REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES -SIDI BEL ABBES-

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

LABORATOIRE DES MATERIAUX & HYDROLOGIE

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **structures et matériaux**

Présentée par: **BOULEFRAKH LAID**

Sujet de thèse

Etude Du Comportement Mécanique Des Structures Posées Sur Des Fondations Viscoélastique

Soutenu le …………………. devant le Jury composé de :

Mr. **BOURADA. Mohamed**	M.C.A	UDL-SBA	**Président**
Mr. **HEBALI. Habib**	M.C.A	U. MASCARA	**Directeur de thèse**
Mr. **TOUNSI. Abdelouahed**	Professeur	UDL-SBA	**Co-directeur de thèse**
Mr. **BOUAZZA. Fahsi**	Professeur	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. **SAADOUNE. Mohamed**	M.C.A	U.MASCARA	**Examinateur**
Mr. **YOUZERA. Hadj**	M.C.A	U.MASCARA	**Examinateur**

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie cette thèse :

*Á la mémoire de ma grande mère **Baya**.*

Á la mémoire de ma sœur.

Á ma mère, mon père, mes frères.

Á ma femme.

*À mes filles, **Djamila** et **Douaa.***

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements après mon Dieu à mon directeur de thèse, Monsieur le docteur ***HEBALI Habib****, pour la confiance et l'attention qu'il ma offertes tout au long de ce travail, son sens de la motivation et son aide pour finir ce travail.*

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur ***TOUNSI Abdelouahed,*** *professeur à l'université DJILLALI Liabes de Sidi Bel Abbes, de m'avoir confié un sujet prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.*

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur ***BOURADA Mohamed,*** *maitre de conférences à l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, qui m'a accueilli dans son laboratoire des matériaux et hydrologie.*

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux membres de jury :

- Professeur ***BOUAZZA Fahsi*** *de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes.*

- Docteur ***SAADOUNE Mohamed*** *de l'Université de Mascara.*

- Docteur ***YOUZERA HADJ*** *de l'Université de Mascara.*

Je voudrais adresser mes francs remerciements envers mes collègues du laboratoire LMH.

Sommaire

Liste des figures

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Fonctionnellement Gradués

Chapitre II : Théorie Des Plaques

Chapitre III : Formulation Mathématique De La Théorie Des Plaques Utilisée

Chapitre IV : Résultats Numériques Et Discussion

Liste des tableaux

Chapitre IV : Résultats Numériques Et Discussion

Liste Des Notations

$E(z)$	Module d'Young en fonction de « z »
E_m	Module d'Young du métal
E_c	Module d'Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\upsilon(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
υ	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité de la céramique
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement au plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement due à la flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement due au cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
w_{st}	La composante de déplacement due à l'effet d'étirement
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales

τ_{xz} , τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz} , \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
δu , δv , δw	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation de l'énergie potentielle
δK	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, $\delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}$, $\delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x , N_y , N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b , M_y^b , M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s , M_y^s , M_{xy}^s	Moment supplémentaire due au cisaillement transverse
S_{xz}^s , S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i ,j ,l et m	Nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
$A_{ij}^s , B_{ij}^s , D_{ij}^s , H_{ij}^s$	Termes de la matrice de rigidité
(m,n)	*N*ième mode propre
q(x,y)	Charge transversale
(I_i , J_i , K_i)	Inerties de masse
$\{\ \}$	Vecteur colonne
[ ]	Matrice

Résumé

Dans cette recherche, un modèle simple quasi-3D de déformation en cisaillement hyperbolique est utilisé pour la flexion et le comportement dynamique des plaques (FGM) reposant sur des fondations Visco-Pasternak. La caractéristique importante de cette théorie est qu'en plus d'inclure l'effet d'étirement d'épaisseur, elle ne traite que quatre inconnues, moins que ce qui est utilisé dans la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT). La fondation de Visco-Pasternak est prise en compte en ajoutant l'influence de l'amortissement au modèle habituel de fondation qui se caractérise par le module de Winkler linéaire et le module de fondation de Pasternak. Les équations de mouvement pour les plaques FGM épaisses sont obtenues selon le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques pour la flexion et l'analyse dynamique sont déterminées pour des plaques simplement appuyées reposant sur des fondations Visco-Pasternak. Quelques résultats numériques sont présentés pour indiquer les effets d'indice du matériau, du type de fondation élastique et du coefficient d'amortissement de la fondation sur le comportement en flexion et en vibration des plaques FGM rectangulaires.

Mots-clés : Vibration; Flexion; FGM ; Plaque ; fondations Visco-Pasternak; Quasi-3D HSDT.

Abstract

In this research, a simple quasi 3D hyperbolic shear deformation model is employed for bending and dynamic behavior of functionally graded (FGM) plates resting on Visco-Pasternak foundations. The important feature of this theory is that, in addition to including the thickness stretching effect, it only deals with only 4 unknowns, less than what is used in the First Order Shear Deformation (FSDT) theory. The Visco-Pasternak's foundation is taken into account by adding the influence of damping to the usual foundation model which characterized by the linear Winkler's modulus and Pasternak's foundation modulus. The motion equations for thick FGM plates are obtained in the Hamilton principle. Analytical solutions for the bending and dynamic analysis are determined for simply supported plates resting on Visco-Pasternak foundations. Some numerical results are presented to indicate the effects of material index, elastic foundation type, and damping coefficient of the foundation, on the bending and dynamic behavior of rectangular FGM plates.

Keywords: Vibration; Bending; FGM; Plate; Visco-Pasternak foundations; Quasi-3D HSDT.

ملخـــــــص

في هذا البحث قمنا باستعمال نظرية تشوه قص ثلاثية الأبعاد بسيطة من أجل دراسة الثني والإهتزاز الحر للصفائح المركبة من المواد المتدرجة الخاصية مرتكزة على أساسات مرنة - فيسكو باسترناك. الخاصية الأساسية لهذه النظرية هي الأخذ بعين الإعتبار عامل جذب السمك وتعالج أربع مجاهيل فقط أي أن عدد المجاهيل و الدوال بالنسبة للنظرية المقترحة أقل مقارنة مما هو معمول به في نظرية تشوه القص العرضي من الدرجة الأولى (FSDT) . إن الأساسات المرنة - فيسكو باسترناك. تأخذ بعين الاعتبار إضافة الى تأثير المرونة لنموذج الأساس المألوف والمتميز بعامل وينكلر الخطي ,عامل الأساس باسترناك. معادلات الحركة للصفائح السميكة المركبة من المواد المتدرجة الخاصية تستمد من مبدأ آميلتون ومجموعة الحلول لخاصية الثني والتحليل الديناميكي مبينة من أجل صفائح بسيطة الإسناد مرتكزة على أساسات - فيسكو باسترناك. قدمنا بعض النتائج الرقمية من أجل تبيان تأثير معامل المادة ونوع الأساس المرن ومعامل المرونة للأساس على خاصية الثني والاهتزاز الحر للصفائح المركبة من المواد المتدرجة مستطيلة الشكل.

كلمات مفتاحيه: الاهتزاز ؛ ثني ؛ المواد المتدرجة الخاصية ؛ الصفيحة ؛ أساسات فيسكوباسترناك؛ نظرية ثلاثية الأبعاد.

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont un type des composites dont les propriétés varient d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration des contraintes rencontrées dans les composites stratifiés. Un FGM est un mélange de deux phases matérielles, par exemple un métal et une céramique. La cause de l'utilisation croissante des FGM dans diverses industries, comme automobiles, aérospatial, les structures de génie civil et mécanique, est que leurs caractéristiques matérielles peuvent être adaptées à différentes applications. **[**Reddy_2000[01], Qian et al_2005[02], Eltaher et al_2013[03], Akbaş_2015[04], Arefi_2015[05], Pradhan et al_2015[06], Ebrahimi et al_2015[07], Kar et al_2015[08], Daouadji et al_2015[09], Barati et al_2016[10], Avcar_2015 et 2019[11][12], Ahmed et al_2019[13], Hussain et al_2019[14], Karami et al_2019)[15]**]**.

Des plaques reposant sur une fondation élastique peuvent être trouvées dans divers domaines de l'ingénierie structurelle. Le modèle de la fondation élastique le plus simple est le modèle de [Winkler_1867[17]**]**, qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre ressorts, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque. Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak [Pasternak_1954[16]] qui a tenu en compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler. Un autre type de fondations est celui qui considère l'amortissement Viscoélastique [Kerr_1964)[18].

Certains travaux de recherche ont étudié la réponse mécanique de la plaque FGM appuyé sur fondation (Visco ou élastique) Pasternak. [Huang et al_2008[19]**]** ont utilisé une théorie d'élasticité 3D pour examiner les plaques en FGM appuyé sur une fondation élastique. [Malekzadeh_2009[20]**]** a utilisé la théorie d'élasticité 3D pour étudier la réponse dynamique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques. [Amini et al_2009[21]**]** ont étudié le comportement en vibration 3D des plaques FG reposant sur des fondation élastique. [Lü et al_2009[22]**]** ont fourni des solutions exactes pour la réponse dynamique des plaques épaisses FGM reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. Par l'utilisation du modèle de déformation de cisaillement parabolique, [Baferani et al_2011[23]**]** ont mis au point une méthode précise pour la vibration des plaques épaisses FGM reposant sur une fondation élastique. [Fallah et al_2013[24]] ont examiné la réponse en vibration des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant la technique de Kantorovich étendue associée à la méthode de la série de puissance infinie. [Sheikholeslami et al_2013[25]] ont utilisé la HSDT quasi 3D pour étudier le comportement en vibration libre des plaques FG simplement appuyées reposant sur une fondation élastique. [Sobhy_2013[26]] a étudié les réponses dynamiques et de flambement d'une plaque FG sandwich exponentielle reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. [Bouderba et al_2013[27]] ont étudié la réponse thermomécanique en flexion des plaques épaisses FG reposant sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak. [Yaghoobi et al_2013[28]] ont proposé une formulation analytique basée sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre, afin d'examiner le flambement thermomécanique des plaques sandwich symétriques avec des feuilles de face en FG reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. [Meziane et al_2014[29]] ont présenté une théorie raffinée simple et efficace pour le flambement et la vibration des plaques FG sandwich exponentiel reposant sur une fondation élastique. [Zidi et al_2014[30]] ont étudié le comportement en flexion d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique et soumise à un chargement hygro-thermo-mécanique. En utilisant la théorie du gradient de déformation et le modèle de poutre d'Euler – Bernoulli, [Zeighampour et al_2015[31]] ont étudié la vibration de nano poutre à gradient de propriété reposant sur la fondation Visco-Pasternak. [Beldjelili et al_2016[32]] ont étudié la flexion hygro-thermo-mécanique des plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie de plaque trigonométrique à quatre variables. [Kolahchi et al_2016[33]] ont analysé la stabilité dynamique de Visco-plaques renforcées de FG-CNT dépendant de la température et reposant sur un milieu élastomère orthotrope. [Attia et al_2018[34]] ont présenté une théorie des plaques raffinée à quatre variables pour l'analyse thermo-élastique des plaques FG reposant sur des fondations élastiques variables. [Kadari et al_2018[35]] ont analysé le flambement des nano plaques orthotrope reposant sur des fondations élastiques. [Bakhadda et al_2018[36]] ont analysé les réponses en flexion et en vibration des plaques composites renforcées de nanotubes de carbone sur fondation élastique. [Chaabane et al_2019[37]] a présenté une étude analytique de la flexion et des réponses dynamiques des poutres FG reposant sur des fondations élastiques. [Avcar et al_2018[38]] ont analysé la vibration libre des poutres FG reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. [Arani et al_2018[39]] ont présenté une analyse non linéaire de vibration libre et forcée de micro-poutres reposant sur la fondation visco-Pasternak orthotrope non linéaire avec différentes conditions aux limites. Récemment, [Arshid et al_2019[40]] ont étudié l'effet de la porosité sur la vibration libre des plaques circulaires SPFG reposant sur une fondation élastique visco-Pasternak basée sur CPT, FSDT et TSDT.

Le but de ce travail est de proposer une théorie simple quasi-3D avec seulement quatre inconnues pour la flexion et la vibration libre des plaques épaisses FG reposant sur une fondation Visco-Pasternak. La cinématique est sélectionnée en fonction d'une distribution hyperbolique des déplacements axiaux et verticaux à travers l'épaisseur. La fondation Visco-Pasternak est prise en compte en ajoutant l'impact de l'amortissement au modèle habituel de fondation qui se caractérise par le module de Winkler linéaire et le module de fondation de Pasternak. En raison de l'absence d'étude sur la mécanique des plaques FG reposant sur la fondation Visco-Pasternak, on espère que la présente étude pourra être utilisée comme référence pour les travaux futurs de telles structures.

L'étude que nous présentons comprend quatre parties essentielles.

Dans le chapitre I, nous avons défini les matériaux fonctionnellement gradués « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre passe en revue les différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

Le troisième chapitre a pour objet de présenter la nouvelle cinématique qui comporte des thèmes des intégrales indéterminées, en se basant sur le principe d'Hamilton afin d'établir les équations d'équilibre. Pour valider notre modèle analytique quelques exemples seront présentés dans le chapitre IV pour une plaque FGM simplement appuyée reposant sur des fondations viscoélastiques en découvrons l'effet des paramètres du matériau, la géométrie de la plaque et les paramètres de fondation sur le comportement de la plaque vis-à-vis de la flexion et la vibration libre. Les résultats seront comparés avec les résultats trouvés dans la littérature.

Ce travail de thèse se termine par des conclusions relatives à ce travail de recherche.

CHAPITRE -I-

Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués

I.1. Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués (en anglais: **F**unctionally **G**raded **M**aterials **'F.G.M'**).

Les matériaux fonctionnellement gradués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux ont été définies au 21ème siècle. Sont des matériaux composés de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé de grandes performances. Il est capable de résister aux températures plus chaudes, Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

Les FGM sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique par un processus de métallurgie de poudre (figure I.01), céramique qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées est placé dans les régions de grands gradients de la température et le métal typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques comme la dureté sont besoins d'être élevés (côté basse température).

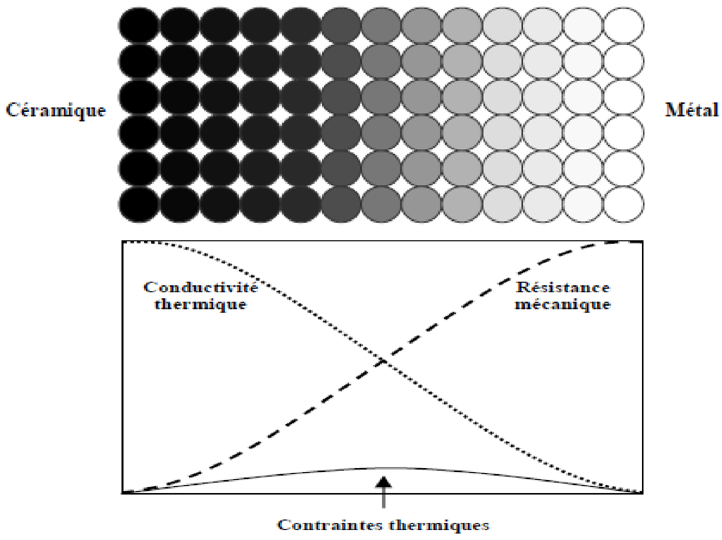

Figure I.01 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués.

I.2. Le concept d'un matériau fonctionnellement gradué

Un groupe scientifique, à Sendai (Japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux à comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi.M_1997[41]]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut-être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques. [Nguyen.T.K et al_2007[42]].

En 1987, les Japonais ont lancés un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériau fonctionnellement gradué et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrières thermiques dans l'aérospatiaux. [Koizumi.M_1997[41]].

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- le système SiC/C par C.V.D.
- le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres.
- le système TiB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température.
- le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO2-Y2O3) par projection plasma à double torches, [Okamura.H_1991][43].

Dans la seconde étape (les années 90), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. non seulement les champs d'application des FGM qui se sont développés pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais se sont aussi élargis à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique. [Lostec.L_1997 [45]].

Le concept des FGM est de l'intérêt de développement des divers matériaux fonctionnels, tels que la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique. À cet effet, un deuxième projet a été lancé « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure fonctionnellement graduée ».

I.3. Domaines d'application des matériaux fonctionnellement gradués

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc. [Nguyen.V.T_2004[46]].

D'autres applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [Müller et al (2003))[47], des déclencheurs [Qiu.J et al_2003[48]], des armures métal/ céramique [Liu.L.S et al_2003[49]], des détecteurs photoélectriques [Paszkiewicz.B et al_2008[50]] et des implants dentaires montrés sur la figure I.02 [Watari.F et al_2004[51]]. Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été édités. [Fuchiyama.T et al_1995[52], Markworth.A et al_1995[53], Tanigawa.Y et al_1995[54], Noda.N_1999[55], Paulino.G et al_2003[56]]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [Hui- shen_2009[57]].

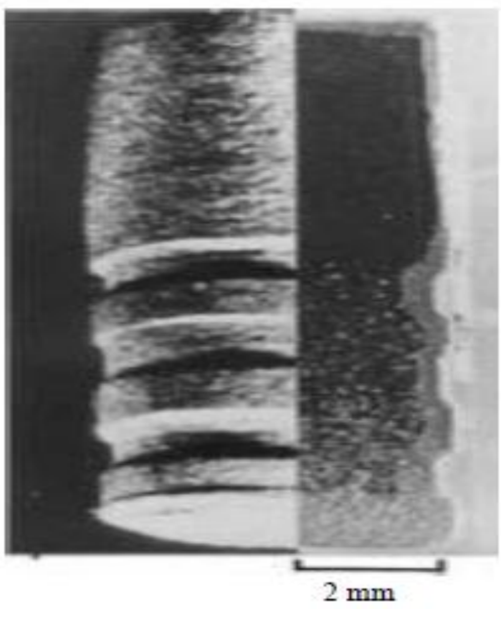

Figure I.02: Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP),[Watari.F et al_2004[51]].

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.03 a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaires et semi-conducteurs.

Domaines d'applications des FGM

Ingénierie
- Outils de coupe
- Éléments de moteur

Conversion d'énergie
- Générateur thermoélectrique
- Convertisseur thermoïonique
- Pile à combustible

Aérospatial
- Composants de moteur-fusée
- Corps des avions spatiaux

biologiques
- Implants
- Peau artificiel

Optiques
- Fibres optiques
- Lentilles

Électronique
- Capteurs
- Semi-conducteur à bande graduée

L'énergie nucléaire
- Composants des réacteurs nucléaires
- Pastilles de combustible

Chimique
- L'échangeur de chaleur
- Tube de chaleur, Récipient

Génie civil
- Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Paveùents)
- les chaussées souples
- Les tunnels
- les grands vitrages dans les zones chaudes
- Les centrales nucléaires

Autres Produits
- Matériaux de constructions
- Corps de voiture
- Verres de fenêtre

Figure I.03: Les principaux domaines d'application des FGM.

I.4. Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étapes de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avances en technologie d'automatisation durant les dernières décennies a rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- conditions de procédure choisie pour ne pas détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriété, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.4.1. Coulage en bande (Tape casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-

Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure I.04).

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 µm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une Viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit crut en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa Viscosité .Les liants (Plastifiants et di-floculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

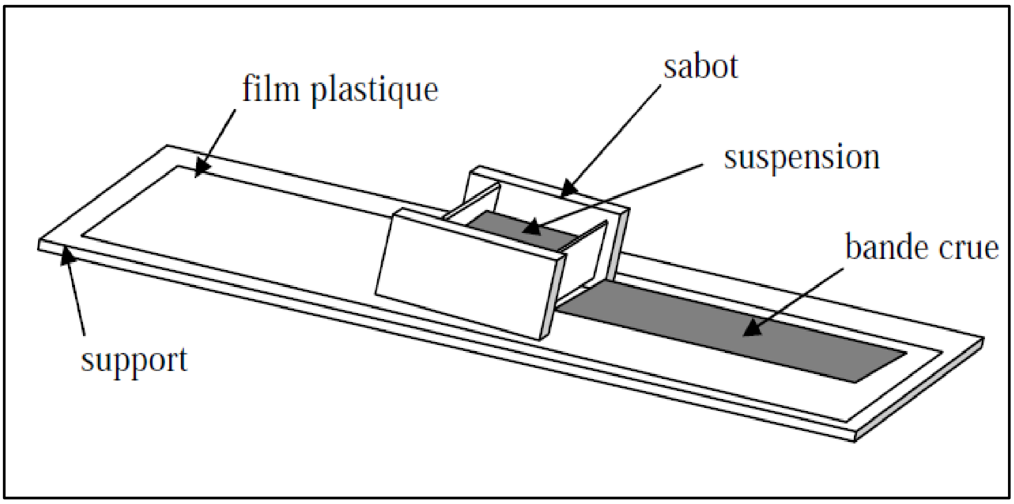

Figure I.04: Principe de la méthode coulage en bande.

- L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par [Howatt et al_1947[58]], et depuis d'autres travaux ont été réalisés par [Boch.P et al_[59],[60]]. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques du type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).
- Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :
  - soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tris-couches élaborés par [Mistler_1973[61]].
  - soit par empilement des couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression, [Boch.P et al_[59],[60]].

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting)

Le coulage en barbotine (Slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage s'effectuera en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine, cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique), [Moya J.S_1992[62]].
- d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Dépôt par électrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique.

L'élaboration par électrophorèse peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux, [Abdizadeh.H_1997[63]].

I.4.4. Implantation ionique

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines (<1 μm) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux).

Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé, [Abdizadeh.H_1997 [63]].

I.4.5. Dépôt par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.05) [Abdizadeh.H_1997 [63]].

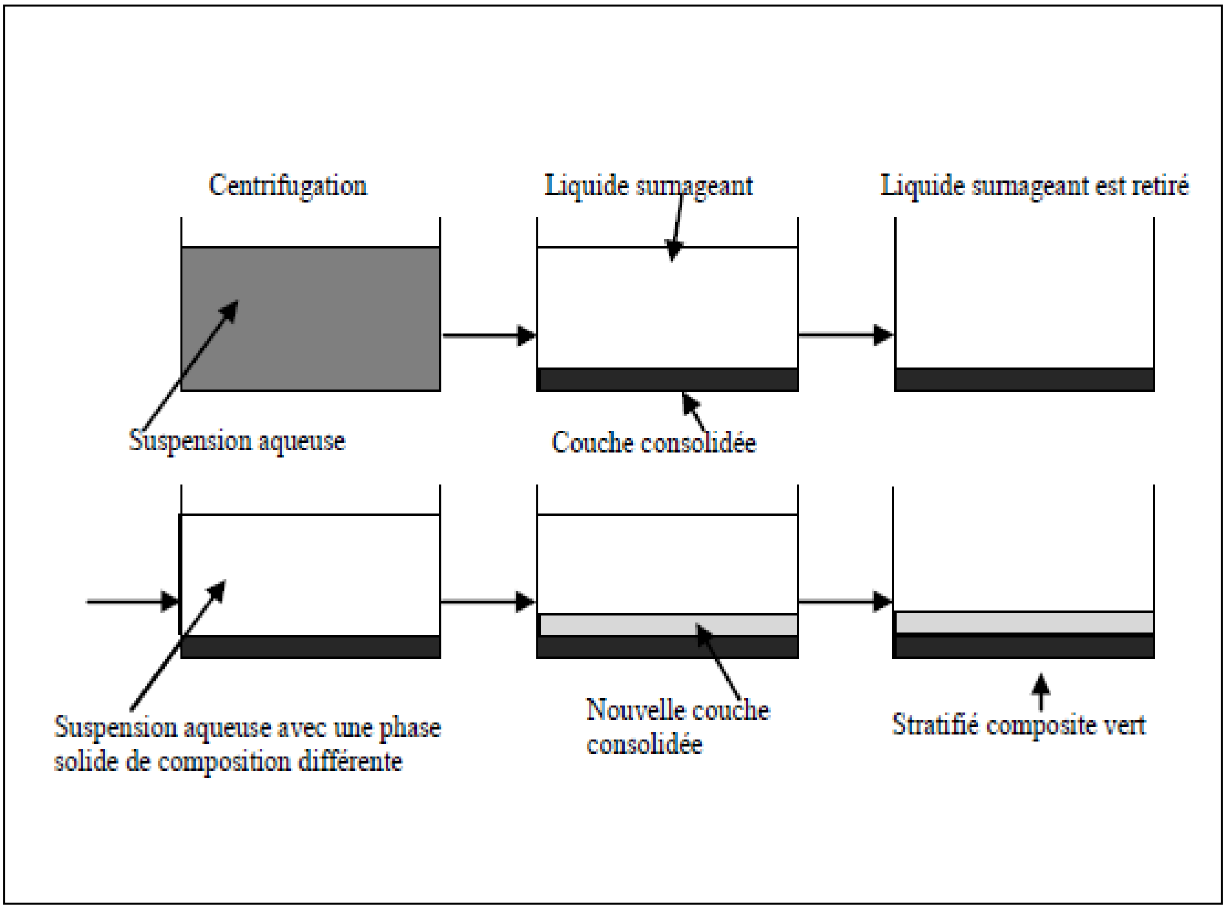

Figure I.05: Schéma du procédé - dépôt par centrifugation- [Abdizadeh.H_1997[63]].

I.4.6. Compaction sèche des poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop.A et al_1993[64]]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication des pièces de forme complexe. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et industrielle.

I.4.7. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM, l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique, [Steffes.H.D et al_1990[65]].

I.4.8. Dépôts physique ou chimique en phase vapeur (C.V.D / P.V.D)

Les dépôts C.V.D ou P.V.D sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. C.V.D et P.V.D peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées, [Kawai et al_1990[66]].

I.4.9. Frittage et infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi.M et al_1990[67]]. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.10. Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. [Yuki et al_1991[68]] utilise cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.06 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

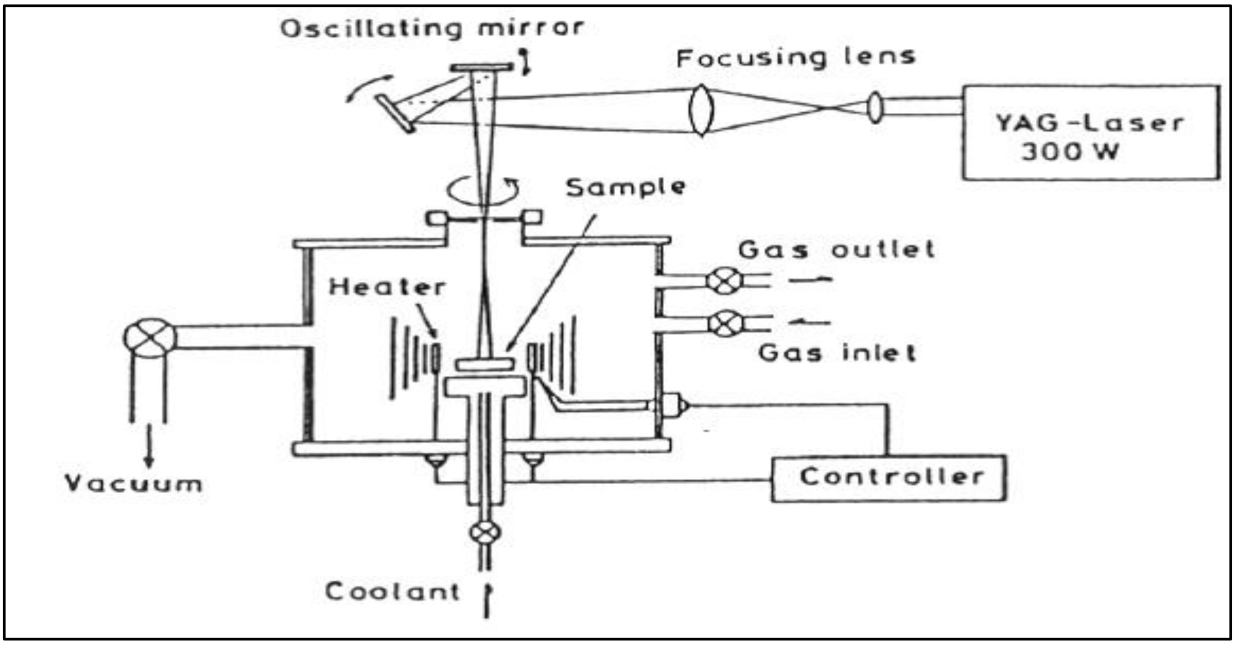

Figure I.06: Disposition du procédé-frittage laser différentiel-[Yuki et al_1991[68]].

I.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail les matériaux FGM choisis est (Al/Al_2O_3 et Al/ZrO_2) (Métal)-Céramique).

I.5.1. Propriétés du métal

L'aluminium est un métal blanc qui peut devenir réfléchissant après polissage.

- **Propriétés physiques :** L'aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de L'aluminium est de 2700 kg/m^3. L'utilisation de L'aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

- **Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

❖ Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

❖ Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

➢ **Propriétés des alliages d'aluminium** : L'Aluminium à pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

I.5.2. Propriétés de la céramique

- La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

➢ **Propriétés physiques :** La céramique a une facilité de fusion qui présente un certain avantage pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de **3800 kg/m^3**. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

➢ **Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent les matières premières employées et les méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases.

➢ **Propriétés des céramiques :** Les propriétés de la céramique sont :

- Un module d'Young élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression (Résistance à la compression = **200 MPa**).

I.6. Propriétés matérielles effectives d'un matériau en FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.07a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.07b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

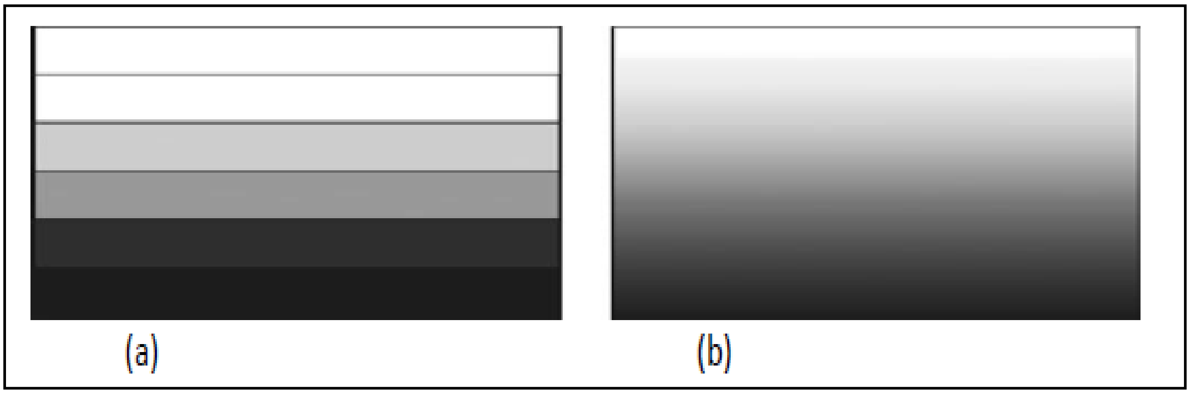

Figure I.07: Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïdale pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

I.7. Lois régissantes la variation des propriétés des plaques en FGM

Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure I.08). Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles, module d'Young, densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution. Cependant, le module d'Young, densité et le coefficient de poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$, $\nu = \nu(z)$. [Delale et al_1983[69]] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module d'Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque ; d'ailleurs cette propriété est sensiblement là même pour les matériaux avec lesquels on va travailler.

Alors, le module d'Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant :

- une fonction de loi de puissance (P-FGM)
- une fonction exponentielle (E-FGM)
- ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

Notant que S représente la propriété mécanique qui varie selon l'épaisseur ; donc elle peut être le module d'Young $E(z)$ ou la densité $\rho = \rho(z)$.

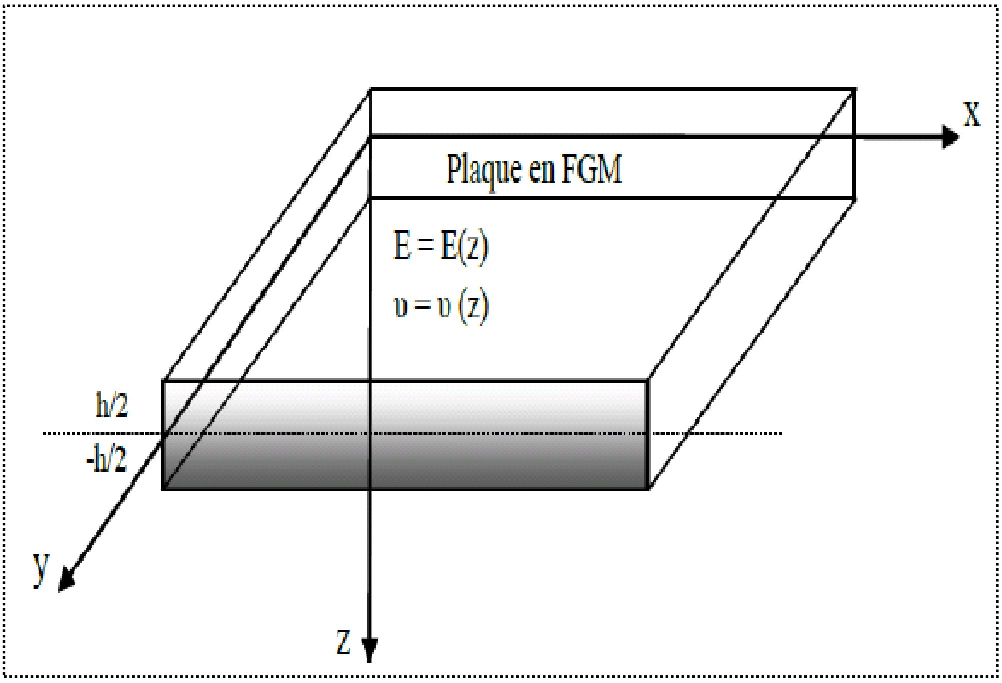

Figure I.08: Les dimensions de la plaque FGM.

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^{p} \tag{I.1}$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Delale F et al_1983[69]]:

$$S(z) = g(z).S_1 + [1 - g(z)].S_2 \tag{I.2}$$

Où S_1 et S_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure $(z = h/2)$ et de la surface supérieure $(z = -h/2)$ de la plaque FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.09, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $p \succ 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p \prec 1$.

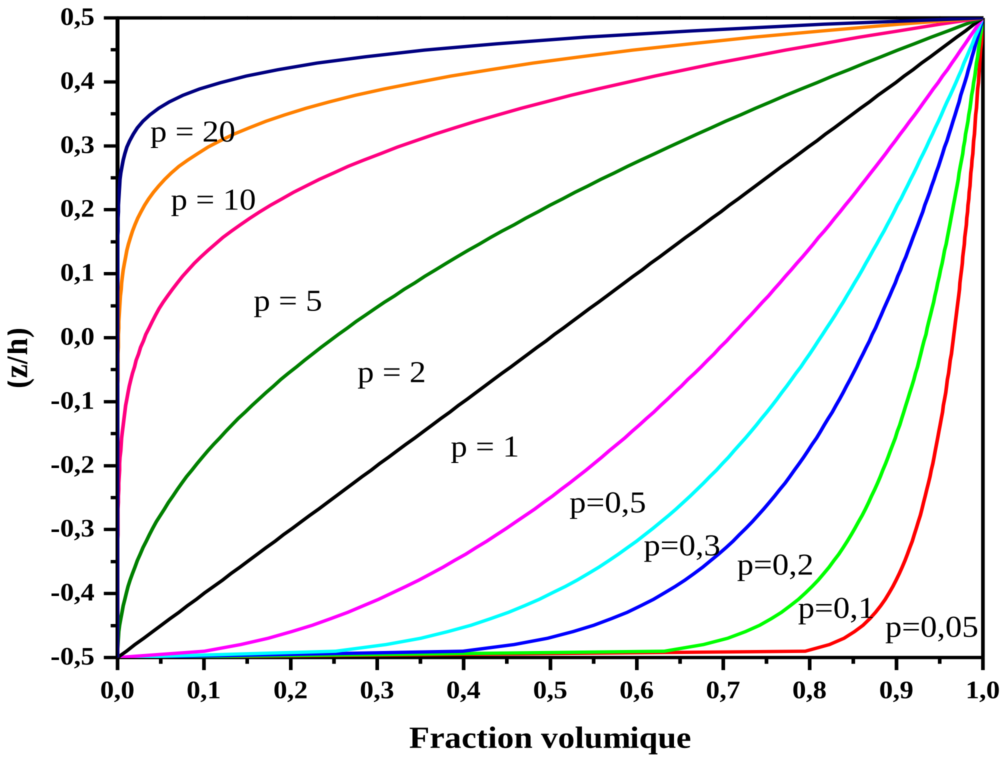

Figure I.09: La variation de la fraction volumique pour une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la figure I.09, le changement de la valeur de (P) produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites. Pour une résolution numérique, par la méthode des éléments finis par exemple, les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j . g_j \quad , \quad \sum_{j=1} g_j = 1 \tag{I.3}$$

Où S_j et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [Delale.F et al_1983][69], par conséquent, [Chung et al_2003[70]] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 - z}{h/2}\right)^P \quad \text{Pour } 0 \le z \le h/2 \quad \text{(I.4.a)}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 + z}{h/2}\right)^P \quad \text{Pour } -h/2 \le z \le 0 \quad \text{(I.4.b)}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par :

$$S(z) = g_1(z).S_1 + [1 - g_1(z)].S_2 \quad \text{Pour } 0 \le z \le h/2 \quad \text{(I.5.a)}$$

$$S(z) = g_2(z).S_1 + [1 - g_2(z)].S_2 \quad \text{Pour } -h/2 \le z \le 0 \quad \text{(I.5.b)}$$

La figure I.10 montre que la variation de la fraction volumique selon les équations (I.4.a) et (I.4.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

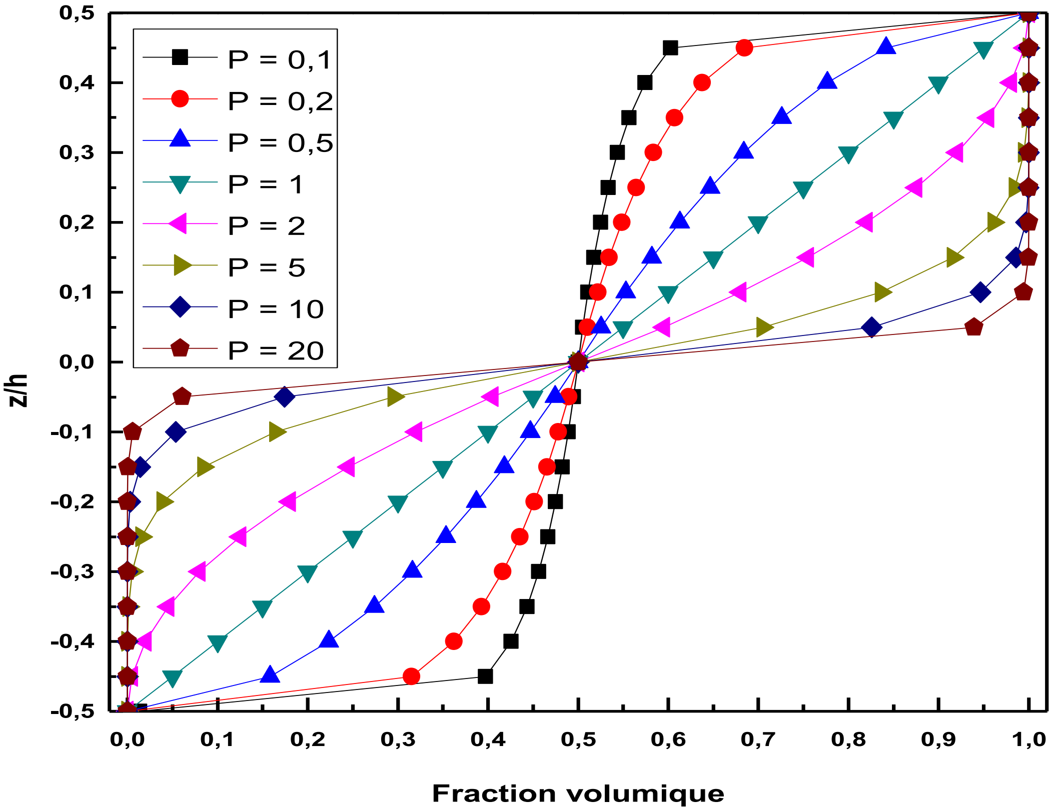

Figure I.10: La variation de la fraction volumique pour une plaque S-FGM.

I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale et al_1983[69]].

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \tag{I.6.a}$$

Avec :

$$A = S_2 \text{ Et } B = \frac{1}{h}.\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \tag{I.6.b}$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la **figure I.11**.

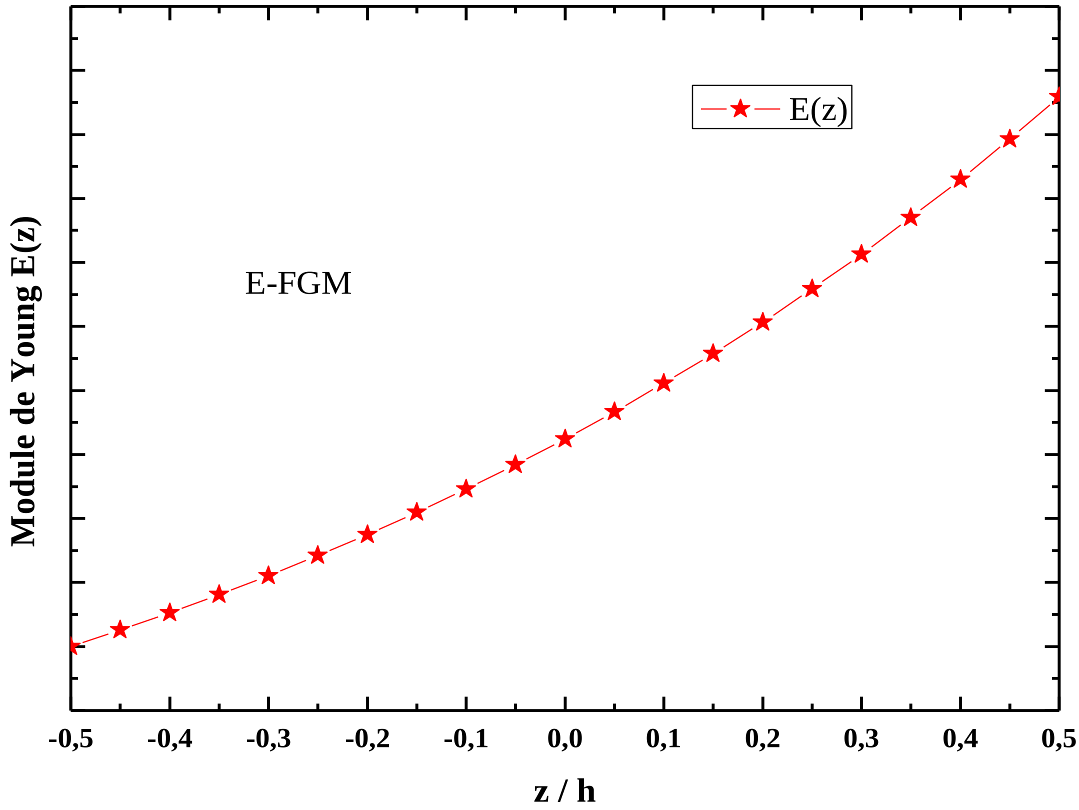

Figure I.11: La variation du module d'Young de la plaque E-FGM.

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux fonctionnellement gradués « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE -II-

Théories des plaques

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiche) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans **[**Noor.**A.**K. et al 1989[71], Kapania.R.K et al_1989[72]**,** Kant.T et al_2000[73]**,** Carrera.E_2000[74]] des revues complètes sur les différents modèles existant de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaquent.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention des résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. [Pagano.N.J_1969[75]**,** Pagano.N.J_1970[76]**,** Srinivas.S et al_1970[77]**,** Srinivas.S et al 1973[78]**].**

Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles 2D de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont des approches 2D qui sera mentionnées.

II.2. Différents modèles des structures composites dans l’élasticité bidimensionnelle

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adoptée :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couches.
- Approche développement asymptotique.

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et considérée comme une seule couche. Des nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinées. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

- **Modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CPT) :**

Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur. Reissner. E et al_1961[79]]. Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par [Love-Kirchhoff_1850 [80]] généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant (figure II.01). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est reliée à l'élancement (l/h).

Elle suppose les hypothèses ci-après:

1. La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
2. Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée $\left(\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0\right)$.

   On admet dans ce cas que la déformation due à l'effort tranchant est nulle et ne participe pas à la rigidité.
3. le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du plan neutre ;
4. l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles $(\sigma_z = 0)$;

Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y}\\
w(x,y,z) &= w_0(x,y)
\end{aligned} \tag{II.1}$$

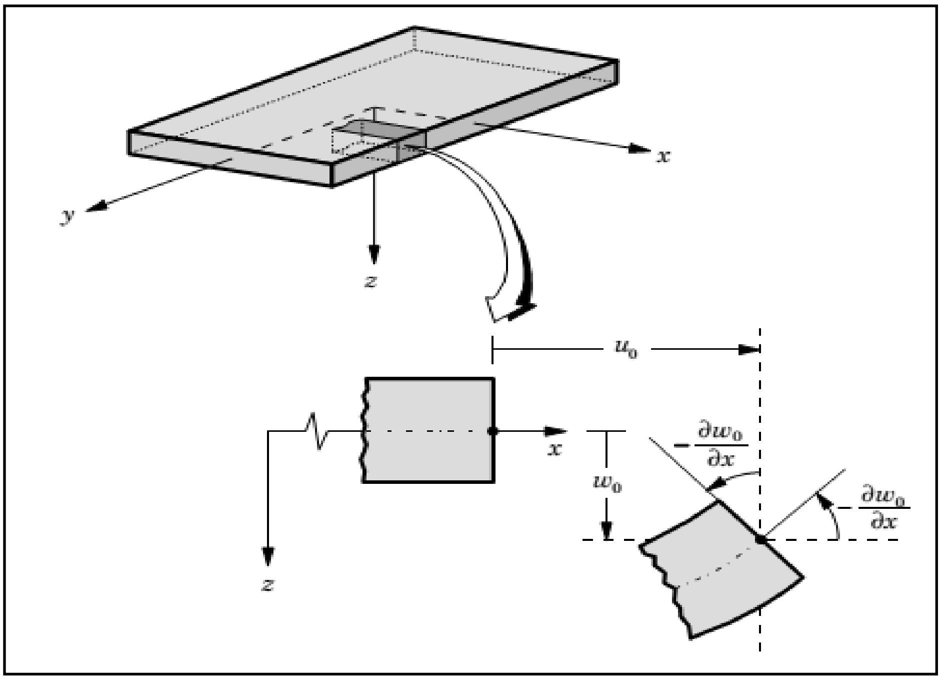

Figure II.01: Cinématique de Love-Kirchhoff.

Avec (u_0 , v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen (z=0). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

- **<u>Théorie de déformation en cisaillement 1er ordre FSDT (Modèle Reissner-Mindlin)</u> :**

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans [Reissner_1945[81], Mindlin_1951 [82]], qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko et al_1959)[83], Reddy_1997[84], Reddy_1999[85]].

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, [Mindlin_1951[82]] a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, [Mindlin_1951[82]] a modifié la quatrième hypothèse de sorte que L'effet de l'inertie de rotation est inclue.

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (figure II.02) est exprimé sous la forme [Mindlin_1951[82]] :

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y)$$
$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \qquad \text{(III.2)}$$
$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Avec :

(u_0 , v_0 , w_0) : sont les déplacements en membrane.

(φ_x , φ_x) : sont les rotations autour des axes x et y.

Le champ de déplacement définis dans l’expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

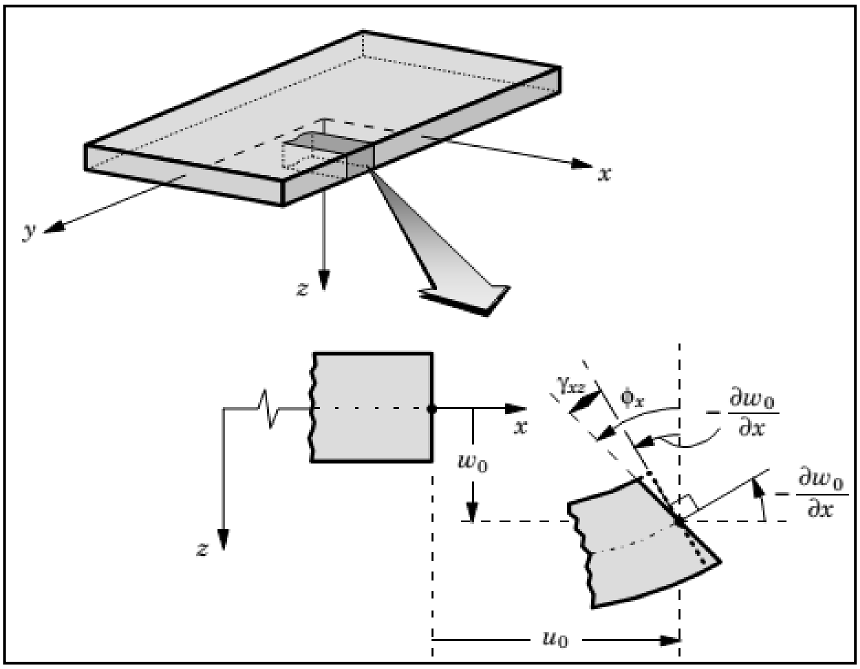

Figure II.02: Cinématique de Reissner-Mindlin.

- **Les modèles d'ordre supérieur :**

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction et franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.3) [Whitney.J.M_1973[86], Liberscu.L _1967[87], Touratier.M_1991[88], Nguyen .V.T_2004 [46]].

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

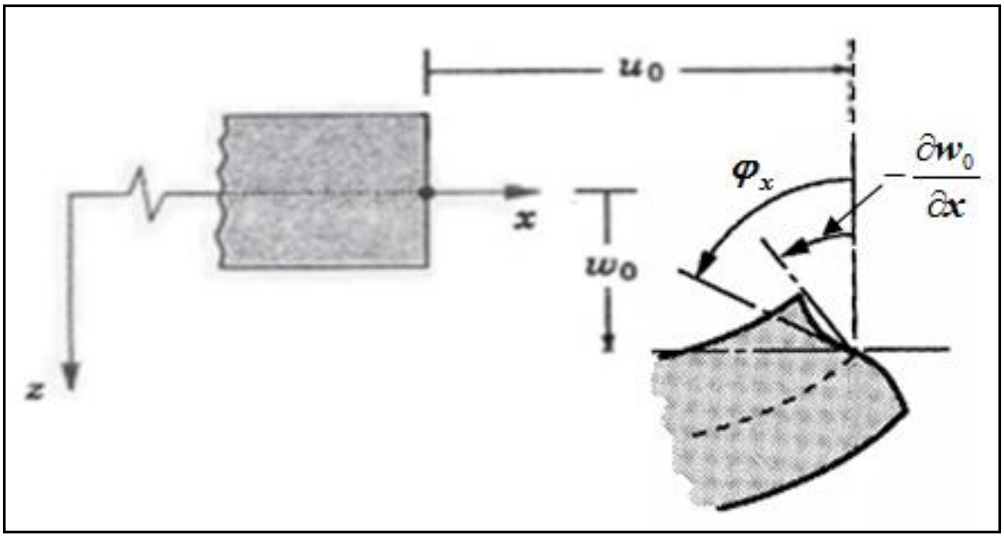

Figure II.03: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \Psi(z)\varphi_x((x,y) \tag{II.3.a}$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \Psi(z)\varphi_y(x,y) \tag{II.3.b}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \tag{II.3.c}$$

Avec : $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_0)$ et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(\boldsymbol{z})$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(\boldsymbol{z}) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième TSDT de [Reddy_1997 [84], Reddy_1999[85]] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \tag{II.4}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur .Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier. M (1991)]**[88]** propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{II.5}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par [Karama et al] [89] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \tag{II.6}$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane et al][90]. est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{\left[\cosh(\pi/2) - 1\right]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{\left[\cosh(\pi/2) - 1\right]} \qquad \text{Avec : } \phi_z = 0 \tag{II.7}$$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan [91] : $$f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right) \quad \text{(II.8)}$$

- L'approche de Reissner [81] : $$f(z)=\frac{5}{4}z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad \text{(II.9)}$$

- L'approche de Reddy [93]: $$f(z)=z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad \text{(II.10)}$$

- L'approche de Touratier [88]: $$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad \text{(II.11)}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)=\frac{h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1}=z\left(1-\frac{\pi^2}{3!}\frac{z^2}{h^2}+\frac{\pi^4}{5!}\frac{z^4}{h^4}-\frac{\pi^6}{7!}\frac{z^6}{h^6}+\cdots\right) \quad \text{(II.12)}$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy J.N_1984[93]].

Récemment, [Afaq et al_2003[94]] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante *:*

$$f(z)=ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{(II.13)}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair du variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier.M_1991[88]] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de [Aydogdu_2005[95])]; $f(z)=z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{ln(\alpha)}}$ $\alpha \succ 0$, h :L'épaisseur de la plaque (II.14)

En remarque que les modèles d'approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). Mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.2.2. Approche par couches

Cette approche est applicable pour les matériaux FGM, destinée justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels, Ainsi différents modèles issus de l'approche par couches ont été proposés: [Chabot.A_1997[96], Carrera.E_2000[74], Afaq.K.S_2003[94], Reddy.J.N_1984)[93], Di Sciuva.M_1987[97]]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches).

On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couches peuvent être classes en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zigzag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

➢ Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zigzag puisqu'ils proposent une cinématique par couches plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure II.04).

En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [Srinivas.S et al_1973[78], Reddy.J.N_1987[92], Tahani.M et al_2003[98]], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couches. Les équations fondamentales par couches sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couches.

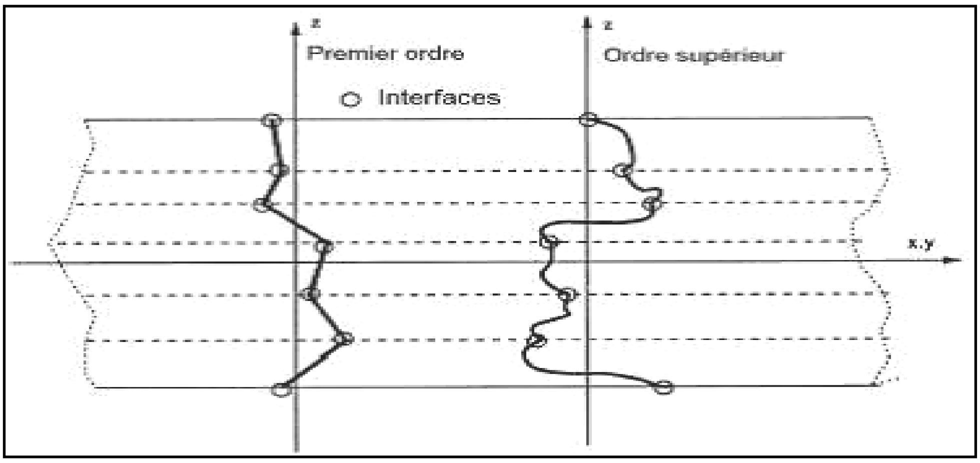

Figure II.04: Champs de déplacement des couches discrètes [Nguyen.V.T_2004[46]]

D'une manière alternative, les travaux de [Ren.J.G_1986[99], Kassapoglou.C et al_1987[100], Yin.W.L_1994[101]**]** utilisent une approximation des champs de contraintes par couches ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [Ren.J.G_1986)[99]] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couches et les déplacements sont considéré cubiques par couches et continus aux interfaces. Dans [Kassapoglou.C et al_1987[100]], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couches, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [Yin.W.L_1994[101]]. Les fonctions de contraintes sont utilisées par couches pour déterminer les contraintes inters laminaires, elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulaires. Le premier travail semble être celui de [Pagano.N.J_1978[102]] qui propose le modèle local. Le modèle local a été construit à partir de la formulation d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couches. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales. La formulation d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouche à (7n) champ en (x ; y), (n) étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondant à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplification permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Nguyen.V.T _2004[46]].

- **Les modèles zigzags**

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, [Di Sciuva.M_1987 [97]] est le premier qui à proposer le modèle zigzag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zigzag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zigzag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en (z) mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure II.05). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

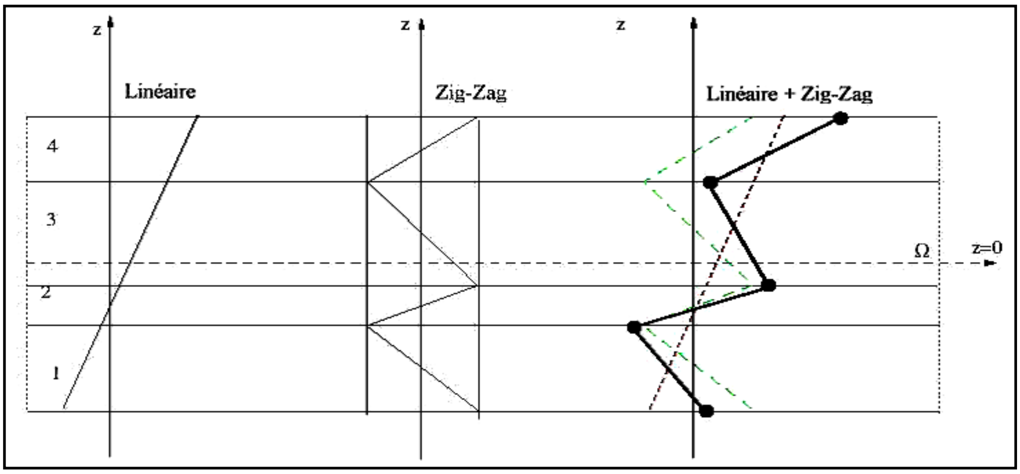

Figure II.05: Champs de déplacement zigzag du 1ier ordre [Nguyen.V.T_2004[46]]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zigzags réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de [Di Sciuva.M_1984[103]], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zigzag [Nguyen.V.T_2004[46]]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zigzag (linéaire par morceaux) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure II.06). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

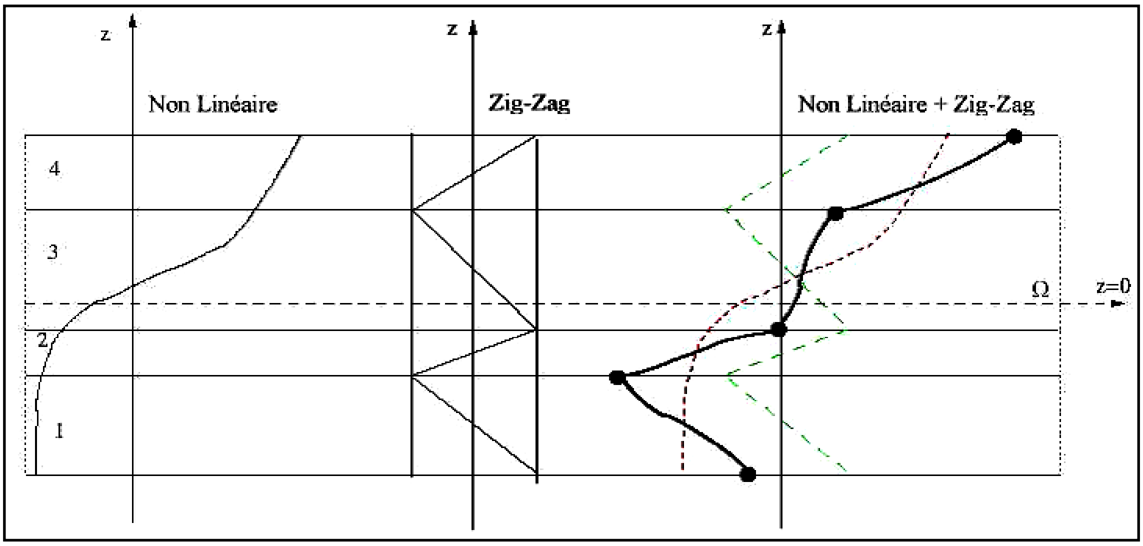

Figure II.06: Champs de déplacement zigzag d'ordre supérieur. [Nguyen.V.T_2004[46]]

Dans les travaux de [Karama.M_1998[89], Ossadzow.C et al_2001[104]], la fonction sinus de [Touratier.M_1991[88]] est combiné avec la fonction zigzag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, [Afaq et al_2003[94]] combine le modèle exponentiel avec l'effet zigzag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zigzag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zigzags ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zigzags devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [Icardi.U_2001[105]]. Un autre inconvénient des modèles zigzags, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité du type C^1 demandé qui complique leur implémentation numérique.

II.2.3. Approche par développement asymptotique

La technique de développement asymptotique est appliquée à des structures à priori peu épaisses c'est à dire quand le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est très petit, quand l'épaisseur tend vers zéro [L.E. Aghalovyan_2007[106]]. Le développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équation de mouvement). L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [Nguyen.D.T_2012[107]].

II.3. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couches et l'approche développement asymptotique.
Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc en a eu recoure au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé ou la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

CHAPITRE - III -

Formulation mathématique de la théorie des plaques utilisée

III.1. Introduction

Les plaques reposant sur les fondations élastiques ou viscoélastiques présentent des problèmes techniques très courant dans le génie civil. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème est très important pour arriver à des concepts sure. Ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types industrielles telles que les radiers, les réservoirs de stockage et les piscines.

La théorie classique des plaques (CPT) qui néglige l'effet de cisaillement transverse est valable pour l'étude des plaques minces. Cependant, la théorie classique CPT sous-estime la flèche. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances de la théorie CPT. L'utilisation de la théorie des plaques de déformation de cisaillement hyperbolique avec seulement quatre fonctions inconnues a d'abord été présentée par [El Meiche et al_2011[108]], où $\boldsymbol{\varepsilon_z=0}$. La théorie de déformation de cisaillement hyperbolique avec $\boldsymbol{\varepsilon_z\neq0}$ pour l'analyse des plaques avec la prise en compte de la déformation normale a été développée par [Hebali.H et al _2014 [109]].

La fondation viscoélastique est modélisée on prise en compte en l'impact de l'amortissement au modèle habituel de fondation qui se caractérise par le module de Winkler linéaire et le module de fondation de Pasternak. Les équations du mouvement de la plaque FGM sont obtenues par l'application de principe d'Hamilton. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres. Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions trouvés dans d'autres modèles de la littérature, pour être dans le bon accord.

III.2. Modèles de fondations

Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles pour résoudre ce problème complexe d'interaction sol-structure est très important pour arriver à des conceptions sures et économiques.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'interaction sol-structure adoptée :

- Model de Winkler
- Model de Pasternak
- Model Visco-Winkler-Pasternak

III.2.1. Model de Winkler

Le modèle le plus simple de la fondation élastique est de [Winkler_1867[17]], qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets d'accouplement entre l'un l'autre, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque.

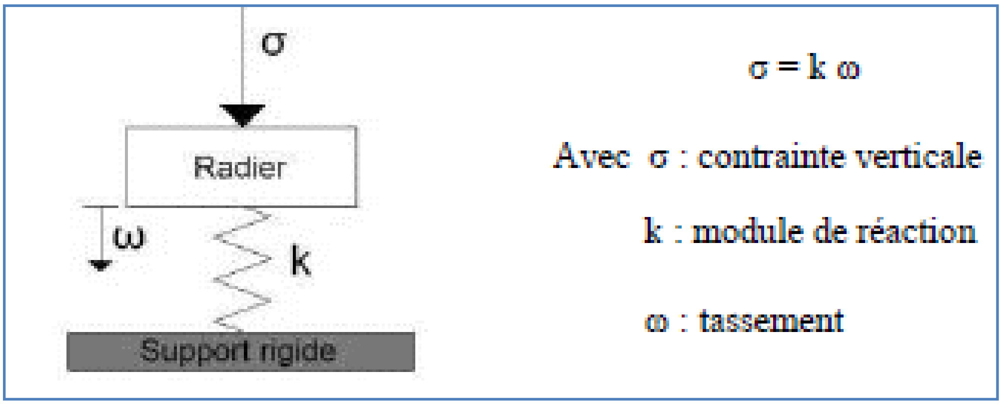

Figure III.1: Hypothèse de Winkler [Winkler_1867[17]]

Il consiste à substituer le sol par une « infinité » de ressorts élastiques juxtaposés et de même constante de raideur. Cette constante, k, caractérise le sol : elle exprime la proportionnalité entre la contrainte verticale appliquée et le tassement, et est appelée module de réaction du sol.

Cette méthode simplificatrice permet une bonne approximation des déformées d'une poutre posée sur le sol ou d'un radier. Cependant, il est important d'insister sur le mot approximation. En effet, le principe de calcul proposé par Winkler néglige d'une part, l'interaction inévitable de deux ressorts juxtaposés (l'effet de Poisson du sol) et d'autre part, la zone externe à la fondation qui influence le tassement global. Selon Winkler, seule la zone située sous le radier se tasse comme indiqué sur la figure suivante.

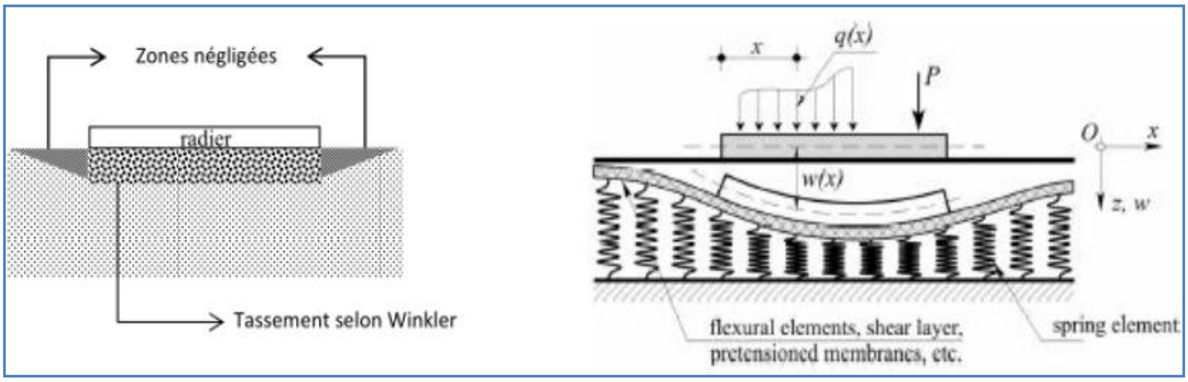

Figure III.2: Approximation de Winkler [Winkler_1867[17]]

III.2.2. Model de Pasternak

Le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle (G_P) du sol en plus de la rigidité normale (K_P), Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de [Winkler_1867[17]] et celui de [Pasternak.1954[16]]. Un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de [Winkler_1867[17]], alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de [Pasternak_1954[16]].

Avec :

$P(x)$ [N/m] : la charge linéique s'appliquant sur le radier.

Gp : le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m].

kp : le module de réaction du sol [Pa/m] et $w(x)$ la déformée du terrain.

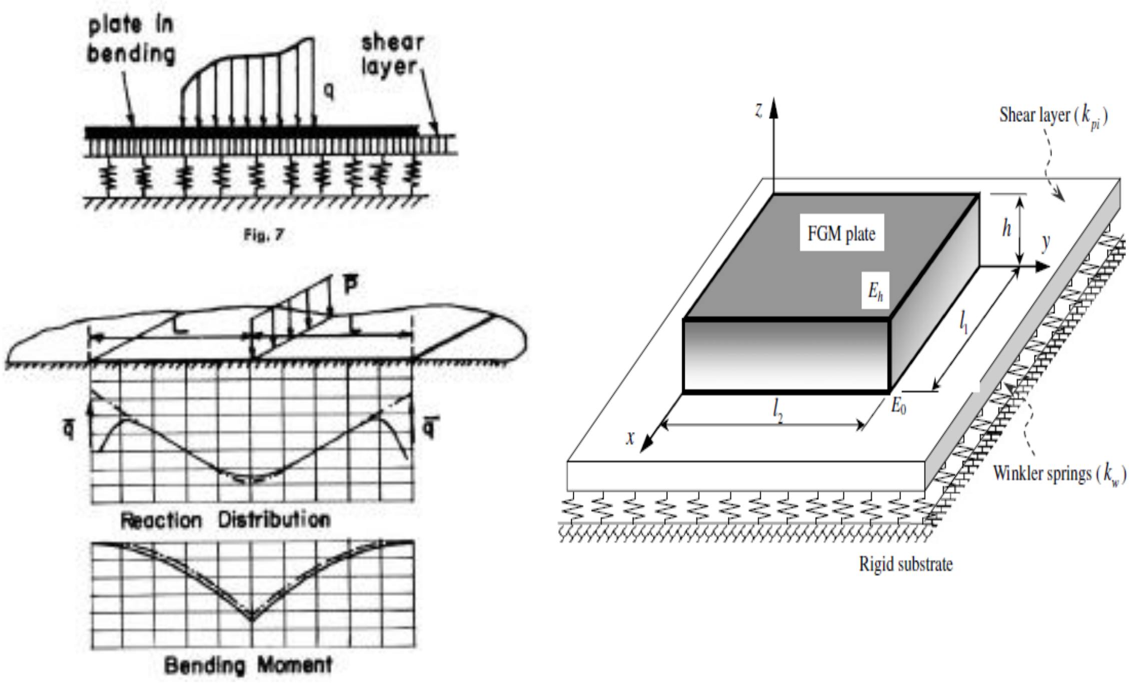

Figure III.3: Hypothèse de Pasternak [Pasternak_1954[16]]

III.2.3 Model Visco-Winkler-Pasternak

La plaque actuelle de FGM est soutenue par une fondation Viscoélastique de trois-paramètre homogène. Ce dernier est caractérisé par le module linéaire de Winkler k_w, le module de fondation de Pasternak (cisaillement) k_s et le coefficient de Viscosité C_t du milieu Viscoélastique qui représente le contact entre la plaque FGM et l'appui,

[Kerr_1964[18]] le premier modèle qui présente Un type de fondations qui considèrent l'amortissement Viscoélastique.

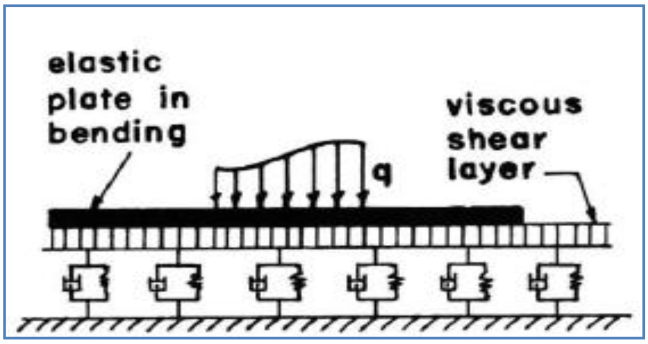

Figure III.4 : modèle Visco-Winkler-Pasternak [Kerr_1964[18]]

Suivant le modèle de fondation de type visco-Pasternak à trois paramètres de [Zenkour et al_2016 **[114]**], tel que :

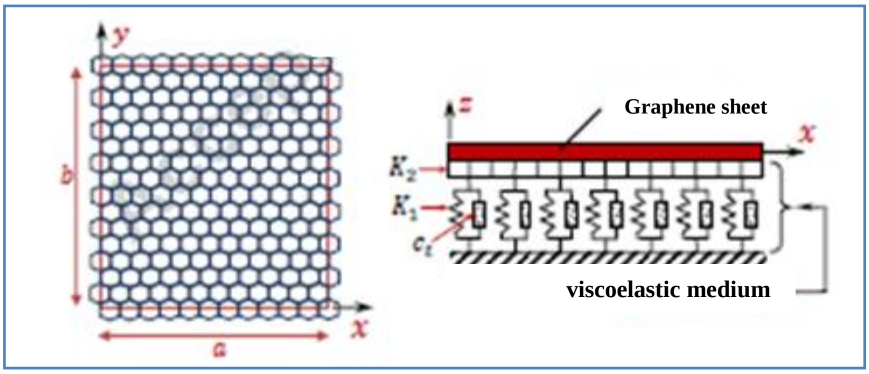

Figure III.5 : modèle Visco-Winkler-Pasternak [Zenkour et al_2016 [114]]

$$R_f = \left(k_w - k_s \nabla^2 + c_t \frac{\partial}{\partial t} \right) w \qquad \text{(III-1)}$$

Où : w est le déplacement transversal et ∇^2 est le Laplacian.

k_s est zéro si la fondation est modélisée comme Visco-Winkler, le coefficient.

III.3. Configuration géométrique

Considérons à titre d'exemple numérique une plaque rectangulaire en matériau composite stratifié d'une longueur, largeur et épaisseur égales à (a, b et h), respectivement. La plaque On suppose qu'elle est posée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k0 et une rigidité de cisaillement de k1. Selon la figure III.1 indiquée ci-dessous. Le système global de coordonnées cartésiennes est choisi avec l'origine dans le coin et sur le plan médian de la plaque (z = 0).

Par conséquent, le domaine de la plaque est défini comme : $\begin{cases} 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}, \\ 0 \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b} \\ -\mathrm{h}/2 \leq \boldsymbol{z} \leq \mathrm{h}/2 \end{cases}$

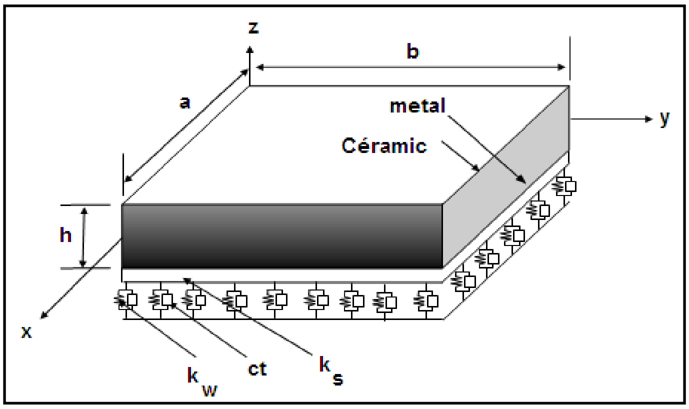

Figure III.06: Géométrie de la plaque FGM posée sur fondation Viscoélastique

III.4. Formulations mathématiques

En Considère une plaque FGM comme l'illustre la figure -III.06- avec une épaisseur h, une longueur a et une largeur b. Les caractéristiques des matériaux changent dans l'épaisseur avec une distribution de la loi de puissance présentée ci-dessous. [Zidi et al _2014[30] / 2017[110]]; [Belkorissat et al_2015[111]], [Fahsi et al_2017[112]].

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m \tag{III-2a}$$

Où (Pc) et (Pm) sont les modules d'Young (E), le coefficient de Poisson (ν) et la masse volumique (ρ) de matériaux céramiques et métalliques situés aux surfaces supérieure et inférieure, respectivement. La fraction volumique du matériau céramique V_c est donnée comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^P \tag{III-2b}$$

Où : (P) est l'indice de gradient, qui est positif.

III.4.1. Cinématique et déformations

Le champ de déplacement satisfaisant la condition de contrainte de cisaillement transversale nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque est exprimé comme suit. [Sekkal et al_2017[116]].

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1\, f(z)\int \theta(x,y,t)\,dx \tag{III-3a}$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2\, f(z)\int \theta(x,y,t)\,dy \tag{III-3b}$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + g(z)\theta(x,y,t) \tag{III-3c}$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. On peut voir que la cinématique dans Eq. (III-3) introduit seulement quatre inconnues (u, v, w *et* θ) en considérant l'effet d'étirement en épaisseur.

Dans ce travail, la HSDT quasi 3D actuel est obtenu en définissant:

$$f(z) = -\left[\frac{3\pi\; z}{2}\, sech^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3\pi}{2} h\, tanh\left(\frac{z}{h}\right) \tag{III-4a}$$

$$g(z) = \frac{2}{15}\frac{df}{dz} \tag{III-4b}$$

Les relations déformation-déplacement, basées sur cette méthode, sont données comme suit:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix} + f(z)\begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} = f'(z)\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix} + g(z)\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^1\\ \gamma_{xz}^1\end{Bmatrix},\quad \varepsilon_z = g'(z)\,\varepsilon_z^0 \tag{III-5}$$

Où

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}k_1\theta\\ k_2\theta\\ k_1\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\theta\,dx + k_2\dfrac{\partial}{\partial x}\int\theta\,dy\end{Bmatrix} \tag{III-6a}$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}k_2\displaystyle\int\theta\,dy\\ k_1\displaystyle\int\theta\,dx\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^1\\ \gamma_{xz}^1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\end{Bmatrix},\quad \varepsilon_z^0 = \theta\;,\quad g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \tag{III-6b}$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être données comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\theta\,dx = A'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial x}\int\theta\,dy = B'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y},\quad \int\theta\,dx = A'\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \int\theta\,dy = B'\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{III-7}$$

Où les coefficients A` et B` sont considérés selon le type de la solution utilisée, dans ce cas-ci par l'intermédiaire de la méthode de Navier.

Par conséquent A`, B`, k1 et k2 sont donnés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, k_1 = -\alpha^2, k_2 = -\beta^2 \tag{III-8}$$

Où α et β sont définis dans l'expression (III-19).

Les relations constitutives linéaires sont données ci-dessous :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{III-9}$$

Où C_{ij} sont les constantes élastiques tridimensionnelles définies par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{III-10a}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{III-10b}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \tag{III-10c}$$

III.4.2. Équations de mouvement

Vu la cinématique du modèle simple proposé dans Eq.(III-3) et l'utilisation du principe d' Hamilton qui dérive l'équation du mouvement de la plaque FGM :

$$\int_0^t \left(\delta U + \delta R_f - \delta V - \delta K\right) dt = 0 \tag{III-11a}$$

Où: *U*, *R*$_f$, *V*, *K* l'énergie de déformation de la plaque, l'énergie de déformation de la fondation, le travail des forces externes, l'énergie cinétique respectivement.

$$U = \int_v \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}\right] dv \tag{III-11b}$$

$$\mathrm{V} = -\int_A q\delta(w)\, dA \tag{III-11c}$$

$$K = \int_v [\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w]\, \rho(z)\, dv \tag{III-11d}$$

$$U_f = \int_A R_f \delta(w)\, dA \tag{III-11e}$$

En utilisant le principe d'énergie totale minimale nous aurons une équation générale du mouvement et des conditions aux limites. En tenant compte des variations des équations précédentes et en intégrant par partie, les équations du mouvement d'une plaque FGM posé sur une fondation Visco-Pasternak peuvent être :

$$\delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 A' k_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \tag{III-12a}$$

$$\delta v_0 : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - J_1 B' k_2 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \tag{III-12b}$$

$$\delta w_0 : \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q - R_f = I_0 \ddot{w}_0 + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 \tag{III-12c}$$

$$- J_2 A' k_1 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_2 B' k_2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} + J_1^s \ddot{\theta}$$

$$\delta \theta : \quad -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + k_2 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} \tag{III-12d}$$

$$+ k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} - N_z = J_1^S \ddot{w}_0 + K_2^S \ddot{\theta} - J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - K_2 A'^2 k_1^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2}$$

$$- J_1 B' k_2 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + J_2 B' k_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} - K_2 B'^2 k_2^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}$$

Dans les équations ci-dessus, le point au-dessus de chaque paramètre indique une différenciation partielle dans le temps. Les contraintes résultantes (N, M, Q, S et N_z) et les inerties de masse

$(I_i, J_i, J_i^s, K_i, K_i^s)$ sont également les suivantes:

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f\right)\sigma_i dz \ , \ \left(i = x, y, xy\right); \ N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z)\sigma_z dz \tag{III-13a}$$

$$\left(\boldsymbol{Q}_{xz}^s, \boldsymbol{Q}_{yz}^s\right) = \int_{-\boldsymbol{h}/2}^{\boldsymbol{h}/2} \boldsymbol{f}'\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right)\boldsymbol{dz} \ , \ S = \left\{S_{xz}^s, S_{yz}^s\right\} \ , \ \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z)\dfrac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \tag{III-13b}$$

$$\left(I_0, I_1, J_1, J_1^s, I_2, J_2, K_2, K_2^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f, g, z^2, z f, f^2, g^2\right)\rho(z) dz \tag{III-13c}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z)\left(1, z, z^2, f(z), z\ f(z), f^2(z)\right)\begin{Bmatrix} \dfrac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \dfrac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} \tag{III-13d}$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s\right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s\right) \tag{III-13e}$$

$$\left(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s\right) = \left(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s\right) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\upsilon)} \left([f'(z)], \ f'(z)\ g(z), \ g^2(z)\right) dz \tag{III-13f}$$

Substitution Eq(III-13) en (III-12) et en utilisant des relations de contrainte-déformation, les équations de mouvement déterminantes sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned}&A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}\,d_{22}u_0 + \left(A_{12}+A_{66}\right)d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{122}w_0\\&+\left(B^s_{66}\left(k_1A'+k_2\,B'\right)+B^s_{12}k_2\,B'\right)\,d_{122}\theta + B^s_{11}k_1A'\,d_{111}\theta + L\,d_1\theta = I_0\ddot{u}_0 - I_1\,d_1\ddot{w}_0 + J_1\,A'k_1d_1\ddot{\theta}\,,\end{aligned} \qquad \text{(III-14a)}$$

$$\begin{aligned}&A_{22}\,d_{22}v_0 + A_{66}\,d_{11}v_0 + \left(A_{12}+A_{66}\right)\,d_{12}u_0 - B_{22}\,d_{222}w_0 - \left(B_{12}+2B_{66}\right)\,d_{112}w_0\\&+\left(B^s_{66}\left(k_1A'+k_2\,B'\right)+B^s_{12}k_1\,A'\right)\,d_{112}\theta + B^s_{22}k_2\,B'd_{222}\theta + L\,d_2\theta = I_0\ddot{v}_0 - I_1\,d_2\ddot{w}_0 + J_1\,B'k_2\,d_2\ddot{\theta},\end{aligned} \qquad \text{(III-14b)}$$

$$\begin{aligned}&B_{11}\,d_{111}u_0 + \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{122}u_0 + \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{112}v_0 + B_{22}\,d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_0\\&-2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\,d_{1122}w_0 - D_{22}\,d_{2222}w_0 + D^s_{11}k_1\,A'd_{1111}\theta + \left(\left(D^s_{12}+2D^s_{66}\right)\left(k_1A'+k_2B'\right)\right)\,d_{1122}\theta\\&+D^s_{22}k_2B'd_{2222}\theta + L^a\left(d_{11}\theta + d_{22}\theta\right) + q - R_f =\\&I_0\ddot{w}_0 + I_1\left(d_1\ddot{u}_0 + d_2\,\ddot{v}_0\right) - I_2\left(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0\right) + J_2\left(k_1A'\,d_{11}\ddot{\theta} + k_2\,B'\,d_{22}\ddot{\theta}\right) + J_1^{st}\ddot{\theta},\end{aligned} \qquad \text{(III-14c)}$$

$$\begin{aligned}&-k_1A'B^s_{11}d_{111}u_0 - \left(B^s_{12}k_2B' + B^s_{66}(k_1A'+k_2B')\right)d_{122}u_0 - \left(B^s_{12}k_1A' + B^s_{66}(k_1A'+k_2B')\right)d_{112}v_0\\&-B^s_{22}k_2B'd_{222}v_0 + D^s_{11}k_1A'd_{1111}w_0 + \left((D^s_{12}+2D^s_{66})(k_1A'+k_2B')\right)d_{1122}w_0 + D^s_{22}k_2B'd_{2222}w_0\\&-H^s_{11}(k_1A')^2d_{1111}\theta - H^s_{22}(k_2B')^2d_{2222}\theta - \left(2H^s_{12}k_1A'k_2B' + (k_1A'+k_2B')^2H^s_{66}\right)d_{1122}\theta\\&+((k_1A')^2F^s_{55} + 2k_1A'X^s_{55} + A^s_{55})d_{11}\theta + 2R\left(k_1A'd_{11}\theta + k_2B'd_{22}\theta\right) - L(d_1u_0 + d_2v_0)\\&+L^a(d_{11}w_0 + d_{22}w_0) - R^a\theta - N_z = J_1\left(k_1A'd_1\ddot{u}_0 + k_2B'd_2\ddot{v}_0\right) - J_2\left(k_1A'd_{11}\ddot{w}_0 + k_2B'd_{22}\ddot{w}_0\right)\\&-K_2\left((k_1A')^2d_{11}\ddot{\theta} + (k_2B')^2d_{22}\ddot{\theta}\right) + J^s_1\ddot{w}_0 + K^S_2\ddot{\theta}\end{aligned} \qquad \text{(III-14d)}$$

où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},\ \ d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l},\ \ d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m},\ \ d_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ (i,\,j,\,l,\,m = 1{,}2). \qquad \text{(III-15a)}$$

Les contraintes normales et de cisaillement dans le plan (σ_x , σ_y et τ_{xy}) peuvent être déterminées avec précision par les relations constitutives (III-9). Mais si les contraintes de cisaillement transverses (τ_{yz} et τ_{xz}) calculées à partir des relations (III-9), elles peuvent ne pas respecter les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Donc, ces contraintes sont déterminées en intégrant les équations d'équilibre d'élasticité 3D par rapport à la coordonnée d'épaisseur comme [Younsi et al_2018 [115]].

$$\tau_{xz} = -\int_{-h/2}^{z}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)dz + C_1(x,y) \qquad \text{(III-16a)}$$

$$\tau_{yz} = -\int_{-h/2}^{z}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)dz + C_2(x,y) \qquad \text{(III-16b)}$$

où C_i (i = 1, 2) sont des constantes déterminées par les conditions aux limites suivantes de la surfaces supérieure et inférieure de la plaque:

$$\tau_{xz}\Big|_{z=\pm h/2} = 0\ ,\ \ \tau_{yz}\Big|_{z=\pm h/2} = 0 \qquad \text{(III-17)}$$

III.5. Solution exacte pour une plaque simplement appuyée

La solution de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont écrites sous la forme de produits de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}\, e^{i\omega t} \cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{mn}\, e^{i\omega t} \sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ W_{mn}\, e^{i\omega t} \sin(\alpha x)\sin(\beta y) \\ X_{mn}\, e^{i\omega t} \sin(\alpha x)\sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{III-18}$$

Où ω est la fréquence de vibration libre de la plaque, $\sqrt{i} = -1$ est l'unité imaginaire.

Avec :

$$\alpha = m\pi / a \quad and \quad \beta = n\pi / b \tag{III-19}$$

La charge transversale q est également exprimée par double sinus série de Fourier comme suit:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x)\sin(\beta y) \tag{III-20a}$$

Dans le cas d'une charge répartie de manière sinusoïdale, les coefficients q_{mn}, m et n ont exprimé comme suit:

$$q_{mn} = q_0 \text{ et } m = n = 1 \tag{III-20b}$$

Cependant, dans le cas d'une charge uniformément repartie (UDL), nous avons :

$$q_{mn} = \frac{16 q_0 a b}{\alpha\beta}, \quad m, n = 1, 3, 5, \ldots \tag{III-20c}$$

En substituons les équations (III-20) et (III-18) dans l'équation (III-14), les solutions analytiques peuvent être obtenues par:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III-21}$$

Où : a_{ij} , m_{ij} sont exprimés comme suit:

$$a_{11} = \left(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2\right)$$
$$a_{12} = a_{21} = \lambda\,\mu\left(A_{12} + A_{66}\right)$$
$$a_{13} = a_{31} = -\lambda\,[\,B_{11}\lambda^2 + (\,B_{12} + 2B_{66}\,)\,\mu^2\,] \qquad \text{(III-22a)}$$
$$a_{14} = a_{41} = \lambda\,((\,k2\;B'\;B_{12}^S + (\,k_1 A' + k_2 B'\,)\,B_{66}^S\,'\,)\mu^2 + k_1\;A'\,B_{11}^S\,\lambda^2 - L13\,)$$
$$a_{22} = \left(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2\right)$$
$$a_{23} = a_{32} = -\mu\,[(\,B_{12} + 2B_{66}\,)\,\lambda^2 + B_{22}\,\mu^2\,] \qquad \text{(III-22b)}$$
$$a_{24} = a_{42} = k_2\;B'\;\mu^3 B_{22}^S + k_1\;A'\;\lambda^2\mu\;B_{12}^S + k_2\;B'\;\lambda^2\mu\;B_{66}^S - \mu\,E_{23} + k_1\;A'\,\lambda^2\;\mu\;B_{66}^S$$

$$a_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 - K_x^s\lambda^2 - K_y^s\mu^2 + kw - ct * \omega$$

$$a_{34} = a_{43} = -k_1\;A'\;\lambda^2\mu^2 D_{12}^S - k_2\;B'\;\lambda^2\mu^2 D_{12}^S - k_1\;A'\;\lambda^4 D_{11}^S - k_2\;B'\;\mu^4 D_{22}^S + \mu^2 L_{23}^a \qquad \text{(III-22c)}$$
$$\qquad - 2\,k_2\;B'\;\lambda^2\mu^2 D_{66}^S + \lambda^2 L_{13}^a - 2\;k_1\;A'\;\lambda^2\mu^2 D_{66}^S$$

$$\begin{aligned} a_{44} = {} & k_1 A'\left(-\lambda^2 R_{13} + k_1\;A'\;\lambda^4 H_{11}^S + k_2\;B'\;\lambda^2\mu^2 H_{12}^S\right) - k_2\;B'\;\mu^2 R_{23} \\ & + \lambda^2 A_{55}^S + R^a + k_2\;B'\left(-\mu^2\;R23 + k_1\;A'\;\lambda^2\mu^2 H_{12}^S + k_2 B'\;\mu^4 H_{22}^S\right) \\ & - k_2\;B'\left(-\mu^2\;k_2\;B'\;F_{44}^S - \mu^2 X_{44}^S\right) + \mu^2 k_2\;B'\;X_{44}^S - k_2\;A'\left(-\lambda^2 k_1\;A'\;F_{55}^S - \lambda^2 X_{55}^S\right) \\ & + \left(k_1 A' + k_2\;B'\right) * \left(k_2\;B'\;\lambda^2\mu^2\;H_{66}^S + k_1\;A'\;\lambda^2\mu^2\;H_{66}^S\right) + \mu^2 A_{44}^S - k_1 A'\;\lambda^2 R_{13} \\ & + \lambda^2 k_1\;A'\;X_{55}^S \end{aligned} \qquad \text{(III-22d)}$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0,\quad m_{12} = m_{21} = 0,\quad m_{13} = -\lambda\,I_1, m_{14} = m_{41} = k_1\;A'\lambda\,J_1 \qquad \text{(III-22e)}$$

$$m_{23} = -\mu\,I_1,\quad m_{24} = k_2\,B'\mu\,J_1\,, \qquad \text{(III-22f)}$$

$$m_{33} = \left(I_0 + I_2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)\right) \qquad \text{(III-22g)}$$

$$m_{43} = J_{s1} + J_2\left(-A'\,k_1\;\lambda^2 - B'\,k_2\,\mu^2\right),\; m_{44} = K_2\left(A'^2\;k_1^2\;\lambda^2 + B'^2\;k_2^2\,\mu^2\right) + K_2^s \qquad \text{(III-22h)}$$

<u>III.6.Conclusion</u> :

Dans ce chapitre une approche a été présentée pour l'étude des plaques reposant sur une fondation viscoélastique sous des différents types de charge. Pour valider cette approche quelques exemples seront présentés dans le chapitre suivant pour une plaque simplement appuyée en utilisant les formulations ci-dessus.

CHAPITRE - IV -

Résultats numériques et discussion

IV.1. Introduction

Dans cette section, divers exemples numériques sont fournis et discutés pour montrer l'effet de la fondation Visco-Pasternak sur la réponse en flexion et en vibration libre des plaques épaisses FGM.

Deux types de plaques FGM sont considérés : Al/Al_2O_3 et Al/ZrO_2.

Les propriétés des matériaux utilisés sont données dans le tableau IV.01. Les résultats numériques sont donnés en termes de contraintes, de déplacements et de fréquences adimensionnelles. Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont:

$$
\begin{aligned}
&\hat{w} = \frac{100\,E}{q_0 h S^4} w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\bar{z}\right), \quad \hat{\sigma}_x = \frac{1}{q_0 S^2}\sigma_x\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{q_0 S}\sigma_y\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\bar{z}\right),\\
&\bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{q_0 S}\tau_{yz}\left(\frac{a}{2},0,\bar{z}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{q_0 S}\tau_{xz}\left(0,\frac{b}{2},\bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h^2}{q_0 a^2}\sigma_x\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{-h}{2}\right),\\
&\bar{\sigma}_z = \frac{1}{q_0}\sigma_z\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right), \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{h^2}{q_0 a^2}\tau_{xy}\left(0,0,\frac{-h}{2}\right), \quad \tau^*_{xy} = \frac{1}{10 q_0}\tau_{xy}\left(0,0,\frac{-h}{3}\right),\\
&\tau^*_{xz} = \frac{1}{10 q_0}\tau_{xz}\left(0,\frac{b}{2},0\right), \quad \bar{u} = \frac{100 D}{q_0 a^4} u\left(0,\frac{b}{2},\frac{-h}{2}\right), \quad \bar{w} = \frac{100 D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right),\\
&S = a/h, \quad \bar{c}_t = \frac{a^4 c_t}{10^3 D_c}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K_w = \frac{k_w a^4}{h^3}, \; K_s = \frac{k_s a^2}{h^3 \nu},\\
&\bar{\omega} = \omega\frac{a^2}{h}\sqrt{\rho_m / E_m}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \hat{\tau}_{xy} = \frac{1}{q_0 S^2}\tau_{xy}\left(0,0,\bar{z}\right),\\
&\hat{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}, \quad D_C = E_C h^3 / 12(1-\nu^2), \quad \tilde{\omega} = \omega\frac{a^2}{\pi^2}\sqrt{\rho_c h / D_c}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Tableau IV.01: Propriétés des matériaux utilisés pour les plaques en FGM.

Propriétés	Métal Al	Céramique Al_2O_3	Céramique ZrO_2
E (GPa)	70	380	211
ν	0.3	0.3	0.3
ρ (kg/m^3)	2702	3800	4500

IV.2. Analyse de la flexion

Dans un premier exemple, la flèche et les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée isotrope (a/h =10) soumise à un chargement uniformément réparti (UDL) sont comparées dans le tableau IV.02 avec celles données par les solutions quasi 3D de [Shimpi et al_2003[116]], la solution exacte réalisée par [Srinivas et al_1970[77]] et la théorie hyperbolique quasi-3D de [Benahmed et al_2017[117]]. Nous pouvons voir que les résultats sont en bon accord. On remarque que la théorie proposée utilise seulement quatre variables contrairement à celle de [Benahmed et al_2017[117]] où cinq variables sont utilisées.

Tableau IV.02: Comparaison de flèche et contraintes adimensionnelles de la plaque FG carrée isotrope (a / h = 10) soumise à une UDL

Théorie	$\hat{w}(a/2, b/2, 0)$	$\hat{\sigma}_x(h/2)$	$\hat{\sigma}_y(h/2)$	$\hat{\tau}_{xy}(h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, 0)$	$\bar{\tau}_{yz}(a/2, 0, 0)$
Shimpi et al_*2003*[114]	4.625	0.307	0.307	0.195	0.505	0.505
Srinivas et al_1970 [77]	4.639	0.290	0.290	/	0.488	/
Benahmed et al_2017[115]	4.633	0.302	0.302	0.197	0.481	0.502
Présente	4.622	0.304	0.304	0.195	0.482	0.482

Afin de démontrer l'effet des coefficients d'amortissement et de valider la formulation actuelle pour des plaques reposant sur une fondation élastique, les résultats obtenus pour la flèche adimensionnelle d'une plaque isotrope épaisse sont comparés avec ceux précédemment publiés. En effet, dans le deuxième exemple, le tableau IV.03 présente la flèche adimensionnelle pour une plaque carrée homogène uniformément chargée et simplement appuyée sur une fondation Visco-Pasternak. Les résultats sont comparés à ceux de [Benahmed et al_2017[117]] et de [Huang et al_2008 [19]] dans le cas où l'effet de Viscosité est négligé ($\bar{c}_t = 0$). On peut observer que les résultats concordent étroitement. Cependant, on peut voir que la flèche de la plaque est très sensible à l'inclusion de l'effet de Viscosité. La flèche diminue avec l'augmentation des paramètres K_w, K_s et $\bar{c}_t$.

Tableau IV.03: Comparaison de la flèche adimensionnelle $D10^3 w(0.5a, 0.5b, 0)/qa^4$ d'une plaque FG carrée (a/h = 100) isotrope simplement appuyée sous UDL pour différentes valeurs du module de Winkler et module de cisaillement de Pasternak

K_w	K_s	Présente				Benahmed *et al*_2017[117]	3D Huang *et al*_2008[19]
		$\bar{c}_t = 1$	$\bar{c}_t = 0.1$	$\bar{c}_t = 0.05$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$
1	1	1.6879	3.4213	3.6228	3.8489	3.8490	3.8546
	3^4	0.6008	0.7430	0.7528	0.7628	0.7628	0.7630
	5^4	0.1106	0.1148	0.1151	0.1153	0.1153	0.1153
3^4	1	1.5449	2.9018	3.0468	3.2066	3.2067	3.2105
	3^4	0.5808	0.7133	0.7223	0.7316	0.7316	0.7317
	5^4	0.1099	0.1140	0.1143	0.1145	0.1145	0.1145
5^4	1	0.9700	1.4041	1.4391	1.4758	1.4759	1.4765
	3^4	0.4722	0.5588	0.5645	0.5703	0.5703	0.5704
	5^4	0.1052	0.1090	0.1093	0.1095	0.1095	0.1095

Tableau IV.04: Comparaison de la flèche adimensionnelle $D10^3 w(0.5a, 0.5b, 0)/qa^4$ d'une plaque FG carrée homogène soumise à une UDL simplement appuyée pour différentes valeurs du module de Winkler (a/h=10)

K_w	Présente				Benahmed *et al* 2017[117]	Benyoucef et al 2010[118]	Lam et al 2000[119]	Kobayashi et Sonoda 1989[120]
	$\bar{c}_t = 1$	$\bar{c}_t = 0.1$	$\bar{c}_t = 0.05$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$
1	1.7264	3.5777	3.7982	4.0470	4.0472	4.0530	4.0530	4.0520
3^4	1.5773	3.0143	3.1708	3.3440	3.3440	3.3480	3.3490	3.3470
5^4	0.98291	1.4308	1.4672	1.5053	1.5050	1.5060	1.5070	1.5060

Dans le troisième exemple, les valeurs de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée homogène simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie reposant sur une fondation Visco-Winkler sont présentées dans le tableau IV.04. Les résultats obtenus dans le cas où le coefficient d'amortissement est nul sont comparés à ceux donnés par [Benahmed et al_2017 [117], Benyoucef et al_2010[118], Lam et al_2000[119] et Kobayashi et al_1989[120]]. On peut observer que lorsque le terme de Viscosité est omis, un bon accord entre les résultats est observé. Cependant, l'introduction du terme de Viscosité réduit la flèche en raison de l'effet d'amortissement.

Tableau IV.05: Comparaison de la flèche adimensionnelle $D10^3 w(0.5a, 0.5b, 0)/qa^4$ d'une plaque FG carrée homogène soumise à une UDL simplement appuyée pour différentes valeurs du module de Winkler (a/h=20)

K_w	Présente				Benahmed et *al*_2017[117]	Zenkour et al_2012[121]	Buczkowsi et al_2001[122]
	$\bar{c}_t = 1$	$\bar{c}_t = 0.1$	$\bar{c}_t = 0.05$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$	$\bar{c}_t = 0$
0	1.7354	3.6185	3.8441	4.0990	4.1026	4.1149	4.1197
1	1.7334	3.6100	3.8346	4.0881	4.0917	4.1039	4.1088
3^4	1.5829	3.0374	3.1963	3.3723	3.3747	3.3813	3.3855
5^4	0.9841	1.4352	1.4719	1.5103	1.5107	1.5094	1.5114
10^4	0.1052	0.1104	0.1107	0.1111	0.1110	0.1108	0.1096
15^4	0.0194	0.0196	0.0196	0.0196	0.0196	0.0196	0.0191

Le tableau IV.05 fournit des résultats identiques à ceux présentés dans le tableau IV.04 mais pour ($a/h = 20$). Les résultats calculés sont comparés à ceux donnés par [Benahmed et al_2017][117], Zenkour et al_2012][121] , Buczkowski et al_2001[122]]. Dans le cas où le coefficient $\bar{c}_t$ est nul, un excellent accord est démontré entre les différentes théories pour toutes les valeurs du coefficient de Winkler (K_w). En outre, la prise en compte de l'effet de viscosité réduit les déformations.

Tableau IV.06: Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles d'une plaque FG rectangulaire Al/Al_2O3 simplement appuyée sous UDL pour différentes valeurs d'indice de puissance *P* et des paramètres de Visco-Pasternak K_w , K_s et $\bar{c}_t$ (a⁄h=10 et b=3a).

P	K_w	K_s	Théorie		$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0.50	0	0	Thai et al_2011[123]		0.34910	1.93450	0.23370	0.09410	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.34919	1.93441	0.23372	0.09415	7.68354
			Benahmed et al_2017 [117]		0.33498	1.90215	0.23941	0.09007	7.56253
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.33266	1.89754	0.23949	0.08909	7.29110
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.24844	1.40701	0.17507	0.07311	5.68108
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.19788	1.11261	0.13656	0.06296	4.72287
				$\bar{c}_t = 1$	0.04387	0.21940	0.02178	0.02429	1.85994
	100	0	Thai et al_2011[123]		0.33580	1.85900	0.22420	0.09160	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.33586	1.85907	0.22424	0.09167	7.42978
			Benahmed et al_2017 [117]		0.32246	1.82955	0.22989	0.08774	7.31675
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.32025	1.82528	0.22998	0.08679	7.05312
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.24138	1.36585	0.16968	0.07173	5.54669
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.19334	1.08621	0.13312	0.06202	4.63731
				$\bar{c}_t = 1$	0.04367	0.21824	0.02164	0.02422	1.85608
	100	100	Thai et al_2011[123]		0.30120	1.66400	0.19990	0.08500	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.30131	1.66399	0.19989	0.08503	6.76069
			Benahmed et al_2017 [117]		0.28991	1.64138	0.20536	0.08151	6.66745
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.28799	1.63788	0.20549	0.08061	6.42471
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.22239	1.25585	0.15541	0.06785	5.17559
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.18090	1.01433	0.12387	0.05932	4.39218
				$\bar{c}_t = 1$	0.04303	0.21500	0.02133	0.02396	1.83369
2	0	0	Thai et al_2011[123]		0.65640	3.22660	0.43950	0.17660	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.65655	3.22672	0.43961	0.17666	6.91072
			Benahmed et al_2017 [117]		0.60340	3.07560	0.44695	0.16202	6.79513
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.60313	3.07536	0.44701	0.16175	6.75113
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.38874	1.95902	0.27832	0.12047	4.65711
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.28605	1.42479	0.19814	0.09882	3.66764
				$\bar{c}_t = 1$	0.05385	0.22483	0.02237	0.03431	1.44650
	100	0	Thai et al_2011[123]		0.61560	3.02180	0.41050	0.16900	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.61576	3.02190	0.41060	0.16906	6.53895
			Benahmed et al_2017 [117]		0.56771	2.88981	0.41881	0.15538	6.44548
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.56747	2.88959	0.41887	0.15512	6.40087
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.37337	1.87902	0.26628	0.11734	4.50827
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.27761	1.38091	0.19158	0.09695	3.58688
				$\bar{c}_t = 1$	0.05360	0.22358	0.02220	0.03420	1.44382
	100	100	Thai et al_2011[123]		0.51860	2.53640	0.34230	0.15010	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.51872	2.53642	0.34233	0.15020	5.63882
			Benahmed et al_2017 [117]		0.48189	2.44460	0.35187	0.13875	5.59033
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.48171	2.44449	0.35193	0.13850	5.54537
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.33374	1.67428	0.23589	0.10882	4.10927
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.25501	1.26488	0.17461	0.09162	3.35459
				$\bar{c}_t = 1$	0.05273	0.22023	0.02198	0.03378	1.42062

			Thai et al_2011[123]		0.78020	3.85060	0.52230	0.21030	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.78046	3.85174	0.52237	0.21044	6.14557
			Benahmed et al_2017 [117]		0.72061	3.69376	0.53104	0.19389	6.03129
	0	0	Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.72351	3.68911	0.53087	0.19475	6.48378
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.43526	2.18731	0.30643	0.13877	4.22659
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.31049	1.53808	0.21017	0.11178	3.26465
				$\bar{c}_t = 1$	0.05594	0.22524	0.02075	0.03775	1.29481
			Thai et al_2011[123]		0.72300	3.56200	0.48160	0.19960	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.72323	3.56296	0.48167	0.19975	5.75485
			Benahmed et al_2017 [117]		0.66999	3.42857	0.49132	0.18445	5.66241
5	100	0	Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.67277	3.42466	0.49124	0.18529	6.08398
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.41606	2.08736	0.29157	0.13477	4.07783
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.30060	1.48662	0.20258	0.10951	3.18893
				$\bar{c}_t = 1$	0.05568	0.22397	0.02058	0.03763	1.29246
			Thai et al_2011[123]		0.59220	2.90460	0.38970	0.17400	—
			Zenkour et al _2013 [124]		0.59231	2.90518	0.38971	0.17410	4.84302
			Benahmed et al_2017 [117]		0.55294	2.81786	0.40060	0.16159	4.79288
	100	100	Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.55541	2.81539	0.40066	0.16236	5.14294
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.36739	1.83624	0.25483	0.12402	3.68152
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.27430	1.35211	0.18327	0.10303	2.96777
				$\bar{c}_t = 1$	0.05472	0.22067	0.02047	0.03713	1.12450

Le tableau IV.06 présente une comparaison des déplacements et des contraintes de la théorie proposée avec ceux de [Thai et al_2011**[123]**] et [Zenkour et al_2013**[124]**] , [Benahmed et al_2017 **[117]**]. Les résultats sont fournis pour une plaque FGM rectangulaire Al/Al_2O_3 soumise à une charge uniformément répartie et pour différentes valeurs de l'indice de puissance P et des paramètres de Visco-Pasternak K_w , K_s et $\bar{c}_t$. Les résultats obtenus dans le cas où l'effet d'amortissement est omis démontrent que les résultats prédits par les deux premières références citées ci-dessus surestiment les déplacements et les contraintes, en raison de l'influence d'étirement des épaisseurs, qui n'est pas prise en compte dans ces théories. La prise en compte de l'effet de viscosité diminue le déplacement et les contraintes.

Tableau IV.07: Comparaison de la flèche et des contraintes adimensionnelles d'une plaque rectangulaire FG sous une charge sinusoïdale pour différentes valeurs d'indice de puissance P et des paramètres de Visco-Pasternak K_w , K_s et $\bar{c}_t$ ($a/h = 10$, $b = 2a$ et $q_0 = 100$).

P	K_w	K_s	Theory		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}^*_{xy}$	$-\bar{\tau}^*_{xz}$
0	0	0	Bouderba *et al*_2013[27]		0.68131	0.42424	0.86240	-0.39400
			FSPT(a)		0.68135	0.42148	0.86459	-0.30558
			CPT(a)		0.65704	0.42148	0.86459	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.67669	0.44410	0.85538	-0.38933
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.67359	0.44504	0.84127	-0.37717
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.57709	0.38128	0.72075	-0.32314
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.50478	0.33351	0.63043	-0.28264
				$\bar{c}_t = 1$	0.15505	0.10244	0.19365	-0.08682
	100	0	Bouderba *et al*_2013[27]		0.40523	0.25233	0.51296	-0.23435
			FSPT(a)		0.40525	0.25070	0.51426	-0.18175
			CPT(a)		0.39652	0.25437	0.52183	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.40481	0.26567	0.51170	-0.23290
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.40362	0.26667	0.50410	-0.22600
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.36686	0.24239	0.45819	-0.20542
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.33624	0.22215	0.41994	-0.18827
				$\bar{c}_t = 1$	0.13436	0.08877	0.16781	-0.07524
	0	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.08365	0.05209	0.10589	-0.04838
			FSPT(a)		0.08366	0.05175	0.10615	-0.03752
			CPT(a)		0.08328	0.05342	0.10959	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.08413	0.05522	0.10635	-0.04841
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.08405	0.05553	0.10497	-0.04706
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.08233	0.05440	0.10283	-0.04610
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.08068	0.05331	0.10077	-0.04518
				$\bar{c}_t = 1$	0.05930	0.03918	0.07407	-0.03321
	100	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.07720	0.04807	0.09772	-0.04464
			FSPT(a)		0.07720	0.04775	0.09796	-0.03462
			CPT(a)		0.07688	0.04932	0.10116	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.07765	0.05096	0.09815	-0.04468
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.07758	0.05126	0.09689	-0.04344
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.07611	0.05029	0.09506	-0.04262
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.07466	0.04807	0.09329	-0.04183
				$\bar{c}_t = 1$	0.05601	0.03700	0.06995	-0.03136
0.5	100	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.07873	0.04579	0.08173	-0.03807
			FSPT(a)		0.07873	0.04546	0.08187	-0.02984
			CPT(a)		0.07846	0.04693	0.08451	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.07918	0.04873	0.08026	-0.03822
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.07910	0.04906	0.07927	-0.03714
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.07758	0.04812	0.07775	-0.03642
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.07470	0.04935	0.07628	-0.03573
				$\bar{c}_t = 1$	0.05680	0.03523	0.05692	-0.02666

1	100	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.07932	0.04489	0.07305	-0.03502
			FSPT(a)		0.07932	0.04458	0.07321	-0.02716
			CPT(a)		0.07907	0.04604	0.07561	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.07976	0.04789	0.07120	-0.03525
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.07970	0.04818	0.07042	-0.03428
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.07815	0.04724	0.06905	-0.03361
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.07666	0.04634	0.06774	-0.03297
				$\bar{c}_t = 1$	0.05710	0.03452	0.05045	-0.02456
2	100	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.07976	0.04460	0.06719	-0.03222
			FSPT(a)		0.07975	0.04430	0.06740	-0.02435
			CPT(a)		0.07950	0.04581	0.06969	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.08020	0.04758	0.06530	-0.03244
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.08015	0.04779	0.06471	-0.03185
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.07859	0.04686	0.06344	-0.03123
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.07709	0.04596	0.06223	-0.03063
				$\bar{c}_t = 1$	0.05734	0.03419	0.04629	-0.02278
5	100	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.08015	0.04574	0.06413	-0.02992
			FSPT(a)		0.08014	0.04546	0.06440	-0.02205
			CPT(a)		0.07989	0.04710	0.06672	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.08063	0.04860	0.06275	-0.03005
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.08059	0.04875	0.06227	-0.02965
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.07901	0.04779	0.06105	-0.02907
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.07749	0.04687	0.05987	-0.02851
				$\bar{c}_t = 1$	0.05756	0.03482	0.04447	-0.02118
∞	100	100	Bouderba *et al*_2013[27]		0.08119	0.05056	0.05815	-0.02657
			FSPT(a)		0.08119	0.05023	0.05829	-0.02060
			CPT(a)		0.08099	0.05196	0.06030	—
			Benahmed *et al*_2017 [117]		0.08172	0.03035	0.05845	-0.02660
			Présente	$\bar{c}_t = 0$	0.08166	0.03053	0.05771	-0.02587
				$\bar{c}_t = 0.05$	0.08004	0.02992	0.05656	-0.02536
				$\bar{c}_t = 0.1$	0.07848	0.02934	0.05546	-0.02486
				$\bar{c}_t = 1$	0.05810	0.02172	0.04106	-0.01841

(a) D'après Benahmed et al (2017)[115]

Tableau IV.07 pour une plaque FGM sous charge sinusoïdale, les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par [Benahmed et al _2017 [117]] et [Bouderba et al _2013 [27]] pour différentes valeurs de l'indice de puissance P et des paramètres de Visco-Pasternak K_w , K_s et $\bar{c}_t$. Lorsque le coefficient d'amortissement $\bar{c}_t$. est omis, un excellent accord est affiché pour toutes les valeurs de l'indice de puissance P et les paramètres de fondation K_w et K_s . De plus, on peut voir que la flèche et les contraintes sont réduites avec la considération des fondations élastiques K_w et K_s à mesure que le coefficient d'amortissement $\bar{c}_t$ augmente, la flèche et les contraintes deviennent plus petites.

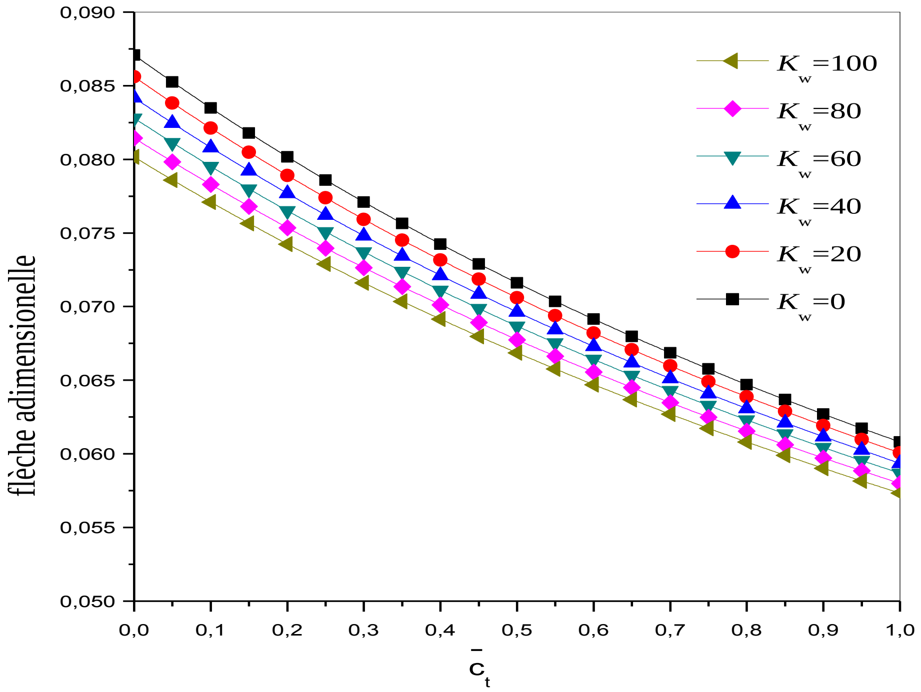

Figure IV.01: Effet du coefficient d'amortissement et du module de Winkler sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FG carrée (p=2, a/h=10, ks=10 et q0=100)

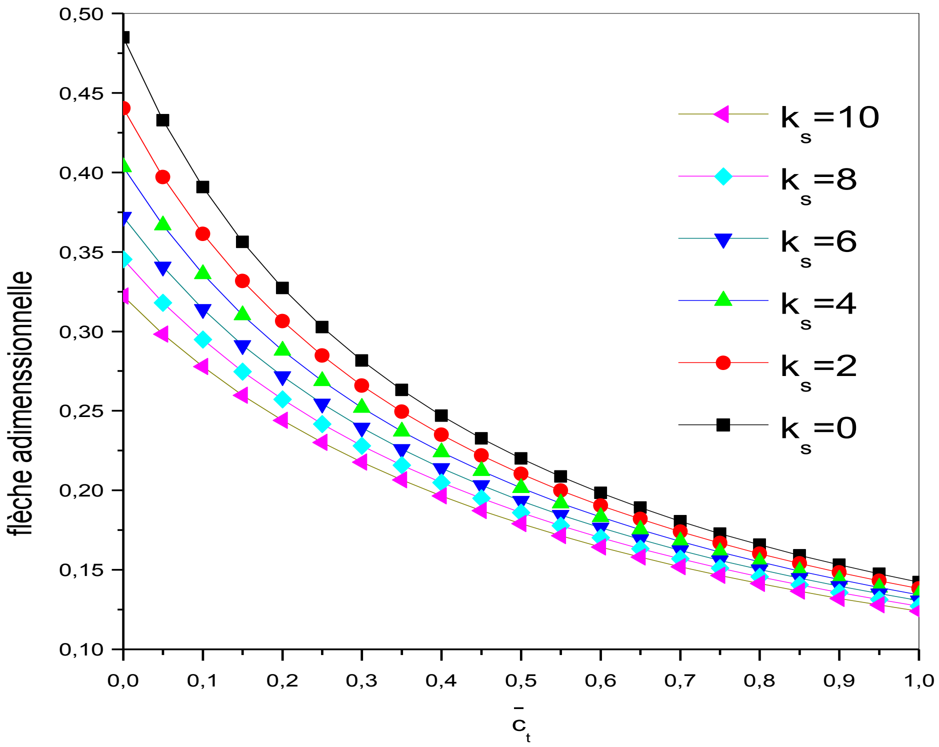

Figure IV.02: Effet du coefficient d'amortissement et module du cisaillement de Pasternak sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FG carrée (p=2, a/h=10, k_w=100 et q0=100)

Les figures IV.01 et IV.02 montrent la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ de la plaque en fonction du coefficient de viscosité $\bar{c}_t$ pour différentes valeurs de la rigidité de fondation (k_s ou k_w) d'une plaque carrée FGM (P=2). On peut observer que l'augmentation du coefficient $\bar{c}_t$ entraîne une diminution de la flèche de la plaque FGM. En outre, il est vu que, lorsque vous augmentez K_w ou K_s la flèche adimensionnelle de la plaque FGM, elle diminue.

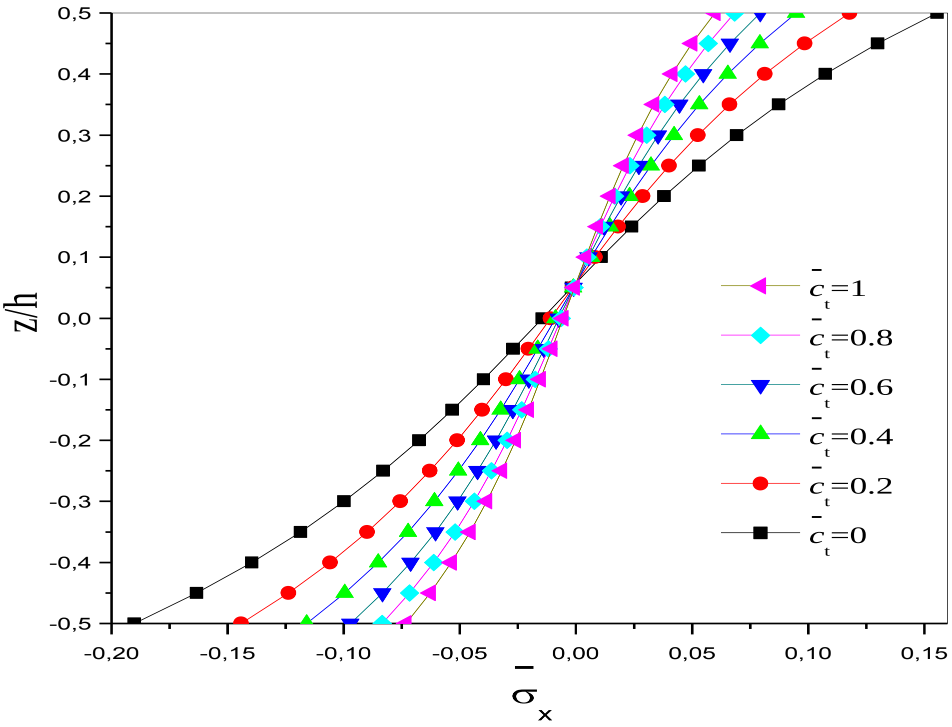

Figure IV.03: Variation de la contrainte axiale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) dans l'épaisseur d'une plaque FG carrée (p=2, a/h=10, k_w=100, k_s=10 et q0=100) pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement.

La figure IV.03 présente les variations de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ dans l'épaisseur de la plaque carrée FGM pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement $\bar{c}_t$. On peut observer que les contraintes de compression maximales se produisent en un point proche de la surface supérieure et que les contraintes de traction maximales se produisent bien entendu en un point proche de la surface inférieure de la plaque FGM. Il est à noter que les contraintes normales sont très sensibles à l'inclusion du terme Viscoélastique près des surfaces externes de la plaque.

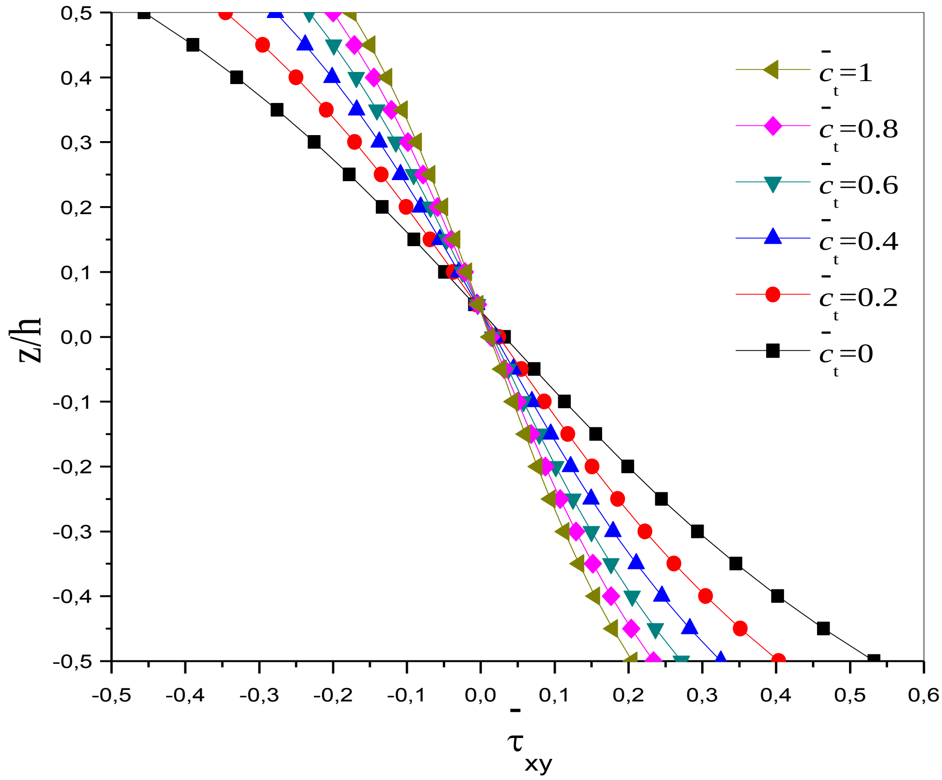

Figure IV-04: Variation de la contrainte du cisaillement adimensionnelle **(**$\bar{\tau}_{xy}$ **)** dans l'épaisseur d'une plaque FG carrée (p=2, a/h=10, k_w=100, k_s=10 et q0=100) pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement.

La figure IV.04 montre la variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée pour différentes valeurs du terme de Viscosité $\bar{c}_t$. Les résultats révèlent que les contraintes de compression maximales se produisent en un point proche de la surface inferieure et que les contraintes de traction maximales se produisent en un point proche de la surface supérieure de la plaque de FGM. De nouveau, les contraintes de cisaillement dans le plan sont très sensibles à l'inclusion du terme Viscoélastique près des surfaces externes de la plaque.

IV.3. Analyse de la vibration

Afin de prouver l'exactitude de la théorie proposée en prévoyant la réponse dynamique des plaques, plusieurs exemples sont présentés et discutés dans cette section.

Tableau IV.08: Comparaison des trois premières fréquences adimensionnelles $\tilde{\omega}/\pi^2$ d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée UDL pour différentes valeurs du module de Winkler **(**$a/h=5$ et $K_s=10$**).**

$\tilde{\omega}_{mn}$	Théorie		$K_w=0$	$K_w=10$	$K_w=10^2$	$K_w=10^3$
$\tilde{\omega}_{11}$	3D Zhou et al_2004[125]		2.2334	2.2539	2.4300	3.7111
	HSDPT Matsunaga_2000[126]		2.2334	2.2539	2.4300	3.7112
	Sheikholeslami et al_2013[25]		2.2334	2.2539	2.4300	3.7111
	Benahmed et al_2017[117]		2.2383	2.2590	2.4377	3.7726
	Présente	$\bar{c}_t=0$	2.2469	2.2678	2.4485	3.8093
		$\bar{c}_t=0.05$	2.2989	2.3194	2.4964	3.8402
		$\bar{c}_t=0.1$	2.3498	2.3699	2.5433	3.8708
		$\bar{c}_t=1$	3.1274	3.1425	3.2752	4.3860
$\tilde{\omega}_{12}$	3D Zhou et al_2004[125]		4.4056	4.4150	4.4986	5.2285
	HSDPT Matsunaga_2000[126]		4.4056	4.4150	4.4986	5.2285
	Sheikholeslami et al_2013[25]		4.4056	4.4150	4.4986	5.2285
	Benahmed et al_2017[117]		4.4220	4.4317	4.5182	5.2959
	Présente	$\bar{c}_t=0$	4.4464	4.4564	4.5458	5.3582
		$\bar{c}_t=0.05$	4.4714	4.4814	4.5703	5.3790
		$\bar{c}_t=0.1$	4.4964	4.5063	4.5947	5.3997
		$\bar{c}_t=1$	4.9234	4.9325	5.0134	5.7602
$\tilde{\omega}_{13}$	3D Zhou et al_2004[125]		7.2436	7.2487	7.2948	7.7191
	HSDPT Matsunaga_2000[126]		7.2436	7.2488	7.2948	7.7191
	Sheikholeslami et al_2013[25]		7.2436	7.2488	7.2948	7.7191
	Benahmed et al_2017[117]		7.2864	7.2919	7.3412	7.8096
	Présente	$\bar{c}_t=0$	7.3280	7.3339	7.3862	7.8904
		$\bar{c}_t=0.05$	7.3426	7.3485	7.4007	7.9040
		$\bar{c}_t=0.1$	7.3572	7.3630	7.4151	7.9175
		$\bar{c}_t=1$	7.6144	7.6201	7.6704	8.1571

Le tableau IV.08 montre la comparaison de la fréquence naturelle adimensionnelle entre les trois premières mode propres pour une plaque carrée simplement appuyée reposant sur une fondation Visco-Pasternak en utilisant la théorie courante et ceux données par [Zhou et al_2004][125], [Matsunaga_2000[126]], [Sheikholeslami et al_2013[25]] et [Benahmed et al_2017[115]]. On voit que les résultats de la présente théorie qui considère l'effet d'étirement sont en excellent accord avec ceux prédits par d'autres théories. Cependant, l'inclusion de l'effet de Viscosité augmente les valeurs des fréquences. Ainsi, cet effet rend la plaque rigide.

Tableau IV.09: Comparaison de la fréquence naturelle adimensionnelle $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FG carrée en fonction des paramètres de Visco-Pasternak, l'indice de puissance et le rapport d'épaisseur-longueur (h/a).

P	Théorie	$\bar{c}_t$	kw=0,ks=0				kw=0,ks=100				kw=100,ks=0				kw=100,ks=100			
			h/a															
			0.05	0.1	0.15	0.2	0.05	0.1	0.15	0.2	0.05	0.1	0.15	0.2	0.05	0.1	0.15	0.2
0	Ref[(a)]	0	0.0291	0.1135	0.2459	0.4169	0.0405	0.1593	0.3487	0.5988	0.0298	0.1163	0.2521	0.4281	0.0410	0.1613	0.3531	0.6070
	Ref[(b)]	0	0.0291	0.1134	0.2454	0.4154	0.0406	0.1599	0.3515	0.6080	0.0298	0.1162	0.2519	0.4273	0.0411	0.1619	0.3560	0.6162
	Ref[(c)]	0	0.0291	0.1136	0.2461	0.4174	0.0406	0.1594	0.3492	0.6011	0.0298	0.1164	0.2524	0.4286	0.0411	0.1614	0.3537	0.6089
	Présente	0	0.0291	0.1138	0.2467	0.4185	0.0406	0.1596	0.3501	0.6040	0.0298	0.1165	0.2529	0.4298	0.0411	0.1615	0.3545	0.6119
		0.05	0.0293	0.1145	0.2483	0.4214	0.0407	0.1600	0.3512	0.6060	0.0300	0.1172	0.2545	0.4326	0.0412	0.1620	0.3556	0.6139
		0.1	0.0295	0.1152	0.2498	0.4242	0.0408	0.1605	0.3523	0.6080	0.0301	0.1179	0.2560	0.4354	0.0413	0.1625	0.3567	0.6158
		1	0.0324	0.1269	0.2766	0.4724	0.0430	0.1692	0.3718	0.6425	0.0330	0.1294	0.2822	0.4825	0.0435	0.1711	0.3759	0.6500
1	Ref[(a)]	0	0.0222	0.0870	0.1891	0.3222	0.0377	0.1482	0.3236	0.5509	0.0233	0.0911	0.1983	0.3383	0.0384	0.1506	0.3288	0.5598
	Ref[(b)]	0	0.0227	0.0891	0.1939	0.3299	0.0382	0.1517	0.3365	0.5876	0.0238	0.0933	0.2036	0.3476	0.0388	0.1542	0.3422	0.5978
	Ref[(c)]	0	0.0226	0.0883	0.1918	0.3264	0.0380	0.1497	0.3295	0.5699	0.0236	0.0924	0.2011	0.3431	0.0386	0.1521	0.3349	0.5794
	Présente	0	0.0226	0.0884	0.1922	0.3272	0.0380	0.1498	0.3303	0.5733	0.0236	0.0925	0.2015	0.3439	0.0386	0.1523	0.3358	0.5830
		0.05	0.0228	0.0894	0.1945	0.3315	0.0381	0.1504	0.3317	0.5757	0.0238	0.0935	0.2037	0.3480	0.0387	0.1529	0.3371	0.5854
		0.1	0.0231	0.0904	0.1969	0.3357	0.0383	0.1510	0.3331	0.5781	0.0241	0.0944	0.2059	0.3520	0.0389	0.1535	0.3385	0.5878
		1	0.0273	0.1073	0.2350	0.4040	0.0410	0.1617	0.3569	0.6203	0.0282	0.1107	0.2426	0.4176	0.0415	0.1640	0.3620	0.6292
2	Ref[(a)]	0	0.0202	0.0789	0.1711	0.2906	0.0373	0.1463	0.3180	0.5370	0.0214	0.0836	0.1817	0.3092	0.0380	0.1489	0.3236	0.5460
	Ref[(b)]	0	0.0209	0.0819	0.1778	0.3016	0.0380	0.1508	0.3351	0.5861	0.0221	0.0867	0.1889	0.3219	0.0386	0.1535	0.3412	0.5970
	Ref[(c)]	0	0.0207	0.0807	0.1748	0.2965	0.0376	0.1483	0.3265	0.5650	0.0218	0.0854	0.1855	0.3158	0.0383	0.1509	0.3323	0.5752
	Présente	0	0.0207	0.0807	0.1748	0.2966	0.0376	0.1483	0.3269	0.5673	0.0218	0.0854	0.1856	0.3159	0.0383	0.1510	0.3328	0.5777
		0.05	0.0210	0.0819	0.1776	0.3015	0.0378	0.1490	0.3284	0.5699	0.0221	0.0865	0.1881	0.3206	0.0384	0.1516	0.3342	0.5802
		0.1	0.0213	0.0831	0.1803	0.3064	0.0379	0.1496	0.3298	0.5725	0.0224	0.0877	0.1907	0.3252	0.0386	0.1522	0.3356	0.5828
		1	0.0260	0.1021	0.2234	0.3837	0.0408	0.1610	0.3552	0.6173	0.0270	0.1059	0.2319	0.3989	0.0414	0.1634	0.3606	0.6268

Ref[(a)] Sheikholeslami et al 2013[25], Ref[(b)] Baferani et al_2011[23], Ref[(c)] Benahmed et al_2017[117]

La fréquence naturelle adimensionnelle $\hat{\omega}$ d'une plaque carrée FGM par rapport les paramètres de Visco-Pasternak (K_w, K_s et $\bar{c}_t$), l'indice de puissance (***P)*** et le rapport d'épaisseur-longueur *(h/a)* sont présentés dans le tableau IV.09. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux donnés par d'autres théories. Aussi la considération de la Viscosité rend la plaque rigide.

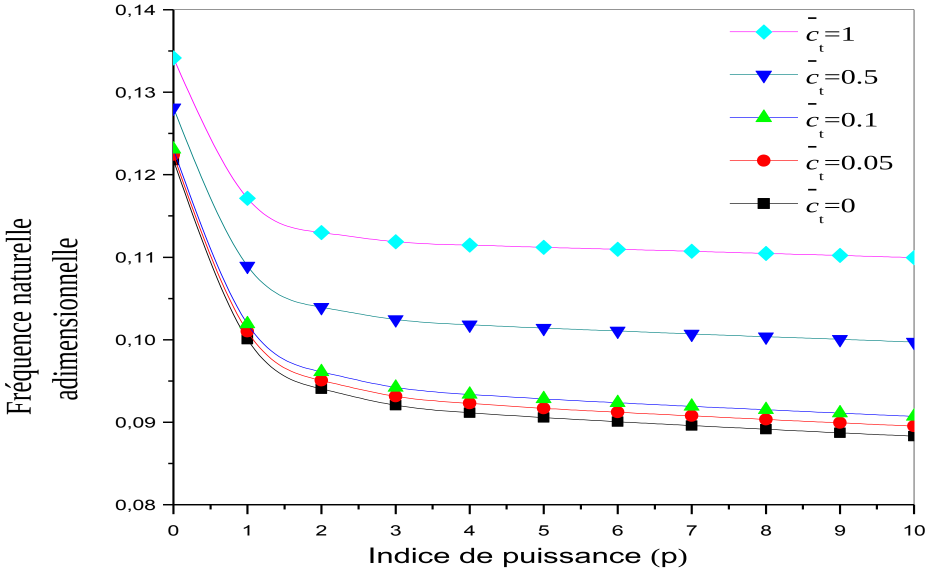

Figure IV.05: Variation de la fréquence naturelle adimensionnelle en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement (a/b=1, a/h=10, k_w=100 et k_s=10).

La figure IV.05 présente la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle de la plaque FGM carrée simplement appuyée, en fonction de la variation de l'indice de puissance pour différentes valeurs du coefficient de Viscosité $\bar{c}_t$ .Il peut observer que l'augmentation de l'indice de puissance rend la plaque flexible. Cependant, l'augmentation du coefficient de Viscosité rend la plaque rigide.

IV.4. Conclusion

Le modèle présenté contient seulement quatre variables inconnues, satisfait les conditions de frontière zéro de traction sur les surfaces de la plaque sans exiger un facteur de correction de cisaillement et considère l'effet d'étirement d'épaisseur. Ainsi, un temps informatique, considérablement inférieur est atteint. L'exactitude de la formulation proposée est prouvée en la comparant aux solutions existantes, et l'excellent accord a été observé dans tous les cas où l'effet de Viscosité est omis. L'intégration de cet effet rend la plaque plus rigide, et par conséquent mène à une réduction de la flèche et d'une augmentation de la fréquence.

Conclusion générale

Dans ce travail, le modèle simple quasi-3D de déformation de cisaillement hyperbolique est utilisé pour le comportement en flexion et en vibration libre des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations Visco-Pasternak. il satisfait la condition de la contrainte de cisaillement nulle dans les bords libres de la plaque. La caractéristique importante de ce modèle est qu'en plus d'inclure l'effet d'étirement d'épaisseur, il ne traite que 4 inconnues, moins que ce qui est utilisé dans les autres théories correspondantes, et donc un effort de calcul beaucoup plus faible est atteinte.

La validation de l'exactitude de la présente théorie est déterminée par des comparaisons avec les solutions existantes des différentes théories proposées dans la littérature et donne un excellent accord pour tous les cas où l'effet de Viscosité est omis. L'inclusion de l'effet de Viscosité mène à une réduction de la flèche et une augmentation de la fréquence, par conséquent rend la plaque plus rigide.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi efficace pour la prédiction des déplacements, des contraintes et les fréquences naturelles des deux plaques homogène et en FGM reposant sur des fondations Visco-Pasternak..

En fin, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés.

Références bibliographiques

[01] Reddy J.N (2000) "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Method. Eng.*, 47(1-3), 663-684.

[02] Qian L.F and Batra R.C. (2005) "Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov-Galerkin Method", *Computat. Mech.*, 35(3), 214-226.

[03] Eltaher M.A, Alshorbagy A.E, Mahmoud F.F (2013), "Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams", *Composite Structures*, 99, 193-201.

[04] Akbaş Ş.D (2015) "Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(6), 1421-1447.

[05] Arefi M (2015) "Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 659-672.

[06] Pradhan K.K and Chakraverty S (2015) "Free vibration of functionally graded thin elliptic plates with various edge supports", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(2), 337-354.

[07] Ebrahimi F and Dashti S (2015) "Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(5), 1279-1298.

[08] Kar V.R and Panda S.K (2015) "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 693-709.

[09] Daouadji T.H, Hadji L (2015) "Analytical solution of nonlinear cylindrical bending for functionally graded plates", *Geomechanics and Engineering*, 9(5), 631-644.

[10] Barati M.R and Shahverdi H (2016) "A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under nonuniform temperature distributions with different boundary conditions", *Struct. Eng. Mech.*, Int. J., 60(4), 707-727.

[11] Avcar M (2015) "Effects of rotary inertia shear deformation and non-homogeneity on frequencies of beam", *Struct Eng Mech*, 55, 871–884.

[12] Avcar M (2019) "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615.

[13] Ahmed R.A, Fenjan R.M, Faleh N.M (2019) "Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections", *Geomechanics and Engineering*, 17(2), 175-180.

[14] Hussain M, Naeem M.N (2019) "Effects of ring supports on vibration of armchair and zigzag FGM rotating carbon nanotubes using Galerkin's method", *Composites Part B: Engineering*, 163, 548-561.

[15] Karami B, Karami S (2019) "Buckling analysis of nanoplate-type temperature-dependent heterogeneous materials", *Advances in Nano Research*, 7(1), 51-61.

[16] Pasternak P.L (1954) "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, 1, Moscow: USSR, 1-56. [In Russian].

[17] Winkler E (1867) "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit", Prag Dominicus.

[18] Kerr A.D (1964) "Elastic and Viscoelastic foundation models", *J Appl Mech*, 31, 491-498.

[19] Huang Z.Y, Lu C.F and Chen W.Q (2008), "Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *Compos. Struct.*, 85(2), 95-104.

[20] Malekzadeh P (2009) "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Compos. Struct.*, 89(3), 367-373.

[21] Amini M.H, Soleimani M and Rastgoo A (2009) "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation", *Smart Mater. Struct.*, 18(8), 1-9.

[22] Lü C.F, Lim C.W, Chen W.Q (2009), "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundation", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 16(8), 576-584.

[23] Baferani A.H, Saidi A.R and Ehteshami H (2011) "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Compos. Struct.,* 93(7), 1842-1853.

[24] Fallah A, Aghdam M.M and Kargarnovin M.H (2013) "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method", *Arch. Appl. Mech.*, 83(2), 177-191.

[25] Sheikholeslami S.A and Saidi A.R (2013), "Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory", *Compos. Struct.*, 106, 350-361.

[26] Sobhy M (2013) "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", *Compo. Struct.*, 99, 76-87.

[27] Bouderba B, Houari M.S.A and Tounsi A (2013) "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct.*, 14(1), 85-104.

[28] Yaghoobi H and Yaghoobi P (2013) "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach", *Meccanica*, 48(8), 2019-2035.

[29] Meziane M.A.A, Abdelaziz H.H and Tounsi A (2014) "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.

[30] Zidi M, Tounsi A, Houari M.S.A and Bég O.A (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerospace Sci. Tech.*, 34, 24-34.

[31] Zeighampour H, Beni Y.T (2015) "Free vibration analysis of axially functionally graded nanobeam with radius varies along the length based on strain gradient theory", *Applied* Mathematical Modelling, 39(18), 5354-5369.

[32] Beldjelili Y, Tounsi A, Mahmoud S.R (2016) "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Structures and Systems*, 18(4), 755-786.

[33] Kolahchi R, Safari M, Esmail M (2016) "Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced Visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium", *Composite Structures*, 150, 255–265.

[34] Attia A, Bousahla A.A, Tounsi A, Mahmoud S.R, Alwabli A.S (2018) "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations", *Struct. Eng. Mech.*, 65(4). 453-464.

[35] Kadari, B., Bessaim, A., Tounsi, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), "Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations", *Journal of Nano Research*, **55**, 42-56.

[36] Bakhadda B, Bachir Bouiadjra M, Bourada F, Bousahla A.A, Tounsi A, Mahmoud S.R (2018) "Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation", *Wind and Structures*, 27(5), 311-324.

[37] Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F.Z., Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2019), "Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation", Structural Engineering and Mechanics, (Accepted).

[38] Avcar, M., & Mohammed, W.K.M. (2018), "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation", Arabian Journal of Geosciences, 11(10), 232.

[39] Arani, A.G., & Kiani, F. (2018), "Nonlinear free and forced vibration analysis of microbeams resting on the nonlinear orthotropic visco-Pasternak foundation with different boundary conditions", Steel and Composite Structures, 28(2), 149-165.

[40] Arshid, E., Khorshidvand A.R., Khorsandijou, S.M. (2019), "The effect of porosity on free vibration of SPFG circular plates resting on visco-Pasternak elastic foundation based on CPT, FSDT and TSDT", *Structural Engineering and Mechanics*, **70**(1), 97-112.

[41] Koizumi M, FGM activities in Japan, Composites; Japan 28 (1-2):1– 4. 1997

[42] Nguyen T. K, Sab K, Bonnet G (2007) "Shear correction factors of functionally graded plates", Mech. Advanced Mater. Struct; 14 (8): 567-575,.

[43] Okamura H (1991) "State of the arte of material design projects for severe service applications", Mater. Sci. Eng :A; 143 (1-2): 3-9,.

[45] Lostec L (1997) "Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges,.

[46] Nguyen V.T. (2004) "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,.

[47] Müller E, Drašar C, Schilz J, and Kaysser W.A (2003) "Functionally graded materials for sensor and energy applications, Materials Science and Engineering" , A362, 17–39

[48] Qiu J, Tani J, Ueno T, Morita T, Takahashi H, and Du H (2003), "Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators" , Smart Materials and Structures, 12, 115–121.

[49] Liu L.S, Zhang Q.J, and Zhai P.C (2003), "The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method" , Materials Science Forum, 423–425, 791–796.

[50] Paszkiewicz B, Paszkiewicz R, Wosko M, Radziewicz D, Sciana B, Szyszka A, Macherzynski W, and Tlaczala M (2008), "Functionally graded semiconductor layers for devices application" , Vacuum, 82, 389–394.

[51] Watari F, Yokoyama A, Omori M, Hirai T, Kondo H, Uo M, and Kawasaki T (2004), "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application" , Composites Science and Technology, 64, 893–908.

[52] Fuchiyama T and Noda N (1995), "Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material" , JSAE Review, 16, 263–268.

[53] Markworth A.J, Ramesh K.S and Parks W.P (1995), "Review: modeling studies applied to functionally graded materials" , Journal of Material Sciences, 30, 2183–2193.

[54] Tanigawa Y (1995) "Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials" , Applied Mechanics Reviews, 48, 287–300.

[55] Noda N (1999), "Thermal stresses in functionally graded material" , Journal of Thermal Stresses, 22, 477–512.

[56] Paulino G.H, Jin Z.H, and Dodds Jr. R.H (2003), "Failure of functionally graded Materials" , in Comprehensive Structural Integrity, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.

[57] Hui- shen (2009) "functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells" CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group.

[58] Williams J.C (1976), Doctor-Blade Process, in Treatise on Materials Science and Technology, New York: Academic Press, , p. 173-98.

[59] Boch P, Chartier T & Huttepain M (1986) "Tape Casting of Al2O3/ZrO2 Laminated Composites" , J. Am. Ceram. Soc., , Vol. 69, N°. 8, p. C-191-C-192.

[60] Boch P (1987) "Tape Casting of Layered Composites, in Processing of Advanced Ceramics". Edited by J. S. Moya and S. de Aza. Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, , p. 103-112.

[61] Mistler, R.E (1973), "High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple-Layer Casting Technique" , Am. Ceram. Soc. Bull., , Vol. 52, N°. 11, p. 850-54.

[62] Moya J.S, Sanchez-Herencia A.J, Requena J & Moreno R (1992) "Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting" , Materials Letters, , Vol. 14, p.333-35.

[63] Abdizadeh H (1997) "Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine» ", Thèse Docteur d'Etat, I.N.S.A -Université Claude Bernard Lyon I-France, , 212p.

[64] Bishop A, Lin C.Y, Navaratnam M, Rawlings R.D, & Mcshane H.B (1993) "A Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process" , Journal of Materials Science Letters, , Vol. 12, p.1516-18.

[65] Steffens H.D, Dvorak M. & Wewel M (1990) "Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing and Applications" , in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, , p. 139-43.

[66] Kawai C, Wakamatsu S, Sakagami S, & Igarashi T (1990) "Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD", in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, p. 77-82.

[67] Takahashi M, Itoh Y & Kashiwaya H (1990) "Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique", in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, p.129-34.

[68] Yuki M, Murayama T & Irisawa T (1991) "Temprature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating", in Proceeding of The Firs International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan.

[69] Delale F, Erdogan F (1983) "The crack problem for a nonhomogeneous plane". ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614,

[70] Chi. Shyang-ho, Chung Yen-Ling (2003) "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243.

[71] Noor A. K & Burton W. S (1989) "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. Appl Mech Rev, vol. 42, no. 1, pages 1,12.

[72] Kapania R.K. & Raciti S (1989) "Recent advances in analysis of laminated beams and plates", Part I: Shear effects and buckling. AIAA Journal, vol. 27, no. 7, pages 923,934.

[73] Kant T & Swaminathan K (2000) "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments". Composite structures, vol. 49, pages 65,75.

[74] Carrera E (2000) "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates". Composite structures, vol. 50, pages 183,198,.

[75] Pagano N.J (1969) "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending". J Comp. Mat., vol. 3, pages 398-411.

[76] Pagano N.J (1970) "Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates" . J. Comp. Mat., vol. 4, pages 20-35,.

[77] Srinivas S. & Rao A.K (1970) "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates". Int J Solids Structures, vol. 6, pages 1463{1481.

[78] Srinivas S & Rao A.K (1973) "Flexure of thick plates. ASME, pages 298-299.

[79] Reissner E & Stavsky Y (1961) "Bending and stretching of certain types of heterogeneous isotropic elastic plate". J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402,408.

[80] Kirchhoff G (1850) "Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. Journal fur reine und angewandte Mathematik", vol. 40, pages 51, 88.

[81] Reissner E (1945) "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69, 77.

[82] Mindlin. R.D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. J.Appl.Mech; 18 (1): 31-38, 1951.

[83] Timoshenko S.P, Woinowsky. S -Krieger, Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.

[84] Reddy J.N., Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, 1997.

[85] Reddy J.N, Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.

[86] Whitney J.M (1973) "Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads". J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304.

[87] Liberscu L (1967) "On the theory of anisotropic elastic shell and plates". Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68.

[88] Touratier M (1991) "An efficient standard plate theory". Engng Sci, vol. 29, no. 8, pages 901,916,.

[89] Karama M, Abou Harb B, Mistou S & Caperaa S (1998) "Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model". Composite Part B, vol. 29, no. 3, pages 223,234.

[90] Ait Atmane H, Tounsi A., Mechab I.., Adda Bedia E.A, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121, 2010.

[91] Ambartsumyan S.A (1969) "Theory of anisotropic plate". Technomic Publishing Co.

[92] Reddy J.N (1987) "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates". Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180.

[93] Reddy J.N (1984) "A simple higher-order theory for laminated composite plates". Jornal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752.

[94] Afaq K.S, Karama M & Mistou S (2003) "Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches". In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March.

[95] Aydogdu Metin (2005) "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", International Journal of Mechanical Sciences 47, 1740–1755.

[96] Chabot A (1997) "Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multipariculaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC.

[97] Di. Sciuva. M (1987) "An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates". Journal of Applied Mechanics, vol. 54, 589/596.

[98] Tahani M & Nosier A (2003) "Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate". Material and Design, vol. 24, pages 647, 658.

[99] Ren J.G (1986) "A new theory of laminated plate". Composite Science and Technology, vol. 26, pages 225, 239.

[100] Kassapoglou C, Lagace P.A (1987) "Closed form solutions for the interlaminar stress eld in angle-ply and cross-ply laminates"Journal of Composite Materials, vol.27,292,308.

[101] Yin W.L (1994) "Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sub laminate/layer model". International Journal of Solids and Structures, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564.

[102] Pagano N.J (1978) "Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385.

[103] Di Sciuva M. (1984) "A refined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates". Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279/295.

[104] Ossadzow C & Touratier M (2001) "An improved shear-membrane theory for multi-layered shells". Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95.

[105] Icardi U (2001) "Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sub laminates approximations". Composites: Part B, vol. 32, pages 343-354.

[106] [L.E. Aghalovyan. 2007]: An asymptotic method for solving three-dimensional boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies. In G.Jaiani and

G.Podio-Guidugli(Eds), IUTAM Symposium on Relations of Shell, Plate, Beam and 3D Models, Springer, 2007.

[107] [Nguyen D.T 2012] : Benchmark d'un modèle layer Wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Other. Université Paris-Est, 2012. French.

[108] El Meiche N, Tounsi A, Ziane N, Mechab I, Adda Bedia E.A (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences.*, 53, 237–247.

[109] Hebali H, Tounsi A, Houari M S A, Bessaim and Adda Bedia E (2014) "New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates "J. Eng. Mech..140:374-383.

[110] Zidi M, Houari M.S.A, Tounsi A, Bessaim A and Mahmoud S.R (2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct*. *Eng*. *Mech*., 64(2), 145-153.

[111] Belkorissat I, Houari M.S.A, Tounsi A, Adda Bedia E.A. and Mahmoud S.R (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos*. *Struct*., 18(4), 1063-1081.

[112] Fahsi A, Tounsi A, Hebali H, Chikh A, Adda Bedia E.A and Mahmoud S.R (2017), "A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomech*. *Eng*., 13(3), 385-410. https://doi.org/10.12989/gae.2017.13.3.385.

[113] Sekkal M, Fahsi B, Tounsi A, Mahmoud S.R(2017) "A new quasi-3D HSDT for buckling and vibration of FG plate", *Structural Engineering and Mechanics*, 64(6), 737-749.

[114] Zenkour A.M. (2016), "Buckling of a single-layered graphene sheet embedded in Visco-Pasternak's medium via nonlocal first-order theory", Advances in Nano Research, 4(4), 309-326.

[115] Younsi A, Tounsi A, Zaoui F.Z, Bousahla A.A, Mahmoud S.R (2018), "Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates", *Geomechanics and Engineering*, 14(6), 519-532.

[116] Shimpi R.P, Arya H. and Naik N.K (2003), "A higher order displacement model for the plate analysis", *J. Reinf. Plast. Compos.*, 22(22), 1667-1688.

[117] Benahmed A, Houari M.S.A, Benyoucef S, Belakhdar K, Tounsi A (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34.

[118] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Ait Atmane H and Adda Bedia E.A (2010), "Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Mech. Compos. Mater.*, 46(4), 425-434.

[119] Lam K.Y, Wang C.M and He X.Q (2000), "Canonical exact solutions for Levy-plates on two parameter foundation using Green's functions", *Eng. Struct.*, 22(4), 364-378.

[120] Kobayashi H and Sonoda K (1989), "Rectangular Mindlin plates on elastic foundations" , Int. J. Mech. Sci.,31(9), 679-692.

[121] Zenkour A.M and Sobhy M (2012), "Elastic foundation analysis of uniformly loaded functionally graded Viscoelastic sandwich plates", J. Mech., 28(3), 439452.

[122] Buczkowski R and Torbacki W (2001), "Finite element modeling of thick plates on two-parameter elastic foundation", Int. J. Numer. Anal. Method. Geomech., 25(14), 1409-1427.

[123] Thai H.T, Choi D.H (2011), "A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation", Compos. Sci. Technol., 71(16), 1850-1858.

[124] Zenkour A.M and Sobhy M (2013),"Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations" Aerosp.Sci.Technol,29(1),7-17.

[125] Zhou D, Cheung Y.K, Lo S.H and Au F.T.K (2004),"Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation", Int. J. Numer. Meth. Eng., 59(10), 1313-1334.

[126] Matsunaga H (2000), "Vibration and stability of thick plates on elastic foundations", J. Eng. Mech. (ASCE), 126(1), 27-34.