République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère d'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Doctorat en Sciences

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

Université Djilali Liabès

Spécialité "Génie Mécanique"

Option "Mécanique des Solides et des Structures"

présentée et soutenue par

Fatima Zohra KETTAF

Novembre 2015

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU VOILEMENT DES PLAQUES COMPOSITES

Jury

M. Mohamed MAZARI,	Professeur	UDL Sidi Bel Abbes	Président
M. Mohamed BENGUEDIAB,	Professeur	UDL Sidi Bel Abbes	Directeur de thèse
M. Abdelouhed TOUNSI,	Professeur	UDL Sidi Bel Abbes	Co-Directeur de thèse
M. Mohammed Sid Ahmed HOUARI,	MC A	Université de Mascara	Examinateur
M. Redha YEGHNEM,	MC A	Université de Saida	Examinateur
M. Mustapha BENACHOUR,	MC A	Université de Tlemcen	Examinateur
M. Chokri BOURAOUI,	Professeur	ENI Sousse (Tunisie)	Invité

Université Djillali Liabes
Faculté de technologie, laboratoire des matériaux et systèmes réactifs
Sidi Bel Abbes, Algérie

T
H
E
S
E

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Remerciement

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire matériaux et système réactif LMSR.
Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur le Professeur **Mohamed BENGUEDIAB** pour m'avoir confié un sujet aussi intéressant et d'actualité, pour sa disponibilité et son soutien pendant toutes ces années de recherche. J'ai beaucoup appris de lui et j'en apprendrai encore.
Je remercie vivement mon co-encadreur, le Professeur **Abdelouhed TOUNSI** qui s'est montré très disponible et à l'écoute de mes idées et mes questions malgré ses charges et d'avoir la gentillesse d'apporter généreusement son aide.
Je remercie le Professeur **Mohamed MAZARI**, directeur du laboratoire LMSR, de m'avoir aidée et encouragée et d'avoir accepté de présider le jury.
J'adresse mes remerciements à Messieurs les Docteurs **Mohammed Sid Ahmed HOUARI**, **Redha YEGHNEM**, **Mustapha BENACHOUR** et le Professeur **Chokri BOURAOUI** d'avoir accepté d'examiner ce travail.
J'adresse mes sincères remerciements à ma famille, tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Résumé

Ce travail porte sur l'étude du comportement du voilement des plaques en composite. Deux types de matériaux sont étudiés :
Premièrement, on va faire une étude sur des plaques multicouche hybrides. Les différentes théories de plaques tenant compte ou négligent le cisaillement transversal sont présentées et les résultats obtenus par ces théories sont comparés. Les relations non linéaires déformation-déplacement d'ordre supérieur ont été considérées. En utilisant le principe de l'énergie potentielle, les températures critiques de voilement sont déterminées. Enfin, une étude paramétrique de l'influence de différents paramètres tels que : les rapports d'aspect : b/a et a/h_{T}, l'épaisseur du métal, l'orientation des fibres et la séquence d'empilement sur la température critique de voilement est montrée et discutée. Les résultats numériques trouvés indiquent que l'addition des couches métalliques et la considération de la déformation due au cisaillement transversal ont un effet significatif sur le comportement du voilement thermique des plaques multicouches hybrides simplement appuyées.
La deuxième étude est faite sur des plaques sandwich à gradient de propriété fonctionnel (FGM hybride) simplement appuyées en utilisant un nouveau modèle hyperbolique de déplacement. Contrairement des autres théories, cette théorie ne donne que quatre équations d'équilibre, le nombre des inconnues est alors seulement quatre, par comparaison avec cinq en cas d'autres théories de déformation de cisaillement. Ce modèle tient compte de la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales et remplit la condition du cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans employer un facteur de correction. On assume que les propriétés mécaniques et le coefficient de dilatation thermique varient à travers l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance. Le noyau est homogène et fait d'un matériau isotrope. Les charges thermiques sont assumées uniformes, linéaires et non linéaires à travers l'épaisseur. Les résultats indiquent que l'indice de fraction de volume, le type de chargement et l'épaisseur des couches de la plaque ont une influence significative sur le voilement thermique des plaques sandwich à gradient de propriété fonctionnel.
Puis, et en utilisant le même modèle de déplacement, on va changer la configuration de notre plaque : dans le premier type, le noyau est en céramique et les deux peaux en FGM,

tandis que pour le deuxième type : les deux peaux sont en métal et céramique et le noyau est en FGM. On va employer la méthode de Rayleigh-Ritz. Les plaques sont supposées soit simplement appuyées soit encastrées. Les résultats trouvés montrent que la configuration de la plaque FGM ainsi que le type d'appui influent sur la charge critique du voilement des plaques sandwich FGM.

Mots clés— *Voilement thermique, plaques hybrides multicouches, cisaillement transversal, température critique, FGM hybride, nouveau modèle hyperbolique, cisaillement transversal, l'indice de fraction de volume, métal, céramique, méthode de Rayleigh-Ritz.*

Abstract

This work focuses on the study of the behavior of composite plates buckling. Two types of materials are studied :
The first study was on thermal buckling behavior of hybrid multilayer plates was investigated in this paper. Different theories of plates taking into account or neglect the transverse shear are presented and the obtained results by these theories are compared. Nonlinear higher-order strain-displacement relations were considered. Using the principle of potential energy, the critical buckling temperatures are determined. Finally, a parametric study of the influence of various parameters such as : aspect ratios : b/a and a/h_{T}, thickness of metal, fiber angle and stacking sequence on the critical buckling temperature is shown and discussed. Numerical results indicate that the addition of metal to a composite material and the consideration of the transverse shear deformation have a significant effect on the thermal buckling behavior of simply supported hybrid multilayer plates.
In the second study, the thermal buckling behavior of functionally graded sandwich plates is studied using a new hyperbolic displacement model. Unlike any other theory, the theory is variationally consistent and gives four governing equations. Number of unknown functions involved in displacement field is only four, as against five in case of other shear deformation theories. This present model takes into account the parabolic distribution of transverse shear stresses and satisfies the condition of zero shear stresses on the top and bottom surfaces without using shear correction factor. Material properties and thermal expansion coefficient of the sandwich plate faces are assumed to be graded in the thickness direction according to a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic material. The thermal loads are assumed as uniform, linear and non-linear temperature rises across the thickness direction. The results reveal that the volume fraction index, loading type and functionally graded layers thickness have significant influence on the thermal buckling of functionally graded sandwich plates.
Then, using the same displacement model, we will change the configuration of our plate : the first type, the core is ceramic, while the two skins are composed of a FGM. For the second type : the two skins are metal and ceramic and core and FGM. We will use the method of Rayleigh-Ritz. The plates are assumed to be simply supported or clamped. The

results show that the configuration of the FGM plate and the type of support affect the critical load of buckling of functionally graded sandwich plates.

Keywords— *Thermal buckling, hybrid multilayer plates, transverse shear, critical buckling temperatures, new plate theory, thermal buckling, functionally graded plate, volume fraction index, metal, ceramic, Rayleigh-Ritz method.*

Introduction Générale

Il existe différentes familles des matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, les matériaux sandwiches, les matériaux intelligents, etc.… Le développement et les changements rapides des produits, des pratiques technologiques et industrielles sont accompagnés par de nouvelles générations de matériaux. Parmi ces matériaux, les composites qui ne cessent d'évoluer vers des produits qui sont, soit le moins coûteux possible, soit le plus performant, ou bien les deux à la fois. De plus, dans un souci de protection de l'environnement et de santé publique, les composites tendent à intégrer un caractère écologique. Ces matériaux occupent aujourd'hui une place importante dans les produits manufacturables.

Malgré le taux des biens apportés par les composites, ils restent encore faibles nécessitant une amélioration concernant leur conductivité, la possibilité d'assemblage, la résistance vis-à-vis la température et d'autre milieux agressifs...

La science des matériaux a fait de grands progrès au siècle dernier. Des matériaux révolutionnaires ont été conçus pour résister même aux environnements inhospitaliers de l'espace extra-atmosphérique. De nouveaux défis attendent ce secteur en rapide expansion, à la fois dans l'aérospatiale et dans d'autres secteurs d'application.

Les FGM (Functionally Graded Materials) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux. Les FGM les plus courants allient la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques.

Les FGM sont générés par différents procédés, ils sont très prometteurs au regard des applications présentant des conditions de fonctionnement extrêmes. La demande est grande en faveur de FGM capables de supporter de fortes températures et des environnements de frottement élevé afin d'aider l'industrie de faire de grands pas vers l'avant.

La combinaison entre les composites et les métaux a donné naissance à une gamme de matériaux ayant la légèreté et la résistance d'un composite et la rigidité d'un métal dits matériaux hybrides multicouches. Les matériaux hybrides sont aussi largement utilisés dans la confection des différentes pièces. Contrairement aux composites traditionnels, ils peuvent être assemblés et sont très utilisé dans l'aéronautique.

L'étude du comportement de tels matériaux est très nécessaire afin de prétendre leur attitude et d'estimer leur durée de vie pour en avoir des pièces robustes et fiables.
A cause de leur géométrie spéciale, les plaques en composite sont largement utilisées dans la confection des structures mécaniques, donc elles sont objet de se déformer suite à différentes combinaisons de chargement, ce qui induit à différents phénomènes tels que le Voilement.

Dans ce mémoire on s'intéresse au voilement : un phénomène qui se produit lorsque la répartition et la quantité des contraintes dépasse un certain niveau critique ; ces contraintes ont plusieurs origines :

- Des origines thermiques où un matériau est soumis à des variations de température.
- Des origines mécaniques quand un matériau subit une déformation plastique hétérogène.

Ce mémoire comporte une introduction générale, six chapitres et une conclusion générale :

- On va présenter dans le chapitre premier des généralités sur les composites en décrivant leurs Lois de comportement, types et classification ;
- Puis on passera à des généralités sur les FGM en montrant leurs origines, motivation et développement ;
- Le troisième chapitre comporte un petit aperçu sur les théories des plaques donnant au lecteur une idée générale sur les théories existantes en montrant leur différence et leur limitation ;
- Le chapitre suivant comporte une étude du voilement thermique des plaques hybrides multicouches ;
- Le cinquième chapitre comporte une étude du voilement thermique des plaques sandwich en FGM en utilisant un nouveau modèle hyperbolique de cisaillement ;

— Finalement, on va faire une étude du Voilement des plaques sandwich FGM en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz.

Chapitre 1

Généralités sur les Matériaux Composites

« *Une chose qui s'explique cesse de nous regarder.* »

(Friedrich Wilhelm Nietzsche)

Sommaire

L'industrie désire dans un grand nombre de problèmes concevoir des structures présentant un rapport performance-poids le plus élevé possible. Pour obtenir cela, elle recherche des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques maximales. Tous ces matériaux présentent un défaut majeur, ils sont fragiles et donc cassants ; un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure ; on n'obtient donc pas la résistance théorique espérée. Si ces mêmes matériaux sont fabriqués sous forme de fibres, leurs résistances pratiques sont augmentées considérablement. L'exemple le plus connu est celui du verre. Une plaque de verre casse facilement ; par contre, un ensemble de fibres de verre résiste à une contrainte de traction de l'ordre de 3000 MPa, soit deux fois la résistance d'un acier très haute résistance. Cela tient au fait que :

— la probabilité d'avoir un défaut est plus faible sur une fibre que sur une plaque.

— un défaut dans une fibre n'entraîne que la rupture de celle-ci ; le défaut ne se propage pas.

Pour utiliser pratiquement ces fibres, il est nécessaire de les lier par une matrice. La matrice a un rôle mécanique important ; en traction elle retransmet l'effort d'une fibre cassée vers d'autres fibres ; en compression elle stabilise les fibres en flambage.
Un tel matériau constitué de deux phases distinctes (fibres assemblées par une matrice) est hétérogène. L'analyse de son comportement et la prévision de ses propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages (Les propriétés sont élevées uniquement dans la direction des fibres. Pour réaliser des structures soumises à des efforts multiaxiaux, il est nécessaire d'orienter cet élément de base suivant des directions déterminées en fonction des sollicitations)... Toutefois, les propriétés électriques, chimiques, photochimiques, thermiques sont largement affectées par celles de la matrice.

1.1 Définition

Une structure en composite est un système matériel constitué par deux ou plusieurs phases sur une échelle macroscopique, dont les performances et les propriétés mécaniques sont conçues pour être supérieures à celles des matériaux constitutifs agissant de manière indépendante. L'une des phases est généralement discontinue, plus rigides et plus forte et appelée renfort, tandis que la phase moins rigide, plus faible et continue est appelée matrice. Parfois, en raison des interactions chimiques ou d'autres effets de transformation, une phase supplémentaire, appelée interphase, existe entre les renforts et la matrice. Les propriétés d'un matériau composite dépendent des propriétés des consti-

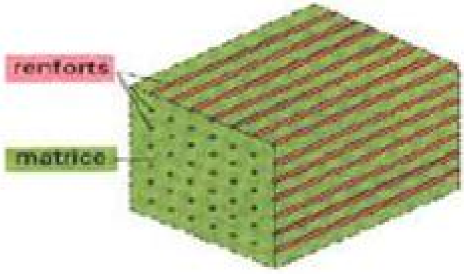


FIGURE 1.1 – Phases d'un matériau composite.

tuants, la géométrie et la distribution des phases.
Un des paramètres les plus importants est la fraction volumique (ou poids) de renfort, ou taux volumique des fibres. La distribution de renfort détermine l'homogénéité ou uniformité du système matériel, ainsi que leur géométrie et orientation affectent l'anisotropie du système. D'une manière générale, le matériau composite c'est l'ensemble fibre/matrice (Figure1.1). Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique). Parmi les composites, on distingue deux types : les composites grande diffusion (GD) et les composites haute performance (HP).
Les GD : Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.
Les HP : Principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à sels des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP. On utilisera des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotages on utilisera des plastiques renforcés.

1.2 Développement historique

Historiquement, la notion de renfort fibreux est très ancienne. Il ya des références bibliques à des briques d'argile de paille renforcés dans l' ?gypte ancienne. Des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie au XIXe siècle, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé). Résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite au début du XXe siècle. Le premier bateau en fibre de verre a été fait en 1942 ; des matières plastiques renforcées ont également été utilisées dans les aéronefs et les composants électriques à ce moment. L'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950. Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968. Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970. DuPont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973. A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, les équipements de sport et les industries biomédicales. Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 90, l'accent est mis sur le développement des matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique, ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température. les applications des composite comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des aéronefs et des structures aérospatiales, composantes d'automobile, des équipements sportifs, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des performances mécaniques élevées et/ou la stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids.[1]

1.3 Avantages et inconvénients

Les Composites ont des avantages uniques par rapport aux matériaux monolithiques, comme :

— haute résistance,

— haute rigidité,

— longue durée de vie de fatigue,

— faible densité,

— meilleure tenue au feu,

— insensibilité aux produits chimiques couramment utilisés dans la mécanique,

— adaptabilité à la fonction prévue de la structure.

Une amélioration supplémentaire peut être réalisée en :

— résistance à la corrosion,

— résistance à l'usure,

— apparence,

— stabilité thermique,

— isolation thermique,

— conductivité thermique,

— isolation acoustique,

— tenue aux chocs et aux impacts,

— problèmes d'assemblage.

— coûts prohibitifs.

1.4 Définitions géométriques et physiques

1.4.1 Type de matériau

En fonction du nombre de ses constituants ou ses phases, un matériau est appelé monophasé (ou monolithique), biphasé (ou à deux phases), triphasé, ou multiphasé. Les différentes phases d'un composite ont des propriétés physiques et mécaniques et des dimensions caractéristiques distinctes beaucoup plus grandes que les dimensions des molécules ou des grains.

1.4.2 Homogénéité

Un matériau est appelé homogène si ses propriétés sont les mêmes à chaque point ou sont indépendantes de l'emplacement. Le concept d'homogénéité est associé à un volume caractéristique et à la définition des propriétés concernées. Selon le volume observé, le matériau peut être homogène ou moins homogène. Si une faible variabilité existe d'un point à l'autre à l'échelle macroscopique, le matériau est considéré comme quasi-homogène.

1.4.3 Hétérogénéité ou Inhomogénéité

Un matériau est hétérogène ou inhomogène si ses propriétés varient d'un point à un autre ou dépendent de la localisation. Comme dans le cas ci-dessus, le concept d'hétérogénéité est associé à un volume ou à une échelle caractéristique. Quand cette échelle diminue, le même matériau peut être considéré comme homogène, quasi-homogène ou hétérogène.

Dans la figure 1.2 par exemple, le matériau est considéré comme homogène et anisotrope à l'échelle macroscopique, car il a une composition semblable à différents endroits (A et B), mais ses propriétés varient avec l'orientation. Sur une échelle microscopique, le matériau est hétérogène et isotrope, ayant des propriétés différentes mais indépendantes de l'orientation (a et b).

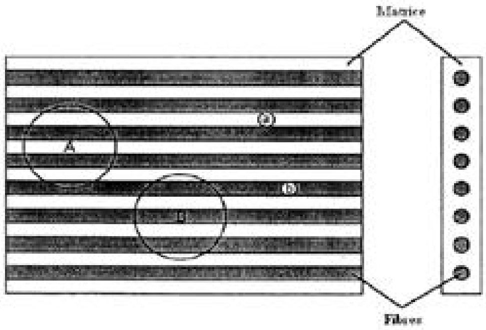


FIGURE 1.2 – Observations macroscopiques (A,B) et microscopiques (a,b) pour une couche unidirectionnelle.

1.4.4 Isotropie

De nombreuses propriétés des matériaux, tels que la rigidité, la résistance, la dilatation thermique et la conductivité thermique, sont associées à une direction. Un matériau est isotrope lorsque ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions ou sont indépendantes de l'orientation des axes de référence.

1.4.5 Anisotropie / Orthotropie

Un matériau est anisotrope lorsque ses propriétés en un point varient avec la direction ou dépendent de l'orientation des axes de référence. Si les propriétés du matériau selon une direction quelconque sont les mêmes que ceux dans une direction symétrique par rapport à un plan, alors ce plan est défini comme un plan de symétrie du matériau. Un matériau peut avoir zéro, un, deux, trois ou nombre infini de plans de symétrie à travers un point. Un matériau sans aucun plan de symétrie est appelée anisotrope général. A l'autre extrémité, un matériau isotrope a un nombre infini de plans de symétrie.
Dans les matériaux composites on trouve des matériaux orthotropes, c'est à dire, les matériaux ayant au moins trois plans perpendiculaires de symétrie. Les intersections de ces plans définissent trois axes perpendiculaires, appelées axes principaux de symétrie.

1.5 Les constituants des matériaux composites

1.5.1 Les Matrices

Pour lier les fibres ensemble, on utilise généralement des matrices qui se classent comme suit (Figure 1.3) : La matrice est l'un des constituants de base des matériaux composites, elle a pour rôle de :

— donner la forme désirée au produit,

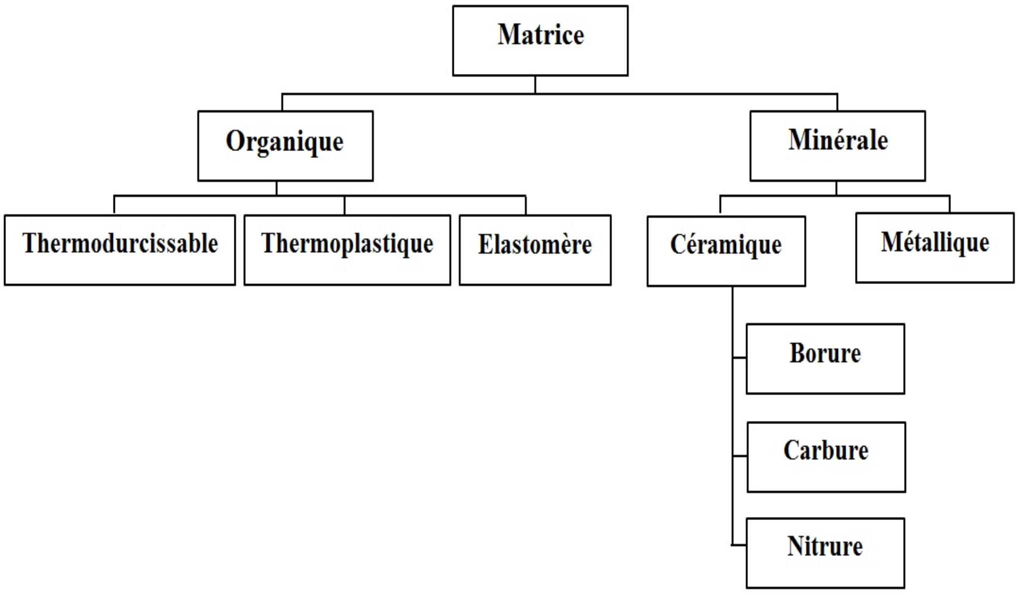


FIGURE 1.3 – Différentes familles des matrices.

— assurer la cohésion des fibres renforts pour une meilleure homogénéisation de l'ensemble,

— répartir les charges mécaniques et les contraintes encaissées,

— apporter la tenue chimique de la structure,

— protéger les renforts vis-à-vis du milieu extérieur (chocs thermiques ou mécaniques).

Les matrices les plus souvent fréquentées sont :

Résines thermodurcissables :

Une résine thermodurcissable est une formulation de différents produits appartenant essentiellement à la chimie organique, qui possède la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide.

— Résine polyester : elle présente un bon accrochage sur les fibres, un prix réduit, mais a un retrait important et une tenue réduite à la chaleur humide.

— Résine phénolique : ayant de moins bonnes propriétés mécaniques que les résines époxydes, elle n'est utilisée que lorsqu'il y a des exigences vis-à-vis de la tenue au feu (toxicité).

— Résine polyimide : d'un emploi relativement difficile, elle a l'avantage de garder de bonnes caractéristiques sur un large intervalle de température (de 100 + 260oC).

— Résine époxyde : c'est la plus utilisée dans l'industrie aéronautique. Elle présente un bon accrochage sur les fibres, un faible retrait au moulage (de l'ordre de 0,5%) et de bonnes propriétés mécaniques. Elle garde d'excellentes caractéristiques jusqu'à une température de (170řC).

Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux. Elles présentent plusieurs avantages provenant directement de leur définition :

- mise en œuvre rapide par thermo-soudage.
- possibilité de retransformation ; il est possible de créer des semi-produits (tôle par exemple) qui seront transformables à chaud. – les polyéther-éthercétones (PEEC).

Elles ont, de plus, une meilleure ténacité que les résines thermodurcissables. Elles devraient donc permettre d'améliorer la tenue au choc des composites. Les résines thermoplastiques avaient au départ deux graves défauts : une faible tenue en température et peu de résistance aux solvants. De nouveaux produits ont été étudiés pour pallier ces défauts :

- les polyéthersulfones (PES) ;
- les polyétherimides (PEI) ;
- les polyéther-éthercétones (PEEC).

L'imprégnation de fibres à l'aide de ces produits est assez complexe et leur rigidité à température ambiante rend assez difficile le drapage des pièces. Il faut remarquer que l'industrialisation n'en est qu'à son début et l'on peut penser que ces résines auront un développement important.

Matrices métalliques

Malgré une densité (par rapport à l'eau) importante, elles présentent des propriétés intéressantes pour la réalisation de pièces soumises à des frottements. Seule la voie aluminium et fibres de bore a été étudiée de façon précise et les résultats obtenus ont été moins bons que prévus. Il ne faut pas confondre ces composites composés de fibres longues, et ayant un pourcentage important de fibres, avec les matériaux métalliques renforcés par des renforts discontinus. Dans ce dernier cas, on obtient principalement une augmentation du module d'élasticité.

1.5.2 Les renforts

Les renforts peuvent être utilisés sous différentes formes : particules ou fibres. Une particule ne possède aucune dimension privilégiée, elle est utilisée généralement pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait...etc.
Les fibres se présentent sous plusieurs formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes etc), et c'est leur arrangement et leur orientation qui permettent de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites.

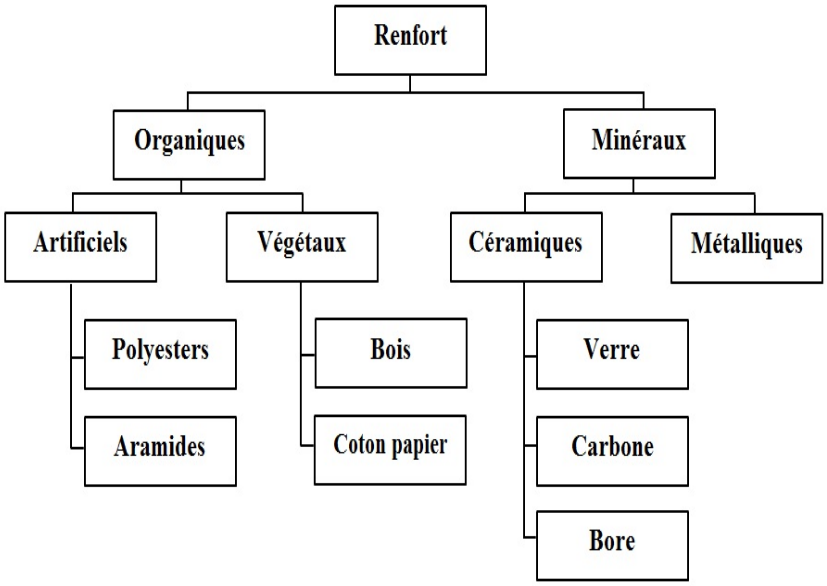


FIGURE 1.4 – Différents matériaux des renforts.

La figure 1.4 présente les familles des renforts, parmi les plus utilisées on peut citer :

Fibres de verre

Elles sont fabriquées par étirage rapide de baguettes de verre de quelques dixièmes de millimètre de diamètre, sortant d'une filière chauffée par l'effet de Joule.
L'étirage peut être produit suivant les deux méthodes suivantes :

— le procédé mécanique, dénommé Silionne, dans lequel l'étirage est réalisé par la traction due à l'enroulement du fil sur une broche tournant à grande vitesse ; on obtient des fils continus ;

— le procédé pneumatique, dénommé Verranne, dans lequel l'étirage est produit par entraînement des fibres sous l'action d'un jet d'air sous pression ; on obtient des fibres de faible longueur.

Seul le premier procédé permet d'obtenir des matériaux présentant des caractéristiques mécaniques élevées. Il existe, dans chaque procédé, suivant les compositions chimiques, plusieurs types de verre dont les propriétés caractéristiques sont les suivantes :

— verre E : usage général, bonnes propriétés électriques ;

— verre D : hautes propriétés diélectriques ;

— verre C : bonne résistance chimique ;

— verres R ou S : haute résistance mécanique.

La fibre de verre R et S a une résistance mécanique élevée et une rigidité moyenne.
Sa densité relativement élevée par rapport aux autres fibres explique sa position assez

moyenne lorsqu'on la compare du point de vue des propriétés spécifiques aux autres fibres. Il ne faut cependant pas oublier que c'est la fibre la moins chère du marché.

Fibres de carbone

Elles peuvent être réalisées par carbonisation de fibres polyacrylonitriles (PAN). Le précurseur est oxydé à une température de l'ordre de 300°C puis ensuite chauffé en atmosphère neutre.
Les propriétés mécaniques dépendent de la température de fabrication. Le module de Young augmente régulièrement avec la température tandis que la résistance en traction atteint un pic pour une température de l'ordre de 1500oC, puis décroît si l'on continue à augmenter la température de fabrication. On obtient ainsi des fibres haute résistance, haut module, et même très haut module.
Les fibres de carbone sont des fibres conductrices, de masse volumique faible, ayant de très bonnes propriétés mécaniques et un coefficient de dilatation négatif.

Fibres de bore

La fabrication de ces fibres est réalisée par un dépôt en phase vapeur du bore sur un filament de tungstène.
Ces fibres chères ont de très bonnes caractéristiques mécaniques. Leur utilisation se restreint au profit des fibres de carbone.

Fibres aramides

Ces fibres sont des polyamides aromatiques. Elles présentent une masse volumique très faible, de très bonnes caractéristiques spécifiques en traction, un coefficient de dilatation négatif. Elles ont l'inconvénient d'avoir une faible résistance en compression, une forte reprise d'humidité et d'être sensibles aux rayons ultraviolets.

1.5.3 L'interface

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

couche+ désigne couche supérieur, couche- désigne couche inférieur.

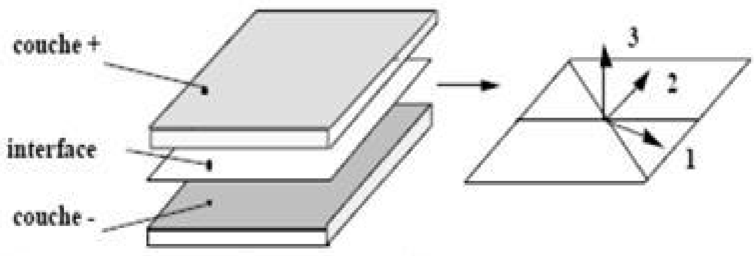


FIGURE 1.5 – Interface

1.6 Types et classification des matériaux composites

Les matériaux composites à deux phases sont classés en trois grandes catégories selon le type, la géométrie et l'orientation de la phase de renforcement, comme l'illustre la figure 1.6.

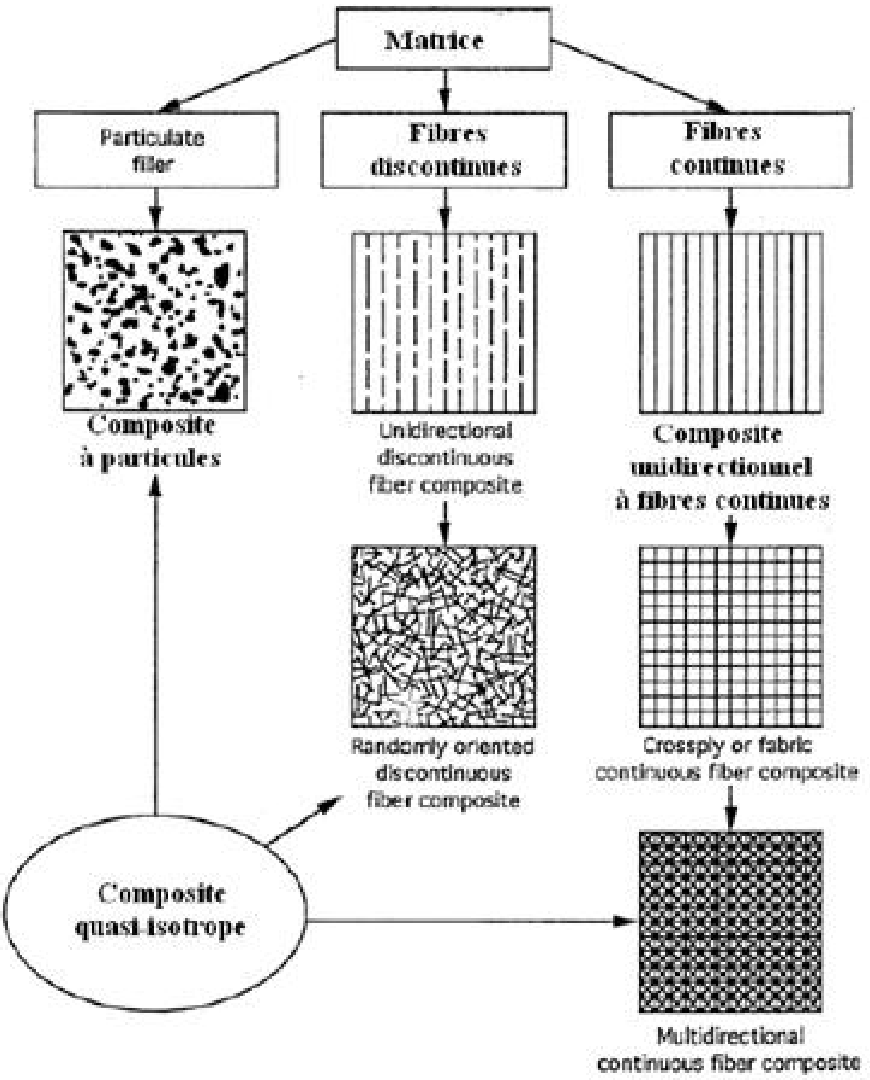


FIGURE 1.6 – Classification des systèmes de matériaux composites.

Composites à particules

Sont constituées de particules de différentes tailles et formes dispersées de façon aléatoire dans la matrice. La raison de la distribution aléatoire des particules est que ces composites peuvent être considérées comme quasi-homogène sur une échelle plus grande que la taille des particules et de l'espacement.
Les composites à particules peuvent être constitués de particules non métalliques dans des matrices non métalliques (béton, verre renforcé avec des écailles de mica, les polymères renforcés par des particules fragiles au caoutchouc) ; particules métalliques dans des matrices non métalliques (Particules d'aluminium en caoutchouc polyuréthane utilisés) ; particules métalliques dans des matrices métallique (particules de plomb dans les alliages de cuivre pour améliorer l'usinabilité), et des particules non métalliques dans des matrices métalliques (silicium des particules de carbure de aluminium, le SiCp/Al).

Composites à fibres discontinues ou courtes

Contiennent des courtes fibres comme phase de renforcement. Ces fibres courtes, qui peuvent être assez longues par rapport au diamètre, peuvent être soit orientées le long d'un sens ou orientées au hasard. Dans le premier cas, le matériau composite a tendance à être nettement anisotrope ou, plus précisément, orthotrope, alors que dans le second il peut être considéré comme quasi-isotrope.

Composites à fibres continues

Sont renforcées par de longues fibres continues et sont les plus efficaces du point de vue de la rigidité et la résistance. Les fibres continues peuvent être toutes parallèles (unidirectionnel composite à fibres continues), peuvent être orientées à angle droit les uns aux autres (nappes croisées ou tissées à fibres continues), ou peuvent être orientées selon plusieurs directions (multidirectionnel composite à fibres continues). Dans ce dernier cas, pour certain nombre de direction des fibres et de distribution de fibres, le composite peut être caractérisé comme un matériau quasi-isotrope.
Les composites renforcés par des fibres peuvent être classés en grandes catégories en fonction de la matrice utilisée : polymère, métal, céramique, carbone (tableau 1.1).

Type de matrice	Fibre	Matrice
Polymère	Verre E	Epoxy
	Verre S	Polymide
	Carbone (Graphite)	Polyester
	Aramide (Kevlar)	Thermoplastique
	Bore	PEEK, Polysulfone
Métal	Bore	Aluminium
	Borsic	Maggnesium
	Carbonne (Graphite)	Titanium
	Carbure de Silicium	Cuivre
	Alumine	
Céramique	Carbure de Silicium	Carbure de Silicium
	Alumine S	Alumine
	Nitrure se Silicium	Verre- Céramique
		Nitrure se Silicium
Carbon	Carbon	Carbon

TABLEAU 1.1 – Classification des composites renforcés par des fibres

1.7 Architecture des matériaux composites

1.7.1 Monocouches

Les monocouches ou nappes (lamina), sont des couches planes (ou incurvées) de fibres unidirectionnelles ou tissées dans une matrice. Ils représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

1.7.2 Stratifiées

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

Les nappes d'un stratifié peuvent être de diverses épaisseur et se composent de différents matériaux. étant donné que les axes principaux diffèrent de pli à un autre ; il est plus commode d'analyser le stratifié à l'aide d'un système commun fixe de coordonnées (x, y, z) ; comme indiqué la figure I.8. L'orientation d'une nappe donnée est donnée par l'angle entre l'axe de référence x et l'axe principal de la nappe (orientation des fibres), mesurée dans une direction antihoraire sur le plan (xy). Composites stratifiés contenant plis de deux ou plusieurs types de matériaux sont appelés composites hybrides (hybrid composite). Par exemple, un stratifié peut être constitué de couches unidirectionnelles verre

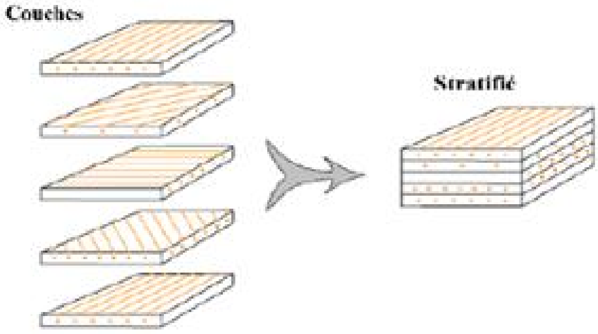


FIGURE 1.7 – Construction d'un stratifiée.

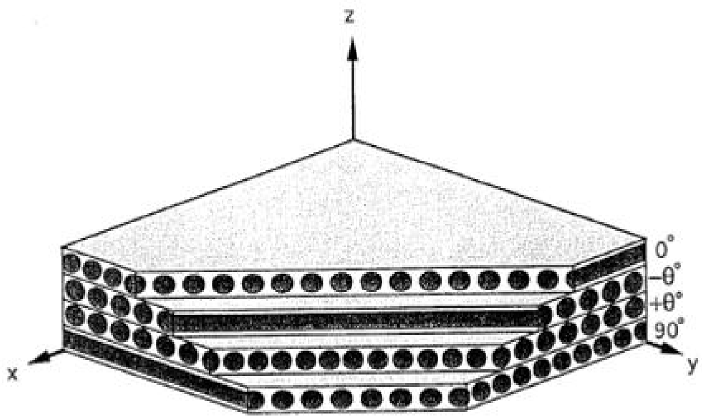


FIGURE 1.8 – Stratifié multidirectionnel avec un système de référence fixe.

/époxy, carbone / époxy et aramide /époxy empilées dans un ordre spécifié. L'hybridation permet aux concepteurs d'adapter les propriétés du composites aux besoins exacts de la structure sous considération [3-7]. Dans la plupart des cas, le but de l'hybridation est d'obtenir un nouveau matériau en conservant les avantages de ses constituants, et en espérant surmonter certains de leurs inconvénients. Cette réalisation souhaitée est parfois liée au coût, si l'un des deux composants étant généralement moins cher que l'autre. Il existe plusieurs types de composites hybrides en fonction de la manière dont les matériaux constitutifs sont mélangés [6-7], à savoir :

(i) hybride entre couches où les couches de deux (ou plusieurs) renforts homogènes sont empilés ;

(ii) intraply hybrides dans lesquels deux (ou plusieurs) types de fibres sont mélangés dans la même couche ;

(iii) hybrides intimement mélangés où les fibres constitutives sont mélangés de façon aussi aléatoire que possible afin qu'aucune concentration de chaque type soit présente dans le matériau ;

(iv) des composites superhybrid qui sont constitués de feuilles de métal ou de nappes métalliques empilées selon une orientation et une séquence spécifiée.

Les stratifiés sont désignés de manière indiquant le nombre, le type, l'orientation et la séquence d'empilement des couches. La configuration du stratifié indiquant la composition de ses couches est appelé drapage (lay-up). La configuration indiquant, en plus de la composition de couche, l'emplacement exact ou la séquence des différentes couches est appelé la séquence d'empilage (stacking sequence). Voici quelques exemples de désignations des stratifiés : ou les symboles signifient :

unidirectional 6-ply	$[0/0/0/0/0/0] = [0]_6$
Cross ply symmetric	$[0/90/90/0] = [0/90]_s$
	$[0/90/0] = [0/\bar{90}]_s$
angle-ply symmetric	$[45/-45/-45/45] = [\pm 45]_s$
	$[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30] = [\pm 30]_{2s}$
angle-ply asymmetric	$[30/-30/30/-30/30/-30/30/-30] = [\pm 30]_4$
multi directional	$[0/45/-45/-45/45/0] = [0/\pm 45]_s$
	$[0/0/45/-45/0/0/0/0/-45/45/0/0] = [0_2/\pm 45/0_2]_s$
	$[0/15/-15/15/-15/0] = [0/\pm 15/\pm 15/0]_T = [0/(\pm 15)_2/0]_T$
hybrid	$[0^K/0^K/45^C/-45^C/90^G/-45^C/45^C/0^K/0^K]_T = [0_2^K/\pm 45^C/\bar{90}^G]_s$

le nombre : nombre de couches

s : symétrique

T : total

$\bar{}$:montre que ce stratifié est symétrique par rapport à l'axe de cette couche

Dans le cas des stratifiés hybrides, les lettres signifient le matériau constituant les fibres de la couche (K :Kevlar, C : Carbon, G : Verre).

1.7.3 Sandwichs

Les structures dites " sandwiche " occupent un large créneau de la construction des pièces composites. Elles apparaissent dans quasiment tous les domaines d'application. Historiquement ce sont les premières structures composites allégées et performantes. Dans la majorité des cas on doit les confectionner dans un but bien spécifique ; cependant, certains matériaux sandwiches sont disponibles dans le commerce sous forme de demi-produits.

Les sandwiche sont des matériaux composés de deux parties différents, l'une s'appelle : "revêtement (semelles ou peaux)", et l'autre : "coeur (ou âme)". La semelle est une partie de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant le cœur dont il représente une de forte épaisseur et faible résistance (Figure 1.9).

L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

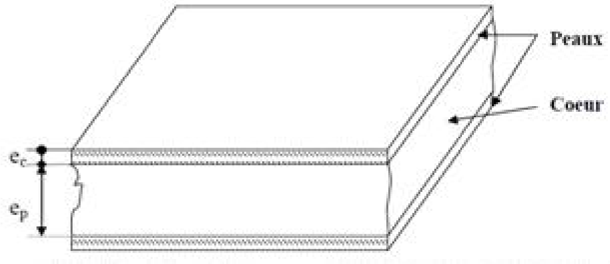


FIGURE 1.9 – Matériau sandwich.

Avantages des matériaux sandwichs

Une grande légèreté
Une grande rigidité de flexion due à l'écartement des semelles (augmentation du moment quadratique de flexion)
Excellents caractéristiques d'isolation thermique

Inconvénients des matériaux sandwichs

Mauvaise isolation acoustique (n'amortissent pas).
La tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes.
Les risques de flambement est plus élevés que pour les structures classiques.

Matériaux constitutives d'un sandwich

Les revêtements sont en matériaux de nature très diverse, les matériaux constituant le cœur étant choisis aussi légers que possible.
On peut citer comme couples matériaux compatibles pour constituer le sandwich :

Revêtement	Coeur
Métal stratifié/ contreplaqués thermoplastique/ amiante/ ciment	Matériaux expansés
Métal stratifié	Plaque nervurée en métal stratifié
Contreplaqué	Planche de bois/ carton imprégné
Aluminium stratifié	Aluminium déployé

TABLEAU 1.2 – Différents couples constituant un matériau sandwiche

1.7.4 Autres architectures

En plus des structures citées ci-dessus, on trouve aussi :

— Les plaques renforcées : elles sont constituées de résines ou matrices dans les quelles sont introduits des renforts de types : fibres courtes, billes pleines ou creuses, poudre métallique ou de graphite, ces renforts permettent d'augmenter le module d'élasticité de 2 à 5 fois. Et le comportement mécanique de ces matériaux peut être homogénéisé et son étude est ramenée à celle d'un matériau usuel isotrope.

— composites volumiques : ils ont été introduits pour des besoins spécifiques de l'aéronautique, ils sont élaborés à partir de tissage volumique. Ces matériaux sont très onéreux, ils permettent d'obtenir des caractéristiques mécaniques très élevées avec un comportement sensiblement isotrope en volume.

1.8 Lois de comportement des composites

La relation d'élasticité linéaire reliant la matrice de rigidité à celle de déformation peut s'écrire sous la forme : $\sigma = C.\varepsilon$ Ou matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Cette loi est appelée loi de HOOKE généralisée, elle introduit une matrice de rigidité symétrique constituée -dans le cas général- de 21 constantes de rigidité C_{ij}.

1.8.1 Matériau anisotrope

Ou matériau triclinique, c'est un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie, et la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes.

1.8.2 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. La loi de

Hooke se résume à l'expression suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

1.8.3 Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

1.8.4 Matériau unidirectionnel

C'est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e1, ou c'est un matériau orthotrope avec un axe de révolution (orthotrope de révolution), la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

1.8.5 Matériau isotrope

C'est un matériau qui ne possède aucune direction privilégiée et ses propriétés sont indépendantes du choix de l'axe de référence. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux. La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.9 Application des matériaux composites

En raison de leurs coûts de traitement relativement faibles, les composites à matrice polymère et à matrice de ciment sont les types les plus populaires de composite.

Les composites à matrice Polymère avec un renfort de fibres continues sont largement utilisés pour les structures légères, comme les cellules. Les composites à matrice polymère avec des particules de métal (par exemple, des particules d'argent) sont utilisés pour les interconnexions électriques. Les composites à matrice caoutchouc renforcée par des particules de carbone noir sont utilisés pour les pneus d'automobile. Les composites à matrice de ciment sous la forme de béton sont largement utilisés pour les infrastructures civiles. Les composites à matrice métallique, à matrice de carbone et à matrice céramique sont moins fréquents, mais ils ont aussi leurs marchés particuliers.

Les composites à matrice métallique connu sous le nom de cermets (ce qui signifie combinaison : céramique-métal) qui contiennent une fraction volumique faible des particules céramique sont utilisées dans les outils de coupe tels que les perceuses. Ils sont également utilisés dans les résistances et autres composants électroniques qui ont besoin de résister à des températures élevées.

Composites à matrice métallique contenant des fibres de carbone continues sont utilisées comme matériaux de structure. Cependant, cette application structurelle fait face à une concurrence sévère de la part des alliages métalliques avancés qui sont beaucoup moins chers.

Les composites à matrice carbone sont utilisés à haute température pour les structures légères bien qu'ils souffrent de la tendance de carbone à s'oxyder en présence d'oxygène à des températures à environ 700°C. Le marché des composites carbone/carbone est principalement lié à l'aéronautique : les tuyères de fusées et les freins de l'avion. D'autres applications incluent : les éléments chauffants du four, les composants d'engins spatiaux et d'avions, les échangeurs thermiques, les composants de moteurs aérobies hypersoniques.

Les applications biomédicales comprennent des implants (par exemple, les hanches, les valves cardiaques, la peau et les dents), des dispositifs chirurgicaux et de diagnostic, des

stimulateurs cardiaques (dispositifs connectés par des fils électriques à la paroi du cœur, ce qui permet le contrôle électrique du rythme cardiaque), des dispositifs pour l'équipement d'exercice pour les handicapés, emballage pharmaceutique (pour la libération contrôlée du médicament dans le corps par exemple) et l'instrumentation d'analyse et de diagnostic chimique (tels que l'équipement d'analyse de sang et l'urine). Les implants sont particulièrement difficiles, car ils doivent être faits de matériaux qui sont biocompatibles (compatible avec des fluides tels que le sang), résistant à la corrosion, résistant à l'usure, résistance à la fatigue, et qui sont en mesure de maintenir ces propriétés sur des dizaines d'années.
Composites à matrice céramique sont plus attrayants que les composites à matrice carbone pour les applications à haute température, en raison de la tendance beaucoup plus faible pour les céramiques à oxyder. Des exemples des matrices céramiques comprennent du carbure de silicium (SiC) et le nitrure de silicium (Si_3N_4), qui peuvent résister à des températures allant jusqu'à environ 1.700 ° C. Au-dessus de 1.700 ° C, ces céramiques peuvent s'oxyder en présence d'oxygène et devenir dioxyde de silicium (SiO_2). Les composites à matrice céramique renforcée de fibres de céramiques sont connues comme les composites céramique-céramique. Il est préférable que la fibre et la matrice sont les mêmes dans la composition pour qu'il n'y a pas de décalage CTE entre eux, pour des raisons de résistance à la fatigue thermique. Un exemple d'un composite céramique-céramique est le composite SiC-SiC. Cependant, la technologie des composites à matrice céramique n'est pas assez mature pour la mise en œuvre, en raison à la fois de performance et de coût.[8]

1.10 Conclusion

— Les matériaux composites offrent des options de conception illimitées.

— La sélection du type de matrice et fibre est essentielle dans le processus de conception.

— Les structures peuvent être produites avec des propriétés spécifiques pour répondre aux exigences d'utilisation finale.

Références

1 Isaac M. Daniel and Ori Ishai, " Engineering Mechanics of Composite Materials ", Oxford university press (1994)

2 Robert M. Jones, " Mechanics of Composite Materials " second edition (1999)

3 Short D and Summerscales J, Composites 10 :215–221 (1979).

4 Short D and Summerscales J, Composites 11 :33–38 (1980).

5 Hancox NL, Fiber Composite Hybrid Materials, Applied Science, London (1981).

6 Kretsis G, Composites 18 :13–23 (1987).

7 Richardson T, Composites : A Design Guide, Industrial Press Inc, New York, pp 103–104 (1987).

8 Deborah D. L. Chung , " Composite Materials : Science and Applications " 2nd edition Springer (2010)

Chapitre 2

Généralités sur les FGM

« *L'esprit scientifique nous interdit d'avoir une opinion sur des questions que nous ne comprenons pas, sur des questions que nous ne savons pas formuler clairement. Avant tout, il faut savoir poser des questions.* »

(Gaston Bachelard)

Sommaire

2.1 Description

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des matériaux constitués d'une gradation spatiale de la structure et / ou la composition, adapté pour des performances et des fonctions spécifiques. Les FGM ne sont pas techniquement une catégorie distincte de matériaux, mais représentent plutôt une approche d'ingénierie de modifier l'arrangement structurel et / ou chimique des matériaux ou des éléments. Cette approche est plus bénéfique quand un composant a des exigences de propriété divers et apparemment contradictoires, tels que la nécessité d'une dureté élevée et une grande ténacité dans les revêtements résistant à l'usure. Généralement, il est très difficile de fournir des grandes lignes directrices pour l'utilisation de FGM puisque les structures sont complexes et variés. Le but de ce chapitre est de donner au lecteur une compréhension de la façon dont les gradations spécifiques dans la structure et / ou la composition aura une incidence sur le comportement du matériel spécifique. Alors que le terme matériaux à gradient fonctionnel a seulement existé depuis les milieux des années 1980, le concept a été utilisé dans l'ingénierie pour un temps relativement long. Par exemple, le concept de durcissement de surface par carburation de l'acier a été compris de 60 ans et a été utilisé pour plusieurs centaines d'années.

Pour un deuxième exemple, dès 1912, les technologues d'étanchéité (métal/verre) ont développé des structures graduées pour minimiser les contraintes résiduelles thermiques dues aux coefficients de dilatation thermique inadéquats [2]et[3]. Un troisième exemple est les bandes semi-conducteurs graduées, utilisées dans les transistors bipolaires à hétérojonction, introduites en 1957 [4]et[5]. Enfin, les structures graduées ont été introduites dans les structures composites dans les années 1970 [6]. En concentrant les efforts de recherche et de développement sur les aspects génériques de FGM, d'autres progrès peuvent être faits pour comprendre quelles structures sont souhaitables pour des applications spécifiques.

Ce chapitre fournit une description courante et fournit un cadre pour utiliser le concept de FGM dans des applications de technologie.

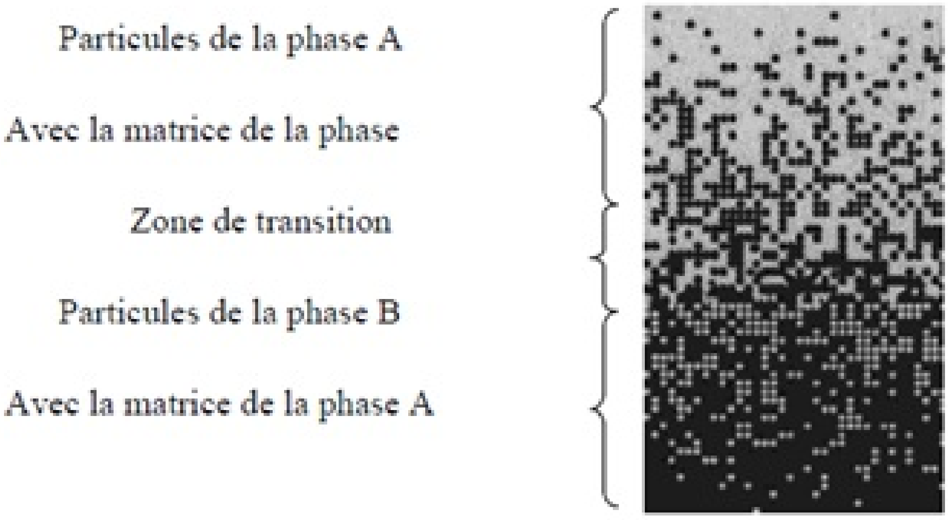


FIGURE 2.1 – FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction (verticale) [1].

2.2 Origine

En fait, on peut voir les structures fonctionnellement graduées dans la nature. Nous pouvons les voir dans les bio-tissus des plantes et des animaux et même dans notre corps comme les os et les dents. Les deux bambous et des obus sont très forts près de la surface à l'extérieur et l'intérieur doux et dur. D'ailleurs, un bambou a plusieurs caractéristiques de qualité supérieure : Il est léger, solide et élastique, c'est parce qu'il a des nœuds dans le creux qui créent une hiérarchie et de l'activité structure. Quand une feuille de noix de coco est soufflé par le vent, 1/3 de la pointe est tendre et se déplace librement à n'importe quelle direction avec le vent, mais la partie restante est très rigide et ne bouge pas. Il a la structure très adaptée à son milieu de vie.
Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.
Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

— Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;

— Ténacité du matériau coté basse température ;

— Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à des exigences, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).
Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.
En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant ceux des stratifiés, citons : une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absence ou réduite sévère de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée, un facteurs d'intensité réduit.
Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

2.3 Historique

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de matériaux à gradient de propriétés (functionally graded matériels : FGM) a attiré une grande attention. Un FGM typique, est un composite non homogène effectué à partir de différentes phases des constituants matériels (habituellement en céramique et métal).
Les problèmes de transitoire ou de fatigue thermique sont étudiés dans divers secteurs industriels autres que l'aéronautique, comme l'électronucléaire (circuits de refroidissement, combustible), l'électrotechnique (contacts électriques), l'automobile (culasses, collecteurs d'échappement, filtres à particules) ou la production de matériaux (verre, aluminium). L'étude des conséquences de ces sollicitations d'origine thermique constitue l'un des axes majeurs de plusieurs chercheurs et s'appuie sur la méthodologie développée pour l'aéronautique et les superalliages. Des approches multi-échelles sont aussi utilisées pour la prévision de durée de vie des revêtements à haute température. L'objectif est d'augmenter la tenue aux hautes températures pour les turbines à gaz en appréhendant les mécanismes fondamentaux de la rupture des revêtements pour aubes de turbine.
Le terme FGM (functionally graded matériels) a été élaboré au milieu des années 80 par un groupe de scientifiques dans la région de Sendaï au Japon, comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique [7], [8]. Des efforts énormes ont été fournis pour développer des matériaux à haute performance et à résistance élevée à la chaleur en

utilisant la technologie de gradient à propriété qui a été poursuivie.
En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps, protéger l'intérieur contre un surchauffement. Il s'est avéré impossible de dissiper cette chaleur par un refroidissement .en plus, il s'agissait d'un vaisseau commercial qui, après atterrissage, devait redémarrer à nouveau en quelques heures. Pour cette raison les matériaux de revêtement, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1000°C. Il n'ya aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique. Certes, un revêtement céramique Al2O3 aurait pu protéger le fuselage (acier austénitique) contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre le fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des valeurs du coefficient de dilatation thermique, des modules de Young et de la conductivité thermique des deux matériaux. La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation de matériau à gradient de fonction (FGM). On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température possèderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, telle une céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur, comme le carbone.
Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.
C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction, à la fois dans les laboratoires de la NASA puis de manière plus formalisée au japon après la mise en place d'un comité de réflexion en 1985 entre des chercheurs du NAL (National Aerospace Laboratory, STA), de l'université du Tohuku et du GIRI du Tohuku (Gouvermental Industrial Research Institute, MITI). Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition (douce), donc graduelle, idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des propriétés entre ces matériaux.
L'industrie aéronautique et l'aérospatiale et l'industrie des circuits informatiques sont très intéressées par les matériaux qui peuvent résister à de très forts gradients thermiques [7]. Ceci est normalement obtenu en utilisant une couche de céramique en rapport avec une couche métallique.

Pour illustrer l'idée de l'application des FGM à ce concept, prenons un exemple simple dans le domaine des matériaux métalliques. Il existe des matériaux dits thermoélectriques qui lorsqu'ils sont soumis à un apport thermique produisent un courant électrique. Il existe, pour chacun de ces matériaux, une température particulière où la réponse est excellente, et si l'on s'éloigne de cette température, la réponse chute immédiatement. En considérant un matériau constitué dans le sens de l'épaisseur e couches successives sensibles à des températures décroissantes au fur et à mesure que l'on pénètre en profondeur, lorsque ce matériau est chauffé sur sa face externe, même si la température transmise baisse dans les couches internes, on obtient une réponse optimum à chaque niveau et en conséquence une conversion thermoélectrique globale améliorée.

2.4 Motivation

Les avances significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie ont permis de produire FGM utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microstructure et la composition matérielle. Dans l'avenir, les FGM avec des formes et des propriétés complexes, y compris deux et trois dimensions de gradient, seront produits à l'aide de la fabrication avec une technique qui nécessitant l'ordinateur. Ce potentiel signifie que le concep-

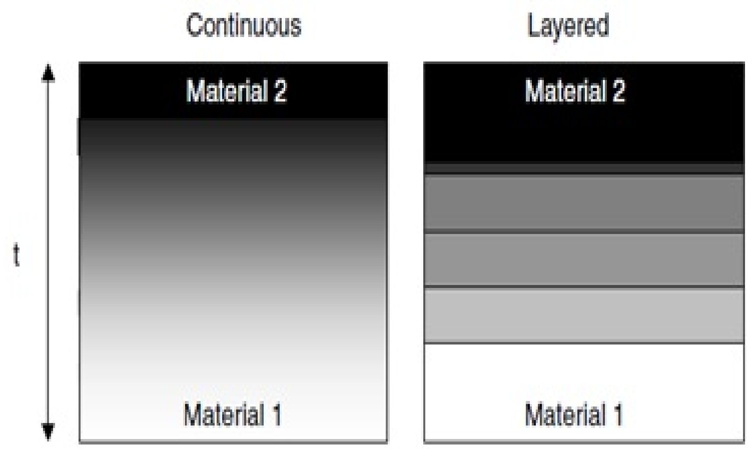


FIGURE 2.2 – Schéma montrant deux géométries : l'architecture sur la gauche est discrète tandis que celle de droite est continue.

teur ne se limite plus à une palette de matériaux homogènes existants, bien que beaucoup de recherches ont été consacrées à l'analyse de ce matériau, les ingénieurs et autres professionnels sont engagés dans le processus de conception avec les FGM manque un cadre unifié pour la prise de décisions concernant la façon de faire les meilleurs choix possible, basé sur ce menu de matériel avec les composants disparates et les profils du matériel composé. L'objectif des recherches est de développer une méthodologie solide pour l'adaptation de la composition spatiale d'un matériau à gradient évalué lors de l'application d'une haute température ou haute flux de chaleur. La méthodologie proposée est prévue d'une manière significative de notre capacité de concevoir les composants du (FGM) pour une variété de la mécanique et les applications aérospatiales où les conditions de fonctionnement sont sévères.

2.5 Classification

Peut-être les FGM sont mieux classifiés selon le traitement, comme illustré dans figure II-3, qui sépare les FGM en deux catégories : ceux par des processus constructifs et ceux produits par les processus transporter-basés [9]. En résumé, les processus constructifs se fondent sur le placement des phases dans une structure par l'ingénieur des méthodes. Les processus Transporter-basés se fondent sur des réactions ou des processus well-timed et sont conçus pendant la fabrication matérielle. Beaucoup de revêtements de protection (par exemple, revêtements d'isolation thermiques) se rangent dans l'ancienne catégorie. La carburation de l'acier se range dans la dernière catégorie. Naturellement, une approche de conception dans laquelle une gradation est formée in situ, par un processus transporter-basé, serait plus simple et généralement plus souhaitable qu'une approche constructive.

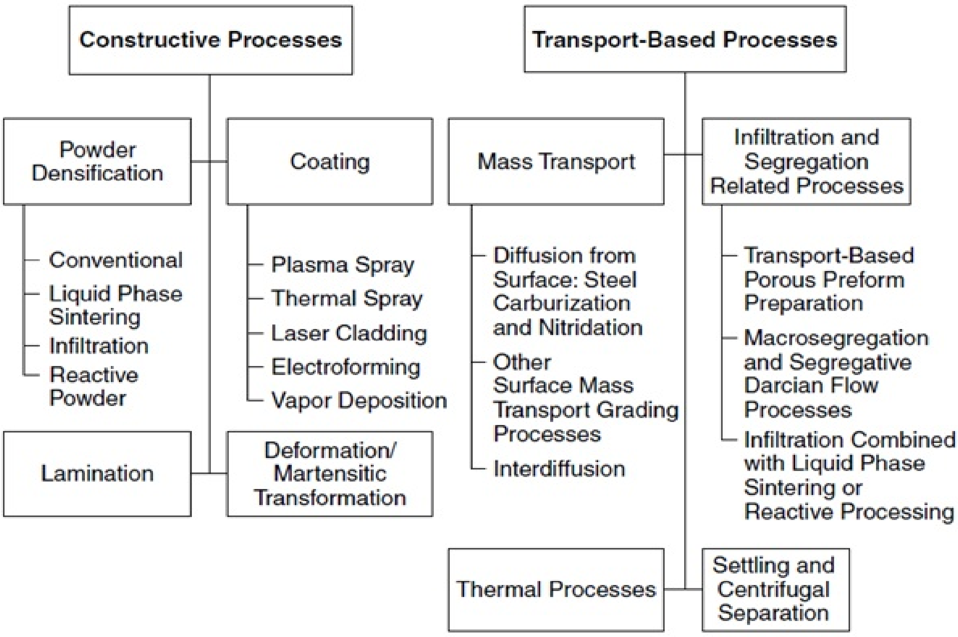


FIGURE 2.3 – Classification des matériaux FGM selon [6].

2.6 Champs d'utilisation

2.6.1 Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Possédant deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau, il permet de produire le poids-léger et des matériaux solides.
Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGM sont également applicables à un mur externe de l'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

2.6.2 Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité ; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu.
Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un

outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

2.6.3 Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, les outils de communication utilisant les fibres optiques ont besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application des FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

2.6.4 Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os couvrant le cerveau et d'autres organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, on a besoin d'un nouveau matériau qui peut remplacer les os et les articulations et a une longue vie a été souhaité. La technologie FGM est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents. La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer aussi.

2.6.5 Autres

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. La technologie FGM est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats.
De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, les FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faites de polymère fluoré ont été développées.

Références

1 . Yin, H.M., Sun, L.Z. and Paulino, G.H., 2004, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Materialia, Vol. 52, 3535-3543.

2 . Keyes and Kraus, U. S. Patent 1,014,757 (1912).

3 . L. J. Buttolph, J. Optic. Soc. Am., 11, 549–557 (1925).

4 . Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, R. G. Ford, (Eds.), Functionally Graded Materials : Design, Processing and Applications, Kluwer Academic, Boston, MA, 1999.

5 . H. Kroemer, RCA Rev., 18(3), 332–342 (1957).

6 . M. B. Bever and P. E. Duwez, Mater. Sci. Eng. 10, 1–8 (1972).

7 . Yamanoushi M., Koizumi M., Hiraii T., Shoita I., editors. Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, Japan, 1990.

8 . Koizumi M., The concept of FGM. Ceramic Transactions, Functionally Graded Materials, (1993), 34, 3-10.

9 . S. Suresh and A. Mortensen, Fundamentals of Functionally Graded Materials, IOM Communications, London, 1998.

Chapitre 3

Théories des Plaques

« *Notre plus grande faiblesse réside dans l'abandon ; la façon la plus sûre de réussir est d'essayer une autre fois.* »

(Thomas Edison)

Sommaire

Les solides minces sont des solides tridimensionnels ayant des caractéristiques particulières au niveau géométrique, cinématique et mécanique.
Un solide 3D est un objet massif dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Les structures minces ou corps orientés ont au moins une dimension, appelée épaisseur, petite par rapport aux autres dimensions. On distingue :
Plaque : solide défini par une surface plane et une épaisseur h ;
Coque : solide défini par une surface courbe et une épaisseur h faible devant longueur, largeur et rayon de courbure ;
Poutre droite : solide défini par une ligne droite et par une section ;
Arc ou poutre courbe : solide défini par une ligne courbe et par une section.
Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).
L'analyse du comportement et la conception des ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.
Suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit parfois l'adjectif mince ou épais. Cette qualification n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais sous-entend également un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal.
La géométrie d'une structure mince favorise le choix d'une cinématique particulière par rapport à la cinématique générale d'un solide.

3.1 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane $(x1x2)$ et une épaisseur, petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). ABCD : plan moyen. C'est également le plan neutre si les propriétés matérielles sont symétriques par rapport au plan (x_1x_2).
h : épaisseur de la plaque

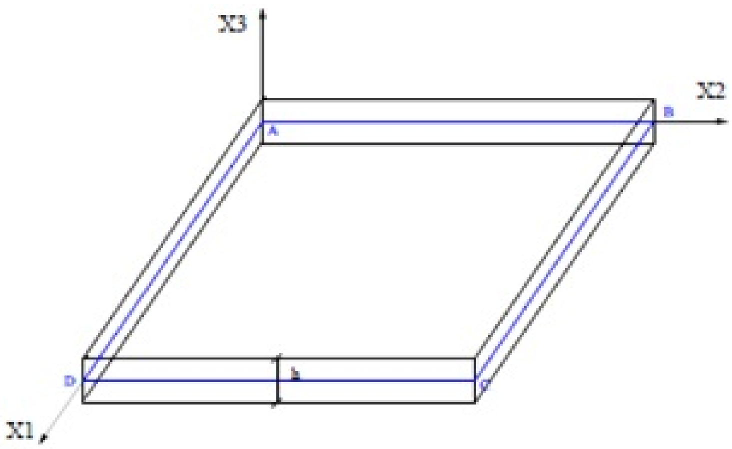


FIGURE 3.1 – Schéma d'une plaque.

3.2 Les équations d'équilibre

Les équations de mouvement d'une plaque sont obtenues par l'intégration des équations du mouvement pour un solide élastique tridimensionnel. Les définitions des résultantes de force et moment sont introduits dans le calcul et les équations obtenues sont valables pour toutes les trois théories considérées ici. Les équations du mouvement pour le solide élastique linéaire sont les suivants :

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial_x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial_y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial_z}+q_x=0\\ \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial_x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial_y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial_z}+q_y=0\\ \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial_x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial_y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial_z}+q_z=0\end{gathered}\tag{3.1}$$

En intégrant les deux côtés par z, les forces résultantes sont :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_z \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \tag{3.2}$$

Et les forces de cisaillement transversales égalent à :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_x \\ \mathrm{Q}_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \tag{3.3}$$

Les moments de flexion et de torsion valent :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}_x \\ \mathrm{M}_y \\ \mathrm{M}_z \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \tag{3.4}$$

Après substitution on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial_x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial_y}+P_x=0\\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial_x}+\frac{\partial N_y}{\partial_y}+P_y=0\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial_x}+\frac{\partial Q_y}{\partial_y}+P_z=0\\
&\frac{\partial M_x}{\partial_x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial_y}-Q_x+m_x=0\\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial_x}+\frac{\partial M_y}{\partial_y}-Q_y+m_y=0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3 Hypothèses cinématiques

La théorie des plaques classique (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) peuvent être dérivées à partir de deux hypothèses de base.
La première hypothèse est que la contrainte transversale normale est égale à zéro :

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial W}{\partial z}=0 \tag{3.6}$$

La deuxième hypothèse concerne la variation de déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xz}&=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\\
\varepsilon_{yz}&=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Différentes hypothèses sont réalisés : dans la théorie classique des plaques (CPT) les contraintes de cisaillement transversales sont supposées être zéro ; dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) elles sont supposées constantes à travers l'épaisseur de la plaque ; dans la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) les contraintes de cisaillement transversales sont supposées variées de façon parabolique à travers l'épaisseur et nulles sur les surfaces supérieure et inférieure.

3.4 Théorie classique des plaques

Lorsque les déformations de cisaillement transversales sont négligés ($\varepsilon xz=\varepsilon yz=0$), les (3.1) donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x}et\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.8}$$

Qui, après intégration, donnent des relations cinématiques pour la théorie classique des plaques (CPT)

$$u = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x}, v = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y}$$
$$w = w_0(x, y) \tag{3.9}$$

Où u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements de la surface de référence (plan xy). Les équations 09 expriment le concept selon lequel un segment de droite d'abord normale à la surface de référence reste perpendiculaire à la surface après une déformation. Souvent, cette déclaration est prise comme point de départ pour la CPT, qui est aussi appelé la théorie de plaque Love-Kirchhoff [1]. La cinématique de la CPT est illustrée à la figure 3.2. Avec ces hypothèses, les déformations sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.10}$$

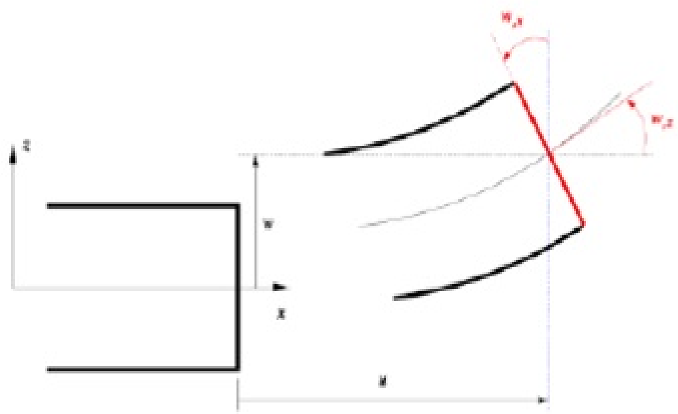


FIGURE 3.2 – Cinématique de la déformation en fonction de la théorie classique des plaques.

3.5 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre

Avec la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), également appelée la théorie des plaques de Mindlin, les contraintes de cisaillement transversales sont supposées constantes à travers l'épaisseur. Et le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z\phi x \\ \mathrm{V} &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z\phi y \\ \mathrm{W} &= w_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Les équations (3.11) déclarent que, les segments perpendiculaires à la surface de référence restent droites, mais pas nécessairement normales à la surface de référence après déformation.

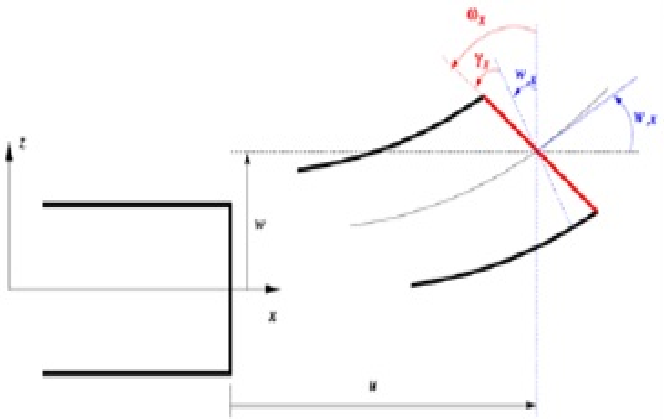


FIGURE 3.3 – Cinématique de Reissner-Mindlin

Cette théorie des plaques est souvent appelée la théorie des plaques de Reissner-Mindlin depuis qu'elle a été développée par Reissner [2] et Mindlin [3]. Elle peut être considérée comme une extension du travail de Timoshenko [4] qui était le premièr à examiner à la fois les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres.

3.6 Limitation de la CPT et la FSDT

La CPT néglige la déformation de cisaillement dans ses hypothèses cinématiques. La FSDT suppose que des contraintes de cisaillement restent constantes à travers l'épaisseur. Ce ne peut être qu'une approximation car nous savons que sur les surfaces supérieure et inférieure les contraintes de cisaillement seront généralement nulles. Ensuite, la question devient : quelle est la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque ?

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Supposant que les équations constitutives du champ de déplacement de la FSDT (3.11) impliquent que, lors des déformations de flexion ($u_0 = v_0 = 0$), les contraintes sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= zC_{11}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+zC_{12}\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ \sigma_{xy} &= zC_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour l'élasticité linéaire, l'équilibre dans la direction x est régie par :

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0 \tag{3.14}$$

La substitution de (3.13) dans (3.14) donne :

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}=z\left[C_{11}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)+C_{12}\left(\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+C_{66}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}\right)\right] \tag{3.15}$$

L'expression à l'intérieur des parenthèses ne dépend pas de z si les C_{ij} sont constants à travers l'épaisseur. Par conséquent, pour un matériau qui est homogène à travers l'épaisseur, l'intégration de (3.15) par rapport à z donne :

$$\sigma_{xz}=\sigma^0_{xz}+z^2 f(x,y) \tag{3.16}$$

Autrement dit, la contrainte de cisaillement transversale σ_{xz} suit une distribution parabolique. Elle se compose d'un terme constant σ^0_{xz} plus le terme z^2. Ainsi, lorsque les propriétés des matériaux restent constantes à travers l'épaisseur,ε_{xy} et ε_{yz} suivent, à la fois, une distribution parabolique à travers l'épaisseur.
Plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé, y compris la RSDT qui est discutées dans la section suivante, supposent que la déformation de cisaillement suit une répartition des contraintes parabolique à travers l'épaisseur.

3.7 Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement des modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$ .Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure3.4) :

Cinématique de la déformation

On va présenter une théorie de la déformation de cisaillement des plaques dans laquelle les contraintes de cisaillement transversales varient de façon parabolique.

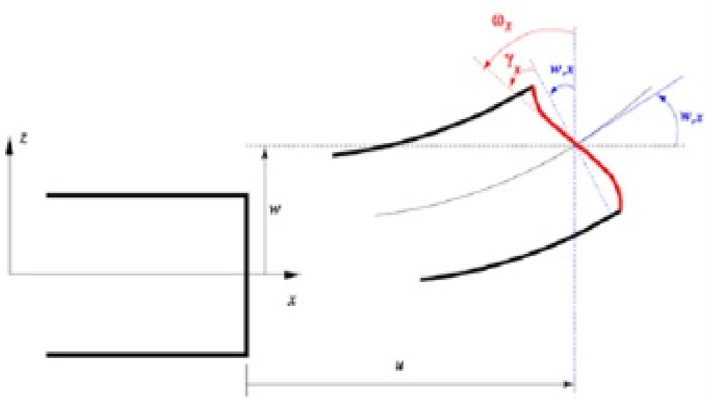


FIGURE 3.4 – Cinématique de la théorie d'ordre élevé

En plus des deux hypothèses déjà citées (3.6) et (3.7), les contraintes de cisaillement transversales sont supposées suivre une variation parabolique à travers et à disparaître sur les surfaces supérieure et inférieure.
Par conséquent, cela conduit aux relations cinématiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\phi x \\ \mathrm{V} &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\phi y \\ \mathrm{W} &= w_0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dans la littérature, on trouve plusieurs approches pour la fonction $f(z)$, citons : L'approche d'Ambartsumyan[5] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2}(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3})$$

L'approche de Reissner[2], Panc[6] et Kaczkowski[7], avec :

$$f(z) = \frac{5}{4}z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$$

L'approche de Levinson[8], Murthy[9] et Reddy[10] Avec :

$$f(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$$

L'approche de Touratier[11] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi}.\sin(\frac{\pi z}{h})$$

L'approche de Afaq[12] avec :

$$f(z) = z.e^{-2(\frac{z}{h})^2}$$

L'approche de Aydogdu[13] avec :

$$f(z) = z.\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha \geq 0$$

L'approche de Mantari[14] avec :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\pi z}{h}$$

3.8 Limitation de la CPT, FSDT et HSDT

Les trois théories plaques les plus couramment utilisés sont tous basés sur l'hypothèse que la contrainte dans le sens transversal est négligeable.

$$0 = C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} \tag{3.18}$$

De l'équation (3.12), nous voyons que, en raison de l'effet de poison, la déformation normale transversale calculée à partir n'est pas zéro même si la contrainte transversale normale est égal à zéro. Pour la FSDT, en utilisant (3.11) :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = z[C_{13}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) + C_{13}(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y})]/C_{33} \tag{3.19}$$

Par conséquent, la déformation normale transversale devrait varier linéairement à travers l'épaisseur. Si les propriétés du matériau restent constantes à travers l'épaisseur, l'intégration de (3.19) par rapport à z donne :

$$W = w_0 + z^2\psi_z(x, y) \tag{3.20}$$

Le déplacement transversal est constitué d'un terme constant w_0 et le terme z^2 multiplié par une fonction de x et y. Le déplacement transversal devrait varier en fonction de (3.20) dans un certain nombre de théories d'ordre supérieur.

3.9 Théories comprenant les déformations dans la direction transversale

Plusieurs théories permettent une déformation dans la direction transversale. Dans la théorie présentée par Reissner[2] (1944), on suppose que des déformations planes et à la flexion sont découplés :

$$\begin{aligned}
U &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z(1-4\frac{z^2}{h^2})\phi_x + z^3\psi_x \\
V &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z(1-4\frac{z^2}{h^2})\phi_y + z^3\psi_y \\
W &= w_0 + +z^2\psi_z
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Hanna et Leissa[15] ont commencé avec la même hypothèse cinématique et ont exigé que les déformations de cisaillement transversales disparaissent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. De cette façon, x et y peuvent être exprimées en termes des autres variables et les déplacements peuvent être écrits comme :

$$\begin{aligned}
U &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z(1-4\frac{z^2}{h^2})\phi_x + \frac{z^3}{3}\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\
V &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z(1-4\frac{z^2}{h^2})\phi_y + \frac{z^3}{3}\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\
W &= w_0 + +z^2\psi_z
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Prenons $\psi_z = 0$ dans (3.21), nous retrouvons les hypothèses cinématiques faites par Pandya et de Kant[16]. La même théorie a été utilisée par Roque et al[17]. De plus en plus les facteurs de complication sont pris en compte, les théories deviennent plus complexes et les équations se compliquent davantage.

3.10 Conclusion

Ce chapitre fournit une introduction aux trois théories des plaques les plus couramment utilisées. La dérivation des équations du mouvement a souligné les points communs entre les théories et leurs différences fondées sur diverses hypothèses faites.
D'autres théories de la plaque telles que " la théorie couche par couche" ou " zig-zag" sont également disponibles, mais ne sont pas abordées ici.

Références

1 G.R. Kirchhoff," Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe, J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik", vol. 40, pp. 5188 (1850).

2 E. Reissner," The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J Appl Mech Trans ASME, vol. 12, pp. A69A77 (1945).

3 R.D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", Journal of Applied Mechanics 73 :31-38 (1951).

4 S.P. Timoshenko," Sur la stabilité des systèmes élastiques", Ann des Points et Chaussees,vol. 13, pp. 496566 ; vol. 16, pp. 73132 (1913).

5 S.A. Ambartsumyan, "Theory of anisotropic plate", Technomic Publishing Co (1969).

6 V. Panc, "Theories of elastic plates", Noordho, Leyden, Netherlands (1975).

7 S.A. Kaczkowski, " Plyty. Obliczenia statyczne (Disc. static calculations)", Arkady, 2 edition (1980).

8 M. Levinson, An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", Mechanics Research Communication, vol. 7, pages 343-350 (1980).

9 M.V.V. Murthy, "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate", Rapport technique, NASA (1981).

10 J.N. Reddy, " A simple higher-order theory for laminated composite plates ", Journal of Applied Mechanics 51, pp 745-752 (1984).

11 M. Touratier, "An efficient standard plate theory", International Journal of Engineering Science, (29) :901-916 (1991).

12 K.S. Afaq, "Développement dun nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord", PhD thesis, Universite Toulouse III - Paul Sabatier (2003).

13 Metin Aydogdu, "A new shear deformation theory for laminated composite plates", Composite Structures, Volume 89, Issue 1, Pages 94-101, ISSN 0263- 8223, 10.1016/j.compstruct.2008. (June 2009).

14 J.L. Mantari, A.S. Oktem and C. Guedes Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates", Composite : Part B, doi : 10.1016/j.compositesb.2011.07.017 (2011).

15 N.F. Hanna and A.W. Leissa, "A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates", Journal of Sound and Vibration 170 (4) : 545-555 (1994).

16 B.N. Pandya and T. Kant, "Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations", International Journal of Solids and Structures 24 : 419-451 (1988).

17 C.M.C. Roque, A.J.M. Ferreira and R.M.N. Jorge", "A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory", Journal of Sound and Vibration 300 (3-5) : 1048-1070 (2007).

Chapitre 4

Etude Analytique du Voilement Thermique des Plaques Hybrides Multicouches

« *Certaines vérités exigent parfois qu'on reste dans le droit chemin, mais les voies de la connaissance scientifique sont aussi tortueuses et complexe que l'esprit humain.* »

(Stephen Jay Gould)

Sommaire

4.1 Introduction

Les matériaux composites suscitent un intérêt croissant de la part de nombreux secteurs industriels, et leur emploi tend à se généraliser. Cet engouement s'explique principalement par leur structure géométrique spécialement conçue pour leur conférer des propriétés que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettre de remplir de nombreuses fonctions techniques et d'atteindre des niveaux de performances inégalés.

L'accouplement entre les composés et les métaux provoque une gamme des soi-disant matériaux de pointe qui peuvent accomplir plusieurs tâches que les composés traditionnels ne peuvent pas faire incluent les joints boulonnés.

Beaucoup de recherches ont été faites afin de mieux comprendre les réponses mécaniques de ces matériaux sous chargement [1],[2],[3] et [4]. Cependant, peu de choses ont été apportées dans la littérature ouverte sur le voilement des plaques composites stratifiées en raison de changements de température. Biswa[1] a résolu thermiques problèmes de voilement impliquant des plaques orthotropes. Des problèmes similaires pour des plaques anti-symétriques et symétriques ont été résolus par Tauchert and Huang[2]. Une formulation plus générale a été proposée par Chen et Chen[3].

Dans ce chapitre, on s'intéresse trop à la déformation des plaques due au changement de la température. Les équations d'équilibre sont obtenues et employées pour calculer les charges critiques thermo-élastiques de voilement pour une plaque orthotrope mince rectangulaire. Pour déduire ces équations, on a utilisé les relations non linéaires déformation-déplacement. Pour introduire le cisaillement transversal, les composants de déplacement U et V sont approximés par des expressions d'ordre élevé.

4.2 Analyse

4.2.1 Fonctions de Déplacement

Pour la théorie concernant les fonctions polynomiales d'ordre élevé pour la déformation des plaques, les composants du déplacement dans les directions x,y et z peuvent être écrits comme suit :

$$
\begin{aligned}
U(x,y,z) &= u0 - z\varphi_x(x,y) + z^2\,\Psi_x(x,y) + z^3\,\phi_x(x,y)\ldots \\
V(x,y,z) &= v0 - z\varphi_y(x,y) + z^2\,\Psi_y(x,y) + z^3\,\phi_y(x,y)\ldots \\
W(x,y,z) &= w0 - z\varphi_z(x,y) + z^2\,\Psi_z(x,y) + z^3\,\phi_z(x,y)\ldots
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes comme c'est illustré sur la figure 4.1 :

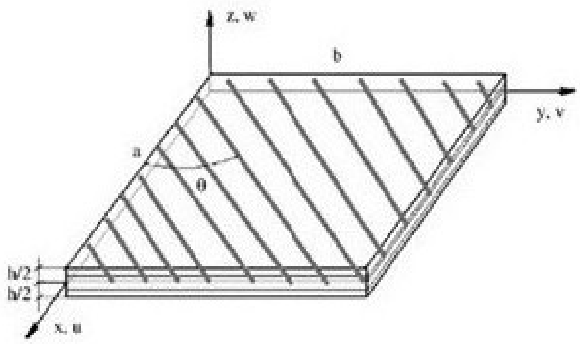


FIGURE 4.1 – Les paramètres géométriques et le système de coordonnées de la plaque.

Le nombre de termes utilisé dans (4.1) dépend de la précision requise de la solution. Dans notre cas, on considère que w est indépendant de z, et que les autres composants U et V sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0 - z\frac{\delta W}{\delta x} + f(z)\phi_x(x,y) \\ V(x,y,z) &= v_0 - z\frac{\delta W}{\delta x} + f(z)\phi_x(x,y) \\ W(x,y,z) &= w_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Où u_0, v_0 et w_0 désignent respectivement les déplacements correspondant au plan moyen suivant les directions x, y et z. La fonction $f(z)$ est attribuée selon la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. φ_x et φ_y sont les rotations autour de la normale au plan moyen suivant les directions x et y respectivement.

4.2.2 Relations Déformation- Déplacement

Pour la présente analyse, une plaque rectangulaire d'épaisseur constante h a été prise en considération. Les relations Déformation- Déplacement s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij}=\delta\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}+\frac{\partial U_3}{\partial x_i}\frac{\partial U_3}{\partial x_j}\right) \tag{4.3}$$

$\delta = 1$ pour $i \neq j$, $\delta = 1\backslash 2$ pour i=j

Où ε_{ii} sont les déformations normales ; ε_{ij} sont les déformations de cisaillement.

4.2.3 Relations Contrainte- Déformation

La relation Contrainte- Déformation, pour chaque couche prise séparément, peut être écrite :

$$\{\sigma\} = [Q]\,(\{\varepsilon\} - \{\alpha\}\,\Delta T) \tag{4.4}$$

Où Q_{ij} sont les constantes de rigidité exprimées dans les directions principales du matériau (un axe suivant la direction des fibres et les deux autres étant orthogonaux). Les coefficients linéaires de dilatation thermique sont représentés par α_{ij}, et ΔT désigne l'élévation de la température dans la plaque.

On obtient les contraintes dans le plan du stratifié par transformation des coordonnées :

$$\{\sigma\} = \left[Q'\right]_k (\{\varepsilon\} - \{\alpha\}\,\Delta T)_k \tag{4.5}$$

4.2.4 Résultantes et Moments

Les résultantes de contrainte N_{ij}, M_{ij}, P_{ij} et R_{ij} sont données par :

$$(N, M, P, R) = \int \sigma \left(1, z, f(z), \frac{\partial f(z)}{\partial z}\right) dz \tag{4.6}$$

N_{ij} représentent les résultantes par unité de longueur de plaque respectivement des contraintes normales suivant x et suivant y et des contraintes de cisaillement dans le plan (x,y). De même, R_{ij} sont les résultantes en cisaillement définies par unité de longueur du stratifié. Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y, respectivement ; et la composante M_{xy} est le moment de torsion. P_{ij} représentent les efforts d'ordre élevé.

$$\begin{aligned}
\{N\} &= [A]\{\varepsilon_0\} + [B]\{K\} + [E]\left\{d\varphi\right\} - [N_T] \\
\{M\} &= [B]\{\varepsilon_0\} + [D]\{K\} + [F]\left\{d\varphi\right\} - [M_T] \\
\{P\} &= [E]\{\varepsilon_0\} + [F]\{K\} + [H]\left\{d\varphi\right\} - [P_T] \\
\{R\} &= [D_\tau]\left\{d\varphi\right\} - [R_T]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans les expressions précédentes, les coefficients A, B, D, E, F, H et D_τ désignent les raideurs de la plaque. Ces coefficients peuvent être définis comme suit :

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, D_{ij\tau}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left[1, z, z^2, f(z), (f(z))^2, \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)^2\right] \tag{4.8}$$

Les forces thermiques et les moments thermiques sont déduits de façon similaire :

$$\{N_T, M_T, P_T\} = \int [Q]\{\alpha\}\,\Delta T\left(1, z, f(z)\right) dz \tag{4.9}$$

4.2.5 équations d'équilibre

La fonction d'énergie potentielle totale est :

$$U = \frac{1}{2}\int\int\int \{\sigma\}(\{\varepsilon\} - \{\alpha\}\,\Delta T)\, dx dy dz \tag{4.10}$$

En introduisant (4.5) et (4.6) dans (4.10), les équations d'équilibre seront exprimées de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}N_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial y}N_{xy}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}N_{xy}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial y}N_y\right)}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}-R_{xz}=0\\
&\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}-R_{yz}=0
\end{aligned}\tag{4.11}$$

4.3 Cas étudié

On considère une plaque symétrique multicouche hybride rectangulaire de dimensions $a*b$).

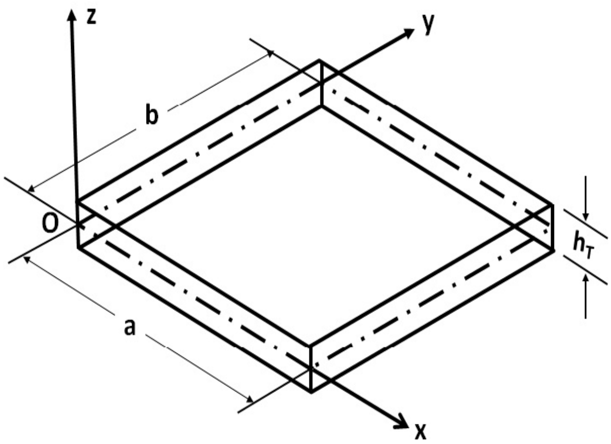


FIGURE 4.2 – Coordonnées et géométrie de la plaque.

Les coefficients de raideur suivants sont égaux à zéro :

$$B_{ij}=E_{ij}=0 A_{16}=A_{26}=D_{16}=D_{26}=F_{16}=F_{26}=H_{16}=H_{26}=0 A_{45}=D_{45}=F_{45}=H_{45}=D_{45\tau}=0\tag{4.12}$$

La fonction $f(z)$ est en relation avec la variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit on va varier $f(z)$ suivant différentes théories :

CPT [8] : $f(z)=0$

FSDT [9]et[10] : $f(z)=z$

HSDT [11] : $f(z)=\sin\frac{\pi z}{h}\, e^{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi z}{h}}+\frac{1}{2}\frac{\pi z}{h}$

La plaque est supposée simplement appuyée et les déplacements suivant les directions x et y sont empêchés. En utilisant la solution de Navier, les composantes du déplacement sont considérées par :

$$w=w_{mn}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y\tag{4.13}$$

Où $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$

On considère que la température est uniforme et en introduisant (4.13) dans (4.11), le système d'équilibre peut s'écrire sous la forme :

$$[\mathrm{K}_{ij}]\left(u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{xmn}, \varphi_{ymn}\right)^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.14}$$

Où K_{ij} est une matrice symétrique.

La valeur critique de $\Delta\mathrm{T}$ est trouvée en calculant le déterminant $|\,\mathrm{K}_{ij}\,|$, et est :

$$\Delta\mathrm{T} = \mathrm{K}_{33} - \frac{\delta}{(\mathrm{A}_{11}\alpha_1 + \mathrm{A}_{12}\alpha_2)\,\alpha_{\mathrm{m}} + (\mathrm{A}_{12}\alpha_1 + \mathrm{A}_{22}\alpha_2)\,\beta_{\mathrm{n}}} \tag{4.15}$$

Où :

$$d = \frac{\mathrm{K}_{34}\,(\mathrm{K}_{34}\mathrm{K}_{55} - \mathrm{K}_{35}\mathrm{K}_{45}) - \mathrm{K}_{35}\,(\mathrm{K}_{34}\mathrm{K}_{45} - \mathrm{K}_{44}\mathrm{K}_{35})}{\mathrm{K}_{44}\mathrm{K}_{55} - \mathrm{K}_{45}^2} \tag{4.16}$$

4.4 Résultats numériques

Dans ce qui suit, on va présenter nos résultats numériques dans le cas d'une plaque hybride multicouche : elle est composée de fines couches d'Aluminium (0.3 à 0.5 mm) alternées par des couches unidirectionnelles de Verre/Epoxy (Figure 4.3) ; en indiquant l'influence du cisaillement transversal, les rapports d'aspect et le nombre de couches sur la température du voilement.

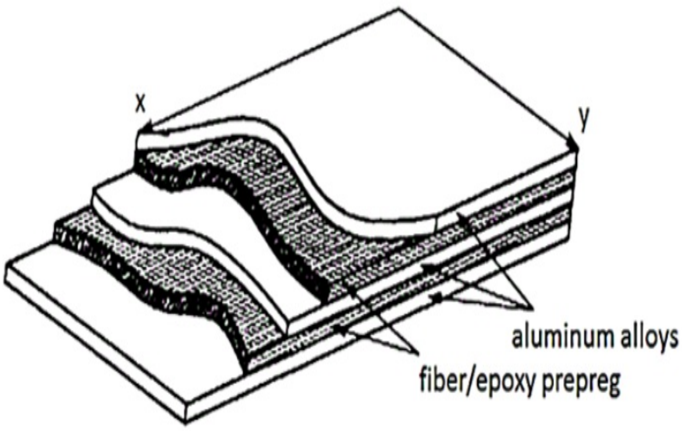


FIGURE 4.3 – Configuration du Glare.

Dans le second tableau, on a calculé la température critique de chaque matériau pris séparément en utilisant la théorie de déformation d'ordre élevé, avec : $a/h_{\mathrm{T}} = 50$, $b/a = 1$, $h_{\mathrm{Al}}/h_{\mathrm{T}} = 0.15$ (h_{T} est l'épaisseur totale de la plaque, h_{Al} est l'épaisseur de la couche d'Aluminium) :

On peut remarquer que les plaques hybrides multicouches présentent une température critique supérieure que celle des autres plaques.

	Epoxy/Verre	**Aluminium**
E_1 (GPa)	55	69
E_1 (GPa)	15	69
ν_{12}	0.26	0.33
$\alpha_1 (K^{-1})$	1110^{-6}	23.610^{-6}
$\alpha_2 (K^{-1})$	1510^{-6}	23.610^{-6}

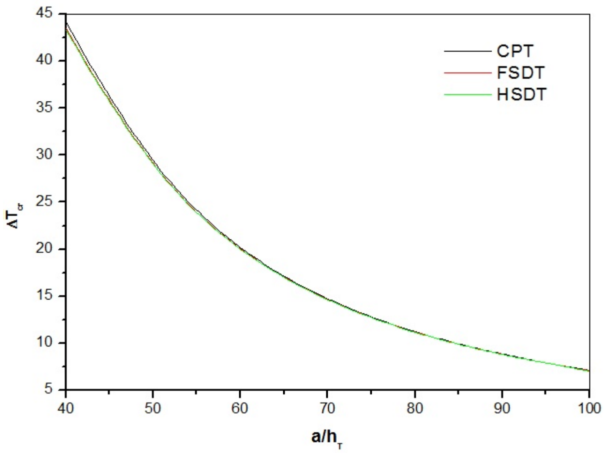
TABLEAU 4.1 – Propriétés du Glare.

	Aluminium	**Epoxy/Verre**	**Glare**
ΔT_{cr}	20.9152	30.5792	31.2481

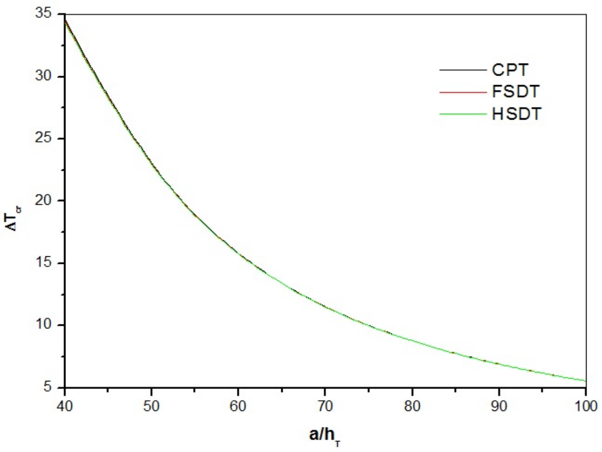
TABLEAU 4.2 – Température critique de chaque matériau.

Dans ce qui suit, on considère une plaque avec la configuration suivante : $[Al/0^o/Al/90^o/Al]$, la plaque est rectangulaire avec $h_{Al}/h_T = 0.15$.

La figure 4.4 montre la température critique du voilement d'une plaque simplement appuyée en fonction du rapport b/a. Le graphe montre que l'augmentation du rapport b/a conduit à la diminution de T_{cr} jusqu'à stabilisation $(b/a > 3)$.



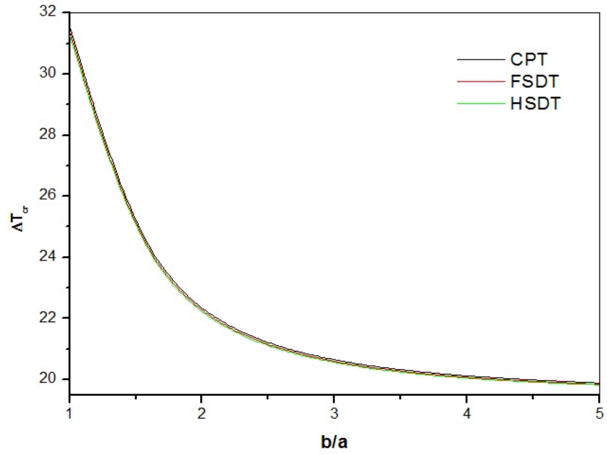
(a) $b/a = 1$



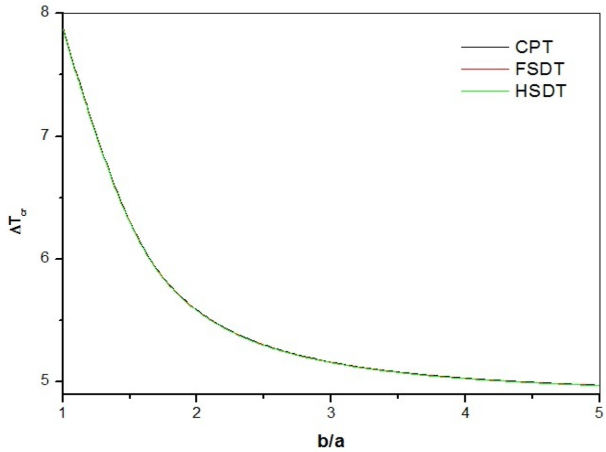
(b) $b/a = 2$

FIGURE 4.4 – Temperature critique en fonction de a/h_T $(h_{Al}/h_T = 0.15)$.

Dans la figure 4.5 nous avons tracé la température critique en fonction du rapport d'aspect a/h_{T}, nous pouvons voir qu'il ya une relation inverse entre ces quantités : la température critique diminue lorsque le rapport a/h_{T} augmente.



(a) $a/h_{\mathrm{T}} = 50$



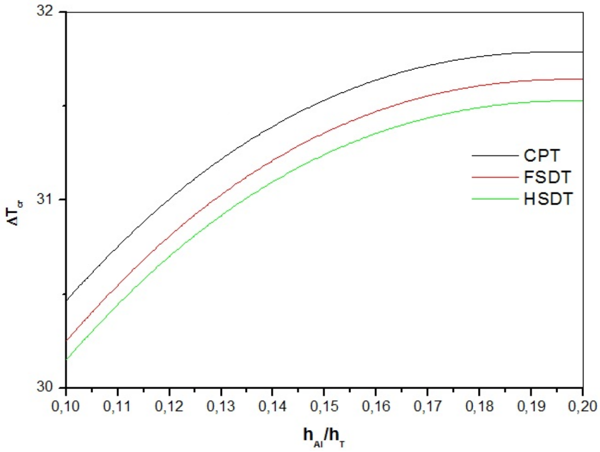
(b) $a/h_{\mathrm{T}} = 100$

FIGURE 4.5 – Temperature critique en fonction de b/a ($h_{\mathrm{A}l}/h_{\mathrm{T}} = 0.15$).

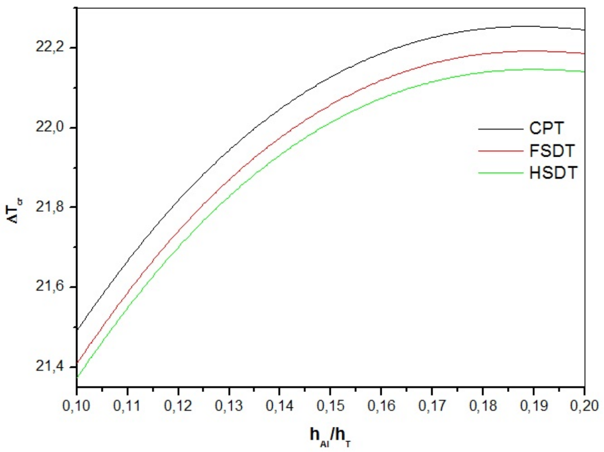
On peut expliquer ceci par : Lorsque la plaque devient très grande et si mince, la possibilité de son voilement sera grande, même sous un petit chargement (dans notre cas : température) :
La charge critique dépend de la rigidité de la plaque D, les dimensions de la plaque et le mode de voilement. Pour la même rigidité et pour le même mode de voilement ($m = n = 1$), la température critique diminue lorsque les dimensions de la plaque (longueur et largeur) augmentent. Et pour les mêmes dimensions et le même mode de voilement, la température critique décroît lorsque la rigidité à la flexion diminue, et cette dernière baisse lorsque l'épaisseur h diminue.
Nous observons que les trois théories (CPT, FSDT et HSDT) donnent des résultats proches (Figures 4.4 et 4.5).
Puis, on a tracé la température critique en fonction du rapport épaisseur du métal/épaisseur

totale (h_{Al}/h_T) (Figure 4.6).

On remarque que lorsque l'épaisseur du métal augmente, la température critique augmente aussi. Les résultats trouvés par les trois théories sont distincts, cela est du à l'hypothèse d'introduire ou de négliger le cisaillement transverse.



(a) $b/a = 1$



(b) $b/a = 2$

FIGURE 4.6 – Temperature critique en fonction h_{Al}/h_T,($a/h_T = 50$).

Finalement, on va tracer la température critique T_{cr} d'une plaque carrée simplement appuyée pour le premier mode de voilement (m=1, n=1) en fonction de nombre de couches K : [$Al/0^o/Al/90^o/Al/0^o/\ldots$] en utilisant la théorie de déformation d'ordre élevé. Les propriétés du matériau sont données par le tableau 4.1. Pour un petit nombre de couche, la température critique est influée largement par le nombre de couche et la séquence d'empilement. D'autre part, pour un grand nombre de couche, la température critique approche à une valeur constante. On peut noter que l'effet d'anisotropie sera stable à mesure que le nombre de couche augmente, et la plaque sera analysée avec moins de difficultés.

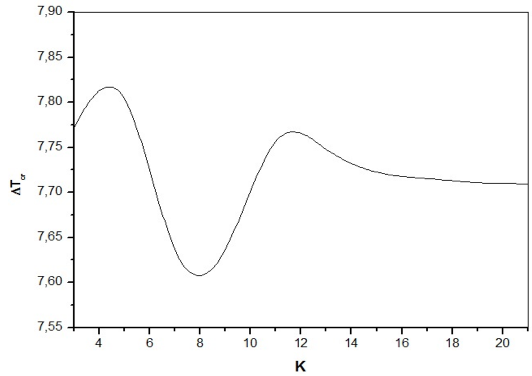


FIGURE 4.7 – Temperature critique en fonction K ($a = b, a/h_T = 50, K = [Al/0^o/Al/90^o/Al/0^o/\ldots]$).

4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, l'étude du comportement thermique du voilement des plaques hybrides multicouches a été faite. La relation non linéaire contrainte-déplacement d'ordre élevé des plaques a été prise en considération. L'étude est basée sur les trois théories des plaques les plus populaires en soulignant les points communs ainsi les différences fondées sur l'hypothèse d'introduire ou de négliger le cisaillement transversal. L'influence de différents rapports tel que : $a/h_T, b/a, h_{Al}/h_T$ et nombre de couches a été étudiée.
L'introduction du métal au matériau composite conduit à l'augmentation de sa résistance vis-à-vis la température.
Les résultats numériques indiquent que la déformation due au cisaillement transversal à un effet significatif sur le comportement thermique de voilement des plaques hybrides multicouche simplement appuyées. La formulation se prête particulièrement bien à l'analyse des matériaux fonctionnellement classés dans la structure hybride [12-14] qui sera examiné dans un avenir proche.

Références

1 Omanath A. Pawar, Yogesh S. Gaikhe, Asim Tewari, Ramesh Sundaram, Suhas S. Joshi. "Analysis of hole quality in drilling GLARE fiber metal laminates", Composite Structures 05/2015 ; 123. DOI :10.1016/j. compstruct.2014.12.056

2 S. Hinz, F. R. Jones, K. Schulte, Micromechanical modelling of shear deformation of a 90 degrees-ply in Glare (R) at elevated temperatures" Computational Materials Science 03/2007 ; 39(1) :142-148. DOI :10.1016/j.commatsci.2006.01.034

3 H. Zhang & S.W. Gn & J. An & Y. Xiang & J.L. Yang, "Impact Behaviour of GLAREs with MWCNT Modified Epoxy Resins" Experimental Mechanics ISSN 0014-4851.Vol 54 No 1 Exp Mech (2014) 54 :83-93 DOI 10.1007/s11340-013-9724-7

4 Thomas Wittenberg, Tom Van Baten, and J.M. A.M. Hol. "Shear Buckling of Flat Or-

thotropic Stiffened Panels with Application to Glare Material". AIAA Journal, Vol. 44, No. 10 (2006), pp. 2179-2188.

5 P. Biswa, Thermal buckling of orthotropic plate.J. appl. Mech. 43 (1976).

6 T.R Tauchert and N.N Huang, Thermal buckling and postbuckling behavior of anti-symmetric angle-ply laminates. Pro. Int. Symp. Compos. Mater. Struct. (1986).

7 L.W. Chen and L.Y. Chen, Thermal buckling of laminated composite plates. J.Therm. Stresses 10 (1987).

8 G.R. Kirchhoff, "Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe, J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik", vol. 40, pp. 51-88, 1850.

9 E. Reissner," The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J Appl Mech Trans ASME, vol. 12, pp. A69-A77, 1945.

10 R.D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", Journal of Applied Mechanics 73, pp 31-38, 1951.

11 J.L. Mantari, A.S. Oktem and C. Guedes Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates", Composite : Part B, doi : 10.1016/j. Composites b. 2011.07.017 (2011).

12 Chen, C.-S., Lin, C.-Y., Chien, R.-D. "Thermally induced buckling of functionally graded hybrid composite plates." International Journal of Mechanical Sciences. 53 (1). pp. 51-58. 2011. DOI : 10.1016/j.ijmecsci.2010.10.006

13 Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E. A. "Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory." Steel and Composite Structures. 13 (1). pp. 91-107. 2012. DOI : 10.12989/scs.2012.13.1.091

14 Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Adda Bedia, E. A. "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates." Journal of Sandwich Structures and Materials. 14 (1). pp 5-33. 2012. DOI : 10.1177/1099636211426386

Chapitre 5

Voilement Thermique des Plaques Sandwich en FGM en Utilisant un Nouveau Modèle de Cisaillement Hyperbolique

« *Expliquer toute la nature est une tâche trop ardue pour un seul homme ou une seule époque. Il est plus sage de faire peu en étant sûr de soi et laisser le reste à ceux qui viendront après, que présumer de tout sans être sûr de rien.* »

(Isaac Newton)

Sommaire

5.1 Introduction

Les matériaux FGM sont des composites microscopiquement inhomogènes, généralement composés d'une mixture de métal et de céramique, en variant graduellement la fraction de volume de leurs constituants. Les propriétés efficaces des FGM montrent un changement homogène et continu d'une surface à l'autre, de ce fait, les problèmes d'interface seront éliminés et les concentrations de contrainte thermique seront minimisées. En raison de leur grande résistance à la température, les FGM sont utilisés en tant que composants structuraux fonctionnant dans les environnements à très haute température et soumis aux gradients thermiques extrêmement élevés, comme les avions, les véhicules spatiaux, les usines nucléaires et beaucoup d'autres applications technologiques.
Les plaques en FGM sont généralement utilisées dans des environnements thermiques, elles peuvent voiler sous des chargements mécaniques ou thermiques. Ainsi, l'analyse du voilement de telles plaques est essentielle pour assurer une conception fiable et efficace. La théorie classique des plaques (CPT) est habituellement employée pour effectuer l'analyse de stabilité des plaques minces de FGM [1]. Cette théorie ignore le cisaillement transversal et suppose que la normale au plan moyen reste droite et normale après déformation. Comme résultat, la CPT surestime la charge du voilement des plaques fines.
La théorie de déformation du premier ordre (FSDT) inclue l'effet de cisaillement transverse, elle était employée dans quelques travaux de recherche afin d'analyser le comportement de voilement des plaques modérément épaisses. La FSDT suppose que le cisaillement reste constant à travers l'épaisseur et elle nécessite un facteur de correction. Ce facteur de correction dépend des paramètres géométriques, chargement, matériau et conditions aux limites de la plaque. Notant que la FSDT suppose aussi que la section plane reste plane après déformation. Selon le point de vue de quelques groupes de recherche, la FSDT n'est pas un model propre pour analyser des structures épaisses [2],[3],[4],[5] et [6].
Pour franchir les limitations de ces théories (CPT et FSDT), différentes théories d'ordre élevé ont été proposées. Parmi ces théories, la théorie de déformation d'ordre élevé de Reddy [2] qui suppose un champ de déplacement polynomial de 3ème ordre, et que la variation du cisaillement est parabolique à travers l'épaisseur et est nulle sur les surfaces supérieur et inférieur de la plaque. Contrairement à la FSDT, la HSDT ne nécessite aucun facteur de correction et la section transversale de la plaque a tendance à se déformer.
Pour une meilleure connaissance des auteurs, il y a peu de travaux de recherches sur l'analyse du voilement thermique des plaques rectangulaires en FGM basés sur des théories de déformation d'ordre élevé dans la littérature ouverte. Javaheri et Eslami[3] ont étudié le voilement thermique des plaques simplement appuyées en FGM soumises à de divers types de chargements thermiques basés sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Ils ont présenté les températures de voilement en utilisant la méthode de

Navier. Samsam Shariat et Eslami [7] ont présenté l'analyse de voilement mécanique et thermique des plaques rectangulaires épaisses en FGM. Ils ont employé la théorie de déformation de cisaillement du 3ème ordre et la méthode de Navier pour obtenir la charge et la température nécessaires pour voiler une plaque rectangulaire simplement appuyée dont les propriétés matérielles varient linéairement à travers l'épaisseur. En suivant la méthode d'expansion de série entière des composants de déplacement, Matsunaga[8] a présenté une théorie évoluée de déformation pour le voilement thermique des plaques rectangulaires fonctionnellement évalués. Cependant, il y a quelques études rapportées sur l'analyse de voilement thermique des plaques de sandwich à FG. Liew et al[9] a discuté la poteau-voilement et le voilement des plaques composés modérément épais comportant des couches de FG sous le chargement thermique. Des plaques parfaits et imparfaits de FG sont considérés, et la dépendance de la température des constituants matériels est également incluse. Na et Kim[10] ont présenté une formulation finie d'élément pour prévoir l'instabilité des plaques asymétriques maintenus du composé FG. Dans leur étude, la dépendance de la température des propriétés matérielles est également incluse. Récemment, Zenkour et Sobhy[11] ont étudié le voilement thermique des plaques de sandwich fonctionnellement évalués utilisant la théorie sinusoïdale de plaque de déformation de cisaillement.

Pour cette étude, un nouveau modèle hyperbolique de déplacement est développé pour déduire les équations d'équilibre. Les propriétés matérielles comme le module de Young et coefficient de dilatation thermique varient selon une loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque. Les équations de gouvernement sont résolues analytiquement pour une plaque simplement appuyée sur son pourtour et soumise au divers type de chargement thermique. Les effets de divers variables, telles que l'épaisseur de la couche de FGM, indice de la fraction de volume, rapport d'aspect, sur la température de voilement thermique d'une plaque sandwich en FGM sont étudiés et discutés. Les charges thermiques sont assumées soit uniforme, linéaires ou non linéaires à travers l'épaisseur. Des comparaisons avec la littérature sont données afin de montrer les efficacités du modèle actuel. Tous les effets de diverses variables, telles que les dimensions, indice de fraction volumique, type de chargement et type de plaque sandwich sur la charge critique du voilement sont discutés.

5.2 Modélisation d'un FGM

On Considère une plaque sandwich plate composée de trois couches (métal-céramique, céramique, céramique-métal) comme le montre la figure 5.1. Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque sandwich élastique à trois couches qui occupent la région $[0, a] * [0, b] * [-h/2, h/2]$

dans la configuration non déformée. Le plan moyen est défini par $z = 0$. Les couches de surface de la plaque sandwich sont fabriquées en un matériau isotrope ayant des propriétés de matériau variant en douceur autour du l'axe z seulement (épaisseur). L'âme est constituée d'un matériau homogène isotrope. Les positions verticales de la surface inférieure, les deux interfaces entre l'âme et les couches de faces, et la surface supérieure sont indiqués respectivement par $h_0 = -h/2, h_1, h_2$ et $h_3 = h/2$. L'épaisseur totale de la plaque en FGM est h, où $h = t_C + t_{FGM}$ et $t_C = h_2 - h_1$. t_C et h sont l'épaisseur de l'âme et de FGM respectivement.

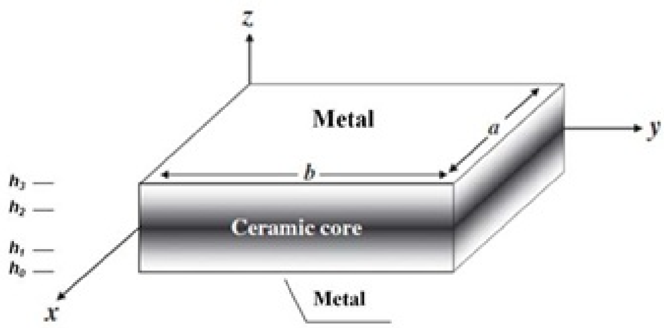


FIGURE 5.1 – Phases d'un matériau composite.

Les propriétés des matériaux de chaque couche, comme le module de Young, coefficient de Poisson et coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimées par :

$$\mathrm{P}^{(n)}(z) = \mathrm{P}_m + (\mathrm{P}_c - \mathrm{P}_m)\mathrm{V}^{(n)} \tag{5.1}$$

Ou $\mathrm{P}^{(n)}$ est la propriété matérielle de la couche n du FGM, pm et pc sont les propriétés des faces supérieurs et inférieurs de la couche $1 (h_0 \leq z \leq h_1)$, respectivement et vice versa pour la couche 3 $(h_2 \leq z \leq h_3)$, selon la fraction de volume $\mathrm{V}^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3)$. Notant que, P_m et P_c sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et à la céramique de la plaque sandwich FGM. La fraction de volume $\mathrm{V}^{(n)}$ du FGM est assumé pour obéir la fonction de loi d'énergie tout au long la direction d'épaisseur [12].

$$\begin{aligned} \mathrm{V}^{(1)} &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^k, z \in [h_0, h_1] \\ \mathrm{V}^{(1)} &= 1, z \in [h_1, h_2] \\ \mathrm{V}^{(3)} &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^k, z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Où k est l'exposant de la fraction du volume qui prend des valeurs supérieur ou égale à zéro. L'âme est indépendante de la valeur de k qui est une couche entièrement en céramique. Cependant, la valeur de k égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique. La prétention de la loi d'énergie ci-dessus reflète une simple règle des mélanges utilisés pour obtenir les propriétés efficaces des faces métal-céramique et céramique-métal de la plaque. La figure 5.2 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la céramique pour $k = 0.01, 0.2, 0.5, 2, 5et10$. Notant que l'âme de la plaque est entièrement en céramique tandis que les surfaces inférieures et supérieures de la plaque sont métal-riches.

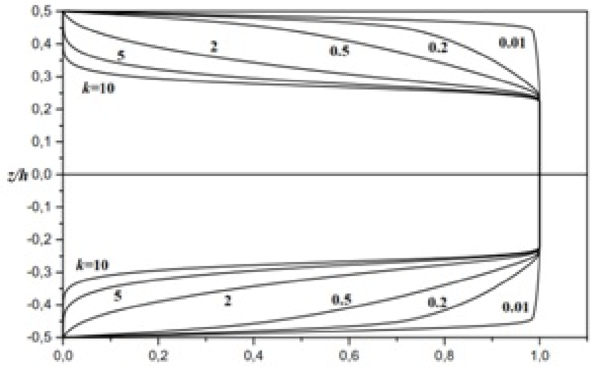


FIGURE 5.2 – Variation de la fonction de la fraction de volume par l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de la loi d'énergie index k avec $t_C/h = 0.5$.

5.2.1 Théorie de déformation d'ordre élevé avec cinq inconnus

Les déplacements d'un point matériel situé à (x, y, z) dans la plaque peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + \psi(z)\phi x \\ \mathrm{V} &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + \psi(z)\phi y \\ \mathrm{W} &= w_0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Où u, v et w sont les déplacements suivant les directions x, y et z. $u0$, $v0$ et $w0$ désignent respectivement les déplacements correspondant au plan moyen suivant les directions x, y et z. ϕx et ϕy sont les rotations autour de la normale au plan moyen suivant les directions x et y respectivement. La fonction $\psi(z)$ est attribuée selon la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Le champ de déplacement de la théorie mince classique de la plaque(CPT) est obtenu facilement en posant $\psi(z) = 0$. Le déplacement de la théorie de premier ordre de la plaque de déformation de cisaillement (FSDPT) est obtenu par $\psi(z) = z$.
En outre, le déplacement de la théorie du troisième ordre de la plaque de déformation de cisaillement (TSDPT) de Reddy[2] est obtenu par :

$$\psi(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \tag{5.4}$$

La théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement des plaques de Zenkour[11] est comme suit :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi}.\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{5.5}$$

5.2.2 Présentation du nouveau modèle hyperbolique

La théorie actuelle a les avantages suivants :

— C'est une théorie déplacement-basée qui inclut les effets de cisaillement transversaux.

— Le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la théorie est seulement quatre. Même dans la théorie de Reissner et de Mindlin (FSDPT), cinq fonctions inconnues sont impliquées.

— La théorie est variationally conformée.

— L'effort de cisaillement transversal satisfait les conditions zéro de frontière d'effort de cisaillement sur les fonds supérieurs et du faisceau parfaitement.

— La théorie obvie au besoin du facteur de correction de cisaillement.

Champ du déplacement du nouveau modèle hyperbolique

Les acceptations de la théorie actuelle sont comme suit :

— Les déplacements sont petits en comparaison de l'épaisseur de la plaque et, en conséquence, les contraintes impliquées sont infinitésimales.

— Le déplacement transversal w inclut deux composants : de flexion wb et de cisaillement ws. Ces composants sont des fonctions des coordonnées x, y seulement.

$$\mathrm{W}(x,y,z) = w_b(x,y) + w_s(x,y) \tag{5.6}$$

— L'effet de la contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec la contrainte dans le plan σ_x et σ_y.

— Les déplacements u suivant la direction x et v suivant la direction y se composent de la prolongation, du recourbement, et des composants de cisaillement.

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_b + u_s \\ v &= v_0 + v_b + v_s \end{aligned} \tag{5.7}$$

On assume que les composantsu_b et v_b sont semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression pour u_b et v_b peut être donnée par :

$$\begin{aligned} u_b &= -z\frac{\partial w_b}{\partial x} \\ v_b &= -z\frac{\partial w_b}{\partial y} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Les composants de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en même temps que w_s, aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} et γ_{yz} et par conséquent aux contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière ces contraintes soient zéro aux faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et de v_s peut être donnée par :

$$\begin{aligned} u_s &= -f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v_s &= -f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Cinématique et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations 5.6 - 5.9 :

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \mathrm{V}(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \mathrm{W}(x,y,z) &= w_b(x,y) + w_s(x,y) \end{aligned} \tag{5.10}$$

La fonction $f(z)$ choisie s'écrit de la façon suivante :

$$f(z) = z\left[1 + \frac{3\pi}{2}\sec h^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{3\pi}{2}h\tanh\left(\frac{z}{h}\right) \tag{5.11}$$

La relation déformation déplacement non linéaire de von Karman est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_b}{\partial z} + \frac{\partial w_s}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

En remplaçant on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z)\gamma_{yz}^s \end{aligned} \tag{5.13}$$

ou :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\
&\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\
&\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right), k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}\\
&\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z), f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Pour des FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\}^{(n)} = \left[\begin{array}{ccc}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{array}\right]^{(n)} \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x - \alpha T\\ \varepsilon_y - \alpha T\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}^{(n)}\\
&\left\{\begin{array}{c}\tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}Q_{44} & 0\\ 0 & Q_{55}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{array}\right\}^{(n)}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Ou $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy} et \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$ sont les contraintes et déformations respectivement. En utilisant les propriétés des matériaux définies dans 5.1, les coefficients de rigidité Q_{ij} s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
&Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}\\
&Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}\\
&Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Et $T(x, y, z)$ est le changement de température à travers l'épaisseur.

5.2.3 Equations d'équilibre

L'énergie potentielle totale d'une plaque sandwich en FGM peut être écrite comme suit :

$$U = \frac{1}{2}\iiint \left[\sigma_x^{(n)}(\varepsilon_x - \alpha^{(n)}T) + \sigma_y^{(n)}(\varepsilon_y - \alpha^{(n)}T) + \tau_{xy}^{(n)}\gamma_{xy} + \tau_{yz}^{(n)}\gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(n)}\gamma_{xz}\right] dxdydz \tag{5.17}$$

Le principe des travaux virtuels de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\int\int[N_x\delta\varepsilon_x^0 + N_y\delta\varepsilon_y^0 + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^0 + M_x^b\delta k_x^b + M_y^b\delta k_y^b + M_{xy}^b\delta k_{xy}^b\\
&+M_x^s\delta k_x^s + M_y^s\delta k_y^s + M_{xy}^s\delta k_{xy}^s + S_{yz}^s\delta\gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s\delta\gamma_{xz}^0]dxdy = 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

ou :

$$\left\{\begin{matrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{3}\int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(n)} \left\{\begin{matrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{matrix}\right\} dz$$
$$\begin{pmatrix} S_{xz}^s & S_{yz}^s \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{3}\int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{pmatrix} \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix}^{(n)} g(z)dz \tag{5.19}$$

En utilisant 5.15 dans 5.19, les résultantes des contraintes d'une plaque sandwich FGM faite de 3 couches peuvent être écrites de la forme suivante :

$$\left\{\begin{matrix} N \\ M^b \\ M^s \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{matrix}\right\}, S = A^s\gamma \tag{5.20}$$

ou :

$$N = \left\{ N_x \quad N_y \quad N_{xy} \right\}^t, M^b = \left\{ M_x^b \quad M_y^b \quad M_{xy}^b \right\}^t, M^s = \left\{ M_x^s \quad M_y^s \quad M_{xy}^s \right\}^t$$
$$N^T = \left\{ N_x^T \quad N_y^T \quad 0 \right\}^t, M^{bT} = \left\{ M_x^{bT} \quad M_y^{bT} \quad 0 \right\}^t, M^{sT} = \left\{ M_x^{sT} \quad M_y^{sT} \quad 0 \right\}^t$$
$$\varepsilon = \left\{ \varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0 \right\}^t, k^b = \left\{ k_x^b \quad k_y^b \quad k_{xy}^b \right\}^t, M^s = \left\{ k_x^s \quad k_y^s \quad k_{xy}^s \right\}^t$$
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$
$$B^S = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^S = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, H^S = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix},$$
$$S = \left\{ S_{yz}^s \quad S_{xz}^s \right\}^t, \gamma = \left\{ \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Ou les A_{ij}, B_{ij}..ect sont les rigidités de la plaque, définies comme suit :

$$\left\{\begin{matrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^S & D_{11}^S & H_{11}^S \\ A_{12} & B_{12} & D & B_{12}^S & D_{12}^S & H_{12}^S \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^S & D_{66}^S & H_{66}^S \end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{3}\int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \left\{\begin{matrix} 1 \\ \upsilon^{(n)} \\ \frac{1-\upsilon^{(n)}}{2} \end{matrix}\right\} dz \tag{5.22}$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S)$$
$$A_{44}^S = A_{55}^S = \sum_{n=1}^{3}\int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\upsilon)}[g(z)]^2 dz \tag{5.23}$$

Les efforts dus à la température $N_x^T = N_y^T$, $M_x^{bT} = M_y^{bT}$ et $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ sont définis de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{array}\right\} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1-\upsilon} \alpha^{(n)}(z) T \left\{\begin{array}{c} 1 \\ z \\ f(z) \end{array}\right\} dz \tag{5.24}$$

En intégrant 5.18 par partie, les équations d'équilibre trouvées sont :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \overline{N} = 0 \\ &\frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \overline{N} = 0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Avec

$$\overline{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \tag{5.26}$$

ou

$$N_x^0 = N_y^0 = -\sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z) T}{1-\upsilon} dz \tag{5.27}$$

Pour la théorie classique, les équations d'équilibre sont réduites aux 3 premières équations.

5.3 Solution du voilement thermique

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction de leurs conditions aux limites. On s'intéresse ici à la solution exacte de 5.25 pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées pour les quatre variables aux bords latéraux :

$$\begin{aligned} v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \text{ à } x = 0, a \\ u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \text{ à } y = 0, b \end{aligned} \tag{5.28}$$

Les solutions approximatives suivantes sont considérées pour satisfaire à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{c} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{array}\right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\begin{array}{c} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{array}\right\} \tag{5.29}$$

Ou U^{1}_{mn}, V^{1}_{mn}, W^{1b}_{mn} et W^{1s}_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\lambda = \frac{m\pi}{a}$ et $\mu = \frac{n\pi}{b}$. En introduisant 5.29 dans 5.25, on obtient :

$$[K]\{\Delta\} = 0 \tag{5.30}$$

Ou Δ désigne le vecteur :

$$\{\Delta\} = \left\{ U^{1}_{mn} \quad V^{1}_{mn} \quad W^{1}_{bmn} \quad W^{1}_{smn} \right\}^{t} \tag{5.31}$$

Et [K] est une matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

Dans laquelle

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\left[2\lambda^2 + (1-\upsilon)\mu^2\right]\overline{A} \\
a_{12} &= -(1+\upsilon)\lambda\mu\overline{A} \\
a_{13} &= 2\lambda(\lambda^2+\mu^2)\overline{B} \\
a_{14} &= 2\lambda(\lambda^2+\mu^2)\overline{B^s} \\
a_{22} &= -\left[2\mu^2 + (1-\upsilon)\lambda^2\right]\overline{A} \\
a_{23} &= 2\mu(\lambda^2+\mu^2)\overline{B} \\
a_{24} &= 2\mu(\lambda^2+\mu^2)\overline{B^s} \\
a_{33} &= -2(\lambda^2+\mu^2)^2\overline{D} - 2\overline{N^0_x}\lambda^2 - 2\overline{N^0_x}\mu^2 \\
a_{34} &= -2(\lambda^2+\mu^2)^2\overline{D^s} - 2\overline{N^0_x}\lambda^2 - 2\overline{N^0_x}\mu^2 \\
a_{44} &= -2(\lambda^2+\mu^2)^2\overline{H^s} - 2\overline{J}(\lambda^2+\mu^2) - 2\overline{N^0_x}\lambda^2 - 2\overline{N^0_x}\mu^2
\end{aligned} \tag{5.33}$$

ou :

$$\begin{aligned}
&\Re_{11} = \Re_{22} = \overline{\Re}, \Re_{12} = \nu\overline{\Re}, \Re_{66} = \tfrac{1-\nu}{2}\overline{\Re}, A^s_{44} = A^s_{55} = \overline{J} \\
&(\Re = A, B, B^s, D, D^s, H^s)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Dans ce qui suit, on déduit la température critique pour différent types de chargement en calculant $|K| = 0$. La température varie seulement à travers l'épaisseur.

5.3.1 Voilement des plaques en FGM sous une température uniforme

La température initiale est supposée T_i, la température augmente uniformément jusqu'à une température finale T_f à partir de la quelle notre plaque voile. On obtient la différence de la température ($\Delta T = T_f - T_i$) en calculant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.35}$$

Et puis, on obtient facilement :

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 \left| \left(\overline{AD} - \overline{B^2}\right)\overline{H_s} - \overline{B_s^2 D} - \overline{AD_s^2} + 2\overline{BD_s B_s} \right| + a^2 b^2 \Pi \left(\overline{AD} - \overline{B^2}\right)\bar{J}}{a^2 b^2 \beta_1 \left[\Pi \left(\left(\overline{H_s} + \overline{D} - 2\overline{D_s}\right)\overline{A} - \left(\overline{B_s} - \overline{B}\right)^2 \right) + a^2 b^2 \overline{AJ} \right]} \tag{5.36}$$

ou :

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(a^2 + b^2\right)\pi^2 \\ \overline{\beta_1} &= \textstyle\sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z)E^{(n)}(z)}{1-\upsilon} dz \end{aligned} \tag{5.37}$$

5.3.2 Voilement des plaques en FGM exposée à un changement de température à travers l'épaisseur

On suppose que la température de la surface supérieure est T_t, et que celle de la surface inférieure est T_b, et la température varie à travers l'épaisseur suivant une loi de puissance donnée par :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{\gamma} + T_t \tag{5.38}$$

Ou $\Delta T = T_b - T_t$ et γ est l'exposant de la température ($0 < \gamma < \infty$). Notant que $\gamma = 1$ correspond à un changement linéaire de température à travers l'épaisseur.
Comme précédemment, la température critique vaut :

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 \left| \left(\overline{AD} - \overline{B^2}\right)\overline{H_s} - \overline{B_s^2 D} - \overline{AD_s^2} + 2\overline{BD_s B_s} \right| + a^2 b^2 \Pi \left(\overline{AD} - \overline{B^2}\right)\bar{J}}{a^2 b^2 \beta_2 \left[\Pi \left(\left(\overline{H_s} + \overline{D} - 2\overline{D_s}\right)\overline{A} - \left(\overline{B_s} - \overline{B}\right)^2 \right) + a^2 b^2 \overline{AJ} \right]} - \frac{T_t \overline{\beta_1}}{\overline{\beta_2}} \tag{5.39}$$

ou

$$\overline{\beta_2} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z)E^{(n)}(z)}{1-\upsilon} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{\gamma} dz \tag{5.40}$$

5.4 Résultats numériques

Pour illustrer l'approche proposée, une plaque FGM sandwich céramique métal a été considérée. La combinaison des matériaux se compose du titane et du Zirconia. Les propriétés des matériaux sont données dans le tableau 5.1.

L'approche générale décrite dans les sections précédentes pour l'analyse du voilement

Type de matrice	**Métal :** Ti–6A1–4V	**Céramique :** ZrO_2
$E(GPa)$	66.2	244.27
ν	0.3	0.3
$\alpha(10^{-6}K$	10.3	12.766

TABLEAU 5.1 – Propriétés des matériaux utilisés dans les plaques FGM sandwich.

thermique des plaques sandwich symétriques en FGM sous une température uniforme, linéaire et non-linéaire à travers l'épaisseur est illustrée dans cette section.
Le facteur de correction pour la FSDT est pris 5/6. Pour la température linéaire et non-linéaire à travers l'épaisseur, $T_t = 25°C$.
Afin de valider l'exactitude des approches actuelles, une comparaison a été effectuée avec les résultats obtenus par [13] pour des plaques isotropes homogènes sous une température uniforme. La différence de la température critique de voilement a été énumérée dans le tableau 5.2. On remarque que les résultats actuels ont une bonne concordance avec ceux rapportés dans [13].
Pour vérifier également l'exactitude du nouveau modèle hyperbolique actuel de déplace-

a/h	**Present**	**[13]**
10	0.119810^{-1}	0.118310^{-1}
20	0.311910^{-2}	0.310910^{-2}
100	0.126510^{-3}	0.126410^{-3}

TABLEAU 5.2 – Paramètre minimal de la température critique αT_{cr} d'une plaque isotrope simplement appuyée ($a/b = 1, \alpha_0 = 1.0 * 10-6/K, E = 1.0 * 10-6N/m^2, \nu = 0.3$).

ment (avec quatre fonctions inconnues), des comparaisons sont faites entre les résultats du voilement thermique obtenus à partir du nouveau modèle de déplacement hyperbolique et ceux obtenus par d'autres théories d'ordre élevé (avec cinq fonctions inconnues). Pour une plaque isotrope homogène $k = 0$, $E(z) = E_0$, $a(z) = a_0$, $\nu = 0.3$. Le changement de la température critique de voilement ($10^3\alpha_0 T_{cr}$) pour différentes valeurs du rapport d'aspect a/h et b/a est illustré dans le tableau 3. Avec l'augmentation du rapport a/h, on peut clairement observer la décroissance grave pour la température critique de voilement. En outre, on peut observer que la température critique de voilement pour une plaque homogène diminue graduellement quand le rapport b/a augmente. La différence entre les théories de déformation de cisaillement et la CPT diminue quand les rapports a/h ou b/a augmentent parce que la plaque devient très mince ou plus large.

Les tableaux 5.4 à 5.6 montrent la différence de la température critique de voilement ($T_{cr} = 10^{-3}\Delta T_{cr}$) pour des plaques sandwich en FGM pour un changement de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur, respectivement. La comparaison entre le nouveau modèle de déplacement hyperbolique et les différentes théories de déformation est établie. Comme on peut observer, il y a une concordance très bonne entre

b/a	Théories	a/h				
		5	10	15	25	50
0.5	Present	81.15170	27.73347	13.23144	4.94979	1.25825
	SSDTP	81.18685	27.73638	13.23205	4.94987	1.25825
	TSDTP	81.09991	27.73011	13.23079	4.94970	1.25824
	FSDTP	80.90487	27.72437	13.23021	4.94968	1.25824
	CPT	126.53339	31.63335	14.05927	5.06134	1.26533
1	Present	41.32613	11.97877	5.48633	2.00644	0.50500
	SSDTP	41.33313	11.97927	5.48643	2.00646	0.50500
	TSDTP	41.31747	11.97825	5.48623	2.00643	0.50499
	FSDTP	41.29710	11.97782	5.48619	2.00643	0.50499
	CPT	50.61336	12.65334	5.62371	2.02453	0.50613
2	Present	27.73347	7.63938	3.46065	1.25827	0.31589
	SSDTP	27.73638	7.63958	3.46069	1.25825	0.31589
	TSDTP	27.73011	7.63918	3.46061	1.25824	0.31589
	FSDTP	27.72437	7.63907	3.46060	1.25824	0.31589
	CPT	31.63335	7.90834	3.51482	1.26533	0.31633
5	Present	23.56145	6.39248	2.88674	1.04785	0.26288
	SSDTP	23.56351	6.39261	2.88676	1.04785	0.26288
	TSDTP	23.55914	6.39233	2.88671	1.04784	0.26288
	FSDTP	23.55569	6.39227	2.88670	1.04784	0.26288
	CPT	26.31895	6.57974	2.92433	1.05276	0.26319

TABLEAU 5.3 – Température critique de voilement ($T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr}$) pour une plaque isotrope homogène sous une température uniforme

t_C/h	Théories	5						
		0	0.2	0.5	1	2	5	10
0	Present	3.23720	3.07138	2.87207	2.68975	2.63325	2.93978	3.30959
	SSDTP	3.23775	3.07197	2.87277	2.69065	2.63460	2.94205	3.31226
	TSDTP	3.23652	3.07042	2.87074	2.68781	2.63018	2.93446	3.30340
	FSDTP	3.23493	3.04858	2.83507	2.64222	2.57355	2.86226	3.23289
	CPT	3.96470	3.66606	3.34559	3.06734	2.96200	3.32950	3.82441
0.2	Present	3.23720	3.05543	2.83135	2.59388	2.39856	2.35252	2.42641
	SSDTP	3.23775	3.05598	2.83194	2.59458	2.39953	2.35401	2.42827
	TSDTP	3.23652	3.05461	2.83030	2.59241	2.39637	2.34898	2.42195
	FSDTP	3.23493	3.03394	2.79675	2.55053	2.34734	2.28926	2.35538
	CPT	3.96470	3.64978	3.30066	2.95538	2.68016	2.59922	2.68195
0.4	Present	3.23720	3.05915	2.84285	2.60512	2.37406	2.19921	2.17624
	SSDTP	3.23775	3.05956	2.84318	2.60545	2.37450	2.19992	2.17714
	TSDTP	3.23652	3.05867	2.84246	2.60462	2.37320	2.19763	2.17417
	FSDTP	3.23493	3.04171	2.81495	2.57038	2.33409	2.15296	2.12571
	CPT	3.96470	3.66567	3.33354	2.99117	2.67295	2.43609	2.39804
0.5	Present	3.23720	3.06980	2.86974	2.64965	2.42885	2.23972	2.17737
	SSDTP	3.23775	3.07014	2.86992	2.64976	2.42900	2.24005	2.17784
	TSDTP	3.23652	3.06952	2.86972	2.64970	2.42873	2.23910	2.17640
	FSDTP	3.23493	3.05527	2.84659	2.62069	2.39542	2.20130	2.13606
	CPT	3.96470	3.68764	3.38155	3.06366	2.75801	2.50252	2.41816
0.6	Present	3.23720	3.08713	2.91139	2.71917	2.52309	2.34313	2.27452
	SSDTP	3.23775	3.08741	2.91146	2.71909	2.52297	2.34310	2.27458
	TSDTP	3.23652	3.08699	2.91168	2.71971	2.52367	2.34345	2.27461
	FSDTP	3.23493	3.07586	2.89364	2.69680	2.49698	2.31286	2.24190
	CPT	3.96470	3.71993	3.45164	3.17226	2.89771	2.65182	2.55878
0.8	Present	3.23720	3.14445	3.04101	2.93052	2.81681	2.74134	2.65659
	SSDTP	3.23775	3.14474	3.04107	2.93038	2.81650	2.74092	2.65609
	TSDTP	3.23652	3.14431	3.04137	2.93131	2.81794	2.74272	2.65798
	FSDTP	3.23493	3.13952	3.03406	2.92193	2.80661	2.72895	2.64315
	CPT	3.96470	3.81800	3.66058	3.49712	3.33246	3.21552	3.10423
1	Present	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720
	SSDTP	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775
	TSDTP	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652
	FSDTP	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493
	CPT	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470

TABLEAU 5.4 – Température critique du flambement (ΔT) d'une plaque carrée FGM sandwich sous une température uniforme en fonction de k et $t_C (a/h = 5)$.

t_C/h	Théories	5						
		0	0.2	0.5	1	2	5	10
0	Present	6.42441	6.09275	5.69414	5.32949	5.21651	5.82957	6.56918
	SSDTP	6.42550	6.09396	5.69554	5.33130	5.21920	5.83411	6.57458
	TSDTP	6.42305	6.09084	5.69148	5.32562	5.21036	5.81891	6.55680
	FSDTP	6.41986	6.04716	5.62014	5.23443	5.09711	5.67452	6.41578
	CPT	7.87940	7.28211	6.64118	6.08468	5.87400	6.60901	7.59882
0.2	Present	6.42441	6.06087	5.61271	5.13775	4.74712	4.65504	4.80264
	SSDTP	6.42550	6.06197	5.61388	5.13917	4.74907	4.65803	4.80632
	TSDTP	6.42305	6.05922	5.61059	5.13482	4.74275	4.64797	4.79372
	FSDTP	6.41986	6.01789	5.54350	5.05105	4.64468	4.52851	4.66058
	CPT	7.87940	7.24955	6.55131	5.86076	5.31032	5.14843	5.31369
0.4	Present	6.42441	6.06830	5.63571	5.16024	4.69812	4.34842	4.26735
	SSDTP	6.42550	6.06913	5.63636	5.16089	4.69900	4.34984	4.24818
	TSDTP	6.42305	6.06734	5.63491	5.15923	4.69640	4.34526	4.26325
	FSDTP	6.41986	6.03341	5.57990	5.09075	4.61818	4.25591	4.16712
	CPT	7.87940	7.28133	6.61708	5.93233	5.29588	4.82217	4.70737
0.5	Present	6.42441	6.08961	5.68948	5.24929	4.80770	4.42943	4.30474
	SSDTP	6.42550	6.09029	5.68986	5.24952	4.80800	4.43011	4.30569
	TSDTP	6.42305	6.08903	5.68943	5.24940	4.80746	4.42821	4.30281
	FSDTP	6.41986	6.06053	5.64319	5.19137	4.74084	4.35259	4.22211
	CPT	7.87940	7.32529	6.71310	6.07732	5.46601	4.95505	4.78633
0.6	Present	6.42441	6.12425	5.77278	5.38833	4.99619	4.63616	4.49905
	SSDTP	6.42550	6.12482	5.77291	5.38818	4.99595	4.63609	4.84881
	TSDTP	6.42305	6.12398	5.77335	5.38942	4.99734	4.63680	4.49922
	FSDTP	6.41986	6.10171	5.73728	5.34361	4.94396	4.57561	4.43382
	CPT	7.87940	7.38985	6.85328	6.29453	5.74542	5.25352	5.06756
0.8	Present	6.42441	6.23889	6.03202	5.81104	5.58362	5.35987	5.26317
	SSDTP	6.42550	6.23949	6.03215	5.81076	5.58301	5.35923	5.26229
	TSDTP	6.42305	6.23862	6.03273	5.81262	5.58589	5.36259	5.26598
	FSDTP	6.41986	6.22905	6.01812	5.79385	5.56322	5.33541	5.23630
	CPT	7.87940	7.58600	7.27115	6.94424	6.61492	6.29563	6.15846
1	Present	6.42441	6.42441	6.42441	6.42441	6.42441	6.42441	6.42441
	SSDTP	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550
	TSDTP	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305
	FSDTP	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986
	CPT	6.42363	6.12545	5.77544	5.39175	4.99944	4.63813	4.49981

TABLEAU 5.5 – Température critique du voilement (ΔT) d'une plaque carrée FGM sandwich sous une température linéaire en fonction de k et $t_C(a/h = 5)$.

t_C/h	Théories	5						
		0	0.2	0.5	1	2	5	10
0	Present	19.27322	20.57122	21.62347	22.42701	23.05643	23.75304	24.05661
	SSDTP	19.27655	20.57531	21.62882	22.43468	23.06838	23.77163	24.07624
	TSDTP	19.26915	20.56479	21.61337	22.41074	23.02926	23.70963	24.01127
	FSDTP	19.25957	20.41729	21.34246	22.02700	22.52869	23.12129	23.49484
	CPT	23.63820	24.58692	25.21986	25.60494	25.96247	26.92893	27.82720
0.2	Present	19.27322	20.43016	21.34626	21.99533	22.37338	22.64929	22.85562
	SSDTP	19.27655	20.43388	21.35077	22.00145	22.38259	22.66392	22.87344
	TSDTP	19.26915	20.42463	21.33822	21.98279	22.35275	22.61489	22.81317
	FSDTP	19.25957	20.28528	21.08307	21.62417	21.89055	22.03367	22.17958
	CPT	23.63820	24.43703	24.91598	25.09061	25.02775	25.04991	25.28770
0.4	Present	19.27322	20.24553	21.00745	21.54152	21.81937	21.87237	21.87534
	SSDTP	19.27655	20.24830	21.00993	21.54429	21.82352	21.87961	21.88463
	TSDTP	19.26915	20.24234	21.00447	21.53734	21.81141	21.85652	21.85429
	FSDTP	19.25957	20.12913	20.79943	21.25144	21.44811	21.40709	21.36153
	CPT	23.63820	24.29255	24.66557	24.76464	24.59556	24.25535	24.13098
0.5	Present	19.27322	20.13209	20.80394	21.28287	21.54783	21.60059	21.57856
	SSDTP	19.27655	20.13435	20.80531	21.28380	21.54921	21.60389	21.58333
	TSDTP	19.26915	20.13019	20.80375	21.28330	21.54679	21.59462	21.56887
	FSDTP	19.25957	20.03597	20.63466	21.04804	21.24818	21.22586	21.16437
	CPT	23.63820	24.21722	24.54686	24.64006	24.49836	24.16380	23.99263
0.6	Present	19.27322	20.00176	20.57076	20.98623	21.23955	21.32555	21.31715
	SSDTP	19.27655	20.00362	20.57125	20.98565	21.23856	21.32526	21.31771
	TSDTP	19.26915	20.00087	20.57280	20.99045	21.24446	21.32848	21.31794
	FSDTP	19.25957	19.92815	20.44424	20.81202	21.01752	21.04701	21.00808
	CPT	23.63820	24.13520	24.42100	24.51562	24.42463	24.16529	24.01085
0.8	Present	19.27322	19.68210	19.99784	20.23872	20.41383	20.52740	20.55953
	SSDTP	19.27655	19.68400	19.99828	20.23774	20.41159	20.52420	20.55608
	TSDTP	19.26915	19.68124	20.00022	20.24422	20.42213	20.53780	20.57050
	FSDTP	19.25957	19.65105	19.95177	20.17887	20.33926	20.43371	20.45455
	CPT	23.63820	23.93190	24.10594	24.18546	24.18431	24.11121	24.05679
1	Present	19.27322	19.27322	19.27322	19.27322	19.27322	19.27322	19.27322
	SSDTP	19.27655	19.27655	19.27655	19.27655	19.27655	19.27655	19.27655
	TSDTP	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915
	FSDTP	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957
	CPT	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820

TABLEAU 5.6 – Température critique du voilement (ΔT) d'une plaque carrée FGM sandwich sous une température non-linéaire en fonction de k et $t_C(a/h = 5)$.

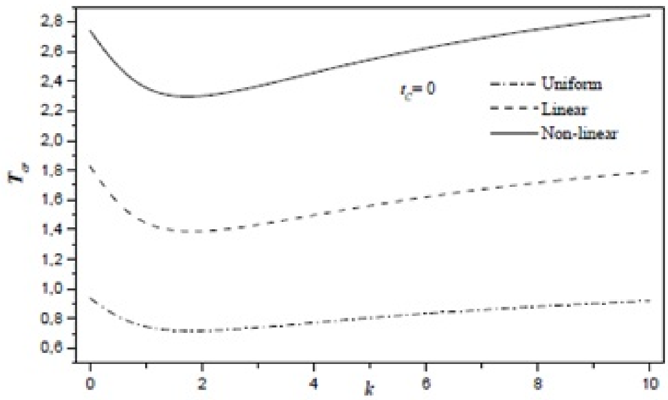
le modèle actuel (avec quatre fonctions inconnues) et les autres théories (avec cinq fonctions inconnues). Les tableaux 4-6 montrent également l'influence de l'épaisseur de l'âme (couche de céramique) sur le comportement de voilement thermique pour les plaques sandwich en FGM. Comme on peut voir sur les tableaux 4 et 5, la température critique du voilement décroît avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique k. Ainsi, l'augmentation de la température de voilement d'une plaque sandwich en FGM est attribuée aux propriétés de céramique. En effet, cette observation est également confirmée quand un petit index de fraction de volume est considéré ($k \leq 2$) pour toutes les valeurs de t_C. Un petit index k de fraction de volume indique que la céramique est le constituant dominant dans des plaques sandwich en FGM. Cependant, le tableau 6 indique que les températures de voilement augmentent avec l'augmentation de k quand la plaque est sous une température non linéaire avec $\gamma = 5$. On peut observer que la température de voilement thermique diminue avec la croissance de l'épaisseur t_C pour tous les indices de fraction volumique considérés.

Les figures 5.3 montre l'effet de l'indice k sur la température critique de voilement T_{cr} pour différentes l'épaisseurs de l'âme t_C pour des plaques sandwich en FGM sous un changement de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur en utilisant le nouveau modèle de déplacement hyperbolique. Il est claire que la température critique de voilement Tcr pour les plaques sous un changement de température non linéaire soit plus haute que celle pour les plaques sous le changement de température uniforme. Tandis que T_{cr} pour les plaques sous le changement de température linéaire est intermédiaire aux deux cas précédents. On observe que, pour les plaques sans âme ($t_C = 0$), la T_{cr} diminue pour atteindre des valeurs minimum puis augmente graduellement à mesure que l'index k (Figure 5.3 (a)). Cependant, pour les plaques sandwich en FGM avec un $t_C \neq 0$, T_{cr} diminue de façon lisse à mesure que k augmente (Figures 5.3 (b), (c) et (d)).

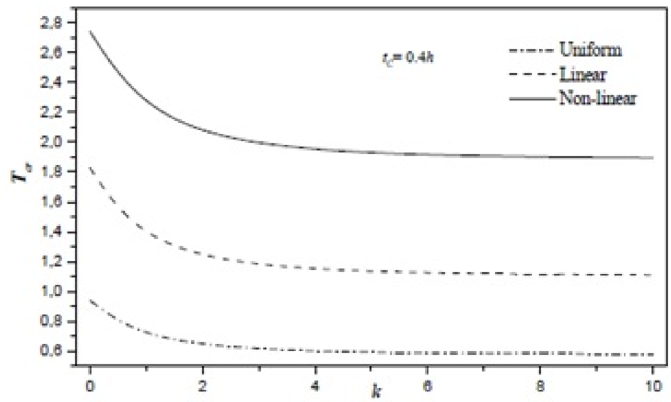
La variation de T_{cr} d'une plaque carrée sandwich en FGM exposée à différents chargements thermique en fonction du rapport a/h est montrée sur les figures5.4. On peut remarquer que la température critique décroît quand le rapport a/h augmente.
Les températures critiques des plaques sous un chargement uniforme sont plus petites que celles sous un chargement linéaire, et ces dernières sont de leur tour plus petites que celles sous un chargement non-linéaire. Il faut aussi noter que la T_{cr} augmente avec l'augmentation du paramètre de non-linéarité γ.

Les figures5.5 montre l'effet du rapport b/a sur la température critique des plaques sandwich en FGM. En plus des remarques déjà faites dans les sections précédentes, on remarque une relation inverse entre la température critique et le rapport b/a.

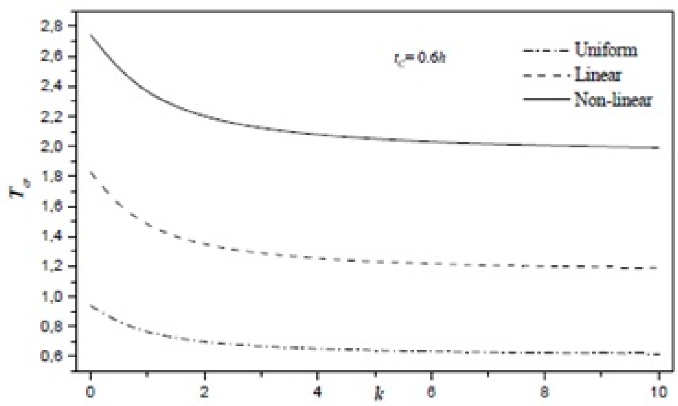
Les figures5.6 montre l'influence de l'épaisseur de l'âme t_C sur la température critique du voilement des plaques sandwich en FGM sous différents types de chargement. Comme



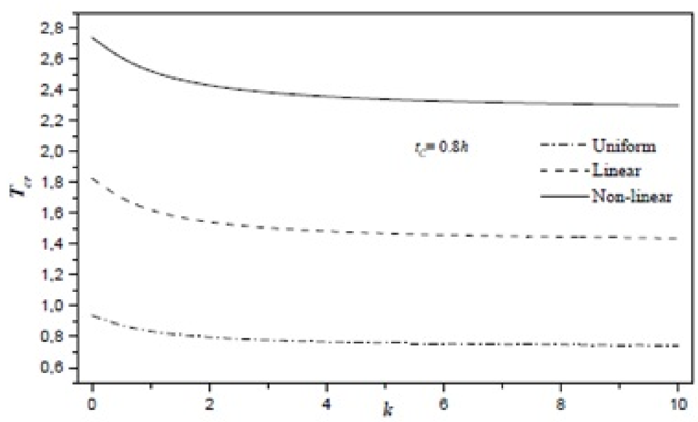
(a)



(b)

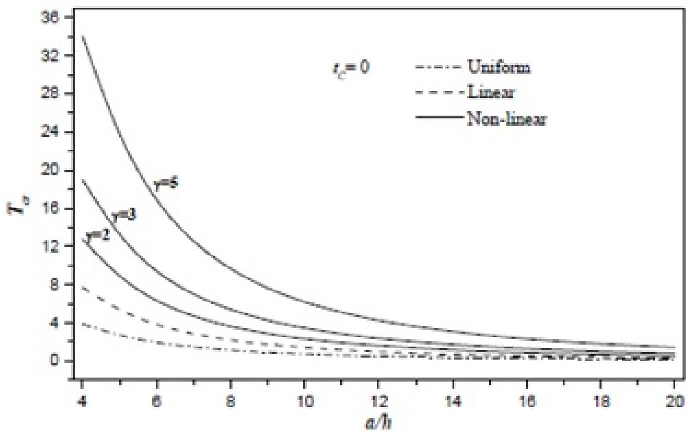


(c)

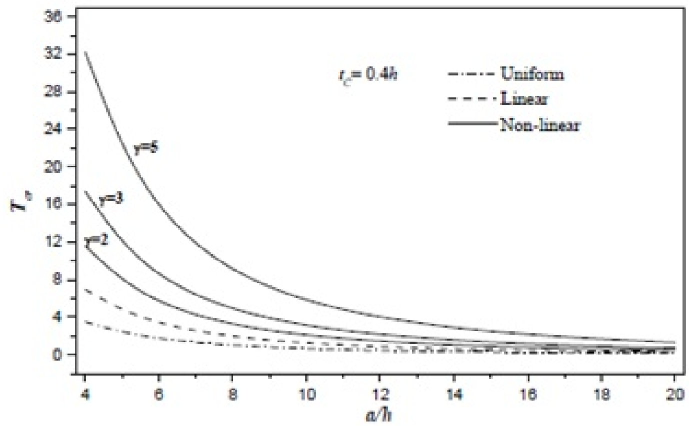


(d)

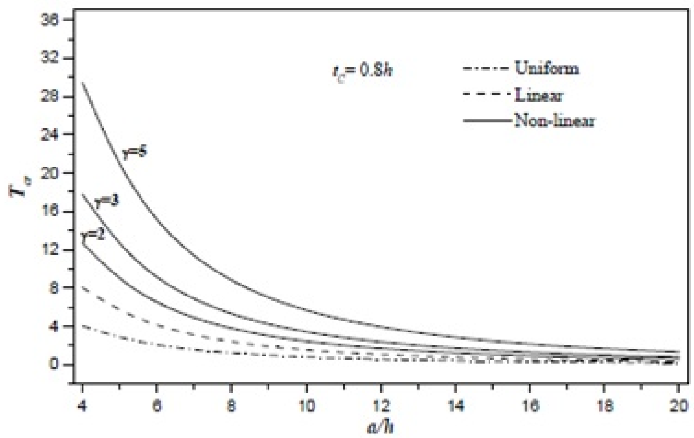
FIGURE 5.3 – Température critique de voilement T_{cr} en fonction de l'indice de la fraction volumique k pour plusieurs types de plaques sandwich carrées en FGM avec $a/h = 10$, $\gamma = 2$ pour le cas de la température non-linéaire.



(a)

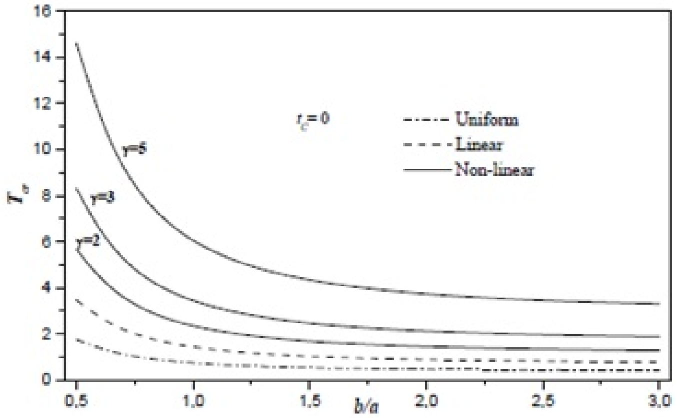


(b)

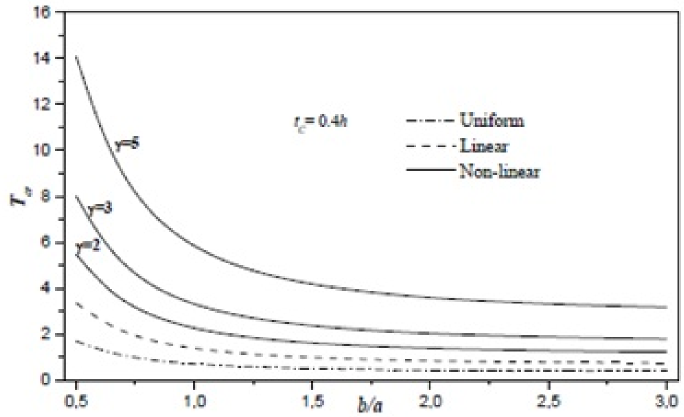


(c)

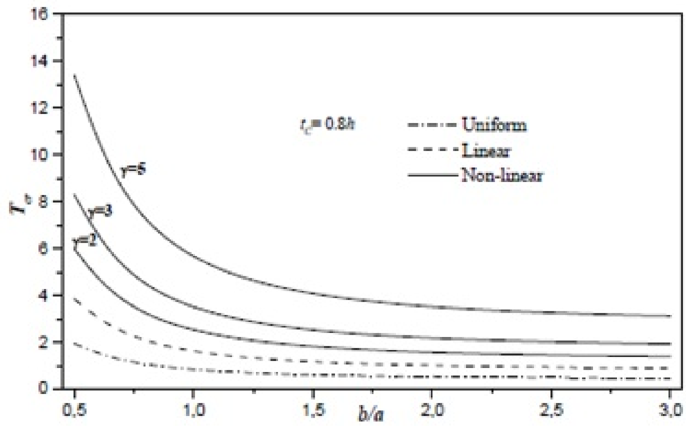
FIGURE 5.4 – Température critique de voilement T_{cr} en fonction de a/h pour plusieurs types de plaques sandwich carrées en FGM avec $k = 2$.



(a)

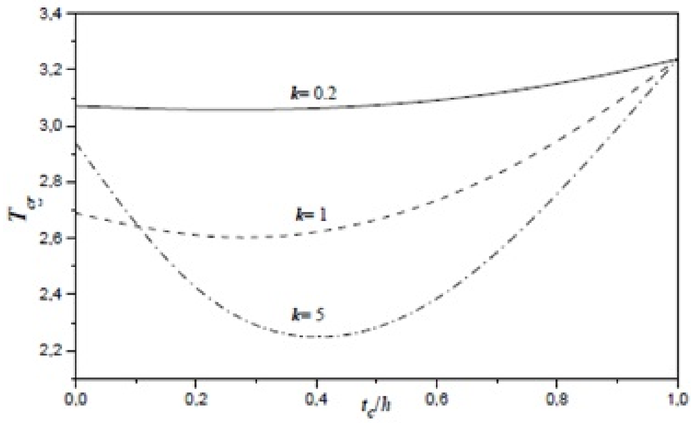


(b)

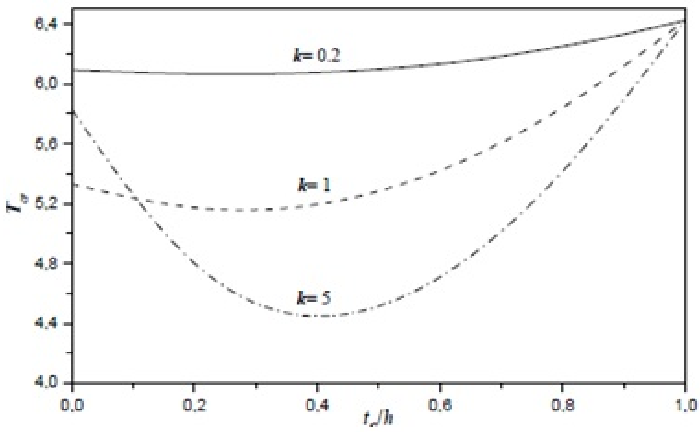


(c)

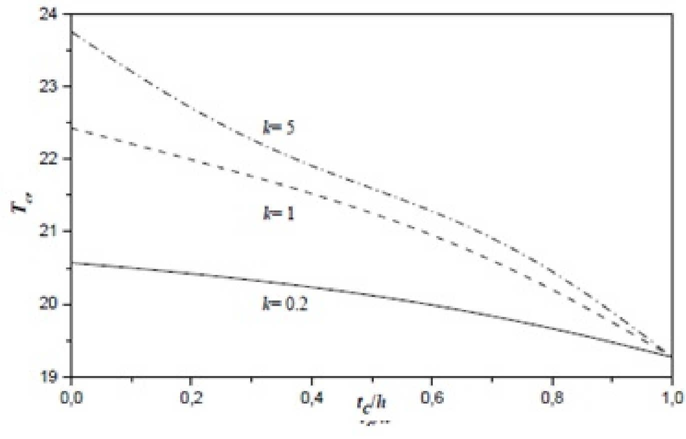
FIGURE 5.5 – Température critique de voilement T_{cr} en fonction du rapport b/a pour plusieurs types de plaques sandwich en FGM avec $a/h = 10$, $k = 1$.



(a) Température uniforme



(b) Température linéaire



(c) Température non linéaire

FIGURE 5.6 – Température critique de voilement T_{cr} en fonction du rapport b/a pour plusieurs types de plaques sandwich en FGM avec $a/h = 10$, $k = 1$.

on peut voir sur les graphes *a* et *b* (température uniforme et linéaire), la température critique di voilement décroît avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique k. Pour un petit k, il est indiqué que la céramique est le constituant dominant dans les plaques FGM. C'est pourquoi on peut dire que l'augmentation de la température critique est attribuée aux propriétés de céramique. Comme attendu, la température critique est maximale dans les plaques en céramique ($t_C = 1$). Dans le cas de la température non-uniforme, la température critique du voilement sera minimale dans les plaques en céramique, et elle décroît avec l'augmentation de l'indice k.

5.5 Conclusions

Le comportement de voilement thermique des plaques sandwich en FGM est décrit et discuté en ce chapitre en utilisant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique. Le nombre de variables primaires dans cette théorie est même moins que celui de la théorie de déformation du premier ordre. La théorie donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales, et remplit la condition du cisaillement nul sur les surfaces de la plaque sans employer des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles d'un FGM varient selon une loi de puissance le long de l'épaisseur. L'analyse du voilement des plaques sandwich en FGM sous différents types de chargements thermiques est présentée. En conclusion, on peut dire que le nouveau modèle de déplacement hyperbolique proposé est précis et simple à résoudre le comportement de voilement thermique des plaques sandwich en FGM.

Référence

1 Javaheri, R. and Eslami, M.R. (2002a), "Thermal buckling of functionally graded plates", AIAA J., 40(1), 162-169.

2 Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", J. Appl. Mech., 51(4), 745-752.

3 Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", Int. J. Numer. Methods Eng., 47(1-3), 663-684.

4 Javaheri, R. and Eslami, M.R. (2002b), "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory", J. Therm. Stresses, 25(7), 603-625.

5 Şimşek, M. (2009), "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method", Int. J. Eng. Appl. Sci., 1(3), 1-11.

6 Sallai, B.O., Tounsi, A., Mechab, I., Bachir, B.M., Meradjah, M. and Adda Bedia E.A. (2009), "A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al2O3 S-FGM thick beams",

Computat. Mater. Sci.., 44(4), 1344-1350.

7 Samsam Shariat, B.A. and Eslami, M.R. (2007), "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads", Compos. Struct., 78(3), 433-439.

8 Matsunaga, H. (2009), "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", Compos. Struct., 90(1), 76-86.

9 Liew, K.M., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2004), "Thermal post-buckling of laminated plates comprising functionally graded materials with temperature-dependent properties", J. Appl. Mech. Trans. ASME., 71(6), 839-850.

10 Na, K.-S. and Kim, J.-H. (2006), "Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates", Compos. Struct., 73(4), 413-422.

11 Zenkour, A.M. and Sobhy, M. (2010), "Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates", Compos. Struct., 93(1), 93-102.

12 Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Adda bedia, E.A. (2011), "Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates", J. Therm. Stresses, 34(4), 315-334.

13 Matsunaga, H. (2005), "Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory", Compos. Struct., 68(4), 439-454.

Chapitre 6

Etude du Voilement des Plaques Sandwich en FGM en Utilisant la Méthode de Rayleigh-Ritz

« *La science a peut-être trouvé un remède pour la plupart des maux, mais elle n'en a pas trouvé pour le pire de tous : l'apathie des êtres humains.* »

(Helen Keller)

Sommaire

6.1 Introduction

Dans les dernières années, on a remarqué une augmentation rapide de l'utilisation des plaques sandwich FGM dans différents domaines du à leur propriétés. Avec la large application de ces structures, des théories plus précises sont nécessaires pour prévoir leur réponse de voilement. Javaheri et al [1,2] utilise une approche variationnelle pour déterminer l'équilibre et stabilité des plaques rectangulaires en FGM. Woo et al [3] a fait une analyse non linéaire des plaques et coques en FGM sous chargement thermomécanique. Il est intéressant de noter que les recherches citées précédemment négligent l'effet de cisaillement à travers l'épaisseur, cet effet qui sera très important dans le cas des plaques épaisses. Afin d'inclure le cisaillement transversal, plusieurs recherches ont été faites, citons celle de Zhanga et al [4] ou il déterminé le voilement thermique de plaques FGM en utilisant une méthode de Krigeage Meshless locale, il a considéré que le cisaillement est constant à travers l'épaisseur de la plaque.
Plusieurs recherches utilisant des théories d'ordre élevé ont été faites, citons celles de Feldman et al [5], Javaheri et al [6], Najafizadeh et al [7], Samsam Shariat et al [8] et Abrate [9]. La plus part des recherches sont faites sur des plaques rectangulaires simplement appuyées.
Pour cette étude, on va utiliser le même modèle hyperbolique de déplacement pour déduire les équations d'équilibre. Les propriétés matérielles varient selon une loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque. Deux types de plaque FGM sandwich sont utilisés : le premier est une plaque sandwich avec des peaux FGM et le noyau en céramique, tandis qu'en deuxième type, on considère que les peaux supérieur et inférieur sont en métal et céramique respectivement, et le noyau et en FGM. L'étude est faite sur des plaques simplement appuyées et des plaques encastrées. Les effets de divers variables, telles que l'épaisseur de la couche de FGM, indice de la fraction de volume, rapport d'aspect, sur la charge critique du voilement d'une plaque sandwich en FGM sont étudiés et discutés. Des comparaisons avec la littérature sont données afin de montrer les efficacités du modèle actuel.

6.2 Formulation théorique

6.2.1 Plaque en FGM

On Considère une plaque sandwich plate. Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque sandwich élastique à trois couches qui occupent la région $[0, a]Ö[0, b]Ö[-h/2, h/2]$ dans la configuration non déformée. Le plan moyen est défini par $z = 0$.
Les propriétés des matériaux de chaque couche, comme le module de Young, coefficient

de Poisson et coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimées par :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \tag{6.1}$$

Ou $P^{(n)}$ est la propriété matérielle de la couche n du FGM, P_m et P_c sont les propriétés du métal et céramique respectivement, $V^{(n)}$ étant la fraction de volume.
Deux types de plaque FGM sont considérés :
Type A : les deux peaux sont en FGM et le noyau est en céramique (figure 1a) :

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^k, z \in [h_0, h_1] \\ V^{(1)} &= 1, z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^k, z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \tag{6.2}$$

Où k est l'exposant de la fraction de volume qui prend des valeurs supérieur ou égale à zéro. *Type B :* les deux peaux sont en métal et céramique et le noyau et en FGM (figure 1b)

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= 0, z \in [h_0, h_1] \\ V^{(1)} &= \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^k, z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} &= 1, z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \tag{6.3}$$

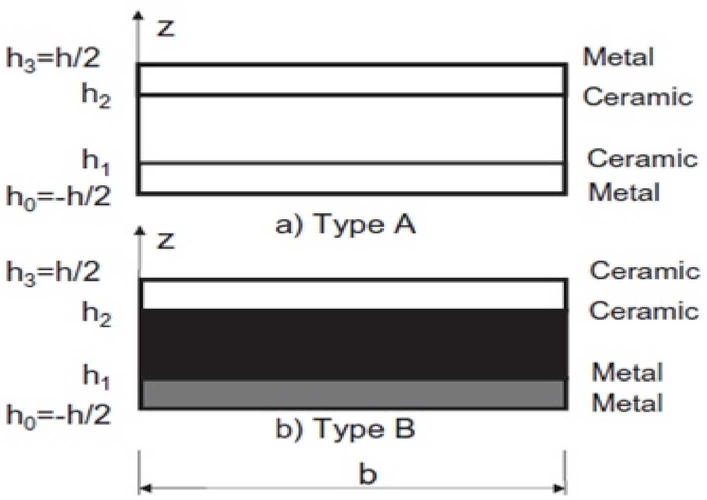


FIGURE 6.1 – Configuration de la plaque FGM : type A, type B.

6.2.2 Cinématique

On considère le même champ déplacement du chapitre précédent ou le nombre des inconnus est réduit en 4,

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x,y,z) &= w_b(x,y) + w_s(x,y) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Où u_0 et v_0 désignent respectivement les déplacements correspondant au plan moyen suivant les directions x et y. w^b et w^s désignent respectivement les composant de flexion et de cisaillement. La fonction $f(z)$ est attribuée selon la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque.
La fonction $f(z)$ choisie s'écrit de la façon suivante :

$$f(z) = z\left[1 + \frac{3\pi}{2}\sec h^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{3\pi}{2}h\tanh\left(\frac{z}{h}\right) \tag{6.5}$$

La relation déformation déplacement non linéaire de von Karman est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_b}{\partial z} + \frac{\partial w_s}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{6.6}$$

En remplaçant on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z)\gamma_{yz}^s \end{aligned} \tag{6.7}$$

ou

$$\begin{array}{l} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y}\right), k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z), f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{array} \quad (6.8)$$

subsectionRésultantes et moments Les résultantes de contrainte $N_{ij}, M_{ij}^b, M_{ij}^s$ et S_{ij} sont données par :

$$\left(N, M^b, M^s, S\right) = \int \sigma\left(1, z, f(z), g(z)\right) dz \quad (6.9)$$

N_{ij} représentent les résultantes respectivement des contraintes normales suivant x et suivant y et des contraintes de cisaillement dans le plan (x, y). De même, S_{ij} sont les résultantes en cisaillement définies. Les composantes M_{ij} sont les moments.

6.2.3 Équations constitutives

Pour notre cas, les relations constitutives peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yz} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array}\right\} \quad (6.10)$$

Ou $\sigma_x, \sigma_y, \tau_y z, \tau_x y, \tau_x z$ et $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ sont les contraintes et déformations respectivement. Les coefficients de rigidité Q_{ij} s'expriment comme suit :

$$\begin{array}{l} Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} \end{array} \quad (6.11)$$

6.2.4 Technique de Rayleigh-Ritz

L'une des applications du principe de l'énergie potentielle est l'analyse approchée des structures. Cette énergie doit être exprimée en fonction des déplacements de la structure. Les déplacements exacts étant inconnus, introduisons un champ de déplacement approché mais plausible et logique.

Les équations aux dérivées partielles de la dynamique des structures sont difficiles à résoudre, sauf pour des configurations très simples. Pour les systèmes plus complexes, les solutions approximatives sont recherchées. Une des solutions approximatives les plus importantes qui sont utilisées dans les systèmes continus est la méthode de Rayleigh-Ritz. L'un des points les plus importants pour appliquer la technique de Rayleigh-Ritz d'une manière appropriée est de décrire les composantes de déplacement et de rotation en tant qu'une combinaison linéaire de n fonctions appropriée qui a la capacité de prédire le comportement du système avec une plus grande précision et une meilleure convergence. En prenant un nombre suffisant de termes dans la série, il est possible d'approcher la solution exacte du problème considéré. Dans cette étude, les déplacements sont pris comme suit :

$$\begin{aligned} w^b(x,y) &= A\psi(x,y) \\ w^s(x,y) &= B\psi(x,y) \\ u_0(x,y) &= C\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} \\ v_0(x,y) &= D\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{6.12}$$

où A, B, C et D sont des coefficients indéterminés inconnus. $\psi(x)$ est la fonction axiale qui satisfait les conditions aux limites de la plaque :

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= a1\cosh\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\cosh\left(\frac{\mu y}{b}\right) + a2\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\cos\left(\frac{\mu y}{b}\right) \\ &-\kappa_n\left(a3\sinh\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\mu y}{b}\right) + a4\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\sin\left(\frac{\mu y}{b}\right)\right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

On suppose que le nombre de demi cercle fait par la plaque lors de son voilement suivant x est le même que celui siuvant y ($\lambda = \mu$), les valeurs de ai, κ_n, et λ sont données dans le tableau 6.1 pour différentes conditions aux limites.

Conditions aux limites	$ai(i=1,2,3,4)$	λ	κ_n
Simplement appuyée (ssss)	$a1=0, a2=0, a3=0, a4=-1$	$n\pi$	1
Encastrée (cccc)	$a1=1, a2=-1, a3=1, a4=-1$	$\cos\lambda\cosh\lambda=-1$	$\frac{\cosh\lambda-\cos\lambda}{\sinh\lambda-\sin\lambda}$

TABLEAU 6.1 – Valeurs de ai, κ_n et λ pour deux différents types d'appuis.

L'énergie potentielle du système est :

$$U = \frac{1}{2}\int\int\int\left[\sigma^{(n)}\epsilon\right]dxdydz \tag{6.14}$$

En remplaçant les contraintes et les déformations par leurs expressions et en minimisant les coefficients inconnus indéterminés A, B, C et D, à savoir : $\frac{\partial U}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial B} = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial D} = 0$, on trouve les quatre équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned}
&M_x^b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x \partial y} + M_y^b \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} + N\psi(x,y) = 0 \\
&M_x^s \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x \partial y} + M_y^s \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} - S_{xz}^s \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} - S_{xz}^s \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} + N\psi(x,y) = 0 \\
&N_x \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 \\
&N_{xy} \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Matriciellement, on peut écrire le système précédent comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = 0 \tag{6.16}$$

Pour une plaque simplement appuyée, les a_{ij} prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2\lambda^2\mu^2 D_{12} + \mu^4 D_{22} + \lambda^4 D_{11} - N \\
a_{12} &= 2\lambda^2\mu^2 H_{12} + \mu^4 H_{22} + \lambda^4 H_{11} - N \\
a_{22} &= 2\lambda^2\mu^2 J_{12} + \mu^4 J_{22} + \lambda^4 J_{11} - N \\
a_{33} &= \lambda^4 A_{11} \\
a_{34} &= \lambda^2\mu^2 A_{12} \\
a_{44} &= \mu^4 A_{22}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Tandis que pour une plaque encastrée, ils s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2\kappa^2 a4^2\lambda^2\mu^2 D_{12} + \kappa^2 a4^2\mu^4 D_{22} + 4\lambda^2\mu^2 a2^2 D_{33} + \kappa^2 a4^2\lambda^4 D_{11} - N \\
a_{12} &= 2\kappa^2 a4^2\lambda^2\mu^2 H_{12} + \kappa^2 a4^2\mu^4 H_{22} + 4\lambda^2\mu^2 a2^2 H_{33} + \kappa^2 a4^2\lambda^4 H_{11} - N \\
a_{22} &= 2\kappa^2 a4^2\lambda^2\mu^2 J_{12} + \kappa^2 a4^2\mu^4 J_{22} + 4\lambda^2\mu^2 a2^2 J_{33} + \kappa^2 a4^2\lambda^4 J_{11} - N \\
a_{33} &= \lambda^2\mu^2 a2^2 A_{33} + \kappa^2 a4^2\lambda^4 A_{11} \\
a_{34} &= \lambda^2\mu^2 a2^2 A_{33} + \kappa^2 a4^2\lambda^2\mu^2 A_{12} \\
a_{44} &= \lambda^2\mu^2 a2^2 A_{33} + \kappa^2 a4^2\mu^4 A_{22}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Avec :

$$\left(A_{ij}, D_{ij}, H_{ij}, J_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left[1, z^2, zf(z), (f(z))^2\right] \tag{6.19}$$

Posons :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

On peut déduire la charge critique N_{cr} en calculant $|K| = 0$, et elle vaut :

$$N_{cr} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}} \tag{6.21}$$

Chargement thermique

Si on considère que notre plaque est sous température uniforme, et que

$$N_{cr} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z)E^{(n)}(z)T}{1-\upsilon} dz \tag{6.22}$$

T_{cr} prend la forme suivante :

$$T_{cr} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})\beta} \tag{6.23}$$

avec :

$$\beta = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z)E^{(n)}(z)}{1-\upsilon} dz \tag{6.24}$$

6.3 Résultats numériques

Pour les calculs numériques, on va prendre les mêmes matériaux pris dans la section précédente (titane et du Zirconia).

Afin de valider nos résultats, une comparaison a été effectuée avec les résultats obtenus par [10]et [11] pour des plaques isotropes homogènes sous une température uniforme. La différence de la température critique de voilement a été énumérée dans le tableau 6.2. On remarque une bonne concordance entre nos résultats et ceux de la littérature.

a/h	**Present**	**[10]**	**[11]**
10	0.118810^{-1}	0.118310^{-1}	0.119810^{-1}
20	0.311310^{-2}	0.310910^{-2}	0.311910^{-2}
30	0.126410^{-3}	0.126410^{-3}	0.126510^{-3}

TABLEAU 6.2 – Paramètre minimal de la température critique αT_{cr} d'une plaque isotrope simplement appuyée ($a/b = 1, \alpha_0 = 1.0 * 10 - 6/K, E = 1.0 * 10 - 6N/m^2, \nu = 0.3$).

D'après les tableaux 6.3-6.5 , on peut voir que le type B, ou le noyau est en FGM, a une résistance plus grande au voilement que celle du type A.

Puis, on va tracer la charge critique du voilement des plaques sandwich FGM type A simplement appuyées et encastrées, et une étude paramétrique de l'influence de différents paramètres tels que : les dimensions de la plaque, l'épaisseur de l'âme et l'exposant de la fraction de volume sur cette charge.

t_C/h	Théories	5						
		0	0.2	0.5	1	2	5	10
0	Present	3.23724	3.07142	2.87233	2.68991	2.63376	2.94002	3.30981
	[11]	3.23720	3.07138	2.87207	2.68975	2.63325	2.93978	3.30959
	SSDTP	3.23775	3.07197	2.87277	2.69065	2.63460	2.94205	3.31226
	TSDTP	3.23652	3.07042	2.87074	2.68781	2.63018	2.93446	3.30340
	FSDTP	3.23493	3.04858	2.83507	2.64222	2.57355	2.86226	3.23289
	CPT	3.96470	3.66606	3.34559	3.06734	2.96200	3.32950	3.82441
0.2	Present	3.23724	3.05553	2.83154	2.59396	2.39877	2.35304	2.42794
	[11]	3.23720	3.05543	2.83135	2.59388	2.39856	2.35252	2.42641
	SSDTP	3.23775	3.05598	2.83194	2.59458	2.39953	2.35401	2.42827
	TSDTP	3.23652	3.05461	2.83030	2.59241	2.39637	2.34898	2.42195
	FSDTP	3.23493	3.03394	2.79675	2.55053	2.34734	2.28926	2.35538
	CPT	3.96470	3.64978	3.30066	2.95538	2.68016	2.59922	2.68195
0.4	Present	3.23724	3.05933	2.84296	2.60531	2.37420	2.19964	2.17673
	[11]	3.23720	3.05915	2.84285	2.60512	2.37406	2.19921	2.17624
	SSDTP	3.23775	3.05956	2.84318	2.60545	2.37450	2.19992	2.17714
	TSDTP	3.23652	3.05867	2.84246	2.60462	2.37320	2.19763	2.17417
	FSDTP	3.23493	3.04171	2.81495	2.57038	2.33409	2.15296	2.12571
	CPT	3.96470	3.66567	3.33354	2.99117	2.67295	2.43609	2.39804
0.5	Present	3.23724	3.07007	2.86989	2.64969	2.42892	2.23988	2.17765
	[11]	3.23720	3.06980	2.86974	2.64965	2.42885	2.23972	2.17737
	SSDTP	3.23775	3.07014	2.86992	2.64976	2.42900	2.24005	2.17784
	TSDTP	3.23652	3.06952	2.86972	2.64970	2.42873	2.23910	2.17640
	FSDTP	3.23493	3.05527	2.84659	2.62069	2.39542	2.20130	2.13606
	CPT	3.96470	3.68764	3.38155	3.06366	2.75801	2.50252	2.41816
0.6	Present	3.23724	3.08738	3.91142	2.71911	2.52302	2.34312	2.27454
	[11]	3.23720	3.08713	2.91139	2.71917	2.52309	2.34313	2.27452
	SSDTP	3.23775	3.08741	2.91146	2.71909	2.52297	2.34310	2.27458
	TSDTP	3.23652	3.08699	2.91168	2.71971	2.52367	2.34345	2.27461
	FSDTP	3.23493	3.07586	2.89364	2.69680	2.49698	2.31286	2.24190
	CPT	3.96470	3.71993	3.45164	3.17226	2.89771	2.65182	2.55878
0.8	Present	3.23724	3.14456	3.04103	2.93044	2.81669	2.74105	2.65638
	[11]	3.23720	3.14445	3.04101	2.93052	2.81681	2.74134	2.65659
	SSDTP	3.23775	3.14474	3.04107	2.93038	2.81650	2.74092	2.65609
	TSDTP	3.23652	3.14431	3.04137	2.93131	2.81794	2.74272	2.65798
	FSDTP	3.23493	3.13952	3.03406	2.92193	2.80661	2.72895	2.64315
	CPT	3.96470	3.81800	3.66058	3.49712	3.33246	3.21552	3.10423
1	Present	3.23724	3.23724	3.23724	3.23724	3.23724	3.23724	3.23724
	[11]	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720	3.23720
	SSDTP	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775
	TSDTP	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652
	FSDTP	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493
	CPT	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470

TABLEAU 6.3 – Température critique du flambement (ΔT) d'une plaque carrée FGM sandwich sous une température uniforme en fonction de k et $t_C (a/h = 5)$.

t_C/h	Théories	b/a	k				
			0	0.5	1	5	10
0	Type A	0.5	1.9606	2.5463	1.9606	1.1507	1.4894
		1	0.33757	0.44177	0.33758	0.20179	0.23821
		1.5	0.17197	0.22449	0.17198	0.10216	0.12428
		2	0.12254	0.15915	0.12254	0.07192	0.093085
		2.5	0.09912	0.12797	0.09913	0.05737	0.08018
		3	0.08483	0.10884	0.08483	0.04842	0.07358
	Type B	0.5	2.7216	2.7216	2.7216	2.7216	2.7216
		1	0.47041	0.47041	0.47041	0.47041	0.47041
		1.5	0.23939	0.23939	0.23939	0.23939	0.23939
		2	0.17010	0.17010	0.17010	0.17010	0.17010
		2.5	0.13706	0.13706	0.13706	0.13706	0.13706
		3	0.11670	0.11670	0.11670	0.11670	0.11670
0.2	Type A	0.5	3.7829	2.6715	2.1394	1.2804	1.1551
		1	0.67546	0.46529	0.36908	0.22284	0.20308
		1.5	0.33989	0.23613	0.18790	0.11310	0.10271
		2	0.23643	0.16699	0.13370	0.08002	0.07219
		2.5	0.18610	0.13389	0.10800	0.06425	0.05751
		3	0.15509	0.11357	0.092323	0.05462	0.04852
	Type B	0.5	2.70250	2.69090	2.68680	2.68020	2.67730
		1	0.46862	0.46675	0.46610	0.46502	0.46458
		1.5	0.23821	0.23723	0.23688	0.23632	0.23610
		2	0.16891	0.16818	0.16792	0.16751	0.16733
		2.5	0.13578	0.13515	0.13494	0.13458	0.13442
		3	0.11536	0.11480	0.11460	0.11427	0.11413
0.4	Type A	0.5	3.5809	2.73802	2.3116	1.51320	1.35850
		1	0.64757	0.48374	0.40419	0.26396	0.23854
		1.5	0.32439	0.24429	0.20481	0.13384	0.12068
		2	0.22381	0.17113	0.14447	0.094577	0.084903
		2.5	0.17472	0.13584	0.11559	0.075919	0.067851
		3	0.14459	0.11420	0.097946	0.064629	0.057555
	Type B	0.5	2.6934	2.6069	2.5763	2.5252	2.5040
		1	0.47126	0.45704	0.45206	0.44372	0.44027
		1.5	0.23878	0.23145	0.22886	0.22455	0.22275
		2	0.16833	0.16292	0.16102	0.15782	0.15650
		2.5	0.13449	0.12992	0.12830	0.12558	0.12447
		3	0.11367	0.10956	0.10810	0.10564	0.10464
0.8	Type A	0.5	2.4574	2.1664	2.0066	1.6375	1.5399
		1	0.47127	0.41383	0.38284	0.31181	0.29286
		1.5	0.23081	0.20294	0.18781	0.15293	0.14364
		2	0.15358	0.13540	0.12541	0.10233	0.096241
		2.5	0.11653	0.10307	0.095601	0.078429	0.073954
		3	0.094955	0.084264	0.078316	0.064745	0.061281
	Type B	0.5	2.3790	2.0272	1.8768	1.6011	2.5040
		1	0.44568	0.37911	0.35196	0.30326	0.44027
		1.5	0.22026	0.18753	0.17397	0.14944	0.22275
		2	0.14869	0.12670	0.11731	0.15782	0.10007
		2.5	0.11413	0.097202	0.089724	0.12558	0.075836
		3	0.093664	0.079608	0.073223	0.10564	0.061207

TABLEAU 6.4 – Charge critique du voilement (Ncr) d'une plaque FGM sandwich encastrée en fonction de k, t_C et $b/a(a/h = 10)$.

t_C/h	Théories	b/a	k				
			0	0.5	1	5	10
0	Type A	0.5	3.1824	2.0754	1.5910	0.94389	1.1574
		1	0.47959	0.30381	0.23086	0.13991	0.15523
		1.5	0.25991	0.16627	0.12671	0.076248	0.087390
		2	0.19891	0.12972	0.099435	0.058989	0.072346
		2.5	0.16720	0.11142	0.085991	0.050198	0.066905
		3	0.14525	0.098821	0.076783	0.044127	0.064352
	Type B	0.5	2.2139	2.2139	2.2139	2.2139	2.2139
		1	0.32241	0.32241	0.32241	0.32241	0.32241
		1.5	0.17678	0.17678	0.17678	0.17678	0.17678
		2	0.13836	0.13836	0.13836	0.13836	0.13836
		2.5	0.11918	0.11918	0.11918	0.11918	0.11918
		3	0.10590	0.10590	0.10590	0.10590	0.10590
0.2	Type A	0.5	3.1360	2.1828	1.7379	1.0455	0.94879
		1	0.47511	0.32095	0.25279	0.15371	0.14116
		1.5	0.25701	0.17540	0.13865	0.083990	0.076823
		2	0.19601	0.13642	0.10862	0.065343	0.059299
		2.5	0.16419	0.11678	0.093763	0.055985	0.050361
		3	0.14220	0.10325	0.083614	0.049589	0.044220
	Type B	0.5	2.2022	2.1934	2.1901	2.1847	2.1827
		1	0.32196	0.32072	0.32034	0.31961	0.31933
		1.5	0.17631	0.17562	0.17539	0.17499	0.17483
		2	0.13765	0.13708	0.13689	0.13655	0.13641
		2.5	0.11824	0.11773	0.11753	0.11723	0.11711
		3	0.10480	0.10430	0.10413	0.10384	0.10372
0.4	Type A	0.5	2.9903	2.2556	1.8927	1.2370	1.1147
		1	0.46054	0.33762	0.27984	0.18260	0.16598
		1.5	0.24767	0.18336	0.15262	0.099616	0.090272
		2	0.18691	0.14097	0.11828	0.077305	0.069668
		2.5	0.15492	0.11921	0.10094	0.066151	0.059286
		3	0.13302	0.10425	0.089072	0.058631	0.052299
	Type B	0.5	2.2063	2.1378	2.1144	2.0742	2.0574
		1	0.32611	0.31674	0.31345	0.30797	0.30567
		1.5	0.17790	0.17266	0.17085	0.16776	0.16648
		2	0.13789	0.13364	0.13215	0.12964	0.12859
		2.5	0.11756	0.11371	0.11234	0.11007	0.10913
		3	0.10352	0.099893	0.098613	0.096442	0.095550
0.8	Type A	0.5	2.1181	1.8629	1.7240	1.4042	1.3189
		1	0.35736	0.31299	0.28949	0.23669	0.22270
		1.5	0.18547	0.16266	0.15046	0.12268	0.11528
		2	0.13238	0.13540	0.10775	0.087763	0.082434
		2.5	0.10501	0.092691	0.085896	0.070211	0.066084
		3	0.087870	0.077847	0.072280	0.059516	0.056222
	Type B	0.5	2.0252	1.7243	1.5994	1.3729	1.2876
		1	0.32926	0.27907	0.25943	0.22488	0.21132
		1.5	0.17341	0.14728	0.13684	0.11826	0.11108
		2	0.12656	0.10777	0.099961	0.085801	0.080463
		2.5	0.10216	0.087055	0.080514	0.068454	0.064045
		3	0.086417	0.073538	0.067766	0.056957	0.053109

TABLEAU 6.5 – Charge critique du voilement (Ncr) d'une plaque FGM sandwich simplement appuyée en fonction de k, t_C et $b/a (a/h = 10)$.

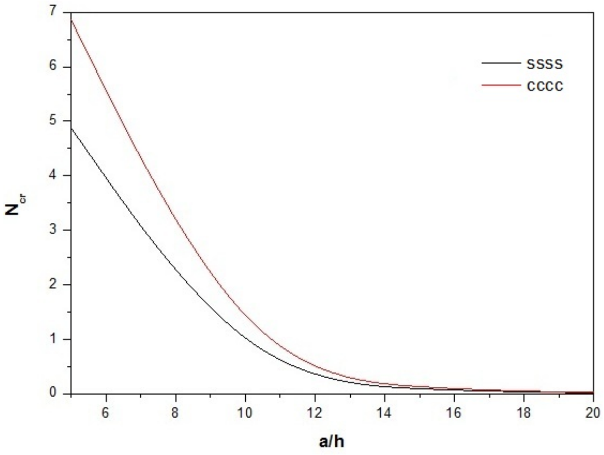


FIGURE 6.2 – Charge critique en fonction de a/h pour une plaque sandwich FGM type A carrée, $t_C = 0,6h,\ k = 1$.

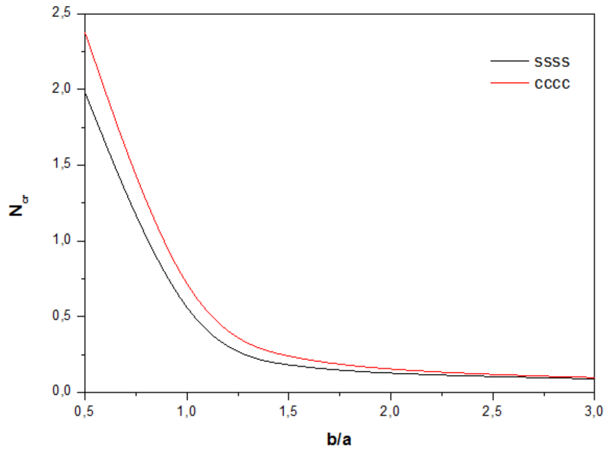


FIGURE 6.3 – Charge critique en fonction de b/a pour une plaque sandwich FGM type A,$a/h = 10$, $t_C = 0,6h,\ k = 1$.

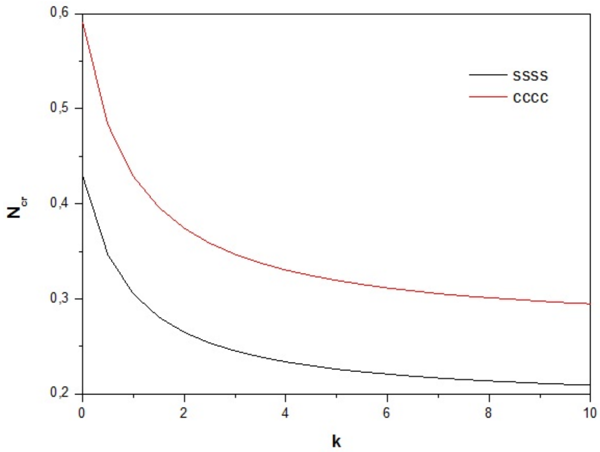


FIGURE 6.4 – Charge critique en fonction de k pour une plaque sandwich FGM type A carrée,$a/h = 10$, $t_C = 0,6h$.

D'après les résultats trouvés, on remarque plus la plaque est épaisse (a/h augmente) plus la charge critique décroît, plus la plaque est large plus la charge est petite. On re-

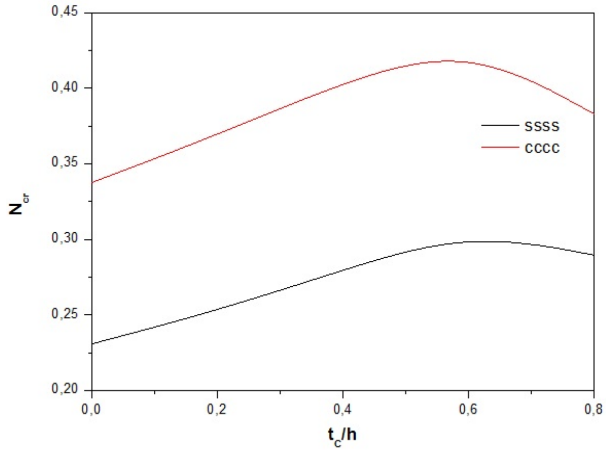


FIGURE 6.5 – Charge critique en fonction de t_C/h pour une plaque sandwich FGM type A carrée, $a/h = 10, k = 1$.

marque aussi que l'augmentation du coefficient k conduit à la diminution de N_{cr}. Tandis que pour le dernier graphe, l'augmentation du rapport t_C/h conduit à l'augmentation de N_{cr} jusqu'à une valeur maximale puis elle redéminue.

6.4 Conclusions

Dans ce chapitre, on a fait une étude du voilement des plaques sandwich FGM en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. On a pris deux types de FGM, et deux types de conditions aux limites. On peut dire que cette méthode a donné des résultats précis comparables à la littérature. Elle est très utile pour les problèmes complexes.

Référence

1 R. Javaheri1 and M.R. Eslami " Buckling of Functionally Graded Plates under Inplane Compressive Loading " ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik Volume 82, Issue 4, pages 277–283, April 2002

2 2R. Javaheri and M. R. Eslami. "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates", AIAA Journal, Vol. 40, No. 1 (2002), pp. 162-169.

3 J. Woo, S.A. Meguid " Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells " International Journal of Solids and Structures Volume 38, Issues 42–43, Elsevier, October 2001, Pages 7409–7421

4 L.W. Zhanga, P. Zhub, K.M. Liewc. " Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method " Composite Structures Volume 108, Fe-

bruary 2014, Pages 472–492

5 Esther Feldman, Jacob Aboudi " Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading " Composite Structures, Ninth International Conference on Composite Structures, Volume 38, Issues 1–4, May–August 1997, Pages 29–36

6 R. Javaheri & M. R. Eslami " THERMAL BUCKLING OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES BASED ON HIGHER ORDER THEORY " Journal of Thermal Stresses Volume 25, Issue 7, 2002, pages 603-625

7 M.M. Najafizadeh, , H.R. Heydari " Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory " European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 23, Issue 6, November–December 2004, Pages 1085–1100

8 B.A. Samsam Shariat, M.R. Eslami, " Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads " Composite Structures, Volume 78, Issue 3, May 2007, Pages 433–439

9 Serge Abrate, " Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates " Composites Science and Technology, Volume 66, Issue 14, November 2006, Pages 2383–2394, Special Issue in Honour of Professor C.T. Sun

10 Matsunaga, H. (2005), "Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory", Compos. Struct., 68(4), 439-454.

11 F.Z. Kettaf, M.S.A Houari, M. Benguediab and A. Tounsi, " Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model " Steel and Composite Structures, Vol. 15, No. 4 (2013) 399-423

Conclusion Générale

Les plaques sont largement utilisées dans la confection des structures mécaniques. Une raison importante en est leur grande légèreté doublée dans certaines configurations d'une résistance mécanique importante (structures creuses, lamellaires ou en nid d'abeille. . .). Elles permettent ainsi de réaliser dans l'industrie des structures robustes de moindre poids.

Dans le cadre de ce travail, on a fait une étude analytique sur le comportement de voilement des plaques en composites. Notre travail est divisé en trois parties :

Une étude du voilement thermique des plaques hybrides multicouches a été faite. La relation non linéaire contrainte-déplacement d'ordre élevé des plaques a été prise en considération. L'étude est basée sur les trois théories des plaques les plus populaires en soulignant les points communs ainsi que les différences fondées sur l'hypothèse d'introduire ou de négliger le cisaillement transversal. L'influence de différents rapports tel que : a/h_T, b/a, $h_{\mathrm{A}l}/h_\mathrm{T}$ et nombre de couches a été étudiée. Les résultats trouvés indiquent que l'addition du métal au composite et la déformation due au cisaillement transversal ont un effet significatif sur le comportement thermique de voilement des plaques hybrides multicouche simplement appuyées.

Pour le deuxième cas, le comportement de voilement thermique des plaques sandwich en FGM est décrit et discuté dans la première partie en utilisant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique. Ce modèle réduit le nombre d'inconnus à seulement quatre, et la théorie donne la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales, et remplit la condition du cisaillement nulle sur les surfaces de la plaque sans employer des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles d'un FGM varient selon une loi de puissance le long de l'épaisseur. L'analyse du voilement des plaques sandwich en FGM sous différents types de chargements thermiques est présentée. On a remarqué que la température critique du voilement dépend des dimensions de la plaque, épaisseur du noyau, l'indice de fraction volumique et type de chargement. On peut dire que le nouveau modèle de déplacement hyperbolique proposé est précis et simple à résoudre le comportement de voilement thermique des plaques sandwich en FGM.

Finalement, on a fait une étude du voilement des plaques sandwich FGM en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. En utilisant le même modèle de la deuxième étude, et en prenant deux types de FGM, et deux types de conditions aux limites cette méthode a donné des résultats précis comparables à la littérature. Elle est très utile pour les problèmes complexes.