REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : **Structures & Matériaux**

Présentée par

Mr : BENNOUN Mohammed

Intitulé de la thèse

Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses posées sur des fondations élastiques

Composition du jury :

Président	**ADDA BEDIA El Abbas**	**Pr**	**UDL SBA**
Directeur de thèse	**TOUNSI Abdelouahed**	**Pr**	**UDL SBA**
Examinateur	**FEKRAR Abdelkader**	**MCA**	**UDL SBA**
Examinateur	**AMARA Khaled**	**MCA**	**C U DE AINTEMOUCHENT**
Examinateur	**KACI Abdelhakim**	**MCA**	**U DE SAIDA**
Examinateur	**YEGHNEM Redha**	**MCA**	**U DE SAIDA**

Année universitaire 2016-2017

Soutenue le 02 mai 2017

Dédicaces

À la mémoire de mon père.

À ma mère, que dieu me la préserve.

À ma femme et à mes enfants.

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier Monsieur Pr ADDA BEDIA d'avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury, pour ses encouragements, véritables motivations, qui m'ont permis d'avancer dans les moments difficiles, sans oublier les honorables membres du jury pour avoir accepté de critiquer ce travail.

Je tiens, également, à exprimer toute ma gratitude au Professeur, Monsieur TOUNSI Abdelouaheb, sans qui ce travail n'aurait pu aboutir et surtout pour son indulgence et sa compréhension.

J'adresse un remerciement spécial à Monsieur B.FAHSI pour tout l'intérêt qu'il a porté à ce travail et tout le temps qu'il lui a consacré.

Sans oublier Messieurs M.SERKAL, F.BOURADA et A.ZEMRI Amine ainsi que D.BENMACER qui m'ont marqué, à tout jamais, de leur savoir et de leur disponibilité.

En dernier je remercie infiniment Monsieur ZEMRI Mokhtar pour tout ce qu'il m'a apporté, et ce qu'il m'apporte, tant sur le plan personnel qu'académique.

À tout ce qui ont participé de près ou de loin à ce projet, de son initiation à sa concrétisation, je leur adresse un grand remerciement.

ملخص

في إطار هذا العمل، اقترحنا نظرية جديدة رفيعة الرتبة لتحليل الارتجاجات الحرة لمادة متغيرة الخصائص تدريجيا اخدين بعين الاعتبار في نموذجنا المقترح إضافة الى تقسيم التحرك أو التنقل العرضي الى مكوناته الناجمة عن الانحناء والقص كذلك تأثير تمدد المقطع. النموذج محل الدراسة هو متعدد صفائح متغيرة الخصائص تدريجيا ومتغير التركيبة من "صفح أو متعدد صفائح بوجهين متغيري الخصائص تدريجيا ونواة متجانسة" إلى " متعدد صفائح بوجهين متجانسين ونواة متغيرة الخصائص تدريجيا" المعادلة المقترحة هي من خمس مجاهيل وتم استنباط معادلات الحركة من "مبدأ **هاميلتون HAMILTON**". من أجل التحقق من نجاعة المقاربة المقترحة قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها في إطار أطروحتنا مع نظيراتها النابعة من المقاربة بالمرونة ثلاثية الأبعاد لإثبات زيادة على السهولة في استعمال النظرية المقترحة الدقة المسجلة في التنبؤ بالترددات أو الذبذبات الطبيعية لصفح متغيرة الخصائص تدريجيا ثم في الأخير ستطبق ذات النظرية الجديدة على صفيح متغيرة الخصائص تدريجيا يستند على أساس مرن مع مقارنة النتائج المتحصل عليها مع دراسات أخرى.

كلمات مفتاحية: متعدد صفائح متغير الخصائص تدريجيا ; الترددات أو الذبذبات الطبيعية ; نظرية جديدة رفيعة الرتبة ; تمدد المقطع; *أساسات مرنة*.

Abstract

In this thesis, a new five variable refined plate theory for the free vibration analysis of functionally graded sandwich plates is developed. By dividing the transverse displacement into bending, shear and thickness stretching parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use. Two common types of FGM sandwich plates, namely, the sandwich with FGM face-sheet and homogeneous core and the sandwich with homogeneous face-sheet and FGM core, are considered. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle. The accuracy of the present theory is verified by comparing the obtained results with three-dimensional elasticity solutions. It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple in predicting the natural frequencies of functionally graded sandwich plates. Finally functionally graded plates (FGP) resting on a Winkler–Pasternak elastic foundation model are examined. The numerical results obtained through the present analysis for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation are presented, and compared with the ones available in the literature

Keywords: FGM sandwich plates; Stretching effect; Higher-order theory; Vibration; Normal stress; Elastic foundation.

Résumé

L'objectif de notre travail a été de présenter une théorie à ordre élevée pour l'analyse des vibrations libres d'un matériau (FGM). Dans ce cadre une nouvelle théorie raffinée à 5 variables a été développée pour des plaques sandwich fonctionnellement graduée prenant en considération dans la modélisation du déplacement transversale à la fois les composantes relatives à la flexion, au cisaillement ainsi qu'à l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Le nombre d'inconnus et des équations de mouvement de la présente théorie a été réduit et par conséquent la formulation est devenue simple et efficace. Le matériau étudié est un stratifié FGM à configuration variable, Il sera considéré consécutivement un "Stratifié à Facettes FGM avec un Noyau Homogène" et autre "Stratifié à Facettes Homogènes avec un Noyau FGM". Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'HAMILTON, la précision de la présente théorie sera mise en comparaison avec les résultats obtenus par l'élasticité tridimensionnelle pour mettre en évidence non seulement sa simplicité mais aussi sa précision dans la prédiction des fréquences naturelles des Plaques Sandwichs Fonctionnellement Graduées, par la suite la même théorie raffinée sera appliquer à une plaque FGM posée sur une fondation élastique tout en comparant les résultats obtenues avec d'autre études.

Mots-clés : Plaques Sandwich à Gradient Evalué ; Etirement de l'épaisseur ; Théorie à Ordre Elevée ; Vibration ; Contrainte normale ; Fondation élastique.

SOMMAIRE

Table des matières

Introduction Générale 1

Chapitre I : Matériau Graduellement Evalué.

1.1 Introduction 5

1.2 Présentation des FGM 6

1.3 Conception des FGM 9

1.3.1 Procédé de fabrication. 9

1.3.1.1 Procédés Conventionnels. 9

1.3.1.2 Procédés par fabrication additive 13

1.3.2 Difficultés de conception. 15

1.4 Propriétés efficaces des matériaux FGM. 16

1.4.1 Classification des FGM 23

Chapitre II : Panneau Sandwich.

2.1 Introduction 25

2.1.1 Qu'est-ce qu'un matériau sandwich ? 25

2.1.2 Exemple d'amélioration apportée par les sandwichs 27

2.2 Historique Et Applications Actuelles 28

2.3 Les éléments d'un sandwich. 31

2.3.1 Les peaux 31

2.3.2 L'âme Légère 31

2.3.3 L'interface 31

2.4 Intérêt des structures sandwichs 31

2.5 Etude des composites laminés. 32

Chapitre III : Théories des Plaques.

3.1 Introduction 36

3.2 Définitions 37

3.3 Formulation théorique. 37

3.4 Evolution de la Théories de plaques. 39

3.4.1 Études actuelles. 42

3.4.2 Théorie classique des plaques (Kirchhoff CPT). 43

3.4.2.1 Equations d'équilibres 43

3.4.2.2 Conditions aux limites 45
3.4.2.3 Equations constitutives 47
3.4.3 Théorie des plaques de Premier Ordre (FSDT). 49
3.4.3.1 Equations d'équilibres 49
3.4.3.2 Équations constitutives des plaques 52
3.4.3.3 Équations Gouvernantes : 53
3.4.4 Théorie des plaques de Troisième Ordre (TSDT). 55
3.4.4.1 Equations d'équilibres 55
3.4.4.2 Équations constitutives des plaques 58
3.4.5 Théorie des Plaques sandwich 59
3.4.5.1 Champs de déformation et de contraintes 59
3.4.5.1.1 Hypothèse de la théorie des plaques sandwich 59
3.4.5.1.2 Détermination du champ de déplacement 60
3.4.5.1.3 Le champ de déformation 61
3.4.5.1.4 Le champ de contrainte 63
3.4.5.2 Relation fondamentales des plaques sandwich 64
3.4.5.2.1 Equation constitutive 64
3.4.5.2.2 Relations fondamentales 66

Chapitre IV : Formulation Théorique.

4.1 Formulation du problème 68
4.1.1 Configuration géométrique 68
4.1.2 Propriétés du matériau 69
4.1.2.1 Type A : Peaux FGM et noyau homogène 69
4.1.2.2 Type B : Peaux homogène et noyau FGM 70
4.1.3 Une nouvelle théorie à cinq variables raffinées Présentée 71
4.1.3.1 Hypothèses de base et cinématique 71
4.1.3.2 Equations constitutives 72
4.1.3.3 Equations gouvernantes 73
4.1.4 Solution exacte pour une plaque sandwich FGM simplement appuyée 77

Chapitre V : Résultats et Discussion.

5.1 Résultats numériques et discussion 79

Conclusion Générale. 88

Nomenclature

$\{\ \}$	Vecteur Colonne.
$[\ ]$	Matrice.
$\{\sigma_{ij}\}$	Tenseur de contrainte.
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de Déformation.
(x,y)	Coordonnées plan.
t	Désigne le temps.
ε_Z	Effet de l'étirement de l'épaisseur.
V_m	La fraction volumique du métal.
V_{f_j}	Fractions volumiques du matériau constitutif j.
z	Coordonnée relative à l'épaisseur.
h	Représente l'épaisseur de la structure.
N	Exposant d'une fraction de volume $(0 \le N \le 1)$.
P_f	Propriétés effectives du matériau de la couche FGM.
E_f	Module de Young [Pa].
α_f	Coefficient de dilatation thermique [K^{-1}].
ν_f	Coefficient de Poisson.
k_f	Conductivité thermique [WmK^{-1}].
K_1	Module de compression de la phase matrice.
G_1	Module de cisaillement de la phase matrice.
V_1	Fraction volumique de la phase matrice.
K_2	Module de compression de la phase particulaire.
G_2	Module de cisaillement de la phase particulaire.
V_2	Fraction volumique de la phase particulaire.
t_f	Epaisseur des peaux.
t_c	Epaisseur de l'âme.
d	Distance séparant l'axe neutre de chacune des deux peaux.

h	Epaisseur totale de la plaque.
φ_i	Composante du déplacement ou de la contrainte.
φ_i^j	Fonctions à déterminer.
δW	Variation du Travail virtuel total.
δU	Variation de l'Energie (effort) virtuelle interne.
δV	Variation de l'Energie potentielle virtuelle due aux charges appliquées (externe).
δK	Variation de l'Energie cinétique virtuelle.
Ω_0	Plan médian non déformée de la plaque supposé coïncider avec le plan (x, y).
$R_{ij}^{(m)}$	Contrainte résultante de la fibre moyenne par unité de longueur.
CPT	Classic Plate Theory.
FSDT	First Shear Deformation Theory.
TSDT	Third Shear Deformation Theory.
w_0	Déviation transversale d'un point sur le plan médian $(z = 0)$.
γ_{xy}	Déformation de cisaillement.
σ_{xy}	Contrainte de cisaillement.
Γ	Conditions au limite.
S	Surface.
$\overset{\Lambda}{M}_{yy}$	Moment de flexion normal appliqué sur le bord.
M_{xy}	Force de réaction développée à chaque coin de la plaque.
∇	Laplacien.
θ	Angle formé par les axes principaux avec les axes de référence.
C_{ij}^a	Coefficients dans les axes.
F_{ij}	Coefficients de
k_{ij}	Facteurs de correction de rigidité.
H_{ij}	Rigidité corrigée.
φ_z	Déplacement supplémentaire induit par l'effet de la contrainte normale, Effet d'étirement de l'épaisseur.
f_e	Densité de réaction à la déformation pour un modèle de Winkler/Pasternak.
K_0	Facteur de Winkler.
K_1	Facteur de Pasternak.
u, v, w	Composantes de déplacement le long de coordonnées (x, y, z).
ϕ_x , ϕ_y	Rotations autour des axes χ et y .
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	Déformations dues aux efforts normaux.
w_b , w_s	Composantes du déplacement transversal de flexion et de cisaillement.

σ_{xx}, σ_{yy} Contraintes normales.

$q(x, y)$ Charge transversale.

n_x, n_y Cosinus de direction de l'unité normale $\hat{n}$.

Q_x , Q_y Contraintes de cisaillements.

γ_{xy}, γ_{yy} Déformations transverses de cisaillement sont des constantes.

Q_x, Q_y Forces de cisaillement.

ϕ_n, ϕ_s Rotations normales et tangentielles.

u_a , v_a Déplacements de l'âme.

γ_{xz}^1 , γ_{yz}^1 Déformations dues au cisaillement transverse dans la peau.

σ_{xz}, σ_{xz} Contraintes de cisaillement transverse.

$f(z)$, $g(z)$ Fonctions de forme.

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ Déformations linéaires à travers l'épaisseur de la plaque.

M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} Moments afférents par unité de longueur.

h_1, h_2, h_3, h_4 Positions verticales du bas et du haut.

(σ_1, σ_2) , σ_6 Contraintes normale et de cisaillement.

(M_1, M_2) , M_6 Moments de flexion associés.

(P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}) et (R_x, R_y) Facteurs de contraintes.

Liste des figures

Fig. 1. 1. Un matériau FGM Typique à fraction de volume bi-phasique 7
Fig. 1. 2. Evolution de la microstructure le long d'un gradient de matériaux Titane/Molybdène (P.Muller, 2013). 7
Fig. 1. 3. Application des FGM dans l'industrie (P.Muller, 2013).....8
Fig. 1. 4. Prothèse et implants dentaire en FGM (A.Bandyopadhyay, 2009 ; P.Muller, 2013 et F.Watari, 1997).....8
Fig. 1. 5. Représentation analytique d'un FGM en couche (Gururaja Udupa et al., 2014) 9
Fig. 1. 6. Transfert de composant en phase liquide par force centrifuge (P.Muller, 2013).....11
Fig. 1. 7. Dépôt en phase vapeur d'un revêtement sur une pièce existante (P.Muller 2013). 11
Fig. 1. 8. Frittage de poudres mélangées de manière échelonnée (P.Muller, 2013).....11
Fig. 1. 9. Schéma du procédé métallurgique du frittage par poudre (Gururaja Udupa et al., 2014).....12
Fig. 1. 10. Evolution des techniques de fabrication additive(P.Muller, 2013).....13
Fig. 1. 11. Fraction de volume du métal à travers l'épaisseur(H.S.Shen, 2009).....17
Fig. 1. 12. Structure squelettique d'un FGM (H.S.Shen, 2009).....22
Fig. 2. 1. Schématisation type d'une structure sandwich (J.E.ARBAOUI, 2009).....26
Fig. 2. 2. Constitution d'un sandwich de type aéronautique (B.Castanié, 2000 "Document Aérospatiale"). 26
Fig. 2. 3. Comparaison poutre type Duralumin avec poutre sandwich (B.Castanié, 2000).....27
Fig. 2. 4. Construction métallique aéronautique typique des années 20 et 30 (B.Castanié, 2000). 28
Fig. 2. 5. Procédé Brodeau (B.Castanié, 2000 D'après "Quinze Ans d'Aéronautique Française : 1932-1947"). 29
Fig. 2. 6. Structure éclatée du Dauphin 2 (Castanié, 2000 " Document Aérospatiale 1986").....30
Fig.3. 1. CPT, Théorie classique de Kirchhoff (C.M.Wang et al., 2000).....39
Fig.3. 2. La FSDT, Théorie de Mindlin 1951 (C.M.Wang et al., 2000). 40
Fig.3. 3. La TSDT, Théorie de troisième ordre (C.M.Wang et al., 2000).....41
Fig.3. 4. Géométries des déformées pour les diverses théories des plaque, ici u_0 *représente le déplacement plan de déformation suivant x (C.M.Wang et al., 2000).....42*
Fig.3. 5. Les forces et moments agissants sur la plaque, Les résultantes dans le plan $\left(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\right)$ *n'entrent pas dans les équations dans le cas de la flexion pure et sont spécifique au problème de flambement (C.M.Wang et al., 2000). 44*
Fig.3. 6. Composition type d'un sandwich (J.M.Berthelot, 2000). 59
Fig.4. 1 : Géométrie de la plaque, sandwich FGM, rectangulaire d'épaisseur uniforme dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires. 68
Fig.4. 2. La variation du matériau à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM. 69
Fig. 5. 1. Fréquences propres $\overline{\omega}$ *d'une plaque sandwich FGM à noyau homogènes de type dure (hardcore).....84*
Fig.5. 2. Fréquences propres $\overline{\omega}$ *d'une plaque sandwich FGM à noyau homogènes de type souple (softcore).....85*
Fig.5. 3. Influence de l'indice matériel P sur la fréquence propre $\overline{\omega}$ *d'une plaque sandwich FGM posée sur fondation élastique. K1=10 et K0 variable. 87*
Fig.5. 4. Influence de l'indice matériel P sur la fréquence propre $\overline{\omega}$ *d'une plaque sandwich FGM posée sur fondation élastique. K0=100 et K1 variable. 87*

Liste des Tableaux

Tableau 1. 1 : Module d'élasticité E_f [Pa] céramiques et métaux.....18

Tableau 1. 2 : Coefficient d'extension thermique α_f [K^{-1}] céramiques métaux.....19

Tableau 1. 3 : Conductivité thermique k_f [WmK^{-1}] céramiques métaux. 19

Tableau 1. 4 : Coefficient de poisson ν_f céramiques métaux.....20

Tableau 1. 5 : Différents types de matériaux à gradient évalué.....24

Tableau 5. 1 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque FGM carré simplement appuyée obéissant à une loi de puissance de type A avec les résultats de l'élasticité tridimensionnelles ($h/b = 0.1$).....80

Tableau 5. 2 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée à noyau homogènes de type dure (hardcore). 81

Tableau 5. 3 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée à noyau homogènes de type souple (softcore).....82

Tableau 5. 4 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée à noyau homogènes de type souple (softcore).....83

Tableau 5. 5 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée posée sur fondation élastique.....*86*

Introduction Générale

La construction des stratifiés est l'une des branches des structures composites développées par l'industrie du matériau composite qui a fait ses preuves dans le domaine de l'aérospatiale ainsi que dans d'autre domaines.

Elle est très largement utilisée dans la construction aéronautique telle que la conception d'avion, de véhicules spatiaux, de navires, de bateaux ainsi que dans le cargo-container mais aussi dans les constructions résidentielles.

Les plaques sandwichs ont fait, il y a plus de 40 ans, une révolution dans les domaines de l'aérospatiale qu'on s'épuise à étudier son étendue. Rendant les avions plus légers, plus robustes et plus rapides en leurs allouant des capacités de chargement plus importantes avec une efficience énergétique de plus en plus optimisée.

L'industrie des plaques sandwichs offre des potentialités grandissantes aux projets d'infrastructures civils telles que les buildings industriels ou bien des ouvrages d'art.

Les structures en sandwich représentent une forme à part des structures stratifiées consistant à l'assemblage de deux couches superficielles appelées facettes ou peaux qui soient minces et rigides sur un noyau central léger relativement épais et uniforme ou homogène.

Dans les structures sandwichs modernes les facettes sont usuellement fabriquées à base de métal ou de matériau laminé stratifié et le noyau uniforme faiblement sollicité est sous forme de nid d'abeille ou bien en mousse polymère. Les facettes et le noyau sont assemblés par des adhésives garantissant la solidarisation des composants et assurant ainsi la continuité du transfert de charge entre les différents constituants du matériau sandwich.

D'autre part et concernant les matériaux à gradient évalué "Fonctionnaly Graded materials" (M.Koisumi, 1993 ; S. Suresh, 1998) une nouvelle génération de matériau composite

hétérogène a été développée pour la première fois comme barrière ou bouclier thermique et furent largement adoptée par la suite dans l'ingénierie des structures exposées à des environnements présentant des températures extrêmes. Le comportement thermomécanique des FGM a fait l'objet d'intérêt de différentes études et recherches (Y.Tanigawa, 1995 ; S.Suresh et A.Mortensen, 1997).

Dans le cas de figure le plus simple, un matériau FGM est composé par l'association de deux types de matériaux différents et dont il change graduellement de caractéristique pour passer de l'un à l'autre. Un composite changeant graduellement, progressivement et d'une façon discontinue d'état entre celles de deux matériaux distinct peut être considéré comme FGM.

La famille des matériaux FGM la plus connu est celle associant un gradient de composition entre métal et céramique. Une composition typique de deux matériaux caractérise les FGM telle que le métal et la céramique, cette dernière joue le rôle de bouclier thermique ainsi qu'une protection contre la corrosion et l'oxydation tandis que le métal affère à la structure son aspect trempé et renforcé.

Actuellement les voies de développement des matériaux FGM cherchent à généraliser son application dans des domaines autre que celui des structures opérant dans des températures extrêmes comme multiple applications relatives à diverses axes de recherches dont le génie civil.

Vu l'intérêt que porte l'engineering des structures aux éléments en FGM, une multitude d'études et de recherches se sont intéressé au développement de ce nouveau type de matériau étudiant leur aspect statique, vibratoire et flambement des plaques ou stratifié sandwich à facette FGM.

Zenkour (A.M.Zenkour, 2005a ; A.M.Zenkour, 2005b) a étudié la réponse d'une plaque sandwich simplement appuyée sollicitée en flexion, flambement et vibration libre utilisant une fonction sinusoïdale pour exprimer la déformation due au cisaillement. Zenkour et el-Alghamdi (A.M.Zenkour et N.A.A.Alghamdi, 2008) ont réussi à développer une théorie pour des plaques stratifiées FGM sollicitées en flexion thermoélastique. D'autre chercheurs (A.M.Zenkour et N.A.Alghamdi, 2010 ; A.M.Zenkour, 2010b) ont obtenu avec exactitude les flèches et contraintes sur des plaques sandwich FGM en alternant symétrie et asymétrie sous des charges mécaniques et thermiques en proposant une fonction sinusoïdale. Par a suite Zenkour et Sobhy

(A.M.Zenkour et M.Sobhy, 2010) se sont intéressés au flambement thermique critique des plaques sandwichs FGM en utilisant un modèle sinusoïdal pour représenter la déformation due à l'effort tranchant et en déduire par la suite les équations de stabilité. Par le biais de l'élasticité tridimensionnelle linéaire, Li et son groupe de travail (Q.Li et al., 2008) ont étudié les vibrations libres des plaques FGM. Les Yaghoobi (H.Yaghoobi et P.Yaghoobi, 2013) proposèrent une investigation analytique du phénomène de flambement sur des plaques sandwichs symétriques à facettes FGM reposant sur des fondations élastiques avec une représentation de la déformation due au cisaillement du 1er ordre et soumise à des charges mécanique, thermique et thermomécanique. Dans de récentes recherches (L.Hadji et al., 2011 ; N.El Meiche et al., 2011 ; M.S.A.Houari et al., 2011 ; H.H.Abdelaziz et al., 2011 ; S.Merdaci et al., 2012 ; M.Bourada et al., 2012) de nouvelles théories raffinées, basées sur des fonctions à quatre variables, furent développées pour des plaques sandwich FGM simplement appuyées dans des configurations prenant en compte la flexion, le flambement et les vibrations libres. Toutefois, multiples théories à ordre élevé, exprimant la déformation relevant du cisaillement ont été développées utilisant des fonctions à cinq inconnus (L.Hadji et al., 2011 ; N.El Meiche et al., 2011 ; M.S.A.Houari et al., 2011 ; H.H.Abdelaziz et al., 2011 ; S.Merdaci et al., 2012 ; M.Bourada et al., 2012), avec des approches différentes ne nécessitant pas l'application d'un facteur correcteur et donnant une représentation parabolique au cisaillement à travers l'épaisseur et tout en respectant la condition de sa nullité aux surfaces libres. Tout récemment des travaux (A.Tounsi et al., 2013 ; A.Hamidi et al., 2013) ont porté leur intérêt sur la réponse d'une plaque sandwich FGM, sollicitée respectivement par des charges thermiques et thermodynamiques, donnée par une nouvelle théorie raffinée à quatre variable négligeant, tout comme les autres approches précédemment citées, l'effet de l'étirement de l'épaisseur ε_z rendant ainsi le déplacement relatif au cisaillement totalement indépendant des variations de l'épaisseur. L'effet dit de l'étirement de l'épaisseur a fait récemment l'objet d'investigation de la part d'un groupe de chercheurs (E.Carrera et al., 2011) en faisant appel à la méthode des éléments finis.

Dans notre travail nous allons proposer une nouvelle théorie raffinée à cinq variables pour l'analyse des réponses des vibrations libres d'une plaque sandwich FGM stratifiée en symétrie et en asymétrie.

Contrairement aux théories raffinées à quatre variables (L.Hadji et al., 2011 ; N.El Meiche et al., 2011 ; M.S.A.Houari et al., 2011 ; H.H.Abdelaziz et al., 2011 ; S.Merdaci et al., 2012 ; M.Bourada et al., 2012 ; A.Tounsi et al., 2013 ; A.Hamidi et al., 2013) l'effet de l'étirement de l'épaisseur est

pris en considération. Le champ de déplacement sera basé sur une fonction hyperbolique représentant les variations dans le plan ainsi que celui des déplacements transversales à travers l'épaisseur. Le déplacement transversal sera divisé en trois parties, la première représente la flexion, la deuxième due au cisaillement et la troisième attribuée à l'étirement de l'épaisseur de sorte à réduire le nombre d'inconnus, et par conséquent, simplifier l'utilisation de la théorie proposée.

Deux types de plaques sandwich ont été étudiés :

- Un stratifié à facettes FGM avec un noyau homogène.
- Un stratifié à facettes homogènes avec un noyau FGM.

Les équations de mouvement seront obtenues à partir du principe de l'équation de Hamilton analytiquement résolu pour des vibrations libre d'une plaque sandwich simplement appuyée ainsi que d'une plaque épaisse FGM posée sur fondation élastique.

Les résultats obtenus seront comparés à d'autres exemples numériques de sorte à valider notre approche proposée.

Pour ce faire notre travail suivra le plan de travail qui suit :

Après l'introduction générale résumant les inspirations et le but de notre travail. Le **p**remier **c**hapitre s'imposera comme une présentation des matériaux à gradient évalué, les FGM, suivi par un **c**hapitre **II** s'intéressant au plaque sandwich, leurs initiation par l'industrie et l'essor qu'a connu leur utilisation ainsi que les perspectives futures. Viendra par la suite le **t**roisième **c**hapitre porté sur l'évolution de la théorie des plaques commençant par la théorie classique pour finir avec la théorie des plaques sandwich sans oublier celles dites de premier ordre et affinées, ce qui nous permettre de clôturer la partie théorique et d'aborder notre cas d'étude. Le **c**hapitre **IV** énoncera la problématique en présentant la configuration géométrique et matériau avec un développement mathématique détaillé avant d'arriver au **c**hapitre **V** regroupant l'essentiel des résultats avec commentaires et discussion pour conclure à la fin avec une conclusion générale.

Chapitre 01

Matériau à Gradient Evalué (FGM)

1.1 Introduction

L'avènement des nouvelles industries et des procédés modernes, repoussant d'avantage les limitées et les frontières auxquelles sont exposées les matériaux conventionnels contraint à répondre à des sollicitations combinées et sévères à la fois, a entrainé le développement d'une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériau fonctionnellement gradué ou bien les FGM. Initialement conçus comme des barrières thermiques pour des applications dans l'aérospatiale. Actuellement ils connaissent un essor plus généralisé dans différents domaines d'application (H.S.Shen, 2009).

Un matériau composite est composé d'au moins deux matériaux non-miscibles. L'objectif est de pouvoir utiliser les propriétés de chaque matériau à leur maximum et d'obtenir un mélange qui est plus performant qu'un matériau traditionnel homogène. Les matériaux composites fabriqués à base des fibres de verre ou de carbone avec une matrice en époxy sont très commun dans l'industrie aéronautique et spatiale où le poids est un paramètre critique. On les trouve également, de plus en plus, dans l'industrie du sport et de la haute performance, dans les voiliers de compétition par exemple. En effet, les fibres de carbone par exemple, possèdent un quotient résistance à la tension/poids et module de rigidité/poids plus élevé que l'acier et l'aluminium rendant ainsi leur utilisation dans de nouvelles conceptions d'un intérêt particulier (S.GERONYMOS, 2014).

Les «FGM» sont des matériaux dont les propriétés varient à travers une direction préférentielle telle que leur épaisseur, contrairement aux matériaux composites classiques où l'on suppose que les propriétés sont constantes à travers chaque couche individuelle. Les FGM permettent

de soutenir des gradients de températures élevés tout en maintenant leur intégrité structurelle (S.GERONYMOS, 2014).

La capacité de prédire la réponse d'éléments telles que des plaques et des coques en FGM lorsqu'ils sont soumis à des charges thermiques et mécaniques est d'un intérêt primordial dans la conception structurel. En fait, de nombreuses structures sont soumises à des niveaux élevés de charge qui peuvent entraîner une représentation chargement/déformation dans le domaine non-linéaire en raison des grandes déformations. L'un des problèmes importants qui méritent une attention particulière est l'étude de leur réponse non linéaire à grande déformation après flambement ou bien des vibrations libres (H.S.Shen, 2009).

1.2 Présentation des FGM

Des matériaux composites plus légers avec des ratios résistance/poids et rigidité/poids intéressant ont été introduit avec succès dans l'aéronautique ainsi que dans d'autres domaines de l'engineering. Cependant, l'emploi de ce matériau composite traditionnel reste très restreint dans des environnements à haute température. En général, ces métaux ont été utilisés dans l'ingénierie pendant de nombreuses années en raison de leur excellente résistance et leur dureté. Dans des conditions de haute température, la résistance du métal est réduite similairement à un matériau composite traditionnel. Les céramiques possèdent d'excellentes caractéristiques de résistance à la chaleur. Cependant, les applications de céramique sont généralement limitées en raison de leur faible résistance mécanique. Récemment, une nouvelle classe de matériau composite connu comme **Matériau Fonctionnellement Gradué** (FGM) a attiré une attention considérable. Un matériau FGM typique (S.GERONYMOS, 2014) vient de voir le jour avec un effet de couplage Flexion-étirement très considérable et une composition non homogène à partir de différentes phases de composants matériels (habituellement en céramique et en métal).

Un exemple d'un tel matériau est représenté sur la Figure 1. 1 où des particules sphériques ou presque sphériques sont noyées dans une matrice isotrope. Dans un FGM les différentes phases de microstructure ont des fonctions différentes, et un FGM dans sa globalité abouti au statut de conception multi-structurel par la graduation opérée continuellement entre deux phases de propriété distincte (H.S.Shen, 2009).

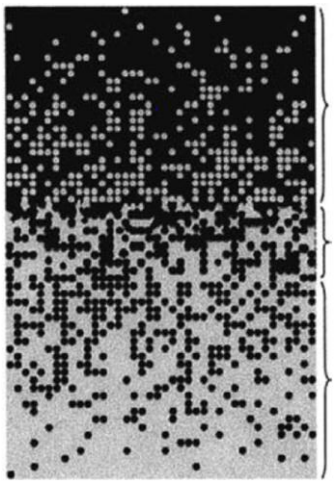


Fig. 1. 1. Un matériau FGM Typique à fraction de volume bi-phasique évoluant graduellement dans une seule direction (verticale) (H.M.Yin et al., 2004 ; H.S.Shen, 2009).

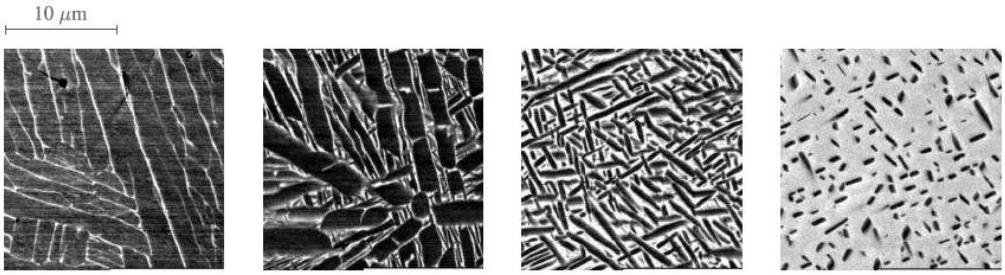
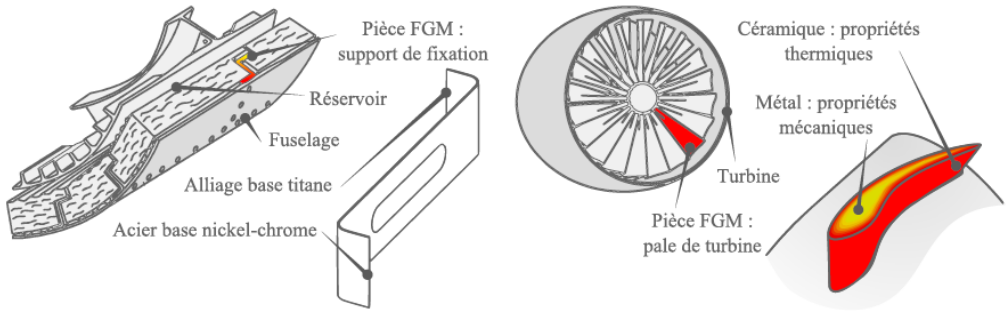


Fig. 1. 2. Evolution de la microstructure le long d'un gradient de matériaux Titane/Molybdène (P.Muller, 2013).

En faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, les propriétés du matériau présentent une variation régulière et continue d'une surface à l'autre, ce qui élimine les problèmes d'interface et atténue les effets des concentrations de contraintes thermiques. Cela est dû au fait que les constituants céramiques du FGM sont capables de résister à des environnements à haute température en raison de leur meilleure caractéristique thermique, tandis que le constituant métallique offre des performances mécaniques plus aptes à la rupture (H.S.Shen, 2009).

Le terme FGM fut initié pour la première fois par un groupe de scientifique japonai (M.Yamanoushi et al., 1990 ; M.Koisumi, 1993) au début des années 90. Depuis lors, les FGM conçus initialement pour jouer le rôle de barrière thermique dans des structures aérospatiales ainsi que dans des réacteurs à fusion (T.Hirai et L.Chen, 1999 ; S.H.Chan, 2001 ; S.Uemura, 2003) font l'objet de recherches et de prospection pour des utilisations plus généralisées dans des environnements à températures élevées telle que des pales de turbines à parois minces.



(a) Support de fixation NASA [Domack2005] (b) Pale de turbine [Qian2003a]

Fig. 1. 3. Application des FGM dans l'industrie (P.Muller, 2013).

Les potentialités diverses offertes par cette avancée technologique offre un champ de développement libre aux attentes de l'industrie et à l'imagination des chercheurs, c'est dans cet esprit que des capteurs, des actionneurs, des armures et même des implants dentaires ont vu le jour (H.S.Shen, 2009).

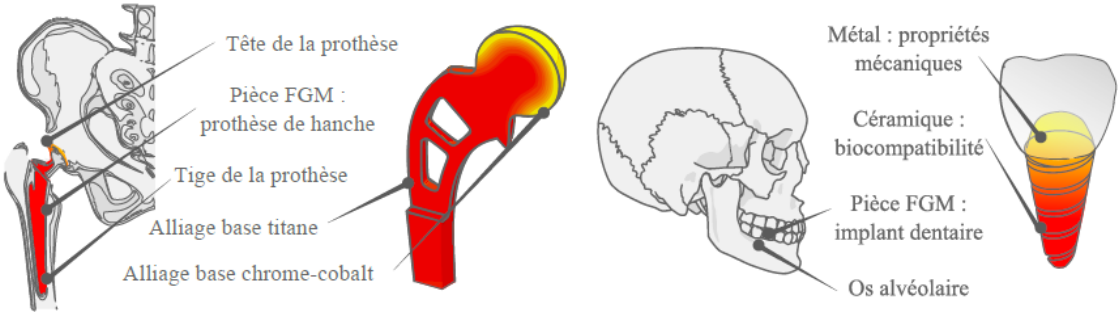


Fig. 1. 4. Prothèse et implants dentaire en FGM (A.Bandyopadhyay et al., 2009 ; P.Muller, 2013 ; F.Watari et al., 1997).

La recherche fondamentale s'est intéressée à son tour aux différents aspects des FGM, tandis que les premières recherches étudiaient essentiellement leur comportement sous chargement thermique ainsi qu'à la rupture mécanique, l'attention des chercheurs s'est portée par la suite sur la compréhension d'autres phénomènes comme la flexion, le flambement ainsi que l'analyse des vibrations libres pour les plaques et les coques. Récemment, Birman et Byrd (V.Birman et L.W.Byrd, 2007) ont présenté un examen des principaux développements dans FGM incluant les questions du transfert de chaleur, du comportement sous différents types de chargement, de la stabilité, de l'analyse dynamique, des essais, de la conception et de la fabrication et des applications possibles ainsi que les différents modes de rupture (H.S.Shen, 2009).

1.3 Conception des FGM

Il existe deux types de structures concept qui peuvent être classées comme FGM, la structure continue et la structure progressive. Dans le cas de la structure graduée continue, la modification de la composition et de la microstructure se produit d'une manière continu (Figure 1. 5a). D'autre part les microstructures à changement progressive par palier donnent lieu à une structure à couches multiples avec existence d'interface entre les couches discrètes (Figure 1. 5b) (H.S.Shen, 2009 ; Gururaja Udupa et al., 2014).

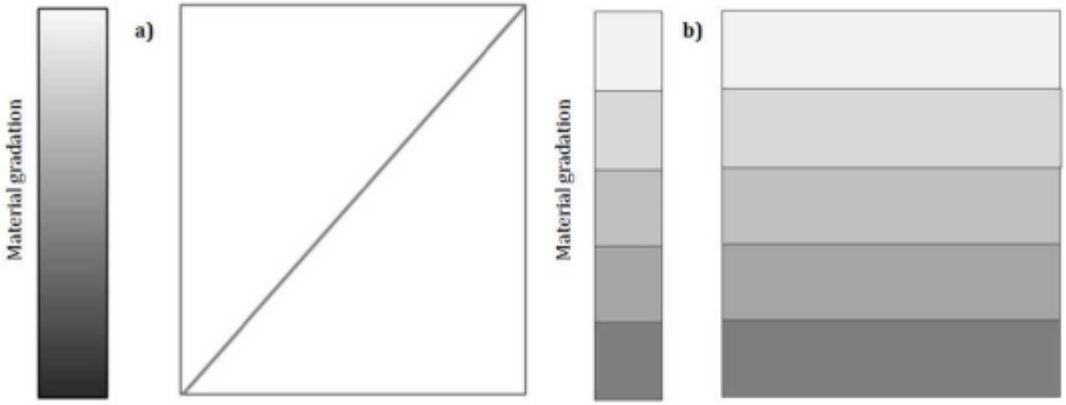


Fig. 1. 5. Représentation analytique d'un FGM en couche (Gururaja Udupa et al., 2014) .

1.3.1 Procédé de fabrication.

Multiple recherches ont proposé différentes sortes et méthodes de production des MGF. La métallurgie des poudres est l'une des méthodes, dites conventionnelles, les plus importantes en plus des méthodes non conventionnelles appelés aussi processus additives.

1.3.1.1 Procédés Conventionnels.

Depuis plus de vingt ans, une partie importante de la recherche concernant les structures multi-matériaux a été consacrée à leur fabrication. Une grande variété de méthodes de production a été mise au point ou adaptée en vue de produire ce type de pièces (P.Muller, 2013).

Plusieurs techniques dites conventionnelles sont utilisées pour fabriquer des pièces multi-matériaux. Le procédé par diffusion fut l'un des premiers à être utiliser. Avec cette technique, un composant est diffusé à haute température sur une pièce mono-matériau fabriquée au préalable (Q.Meng et al., 2012). Comme pour le procédé par diffusion, les procédés de fonderie sont basés sur le transfert de composants (Figure 1. 6). Dans ce cas, le transfert est réalisé en phase liquide, par gravité ou par force centrifuge (T.D.P.Rajan et al., 2010). Avec ces deux types de procédés, les possibilités de répartition des matériaux sont très restreintes et le contrôle de la répartition est souvent compliqué voir absent (P.Muller, 2013).

Plusieurs techniques sont, quant à elles, basées sur la déposition de matière, ça permet d'avoir un ou plusieur revêtements sur une pièce existante (Figure 1. 7). Ce revêtement est d'une épaisseur de l'ordre du micromètre en ce qui concerne le dépôt en phase vapeur (J.F.Groves et H.N.G.Waldey, 1997), tandis qu'elle est de l'ordre du millimètre pour les procédés d'électrodéposition (S.Put et al., 2003) et de projection thermique (X.Xinhua et al., 1997). Avec ces techniques, les dimensions du gradient sont donc très limitées. De plus, le choix de la distribution des matériaux est souvent restreint. En effet, les surfaces d'équi-composition sont, dans la plupart des cas, parallèles à la surface extérieure de la pièce (P.Muller, 2013).

Une dernière technique conventionnelle est utilisée pour la fabrication de pièces multi-matériaux, il s'agit du frittage de poudre (G.Jin et al., 2005). Pour cela, les poudres sont mélangées puis empilées de manière échelonnée ou continue en fonction de la répartition des matériaux souhaitée (Figure 1. 8 et 1. 9). La poudre est ensuite consolidée par frittage pour obtenir la pièce multi-matériau. Avec cette technique, la variation de la composition ne peut se faire que dans une seule direction (P.Muller, 2013).

Des pièces multi-matériau peuvent donc être fabriquées avec ces différentes techniques. On remarque tout de même que les possibilités sont très restreintes au niveau de la distribution des matériaux. Tout d'abord, les dimensions du gradient sont souvent limitées au micromètre ou au millimètre tout au plus. Ces dimensions sont suffisantes lorsqu'il s'agit, par exemple, de réaliser des revêtements mais sont insuffisantes pour la majorité des applications. Ensuite, les types de répartitions des matériaux qu'il est possible de réaliser sont peu nombreux. Finalement, le contrôle du procédé pour obtenir la distribution des matériaux souhaitée est souvent compliqué, voire impossible.

C'est pour ces raisons que l'utilisation des procédés innovants tels que les procédés de fabrication additive semble indispensable pour la réalisation de pièces complexes (I.Gibson et al., 2009c). Nous verrons, par la suite, ce que peuvent apporter ces procédés pour la fabrication de pièces multi-matériau. Nous constaterons, d'ailleurs, qu'ils n'offrent pas tous les mêmes possibilités et que certains ont des limitations similaires aux techniques conventionnelles.

De nombreux chercheurs ont proposé plusieurs types de méthodes de réalisation pour les FGM. La métallurgie des poudres est l'une des méthodes les plus importantes de la production des MGF. On citera à titre d'exemple aussi les procédés à force centrifuge (P.Muller, 2013).

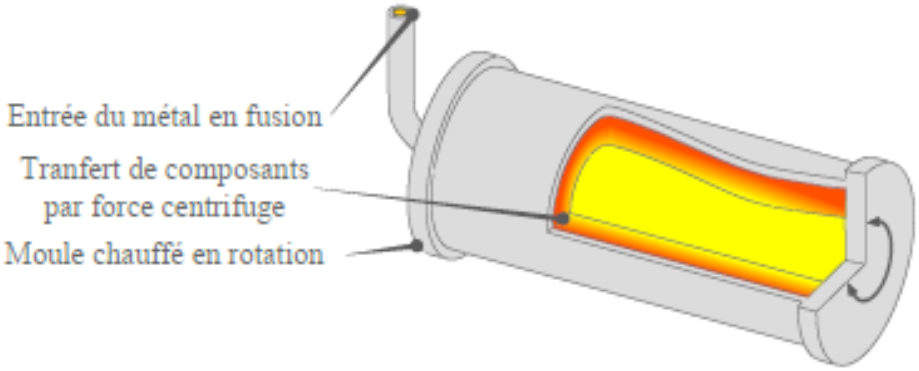


Fig. 1. 6. Transfert de composant en phase liquide par force centrifuge (P.Muller, 2013).

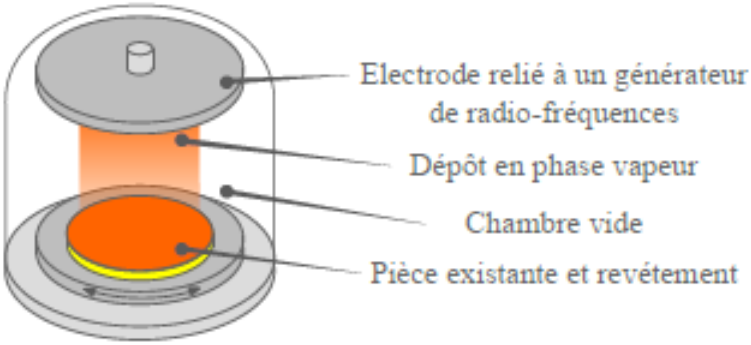


Fig. 1. 7. Dépôt en phase vapeur d'un revêtement sur une pièce existante (P.Muller, 2013).

Exemple : métallurgie de poudre

De nombreux chercheurs ont proposé plusieurs types de méthodes de réalisation pour les FGM. La métallurgie des poudres est l'une des méthodes les plus importantes de la production des MGF de. Un exemple typique de ce procédé de fabrication est illustré par le schéma suivant.

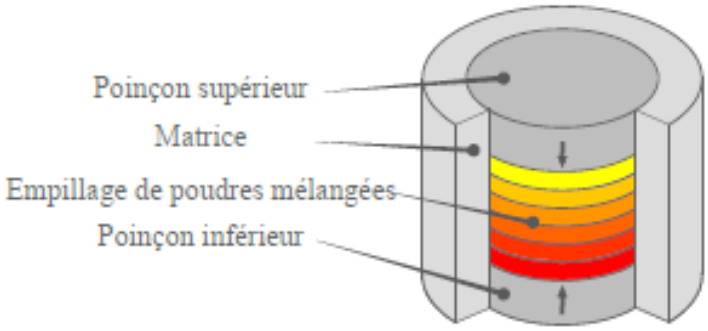


Fig. 1. 8. Frittage de poudres mélangées de manière échelonnée (P.Muller, 2013).

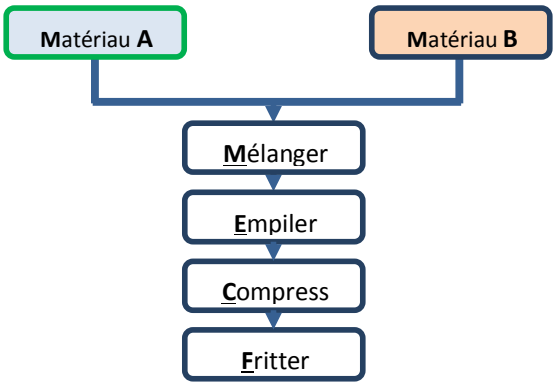


Fig. 1. 9 : Schéma du procédé métallurgique du frittage par poudre (Gururaja Udupa 2014).

Tout d'abord, les matériaux **A** et **B** sont pesés et mélangés. Chacune des proportions de poudre est mélangée de manière uniforme par un broyeur conique de **type V**, le mélange comprend, en outre, une faible proportion d'un lubrifiant solide en poudre. L'étape suivante est l'empilement par paliers des pré-mélanges en poudre selon une répartition spatiale prédéfinie selon un concept déterminé en avance en vue de répondre à un cahier de charges. Vien par la suite la compression à froid de la poudre dans un moulages empreintes qui donnera une pièce agglomérée, manipulable, de forme et de dimensions précises (la pression uni-axiale est comprise entre 200 et 800 MPa). La dernière étape est le frittage, qui consiste à chauffer les pièces comprimées à une température élevée mais nettement inférieure à la température de fusion du métal pur ou de l'alliage obtenu par mélange, une atmosphère contrôlée et réductrice est nécessaire dans la plupart des cas.

L'un des procédés de frittage des plus avancés est celui à étincelle plasma chargeant les intervalles entre les particules de la poudre matériau avec de l'énergie électrique à des pressions assez élevées (Gururaja Udupa et al., 2014).

1.3.1.2 Procédés par fabrication additive

La fabrication additive regroupe l'ensemble des procédés permettant de projeter ou de fabriquer un objet physique à partir d'un objet numérique, point par point ou couche par couche par rajout de matière (P.Muller, 2013).

Techniques d'abord réservées à la réalisation de prototypage, les technologies de fabrication additive permettent aujourd'hui de réaliser des pièces répondant aux caractéristiques fonctionnelles souhaitées du produit final (N.Hopkins et P.Dickens, 2006b ; I.Gibson et al., 2009b).

Les origines de la fabrication additive remontent à la fin du XIXème siècle au cours duquel Blanther proposa une méthode de fabrication couche par couche pour réaliser des cartes topographiques (J.E.Blanther, 1892). La méthode consiste à imprimer des courbes topographiques sur une série de plaques de cire puis de découper les plaques suivant ces courbures. Après empilement et lissage de ces plaques de cire, on obtient une carte en relief. On peut noter que les procédés modernes par stratification s'inspirent directement de cette méthode de fabrication. Les procédés de fabrication additive actuels (Figure 1. 10) font leur apparition au milieu des années 1980 avec l'arrivée de la photo-polymérisation (D.L.Bourellet etal., 2009a).

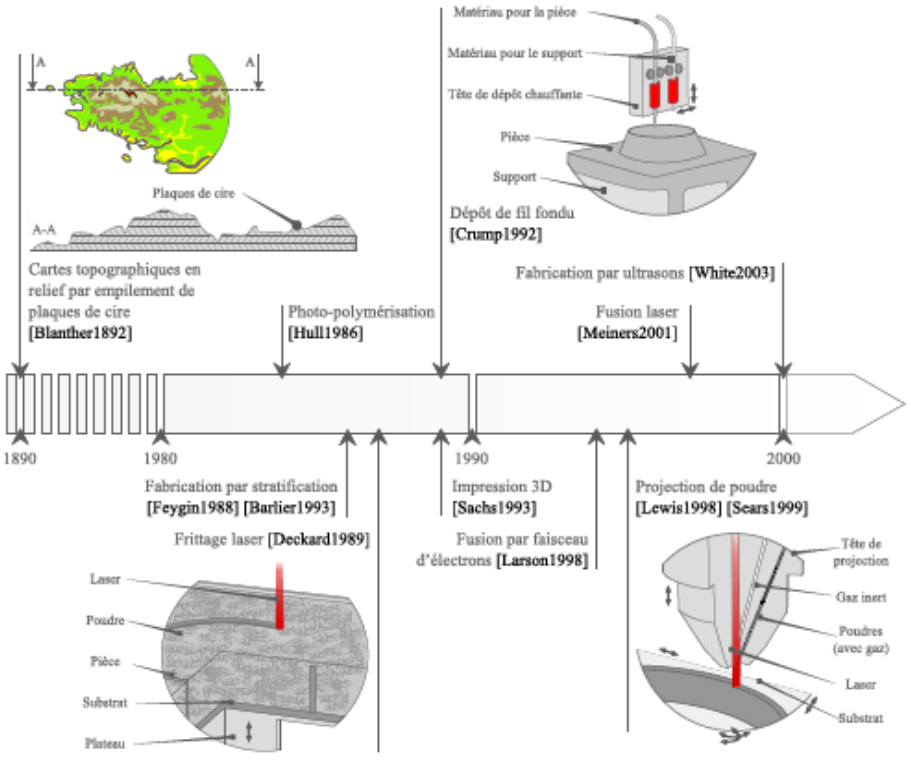


Fig. 1. 10. Evolution des techniques de fabrication additive (P.Muller, 2013).

Avec ce procédé, un objet en trois dimensions est formé couche par couche par solidification d'une résine liquide photosensible lors d'une exposition aux rayons ultraviolets (D.T.Phamet R.S.Gault, 1998 ; P.J.Bártolo et I.Gibson, 2011). Depuis, de nombreux procédés ont été développés, offrant au fur et à mesure la possibilité d'utiliser de nouveaux matériaux : polymères, métalliques et céramiques (D.Kochan et al., 1999 ; D.Dimitrov et al., 2006 ; Y.Yan et al., 2009 ; I.Gibson et al., 2009a ; P.Muller, 2013).

Le premier procédé permettant la fabrication de pièces métalliques est le procédé de frittage laser développé à la fin des années 1980. Néanmoins, ce procédé ne permet pas d'obtenir de pièces métalliques denses. En effet, cette technologie utilise un mélange de deux poudres dont l'une a un point de fusion beaucoup plus bas que l'autre. Lors de la fabrication, sous l'effet d'un laser, le premier composant, celui dont le point de fusion est le plus faible, fond et lie les grains de poudre du second composant. On obtient donc une pièce poreuse avec des caractéristiques mécaniques moindres (C.K.Chua et al., 1998). Les premières pièces métalliques dense ont été produites au milieu des années 1990 avec le procédé de fusion par faisceau d'électrons (N.Hopkinson et P.Dickens, 2006 ; P.Muller, 2013).

Actuellement, trois technologies sont capables de produire des pièces métalliques :

i. La technologie par lit de poudre qui regroupe les procédés par fusion laser et par faisceau d'électrons.
ii. La technologie par dépôt de fil.
iii. La technologie par projection de poudre (J.Ruan et al., 2006 ; L.P.Karunakaran et al., 2007).

Dans le premier cas, une fine couche de poudre est déposée sur un plateau, la source d'énergie (laser ou faisceau d'électrons) se déplace et vient fondre la poudre métallique. Lorsque la première couche est terminée, le plateau descend d'un incrément de hauteur et une nouvelle couche de poudre est déposée. La pièce est fabriquée au fur et à mesure par couches successives. Dans les deux autres cas, la pièce est fabriquée par création successive de cordons de matière. Concernant la technologie par dépôt de fil, le cordon est issu de la fusion d'un fil métallique (D.S.Choi et al., 2001). Pour ce qui est de la technologie par projection de poudre, le cordon est formé suite à la fusion d'une poudre métallique projetée dans le faisceau d'un laser (Figure 1.10) (L.Costa et R.Vilar, 2009).

Ces deux dernières technologies, qui font partie des plus récentes, ouvrent de nouvelles perspectives pour la fabrication de pièces métalliques puisque le système d'apport de matière peut être associé à une cinématique cinq ou six axes. Cela permet donc de fabriquer des pièces complexes sans utilisation de support ou de moule. Concernant la fabrication des pièces céramiques, on retrouve globalement les mêmes technologies que pour la fabrication additive (M.A.Jafari et al., 2000 ; I.Shishkovsky et al., 2007 ; V.K.Balla et al., 2008a ; Y.C.Hagedorn et al., 2010). On remarque que la réalisation de pièces céramiques est encore plus complexe que celle des pièces métalliques. En effet, en raison de leur température de fusion élevée, de leur plasticité quasiment inexistante et leur faible résistance aux chocs thermiques, les matériaux céramiques sont plus compliqués à travailler (P.Muller, 2013).

1.3.2 Difficultés de conception.

L'avènement des matériaux à gradient évaluée à pousser la recherche et le développement à prospecter de possible domaine d'application en essayant de trouver à chaque fois la réponse à un phénomène existant ou de répondre à une exigence qui se pose ou bien d'améliorer un configuration donnée (Gururaja Udupa et al., 2014), une prospection qui nécessite :

- La mise en place d'une base de données étoffée incluant les paramètres matériau, les procédés de fabrication, les systèmes de combinaison ainsi que les évaluations des performances.

- Combiner les efforts de recherche et d'exploration consacrés aux propriétés physique, aux microstructures générées ainsi qu'au processus de préparation afin de permettre une prédiction fiable et précise des potentialités du matériau à gradient évalué projeté. Ceci en travaillant d'avantage sur la théorie de la continuité (continuum), sur celle dite quantique (théorie discrète) ainsi sue sur la théorie de la percolation sans oublier la modélisation des microstructures.

- L'enrichissement des résultats pour alimenter un programme de simulation par ordinateur susceptible de fournir une base solide à l'émergence d'une industrialisation des FGM, en faisant passer la production des FGM du stade des prototypes à celui de l'industrie ou de la production en série.

- Réduire les couts de production pour une vulgarisation de cette nouvelle technologie.

Dans le domaine de la recherche sur le FGM, le choix du matériel approprié pour toute application direct dans un défi immédiat en vue d'adopter une technologie nouvelle relève de :

- Développement de technique fortement automatisée à faible coût.
- Diversifier l'éventail d'offre des FGM en dimensions et en forme afin de couvrir les besoins générique et spécifique.
- Accompagner l'évolution du processus de production par la promotion d'un système de control fiable et précis.

Le but est d'aboutir à une production de masse offrant un mécanisme avancé de conception des matériaux FGM.

1.4 Propriétés efficaces des matériaux FGM.

Plusieurs FGM sont fabriqués à partir d'au moins deux phases de matériaux ayant des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réels n'est généralement pas disponible, sauf peut-être pour des informations concernant la distribution de la fraction volumique. Etant donné que la fraction volumique de chaque phase varie progressivement dans la direction de la gradation, les propriétés effectives du FGM changent le long de cette direction (H.S.Shen, 2009). Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser le FGM :

Pour la première, une variation par séquence de la fraction volumique du métal ou de la céramique est supposée, et le FGM est considéré comme un empilement de couches de même fraction de volume dans chaque région, à savoir, des couches de céramique/métal quasi homogène (Figure 1. 5b). Pour le second choix, une variation continue de la fraction volumique de céramique ou de métal est utilisé (Figure 1. 5a).

La fraction volumique du métal peut être représentée en fonction de Z à travers l'épaisseur.

$$V_m = \left(\frac{2Z + h}{2h} \right)^N \qquad 1.1$$

Où h représente l'épaisseur de la structure, $N\left(0 \le N \le \infty\right)$ est l'exposant d'une fraction de volume, ce qui détermine le profil de variation des matériaux à travers l'épaisseur de la couche du FGM Comme cela est présenté sur la figure (Figure 1. 11). En variant la valeur de N , on génère un nombre infini de distributions de composition.

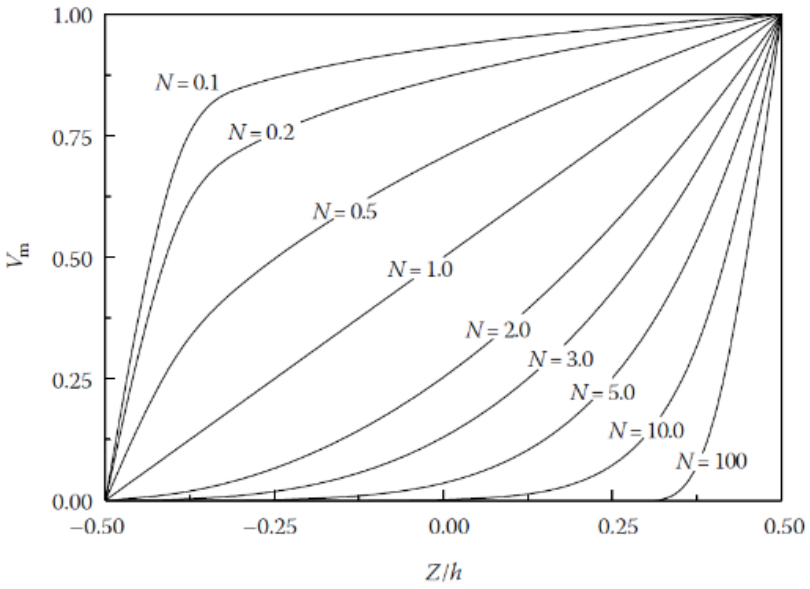


Fig. 1. 11 : Fraction de volume du métal à travers l'épaisseur(H.S.Shen, 2009).

Afin de modéliser avec précision les propriétés des matériaux FGM, les propriétés doivent être à température et à coordonnées référenciés. Ceci est réalisé à l'aide d'une simple loi de mélange (loi de puissance de modèle Voigt) de matériaux composites (H.S.Shen, 2009). Les propriétés effectives P_f du matériau de la couche FGM, comme le module de Young E_f , et le coefficient de dilatation thermique α_f , peuvent alors être exprimées par :

$$P_f = \sum_{j=1} P_j V_{f_j} \qquad 1.2$$

Où P_j et V_{f_j} sont les propriétés du matériau et de la fraction volumique du matériau constitutif j, la somme des fractions de volume de tous les constituants matériaux est égale à 1.

$$\sum_{j=1} V_{f_j} = 1 \qquad 1.3$$

Comme les structures fonctionnellement graduées sont les plus couramment utilisés dans des environnements à température élevées où des changements significatifs dans les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs sont à prévoir (J.N.Reddy et C.D.Chin, 1998 ; H.S.Shen, 2009), il est essentiel de prendre en considération cette influence de la température pour une bonne prédiction de la réponse mécanique du matériau. Ainsi, le module de Young effectif E_f , le coefficient de Poisson ν_f , le coefficient de dilatation thermique α_f et de la conductivité

thermique k_f sont supposées être dépendant de la température et peuvent être exprimés comme une fonction non linéaire de la température (Y.S.Touloukian, 1967) :

$$P_j = P_0\left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3\right) \qquad 1.4$$

Où P_{-1} , P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température T [K] et sont propres aux matériaux constitutifs.

Les valeurs typiques pour le module de Young E_f [Pa], le coefficient de Poisson ν_f , le coefficient de dilatation thermique α_f [K^{-1}], et de la conductivité thermique k_f [WmK^{-1}] de quelques céramiques et métaux sont données par les tableaux 1.1 à 1.4 . à partir Des équations 1.1 à 1.3 (L.J.Gibson et al., 1995 ; H.S.Shen, 2009), on obtient :

$$E_f\left(Z,T\right) = \left[E_m\left(T\right) - E_c\left(T\right)\right]\left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N + E_c\left(T\right) \qquad 1.5a$$

Tableau 1. 1 : Module d'élasticité E_f [Pa] céramiques et métaux.

Source: (J.N.Reddy et C.D.Chin, 1998 ; H.S.Shen, 2009)

Materials	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Zirconia	244.27e+9	0	-1.371e-3	1.214e-6	-6.778e-10
Alummimum oxide	349.55 e+9	0	-3.853e-4	4.027e-7	-1.673e-10
Silicon nitride	348.43 e+9	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
Ti-6Al-4V	122.56 e+9	0	-4.586e-4	0	0
Stainless steel	201.04 e+9	0	3.079e-4	-6.534e-7	0
Nickel	223.95 e+9	0	-2.794e-4	-3.998e-9	0

$$\alpha_f(Z,T)=\left[\alpha_m(T)-\alpha_c(T)\right]\left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N+\alpha_c(T) \quad 1.5b$$

Tableau 1. 2 : Coefficient d'extension thermique α_f [K^{-1}] céramiques métaux.

Source: (J.N.Reddy et C.D.Chin, 1998 ; H.S.Shen, 2009)

Materials	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Zirconia	12.766e-6	0	-1.491e-3	1.006e-5	-6.778e-11
Alummimum oxide	6.8269e-6	0	1.383e-4	0	0
Silicon nitride	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
Ti-6Al-4V	7.5788e-6	0	6.638e-4	-3.147e-7	0
Stainless steel	12.330e-6	0	8.086e-4	0	0
Nickel	9.920^{e}-6	0	8.705e-4	0	0

$$K_f(Z,T)=\left[K_m(T)-K_c(T)\right]\left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N+K_c(T) \quad 1.5c$$

Tableau 1. 3 : Conductivité thermique k_f [WmK^{-1}] céramiques métaux.

Source: (J.N.Reddy et C.D.Chin, 1998 ; H.S.Shen, 2009)

Materials	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Zirconia	1.7000	0	1.276e-4	6.648e-8	0
Alummimum oxide	-14.087	-1123.6	-6.227e-3	0	0
Silicon nitride	13.723	0	-1.032e-3	5.466e-7	-7.876e-11
Ti-6Al-4V	1.0000	0	1.704e-2	0	0
Stainless steel	15.379	0	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
Nickel[a]	187.66	0	-2.869e-3	4.005e-6	-1.983e-9
Nickel[b]	58.754	0	-4.614e-4	6.670e-7	-1.523^{e}-10

[a] : pour $300K \le T \le 635K$.

[b] : pour $635K \le T$.

$$\nu_f(Z,T) = \left[\nu_m(T) - \nu_c(T)\right]\left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N + \nu_c(T) \qquad 1.5d$$

Tableau 1. 4 : Coefficient de poisson ν_f céramiques métaux.

Source: (J.N.Reddy et C.D.Chin, 1998 ; H.S.Shen, 2009)

Materials	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Zirconia	0.2882	0	1.133e-4	0	0
Alummimum oxide	0.2600	0	0	0	0
Silicon nitride	0.2400	0	0	0	0
Ti-6Al-4V	0.2884	0	1.121e-4	0	0
Stainless steel	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0
Nickel	0.3100	0	0	0	0

Il est évident que E_f ,ν_f , α_f et K_f dépendent à la fois de la température et des coordonnées afférentes. Cette méthode est simple et commode à l'application pour une bonne prédiction générale des propriétés matérielles. Comme indiqué précédemment, des informations précises sur la taille, la forme et la distribution des particules ne sont pas disponibles et les modules élastiques effectifs des microstructures graduées doivent être évalués en fonction de la distribution de la fraction volumique et de la forme approximative du model ou des caractéristiques de dispersion ou de répartition (H.S.Shen, 2009).

Plusieurs modèles de micromécanique ont également été développés au fil des ans pour déduire les propriétés effectives des FGM. Le model Mori-Tanaka (T.Mori et K.Tanaka, 1973 ; Y.Benveniste, 1987) développé en vue d'apprécier les modules effectives est applicable aux régions de la microstructure graduée caractérisées par une matrice continue bien déterminée et une phase transitoire particulaire intermédiaire discontinue comme le montre les Figures 1.1 et 1.5. Cette approche prend en compte l'interaction des domaines élastiques entre les inclusions voisines. Il est supposé que la matrice, indiquée par l'indice **1** est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulaire, désignée par l'indice **2**. Dans cette notation K_1, G_1, et V_1 représentent respectivement le module de compression, le module de cisaillement, et la fraction volumique de la phase de matrice ; K_2, G_2, et V_2 représentent les propriétés du matériau correspondant et la fraction volumique de la phase particulaire. Il convient de noter que $V_1+V_2=1$.

Le module local d'élasticité effectif K_f, le module de cisaillement G_f, le coefficient de dilatation thermique α_f et k_f de la conductivité thermique obtenue par le model Mori-Tanaka (H.S.Shen, 2009) pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope sont donnés par :

$$\frac{K_f - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1+(1-V_2)\dfrac{3(K_2-K_1)}{3K_1+4G_1}} \quad 1.6a$$

$$\frac{G_f - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1+(1-V_2)\dfrac{G_2-G_1}{G_1+f_1}} \quad 1.6b$$

$$\frac{\alpha_f - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\dfrac{1}{K_f}-\dfrac{1}{K_1}}{\dfrac{1}{K_2}-\dfrac{1}{K_1}} \quad 1.6c$$

$$\frac{k_f - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{V_2}{1+(1-V_2)\dfrac{k_2-k_1}{3k_1}} \quad 1.6d$$

Avec :

$$f_1 = \frac{G(9K_1+8G_1)_1}{6(K_1+2G_1)} \quad 1.7$$

La méthode auto-cohérente ou auto-compatible (R.Hill, 1965 ; H.S.Shen, 2009) suppose que chaque inclusion de renforcement est noyé dans une matrice ou matériau continu, dont les propriétés réelles sont celles du composite. Cette méthode ne permet pas de distinguer entre la matrice et les phases de renforcement et le même module global est prédit dans un autre composite, dans lequel les rôles respectifs des phases sont inter-changés ou inversé. Cela le rend particulièrement adapté pour déterminer les modules effectifs dans ces régions qui ont une microstructure de squelette interconnecté comme le montre la Figure 1. 12.



Fig. 1. 12. Structure squelettique d'un FGM (H.S.Shen, 2009).

Les modules élastiques locaux avancés par la méthode auto-cohérente sont donnés par :

$$\frac{\delta}{K_f} = \frac{V_1}{K_f - K_2} + \frac{V_2}{K_f - K_1} \qquad 1.8a$$

$$\frac{\eta}{G_f} = \frac{V_1}{G_f - G_2} + \frac{V_2}{G_f - G_1} \qquad 1.8b$$

Où :

$$\delta = 3 - 5\eta = \frac{K_f}{K_f + \frac{4}{3}G_f} \qquad 1.9$$

Ensuite, le module de Young E_f et le coefficient de Poisson ν_f peuvent être déterminé respectivement à partir de :

$$E_f = \frac{3K_f G_f}{3K_f + G_f} \qquad 1.10a$$

$$\nu_f = \frac{3K_f + 2G_f}{2\left(3K_f + G_f\right)} \qquad 1.10b$$

Une comparaison entre les deux modèles, celui de Mori-Tanaka et celui dit auto-cohérent ainsi qu'une simulation à la méthode des éléments fini des MGF a été présentée par multiples recherches (T.Reuter et al., 1997 ; T.Reuter et al., 1998 ; H.S.Shen, 2009). Le modèle Mori-Tanaka a présenté une précision dans la prédiction des propriétés pour des cas de figure à matrice continue et inclusion discontinue, tandis que le modèle auto-cohérent a donné de meilleurs résultats pour des microstructures squelettiques caractérisées par une zone de transition large entre les régions, avec prédominance de l'une des phases constitutives.

1.4.1 Classification des FGM

Les FGM sont classés suivant les critères de leurs applications. Suivant la combinaison des matériaux constituants, les matériaux à gradient évalué peuvent être divisés en plusieurs catégories métal/céramique, céramique/céramique, céramique/plastique et bien d'autre combinaison possible. Les matériaux FGM dans leur ensemble peuvent être catégorisés en fonction de leurs compositions ou bien leurs lois de mélange :

i. Un premier type **fonctionnellement dilué** (structure composée d'un côté à l'autre de deux matériaux l'un noyé dans l'autre).
ii. Un second type **à revêtement FGM** (un matériau est noyé superficiellement dans une matrice pour former un revêtement FGM).
iii. Le dernier type à **connexion à gradient fonctionne**l (reliant deux interfaces par un substrat à gradient évalué).

Aussi les FGM peuvent être classés suivant la différence de densité du gradient, le changement de nature opéré dans les FGM pour donner des FGM visuel ou à structure fine. Et enfin selon différents domaines d'application pouvant donner des FGM résistants à la chaleur, des FGM biologiques, des FGM chimiques et d'autre FGM électroniques à titre d'exemple.

Tableau 1. 5 : Différents types de matériaux à gradient évalué.
Source: (Gururaja Udupa et al., 2014) ; (V.Richter, 1995)

N°	Matériau	Exigences	Application
1	SiC-SiC	Résistance à la corrosion dureté	Chambres de combustion
2	Al-SiC	Dureté	
3	SiCw/Al-alloy	Resistance thermique et chimique	Silos de stockage
4	E-glass/epoxy	Dureté & amortissement	Rotos de frein & ressorts à lame
5	Al-C		Abres de transmission, téléscope Hubble (treillis d'assemblage sydtème de mesure). Rotor et roues de turbines
6	Al-Sic		Volants et frein de voitures decourse
7	SiCp/Al-alloy	Point de fusion élevé, faible plasticité et dureté élevée	Roue dentée motrice, poulies, réacteur convertisseur de couple, amortisseur
8	Carbon and glass fiber		Arbres de propulsion
9	Glass/Epoxy		Coque cylindrique de pression, dômes de sonar
10	TiAl-SiC fibers		Canalisation composite, bouteilles de plongée.
11	Be-Al		Flotteurs, coque de bateau, pales de tunnel de vent, structures engin spatial, réflecteurs, panneaux solaires, compartiment de caméra.
12	Al_2O_3/Al-alloy	Bonne résistance à la corrosion et thermique	Lance-roquettes, ailettes, lanceurs rotatifs, carter moteur.
13	Carbon/ Bismaleimide		Arbre de transmission, pales d'hélice, portes de chargement, inverseur de poussée (panneaux d'échangeurs de chaleur, pièces de moteur).
14	Carbon/Epoxy	Légèreté et bon amortissement	Composants d'hélicoptère (arbre d'entraînement de rotor, support de mât, pales de rotor principal).
15	SiCw/6061	Dureté	Chassis de vélo et voiture de course.
16	Al-alloy/CNT	Légèreté et rigidité	Ligaments artificiels, tubes cryogéniques pour scanner IRM, fauteuils roulants, implants articulaires de la hanche, montures de lunettes, trépieds, instruments de musique

L'émergence de cette nouvelle catégorie de matériau, a représenté un vaste gisement, riche et varié en thèmes de recherche et de développement, vu les potentialités qu'elle pouvait offrir. Des opportunités toujours d'actualité débouchant sur d'autres axes et d'autres voies suscitant à la fois l'engouement de l'industrie et de la recherche.

Chapitre 02

Les Panneaux Sandwich

2.1 Introduction

Une structure sandwich est constituée d'une âme de faible densité et aux caractéristiques mécaniques faibles devant celles des deux peaux qui l'enserrent. Il existe une infinité de combinaisons de matériaux pour l'âme et pour les peaux suivant les domaines d'utilisation, du génie civil à la construction spatiale.

2.1.1 Qu'est-ce qu'un matériau sandwich ?

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux et d'un matériau d'âme (J.E.ARBAOUI, 2009). Les peaux sont caractérisées d'une épaisseur assez faible possédant de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en allégeant la masse de l'ensemble. Dans un sandwich, il ne faut pas oublier le troisième composant : l'adhésif. Ce dernier permet le bon assemblage et la solidarisation de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance au cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau gradient évalué ou FGM, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive. De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f. Le rapport t_f / t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01.

D'après (H.G.allen, 1961 ; J.E.ARBAOUI 2009), les panneaux sandwichs peuvent être classer en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_c (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des deux peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_c + t_f$.

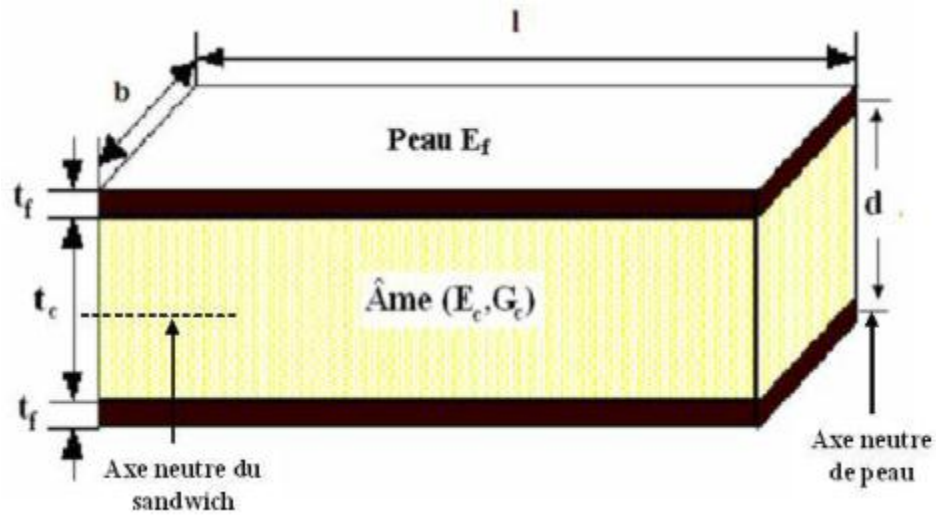


Fig. 2. 1. Schématisation type d'une structure sandwich (J.E.ARBAOUI, 2009).

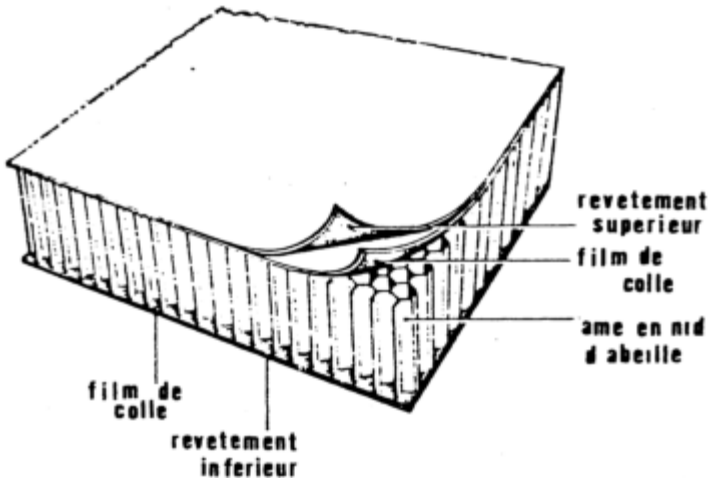


Fig. 2. 2. Constitution d'un sandwich de type aéronautique (B.Castanié, 2000).

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante (ARBAOUI 2009) :

- Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;
- Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich. En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwichs possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions (J.E.ARBAOUI, 2009).

2.1.2 Exemple d'amélioration apportée par les sandwichs

Dans le domaine de l'aéronautique, généralement, les âmes sont en mousse ou de type nid d'abeille aluminium et les peaux sont en stratifiés de fibres de verre, de Kevlar ou de carbone, ou encore en alliage d'aluminium. Leur épaisseur maximale est de l'ordre de 2 mm tandis que la hauteur de l'âme ne dépassant pas les 50 mm. La jonction des peaux à l'âme est assurée par un film adhésif (Figure 2. 2). Le comportement mécanique général est parfaitement illustré par l'exemple suivant (D.Gay, 1991) qui utilise une formulation de type R.D.M.

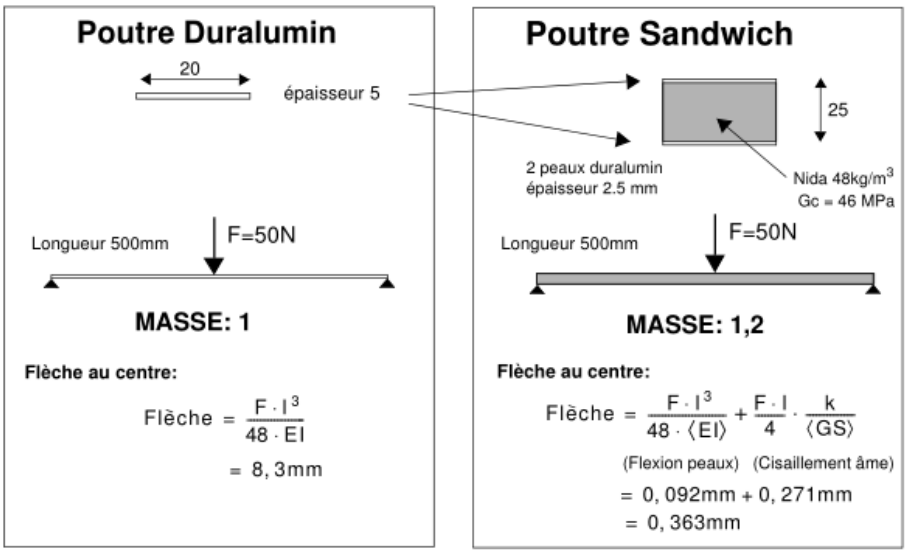


Fig. 2. 3. Comparaison poutre type Duralumin avec poutre sandwich (B.Castanié, 2000).

Ce modèle simplifié démontre nettement que :

- La flèche a été divisée par 23 pour seulement 20% d'augmentation de masse. Les structures sandwichs présentent donc une rigidité spécifique à la flexion particulièrement élevée.

- La flèche due au moment de flexion est pour cet exemple 3 fois inférieure à celle due à l'effort tranchant. La prise en compte du cisaillement transverse est donc essentielle pour une modélisation correcte des sandwichs.

Si le mode de sollicitation du sandwich est la flexion, soit par des efforts concentrés soit par pression répartie (ex : coques de navire), deux peaux travaillantes identiques s'imposent. On parle alors de Sandwich Symétrique. D'un point de vue technologique, on est passé d'une structure constituée d'un matériau homogène isotrope à une structure multi-phase et anisotrope. Ainsi, il est impossible de caractériser simplement le comportement par un seul essai de traction et les modes de ruines deviennent complexes et variés (B.Castanié, 2000).

2.2 Historique Et Applications Actuelles

Le premier à envisager l'intérêt à faire travailler deux peaux dispensées de la ligne moyenne fut le Français Duleau en 1820 (D.Zenkert, 1997 ; B.Castanié, 2000). Mais les premières applications n'ont débuté qu'une centaine d'années plus tard avec la naissance de l'industrie aéronautique.

L'exploration de constructions nouvelles est permanente a été toujours inspirée par la conception des structures d'aéronefs constamment soumises à des impératifs accrues de performances en termes de rigidité, de résistance et de poids,. Si les débuts de l'aviation ont consacré la construction bois et toile, la solution peau mince métallique raidie par cadres et lisses a été adoptée dès les années 20 (Figure 2. 2). Dans les années 30, les industriels ont envisagé la possibilité de réaliser des éléments de structures en sandwichs fabriqués dans les matériaux de l'époque. Un brevet à ce sujet a été déposé par Von Karman en 1924 (N.J.HOFF et S.E.Mautner, 1944 ; B.Castanié, 2000).

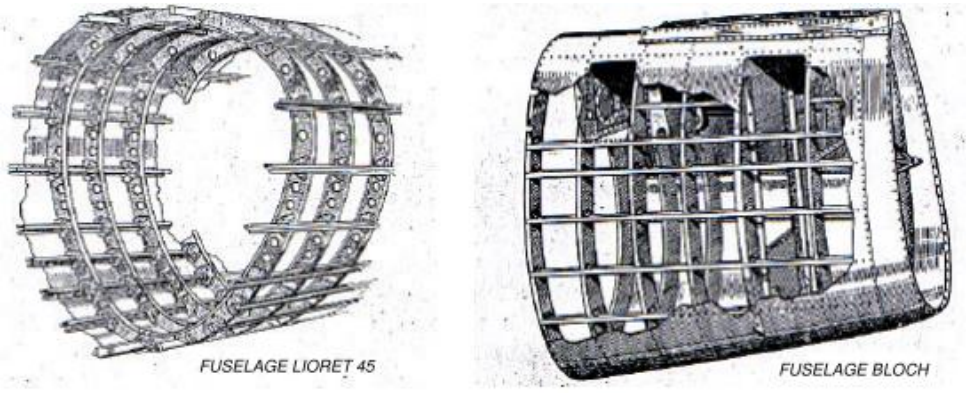


Fig. 2. 4. Construction métallique aéronautique typique des années 20 et 30 (B.Castanié, 2000).

Le procédé Brodeau (1934), consiste en deux épaisseurs de contreplaqué qui enserrent en SANDWICH, une certaine épaisseur en matière légère, du liège ou de l'aggloméré de liège (Figure 2. 3). Ce type de solution fut étudié simultanément par les grands pays de la construction aéronautique d'avant-guerre et fut appliqué ponctuellement à la conception de

certains éléments de structure des avions. L'application la plus popularisée qui marqua le réel début de la construction sandwich fut le bombardier de Havilland-Mosquito (1943, 7741 exemplaires). L'extrados de l'aile était constitué d'un sandwich peaux contre-plaqué, cœur balsa alors que l'intrados était construit avec de simples panneaux de contre-plaqué. Toutefois, plus que les qualités intrinsèques de la construction sandwich, ce furent la disponibilité des matériaux, la facilité de mise en œuvre, la tolérance aux impacts et la séparabilité qui ont été les facteurs déterminants du choix de cette conception.

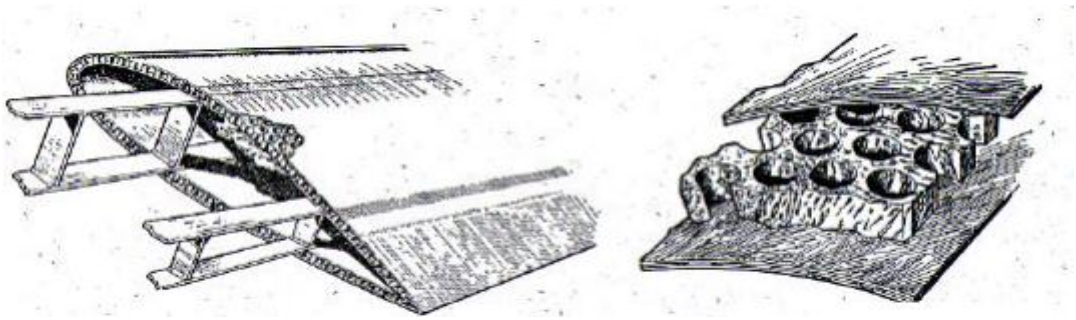


Fig. 2. 5. Procédé Brodeau (Castanié 2000) d'après "Quinze Ans d'Aéronautique Française : 1932-1947").

Pour des éléments de structure primaire. L'apparition des fibres de verre tissées et de résines performantes au début des années 50, permit la fabrication des premiers sandwichs à peaux composites et cœur nid d'abeille. Ils furent, en France, appliqués à des éléments de structures secondaires de l'avion Vautour (1953). Actuellement, le pourcentage en masse des composites utilisés dans la structure plafonne à 20% environ dans les avions civils et leur utilisation se limite aux structures secondaires. Très peu d'appareils voient leur structure primaire réalisée entièrement ou partiellement en composites. L'appareil civil le plus avancé de ce point de vue et qui fait largement appel à la construction sandwich est certainement le BEECHCRAFT STARSHIP (1983, USA) dont 70% de la masse de la structure est en matériaux composites. En Europe, le caisson d'extrémité de voilure de l'ATR 42 est en carbone. Le nouvel Airbus A340-500/600 (1er vol en 2001) a adopté pour la première fois un élément de structure travaillante en carbone, à savoir une poutre ventrale d'une longueur de 16 mètres (B.Castanié, 2000) ; Air & Cosmos, N°1680). Dans le domaine militaire, au début des années 2000 on parlait déjà de structure à plus de 90% en composite pour les avions LOOCKEED SKUNKS WORKS pour leurs models bombardiers furtifs B2 et F117 révolutionnaire de leur époque.

L'an 2005 a connu la commercialisation du premier avion civil, avec un fuselage entièrement réalisé en aluminium et fibre de verre, le fameux Airbus A380.

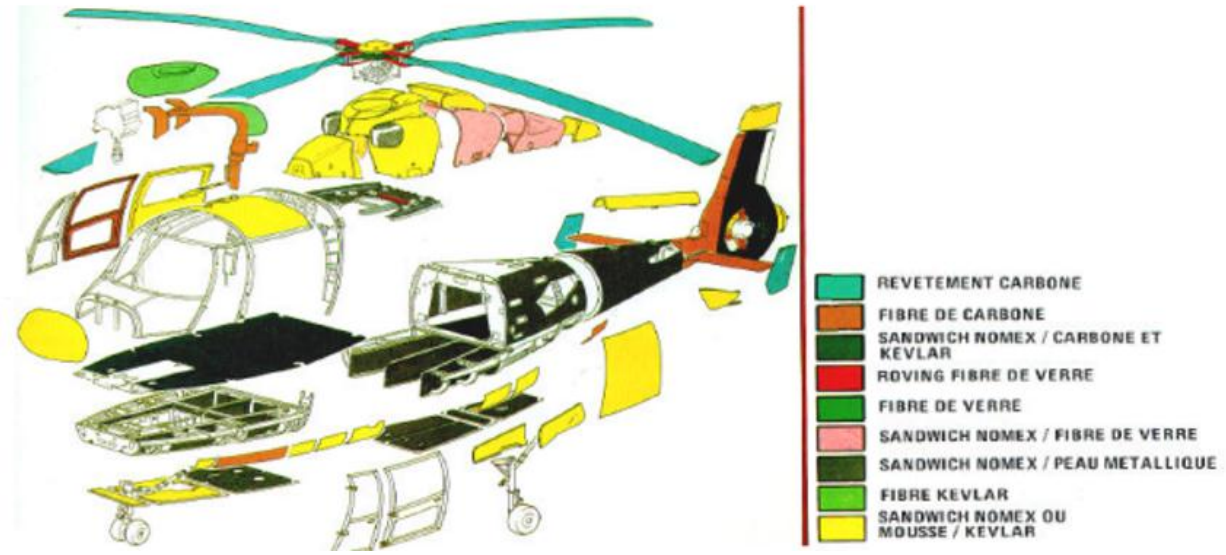


Fig. 2. 6. Structure éclatée du Dauphin 2 ((Castanié 2000) d'après "Document Aérospatiale 1986").

En ce qui concerne la conception des hélicoptères, l'état de l'art publié (AEROSPATIALE, 1986 ; B.Castanié, 2000) est bien représenté par l'éclaté du Dauphin 2 (Figure 2. 6). Pour cet hélicoptère, datant de la fin des années 90, environ 25% de la masse de la structure est réalisée en matériaux composites.

Le fait de pouvoir construire léger et rigide intéresse de nombreux autres domaines. Les premières coques de bateau en fibre de verre/balsa datent du début des années 60 et l'utilisation dans ce domaine prend de l'ampleur avec l'arrivée de frégates militaires furtives et de bateaux à grande vitesse (K.A.OLSSON et al., 1997 ; C.Lainé 1998). Par ailleurs, les impératifs de diminution du seuil des émissions en CO_2 échelonné à 40% pour l'an 2010 a conduit les constructeurs automobiles à changer de technologie et à rechercher des solutions sandwichs pour construire des structures plus légères (R.N-G.Gutafsson, 1998). Toutefois, jusqu'à présent, leur introduction se heurte aux problèmes de la fabrication en grande série et seules des applications ponctuelles ont été réalisées : prototypes de boucliers anti-crash, containers frigorifiques (A.Marshal, 1982 ; D.Zenkert, 1997).

En compétition automobile, des sandwichs type ni d'abeille remplacèrent sur les châssis des structures soudées en treillis ou ferme. Les mêmes contraintes conduisent à l'apparition de construction hybrides sandwichs/aluminium dans le matériel ferroviaire (B.Castanié, 2000).

2.3 Les éléments d'un sandwich.

2.3.1 Les peaux

Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression). Caractérisées par leurs faibles épaisseurs, constituées par tout matériau pouvant être laminé sous forme de couche tel que le bois, le métal ou tout autre matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation ssohaitée.

2.3.2 L'âme Légère

L'âme, en général, a une très faible résistance à la flexion. Son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement. Les matériaux d'âme les plus utilisés se présentent principalement sous deux formes (J.E.ARBAOUI, 2009) :

- Âmes pleines (J.M.Berthelot, 1996), parmi lesquelles on trouve le balsa (ou bois cellulaire), diverses mousses cellulaires et des résines chargées de microsphères creuses de verres (mousses syntactiques) ;
- Âme creuses (J.M.Berthelot, 1996) essentiellement de type nid d'abeilles et profilé (réseaux métalliques légers, réseaux en papier enduit ou non, réseaux en polycarbonate et en polypropylène).

2.3.3 L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réaliser par collage, soudage ou brasage. Il a pour rôle de donner à l'ensemble des éléments le statut d'une entité à part entière permettant lors des simulations numériques de considéré comme étant un lien parfait entre les différentes couches.

2.4 Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg/m^3.

En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui

conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,…), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes (J.E.ARBAOUI, 2009).

2.5 Etude des composites laminés.

Les analyses des laminés composites dans le passé se sont basées, essentiellement, sur l'une des deux de théories suivantes :

- La théorie de l'élasticité tridimensionnelle.
- Théories de plaques stratifiées.

Dans la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, chaque couche est traitée comme un continuum (un ensemble d'éléments tels que l'on peut passer de l'un à l'autre de façon continue) élastique possédant des propriétés matérielles distinctes dans les couches adjacentes. Ainsi, le nombre d'équations différentielles gouvernantes sera de 3N, où N est le nombre de couches dans le stratifié. A l'interface de deux couches, la continuité des déplacements et des contraintes donne des relations supplémentaires. La solution des équations devient insoluble au fur et à mesure que le nombre de couches devient important.

Dans la théorie des plaques stratifiées ou sandwich, le stratifié est supposé être dans un état de contrainte plane, les lames individuelles sont supposées élastiques, et la liaison entre les couches est supposée parfaite. Les propriétés du stratifié (par exemple les raideurs) sont obtenues en intégrant les propriétés de la lame à travers l'épaisseur. Ainsi, les théories des

plaques stratifiées sont équivalentes, alors, à celles des plaques à une seule couche. Dans la «théorie des plaques stratifiées classiques» (CLPT), qui est une extension de la théorie des plaques classique (CPT) aux plaques stratifiées, les composantes de contraintes transversales sont ignorées. La théorie des plaques stratifiées convient à de nombreux problèmes d'ingénierie. Cependant, les plaques stratifiées en matériaux composites avancés filamentaires, dont les rapports des modules élasticité/cisaillement sont très importants, sont sensibles aux effets d'épaisseur parce que leurs modules de cisaillement transversal effectifs sont significativement plus petits que les modules élastiques effectifs le long des directions des fibres. Ces rapports élevés de modules élasticité/cisaillement rendent la théorie classique des plaques stratifiées insuffisante pour l'analyse de plaques composites épaisses. (C.F.Liu et J.N.Reddy, 1987).

La première théorie des plaques basée sur les déformations dues au cisaillement on l'a doit à Reissner (E.Reissner, 1944 ; E.Reissner, 1947). La théorie est basée sur une distribution linéaire dans le plan (inplane) des contraintes normale et de cisaillement à travers l'épaisseur :

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{\left(h^2/6\right)}\frac{z}{\left(h/2\right)} \qquad 2.1a$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{\left(h^2/6\right)}\frac{z}{\left(h/2\right)} \qquad 2.1b$$

$$\sigma_6 = \frac{M_6}{\left(h^2/6\right)}\frac{z}{\left(h/2\right)} \qquad 2.1c$$

Où (σ_1, σ_2) et σ_6 sont les contraintes normales et de cisaillement, (M_1, M_2) et M_6 sont les moments de flexion associés (qui sont en fonctions des coordonnées plan x et y), z est la coordonnée relative à l'épaisseur et h est l'épaisseur totale de la plaque.

La détermination des contraintes normales transverse et de cisaillement σ_3, σ_4 et σ_5 se fait par les équations d'équilibre de l'élasticité tridimensionnelle.

Les équations différentielles et les conditions aux limites de la théorie ont été obtenues en utilisant le théorème de Castigliano du travail minimum (least work).

Sur la base des travaux de Basset (A.B.Basset, 1890) sur les coques, en 1949 Hildebrand, Reissner et Thomas (F.B.Hildebrand, 1949) dans une note technique du NACA ont présenté une théorie des coques basée sur la déformation par cisaillement tout comme les travaux de Hencky (A.Hencky, 1947). Ils ont supposé le champ de déplacement suivant :

$$U_1(\xi_1,\xi_2,\varsigma) = u(\xi_1,\xi_2) + \varsigma\phi_x(\xi_1,\xi_2) \quad \text{2.2a}$$

$$U_2(\xi_1,\xi_2,\varsigma) = v(\xi_1,\xi_2) + \varsigma\phi_y(\xi_1,\xi_2) \quad \text{2.2b}$$

$$U_3(\xi_1,\xi_2,\varsigma) = w(\xi_1,\xi_2) \quad \text{2.2c}$$

Les équations différentielles de la théorie sont alors dérivées en utilisant le principe de l'énergie potentielle totale minimale. De cette approche résulte cinq équations différentielles des cinq composantes du déplacement en fonction de u, v, w, ϕ_x et ϕ_y.

La théorie de la déformation par cisaillement basée sur le champ de déplacement dans les équations eq.2.2 appliquée pour les plaques est souvent appelée Théorie des Plaques de Mindlin. Mindlin (R.D.Mindlin, 1951) a présenté une théorie dynamique complète des plaques isotropes basée sur un champ de déplacement similaire à celui des équations eq.2.2 inspiré de Hencky (A.Hencky, 1947). Nous nous référerons à la théorie de la déformation par cisaillement basée sur le champ de déplacement des équations eq.2.2 comme théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre.

La théorie des plaques, isotropes homogènes, de déformation de cisaillement de premier ordre a été généralisée arbitrairement aux plaques anisotropes stratifiées pour la première fois par (P.C.Yanget al., 1966) ainsi que Whitney et Pagano (J.M.Whitney et N.J.Pagano, 1970). Les travaux de Reissner (E.Reissner, 1948 ; E.Reissner, 1953), de Medwadowski (S.J.Medwadowski, 1958), de Schmidt (R.Schmidt, 1977) et de Reddy (J.N.Reddy, 1982) ont permis d'obtenir des extensions de la théorie classique de Von Karman (Th.Von Karman, 1970) à une nouvelle incluant le cisaillement.

Les théories, à ordre élevé, à composante de déformation de cisaillement, ont été étudiées par Librescu (L.Librescu, 1975) ainsi que Lo, Christensen et Wu (K.H.Lo et al., 1977). Dans ces théories d'ordre élevé, avec chaque dimension supplémentaire (coordonnée de l'épaisseur), un inconnu supplémentaire dépendant est introduit dans la théorie. Levinson (M.Levinson, 1980) et Murthy (M.V.V.Murthy, 1981) a présenté des théories de troisième ordre qui supposent

l'inextensibilité transversale (non-étirement de la section ou de l'épaisseur). Les neuf fonctions de déplacement ont été réduites à cinq, et toujours, en se conformant à la nullité des contraintes transversales de cisaillement aux faces de la plaque.

Chapitre 03

La Théorie des Plaques

3.1 Introduction

Il existe de nombreux ouvrages qui se sont consacrés à la théorie et l'analyse des poutres et des plaques. La plupart de ces livres traitent des théories classiques (Euler-Bernoulli/Kirchhoff) mais peu comprennent les théories de déformation de cisaillement dans le détail. La théorie poutre/plaque classique ne suffit pas à fournir une représentation fidèle de la flexion, du flambement ainsi que de la réponse aux vibrations lorsque le rapport entre l'épaisseur et la longueur poutre/plaque est relativement important. Ceci est dû au fait que l'effet des déformations de cisaillement transversal négligé dans la théorie classique devient significative dans les poutres profondes et des plaques épaisses. Dans de tels cas, les théories de déformation par cisaillement fournissent des représentations assez fidèles par rapport à la théorie classique.

Les équations qui régissent les théories de la déformation dues au cisaillement sont généralement plus complexes que ceux de la théorie classique. Par conséquent, il est souhaitable d'avoir des relations exactes entre les solutions de la théorie classique et les théories de déformation de cisaillement de sorte que chaque fois que des solutions théoriques classiques sont disponibles, les solutions correspondantes des théories de déformation de cisaillement peuvent être facilement obtenues. De telles relations, non seulement fournissent des solutions de référence pour des théories de déformation de cisaillement, mais aussi permettent de mieux comprendre l'importance de la déformation de cisaillement sur la réponse des structures. des relations pour les poutres et les plaques ont été développées par différents auteurs au cours des dernières années (C.M.Wang et al., 2000).

3.2 Définitions

Les plaques sont des éléments structuraux de forme plane avec une épaisseur assez petite voir négligeable par rapport aux autres dimensions, soumises en général à des charges qui provoquent des déformations de flexion en plus de l'étirement. Dans la plupart des cas, l'épaisseur ne dépasse pas l'un dixième de la plus petite dimension dans le plan. En raison de la petitesse de la dimension d'épaisseur, il est souvent nécessaire de faire appel à l'élasticité tridimensionnelle pour la modélisation des plaques.

Les équations gouvernantes des plaques peuvent être obtenues en utilisant soit la mécanique de vecteur, par le principe de la conservation de l'énergie ou bien par les principes vibrationnels. En mécanique de vecteur, les forces et les moments sur un élément plaque typique sont additionnées pour obtenir les équations d'équilibre ou de mouvement. Dans les méthodes de l'énergie, les principes de travail virtuel ou de leurs dérivés, tels que les principes de l'énergie potentielle minimale ou énergie complémentaire, sont utilisés pour obtenir les équations d'équilibres. Bien que les deux méthodes puissent donner les mêmes équations, les méthodes d'énergie ont l'avantage de fournir des informations sur la formulation des conditions aux limites (C.M.Wang et al., 2000).

3.3 Formulation théorique.

Les théories des poutres et des plaques sont développées en traitant d'un champ de déplacement ou de contrainte telle une combinaison linéaire de fonctions inconnues à travers l'épaisseur :

$$\varphi_i\left(x,y,z,t\right)=\sum_{j=0}^{N}\left(z\right)^j+\varphi_i^j\left(x,y,t\right) \qquad 3.1$$

Où φ_i est la composante du déplacement ou de la contrainte, $\left(x,y\right)$ sont les coordonnées plan, z est l'épaisseur, t désigne le temps, et φ_i^j sont les fonctions à déterminer.

Lorsque φ_i sont les déplacements, les équations gouvernantes φ_i^j peuvent être déterminées, entre autre, par le principe des déplacements virtuels :

$$\delta W=\delta U+\delta V=0 \qquad 3.2$$

Ou bien par sa version dynamique, à savoir, le principe d'Hamilton :

$$\int_{t_2}^{t_1} \left(\delta K - \delta U - \delta V \right) dt = 0 \qquad 3.3$$

Où δU, $\delta V, \delta W, \delta K$ désignent, respectivement, l'énergie (effort) virtuelle interne, l'énergie potentielle virtuelle due aux charges appliquées (externe), le travail virtuel total et l'énergie cinétique virtuelle. Ces quantités sont déterminées en fonction des contraintes réelles et des efforts ou tensions virtuels, dépendant du champ de déplacement φ_i (C.M.Wang et al., 2000). Pour les structures en plaques, l'intégration dans le domaine des plaque est représentée par le produit de l'intégration par rapport au plan de la plaque et de l'intégration sur l'épaisseur de la plaque (intégration du volume **=** intégration sur le plan **x** intégration sur l'épaisseur). Ceci est rendu possible en raison du caractère explicite du champ de déplacement supposé :

$$\int_{Vol.} (.)\, dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega_0} (.)\, d\Omega dz = 0 \qquad 3.4$$

Où h représente l'épaisseur de la plaque et Ω_0 représente le plan médian non déformée de la plaque, qui est supposé coïncider avec le plan (x, y). Etant donné que toutes les variables indéterminées sont en fonction de l'épaisseur, l'intégration sur l'épaisseur de la plaque est effectuée de manière explicite, ce qui réduit le problème à une approche bidimensionnel. Par conséquent, les équations d'Euler-Lagrange (C.M.Wang et al., 2000) associés aux équations (eq.3.2 et eq.3.3) sont constituées par des équations différentielles impliquant les variables dépendantes $\varphi_i^j (x, y, t)$ et la contrainte résultante de la fibre moyenne $R_{ij}^{(m)}$ par unité de longueur :

$$R_{ij}^{(m)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z)^m \sigma_{ij} dz \qquad 3.5$$

Les résultantes des contraintes peuvent être écrites en termes de φ_i avec l'aide des équations constitutives supposées et les relations de contrainte/déformation.

La même approche est utilisée lorsque φ_i désignent des éléments de contrainte, sauf que la base de la dérivation des équations gouvernantes est le principe des forces virtuelles.

3.4 Evolution de la Théories de plaques.

Les théories de la plaque à deux dimensions peuvent être classées en deux types :

i. La théorie classique de la plaque (CPT) négligeant les effets transversaux de déformation de cisaillement.
ii. Les théories de la plaque comprenant la déformation de cisaillement.

La théorie des plaques la plus simple traitant de la flexion est celle de Kirchhoff appelée Théorie Classique de la Plaque (Classic Plate Theory). Dans le cas d'une flexion pure, le champ de déplacement donné par la CPT (J.N.Reddy, 1984b ; J.N.Reddy, 1997a ; J.N.Reddy, 1999a ; C.M.Wang et al., 2000) est comme suite :

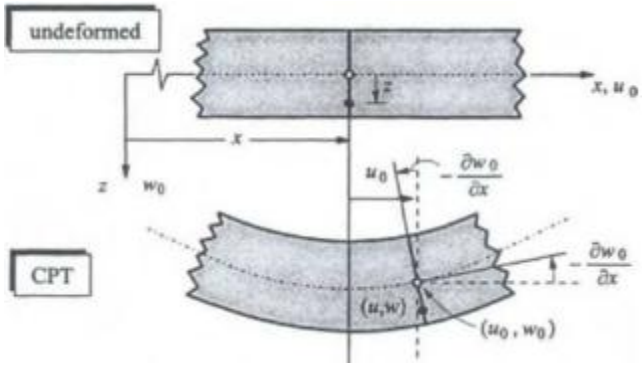


Fig. 3. 1. La CPT, Théorie classique de Kirchhoff (C.M.Wang et al., 2000).

$$u(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w_0}{\partial x}$$
$$v(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad 3.6$$
$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

Où (u,v,w) sont respectivement les composantes de déplacement le long de coordonnées (x,y,z), et w_0 est la déviation transversale d'un point sur le plan médian $(z=0)$. Le champ de déplacement (eq.3.6) implique que les lignes droites perpendiculaires au plan (x,y) avant déformation restent droites et perpendiculaire à la surface médiane après déformation. L'hypothèse de Kirchhoff (C.M.Wang et al., 2000) revient à négliger tant le cisaillement transversal que les effets normaux transversaux, signifiant que la déformation est entièrement due à la flexion dans le plan d'étirement.

La prochaine théorie dans la hiérarchie des théories raffinées a été proposée par Mindlin en 1951 et suivi, plus tard, par Reddy (R.D.Mindlin, 1951 ; J.N.Reddy, 1984 ; J.N.Reddy, 1999a) est celle dite de premier ordre de déformation de cisaillement (ou First Shear Deformation Theory), considérée comme La plus simple des théories du premier ordre (FSDT). Elle est basée sur le champ de déplacement suivant :

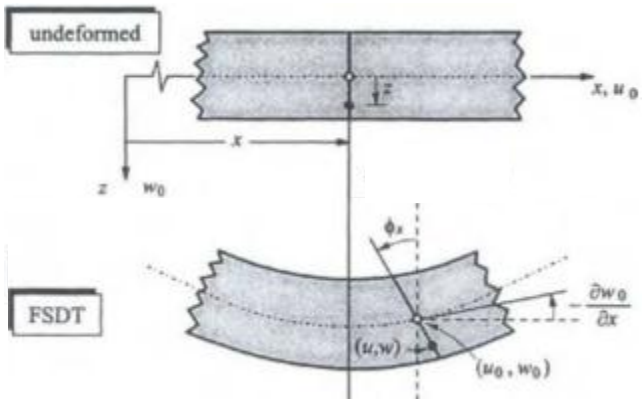


Fig. 3. 2. La FSDT, Théorie de Mindlin 1951 (C.M.Wang et al., 2000).

$$u(x,y,z,t) = z\phi_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t) = z\phi_y(x,y,t) \qquad 3.7$$
$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

Où ϕ_x et ϕ_y désignent des rotations autour des axes x et y. La FSDT prolonge la cinématique de la CPT en incluant une déformation par cisaillement transversal brut dans ses hypothèses cinématiques, à savoir une déformation de cisaillement transversal supposée être constante à travers l'épaisseur. Dans la FSDT, des facteurs de correction du cisaillement sont introduits afin de corriger l'écart entre les distributions de force de cisaillement transversal réelle et celle découlant des relations cinématiques de la FSDT. Ces facteurs de correction du cisaillement dépendent non seulement des paramètres géométriques, mais également des conditions de chargement ainsi que des états ou conditions aux limites.

Dans les deux approches de la CPT et de la FSDT, l'hypothèse de l'état de contrainte plane est utilisée ainsi qu'une loi constitutive de type contrainte plane réduite. Dans les deux théories, l'inextensibilité de la normale transversale peut être éliminée en supposant que la déviation transversale varie également à travers l'épaisseur. Ceci permet l'utilisation d'équations constitutives tridimensionnelles complètes.

Les théories des plaque dites de deuxième ordre ou d'ordre élevé emploient des polynômes d'ordre supérieur dans le développement des composantes du déplacement à travers l'épaisseur de la plaque. Les théories d'ordre élevé introduisent des inconnues supplémentaires qui sont souvent difficiles à interpréter en termes physiques. La théorie du second ordre avec inextensibilité transversal est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= z\phi_x(x,y,t) + z^2\psi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= z\phi_y(x,y,t) + z^2\psi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad 3.8$$

Dans la littérature Il y a mention de nombreuses théories raffinées de troisième ordre de déformation de cisaillement TSDT (J.N.Reddy, 1984 ; J.N.Reddy, 1984b ; J.N.Reddy, 1997a ; J.N.Reddy, 1999a). La théorie des plaques de déformation à cisaillement de troisième ordre sans étirement de l'épaisseur est basée sur un champ de déplacement de type :

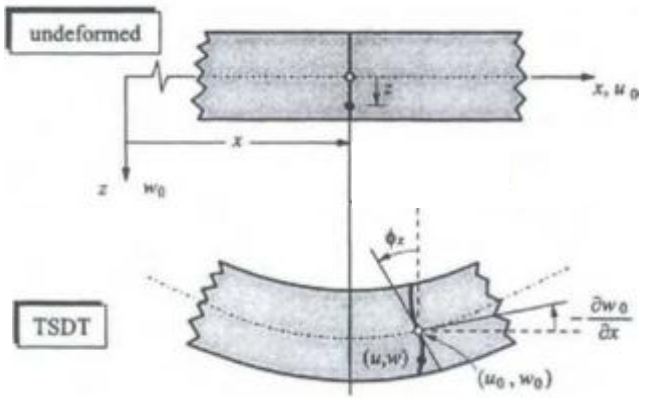


Fig. 3. 3. La TSDT, Théorie de troisième ordre (C.M.Wang et al., 2000).

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= z\phi_x(x,y,t) + \alpha z^3\psi_x\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x,y,z,t) &= z\phi_y(x,y,t) + \alpha z^3\psi_y\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad 3.9$$

Où $\alpha = 4/\left(3h^2\right)$.

Il est à noter que si $\alpha = 0$, nous récupérons le champ de déplacement de la FSDT. Le champ de déplacement accepte une variation quadratique des contraintes transversales de cisaillement (et donc par conséquent des contraintes de cisaillement) à travers l'épaisseur ainsi que la

nullité du cisaillement transversal sur surfaces supérieur et inférieur de la plaque. Contrairement à la FSDT, la TSDT ne nécessite pas de facteurs de correction du cisaillement

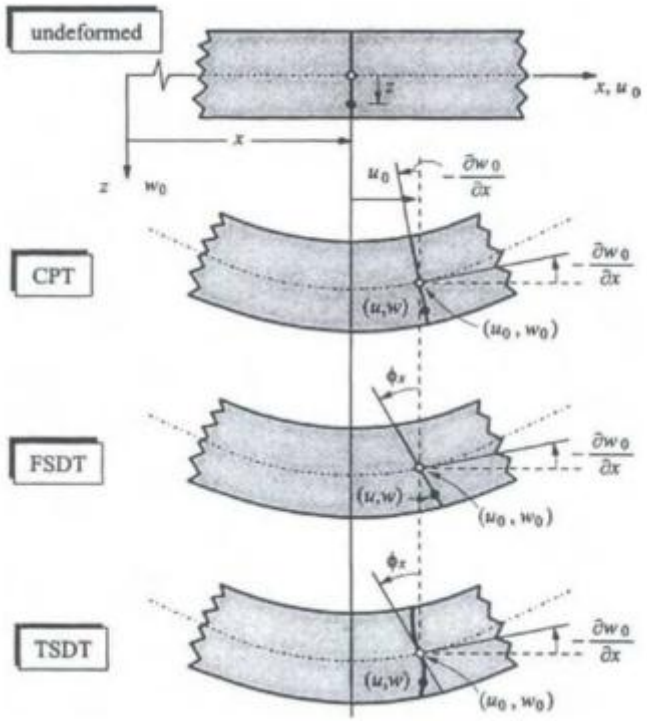


Fig. 3. 4. Géométries des déformées pour les diverses théories des plaque, ici u_0 représente le déplacement plan de déformation suivant x t al.,(C.M.Wang et al., 2000).

En plus de sa simplicité inhérente et à son faible coût de calcul, la FSDT fournit souvent une description suffisamment précise de la réponse globale (les déformations, les charges de flambement et les fréquences de vibration libres naturelles) des plaques minces à modérément épaisses. Par conséquent, il est intéressant de déterminer les déviations (flèche) maximales, les charges critiques de flambement et les fréquences de vibration libre ainsi que les modes associés. Les théories du troisième ordre donnent une petite amélioration de la précision par rapport à la solution FSDT, au détriment d'une augmentation significative de l'effort de calcul.

3.4.1 Études actuelles.

Souvent, les théories poutre/plaque d'ordre élevé exigent des solutions pour des équations gouvernantes plus complexes. Compte tenu du fait que les solutions apportées par les théories classiques des plaques sont disponibles pour un grand nombre de problèmes et la familiarité des ingénieurs avec ces solutions, il est souhaitable d'avoir des relations entre les solutions des théories d'ordre élevées et celles des théories classiques (C.M.Wang et al., 2000). Les relations pour les flèches, les charges de flambement et les fréquences propres permettent d'obtenir des

solutions, par les théories de déformation de cisaillement des plaques, pour des problèmes spécifiques et ainsi réduire l'effort de résoudre des équations compliquées des théories propres à la déformation de cisaillement.

Dans ce qui suivra, le principe des déplacements virtuels a été adopté dans la dérivation des équations d'équilibre et des conditions aux limites pour les différentes théories des plaques à savoir la CPT, la FSDT et la TSDT.

3.4.2 Théorie classique des plaques (Kirchhoff CPT).

3.4.2.1 Equations d'équilibres

Les déformations linéaires non nulles associées au champ de déplacement des équations eq.3.6

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad 3.10$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Où $\left(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}\right)$ sont les déformations dues aux efforts normaux, γ_{xy} est la déformation de cisaillement.

L'énergie virtuelle de déformation U de la théorie des plaques de Kirchhoff est donnée par :

$$\delta U = \int_{\Omega_0}\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy}\right)\right]dxdy$$
$$= \int_{\Omega_0}\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(M_{xx}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2} + M_{yy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2} + 2M_{xy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y} + \right)\right]dxdy \qquad 3.11$$

Où Ω_0 désigne le domaine occupé par le plan médian de la plaque, h est l'épaisseur de la plaque, σ_{xx}, σ_{yy} sont les contraintes normales, σ_{xy} est la contrainte de cisaillement, et $\left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)$ sont les moments afférents par unité de longueur.

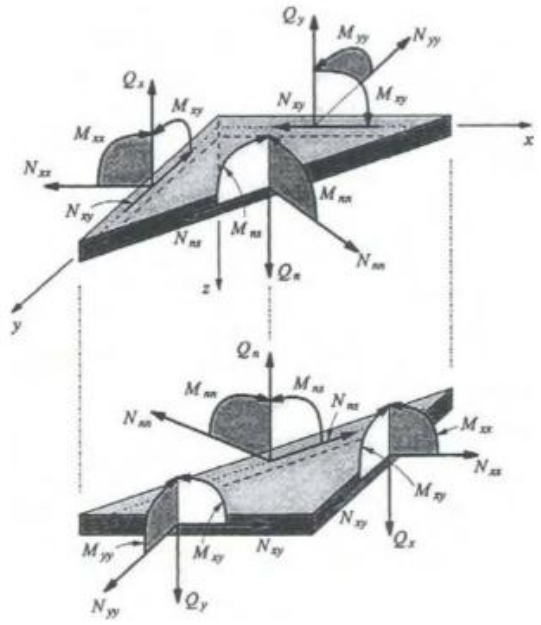


Fig. 3. 5. Les forces et moments agissants sur la plaque, Les résultantes dans le plan $\left(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\right)$ n'entrent pas dans les équations dans le cas de la flexion pure et sont spécifique au problème de flambement (C.M.Wang et al., 2000).

Avec :

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \qquad 3.12$$

Il est à noter que l'énergie virtuelle de déformation associée aux contraintes transversales de cisaillement est nulle lorsque $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ dans la théorie des plaques de Kirchhoff.

L'énergie potentielle virtuelle δV due à la charge transversale $q\left(x, y\right)$ est donnée par :

$$\delta V = \int_{\Omega_0} q\left(x, y\right) \delta w_0 dx dy \qquad 3.13$$

Si toutes fois il existait, aux bords, des forces et des moments non-nulles, l'énergie virtuelle potentielle V doit être ajoutée à l'expression de l'équation eq.3.12.

Le principe des déplacements virtuels exige que $\delta W = \delta U + \delta V = 0$. On obtient alors, en utilisant le théorème de divergence :

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\Omega_0} \left(M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\delta x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\delta y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\delta x \delta y} + q\delta w_0 \right) dxdy \\ &= -\int_{\Omega_0} \left(M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + q \right) \delta w_0 dxdy \\ &-\oint_{\Gamma} \left[\left(M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \right) \frac{\partial \delta w_0}{\delta x} + \left(M_{xy} n_x + M_{yy} n_y \right) \frac{\partial \delta w_0}{\delta y} \right] ds \\ &+\oint_{\Gamma} \left[\left(M_{xx,x} + M_{xy,y} \right) n_x + \left(M_{yy,y} + M_{xy,x} \right) n_y \right] \delta w_0 ds \end{aligned} \qquad 3.14$$

Où (n_x, n_y) désignent les cosinus de direction de l'unité normale $\hat{n}$ sur les conditions au limite Γ et le cercle sur le signe intégral signifie une intégration sur La limite totale sur la surface S. Si le vecteur normal unitaire $\hat{n}$ est orienté selon un angle θ à partir de l'axe x positif, alors $n_x = \cos\theta$ et $n_y = \sin\theta$ Puisque δw_0 est arbitraire dans la section Ω_0 et elle est indépendante de $\frac{\partial \delta w_0}{\delta x}$ et $\frac{\partial \delta w_0}{\delta y}$ sur les limites Γ, il s'ensuit que :

$$\frac{\partial^2 \delta w_{xx}}{\delta x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta w_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\partial^2 \delta w_{yy}}{\delta y^2} + q = 0 \text{ dans le plan } \Omega_0 \qquad 3.15$$

Qui représente l'équation d'équilibre de la théorie des plaques de Kirchhoff.

3.4.2.2 Conditions aux limites

Pour déterminer la forme des conditions aux limites, nous considérons les intégrales aux conditions aux limites de l'équation eq.3.14. Sur des limites parallèles aux coordonnée x, y, l'expression des conditions aux limite implique que :

$$\begin{aligned} &\text{soit } \delta w_0 = 0 \text{ ou } Q_x n_x + Q_y n_y = 0 \\ &\text{soit } \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} = 0 \text{ ou } M_{xx} n_x + M_{xy} n_y = 0 \\ &\text{soit } \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} = 0 \text{ ou } M_{xy} n_x + M_{yy} n_y = 0 \end{aligned} \qquad 3.16$$

Où

$$Q_x = M_{xx,x} + M_{xy,y} \text{ et } Q_y = M_{yy,y} + M_{xy,x} \quad 3.17$$

Représentent les contraintes de cisaillements illustrées par la Figure 3. 1. Q_x et Q_y sont définis par l'équation eq.3.17, les équations eq.3.16 indiquent que ($w_0, \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$) sont les variables primaires et que la spécification de chacune d'elles constitue une condition au limite de base (ou géométrique). Les variables secondaires affectées sont :

$$Q_x n_x + Q_y n_y \text{ , } M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \text{ , } M_{xy} n_x + M_{yy} n_y$$

A titre d'exemple, nous discuterons de certains types de conditions au limite pour la flexion de plaques rectangulaires avec des bords parallèles aux coordonnées x et y .

Pour le coté à $y = 0$ ($n_x = 0, n_y = -1$) pour discuter des conditions aux limites. Il convient de noter que seul un élément de chacune des trois paires de l'équation eq.3.16 peut (et doit) être déterminer ou spécifier sur un bord d'une plaque. Les conditions aux limites des forces peuvent être exprimées en termes de déplacements généralisés à l'aide des équations constitutives des plaques décrites dans la section suivante (C.M.Wang et al., 2000).

i. Bord libre

Un bord libre ($y = 0$) est un bord qui n'est géométriquement pas contraint de quelque façon que ce soit. Par conséquent, nous avons :

$$w_0 \neq 0 \text{ et } \frac{\partial w_0}{\partial y} \neq 0 \quad 3.18$$

Cependant, le bord peut avoir des forces et/ou des moments :

$$V_y \equiv Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \hat{V}_y \text{ et } M_{yy} \neq \hat{M}_{yy} \quad 3.19$$

Où les quantités avec un chapeau sont des forces/moments spécifique. Pour les plaques rectangulaires libres, $M_{xy} = 0$; Donc aucune force de bord n'est développée.

ii. <u>Bord Encastré</u>

Un bord encastré ($y=0$) est celui qui est géométriquement, complètement, contraint de sorte :

$$w_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \qquad 3.20$$

Par conséquent, les forces et les moments sur un bord encastré ne sont pas connus a priori (c'est-à-dire, ils sont des réactions à déterminer). Pour les plaques rectangulaires encastrées, $M_{xy} = 0$, aucune force d'angle n'est développée. Cependant, le bord peut avoir des forces et/ou des moments :

iii. <u>Bord Simplement Appuyé</u>

Les conditions aux limites pour $y = 0$ d'une plaque simplement appuyée sont définis comme suite :

$$w_0 = 0 \text{ et } M_{yy} = \overset{\Lambda}{M}_{yy} \qquad 3.21$$

Où $\overset{\Lambda}{M}_{yy}$ est le moment de flexion normal appliqué sur le bord. Pour des plaques rectangulaires simplement appuyée, une force de réaction de $2M_{xy}$ est développée à chaque coin de la plaque.

3.4.2.3 Equations constitutives

Supposons que le matériau de la plaque soit isotrope et obéit à la loi de Hooke. Les relations contrainte déformation sont alors données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \qquad 3.22$$

Où E, G et ν désigne respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

En substituant les équations eq.3.22 dans l'équation eq.3.12 et en opérant une intégration sur l'épaisseur de la plaque, on arrive à :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz = \frac{E}{1+\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}\right) z dz \qquad &= -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz = \frac{E}{1+\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}\right) z dz \qquad &= -D\left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz = G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{zy} z dz \qquad &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Où

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{3.24}$$

Représente la rigidité à la flexion.

En remplaçant $\left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)$ dans l'équation eq.3.15 on obtient les équations gouvernantes :

$$D\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right) = q \tag{3.25}$$

En termes de Laplacien ∇^2 :

$$D\nabla^2\nabla^2 w_0 = q \text{ ou bien } D\nabla^4 w_0 = q \tag{3.26}$$

Avec les conditions au limité suivante :

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial n} \end{Bmatrix} \text{ ou } \begin{Bmatrix} V_n \equiv Q_n + \dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s} \\ M_{nn} \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Ceci complète le développement des équations gouvernantes de la théorie des plaques de Kirchhoff qui sera utilisé, par la suite, dans les sections suivantes.

3.4.3 Théorie des plaques de Premier Ordre (FSDT).

3.4.3.1 Equations d'équilibres

S'inspirant des équations eq.3.7, les composantes des déformations linéaires sont données par :

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\partial \phi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = z\frac{\partial \phi_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = z\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \qquad 3.28$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Notons que $\left(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\right)$ sont les déformations linéaires à travers l'épaisseur de la plaque, tandis que les déformations transverses de cisaillement $\left(\gamma_{xy}, \gamma_{yy}\right)$ sont des constantes.

Les équations d'équilibre de la théorie des plaques de premier ordre sont dérivées, à leur tour, du principe des déplacements virtuels

$$\delta W = \delta U + \partial V = 0 \qquad 3.29$$

Où l'énergie de déformation virtuelle δU et l'énergie potentielle virtuelle δV dues à la charge transversale $q(x,y)$ sont données par :

$$\delta U = \int_{\Omega_0}\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_{xx}\delta\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\delta\sigma_{yy} + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yw}\right)dz\right]dxdy$$

$$\delta V = -\int_{\Omega_0} q(x,y)\,\delta w_0 dxdy \qquad 3.30$$

En remplaçant les expressions δU et δV par les équations eq.3.30 dans celle du travail virtuel eq.3.29, en exprimant les déformations virtuelles en termes de déplacements virtuels $\left(\delta w_0, \delta\phi_x, \delta\phi_y\right)$ des équations eq.3.28 et en intégrant à travers l'épaisseur de La plaque, on obtient :

$$0 = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} M_{xx}\dfrac{\partial\delta\phi_x}{\partial x} + M_{yy}\dfrac{\partial\delta\phi_y}{\partial y} + M_{xy}\left(\dfrac{\partial\delta\phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right) \\ -q\delta w_0 + Q_x\left(\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial x} + \delta\phi_x\right) + Q_y\left(\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial y} + \delta\phi_y\right) \end{bmatrix} dxdy \qquad 3.31$$

$\left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)$ sont définis par l'équation eq.3.12 et les charges de cisaillement unitaire sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} dz \qquad 3.32$$

Etant donné que les déformations transversales de cisaillement sont représentées comme constantes à travers l'épaisseur de la plaque, les contraintes transversales de cisaillement seront également constantes à travers l'épaisseur. Ceci contredit le fait bien connu que les contraintes transversales de cisaillement sont paraboliques (c'est-à-dire quadratiques) à travers l'épaisseur de la plaque. Bien que cet écart entre la variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales et l'état constant des contraintes de cisaillement prédit par la théorie des plaques de premier ordre ne puisse pas être corrigé dans les limites de la cinématique de la FSDT, les forces de cisaillement $\left(Q_x, Q_y\right)$peuvent, toute fois, être corrigées par l'application d'un facteur dit de correction du cisaillement K_s sur les intégrales des équations eq.3.32 :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} dz \qquad 3.33$$

Cela revient à modifier les rigidités transversales de cisaillement de la plaque. Le facteur K_s est calculé de telle sorte que l'énergie de déformation due aux contraintes transversales de cisaillement de la FSDT soit égale à l'énergie de déformation due aux contraintes transversales de cisaillement prédites par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle ou son équivalent.

A partir de l'équation eq.3.31 nous allons procéder par intégration par parties pour faire ressortir les déplacements virtuels généralisés dans $\left(\delta w_0, \delta\phi_x, \delta\phi_y\right)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} -\left(M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_x\right)\delta\phi_x - \left(M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_y\right)\delta\phi_y \\ -\left(Q_{x,x} + Q_{y,y} + q\right)\delta w_0 \end{bmatrix} dxdy \\ & + \oint_{\Gamma} \left(Q_n \delta w_0 + M_{nn}\delta\phi_n + M_{ns}\delta\phi_s\right) ds \end{aligned} \qquad 3.34$$

Où les conditions aux limites sont exprimées en ϕ_x et ϕ_y en termes des rotations normales et tangentielles $\left(\phi_n, \phi_s\right)$:

$$\phi_x = n_x\phi_n - n_y\phi_s \quad \text{et} \quad \phi_y = n_y\delta\phi_n + n_x\delta\phi_s \qquad 3.35$$

Donnant les équations d'équilibres suivantes :

$$\begin{aligned} \delta w_0 &: -\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) = q \\ \delta\phi_x &: -\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) + Q_x = 0 \\ \delta\phi_y &: -\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right) + Q_y = 0 \end{aligned} \qquad 3.36$$

$\left(w_0, \phi_n, \phi_s\right)$ sont considérés comme des variables principales et $\left(Q_n, M_{nn}, M_{ns}\right)$ comme secondaires avec :

$$Q_n = Q_x n_x - Q_y n_y \qquad 3.37$$

Les conditions aux limites consistent à spécifier chaque élément des paires suivantes :

$$\left(w_0, Q_n\right), \left(\phi_n, M_{nn}\right), \left(\phi_s, M_{ns}\right)$$

3.4.3.2 Équations constitutives des plaques

En supposant que le matériau de la plaque est isotrope et obéit à la loi de Hooke (C.M.Wang et al., 2000) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \qquad 3.38$$

Où E est le module de Young, ν est le ratio de Poisson. Le module de cisaillement est donné par $G = E / 2(1+\nu)$.

Les équations gouvernantes sont exprimées comme suite :

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz = D\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz = D\left(\nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \qquad 3.39$$

$$Q_x = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} z dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} z dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)}\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

3.4.3.3 Équations Gouvernantes :

L'équation d'équilibre eq.3.36 peut être reformuler en terme de déformation, ce qui donne (C.M.Wang et al., 2000) :

$$-\frac{K_s Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)=q(x,y) \qquad 3.40$$

$$-\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2}\right)-\frac{D(1+\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right)+\frac{K_s Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right)=0 \qquad 3.41$$

$$-\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}\right)-\frac{D(1+\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right)+\frac{K_s Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\right)=0 \qquad 3.42$$

Pour plus de simplicité :

$$(\mathrm{M})=\frac{M_{xx}+M_{yy}}{(1+\nu)}=D\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) \qquad 3.43$$

Nous obtenons alors :

$$-\frac{K_s Eh}{2(1+\nu)}\left(\nabla^2 w_0+\frac{(\mathrm{M})}{D}\right)=q(x,y) \qquad 3.44$$

$$-D(1-\nu)\nabla^2 \phi_x-(1+\nu)\frac{\partial(\mathrm{M})}{\partial x}+\frac{K_s Eh}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right)=0 \qquad 3.45$$

$$-D(1-\nu)\nabla^2 \phi_y-(1+\nu)\frac{\partial(\mathrm{M})}{\partial y}+\frac{K_s Eh}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\right)=0 \qquad 3.46$$

Les conditions aux limites communes pour la théorie de Mindlin (R.D.Mindlin, 1951) sont données ci-dessous :

i. Bord libre

$$Q_n = K_s G h\left(\phi_n + \frac{\partial w_0}{\partial n}\right) = 0$$

$$M_{nn} = D\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial \phi_s}{\partial s}\right) = 0 \qquad 3.47$$

$$M_{ns} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial s} + \frac{\partial \phi_s}{\partial n}\right) = 0$$

ii. Bord Simplement Appuyé

Nous avons deux configurations à considérer :

Le premier type(S) nommé appui simple double (hard simple support) donnant :

$$w_0 = 0,\ M_{nn} = 0,\ \phi_s = 0 \qquad 3.48.a$$

Le deuxième type(S*) désigné comme appui simple souple (soft simple support) impliquant :

$$w_0 = 0,\ M_{nn} = 0,\ M_{ns} = 0 \qquad 3.48.b$$

iii. Bord Encastré

Ce type de condition implique :

$$w_0 = 0,\ \phi_n = 0,\ \phi_s = 0 \qquad 3.49$$

3.4.4 Théorie des plaques de Troisième Ordre (TSDT).

3.4.4.1 Equations d'équilibres

A partir des équations eq.3.9 on obtient les déformations linéaires suivantes :

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \alpha z^3\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = z\frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \alpha z^3\left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$\varepsilon_{xy} = z\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) - \alpha z^3\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) \qquad 3.50$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \beta z^2\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{yz} = \left(1 - \beta z^2\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

Où $\alpha = 4/\left(3h^2\right)$ et $\beta = 4/h^2$

Les résultats de la substitution des déformations virtuelles et de leurs contraintes associées des équations eq.3.50a-e dans l'équation eq.3.30a, ainsi que celles donnée par δV de l'équation eq.3.30b sont injectés dans l'énoncé du principe des déplacements virtuels de l'équation eq.3.29 ce qui donne (C.M.Wang et al. 2000) :

$$\int_{\Omega_0}\left[\begin{array}{l} M_{xx}\dfrac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} + M_{yy}\dfrac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} + M_{xy}\left(\dfrac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta\phi_y}{\partial y}\right) \\ -\alpha P_{xx}\left(\dfrac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right) - \alpha P_{yy}\left(\dfrac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right) \\ -\alpha P_{xy}\left(\dfrac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta\phi_y}{\partial x} + 2\dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y}\right) \\ +\left(Q_x - \beta R_x\right)\left(\delta\phi_x + \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right) \\ +\left(Q_x - \beta R_x\right)\left(\delta\phi_y + \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial Y}\right) - q\delta w_0 \end{array}\right] dxdy = 0 \qquad 3.51$$

Où les $\left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)$ et $\left(Q_x, Q_y\right)$ représentent les moments et les efforts transversaux de cisaillement, sont les mêmes que ceux définis respectivement, par les équations eq.3.12 et eq.3.14 avec les facteurs de contraintes d'ordre élevés $\left(P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}\right)$ et $\left(R_x, R_y\right)$ sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz$$
$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz \qquad 3.52$$

En intégrant les expressions des équations eq.3.51 par parties, et en collectant les coefficients relatifs à $\delta\phi_x$, $\delta\phi_y$, δw_0 nous obtenons les équations d'équilibre, dites d'ordre élevé, suivantes :

$$-\left(\frac{\partial \hat{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial y}\right) + \hat{Q}_x = 0 \qquad 3.53a$$

$$-\left(\frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_{yy}}{\partial y}\right) + \hat{Q}_y = 0 \qquad 3.53b$$

$$-\left(\frac{\partial \hat{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{Q}_y}{\partial y}\right) - \alpha\left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2}\right) = q \qquad 3.53c$$

Où

$$\hat{M}_{\zeta\eta} = M_{\zeta\eta} - \alpha P_{\zeta\eta}$$
$$\hat{Q}_{\zeta} = Q_{\zeta\eta} - \alpha R_{\zeta} \qquad 3.54$$

Et

$$\zeta, \eta = x, y \,.$$

Les conditions aux limité donnent :

$$w_0 \text{ ou bien } Q_n$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} \text{ ou bien } P_{nn} \qquad 3.55$$

$$\phi_n \text{ ou bien } M_{nn}$$

$$\phi_{ns} \text{ ou bien } M_{ns} \qquad 3.56$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{nn} &= \hat{M}_{xx}\cos^2\theta - 2\hat{M}_{xy}\sin\theta\cos\theta - \hat{M}_{yy}\sin^2\theta \\ M_{ns} &= -\left(\hat{M}_{xx} - \hat{M}_{yy}\right)\sin\theta\cos\theta + \hat{M}_{xy}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta\right) \\ Q_n &= \hat{Q}_x\sin\theta - \hat{Q}_y\cos\theta - \frac{4}{3h^2}\frac{\partial P_{ns}}{\partial s} \end{aligned} \qquad 3.57$$

Dans cette théorie on notera, également, l'existence des forces d'angles similairement à la théorie classique CPT.

3.4.4.2 Équations constitutives des plaques

En remplaçant les relations contrainte/déformation de eq.3.38 dans les équations eq.3.12, eq.3.32 et eq.3.52 a et b, et eq.3.50 en utilisant les relations Déformation/déplacement des équations eq.3.50, il en résulte :

$$M_{xx} = \frac{4D}{5}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) - \frac{D}{5}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$P_{xx} = \frac{4h^2 D}{35}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) - \frac{h^2 D}{28}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{yy} = \frac{4D}{5}\left(\nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) - \frac{D}{5}\left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$P_{yy} = \frac{4h^2 D}{35}\left(\nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) - \frac{h^2 D}{28}\left(\nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{xy} = \frac{1-\nu}{2}\left[\frac{4D}{5}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) - \frac{D}{5}\left(2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right] \qquad 3.58$$

$$P_{xy} = \frac{1-\nu}{2}\left[\frac{4h^2 D}{35}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) - \frac{h^2 D}{28}\left(2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right]$$

$$Q_x = \frac{2hG}{3}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$R_x = \frac{h^3 G}{30}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$Q_y = \frac{2hG}{3}\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

$$R_y = \frac{h^3 G}{30}\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

Ces relations de moments, d'effort et de déviation peuvent être substituées dans les équations eq.3.53 pour exprimer les équations d'équilibre en termes de déplacements généralisés $\left(w_0, \phi_x, \phi_y\right)$.

3.4.5 Théorie des Plaques sandwich

L'objectif de ce paragraphe est de définir ou d'établir les équations relatives au comportement mécanique des plaques sandwich. Un matériau sandwich est composé d'un matériau de faible masse volumique représentant l'âme sur lequel on colle des feuilles ou plaques assez mince appelées peaux. La fonction essentielle de l'âme d'un sandwich est de transmettre par cisaillement les actions mécaniques d'une peau à l'autre (J.M.Berthelot, 2000).

Dans le cas général, les peaux sont des stratifiées d'épaisseur h_1 pour la peau inférieur est de h_2 pour celle supérieur tandis que l'épaisseur de l'âme aura pour notation h (Figure 3. 6).

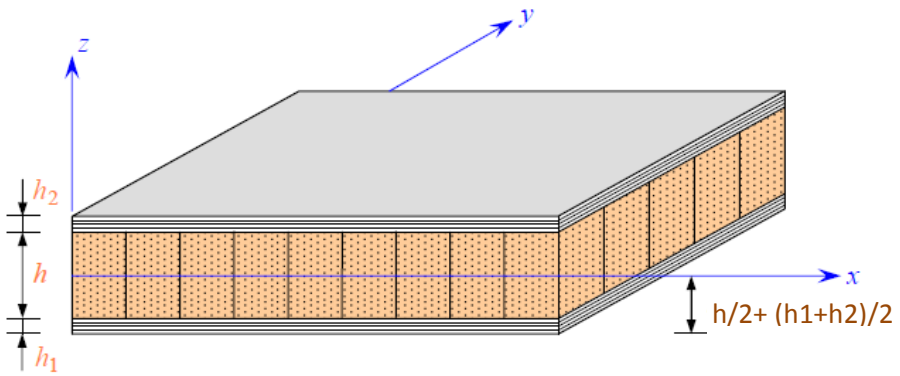


Fig. 3. 6. composition type d'un sandwich (J.M.Berthelot, 2000).

3.4.5.1 Champs de déformation et de contraintes

3.4.5.1.1 Hypothèse de la théorie des plaques sandwich

La théorie des plaques sandwiches repose sur les hypothèses (J.M.Berthelot, 2000) fondamentales suivantes :

i. L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux $h \gg h_1, h_2$.
ii. Les déplacements de l'âme u_a et v_a suivant les directions x et y sont exprimés en fonction de z .
iii. Les déplacements u et v suivant x et y sont uniformes dans l'épaisseur de la peau.
iv. Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z signifiant que ε_{zz} est à négliger.
v. L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} et σ_{yz} avec $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ et σ_{zz} sont à négliger.
vi. Dans les peaux, les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} et σ_{xz} sont à négliger.

Cette théorie s'intéresse essentiellement à des problèmes relatifs à l'élasticité de faibles déformations.

3.4.5.1.2 Détermination du champ de déplacement

L'hypothèse N°2 implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme tel que :

$$\begin{aligned} u_a(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_x(x,y) \\ v_a(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_y(x,y) \end{aligned} \qquad 3.59$$

Avec

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= u_a(x,y,0) \\ v_0(x,y) &= v_a(x,y,0) \end{aligned} \qquad 3.60$$

L'hypothèse 3 combinée à la continuité de déplacement entre âme et peaux donne ce qui suit :

- *Peau inférieur :*

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z) &= u_0(x,y) - \frac{h}{2}\phi_x(x,y) \\ v_1(x,y,z) &= v_0(x,y) - \frac{h}{2}\phi_y(x,y) \end{aligned} \qquad 3.61$$

- *Peau supérieur :*

$$\begin{aligned} u_2(x,y,z) &= u_0(x,y) + \frac{h}{2}\phi_x(x,y) \\ v_2(x,y,z) &= v_0(x,y) + \frac{h}{2}\phi_y(x,y) \end{aligned} \qquad 3.62$$

L'hypothèse 4 s'écrit :

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \qquad 3.63$$

La théorie des plaques sandwich (J.M.Berthelot, 2000) a donc pour objectif la détermination de cinq fonctions de déplacement et de rotation $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$.

3.4.5.1.3 Le champ de déformation

Pour la peau inférieure, le champ de déformation est inspiré de l'équation eq.3.61 donnant :

$$\varepsilon_{xx}^{1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^{1} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2}\frac{\partial \varphi y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}^{1} = 0$$

$$\gamma_{yz}^{1} = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad 3.64$$

$$\gamma_{xz}^{1} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}^{1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)$$

Les déformations dues au cisaillement transverse γ_{xz}^{1} et γ_{yz}^{1} dans la peau sont négligées pour donner place à un champ de déformation compact semblable à celui d'une membrane :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{1} \\ \varepsilon_{yy}^{1} \\ \gamma_{xy}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0} \\ \varepsilon_{yy}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} \end{bmatrix} - \frac{h}{2}\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad 3.65$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^{0} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \; ; \; \varepsilon_{yy}^{0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^{0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \qquad 3.66$$

$$K_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \; ; \; K_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \; ; \; K_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

En procédant de la même façon pour la peau supérieure, de l'équation eq.3.62 nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{2} \\ \varepsilon_{yy}^{2} \\ \gamma_{xy}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0} \\ \varepsilon_{yy}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

Concernant l'âme le champ est déduit de l'équation eq.3.59 pour donner :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{a} &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy}^{a} &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi y}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz}^{a} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{yz}^{a} &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\
\gamma_{xz}^{a} &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
\gamma_{xy}^{a} &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

L'écriture du champ de déformation est alors une superposition de deux champs de déformations :

- *Un champ de déformation d'une membrane en flexion :*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{a} \\ \varepsilon_{yy}^{a} \\ \gamma_{xy}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0} \\ \varepsilon_{yy}^{0} \\ \gamma_{xy}^{0} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

- *Un champ de déformation en cisaillement transverse :*

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{a} \\ \gamma_{xz}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

3.4.5.1.4 Le champ de contrainte

Suivant l'hypothèse 5 nous avons :

$$\sigma_{xx}^{a} = \sigma_{yy}^{a} = \sigma_{xy}^{a} = \sigma_{zz}^{a} = 0 \qquad 3.71$$

Il n'y a que les contraintes de cisaillement qui sont transmise par l'âme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^{a} \\ \sigma_{xz}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'^{a}_{44} & C'^{a}_{45} \\ C'^{a}_{45} & C'^{a}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{a} \\ \gamma_{xz}^{a} \end{bmatrix} \qquad 3.72$$

Où C'^{a}_{ij} (J.M.Berthelot 2000) sont fonction de C^{a}_{ij} rapportés par les axes principaux de l'âme comme suite :

$$\begin{aligned} C'^{a}_{44} &= C^{a}_{44}\cos^2\theta + C^{a}_{55}\sin^2\theta \\ C'^{a}_{45} &= \left(C^{a}_{55} - C^{a}_{44}\right)\sin\theta\cos\theta \\ C'^{a}_{55} &= C^{a}_{44}\sin^2\theta + C^{a}_{55}\cos^2\theta \end{aligned} \qquad 3.73$$

Où θ est l'angle formé par les axes principaux avec les axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients C^{a}_{ij} dans les axes principaux (J.M.Berthelot, 2000) s'expriment eux même en fonction des coefficients de cisaillement de l'âme, mesurés dans les axes principaux, selon :

$$C^{a}_{44} = C^{a}_{23} \; ; \; C^{a}_{55} = C^{a}_{13} \qquad 3.74$$

L'hypothèse 6 implique que les contraintes de cisaillement transversales sont nulles dans toutes les couches k de la peau inférieure ou supérieure :

$$\sigma_{xz}^{k} = \sigma_{yz}^{k} = 0 \qquad 3.75$$

Les autres contraintes sont déduites des déformations dans les peaux par la relation suivante (J.M.Berthelot, 2000) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{k} \\ \sigma_{yy}^{k} \\ \sigma_{xy}^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{i} \\ \varepsilon_{yy}^{i} \\ \varepsilon_{xy}^{i} \end{bmatrix} \; ; \; i = 1,2 \qquad 3.76$$

- *Peau inférieur : i=1*
- *Peau supérieur : i=2*

3.4.5.2 Relation fondamentales des plaques sandwich

3.4.5.2.1 Equation constitutive

L'équation constitutive des plaques sandwich fait intervenir les résultats et les moments déjà introduits par la théorie des stratifiés (J.M.Berthelot, 2000) :

- *Les résultantes en membrane :*

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \qquad 3.77$$

- *Les moments en flexion/torsion :*

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \qquad 3.78$$

- *Les résultantes en cisaillement :*

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz \qquad 3.79$$

En substituant les expressions des contraintes eq.3.72 à eq.3.76 dans les expressions précédentes des résultantes et moments, nous obtenons l'équation constitutive suivante (J.M.Berthelot, 2000) :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \qquad 3.80$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= \frac{h}{2}\left(A_{ij}^2 - A_{ij}^1\right) \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \\ D_{ij} &= \frac{h}{2}\left(C_{ij}^2 - C_{ij}^1\right) \end{aligned} \qquad 3.81$$

Et

$$A_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \left(Q'_{ij}\right)_k e_k \qquad 3.82$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} z\left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \left(Q'_{ij}\right)_k e_k z_k \qquad 3.83$$

$$A_{ij}^2 = \int_{h/2}^{(h/2+h_2)} \left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \left(Q'_{ij}\right)_k e_k \qquad 3.84$$

$$C_{ij}^2 = \int_{h/2}^{(h/2+h_2)} z\left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\left(Q'_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \left(Q'_{ij}\right)_k e_k z_k \qquad 3.85$$

$$F_{ij} = hC'^a_{ij} \qquad 3.86$$

Dans les expressions précédentes des coefficients de rigidité, n_1 et n_2 sont les nombres de couches respectivement pour la peau inférieure et supérieure et C'^a_{ij} sont des coefficients relatifs au cisaillement transverse de l'âme exprimés par l'équation eq.3.73.

L'équation constitutive eq.3.80 a une forme semblable à celle obtenue dans le cas de la théorie des stratifiés (J.M.Berthelot, 2000) avec cisaillement transverse. Elle en diffère par la présence des termes C_{ij} qui impliquent une dissymétrie de la matrice de rigidité. Comme développé dans la théorie des stratifiés avec cisaillement traverse (J.M.Berthelot 2000), les coefficients de rigidité F_{ij} sont parfois corrigés par des facteurs de correction k_{ij}, et remplacés par les paramétrés de cisaillement H_{ij} (J.M.Berthelot, 2000) :

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij} \qquad 3.87$$

Dans le cas des plaques sandwich symétriques, les peaux inférieure et supérieure sont identiques d'où :

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2 \;;\; C_{ij}^1 = -C_{ij}^2 \tag{3.88}$$

Il en résulté :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= 0 \\ C_{ij} &= 0 \\ D_{ij} &= hC_{ij}^2 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Dans le cas des plaques sandwich symétriques, il y a donc découplage des comportements en membrane et en flexion. L'équation constitutive prend alors une forme identique à l'équation constitutive des stratifiés symétriques avec cisaillement transverse.

3.4.5.2.2 Relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques sandwich sont obtenues en introduisant l'équation constitutive eq.3.80 dans les relations fondamentales des plaques (J.M.Berthelot, 2000) ce qui nous donne les trois premières équations fondamentales avec A_{ij}, B_{ij}, F_{ij} définis dans eq.3.81 et eq.3.86. Les deux dernières équations s'écrivent suivant :

$$\begin{aligned} &C_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2C_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + C_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + C_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ &+D_{11}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x\partial y} + D_{66}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \left(D_{12}+D_{66}\right)\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x\partial y} \\ &+D_{26}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55}\left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) - F_{45}\left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ &= R\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned} &C_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + C_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2C_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + C_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ &+D_{16}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \left(D_{12}+D_{66}\right)\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x\partial y} + D_{26}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x\partial y} \\ &+D_{22}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45}\left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) - F_{44}\left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ &= R\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Dans le cas des matériaux sandwiches symétriques, la forme des relations fondamentales est identique à celle des stratifiés symétriques avec cisaillement transverse. Il en résulte une identité du comportement mécanique entre les matériaux sandwiches symétriques et les stratifiés symétriques. Les deux comportements diffèrent uniquement par les expressions des coefficients A_{ij} , D_{ij} , F_{ij} . L'ensemble des analyses du comportement mécanique qui peuvent être développés sur les stratifiés symétriques avec cisaillement pourront donc être transposées aux plaques sandwiches symétriques (J.M.Berthelot, 2000).

Chapitre 04

Formulation Théorique

4.1 Formulation du problème

4.1.1 Configuration géométrique

Considérons le cas d'une plaque sandwich, à base de matériau à gradient évalué, rectangulaire à épaisseur uniforme composée de trois couches macroscopiquement hétérogènes faisant référence à des coordonnées rectangulaires (x, y, z) comme le montre la Figure 4.1.

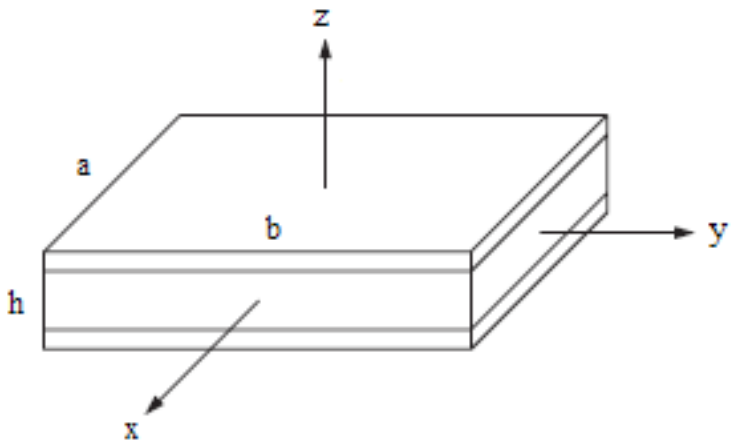


Fig. 4. 1. Géométrie de la plaque, sandwich FGM, rectangulaire d'épaisseur uniforme dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

Les faces ou peaux supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm\frac{h}{2}$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y. Les positions verticales du bas et du haut, et des deux interfaces entre les couches sont désignées respectivement par $h_1 = -{}^{h}/_{2}$, h_2 , h_3 , $h_4 = {}^{h}/_{2}$. Pour résumer, le rapport de l'épaisseur de chaque couche du bas vers le haut est indiqué par une combinaison de trois chiffres, c'est-à-dire, «2-1-2» pour cet exemple nous nous trouvons dans le cas d'une symétrie de deux peaux d'une même épaisseur ${}^{2h}/_{5}$ avec une âme d'une moitié de proportion par rapport à chacune des peaux donc d'une épaisseur d'âme de ${}^{h}/_{5}$ pour une épaisseur totale de la plaque de ${}^{5h}/_{5}$.

Comme le montre la Figure 4.2, deux configurations "types A" et "type B" sont considérées dans la présente étude :

- Type A : Peaux FGM et noyau homogène.
- Type B : Peaux homogène et noyau FGM.

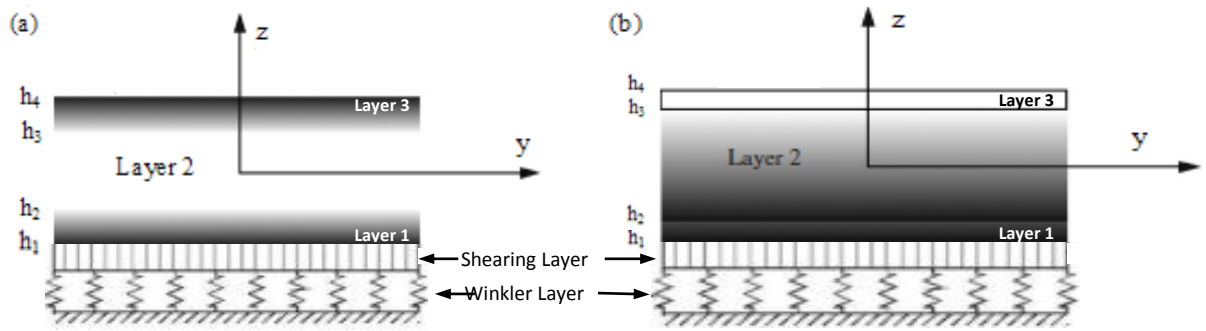


Fig. 4. 2. La variation de matériau à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FGM reposant sur une fondation élastique.

4.1.2 Propriétés du matériau

Une loi de mélange est couramment utilisée pour décrire les variations des propriétés d'un matériau à gradient évalué plus communément appelé FGM. Les structures sandwich constituées de deux types de matériau FGM utiliseront deux lois de mélange à la fois relatives à chacune des peaux et seront discutées comme suit :

4.1.2.1 Type A : Peaux FGM et noyau homogène

La fraction volumique des matériaux à gradient évalués est supposée obéir à une loi fonction à travers l'épaisseur :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^k, \quad z \in [h_1, h_2]$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \qquad 4.1$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z-h_4}{h_3-h_4}\right)^k, \quad z \in [h_3, h_4]$$

Où $V^{(n)}$, $(n=1,2,3)$ est la fonction de la fraction volumique de la couche n, k est l'indice de la fraction volumique $(0 \le k \le +\infty)$, qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur.

4.1.2.2 Type B : Peaux homogène et noyau FGM

La fraction volumique des MGF est supposée obéir à une loi de mélange à travers l'épaisseur :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^{(1)} &= 0, \quad \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2] \\ \boldsymbol{V}^{(2)} &= \left(\frac{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}_2}{\boldsymbol{h}_3 - \boldsymbol{h}_2} \right)^{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3] \\ \boldsymbol{V}^{(3)} &= 1, \quad \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{h}_3, \boldsymbol{h}_4] \end{aligned} \qquad 4.2$$

$V^{(n)}$ et k ont déjà été définis précédemment.

Les propriétés matériaux de la plaque sandwich FGM à savoir le module de Young E, le coefficient de Poisson ν et la masse volumique ρ, sont déterminées en utilisant la loi du mélange (P.R.Marur 1999) comme suite :

$$\boldsymbol{P}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{P}_2 + (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)\boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{n})} \qquad 4.3$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n. Pour le type A, P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, et vice versa pour la couche 3 en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ avec $n = 1,2,3$; Pour le type B, P_1 et P_2 sont les propriétés de la couche 3 et de la couche 1, respectivement.

Ces deux types de plaques sandwiches FGM seront discutées plus loin. Pour simplifier, le coefficient de Poisson est supposé être d'une valeur constante sur toute l'épaisseur de la plaque (F.Erdogan, 1983).

4.1.3 Une nouvelle théorie à cinq variables raffinées Présentée

4.1.3.1 Hypothèses de base et cinématique

Le champ de déplacement de la présente théorie est basé sur les hypothèses suivantes :

1. Les déplacements transversaux sont divisés en composantes de flexion, de cisaillement et d'étirement de l'épaisseur ;
2. Le déplacement dans le plan est divisé en composantes d'extension (translation), de flexion et de cisaillement ;
3. Les parties des déplacements dans le plan dues à la flexion seront similaires à celles données par la théorie classique des plaques (CPT) ;
4. Les parties des déplacements dans le plan dues au cisaillement donnent lieu à des variations hyperboliques des déformations du cisaillement et donc aux contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement disparaissent ou s'annulent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Sur la base de ces hypothèses, on peut obtenir le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_b(x,y,t) + w_s(x,y,t) + g(z)\,\varphi_z(x,y,t) \end{aligned} \qquad 4.4$$

Où u_0 et v_0 désignent les déplacements suivant les coordonnées x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque, w_b et w_s sont les composantes du déplacement transversal, relative respectivement, à la flexion et au cisaillement, ϕ_z est le déplacement supplémentaire induit par l'effet de la contrainte normale (effet d'étirement de l'épaisseur). Les fonctions de forme $f(z)$ et $g(z)$ sont données comme suit :

$$f(z) = z\left[1 + \frac{3\pi}{2}\sec h^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{3\pi}{2}h\tanh\left(\frac{z}{h}\right) \qquad 4.5$$

et

$$g(z) = 1 - f'(z) \qquad 4.6$$

4.1.3.2 Equations constitutives

Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation eq.4.4 sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \;\; ; \;\; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \;\; ; \;\; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \;\; ; \;\; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \;\; ; \;\; \varepsilon_z = g'(z)\, \varepsilon_z^0 \qquad 4.7$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_s}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w_s}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \qquad 4.8$$

$$\varepsilon_z^0 = \phi_z$$

Et $$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz}$$

Pour les matériaux à gradient évalués (FGM) élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad 4.9$$

Où (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy}) et (ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{xz}, γ_{xy}) sont les composantes respectives de la contrainte et de la déformation.

Le calcul des constantes élastiques C_{ij} dépend de l'hypothèse que nous considérons. Si $\varepsilon_z = 0$ alors C_{ij} sont les constants élastiques réduits relatifs aux contraintes planes :

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2},\ C_{12} = \nu C_{11} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \qquad 4.10$$

Si $\varepsilon_z \neq 0$ (étirement de l'épaisseur), donc C_{ij} représente les constantes élastiques tridimensionnelles données par :

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu}\lambda(z),\ C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \qquad 4.11$$

Où $\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ et $\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$ sont les coefficients de Lamé.

Les modules E , G et les coefficients élastiques C_{ij} varient à travers l'épaisseur suivant l'équation eq.4.3.

4.1.3.3 Equations gouvernantes

En considérant le principe de Hamilton, on peut obtenir les expressions suivantes (J.N.Reddy, 2002) :

$$0 = \int_0^T \left(\delta U + \delta U_{FE} - \delta T\right) dt \qquad 4.12$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation, δU_{FE} est celle relative à l'effet des fondations élastique et δT est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque δU est donnée par la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \delta\, U &= \int_V \left[\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \Big[N_x \delta\varepsilon_x^0 + N_y \delta\varepsilon_y^0 + N_z \delta\varepsilon_z^0 + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta\gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta\gamma_{xz}^0 + f_e \delta w_b \Big]\, dA = 0 \end{aligned} \qquad 4.13$$

Où A est la surface supérieure, avec N, M et S les contraintes résultantes définis comme suite :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right)^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz,$$

$$N_z = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_z)^{(n)} g'(z) dz, \qquad 4.14$$

$$\left(S_{xz}^s, S_{yz}^s\right) = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right)^{(n)} g(z) dz.$$

$$f_e = K_0 w_b - K_1 \nabla^2 w_b$$

Où h_{n+1} et h_n sont les coordonnées z supérieure et inférieure de la énième couche et f_e représente la densité de réaction à la déformation pour un modèle de Winkler/Pasternak, pour un modèle de Winkler K_1 s'annulera.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite de la sorte :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V \left[\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}\right] \rho(z)\, dV \\ &= \int_A \Big\{ I_0 \left[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s\right)\left(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s\right)\right] \\ &- I_1\left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\delta\dot{v}_0\right) \\ &- J_1\left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\delta\dot{v}_0\right) \qquad 4.15 \\ &+ I_2\left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y}\right) + K_2\left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y}\right) \\ &+ J_2\left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y}\right) \\ &+ J_1^{st}\left(\left(\dot{w}_b + \dot{w}_s\right)\delta\dot{\phi}_z + \dot{\phi}_z\,\delta\left(\dot{w}_b + \dot{w}_s\right)\right) + K_2^{st}\dot{\phi}_z\,\delta\dot{\phi}_z \Big\} dA \end{aligned}$$

Où la convention de l'exposant point indique la dérivation par rapport à la variable temps t, $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation eq.4.3 et (I_0, I_1, J_1, J_1^{st}, I_2, J_2, K_2, K_2^{st}) sont des inerties de masse définies comme suit :

$$\left(I_0, I_1, J_1, J_1^{st}, I_2, J_2, K_2, K_2^{st}\right) = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \left(1, z, f, g, z^2, z f, f^2, g^2\right) \rho(z) dz \qquad 4.16$$

Les équations du mouvement sont dérivées de l'équation eq.4.12 en intégrant les gradients de déplacement par parties et en rassemblons séparément les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ ainsi que $\delta\phi_z$ et en les égalons à zéro. Les équations obtenues sont les suivantes :

$$\delta u_0: \quad \frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\ddot{u}_0-I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x}-J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}$$

$$\delta v_0: \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=I_0\ddot{v}_0-I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y}-J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}$$

$$\delta w_b: \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2}+K_0 w_b-K_1\nabla^2 w_b=I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right)+I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right)-I_2\nabla^2\ddot{w}_b-J_2\nabla^2\ddot{w}_s+J_1^{st}\ddot{\phi}_z \qquad 4.17$$

$$\delta w_s: \quad \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2}+\frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x}+\frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y}=I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right)+J_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right)-J_2\nabla^2\ddot{w}_b-K_2\nabla^2\ddot{w}_s+J_1^{st}\ddot{\phi}_z$$

$$\delta\phi_z: \quad \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x}+\frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y}-N_z=J_1^{st}\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right)+K_2^{st}\ddot{\phi}_z$$

En substituant les relations contrainte/déformation dans les définitions des forces et des moments résultantes des équations eq.4.14, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} L \\ L^s \\ R \end{bmatrix}\varepsilon_z^0, \quad S=A^s\gamma \qquad 4.18$$

$$N_z=R^s\phi+L\left(\varepsilon_x^0+\varepsilon_y^0\right)+L^s\left(k_x^b+k_y^b\right)+R\left(k_x^s+k_y^s\right),$$

Où :

$$N=\left\{N_x,N_y,N_{xy}\right\}, \quad M^b=\left\{M_x^b,M_y^b,M_{xy}^b\right\}, \quad M^s=\left\{M_x^s,M_y^s,M_{xy}^s\right\}$$

$$\varepsilon=\left\{\varepsilon_x^0,\varepsilon_y^0,\gamma_{xy}^0\right\}, \quad k^b=\left\{k_x^b,k_y^b,k_{xy}^b\right\}, \quad k^s=\left\{k_x^s,k_y^s,k_{xy}^s\right\}$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$B^s=\begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s=\begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s=\begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \qquad 4.19$$

$$S=\left\{S_{xz}^s,S_{yz}^s\right\}, \quad \gamma=\left\{\overset{0}{\gamma}_{xz},\overset{0}{\gamma}_{yz}\right\}, \quad A^s=\begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^s \\ R \\ R^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z)\dfrac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z)dz$$

Avec A_{ij} et B_{ij} et ..., etc., sont les coefficients de rigidité définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \lambda(z)\left(1, z, z^2, f(z), z\,f(z), f^2(z)\right) \begin{Bmatrix} \dfrac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \dfrac{1-2\ \nu}{2\ \nu} \end{Bmatrix} dz \qquad 4.20$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s\right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s\right)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^{3} \int_{h_n}^{h_{n+1}} \mu(z)\left[g(z)\right]^2 dz,$$

En substituant l'équation eq.4.18 dans l'équation eq.4.17, les équations de mouvements peuvent être exprimer en terme de déplacement ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s, \delta\phi_z$) comme suite :

$$\begin{aligned}
&A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + \left(A_{12}+A_{66}\right)d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{122}w_b \\
&\quad - \left(B_{12}^s + 2B_{66}^s\right)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s + Ld_1\phi = I_0\ddot{u}_0 - I_1 d_1\ddot{w}_b - J_1 d_1\ddot{w}_s, \\
&A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + \left(A_{12}+A_{66}\right)d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{112}w_b \\
&\quad - \left(B_{12}^s + 2B_{66}^s\right)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s + Ld_2\phi = I_0\ddot{v}_0 - I_1 d_2\ddot{w}_b - J_1 d_2\ddot{w}_s, \\
&B_{11}d_{111}u_0 + \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{122}u_0 + \left(B_{12}+2B_{66}\right)d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2\left(D_{12}+2D_{66}\right)d_{1122}w_b \\
&\quad - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2\left(D_{12}^s + 2D_{66}^s\right)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s + L^s\left(d_{11}\phi_z + d_{22}\phi_z\right) + K_0 + K_1(\lambda^2+\mu^2) = I_0\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) \\
&\quad + I_1\left(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0\right) - I_2\left(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_b\right) - J_2\left(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s\right) + J_1^{st}\ddot{\phi}_z \qquad 4.21 \\
&B_{11}^s d_{111}u_0 + \left(B_{12}^s + 2B_{66}^s\right)d_{122}u_0 + \left(B_{12}^s + 2B_{66}^s\right)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2\left(D_{12}^s + 2D_{66}^s\right)d_{1122}w_b \\
&\quad - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2\left(H_{12}^s + 2H_{66}^s\right)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{44}^s d_{11}w_s + A_{55}^s d_{22}w_s \\
&\quad + R\left(d_{11}\phi_z + d_{22}\phi_z\right) + A_{44}^s d_{11}\phi_z + A_{55}^s d_{22}\phi_z = I_0\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + J_1\left(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0\right) - J_2\left(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_b\right) \\
&\quad - K_2\left(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s\right) + J_1^{st}\ddot{\phi}_z \\
&L\left(d_1u_0 + d_2v_0\right) - L^s\left(d_{11}w_b + d_{22}w_b\right) - \left(R + A_{44}^s\right)d_{11}w_s - \left(R + A_{55}^s\right)d_{22}w_s \\
&-A_{44}^s d_{11}\phi_z - A_{55}^s d_{22}\phi_z + R^s\phi_z = J_1^{st}\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + K_2^{st}\ddot{\phi}_z
\end{aligned}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ , \ d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \ , \ d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \ , \ d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ (i, j, l, m = 1,2). \qquad 4.22$$

4.1.4 Solution exacte pour une plaque sandwich FGM simplement appuyée

La technique de la solution de Navier utilisant la double série de Fourier est adoptée pour résoudre les équations du mouvement pour une vibration libre de la plaque sandwich FGM. Les conditions aux limites pour un diaphragme (membrane) plaque FGM simplement appuyée sont :

$$\begin{aligned} v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \phi_z = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \ \underline{\text{à}} \ \ x = 0, \ \ a \\ u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \phi_z = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \ \underline{\text{à}} \ \ y = 0, \ \ b \end{aligned} \qquad 4.23$$

La forme de solution pour u_0 , v_0 , w_b , w_s et ϕ_z qui satisfait aux conditions aux limites données par l'équation eq.4.23 est développée en double série de Fourier comme suite :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \qquad 4.24$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} et Φ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée à (m , n)ième mode propre avec $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$.

En remplaçant l'expression eq.4.24 dans l'équation gouvernante eq.4.21, une solution concentrée peut être obtenue de la forme suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad 4.25$$

Dans laquelle :

$$a_{11} = -\left(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2\right)$$
$$a_{12} = -\lambda\,\mu\left(A_{12} + A_{66}\right)$$
$$a_{13} = \lambda\left[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\,\mu^2\right]$$
$$a_{14} = \lambda\left[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\,\mu^2\right]$$
$$a_{15} = L\lambda$$
$$a_{22} = -\left(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2\right)$$
$$a_{23} = \mu\left[(B_{12} + 2B_{66})\,\lambda^2 + B_{22}\mu^2\right]$$
$$a_{24} = \mu\left[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\,\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2\right]$$
$$a_{25} = L\mu$$
$$a_{33} = -\left(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4\right) + K_0 + K_1(\lambda^2 + \mu^2)$$
$$a_{34} = -\left(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\,\mu^2 + D_{22}^s\,\mu^4\right)$$
$$a_{35} = -L^s\left(\lambda^2 + \mu^2\right) \qquad 4.26$$
$$a_{44} = -\left(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2\right)$$
$$a_{45} = -\left[A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R\left(\lambda^2 + \mu^2\right)\right]$$
$$a_{55} = -\left(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R^s\right)$$

$$m_{11} = m_{22} = -I_0$$
$$m_{33} = -\left[I_0 + I_2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)\right],$$
$$m_{44} = -\left[I_0 + K_2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)\right]$$
$$m_{55} = -K_2^{st}$$
$$m_{13} = \lambda I_1 \;;\; m_{14} = \lambda J_1$$
$$m_{23} = \mu I_1 \;;\; m_{24} = \mu J_1$$
$$m_{34} = -\left[I_0 + J_2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)\right] \;;\; m_{35} = m_{45} = -J_1^{st}$$

Chapitre 05

Résultats et Discussion

5.1 Résultats numériques et discussion

Dans cette section, un certain nombre d'exemples numériques sont analysés, par comparaison, afin de vérifier l'exactitude et la véracité de la théorie proposée dans l'investigation des fréquences propres courbes des plaques sandwich FGM simplement appuyées. La panoplie des matériaux choisis inclus l'aluminium et l'alumine. Pour simplifier, le coefficient de Poisson des deux matériaux est affecté de la même valeur. Les valeurs typiques pour le métal et la céramique utilisés dans la plaque sandwich FGM sont prises comme suit :

- La Céramique (P_1 : Alumina, Al_2O_3) : $E_c = 380$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 3800$ kg/m^3.
- Le Métal (P_2 : Aluminium, Al) : $E_m = 70$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho_m = 2707$ kg/m^3.

Pour faire plus simple, le paramètre de fréquence propre non-dimensionnelle est défini comme :

$$\overline{\varpi} = \frac{\varpi\, b^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \qquad 5.1$$

Avec

$\rho_0 = 1\ \text{kg/m}^3,\ E_0 = 1\ \text{GPa}$

Les résultats des plaques sandwich FGM obéissant à une loi de puissance de type A avec six distributions de matériaux sont comparés dans le **tableau 5.1** avec les résultats obtenus par la théorie d'élasticité linéaire tridimensionnelle des travaux de Li et al.(Q.Li et al., 2008). Le module de Young E et la masse volumique ρ sont basés sur la loi de puissance de l'équation eq.4.3. **Le tableau 5.1** dénote un bon accord par des comparaisons, d'un échantillon de plaques FGM de cinq indices de fraction volumique différents, entre les résultats obtenus dans le cadre de notre travail et celles de la théorie d'élasticité linéaire tridimensionnelle de ses auteurs Li et al.

Tableau 5. 1 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque FGM carré simplement appuyée obéissant à une loi de puissance de type A avec les résultats de l'élasticité tridimensionnelles ($h/b = 0.1$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Elasticity (Li et al., 2008)	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.82854	1.82854	1.82854	1.82854	1.82854	1.82854
0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.44614	1.48608	1.50841	1.52131	1.54926	1.57668
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.44753	1.48743	1.51093	1.52261	1.55146	1.57798
1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.24470	1.30181	1.33511	1.35523	1.39763	1.44137
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.24613	1.30313	1.33940	1.35641	1.40103	1.44251
5	Elasticity (Li et al., 2008)	0.94476	0.98103	1.02942	1.04532	1.10983	1.17567
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.94834	0.98434	1.04201	1.04734	1.11900	1.17680
10	Elasticity (Li et al., 2008)	0.92727	0.94078	0.98929	0.99523	1.06104	1.12466
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.93066	0.94532	1.00428	0.99809	1.07233	1.12594

Les comparaisons données dans les tableaux 5.2 et 5.3 pour des plaques sandwich FGM de type A alternant noyau homogènes de type dure (hardcore) et à noyau homogène souple (softcore) :

vii. **Le tableau 5.2** consacré à la première configuration dans lequel le module de Young et la masse volumique de la **couche 1** sont $E_c = 380$ GPa et $\rho_c = 3800\,\text{kg/m}^3$ (P_1 alumine) sur la face supérieure et $E_m = 70Gpa$ et $\rho_m = 2707kg/m^3$ (P_2 aluminium) sur la face inférieure.

viii. **Le tableau 5.3** dédié à la deuxième configuration dans lequel le module de Young et la densité de masse de la **couche 1** sont $E_m = 70Gpa$ et $\rho_m = 2707kg/m^3$ (P_1 aluminium) sur la face supérieure et $E_c = 380Gpa$ et $\rho_c = 3800kg/m^3$ (P_2 alumine) sur la face inférieure.

Pour ces deux cas de figures, trois rapports d'épaisseur ($h/b = 0.01,\ 0.1$ et 0.2) avec cinq indices de fraction volumique ($k = 0,\ 0.5,\ 1,\ 5$ et 10) sont à considérer.

D'après les résultats présentés dans les **tableaux 5.2** et **5.3**, on peut voir que les fréquences propres obtenues à l'aide de notre nouvelle théorie raffinées, proposée à cinq variables de cette étude, montrent un accord satisfaisant avec ceux obtenus par Li, Iu et Kou (Q.Li et al., 2008) en utilisant une solution analytique tridimensionnelle. Il est à noter que la solution de Li et al. (Q.Li et al., 2008) basée sur la méthode de Ritz en conjonction avec les séries polynomiales de Chebhyshev.

Tableau 5. 2 : Comparaison des fréquences propres $\bar{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée à noyau homogènes de type dure (hardcore).

b/h	*k*	Theory	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1
5	0	Elasticity (Li et al., 2008)	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.67949	1.67949	1.67949	1.67949	1.67949	1.67949
	0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.35358	1.39053	1.42178	1.44535	1.46940	1.58186
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.35550	1.39233	1.42341	1.44770	1.47099	1.58364
	1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.17485	1.22915	1.27770	1.31434	1.35341	1.53142
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.17714	1.23102	1.27915	1.31762	1.35477	1.53308
	5	Elasticity (Li et al., 2008)	0.89086	0.93362	0.99798	1.05607	1.11900	1.42845
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.90043	0.94202	1.00204	1.06611	1.12046	1.43019
	10	Elasticity (Li et al., 2008)	0.86833	0.89228	0.94984	1.00949	1.07290	1.40568
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.87740	0.90488	0.95657	1.02325	1.07462	1.40746
10	0	Elasticity (Li et al., 2008)	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.82854	1.82854	1.82854	1.82854	1.82854	1.82854
	0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.44614	1.48608	1.52131	1.54926	1.57668	1.71130
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.44752	1.48743	1.52261	1.55146	1.57798	1.71270
	1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.24470	1.30181	1.35523	1.39763	1.44137	1.65113
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.24613	1.30313	1.35641	1.40103	1.44251	1.65241
	5	Elasticity (Li et al., 2008)	0.94476	0.98103	1.04532	1.10983	1.17567	1.52993
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.94834	0.98434	1.04734	1.11900	1.17680	1.53108
	10	Elasticity (Li et al., 2008)	0.92727	0.94078	0.99523	1.06104	1.12466	1.50333
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.93066	0.94532	0.99809	1.07233	1.12594	1.50447
100	0	Elasticity (Li et al., 2008)	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.88978	1.88978	1.88978	1.88978	1.88978	1.88978
	0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.48244	1.52355	1.56046	1.59031	1.61915	1.76357
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.48359	1.52473	1.56164	1.59246	1.62035	1.76483
	1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.27158	1.32974	1.38511	1.42992	1.47558	1.69906
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.27260	1.33079	1.38617	1.43337	1.47663	1.70019
	5	Elasticity (Li et al., 2008)	0.96563	0.99903	1.06309	1.13020	1.19699	1.56988
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.96654	1.00008	1.06419	1.13887	1.19799	1.57078
	10	Elasticity (Li et al., 2008)	0.95042	0.95934	1.01237	1.08065	1.14408	1.54164
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.95125	0.96035	1.01348	1.09070	1.14512	1.54252

Tableau 5. 3 : Comparaison des fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée à noyau homogènes de type souple (softcore).

b/h	*k*	Theory	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1
5	0	Elasticity (Li et al., 2008)	0.85286	0.85286	0.85286	0.85286	0.85286	0.85286
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.85405	0.85405	0.85405	0.85405	0.85405	0.85405
	0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.37894	1.32061	1.28053	1.24533	1.22580	1.07016
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.38705	1.33135	1.28870	1.25633	1.22900	1.07392
	1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.50896	1.43325	1.38242	1.34203	1.32129	1.14451
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.52228	1.45789	1.40502	1.36784	1.33098	1.14915
	5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.65868	1.58011	1.50284	1.46009	1.42665	1.25210
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.66617	1.62175	1.56685	1.52684	1.47337	1.25701
	10	Elasticity (Li et al., 2008)	1.67278	1.60909	1.52671	1.48306	1.44101	1.27065
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.67657	1.64422	1.59421	1.55459	1.49998	1.27540
10	0	Elasticity (Li et al., 2008)	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.92984	0.92984	0.92984	0.92984	0.92984	0.92984
	0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.57352	1.52588	1.48459	1.43419	1.41662	1.20553
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.57747	1.53099	1.48861	1.44124	1.41845	1.20736
	1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.72227	1.67437	1.63053	1.57037	1.55788	1.30825
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.72835	1.68553	1.64102	1.58470	1.56265	1.31039
	5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.84198	1.82611	1.78956	1.72726	1.72670	1.46647
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.84565	1.84390	1.81826	1.75986	1.74869	1.46874
	10	Elasticity (Li et al., 2008)	1.84020	1.83987	1.80813	1.74779	1.74811	1.49481
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.84249	1.85468	1.83794	1.78200	1.77574	1.49704
100	0	Elasticity (Li et al., 2008)	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.96097	0.96099	0.96099	0.96099	0.96099	0.96099
	0.5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.66281	1.62291	1.58171	1.52277	1.50658	1.26557
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.66400	1.62403	1.58275	1.52702	1.50751	1.26654
	1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.82031	1.79163	1.75379	1.68184	1.67490	1.38331
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.82163	1.79291	1.75497	1.68761	1.67588	1.38427
	5	Elasticity (Li et al., 2008)	1.92090	1.94313	1.93623	1.86207	1.88530	1.57035
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.92240	1.94471	1.93781	1.86908	1.88657	1.57122
	10	Elasticity (Li et al., 2008)	1.91064	1.94687	1.95044	1.88042	1.91162	1.60457
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.91215	1.94847	1.95210	1.88725	1.91301	1.60542

Le tableau 5.4 donne les résultats pour une plaque FGM à loi de puissance de type B avec fraction de volume 1-8-1. P_1 renvoi aux propriétés de l'aluminium alors que P_2 à celles de l'alumine. Dans ce cas, le noyau FGM est riche en métal sur la face supérieure et en céramique sur la face inférieure. Trois rapports d'épaisseur à savoir (0,01, 0,1 et 0,2) sont à considérer et cinq indices de fraction volumique (0,5, 1, 2, 5 et 10). Le tableau 5.4 montre que les résultats de Li et al. (Q.Li et al., 2008) pour les plaques sandwiches FGM avec le noyau FGM sont en bon accord avec la nouvelle théorie raffinée à cinq variables proposée dans ce cadre.

Tableau 5. 4 : Comparaison des fréquences propres $\bar{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM carré simplement appuyée à noyau FGM.

h/b	Theories	*k*				
		0.5	**1**	**2**	**5**	**10**
0.01	Elasticity (Li et al., 2008)	1.33931	1.38669	1.44491	1.53143	1.59105
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.37037	1.41683	1.46949	1.54619	1.60053
0.1	Elasticity (Li et al., 2008)	1.29751	1.34847	1.40828	1.49309	1.54980
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.32632	1.37659	1.43126	1.50707	1.55914
0.2	Elasticity (Li et al., 2008)	1.19580	1.25338	1.31569	1.39567	1.44540
	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	1.21927	1.27663	1.33488	1.40808	1.45450

D'après les résultats présentés dans les tableaux 5.1 à 5.4, on constate que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique pour le type A avec un hardcore homogène et que les fréquences propres diminuent avec la diminution de l'indice de fraction volumique pour la plaque sandwich FGM de type B et de Type A avec noyau souple (softcore) homogène. Ceci peut être attribué à la diminution de la rigidité du matériau. De plus, les plaques minces sont légèrement plus sensibles que les plaques épaisses à la variation de la rigidité du matériau.

La Figue. 5.1 présente la variation des fréquences propres relative au changement des rapports de distribution à travers l'épaisseur pour des sandwich à loi de distribution de Type A à noyau homogène dure alors que la Figue. 5.2 représente, pour les même configurations, les courbes pour des plaques sandwich FGM d'une loi de puissance de même type A mais avec un noyau souple. Il est démontré que les résultats sont nettement supérieurs pour des plaques à noyau céramique en comparaison avec celle avec un noyau métal. L'évolution des résultats suit sensiblement l'augmentation de la proportion en céramique. Il est également démontré une influence de l'indice $\boldsymbol{k}$ nettement plus grande sur les sandwiches avec un noyau dure que ceux à noyau souple.

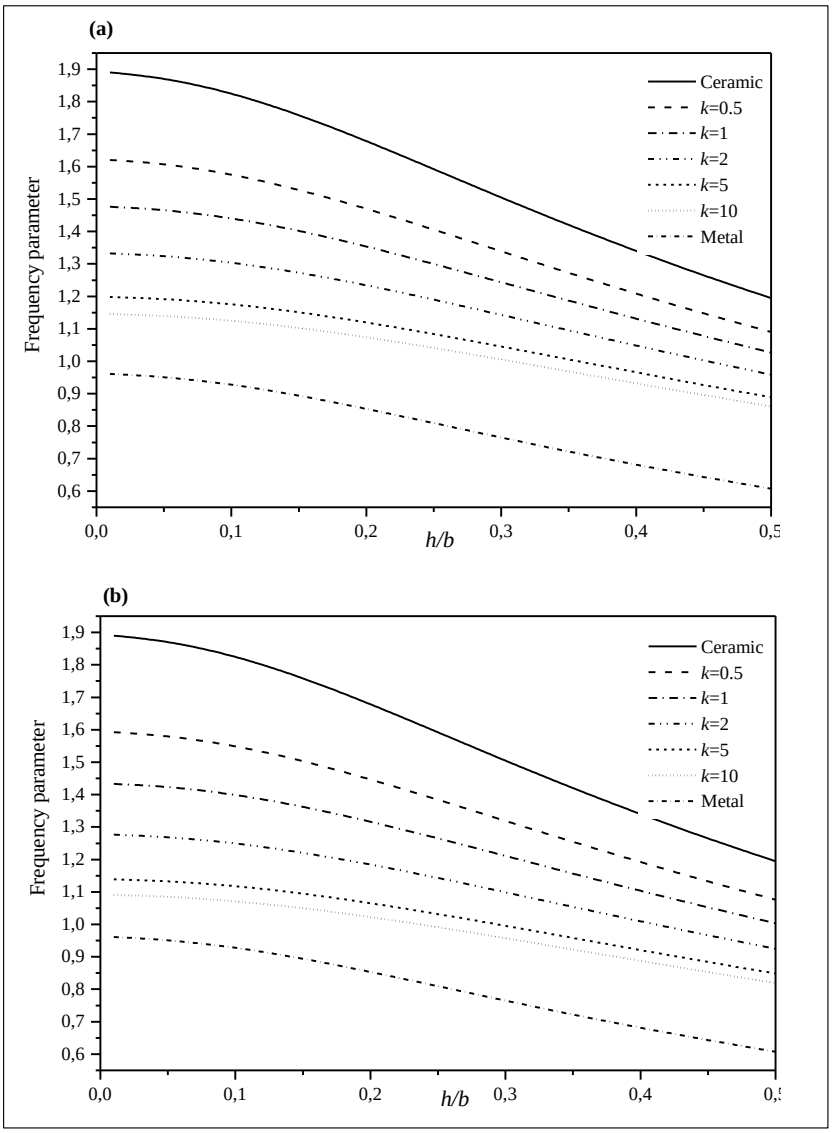


Fig. 5. 1. Fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM à noyau homogènes de type dure (hardcore).
(a) Plaque sandwich FGM 1-2-1 **(b)** Plaque sandwich FGM 2-2-1

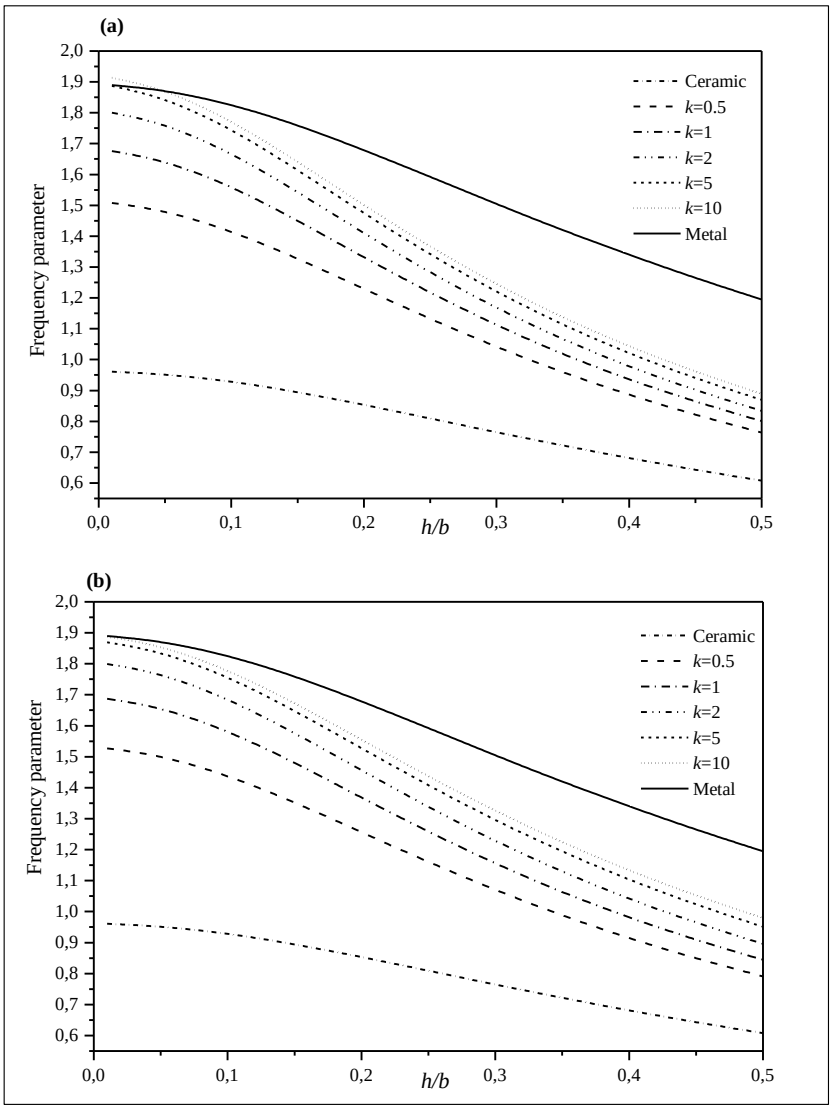


Fig.5. 2. Fréquences propres $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM à noyau homogènes de type souple (softcore).
(a) Plaque sandwich FGM 1-2-1 **(b)** Plaque sandwich FGM 2-2-1

Afin de pouvoir apprécier la véracité de notre nouvelle théorie, les résultats du Tableau 5. 5 regroupant ceux obtenus à partir de la nouvelle théorie raffinée à cinq variables proposée pour le cas d'une plaque FGM posée sur une fondation élastique avec les résultats d'autres études ultérieures à savoir celles d'Akhavan et al (2009), d'Ait Atman et al (2010) et de M.Sekkal et al. (2015), sous différentes configuration, en faisant varier le rapport de géométrie ***a/h*** ainsi que les valeurs paramètres K_0 et K_1 relatifs à la fondation élastique a permis de les confronter pour donner une concordance entre les résultats assez satisfaisante pouvant attester du bien fondée de notre approche.

Tableau 5. 5 : Comparaison des fréquences propres $\bar{\omega}$ d'une plaque FGM carré posée sur fondation élastique.

h/a	K0, K1	Théories			
		Akhavan et al.	H. Ait Atmane	M.Sekkal et al	Present
0,001	0, 0	19,7391	19,7392	19,7391	19.7391
	100, 10	26,2112	26,2112	26,2112	26.2111
	1000, 100	57,9961	57,9962	57,9961	57.9961
0,1	0, 0	19,0840	19,0658	19,0786	19.0657
	100, 10	25,6368	25,6236	25,6328	25.6235
	1000, 100	57,3969	57,3923	57,3955	57.3922
0,2	0, 0	17,5055	17,4531	17,4899	17.4540
	100, 10	24,3074	24,2728	24,2971	24.2733
	1000, 100	56,0359	56,0311	56,0345	56.0311

Dans les figures suivantes Fig.5.3 et Fig.5.4 on remarque qu'avec un ration dimensionnel **a/h=10** associé à un indice matière P changeant entre 0 et 20 et en fixant l'un et faisant varier l'autre, tour à tour les indices K_0 et K_1 relatifs à la fondation élastiques, on remarque l'augmentation de la fréquence propre témoignant d'une augmentation de la rigidité de la plaque induite par fondation élastique.

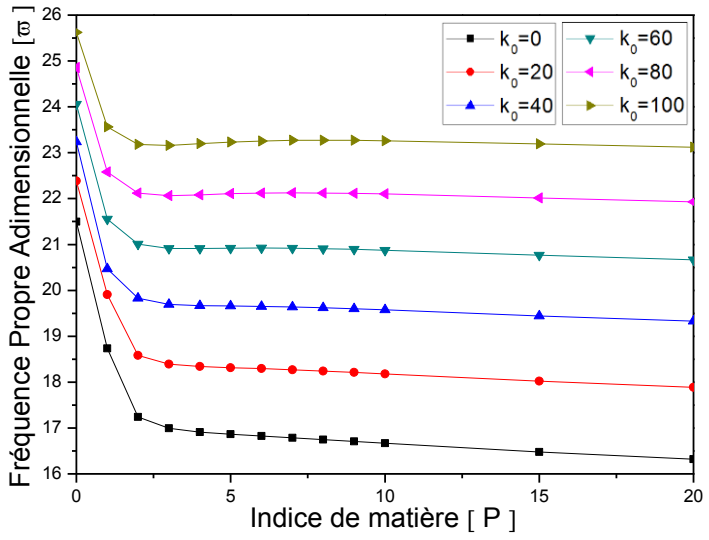


Fig.5. 3 Influence de l'indice matériel P sur la fréquence propre $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM posée sur fondation élastique. K_1=10 et K_0 variable.

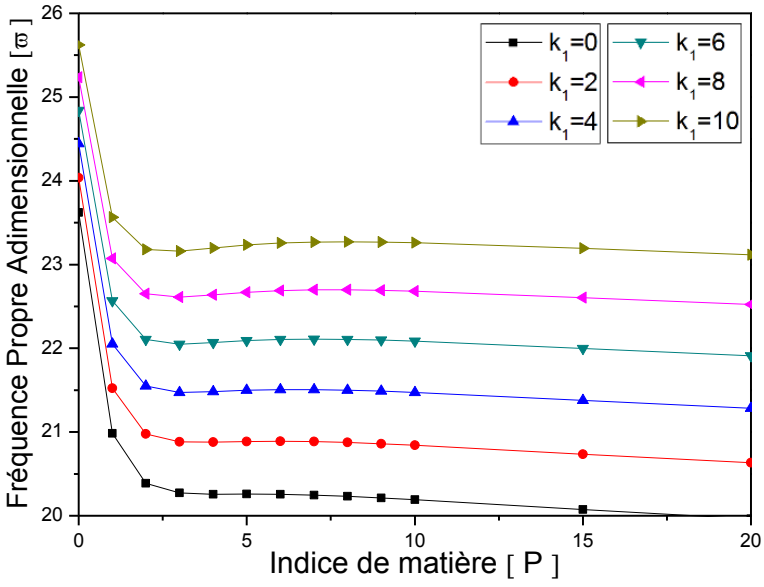


Fig.5. 4 Influence de l'indice matériel P sur la fréquence propre $\overline{\omega}$ d'une plaque sandwich FGM posée sur fondation élastique. K_0=100 et K_1 variable.

Conclusion

Générale

Une nouvelle théorie des plaques, raffinée à cinq variables, prenant en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur (Stretching Effet) a été développé pour une analyse des vibrations libres des plaques sandwiches FGM. Contrairement à toute autre théorie, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans le champ de déplacement est de seulement cinq, contre six ou plus dans le cas d'autres théories de cisaillement et de déformation normale soulignant son aspects simple et pratique.

Les résultats obtenus ont présentés, par comparaison avec celle de l'élasticité linéaire tridimensionnelle de Li et al. (Q.Li et al., 2008), Une concordance globale excellente et significative pouvant attester du bien fondée de cette approche. De plus il est à noter que l'effet de l'étirement de l'épaisseur est beaucoup plus prononcé dans les cas des plaques sandwich FGM épaisses, ce qui encourage à envisager de le prendre en considération pour la modélisation de la réponse des vibrations des plaques sandwich de ce type de configuration.

Combinant à la fois une précision avérée avec un côté pratique est simple la théorie proposée peut offrir une alternative maniable et efficace plus accrue pour la prédiction des fréquences propres des plaque FGM à forte épaisseur. Enfin, la présente théorie peut également être préconisée pour l'étude de plusieurs problèmes liés à la réponse des structures, comme cela est étudié par Ait Atmane et al. (A.Atmane et al, 2011) ainsi que Abd-Alla et Mahmoud (A.M.Abd-Allah et S.R.Mahmoud, 2013).

Quant à son application pour des plaques FGM posée sur des fondations élastiques, les résultats obtenues présentent une bonne concordance avec d'autres études ce qui encourage à une éventuelle investigation pour le cas des sandwichs FGM.

L'utilisation des puissants outils de simulation peut donner une dimension supplémentaire à l'application de cette théorie allant vers plus d'affinité et de précision. La multiplication des applications et des approches avec différentes combinaisons de ratio géométrique, en symétrie et asymétrie, avec des variation significatives de l'épaisseur et des compositions matériaux entre autre, constituera une base d'informations susceptible de donner des pondération ou d'estimer le rôle à jouer par chacun des multiple paramètres tel que la géométrie, la combinaison matériau avec les inversion FGM/Homogène et surtout la primordialité que représente l'épaisseur dans une prédiction fiable des phénomènes, l'ensemble de ces résultats obtenus assez étoffés contribuera à la construction et la validation d'un modèle de simulation qui sera un véritable outil de conception.

Références Bibliographiques

A.Marshal (1982). "Sandwich construction." Handbook of composites, Van Nostran Reinhold Company. **section 21**.

A.B.Basset (1890). "On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells." Phil. Trans. Royal. SC., (London),Seer. A., **181**(N°6): 48.

A.Hamidi, M.Zidi , M.S.A.Houari et A.Tounsi (2013). "A new four variable refined plate theory for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading." Composites : Part B (In presse).

A.Hencky (1947). "Uber die berucksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten." Ing. Archiv. **16**: 5.

A.M.Zenkour (2005a). "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : part 1-deflection and stresses." International Journal of Solids and Structures **42**: 24.

A.M.Zenkour (2005b). "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : part 1-buckling and free vibration." International Journal of Solids and Structures **42**: 15.

A.M.Zenkour et M.Sobhy (2010). "Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates." Composite Structures **93**: 100.

A.M.Zenkour et N.A.Alghamdi (2008). "thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates." Journal of Materials Sciences **43**: 15.

A.M.Zenkour et N.A.Alghamdi (2010b). "Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates." journal of sandwich structures band materials. **12**: 39.

A.M.Zenkour et N.A.Alghamdi (2010). "Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effects of mechanical and thermal loads." Mechanics of advanced materials and structures. **17**: 13.

H.Ait Atmane, A.Tounsi, S.A.Meftah et H.A.Belhadj (2011). "Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section." Journal of Vibration and Control 17(2), 311-318.

A.Tounsi, M.S.A.Houari, S.Benyoucef et E.A.Adda Bedia (2013). "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates." Aerospace Science and Technology **24**: 12.

A.M.Abd-Alla et S.R.Mahmoud (2013). "On the problem of radial vibrations in non-homogeneity isotropic cylinder under influence of initial stres and magnetic field." Journal of Vibration and Control (In Press).

AEROSPATIALE (1986). MATERIAUX COMPOSITES: DANS LA GRANDE MUTATION DES STRUCTURES. Plaquette interne.

J.E.ARBAOUI (2009). ÉTUDE COMPARATIVE ET CARACTÉRISATIONS MÉCANIQUES DES STRUCTURES SANDWICHS MULTICOUCHES. DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PAUL VERLAINE – METZ, UNIVERSITE PAUL VERLAINE – METZ.

V.K.Balla, S.Bose et A.Bandyopadhyay (2008a). "Processing of bulk alumina ceramics using laser engineered net shaping." International Journal of Applied Ceramic Technology. **5**((3)): 9.

A.Bandyopadhyay, B.V.Krishna, W.Xue , S.Bose (2009). "Application of Laser Engineering Net Shaping (LENS) to manufacture porous and functionally graded structures for load bearing implants." Journal of Materials Sciences **20**: 5.

P.J.Bártolo et I.Gibson (2011). "History of stereolithographic processes." In Stereolithography : Materials, Processes and Applications **pp**: 20.

D.L.Bourell, J.J.Beaman, M.C.Leu et D.W. Rosen (2009a). A brief history of additive manufacturing and the 2009 roadmap for additive manufacturing : looking back and looking ahead. In Proceeding of the RapidTech 2009 : U.S.-Turkey Workshop on Rapid Technology, Istanbul, Turkey.

J.N.Reddy et C.D.Chin (1998). "Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates." Journal of Thermal Stresses, **21**: 34.

C.Lainé (1998). Etude Numérique et Expérimentale du Comportement Mécanique de Plaques et Coques Sandwiches : Développement d'un Elément Non Linéaire Grandes Déformations et Application au Flambement de Coques en Construction Navale.

C.M. Wang, J.N.Reddy et K.H.Lee (2000). SHEAR DEFORMABLE BEAMS AND PLATES, Relationships with Classical Solutions, ELSEVIER.

B.Castanié (2000). CONTRIBUTION à L'ÉTUDE DES STRUCTURES SANDWICH DISSYMÉTRIQUES. DOCTEUR.

D.S.Choi, S.H.Lee, , B.S.Shin, K.H.Whang, Y.A.Song, S.H.Park et H.S.Jee (2001). "Development of a direct metal freeform fabrication technique using CO2 laser welding and milling technology." Journal of Materials Processing Technology. **113**((1-3)): 7.

C.K.Chua, S.M.Chou et T.S.Wong (1998). "A study of the state-of-the-art rapid prototyping technologies." The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. **14**((2)): 7.

L.Costa, R.Vilar (2009). " Laser powder deposition.".

D.Gay (1991). Matériaux Composites.

D.Zenkert (1997). The handbook of sandwich construction, EMAS Publishing.

D.Dimitrov, K.Shreve et N.De Beer. (2006). "Advances in three dimensional printing - state of the art and future perspectives." Rapid Prototyping Journal. **12**((3)): 12.

E.Carrera, S.Briscetto et M.Soave. (2011). "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells." Composites : Part B **42**: 11.

E.Reissner (1944). " On the theory of bending of elastic plates." J. Math. Phy. **23**: 8.

E.Reissner (1947). "On bending on elastic plates." Q. Appl. Math., **5**: 14.

E.Reissner (1948). "Finite deflections of sandwich plates." J. Aeronautical Sciences, **15**: 6.

E.Reissner (1953). "On variational theorem for finite elastic deformation." J. Mathematics & Physics, **32**:7.

F.B.Hildebrand, E.Reissner et G.B.Thomas (1949). "Note on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells." NACA Technical Note **1833**.

E.Delale et F.Erdogan (1983). "The crack problem for a nonhomogeneous plane." Journal of Applied Mechanics, **50**.

H.G.Allen (1961). "Analysis and design of structural sandwich panels." Pergamon Press, London, U.K.

T.Reuter, G.J.Dvorak et V.Tvergaard (1998). "Micromechanical models for graded composite materials : II. Thermomechanical loading." Journal of Mechanics and Physics of Solids, **46**: 13.

S.GERONYMOS (2014). MODELISATION VIBRATIONEN FLEXION DE POUTRES COMPOSITES MULTICOUCHES À SECTION CREUSE SUITE À UN IMPACT. MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES, UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL.

I.Gibson, D.W.Rosen et B.Stucker (2009a). "Development of additive manufacturing technology." In Additive Manufacturing Technologies : Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. **pp**: 22.

I.Gibson, D.W.Rosen et B.Stucker (2009b). "Introduction and basic principles." In Additive Manufacturing Theologies : Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. **PP**: 16.

I.Gibson, D.W.Rosen et B.Stucker (2009c). "The use of multiple materials in additive manufacturing." In Additive Manufacturing Theologies : Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing.: 14.

L.J.Gibson, M.F.Ashby, G.N.Karam, U.Wegs et H.R.Shercliff (1995). "Mechanical properties of natural materials. II. Microstructures for mechanical efficiency,." Proceedings of the Royal Society of London Series A, **450**: 22.

J.F.Groves et H.N.G.Waldey (1997). "Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition." Composites Part B : Engineering. **28**((1)): 13.

Gururaja Udupa, S.Shrikantha Rao et K.V.Gangadharan (2014). "Functionally graded composite materials: An overview." 9 DOI: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.

H.H.Abdelaziz, H.A.Atmane, I.Mechab, L.Boumia, A.Tounsi et E.A.Adda Bedia (2011). "Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory." Chinese Journal of aeronautics. **24**: 15.

H.Yaghoobi, P.Yaghoobi (2013). "Buckling analysis of sandwich plates with face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions : An analytical approach." Meccanica (in press).

Y.C.Hagedorn, J.Wilkes, W.Meiners, K.Wissenbach et R.Poprawe (2010). "Net shaped high performance oxide ceramic parts by selective laser melting." Physics Procedia. **5**: 8.

N.J.Hoff, S.E.Maautner (1944). " Sandwich construction." Aeronautical Engineering Review, **(3)**.

N.Hopkins et P.Dickens (2006b). "Emerging rapid manufacturing precess." In Rapid Manufacturing : An Industrial Revolution for the Digital Age.: 26.

N.Hopkins et P.Dickens (2006). "Emerging rapid manufacturing processes." In Rapid Manufacturing : An Industrial Revolution for the Digital Age. **pp**: 26.

J.E.Blanther (1892). "Manufacture of contour relief maps." U.S. Patent **473901**.

J.M.Berthelot (2000). Mécanique des Matériaux et Structures Composites. Le Mans France.

J.N.Reddy (1982). "Bending of laminated anisotropic shells by shear deformable finite element." Fiber Science & Tech., **17**(N°1): 15.

J.N.Reddy (1984). "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation." ntl. J. Solids Struct., **23**(N°3): 12.

J.N.Reddy (1984). "A simple higher-order theory for laminated composite plates." J. Appl. Mech., **51**: 8.

J.N.Reddy (1984b). "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics." John Wiley, New York.

J.N.Reddy (1997a). "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis." CRC Press, Boca Raton, Florida.

J.NReddy (1999a). "Theory and Analysis of Elastic Plates." Taylor h. Francis, Philadelphia, PA.

M.A.Jafari, W.Han, F.Mohammadi, A.Safari, S.C.Danforth et N.A.Langrana (2000). "novel system for fused deposition of advanced multiple ceramics." Rapid Prototyping Journal, **6**((03)): 14.

G.Jin, M.Takeuchi, S.Honda. T.Nishikawa et H.Awaji (2005). "Proprieties of multilayered mullite/Mo functionally graded materials fabricated by powder metallurgy precessing." Materials chemistry and Physics. **89**((2)): 6.

T.Mori et K.Tanaka (1973). "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions." Acta Metallurgica **2**: 4.

K.H.Lo, R.M.Christensen et E.M.Wu (1977). "A higher-order theory of plate deformation, Parts 1 and 2." J. Appl. Mech., **99**: 14.

Th.Von Karman (1970). "Festiqkeitsprobleme in Maschinenbau." Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, **4**(Art. 27): 4.

K.P.Karunakaran, S.Sutyakumar et A.Bernard (2007). Rapid manufacturing of metallic objects : process comparison. In Proceedings of the Conference on Advanced Research in Virtual and Rapid Prototyping., Leiria, Portugal.

D.Kochan, C.C.Kay et D.Zhaohui (1999). "Rapid prototyping issues in the 21st century." Computers in Industry. **39**((1)): 8.

T.Hirai et L.Chen (1999). "Recent and prospective development of functionally graded materials in japan." Materials Science Forum **308-311**: 5.

L.Hadji, H.Atmane, A.Tounsi, A.Mechab et E.A.Adda Bedia (2011). "Free Vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory." Applied Mathematics and Mechanics. **32**: 18.

L.Librescu (1975). Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-type Structures, Noordhoff, The Netherlands,.

V.Birman et L.W.Byrd (2007). "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures." Applied Mechanics Reviews **60**: 22.

J.M.Berthelot (1996). “Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures”.

M.Bourada, A.Tounsi, M.S.A.Houari et E.A.Adda Bedia (2012). "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates." Journal of Sandwich Structures and Materials. **14**: 29.

M.Koisumi (1993). "The concept of FGM. Ceramic transactions, functionally gradient materials." 34(31), 33-10).

M.Levinson (1980). "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates." Mech. Res. Commun., **7**: 8.

M.S.A.Houari, S.Benyoucef, I.Mechab, A.Tounsi et E.A.Adda Bedia (2011). "Two variable refined plate theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates." Journal of Thermal stresses. **34**: 20.

M.V.V.Murthy (1981). "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates." NASA Technical Paper **1903**.

Q.Meng, H.Yang et T.H.Nam (2012). "compositionally graded NiTi plate prepared by diffusion annealing." Scripta Materialia **67**((3)): 4.

S.Suresh et A.Mortensen (1997). "Functionally graded metals and metal ceramic composites 2 : thermomechanical behaviour." Int Mater Rev **42(3)**: 29.

P.Muller (2013). FABRICATION ADDITIVE DE PIECES MULTIMATERIAUX. DOCTORAT, Ecole Centrale de Nantes.

R.N-G.Gustafsson (1998). Hybrid stainless assemblies for weight reduction and performance. Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction. Stockholm, E-MAS Publishing.

N.El Meiche, A.Tounsi., N.Ziane, I.Mechab et E.A.Adda Bedia (2011). "A new Hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate." International Journal of Mechanical Sciences. **53**: 11.

N.J.Whitney et N.J.Pagano (1970). "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates." J. Appl. Mech. , **37**: 6.

K.A.OLSSON, K.E.Makinen et S.E.Hellbratt (1997). The development of sandwich structures for naval vessel during 25 years. Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, . Saint-Etienne, A Vautrin,, Kluwer Academic Publishers.

P.C.Yang, C.H.Norris et Y.Stavsky (1966). "Plastic wave propagation in heterogeneous plates." Intl. J. Solids & Structures, **2**: 20.

P.R.Marur (1999). Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials. Ph.D., Auburn University, Alabama.

D.T.Pham et R.S.Gault (1998). "A comparison of rapid prototyping technologies." International Journal of Machine Tools & Manufacture. **38**((10-11)): 21.

S.Put, J.Vleugels, G.Anné et O.V.B.Biest (2003). "Functionally graded ceramic and ceramic metal composites shaped by electrphoretic deposition." Colloid and Surfaces **222**((1-3)): 10.

Q.Li, V.P.Iu et K.P.Kou (2008). "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates." Journal of Sound and vibration **311**: 18.

R.Hill (1965). "A self-consistent mechanics of composite materials." Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **13**: 10.

R.D.Mindlin (1951). "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." J. Appl. Mech., **18**: 8.

R.Schmidt (1977). "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation." J. Industrial Mathematics Society **27**(N°1): 16.

T.D.P.Rajan, R.M.Pilai et B.C.Pai (2010). "Characterization of centrifugal cast functionally graded aluminum-silicon carbide metal matrix composites." Materials Characterization. **61**((10)): 6.

C.F.Liu et J.N.REDDY (1987). "A High-Order Theory for Geometrically Nonlinear Analysis of composite laminates." Langley Research Center under Grant NAG1-459 **NASA Contractor Report 4056**: 104.

T.Reuter, G.J.Dvorak et V.Tvergaard (1997). "Micromechanical models for graded composite materials." Journal of Mechanics and Physics of Solids, **45**: 22.

J.Ruan, T.E.Spatks, Z.Fan, J.K.Stroble, AA.Panackal et F.Liou (2006). A review of layer based manufacturing processes for metals. In Proceedings of the Solid Freeform Fabrication Symposium, Austin, U.S.

S. Suresh et A.Mortensen (1998). "Fundamentals of functionally graded material." IOM Communications, London.

S.Uemura (2003). "The activities of FGM on new applications." Materials Science Forum **423-425**: 10.

S.H.Chan (2001). "Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine." International Journal of Thermal Science **40**: 7.

S.J.Medwadowski (1958). "A refined theory of elastic, orthotropic plates." J. Appl. Mech., **25**: 7.

S.Merdaci, A.Tounsi, M.S.A.Houari, I.Mechab, H.Hebali et S.Benyoucef (2012). "Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates." Archive of Applied Mechanics **81**: 16.

H.S.Shen (2009). Functionally Graded Materials. C. P. T. F. Group**:** 278.

I.Shishkovsky, I.Yadroitsev, P.Bertrand et I.Smurov (2007). "Alumina-zirconium ceramics synthesis by selective laser sintering/melting." Applied Surface Science, **254**((4)): 5.

V.Richter, B.Ilshner et N.Cherradi (Eds.) (1995). FGM'94, Proceeding of the 3rd International Symposium on Structural and functional Gradient materials 1994., Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

F.Watari, A.Yokoyama, F.Saso, M.Uo et T.Kawasaki (1997). "fabrication and properties of functionally graded dental implant." Composites Part B : Engineering **28**((1-2)): 7.

X.Xinhua, Z.Jingchua, Y.Zhongda et L.Zhonghong (1997). "Fabrication and microstructure of ZrO2/NiCrCoAlY graded coating by plasma spraying." Surface & Coatings Technology. **88**((1-3)): 4.

Y.Benveniste (1987). "A new approach to the application of Mori–Tanaka's theory of." Mechanics of Materials, **6**: 11.

Y.S.Touloukian (1967). Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials.

Y.Tanigawa (1995). "Some basic thermoplastic problems for nonhomogeneous structural materials." Appl Mech Rev **48(6)**: 4.

M.Yamanoushi, M.Koisumi, Tiraii and I.Shiota (eds) (1990). Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials Japan.

Y.Yan, S.Li, R.Zhang, F.Lin, R.Wu, Q.Lu, Z.Xiong et X.Wang (2009). "Rapid prototyping and manufacturing technology : Principe, representative technics, application and development." Tsinghua Science & Technology 14((S1)): 12.

H.M.Yin, L.Z.Sin et H.G.Paulino (2004). "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions." Acta Materalia **52**: 9.

Ait Atmane, Tounsi, A ., Mechab,I., Adda ,B. E. A (2010). "Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement." Int. J. Mech and Mater in Design. 6 (2), 113-121, (2010).

Akhavan, H., Hosseini Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh. (2009). "Solutions exactes pour des plaques rectangulaires de Mindlin sous charges dans le plan posées sur une fondation élastique de Paternak. Partie II : L'analyse de fréquence." Comput. Mater. Sci. 44, 951-961, (2009).

Mahmoudi A., Sekkal M. (2015). "Analyse des vibration libre des plaques non homogène posées sur des fondations élastiques." Mémoire de Master en Génie Civil Département de Génie Civil Faculté des Technologie, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès (2015).