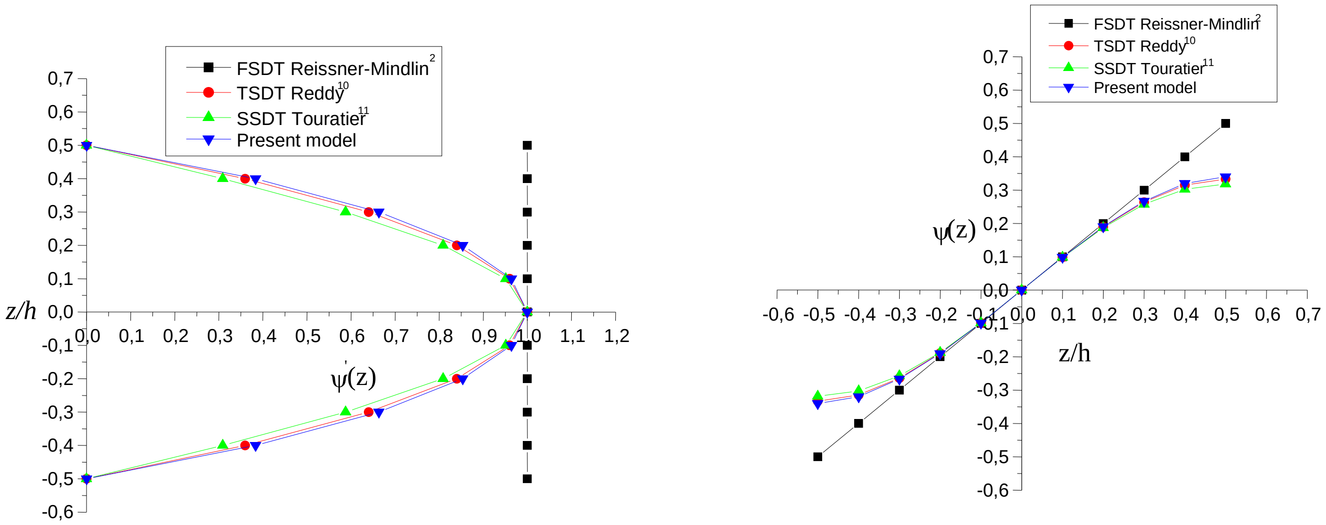



***Figure V.1 :*** *Fonctions de forme de déformation de diverses théories des plaques avec déformation par cisaillement*

Ces deux figures indiquent que les résultats obtenus avec le nouveau modèle sont cohérents avec les autres modèles d'ordre supérieur qui présentent une variation parabolique avec l'épaisseur; ici, les dérivées des fonctions de la théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) [10,11] sont égales à zéro, ce qui signifie que les contraintes de cisaillement sont également égales à zéro sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Ceci est différent de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), communément appelée modèle Mindlin-Reissner [2], qui montre une variation constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et nécessite donc l'utilisation d'un facteur de correction $\kappa = \frac{5}{6}$. Les résultats pour les paramètres fondamentaux de fréquence propre d'une plaque épaisse isotrope, avec trois valeurs différentes de rapports épaisseur-longueur $(a/h = 5,10,10^2)$.

Trois valeurs différentes du coefficient élastique de Winkler que $k_w$ , et trois valeurs du coefficient de couche de cisaillement $k_p$ sont présentés dans le tableau V.4 dans le but de valider la présente méthode dans le cas de plaques reposant sur des fondations élastiques.
Ces résultats sont en excellent accord avec ceux rapportés par Akhavan et al [127] dans le tableau V.4, avec

$$\omega^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}\ .$$

***Tableau V.4 :*** *Validation des fréquences fondamentales non dimensionnelles* $\omega^*$ *d'une plaque isotrope simplement supportée (SSSS) pour différents valeurs de fondation* ($k_w$ *et* $k_p$) *et rapport géométrique*($a/h$)

| $a/h$ | $k_w$ | $k_p$ | Akhavan et al [127] | Présent méthode |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 0 | 0 | 19.7391 | 19.7391 |
| | 100 | 10 | 26.2112 | 26.2112 |
| | 1000 | 100 | 57.9961 | 57.9961 |
| 10 | 0 | 0 | 19.0840 | 19.0654 |
| | 100 | 10 | 25.6368 | 25.6233 |
| | 1000 | 100 | 57.3969 | 57.3921 |
| 5 | 0 | 0 | 17.5055 | 17.4524 |
| | 100 | 10 | 24.3074 | 24.2723 |
| | 1000 | 100 | 56.0359 | 56.0309 |

Les figures V.2a à V.2d représentent la variation du coefficient d'amortissement en fonction de l'amortissement selon diverses théories de plaque, pour une plaque simplement supportée le long de son contour pour la valeur $a/h = 10$.

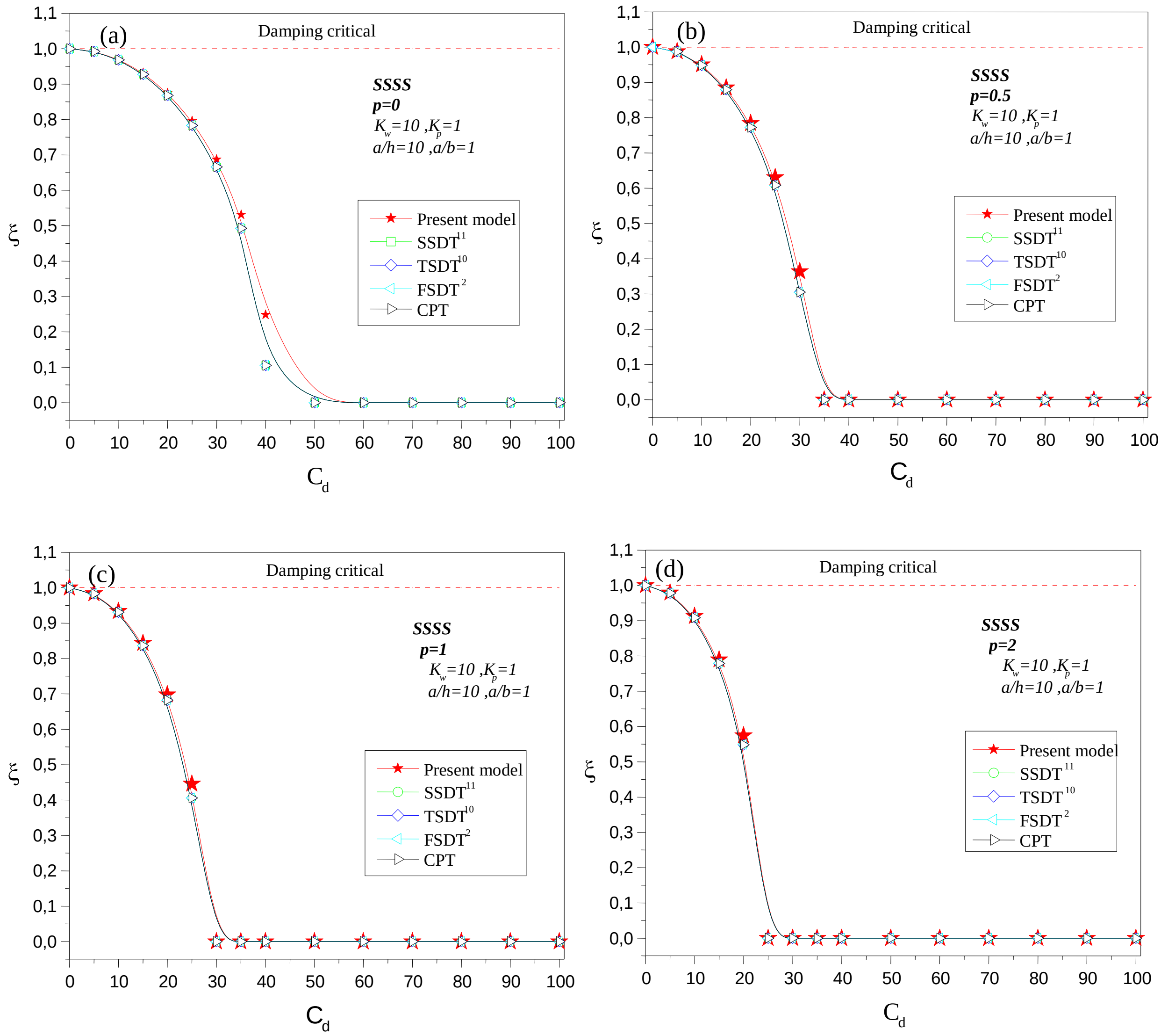



***Figure V.2 :** Effet du coefficient d'amortissement $C_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes théories des plaques*

Cependant, la figure V.3 montre l'évolution des fréquences non dimensionnelles en fonction de l'amortissement, pour différentes valeurs du rapport $a/h$ du nouveau modèle. Il est à noter que pour $C_d > 54$, les vibrations des plaques minces s'atténuent, pour un rapport $a/h > 10$ par contre, pour les plaques épaisses, avec un rapport $a/h < 10$, les vibrations sont égales à zéro pour $C_d < 42$.

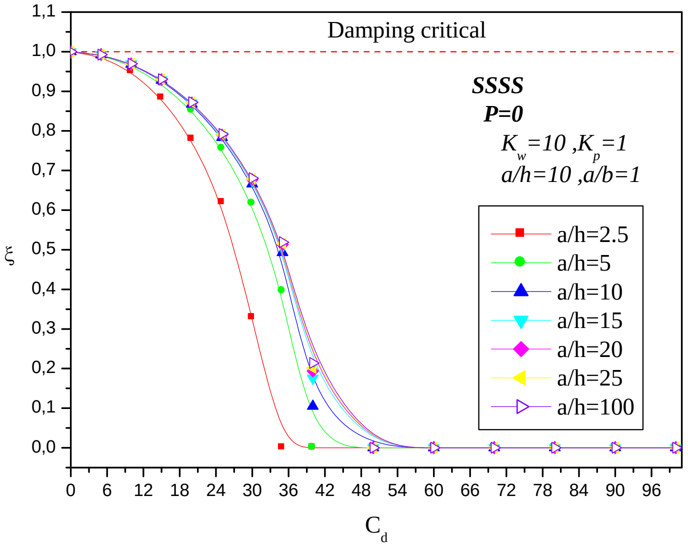
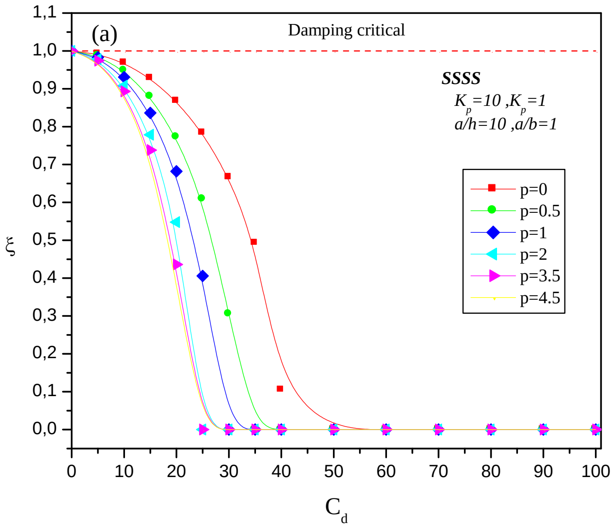
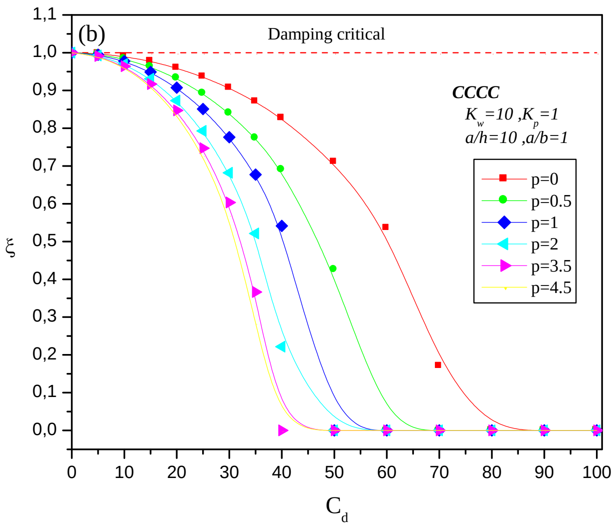



***Figure V.3 :*** *Effet du coefficient d'amortissement $C_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes valeurs géométrique $a/h$*

Les figures V.4a à V.4f illustrent la variation du coefficient d'amortissement en fonction de l'amortissement, pour différentes valeurs de $p$ et sous diverses conditions aux limites. De plus, on peut noter que pour un coefficient d'amortissement $C_d = 0$ ; le rapport de fréquence atteint la valeur maximale de 1, quelle que soit la fraction volumique $p$. Pour une plaque en céramique isotrope rigide ($p = 0$), la valeur de $\xi$ est toujours supérieure aux valeurs de $p$; ceci est valable pour toutes les conditions aux limites. On constate également que les vibrations des plaques ont tendance à se rapprocher de zéro car lorsque les valeurs de $p$**.** Décroissance celles de $C_d$ deviennent remarquablement importantes.



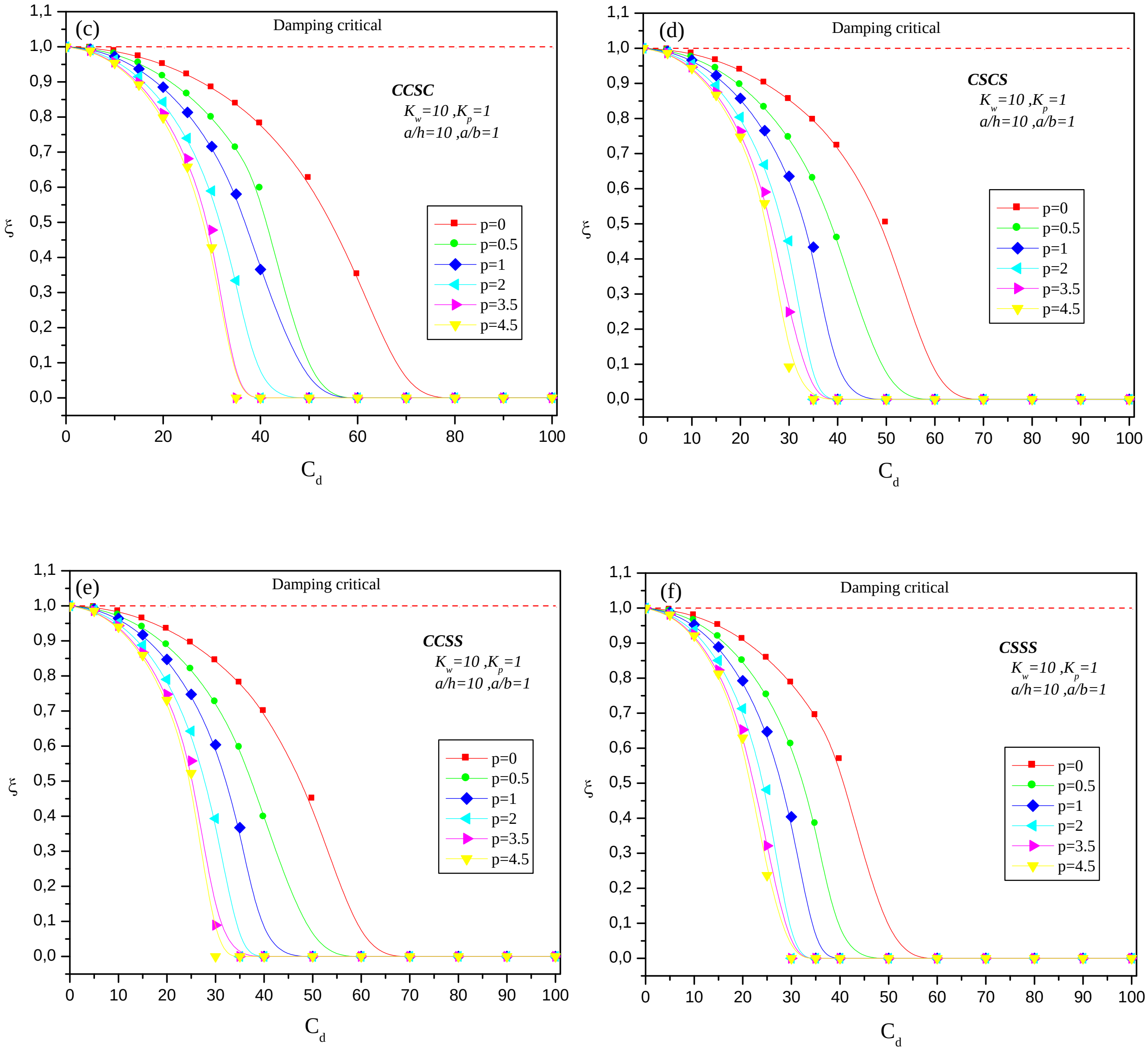



***Figure V.4 :*** *Effet du coefficient d'amortissement $C_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance du FGM*

De même, les figures V.5.a à V.5.d représentent la variation du coefficient d'amortissement $C_d$ en fonction de $\xi$ pour différentes valeurs de $p$ et sous diverses valeurs de rapport $a/h$ pour une plaque simplement supportée. Les mêmes remarques faites précédemment peuvent être répétées pour ce cas.

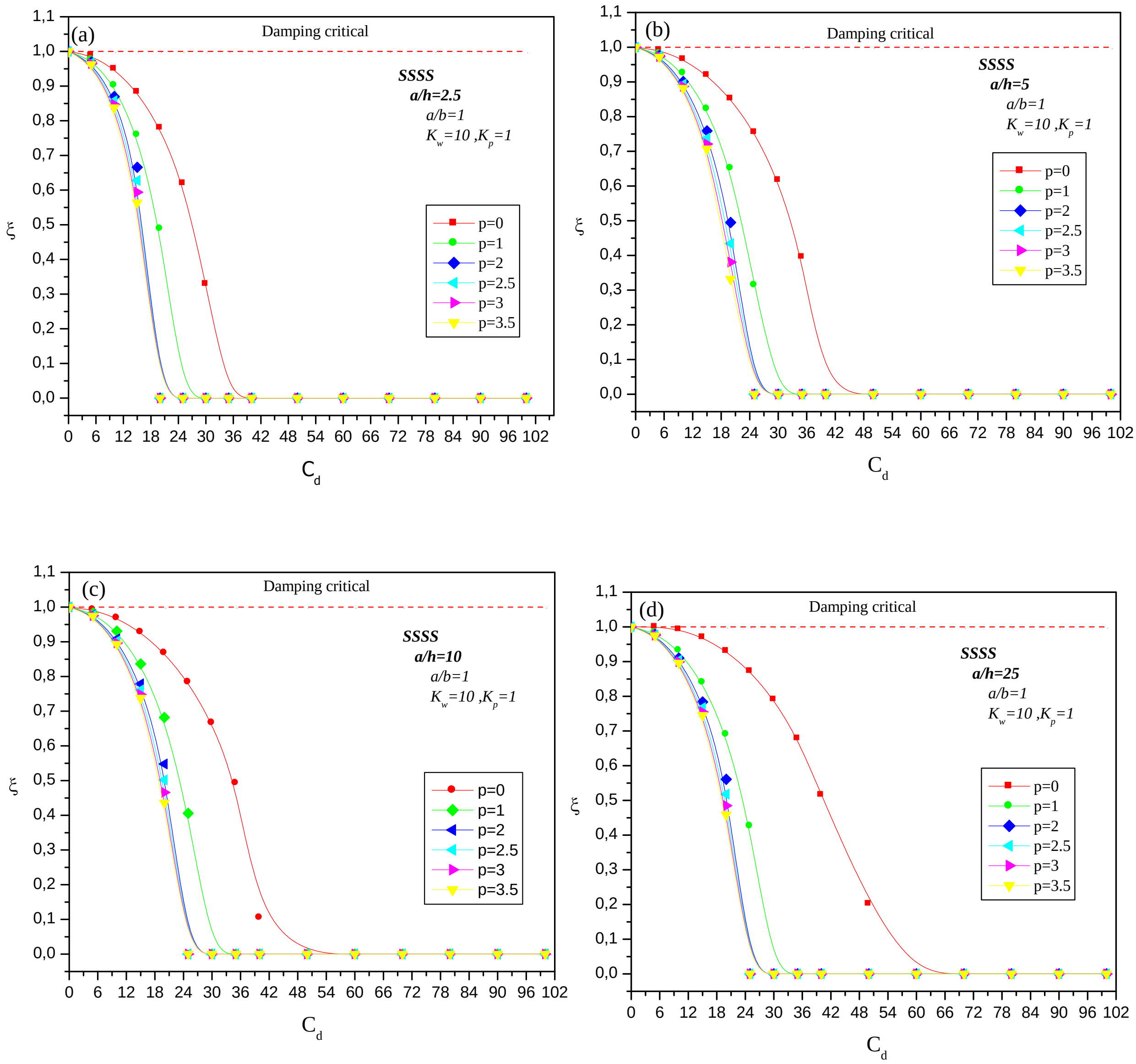



***Figure V.5:*** *Effet du coefficient d'amortissement $C_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance $p$ et de rapport géométrique $a/h$*

De même, les figures V.6.a et V.6.b illustrent la variation de la fréquence non dimensionnelle $\xi$ en présentant l'effet de la variation du rapport $a/h$, en fonction de différentes valeurs du rapport $a/h$, pour des valeurs de $C_d$ égales à 10 et 20 dans le cas d'une plaque en FGM simplement appuyée (SSSS) pour $p = 2$.

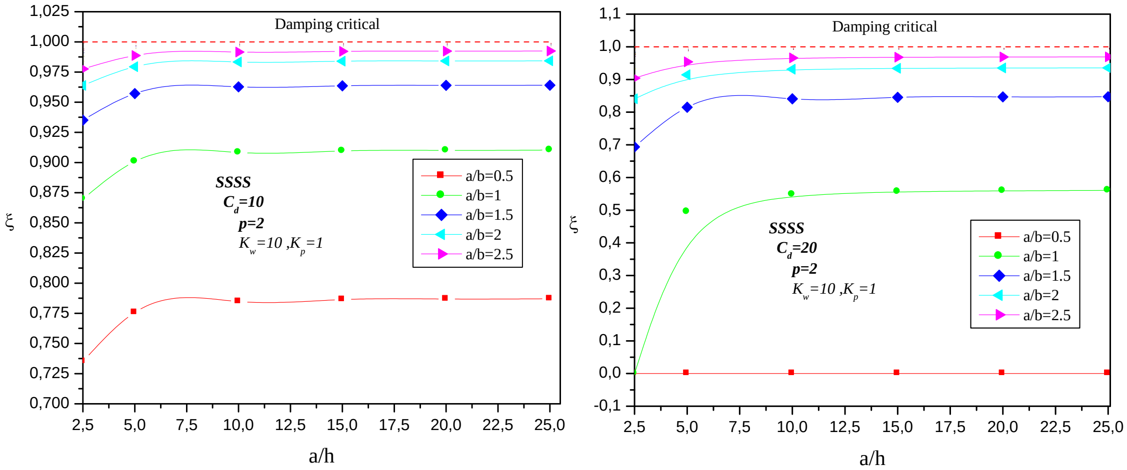



***Figure V.6 :*** *Effet du rapport géométrique $a/h$ de la plaque sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes valeurs de $a/b$*

Une diminution significative est notée pour les fréquences de vibration non dimensionnelles des plaques épaisses ayant un rapport $a/h < 10$; ceci peut être attribué à l'influence de la déformation transversale. Il est à noter que lorsque le rapport $a/h$est supérieur à 10, la valeur de $\xi$ reste constante.

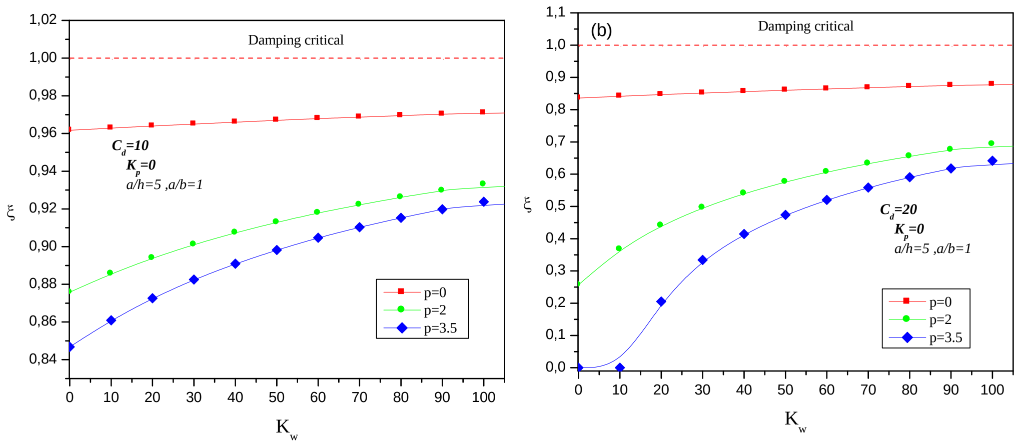



***Figure V.7 :*** *Effet du paramètre de Winkler $K_w$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance $p$ pour une plaque en FGM (SSSS)*

D'autre part, la figure V.7 illustre la variation de fréquences non dimensionnelles $\xi$ en fonction du paramètre de Winkler $K_w$ , pour différentes valeurs de $p$ et $C_d$. On peut facilement remarquer que la fréquence $\xi$ augmente proportionnellement avec $K_w$; cependant, il est inversement proportionnel avec $p$.

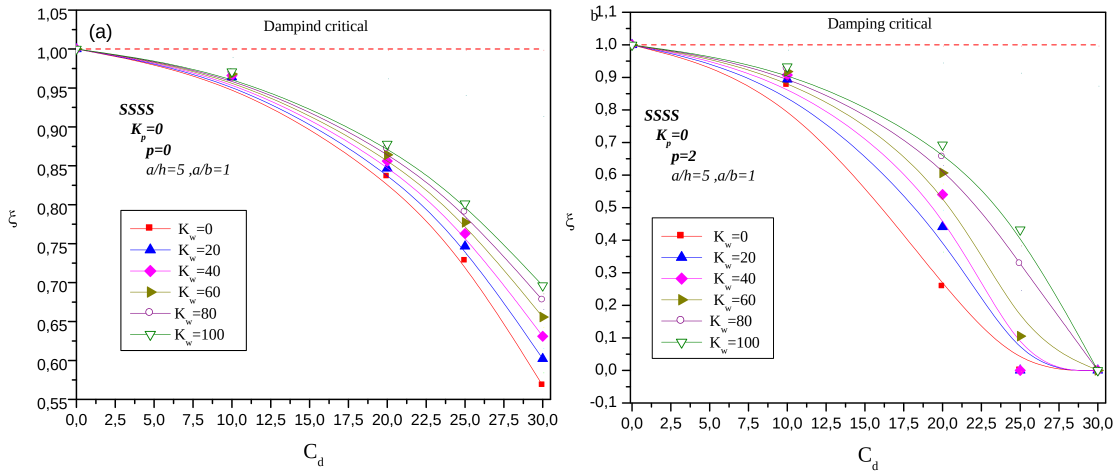



***Figure V.8 :*** *Effet du coefficient d'amortissement $C_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes valeurs du Winkler $K_w$ pour plaque en FGM (SSSS)*

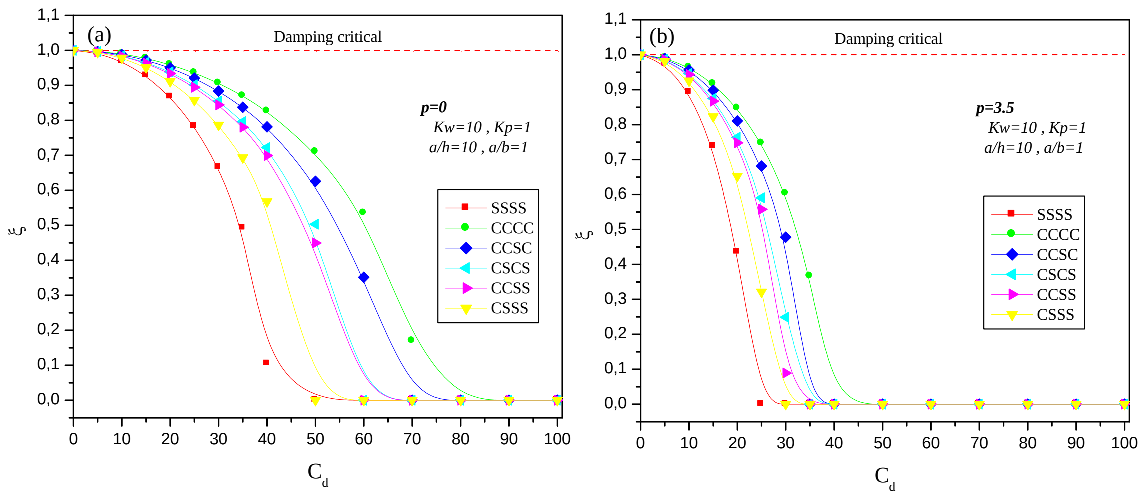



***Figure IV.9 :*** *Effet du coefficient d'amortissement $C_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ pour différentes conditions aux limites*

Par ailleurs, la figure V.8 représente l'évolution des fréquences non dimensionnelles $\xi$ en fonction de $C_d$ pour une plaque simplement appuyée (SSSS), pour des valeurs de $p$ comprises dans l'intervalle *[0, 2]* et pour différentes valeurs de $K_w$. Notez que lorsque $C_d$ augmente, $\xi$ diminuent. L'augmentation du paramètre de rigidité de la fondation $K_w$ fait augmenter la fréquence $\omega^*$.

De plus, les figures V.9.a et V.9.b représentent la variation du rapport d'amortissement $\xi$ de la plaque considérée par rapport au coefficient d'amortissement $C_d$ dans diverses conditions aux limites. On peut clairement voir que le rapport de fréquence est respectivement maximum et minimum pour les plaques carrées (CCCC) et (SSSS).

Ceci est probablement dû au fait qu'une plaque simplement appuyée sur le contour est plus souple, compte tenu des conditions d'appui. Notez que le comportement des plaques isotropes est similaire à celui des plaques en FGM. Ceci se matérialise par le fait que les fréquences non dimensionnelles $\xi$ deviennent significatives lorsque les supports sont plus rigides (plaque CCCC).De plus, $\xi$ se rapproche de zéro pour des valeurs $C_d$ comprises entre 80 et 90 et $p = 0$;$\xi$ est également nulle pour des valeurs $C_d$ comprises entre 50 et 60 pour une plaque en FGM avec $p = 3.5$.

## *IV.10 Conclusion :*

Comme conclusion, on peut dire que le but de notre travail qui est le traitement de la réponse dynamique des plaques en FGM reposant sur des fondations élastiques à trois paramètres est atteint.

En effet, la plaque considérée est intégrée dans un support caractérisé par trois paramètres. Ce milieu peut être modélisé par un ressort ayant une rigidité longitudinale de Winkler, une rigidité en rotation de Pasternak et un amortisseur.

Un nouveau modèle de gauchissement $\psi(z)$ est utilisé pour analyser des plaques en FGM reposant sur des fondations viscoélastiques, tout en prenant en compte la théorie des plaques raffinée (RPT).

Les équations régissant ont été obtenues par le principe de Hamilton. De plus, les effets des propriétés mécaniques des plaques en FGM sur leurs vibrations libres, ainsi que les différentes conditions aux limites et paramètres de rigidité de la fondation élastique ont tous été examinés et discutés.

Les résultats obtenus ont été comparés à ceux rapportés par d'autres chercheurs, notamment la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (TSDT), les théories de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur par Reddy et Touratier(SSDT) et plusieurs autres théories. Il est à noter que beaucoup d'entre eux ont été reformulés en utilisant les relations constitutives différentielles de la théorie des plaques raffinée.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans cette thèse est une tentative de développer une nouvelle théorie des plaques en FGM à deux variables. La plaque est soumise à des vibrations libres et repose sur des fondations viscoélastiques de type Winkler – Pasternak, avec un nouveau modèle de distribution de fonction de forme des déformations transversales. Diverses théories des plaques ont été développées jusqu'à présent, y compris :

- la théorie classique des plaques (CPT);
- la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) ;
- la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (TSDT) ;
- les théories de la déformation par cisaillement de Reddy et Touratier ;
- la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDT)

Plusieurs travaux ont été reformulés en utilisant les relations constitutives différentielles de la théorie raffinée des plaques. L'analyse de la fréquence des vibrations a été réalisée.

De plus, les effets du rapport longueur-épaisseur ont été étudiés et la fondation viscoélastique à trois paramètres a été utilisée et évaluée sur les vibrations libres des plaques de matériau à gradation fonctionnelle.

Les résultats obtenus indiquent que les fréquences naturelles des plaques augmentent au fur et à mesure que les paramètres de fondation de Winkler et Pasternak augmentent.

Ceci est certainement dû à la rigidité croissante de la plaque de matériau à gradation fonctionnelle.

Cependant, l'augmentation de la valeur du coefficient d'amortissement visqueux entraîne une baisse des fréquences de vibration non dimensionnelles, pour toutes les théories de déformation utilisées, en particulier avec CPT, FSDT, TSDT et SSDT.

Les effets de l'indice de puissance du matériau à gradation fonctionnelle, de la rigidité et de l'amortissement de la fondation, ainsi que ceux du rapport d'aspect sur la fréquence ont été examinés.

Les résultats obtenus ont révélé que la fréquence était significativement influencée par l'amortissement structurel de la fondation viscoélastique et l'indice de puissance du matériau fonctionnellement gradué.

De plus, le paramètre viscoélastique de la fondation réduit les déplacements de la structure lors de sa libre vibration.

En conclusion, on peut dire que le modèle proposé avec la nouvelle fonction de forme de cisaillement est raisonnablement précis et simple à utiliser pour étudier le comportement de vibration libre de plaques de matériau fonctionnellement gradué reposant sur des fondations viscoélastiques.

Afin de gérer le comportement d'une plaque soumise à des vibrations libres et reposant sur des fondations viscoélastiques de type Winkler – Pasternak, nous envisageons les perspectives suivantes pour la suite de notre recherche :

- Trouver une solution analytique qui présente le modèle de distribution des déformations transversales par l’utilisation d’autres méthodes (méthode des éléments finis …) ;
- Effectuer une étude complémentaire avec changement de variable ;
- Etaler la présente étude pour des plaques épaisses ; pour des poutres courtes et élancés sous différents types de chargement.

# RÉFÉRENCES
# BIBLIOGRAPHIE

# BIBLIOGRAPHIE


**[1]** ABDELHAK Zohra,these  Analyse et modélisation du comportement des plaques en matériaux à gradient de propriétés type FGM sous chargement thermomécanique, Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Abbes.2016.

**[2]** Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 p. 31–38.

**[3]** N. Reddy, Analysis of functionally graded plates, Int. J. Numer. Methods Eng. 47(1–3)(2000) 663–684.

**[4]** E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra and M. Soave, Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells, Compos. B Eng. 42(2) (2011) 123–133.

**[5]** M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, C. M. C. Roque , M. Cinefra , R. M. N. Jorge and C. M. M. Soares , Bending of FGM plates by a sinusoidal plate formulation and collocation with radial basis functions, Mech. Res. Commun. 38(5) (2011) 368–371.

**[6]** M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, C. M. C. Roque, M. Cinefra, R. M. N. Jorge and C. M. M. Soares, A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, Compos. B Eng. 43(2) (2012)711–725.

**[7]** J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque and O. Polit, Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations, Compos. B Eng. 42(5) (2011) 1276–1284.

**[8]** J. L. Mantari and C. GuedesSoares, Five-unknowns generalized hybrid-type quasi-3D HSDT for advanced composite plates, Appl. Math. Modelling 39(18) (2015) 5598–5615.

**[9]** A. M. Zenkour, Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate, Arch. Appl. Mech. 77(4) (2007) 197–214.

**[10]** J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, J. Appl. Mech. 51(4) (1984) 745–752.

**[11]** M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sci. 29(8) (1991) 901–916.

**[12]** M. Karama, K. S. Afaq and S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Struct. 40(6) (2003) 1525–1546.

**[13]** J. L. Mantari, A. S. Oktem, C. Guedes and Soares, A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates, Int. J. Solids Struct. 49(1) (2012) 43–53.

**[14]** B. Mechab, I. Mechab and S. Benaissa, Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermomechanical loading, Compos. B 43(3) (2012) 1453–1458.

**[15]** N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab and E. A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, Int. J. Mech. Sci. 53(4) (2011) 237–247.

**[16]** K. Nedri, N. El Meiche and A. Tounsi, Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory, Mech. Compos. Mater. 49(6) (2014) 629–640.

**[17]** R. P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, AIAA J. 40(1) (2002) 137–146.

**[18]** R. P. Shimpi and H. G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, Int. J. Solids Struct. 43(22–23) (2006) 6783–6799.

**[19]** R. P. Shimpi and H. G. Patel, Free vibrations of plate using two variable refined plate theory, J. Sound Vibr. 296(4–5) (2006) 979–999.

**[20]** S.-E. Kim, H.-T. Thai and J. H. Lee, A two variable refined plate theory for laminated composite plates, Compos. Struct. 89(2) (2009) 197–205.

**[21]** R. Moradi-destjerdi, Gh. Payganeh and H. Malek-Mohammadi, Free vibration analyses of functionally graded CNT reinforced nanocomposite sandwich plates resting on elastic foundation, J. Solid Mech. 7(2) (2015) 158–172.

**[22]** I.Mechab, N. ElMeiche and F. Bernard, Free vibration analysis of higher-order shear elasticity nanocomposite beams with consideration of nonlocal elasticity and poisson effect, J. Nanomech. Micromech. 6(3) (2016) 04016006.

**[23]** J. A. Abdalla and A. M. Ibrahim, Development of a discrete Reissner-Mindlin element on Winkler foundation, Finite Elem. Anal. Des. 42(8–9) (2006) 740–748.

**[24]** M. Zenkour and A. F. Radwan, On the simple and mixed first-order theories for functionally graded plates resting on elastic foundations, Meccanica 48(6) (2013) 1501–1516.

**[25]** J. L. Mantari, E. V. Granados and C. GuedesSoares, Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation, Compos. B Eng. 66 (2014) 407–419.

**[26]** Z. Y. Huang, C. F. Lu and W. Q. Chen, Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations, Compos. Struct. 85(2) (2008) 95–104.

**[27]** S. Parida and S. C. Mohanty, Free vibration and buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundation using higher order theory, Int. J. Struct. Stability Dyn. 18(4) (2018) 21.

**[28]** F. Lu, C. W. Lim and W. Q. Chen, Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations, Mech. Adv. Mater. Struct. 16(8) (2009) 576–584.

**[29]** K. Ozgan and A. T. Daloglu, Free vibration analysis of thick plates resting on winkler elastic foundation, Chall. J. Struct. Mech. 1(2) (2015) 78–83.

**[30]** P. Malekzadeh, Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, Compos. Struct. 89(3) (2009) 367–373.

**[31]** Y.-H. Chen and J.-T. Sheu, Beam on viscoelastic foundation and layered beam, J. Eng. Mech. 121(2) (1995) 340–344.

**[32]** F. Ebrahimi and M. R. Barati, Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory, Compos. Struct. 159 (2017) 433–444.

**[33]** A. M Zenkour, Vibration analysis of generalized thermoelastic microbeams resting on visco-Pasternak's foundations, Adv. Aircraft Spacecraft Sci. 4(3) (2017) 269–280.

**[34]** H. Zamani, M. Aghdam and M. Sadighi, Free vibration analysis of thick viscoelastic composite plates on visco-Pasternak foundation using higher-order theory, Compos. Struct. 182 (2017) 25–35.

**[35]** M. S. Kiasat, H. A. Zamani and M. M. Aghdam, On the transient response of viscoelastic beams and plates on viscoelastic medium, Int. J. Mech. Sci. 83 (2014) 133–145

**[36]** Y. Fan and H. Wang, Nonlinear low-velocity impact analysis of matrix cracked hybrid laminated plates containing CNTRC layers resting on visco-Pasternak foundation, Compos. B 117 (2017) 9–19.

**[37]** Y. Fan, Y. Xiang, H.-S. Shen and H. Wang, Low-velocity impact response of FG-GRC laminated beams resting on visco-elastic foundations, Int. J. Mech. Sci. 141 (2018) 117–126.

**[38]** Y. Fan, Y. Xiang, H.-S. Shen and D. Hui, Nonlinear low-velocity impact response of FGGRC laminated plates resting on visco-elastic foundations, Compos. B 144 (2018) 184–194.

**[39]** Y. Fan, Y. Xiang and H.-S. Shen, Nonlinear forced vibration of FG-GRC laminated plates resting on visco-Pasternak foundations. Compos. Struct. 209 (2019) 443–452.

**[40]** Hamza GUENFOUD, thèse, Modélisation par éléments finis spéciaux des structures en matériaux à gradient fonctionnel, Université 8 Mai 1945 Guelma. 2018/2019.

**[41]** KADDOURI Djamel Eddine, mémoire de magister, Analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement non linéaire d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel, Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen. 2013 -2014.

**[42]** Hassina ZIOU, Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionne, Université Mohamed Khider – Biskra, 2017.

**[43]** ABDELHAK Zohra, thèse Analyse et modélisation du comportement des plaques en matériaux à gradient de propriétés type FGM sous chargement thermomécanique, Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Abbes.2016.

**[44]** Yin, H. M., Sun, L. Z., & Paulino, G. H. (2004). Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions. Acta Materialia, 52(12), 3535-3543.

**[45]** Benferhat Rabia, thèse, Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés, Université Hassiba Ben Bouali – Chlef. 2017.

**[46]** M. Chehel Amirani, S. M. R. Khalili and N. Nemati, Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method, Compos. Struct. 90(3) (2009) 373–379.

**[47]** R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, J. Mech. Phys. Solids 13(4) (1965) 213–222.

**[48]** S. Chi and Y. Chung, Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load, part I: Analysis, Int. J. Solids Struct. 43(13) (2006) 3657–3674.

**[49]** T. Mori and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with mis¯tting inclusions, Acta Metall. 21(5) (1973) 571–574.

**[50]** Jin, Z. H, Batra, R. C. (1996), Journal of Thermal Stresses 19, 317–339.

**[51]** H. Ziou, H. Guenfoud, M. Guenfoud (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering; 7(3), 239-261.

**[52]** Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243.

**[53]** Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614.

**[54]** E. Winkler, "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit," Prag, Dominicus, 1867.

**[55]** A.D. KERR, "Elastic and Viscoelastic Foundation Models," New York University, Journal of Applied Mechanics,1964 by ASME, pp 492-498.

**[56]** M. I. Gorbunov-Pnsadov, "Beams and Plates on an Elastic Base," Stroizdat, Moscow, USSR, 1949.

**[57]** A. Foppl, Vorlesungen uber Technische Mechanik, B. B. Teubner, Leipzig, Germany, vol. 3, fourth edition, 1909, p. 228.

**[58]** M. M. Filonenko-Borodich, "Some Approximate Theories of the Elastic Foundation" (in Russian), Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mekhanica, No. 46, 1940, pp. 3-18.

**[59]** F. Schiel, "Der Schwimmende Balken," Zeitsehrift fur angewandte Mathematik utul Mechanik, vol. 22, 1942, pp. 255-262.

**[60]** M. Hetényi, Beams on Elastic Foundations, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1946.

**[61]** M. Hetényi, "A General Solution for the Bending of Beams on an Elastic Foundation of Arbitrary Continuity," Journal of Applied Physics, vol. 21, 1950, pp. 55-58.

**[62]** P. L. Pasternak, "On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants" (in Russian), Gosudarstvenrwe Izdatelslvo Literaturi po Stroitclstvu i Arkhitekture, Moscow, USSR, 1954.

**[63]** P. L. Pasternak, "Theory of Beams on a Continuous Elastically Rotating and Elastically Settling Foundation" (in Russian), Nauehno- Isledovatel'skaya Konferencia MISI, 1937 (Ref. in [7]).

**[64]** B. S. Kovalskii, "Stress Analysis of Heat Exchange Apparatus" (in Russian), Inzhinierny Sbornik, Academy of Sciences USSR, vol. 6, 1950.

**[65]** S. N. Sokolov, "Circular Plate on a Generalized Foundation" (in Russian), Inzhinierny Sbornik, Academy of Sciences USSR, vol. 11, 1952.

**[66]** Ju. V. Jakovlev, "On the Analysis of Heat Exchange Apparatus" (in Russian), Trudi Kharkovskogo Aviatsionnogo Instituta, No. 15, 1954.

**[67]** W. Urbanowski, "Some Cases of Circular Plates Interconnected with an Elastic Base of Generalized Properties" (in Polish), Zeszyly ATaukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, No. 3 PWN, Warsaw, Poland, 1956.

**[68]** B. K. Venckovskii, "Bending of Annular and Circular Plates on a Generalized Foundation under the Combined Action of Lateral and Radial Forces" (in Russian), Raschety na Prochnost, Collection of Papers, vol. 3, Mashgiz, Moscow, USSR, 195S.

**[69]** G. D. Galletly, "Circular Plates on a Generalized Elastic Foundation , " JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, vol . 26, TRANS. ASME, vol. 81, Series E, 1959, p. 297.

**[70]** P. Csonka, "Buckling of a Column Elastically Restrained Along Its Entire Length" (in Hungarian), Magyar Tudomanyos Akademia Muszaki Tudomdnyok Osztalyanak Koztemenyc, 29, 1/4, 1961.

**[71]** V. Z. Vlasov, "Structural Mechanics of Thin Walled Tliree- Dimensional Systems" (in Russian), Stroizdat, 1949.

**[72]** V. Z. Vlasov and N. N. Leontiev, "Beams, Plates and Shells on an Elastic Foundation" (in Russian), Fizmatgiz, Moscow, USSR, 1960.

**[73]** Reissner. E , " A Note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation," JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, vol . 25, TRANS. A S M E , vol . 8 0 , 1 9 5 8 , p p . 1 4 4 - 1 4 5.

**[74]** Discussion by J. Ratzersdorfer, 2. Internationale Tagung ftlr Brilckenbau und Hochbau, Wien, Austria, 1929, pp. 316-31S.

**[75]** J. Ratzersdorfer, Die Knickfestigkeit von Stiiben und Stabwerken. Springer, Wien, Austria, 1936, p. 161.

**[76]** K. Wieghardt, "Uber den Balken auf nachgiebiger LTnterlage," Zeitsehrift fur angcivandte Mathematik und Mechanik, vol. 2, 1922, pp. 165-184.

**[77]** Y.-Y. Yu, "On the Generalized ber, bei, ker and kei Functions with Application to Plate Problems," Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 10, 1957, pp. 254-256.

**[78]** P. M. Naghdi and J. C. Rowley, "On the Bending of Axially Symmetric Plates on Elastic Foundations," Proceedings of the First Midwestern Conference on Solid Mechanics, University of Illinois, 1953, pp. 119-123.

**[79]** K. O. Friedrichs, "Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics," Bulletin of The American Mathematical Society, vol. 61, 1955, pp. 485-504.

**[80]** E. Pfanz, "Untersuchungen Uber die Druckverteilung unter belasteten Balken auf nachgiebiger Unterlage," Ingcnieur-Archiv, 1941.

**[81]** P. Neményi, "Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage," Zeitsehrift fur angcivandte Mathematik und Mechanik, vol. 11, 1931, p. 461.

**[82]** S.Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y., second edition, 1959.

**[83]** K. S. Pister and M. L. Williams, "Bending of Plates on a Viscoelastic Foundation," Proc. ASCE, vol. 86, No. EM5, 1960, pp. 31-44.

**[84]** D. Kerr, "Viscoelastic Winkler Foundation with Shear Interactions," Proc. ASCE, vol. 87, No. EM3, 1961, pp. 13-30.

**[85]** D. Kerr, "On Continuity of Foundation Models and Related Problems," U. S. Army CRREL Research Report 109.

**[86]** BOULEFRAKH LAID, "Etude Du Comportement Mécanique Des Structures Posées Sur Des Fondations Viscoélastique," Université Djillali Liabes -sidi bel abbés,2020/2021.

**[87]** Zenkour A.M., "Buckling of a single-layered graphene sheet embedded in Visco Pasternak's medium via nonlocal first-order theory", Advances in Nano Research, 4(4),(2016) , 309 326.

**[88]** DERBANE Said. « Modélisations des plaques de formes géométriques irrégulières par la méthode des éléments finis». 2012 Université Mohamed Khider – Biskra.

**[89]** Jean-Luis Batoz, «Modélisation des structures par éléments finis», volume 2, Poutres et Plaques.

**[90]** K.J. BATHE, D. CHAPELLE, and P.S. Lee « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat». J. Numer. Methods Engrg, 2003.

**[91]** J. PITKÀRANTA,Y. LEINO, O. OVASKAINEN, and J. PIILA. « Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells». Comput. Methods Appt. Mech. Engrg, 1995.

**[92]** J. SANCHEZ-HUBERT and E. SANCHEZ-PALENCIA. «Coques ElastiquesMinces-Propriétés Asymptotiques». Masson, Paris, 1997.

**[93]** C. BAIOCCHI and C. LOVADINA.«A shell classification by interpolation». Math.Models Methods Appt. Sci., 2002.

**[94]** G. KIRCHHOFF. « Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. » In : Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 1850.40 (jan. 1850), p. 51–88. ISSN : 0075-4102, 1435-5345.

**[95]** G KIRCHHOFF. « Uber die Schwingungen einer kreisformigen elastischen Scheibe ». In: Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff Annalen) (1850),p. 258–264.

**[96]** Love A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, N0 17 p. 491–549.

**[97]** Alexis Castel. Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissant. Autre. Universite de Bourgogne, 2013. Français. NNT : 2013DIJOS047.

**[98]** E. CARRERA. « Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells ». In : Archives of Computational Methods in Engineering 9.2 (2002), p. 87–140. ISSN : 1134-3060.

**[99]** Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. of Appl. Mech., 1945, Vol. 12 p. A69–A77

**[100]** E CARRERA. « On the use of the Murakami’s zig-zag function in the modeling of layered plates and shells ». In : Computers & Structures 82.7–8 (mar. 2004), p. 541–554. ISSN : 0045-7949.

**[101]** E. CARRERA. « Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells ». In : Applied Mechanics Reviews 56.3 (2003), p. 287–308.

**[102]** S. G LEKHNITSKII. Anisotropic plates. English. New York : Gordon et Breach, 1968. ISBN : 0677206704 9780677206707.

**[103]** Sergei Aleksandrovich AMBARTSUMIAN. Fragments of the Theory of Anisotropic Shells. en. World Scientific, 1991. ISBN : 9789810200251.

**[104]** J.M. WHITNEY et C.T. SUN. « A higher order theory for extensional motion of laminated composites ». In : Journal of Sound and Vibration 30.1 (1973), p. 85–97. ISSN : 0022-460X.

**[105]** H. MURAKAMI. « Laminated Composite Plate Theory With Improved In-Plane Responses ». In : Journal of Applied Mechanics 53 (1986), p. 661.

**[106]** Luciano DEMASI. « Refined multilayered plate elements based on Murakami zig–zag functions ». In : Composite Structures 70.3 (sept. 2005), p. 308–316. ISSN : 0263-8223.

**[107]** S. BRISCHETTO, E. CARRERA et L. DEMASI. « Improved bending analysis of sandwich plates using a Zig-Zag function ». In : Composite Structures 89.3 (juil. 2009), p. 408–415. ISSN : 0263-8223.

**[108]** P.F. PAI. « A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates ». In : International Journal of Solids and Structures 32.16 (1995), p. 2295–2313. ISSN : 0020-7683.

**[109]** J.KIM et M CHO. « Enhanced modeling of laminated and sandwich plates via strain energy transformation ». In : Composites Science and Technology 66.11-12 (sept. 2006), p. 1575–1587. ISSN : 02663538.

**[110]** Luc Jaouen, Vibrations de flexion des plaques, Université de Sherbrooke, 20 mars 2002;

**[111]** Rayleigh L. Theory of sound, Vol I et Vol. II. Dover Pub. 1945.

**[112]** Timoshenko S. On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6) p. 744–746.

**[113]** Timoshenko S. On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6) p. 125–131.

**[114]** Uflyand Y. S. The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech., 1948, Vol. 12 p. 287–300.

**[115]** Cohen, G.A., (1978) "Transverse shear stiffness of laminated anisotropie shells". CMAME, Vol. 13, pp 205-220.

**[116]** Mindlin R. D., (1966) Schacknow, A., Deresiewicz, H., "Plexural vibrations of rectangular plates, JAM, Vol. 23, N° 78, pp 431-436.

**[117]** Owen, D.R.J., Figueiras, J.A., (1983) "Anisotropie elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells". Int. J. Numer. Methods Eng, Vol. 19, pp 541-566.

**[118]** Batoz, J.L., Dhatt, G., (1990) "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 2, Plaques et poutres, Hermès.

**[119]** KADDAH Fouad, Etude numérique d'éléments de plaques et coques minces et épaisses pour des applications en génie civil, 1995, Université des Sciences et Technologies de Lille;

**[120]** J. N. Reddy .Energy and variational methods in applied mechanics. John Willey and Sons 1984.

**[121]** Ross R., Ungar E., Kerwin E. Damping of plate flexural vibrations by means of iscoelastic laminate. Structural Damping, Proceedings of ASME, New York, 1959.

**[122]** Dauchez N. Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis. Thèse de Doctorat Université du Maine/Université de Sherbrooke Avril 1999.

**[123]** Dauchez N., Sahraoui S., Attala N. Dissipation mechanisms in a porous layer bonded onto a plate. J. of Sound and Vibration, 2003, Vol. 265 p. 437–449.

**[124]** Mounia Khetib, Hichem Abbad, Nourredine Elmeiche "Effect of the Viscoelastic Foundations on the FreeVibration of Functionally Graded Plates" International Journal of Structural Stability and Dynamics (2019) 1950136 (25 pages);

**[125]** K. P. Soldatos and T. Timarci, A uni¯ed formulation of laminated composite, shear deformable, ¯ve-degrees-of-freedom cylindrical shell theories, Compos. Struct. 25(1–4) (1993) 165–171.

**[126]** M. Zenkour, Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermomechanical loading, Compos. Struct. 65(3–4) (2004) 367–379.

**[127]** H. Akhavan, Sh. Hosseini Hashemi, H. R. D. Taher, A. Alibeigloo and Sh. Vahabi, Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation, Part II: Frequency analysis, Comput. Mater. Sci. 44(3) (2009) 951-961.

**[128]** J. N. REDDY. « A Review of Refined Theories of Laminated Composite Plates ». In: The Shock and Vibration Digest 22 (7 1990), p. 3–17.

# RESUME

Le présent travail, consiste à étudier les vibrations libres des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM) reposant sur des fondations viscoélastiques de type Winkler-Pasternak en utilisant la théorie des plaques raffinée à deux variables, le champ de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque est présenté avec une nouvelle fonction de forme de déformation en cisaillement. Les équations d'équilibre sont obtenues par le principe d'Hamilton. Une étude analytique et numérique est examinée en détail avec différentes conditions aux limites pour résoudre le problème de la vibration avec amortissement de la fondation, en tenant compte de divers paramètres géométriques et mécaniques, les résultats obtenus avec la nouvelle fonction de forme de cisaillement sont en bon accord avec d'autres résultats trouvés dans la littérature, la fonction de forme proposée donne des résultats fiables et peut facilement être utilisée pour résoudre les problèmes de vibration libre des plaques en FGM.

**Mot clés :** Vibrations libres, FGM, Fondations viscoélastiques, Winkler-Pasternak, Théorie des plaques raffinées, Cisaillement transversale, Principe d'Hamilton, Amortissement de la fondation

.

*KHETIB MOUNIA*

*FACULTE DE TECHNOLOGIE*

*UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES*