

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes

Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil



THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat

Spécialité Génie Civil

Option Science des Matériaux

Par : TLIDJI Youcef

Intitulée

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITE DES PLAQUES SANDWICHES EN MATERIEUX A GRADIENT DE PROPRIETE TYPE FGM

Soutenue publiquement Le.....devant le jury composé de :

ADDA BEDIA E A	Pr UDL – SBA	Président du jury
HASSAINE D. T.	MCA UIK – Tiaret	Directeur de thèse
TOUNSI A	Pr UDL – SBA	Co-Directeur de thèse
AMEUR M	MCA ENP – Oran	Examineur
AIT AMEUR M M	MCA UIK – Tiaret	Examineur
BOURAADA M	MCA UDL – SBA	Examineur
HADJI L	MCA UIK – Tiaret	Invité

Année universitaire 2015/2016

Remerciement

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'Université Djilali Liabess de Sidi Bel Abbès, sous la direction de Monsieur *Hassaine Daouadji. Tahar* ; Maître de Conférence classe A, à l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret et Monsieur *Abdelouahed Tounsi*, co-directeur, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès.

En premier lieu, je remercie chaleureusement mon encadreur qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur *Abdelouahed Tounsi*, Professeur à l'Université DJELALI Liabes de Sidi Bel Abbés, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur *Adda Bedia El Abass*, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès et Directeur du laboratoire, Je le remercie pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce travail. Et d'être le président de jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, *AMEUR Mohamed*, Maître de Conférence Classe A ; ENP - Oran. *AIT AMEUR Meziane Mohamed*, Maître de Conférence Classe A, à l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret et *BOURAADA Mohamed*, Maître de Conférence Classe A, à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel abbés, de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur *HADJI Lazreg*, Maître de Conférence Classe A, à l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret. Qui me fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du laboratoire LMH et aux personnels du département de Génie Civil de l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret, et également aux membres de ma famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse.

Dédicaces

À tous ceux qui me sont chers

Le comportement thermomécanique et de flambement des plaques sandwichs fonctionnellement graduées ont été étudiés en utilisant une théorie des plaques à quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnus impliqués dans cette théorie est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement nécessitent cinq inconnus.

La présente théorie est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque. De plus, cette théorie assure la nullité de la contrainte de cisaillement dans les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les peaux de la plaque sandwich sont constituées d'un mélange de deux matériaux différents distribués à travers l'épaisseur où les propriétés matérielles telles que le module de Young et le coefficient de dilatation thermique sont supposées variables selon une loi de distribution polynomiale en fonction des fractions volumiques des constituants. La couche centrale (l'âme) est supposée homogène. La validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats déterminés par cette théorie à ceux obtenus par la théorie de premier ordre et les autres théories d'ordre élevé. Les effets de la déformation de cisaillement transversale, la charge thermique, le rapport des dimensions de la plaque (a/b), le rapport longueur-épaisseur (a/h), et l'indice de puissance de la fraction volumique (p) sont étudiés.

Les résultats numériques des déplacements et des contraintes et de la charge critique de flambement des plaques sandwichs fonctionnellement graduées ont été présentés et discutés. On peut conclure que la présente théorie est précise, et simple pour étudier le comportement flexionnel des plaques fonctionnellement graduées soumises à un chargement thermomécanique et le flambement avec diverses conditions aux limites.

Mots clé : Plaques sandwichs, thermomécanique, flambement, modélisation analytique, matériaux à gradient de propriétés.

The thermomechanical bending response and the buckling of functionally graded sandwich plates has been investigated by the use of a four variable refined plate theory. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories. The theory presented is variationally consistent, does not require shear correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolically across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. The sandwich plate faces are assumed to have isotropic, two-constituent material distribution through the thickness, and the modulus of elasticity, Poisson's ratio of the faces, and thermal expansion coefficients are assumed to vary according to a power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic material. The validity of the present theory is investigated by comparing some of the present results with those of the classical, the first-order and the other higher-order theories. The influences played by the transverse shear deformation, thermal load, plate aspect ratio, and side-to- thickness ratio and volume fraction distribution are studied.

Numerical results for deflections and stresses and the critical buckling load of functionally graded sandwich plates have been investigated. It can be concluded that the proposed theory is accurate and simple in solving the thermomechanical bending and buckling behavior of functionally graded plates.

Keywords: sandwich Plate, Thermomechanical, buckling, Analytical modelling, Functionally graded material.

الهدف من هذا العمل هو دراسة انحناء صفائح السندويتش المتدرجة وظيفيا تحت أحمال ميكانيكية و حرارية و استقرارها باستعمال نظرية قص دقيقة ذات اربع متغيرات. هذه النظرية تحقق شروط انعدام قوى القص في الوجوه العلوية والسفلية للصفحة. خصائص المواد في هذه الدراسة تتغير في الاتجاه العرضي للصفحة السندويتش بواسطة قانون اسي في حين نعتبر معامل بواسون ثابت. في هذه الدراسة، صفحة السندويتش تتألف من طبقتين متدرجتين وظيفيا ولب متجانس من. معادلات التوازن نتحصل عليهم باستعمال مبدأ العمل الخيالي. الحل التحليلي باستعمال طريقة نافايي وطريقة المتغيرات المتفرقة من أجل حل معادلات التوازن، النتائج العددية المتحصل عليها باستعمال هذه النظرية لدراسة مشكل انحناء واستقرار صفائح السندويتش المتدرجة وظيفيا تم عرضها ومقارنتها مع النتائج المتحصل عليها في الدراسات السابقة.

الكلمات المفتاحية: سندوتش، استقرار، المواد المتدرجة وظيفيا، أحمال ميكانيكية وحرارية

Remerciement.....	i
Dédicaces	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص.....	v
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	x
Liste des symboles	xii
Introduction générale.....	1
CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX SANDWICHS.....	6
1.1 Introduction.....	6
1.2 Qu'est-ce qu'un matériau sandwich ?.....	7
1.3 Éléments constituant les matériaux sandwichs	8
1.3.1 Peaux	8
1.3.2 Âme	8
1.3.3 Interface	10
1.4 Conception des structures sandwichs	10
1.4.1 Sélection des matériaux-âme	11
1.5 Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs	13
1.1.1 Flambement généralisé des peaux	13
1.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression	14
1.5.3 Modes locaux de rupture	15
1.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement	15
1.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping ».....	15
1.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »	16
1.5.7 Dégradation de l'adhésive	17
1.6 Théorie des plaques sandwichs.....	18
1.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs.....	18
1.7 Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs.....	18

1.7.1	Collage de peau sur l'âme :	18
1.7.2	Technique de pliage :	19
1.8	Intérêt des structures sandwichs	20
1.9	Domaines d'application des matériaux sandwichs	21
1.9.1	Construction aérospatiale	21
1.9.2	Construction automobile et ferroviaire	21
1.10	Conclusion	22
CHAPITRE 2. MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS		23
2.1	Introduction.....	23
2.2	Concept des matériaux FGM	24
2.3	Idée générale.....	24
2.4	Méthodes d'élaboration des FGM	26
2.4.1	Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	27
2.4.2	Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	28
2.4.3	Dépôt par Électrophorèse	28
2.4.4	Compaction Sèche Des Poudres :	29
2.4.5	Projection Plasma :	29
2.4.6	Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	30
2.4.7	Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) :	31
2.4.8	Frittage En Infiltration :	32
2.4.9	Frittage Laser Différentiel	32
2.4.10	Implantation ionique (Sputtering)	33
2.5	Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	33
2.6	Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel	33
2.7	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	36
2.7.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	37
2.7.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	38
2.7.3	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	38
2.8	Conclusion	39
CHAPITRE 3. THÉORIES DES PLAQUES		40
3.1	Introduction.....	40
3.2	Différents modèles de plaque	41

3.2.2	Approche par couche	48
3.2.3	Les modèles zig-zag	49
3.2.4	Modèles couches discrètes.....	50
3.3	Conclusion	52
CHAPITRE 4. FORMULATION THÉORIQUE		53
4.1	Introduction.....	53
4.2	Configuration géométrique	54
4.3	Théorie des plaques raffinée pour les FGM	55
4.3.1	Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT).....	55
4.3.2	Cinématique et équations constitutives	56
4.3.3	Équations d'équilibre.....	58
4.3.4	Flambement des plaques sandwichs en matériaux FGM avec diverses conditions aux bords	63
4.4	Types de plaques sandwich	69
4.5	Conclusion	71
CHAPITRE 5. VALIDATION DES RÉSULTATS		72
5.1	Introduction.....	72
5.2	Analyse thermomécanique.....	73
5.3	Flambement des plaques sandwichs en FGM avec diverses conditions aux bords.....	81
5.4	Validation des résultats.....	82
5.5	Conclusion	88
Conclusion générale		89
Références		92

Liste des tableaux

Tableau (4.1) Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	67
Tableau (5.1) Flèches adimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM ($q_0 = T_2 = T_3 = 100$)	74
Tableau (5.2) Influence du rapport a/b sur la flèche des plaques sandwichs en FGM ($p = 1$) et ($q_0 = T_2 = T_3 = 100$)	75
Tableau (5.3) Contraintes axiales σ_x pour des plaques sandwichs carrés en FGM.....	76
Tableau (5.4) Contraintes $\bar{\tau}_{xz}$ pour des plaques sandwichs carrés en FGM.....	77
Tableau (5.5) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées soumise à une compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, a/h = 10$).....	83
Tableau (5.6) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression Biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, a/h = 10$).....	83
Tableau (5.7) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression uniaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$	85
Tableau (5.8) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression biaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$	86

Liste des figures

Figure (1.1) Schéma d'un sandwich [15].	7
Figure (1.2) Matériaux sandwichs à âmes pleines	9
Figure (1.3) Matériaux sandwichs à âmes creuses : (a) nid d'abeilles; (b) âme ondulée.	10
Figure (1.4) différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.	13
Figure (1.5) Flambement généralisé des peaux du sandwich [16].	14
Figure (1.6) Rupture des peaux en traction ou en compression [16].	14
Figure (1.7) Modes locaux de rupture par indentation [16].	15
Figure (1.8) Rupture de l'âme en cisaillement [17].	15
Figure (1.9) Flambement généralisé de l'âme du sandwich [17].	16
Figure (1.10) Flambement localisé « wrinkling » [17].	16
Figure (1.11) Flambement localisé « damping » [17].	17
Figure (1.12) Type de dégradation de l'adhésif.	17
Figure (1.13) panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.	19
Figure (1.14) Pliage de panneaux sandwichs.	20
Figure (2.1) Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.	26
Figure (2.2) Principe de la méthode coulage en bande.	28
Figure (2.3) Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux	29
Figure (2.4) Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane).	30
Figure (2.5) Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	31
Figure (2.6) Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel	33
Figure (2.7) Principaux domaines d'application des FGM.	35
Figure (2.8) Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.	36
Figure (2.9) Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	37
Figure (2.10) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	38

Figure (2.11) Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	39
Figure (3.1) Plaque de Love Kirchhoff [27].....	42
Figure (3.2) Plaque de Reissner-Mindlin [27].	44
Figure (3.3) Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [27].	46
Figure (3.4) Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [62] ..	49
Figure (3.5) Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [62]	49
Figure (3.6) Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [62].....	49
Figure (3.7) Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [62].	50
Figure (4.1) Système de coordonnées et numérotation des couches.....	54
Figure (5.1) . Variation de la flèche central $\bar{w}$ en fonction du rapport (a/h) des plaque sandwich en FGM pour diverses valeurs de k et les différents types de plaques : (a) (1-2-2), (b) (1-1-3), (c) (2-1-4), (d) (2-1-3), (e) (4-1-3), and (f) (3-1-4).....	78
Figure (5.2) Variation des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ travers l'épaisseur de la plaque pour différentes type de plaque sandwich en FGM: (a) (1-2-2), (b) (1-1-3), (c) (2-1-4), (d) (2-1-3), (e) (4-1-3), and (f) (3-1-4).....	80
Figure (5.3) Variation des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ travers l'épaisseur de la plaque pour différentes type de plaque sandwich en FGM:(a) (1-2-2), (b) (1-1-3), (c) (2-1-4), (d) (2-1-3), (e) (4-1-3), (f) (3-1-4).....	81
Figure (5.4) Effet de l'indice de puissance p sur la charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaques carrées sous chargement de compression biaxial ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a = 10h$)	86
Figure (5.5) Effet des deformations de cisaillement sur la charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaque carrées soumise a une compression biaxiale ($p = 1$)	87
Figure (5.6) Effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement $\bar{N}$ de la plaque (1-2-1) sous chargement de compression biaxiale ($p = 1$)	88

Liste des symboles

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
α	Coefficient de dilatation thermique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
P	Indice de la fraction volumique
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$\psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	<i>Moments de flexion</i>
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	<i>Moment supplémentaire du au cisaillement transverse</i>
S_{xz}^s, S_{yz}^s	<i>Effort de cisaillement</i>
N_x^T, N_y^T	<i>Effort due à la charge thermique</i>
$M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}, M_y^{sT}$	<i>Moment due à la charge thermique</i>
$T(x, y, z)$	<i>Distribution de la température à travers l'épaisseur</i>
i et j	<i>Nombres naturels</i>
A_{ij}	<i>Termes de rigidité en membrane de la plaque</i>
B_{ij}	<i>Termes de rigidité de couplage de la plaque</i>
D_{ij}	<i>Termes de rigidité de flexion de la plaque</i>
A_{ij}^a	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
B_{ij}^a	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
D_{ij}^a	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
F_{ij}^a	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
A_{ij}^s	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
B_{ij}^s	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
D_{ij}^s	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
H_{ij}^s	<i>Termes de rigidité de la plaque en cisaillement</i>
$\{\Delta\}$	<i>Vecteur des déplacements généralisés</i>
$\{P\}$	<i>Vecteur des efforts généralisés</i>
$\{ \}$	<i>Vecteur colonne</i>
$[\]$	<i>Matrice</i>

Introduction générale

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux sous forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé jusqu'à nos jours que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et aéronautique. Pourtant le comportement mécanique d'objets tels les panneaux sandwich, du nid d'abeille, voire une simple dalle en béton fait l'objet de nombreuses recherches. Une des difficultés réside essentiellement dans le caractère hétérogène de ces structures. Cette hétérogénéité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais : *Functionally Graded Materials*) qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées.

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles ; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles. Ils ont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures [1].

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon.

Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21^{ème} siècle. Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Les axes de recherches qui ont conduit à l'établissement de l'architecture des FGM sont les suivants :

- *Établissement des définitions et des théories mathématiques pour les structures FGM.*
- *Développement de systèmes de conception et de modélisation assistés par ordinateur.*
- *Développement de processus rentables.*
- *Évaluation des propriétés graduelles.*
- *Établissement d'une base de données pour l'architecture de FGM.*

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier le comportement mécanique des structures sandwichs en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles. La détermination des contraintes (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différence entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées [2].

La théorie classique des plaques, basée sur les hypothèses de Kirchhoff, est inexacte pour l'analyse de la distribution des déplacements et des contraintes dans les plaques FGM.

L'inexactitude est due à la négligence des effets de cisaillement transverse dans les plaques FGM. Afin de prendre en compte cet effet, un certain nombre de théories de déformation en cisaillement de premier ordre ont été développées. Cependant, ces théories supposent une distribution uniforme des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. À cet effet, des facteurs de correction de cisaillement sont introduites pour contourner ce problème.

La précision des solutions de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre sera fortement liée à la meilleure estimation des facteurs de correction de cisaillement. Il a été montré que la théorie classique et la théorie du premier ordre sont inadéquates pour prédire les solutions exactes des plaques FGM.

Plusieurs travaux ont étudiés le comportement des plaques en FGM, comme ceux de [1] et [2], [3]. En 1998, Praveen et Reddy [4] ont étudiés le comportement des plaques FGM

compose d'un mélange de céramique et de métal en utilisant la méthode des éléments finis. Dans la même année, Reddy et Chin [5] ont présentée une étude du comportement thermodynamique des cylindres et des plaques FGM. La vibration des coques cylindrique par la méthode de Love a été étudiée par Loy et al [6] en 1999.

Cheng et Batra [7] ont établies une relation entre la flèche d'une plaque polygonale simplement appuyée en FGM donnée par les théories FSDPT et TSDPT et la flèche d'une plaque équivalente homogène de Kirchhoff. Les propriétés matérielles effectives sont supposées suivre une loi de mélange, la fraction volumique de la phase céramique suit une loi de distribution de puissance suivant l'épaisseur. Les mêmes auteurs [8] ont étudiés les déformations 3D thermo-mécanique d'une plaque elliptique en FGM thermo-élastique isotrope linéaire rigidement encastres sur ces bords, les propriétés matérielles suivent aussi une loi de puissance suivant l'épaisseur. Ils obtiennent une solution qui montre que la distribution des déplacements en plane et les contraintes de cisaillement transversale le long de l'épaisseur de la plaque en FGM ne s'accordent pas avec ceux supposés par la théorie classique des plaques et les théories de déformation de cisaillement.

Woo et Meguid [9] ont étudiés les déformations non linéaires des plaques épaisses en FGM et des coques basées sur la théorie classique et la non linéarité de von-Karman sous chargement thermomécanique. La solution est obtenue par une double série de Fourier pour la flèche et les contraintes. Les auteurs ont conclu, par des comparaisons des contraintes et des déplacements des plaques purement en métal, purement en céramique et de plaque en FGM, que la flèche des plaques en FGM même avec de petite fraction volumique en céramique est significativement petite à la flèche de la plaque purement en métal.

Une théorie raffinée des plaques à deux variables (RPT) a été développée pour les plaques isotropes par Shimpi [10]. Ensuite cette théorie a été étendue aux plaques orthotropes par Shimpi et Patel [11]. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et possède de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques dans certains aspects tels que les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les expressions du moment. La précision de cette théorie a été démontrée pour le comportement statique et thermo-élastique des plaques FGM par Mechab et al. [12] et Houari et al. [13]. Par conséquent, il semble important d'étendre cette théorie à l'analyse de déformation thermomécanique des plaques sandwichs non symétriques en FGM.

Les objectifs principaux de cette contribution est de :

- *Donner une formulation analytique générale des problèmes des plaques sandwichs en FGM (flexion thermomécanique et flambement avec diverse condition aux bords) en utilisant une théorie raffinée ;*
- *Présenter des résultats numériques de la flèche et des contraintes pour différentes configuration de plaque sandwich non symétrique et la charge critique de flambement, pour que les chercheurs puissent bénéficier de ces résultats*

Dans ce travail, une théorie raffinée des plaques à quatre variables est utilisée pour étudier :

- la flexion thermomécanique des plaques sandwichs non symétrique en FGM. La plaque sandwich est composée de trois couches, les peaux en FGM et cœur homogène en métal. La plaque est supposée isotrope à n'importe quel point dans son volume, le module de Young et coefficient de dilatation thermique varient à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques des plaques en FGM simplement appuyées. Les effets de la variation de la fraction volumique des matériaux constituants et du rapport épaisseur-longueur sur les flèches, les distributions de la contrainte axiale et tangentielle sont étudiés en détail. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie en comparant les résultats obtenus avec ceux déterminés par d'autres théories.
- Le flambement avec diverse conditions aux limites des plaques sandwichs en FGM. La plaque sandwich est composée de trois couches, les peaux en FGM et cœur homogène en céramique. La plaque est supposée isotrope à n'importe quel point dans son volume, le module de Young varie à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La méthode des variables séparées est utilisée pour l'obtention des solutions analytiques.

L'étude que nous présentons comprend cinq parties.

Dans le premier chapitre : des généralités sur les matériaux sandwichs ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Dans le chapitre II, nous exposons d'une façon claire des généralités sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Nous abordons au chapitre III les différentes approches qui régissent les plaques, en commençant par les théories bidimensionnelles puis nous allons citer les théories par couche.

Le quatrième chapitre présente une formulation théorique du comportement thermomécanique des plaques sandwichs et du flambement avec diverse condition aux limites.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation du modèle utilisé à travers quelques exemples connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwichs non symétriques en FGM et du flambement avec diverse conditions aux limites des plaques sandwichs en FGM

Ce travail de thèse se termine par des conclusions relatives à ce travail de recherche.

Chapitre 1. Généralités sur les matériaux sandwichs

1.1 Introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.).

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwichs. Les structures sandwichs occupent un large créneau dans la construction des pièces composites.

Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes.

L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwichs. En nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités propres.

1.2 Qu'est-ce qu'un matériau sandwich ?

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure. 1.1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [14].

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f / t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après Allen [15], on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d / t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_c + t_f$.

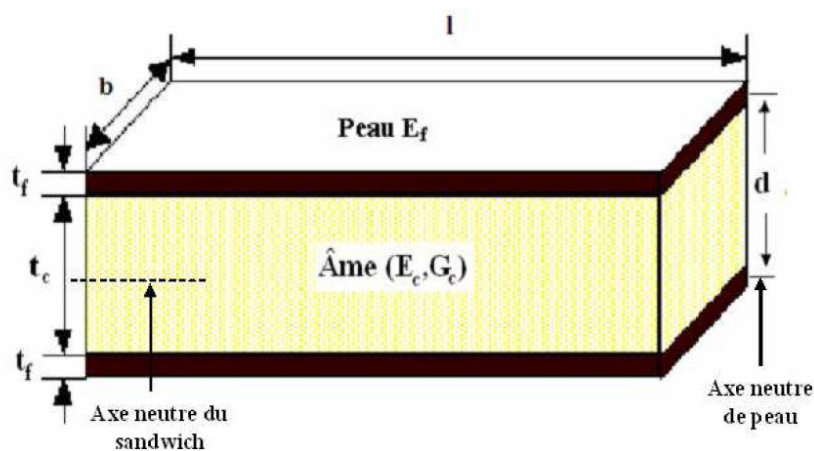


Figure (1.1) Schéma d'un sandwich [16].

En fonction des valeurs du rapport d / t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport d / t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;
- Pour un rapport d / t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d / t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwichs possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions.

1.3 Éléments constituant les matériaux sandwichs

1.3.1 Peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

1.3.2 Âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- *Mousses : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécanique.*

- *Balsa* : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- *Nid d'abeille* : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' Nid d'abeille ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes :

- **Les âmes pleines** [17] parmi laquelle on retrouve :

1. Le Balsa ou bois cellulaires (Figure 1.2 a)
2. Diverses mousses cellulaires (Figure 1.2 b)
3. Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelés mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

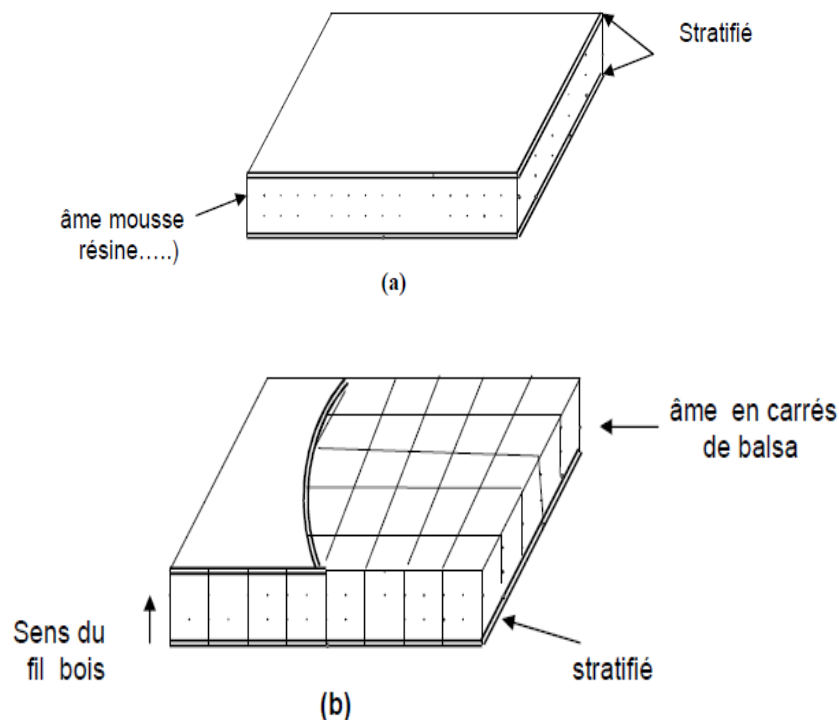


Figure (1.2) Matériaux sandwichs à âmes pleines

- **Les âmes creuses** [17], essentiellement de type nid d'abeilles (Figure 1.3) elles sont :
 4. Des alliages métalliques légers
 5. Des papiers kraft
 6. Du papier polyamide, type papier Nomex.

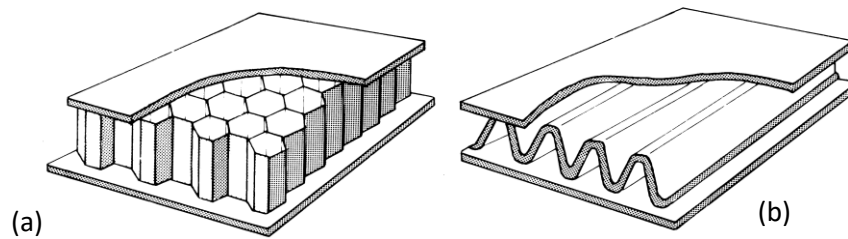


Figure (1.3) Matériaux sandwichs à âmes creuses : (a) nid d'abeilles; (b) âme ondulée

1.3.3 Interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

Les matériaux sandwichs sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de portée) et de 2600kg/m^2 (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de 33kg/m^2
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques. En revanche, les matériaux sandwichs n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

1.4 Conception des structures sandwichs

Bien que généralement conçues pour être soumises à des efforts en flexion, les structures sandwichs le sont aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un « sandwich » sont de choisir les matériaux appropriés constituant

la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwichs (théorème des poutres homogènes) et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

1.4.1 Sélection des matériaux-âme

D'un point de vue mécanique, le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau.

Résistance en flexion

Généralement, les structures sandwichs sont plus rigides que les poutres conventionnelles. Cela étant dû à la distribution géométrique efficace et au support des efforts par les peaux qui permettent l'obtention d'un facteur de rigidité $\langle EI \rangle$ plus élevé.

Les peaux doivent adhérer le mieux possible à l'âme puisque le comportement mécanique final de la structure sandwich est directement lié à cette adhérence.

Résistance aux chocs

La résistance à l'impact d'une structure sandwich composite est largement influencée par la capacité d'absorption de l'énergie par l'âme.

Cette capacité d'absorption peut être améliorée en augmentant la densité du matériau qui compose l'âme. Soumis à un impact, on observe un comportement tout à fait différent s'il s'agit d'une âme en mousse ou d'une âme en nid d'abeilles.

L'âme en mousse diffusera l'énergie de l'impact à l'intérieur même du sandwich en l'absorbant dans sa structure cellulaire. C'est pourquoi les mousses PVC d'origine thermoplastique ainsi que les mousses thermodurcissables flexibles ont une bonne capacité d'absorption des chocs.

Dans le cas d'une âme en nid d'abeilles, les parois transfèrent l'énergie perpendiculairement d'une peau à l'autre, ce qui peut donc occasionner la déchirure de la peau opposée.

Résistance à la compression

Les charges de compression sont totalement transférées à l'âme du sandwich. Les structures en nid d'abeilles permettent de supporter des contraintes de compression, normales aux panneaux, élevées. Par contre leur anisotropie favorise leur rupture lorsqu'elles sont chargées dans plusieurs directions comme dans le cas des pièces soumises à des charges hydrostatiques. On préconise alors comme solution une combinaison nid d'abeilles et mousse.

Résistance au décollement (pelage)

Une résistance insuffisante au décollement peut conduire au délaminage des peaux et être la cause de ruptures catastrophiques. En général, dans les sandwichs à âme en mousse, la résistance du joint de colle entre les peaux et l'âme doit être supérieure à la résistance au cisaillement de l'âme. Les mousses de PVC donnent des forces d'adhésion supérieures à celles obtenues avec le balsa ou le polyméthacrylimide (PMI). Les mousses de polyuréthane (PU), elles, sont fragiles, ce qui rend leur collage difficile. Quant aux âmes en nid d'abeilles, leur surface de contact réduite explique qu'il est difficile d'obtenir une résistance élevée au pelage.

Isolation

La diminution de poids, l'isolation acoustique et thermique ainsi que l'amortissement des vibrations sont nécessaires dans plusieurs applications.

Grâce à leur structure cellulaire, beaucoup de mousses obtiennent de très bons résultats en ce qui a trait à l'isolation thermique et acoustique alors que les structures en nid d'abeilles offrent des performances moins probantes, plus limitées.

Par conséquent, lorsqu'il est nécessaire d'avoir de bonnes propriétés en termes d'isolation thermique et acoustique, les structures sandwichs avec âme en mousse sont des choix judicieux. Lorsque la diminution de poids est le seul objectif, les structures sandwichs avec âme en nid d'abeilles devraient être envisagées.

Absorption d'eau

L'absorption d'humidité et d'eau par l'âme des structures sandwichs peut causer une diminution importante et significative de ses propriétés mécaniques. Dans le cas où les peaux des sandwichs seraient abîmées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'eau ou à l'humidité augmente encore plus le risque de délaminage. Même en service normal, l'évaporation interne d'eau absorbée peut causer un délaminage des peaux. Pour solutionner ce problème, un traitement thermique additionnel de l'âme est parfois nécessaire avant la mise en œuvre du sandwich.

1.5 Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- *Moment de flexion,*
- *Moment de torsion,*
- *Effort normal,*
- *Effort tranchant.*

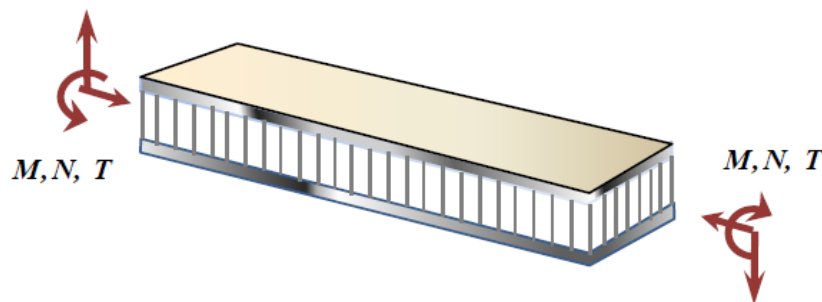


Figure (1.4) *différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.*

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécaniques de ces structures.

1.1.1 Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure. 1.5). Le flambement généralisé peut également

survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

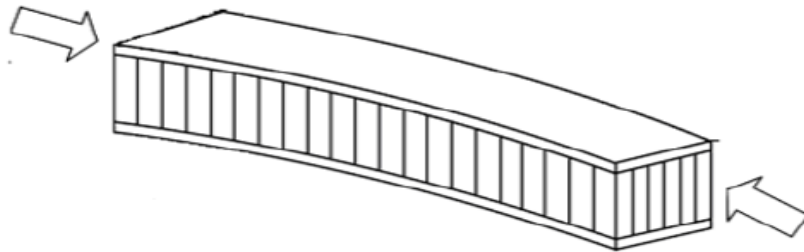


Figure (1.5) *Flambement généralisé des peaux du sandwich [18].*

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

1.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Figure.1.6). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), ou en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.

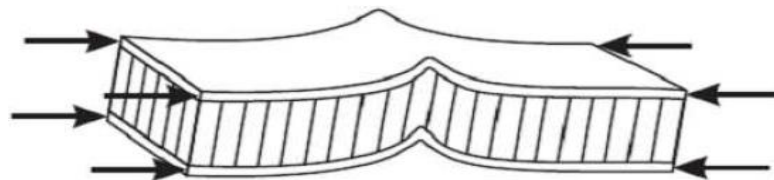


Figure (1.6) *Rupture des peaux en traction ou en compression [18].*

1.5.3 Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure. 1.7).

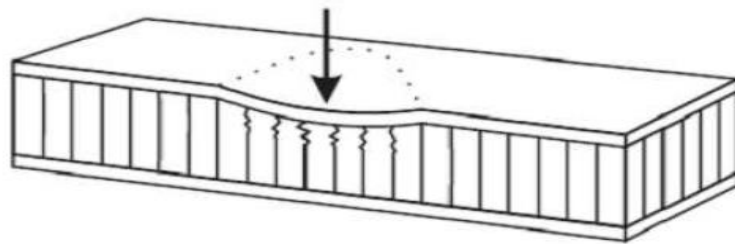


Figure (1.7) Modes locaux de rupture par indentation [18].

1.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure. 1.8). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

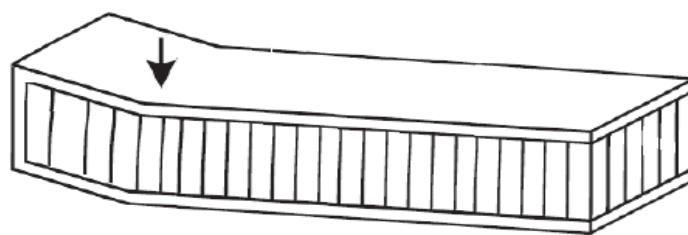


Figure (1.8) Rupture de l'âme en cisaillement [19].

1.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de

cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.

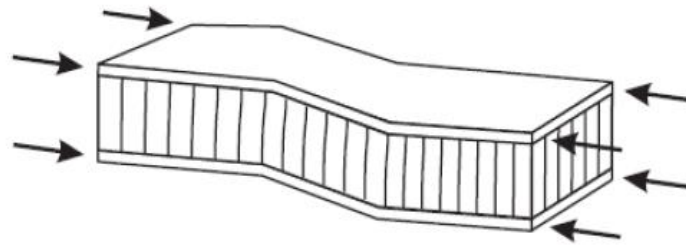


Figure (1.9) Flambement généralisé de l'âme du sandwich [19].

1.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Figure. 1.10), se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Figure. 1.11).

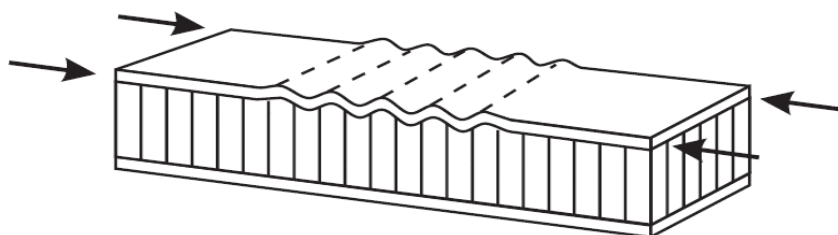


Figure (1.10) Flambement localisé « wrinkling » [19].

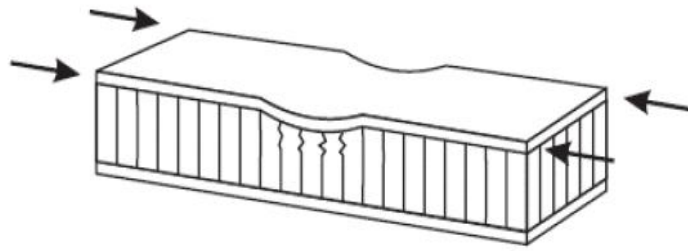


Figure (1.11) Flambement localisé «dimpling» [19].

1.5.7 Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types :

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure. 1.12 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

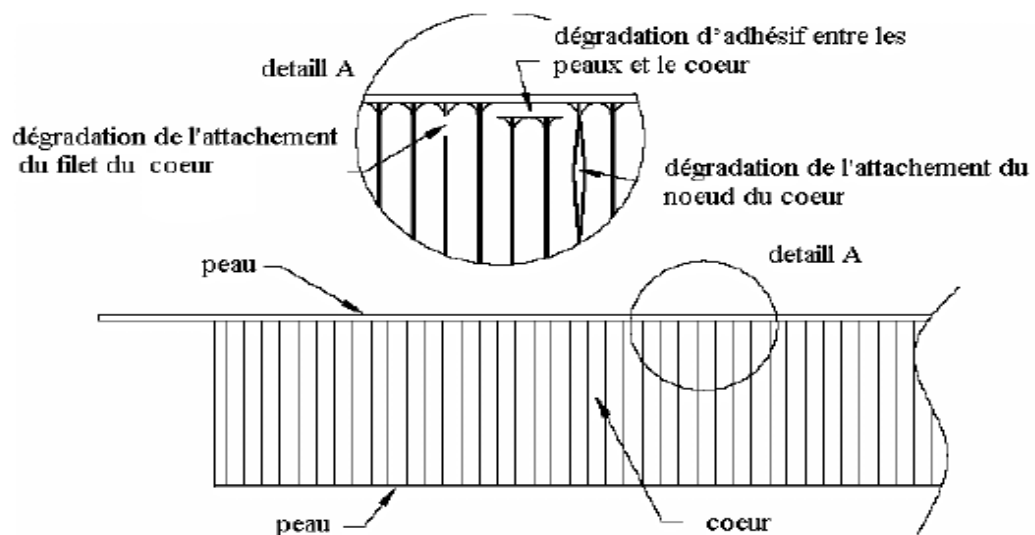


Figure (1.12) Type de dégradation de l'adhésif.

1.6 Théorie des plaques sandwichs

Un matériau sandwich est constitué (figure 1.11) d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée h_c et l'épaisseur totale du sandwich H ($H = h_1 + h_c + h_2$). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen.

1.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$).
- Les déplacements du cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}, σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

1.7 Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs

1.7.1 Collage de peau sur l'âme :

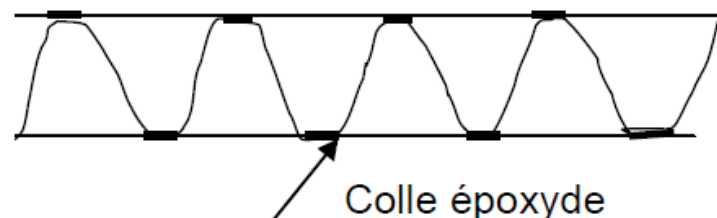
Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

L'assemblage est réalisé selon la (Figure 1.13) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

1.7.2 Technique de pliage :

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure 1.14).

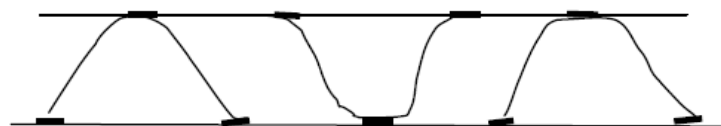
On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.



(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs ω sur tôle



(b) : panneaux avec tubes carrés



(c) : panneaux avec ω inversés

Figure (1.13) panneaux réalisés par collage à partir de profils divers

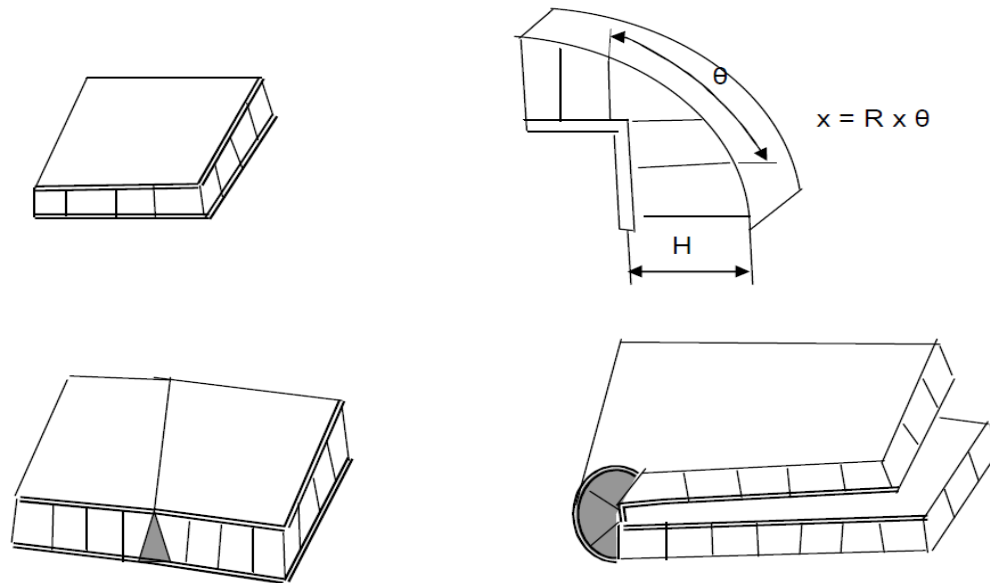


Figure (1.14) Pliage de panneaux sandwichs.

1.8 Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg m⁻³. En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

1.9 Domaines d'application des matériaux sandwichs

Les panneaux sandwichs sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

1.9.1 Construction aérospatiale

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwichs et par cocuisson de stratifiés composites (carbone/ époxyde, kevlar /époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone / epoxyde collés sur des âmes en nida aluminium.

Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwichs dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida [19].

Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/epoxyde et l'âme en nida nomex.

1.9.2 Construction automobile et ferroviaire

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwichs, ainsi que les différents modes de dégradation. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés «FGM» tout en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Chapitre 2. Matériaux à gradient de propriétés

2.1 Introduction

Dans les structures multicouches classiques, des couches homogènes sont collées les unes aux autres pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustiques,...) de la Structure (plaques sandwichs, structures renforcées par matériaux composites,...). L'inconvénient, de cette démarche est de créer des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches qui peuvent conduire à des délaminages, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

La solution d'une transition continue des propriétés, par un gradient de composition, permet d'atténuer ces singularités par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material* "F.G.M"). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

2.2 Concept des matériaux FGM

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été édités (par exemple, [20], [21])

2.3 Idée générale

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- *Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;*
- *Ténacité du matériau coté basse température ;*
- *Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.*

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

1. *Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur) ;*
2. *Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;*
3. *Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;*
4. *Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.*

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc....

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

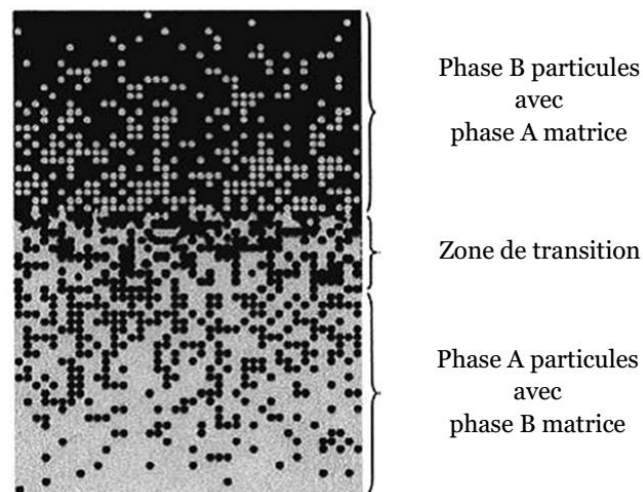


Figure (2.1) Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées

2.4 Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

1. Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.

2. *Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.*

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

L'existence de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

2.4.1 *Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)*

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. 2.2). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et dé-floculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [22] ; soit par empilage de couches élaborés séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

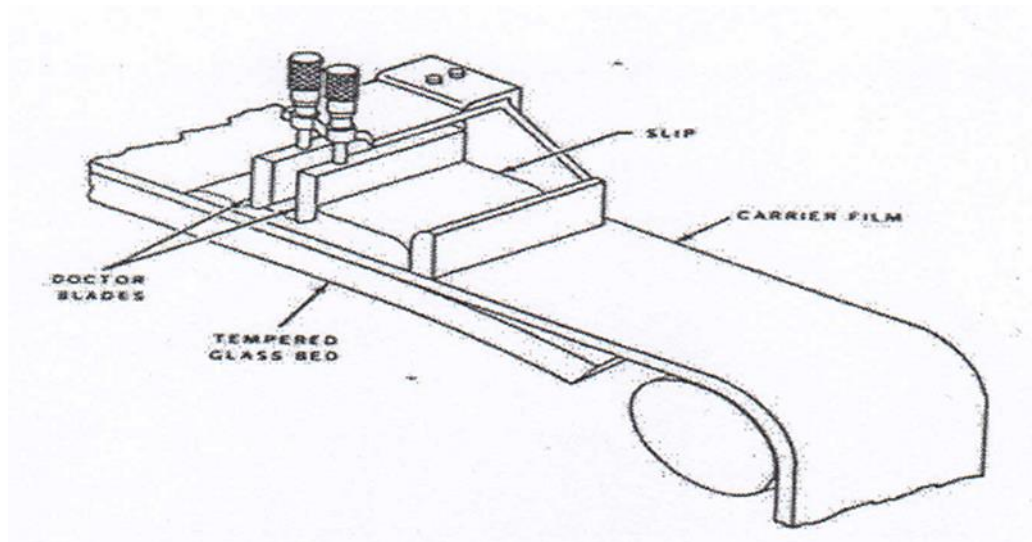


Figure (2.2) Principe de la méthode coulage en bande.

2.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- *Formation du tesson ou "prise";*
- *Consolidation du tesson ou "raffermissement".*

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- *du pouvoir de succion de la plate (coulage classique) ;*
- *Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).*

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

2.4.3 Dépôt par Électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût,

capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dès lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co . Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure I-7.

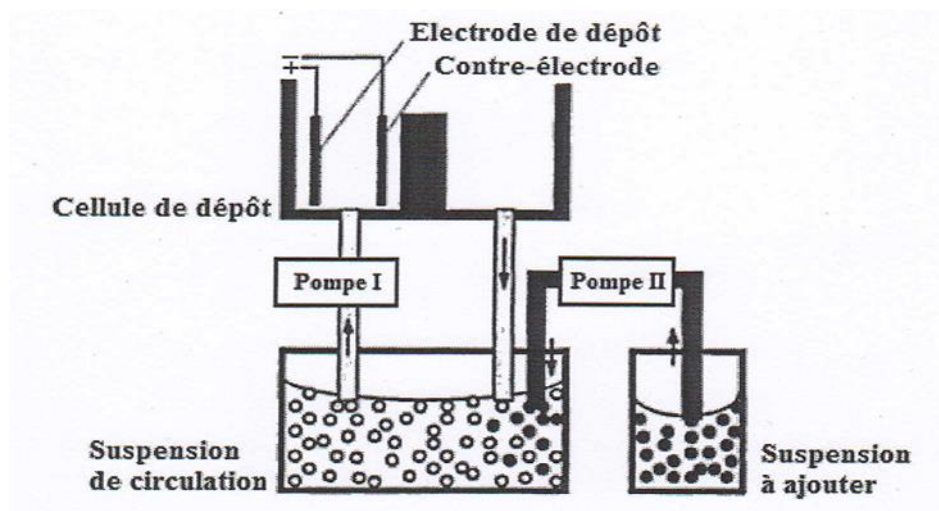


Figure (2.3) Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux

2.4.4 Compaction Sèche Des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [23].

2.4.5 Projection Plasma :

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à $100\ \mu m$, environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment $11000\ ^\circ C$ et la

vitesse 1000–1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure, à la corrosion ainsi que l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative. Ichikawa a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le silicium (SiC) pour former un matériau thermoélectrique transporteur concentration-gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure 2.4.

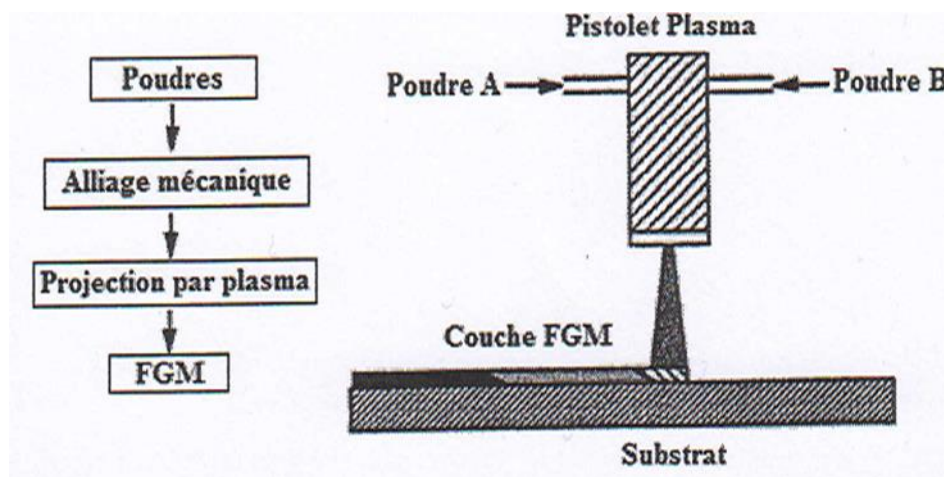


Figure (2.4) Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué.
(La composition est graduée dans la direction plane)

2.4.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD est que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, qui n'exigent pas la fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement,

le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique.

2.4.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) :

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la figure 2.5, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma.

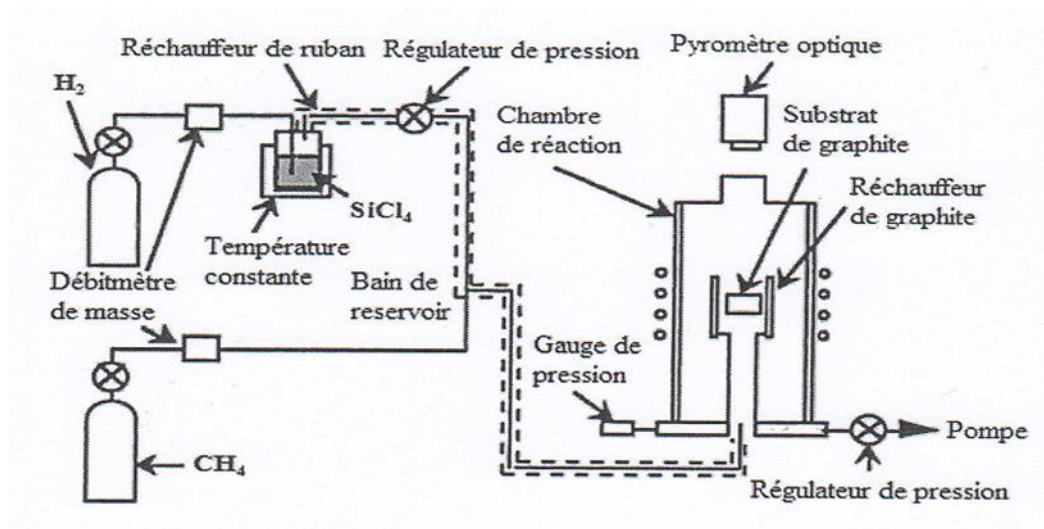


Figure (2.5) Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il ya une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz ($\text{CH}_4\text{-SiC14-H}_2$) sont employés aux températures de dépôt entre 1400 °C et 1500 °C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

2.4.8 *Frittage En Infiltration :*

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapports aux autres.

2.4.9 *Frittage Laser Différentiel*

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI, a utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure 2.6, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé.

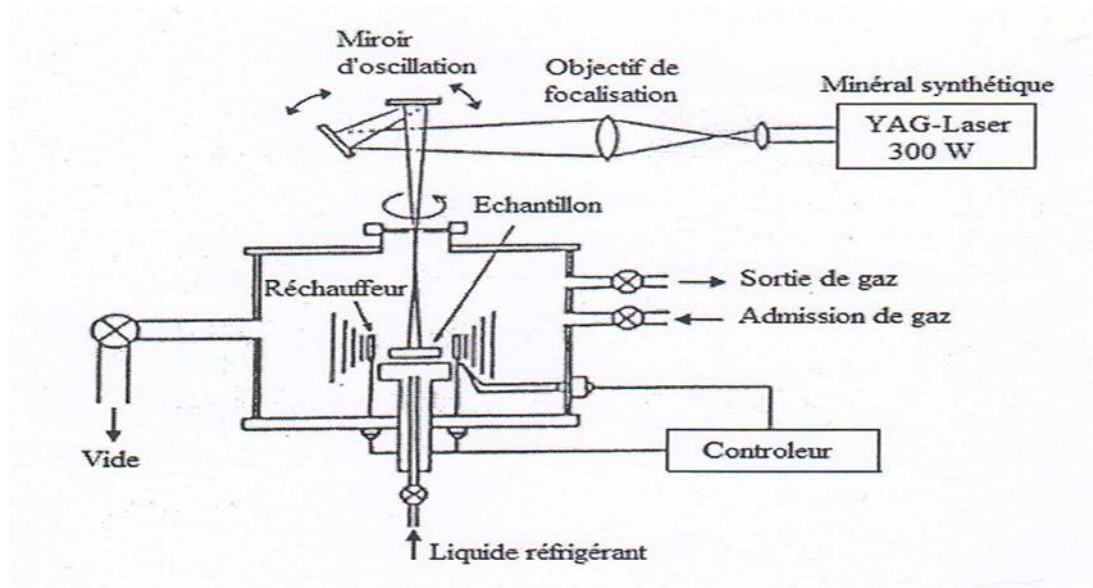


Figure (2.6) Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel

2.4.10 Implantation ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

2.5 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure 2.7. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

2.6 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Généralement les FGM sont fabriqués par deux ou plusieurs phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement

non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. *Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assurée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 2.8 – a) ;*
3. *Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 2.8– b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur.*

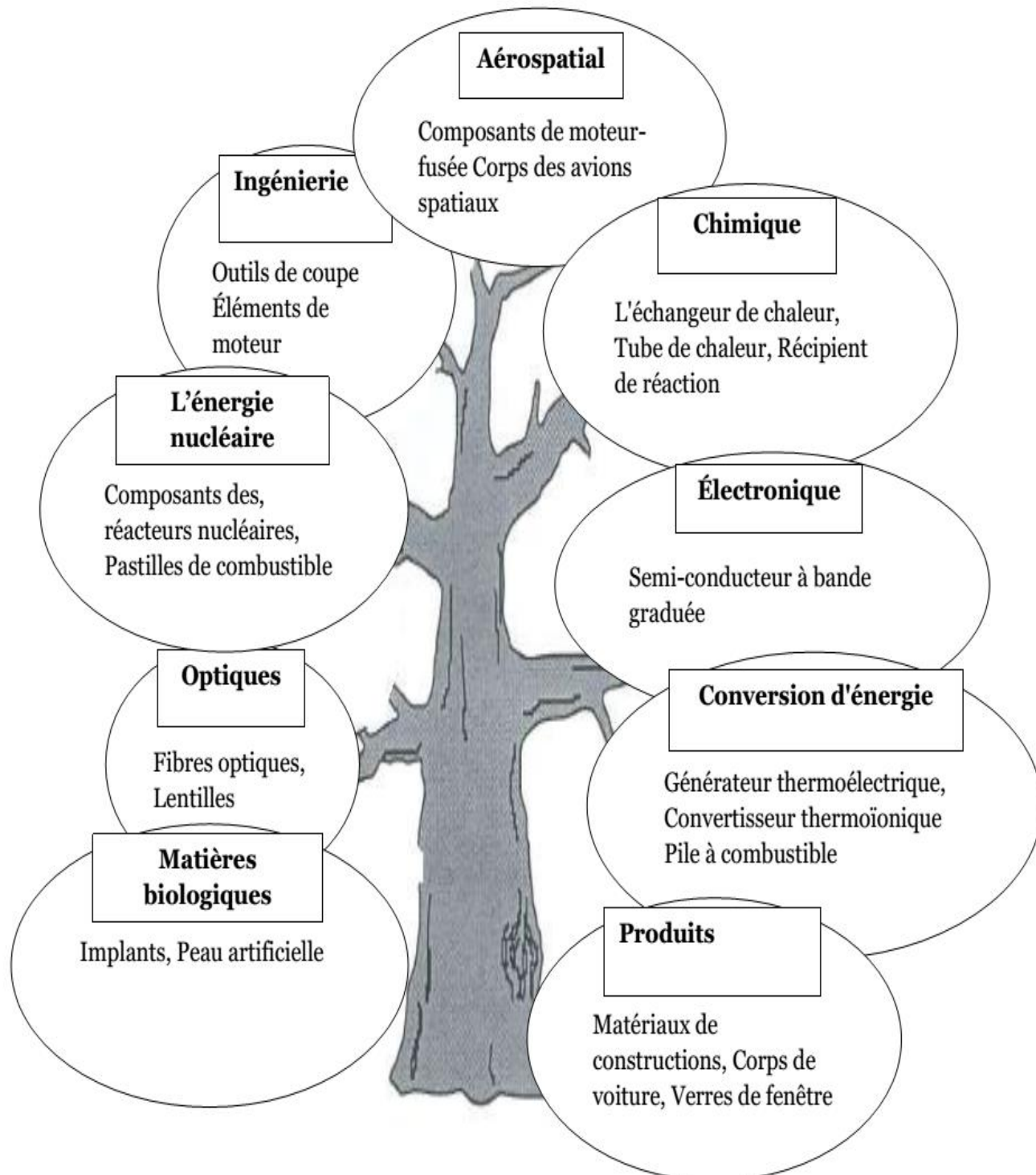


Figure (2.7) Principaux domaines d'application des FGM.

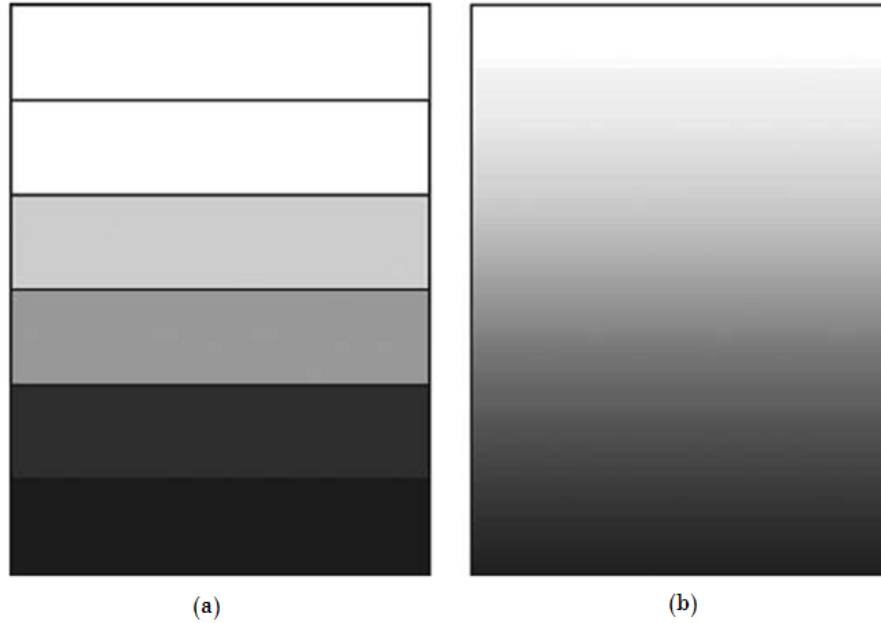


Figure (2.8) *Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.*

2.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés à la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [24], Les propriétés effectives des matériaux en FGM, comme module de Young, peuvent alors être exprimées comme suit :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i * V_i \quad (2.1)$$

Avec

P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , et

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (2.2)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Les liaisons entre les particules doivent être

assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

2.7.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (2.3)$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées pour un mélange de céramique et métal par la loi suivante [25]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) * V(z) \quad (2.4)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure et de la surface supérieure de la plaque FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure 2.9. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $1 < p$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $1 > p$

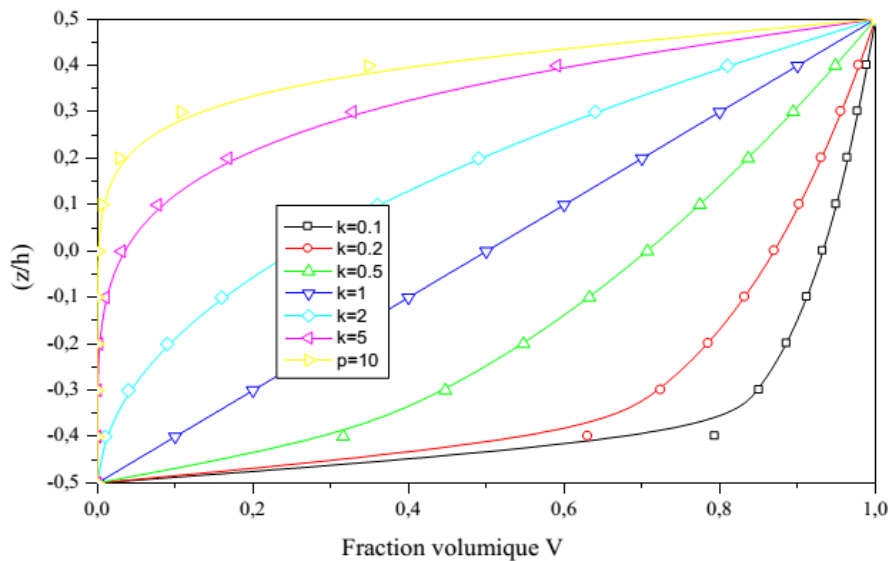


Figure (2.9) Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

2.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Deux fonctions de loi de puissance sont utilisées pour définir la fraction volumique de la plaque, afin d'assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h/2} \right)^p, \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (2.5a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h/2} \right)^p, \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (2.5b)$$

Le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) * E_1 + [1 + V_1(z)] * E_2, \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (2.6a)$$

$$E(z) = V_2(z) * E_1 + [1 + V_2(z)] * E_2, \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (2.6b)$$

La figure 2.10 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (2.5a) et (2.5b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

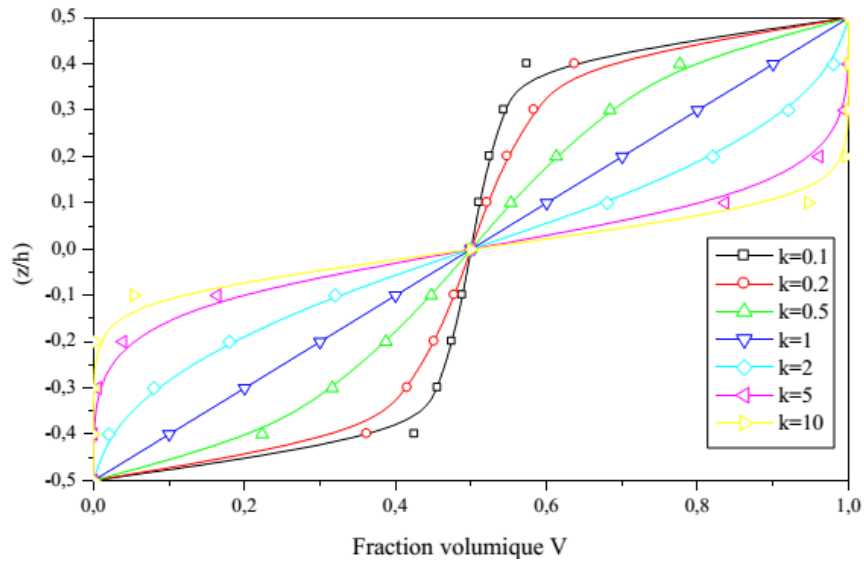


Figure (2.10) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

2.7.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme.

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (2.7a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} * \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (2.7b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure 2.11.

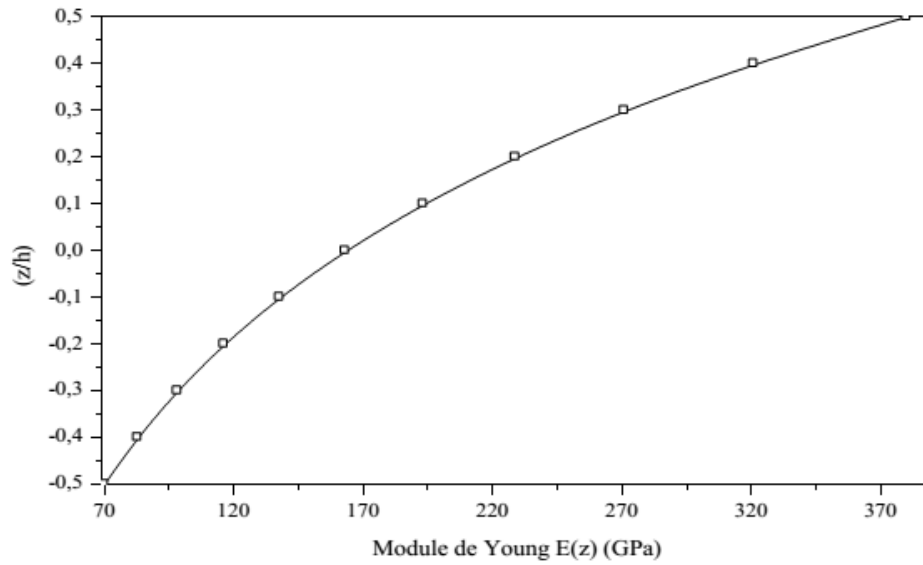


Figure (2.11) Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Et puis en est passé à décrire les différentes méthodes modernes d'usinage à savoir la méthode d'injection des poudres. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

Chapitre 3. Théories des plaques

3.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (*CPT : Classical plate theory*). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) (*FSDT : The first-order shear deformation plate theory*) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921) [26], Reissner (1945) [27] et Uflyand (1948) [28]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur (*HSDT : High-order shear deformation plate theory*) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

3.2 Différents modèles de plaque

Par modèle de plaque, on entend un modèle dans lequel on effectue une approximation de l'estimation des variables du champ de déplacement – généralement sur l'épaisseur de la structure – destinée à modéliser le comportement d'une plaque – le plus souvent multicouche – . Il n'est pas rare de rencontrer d'autres définitions d'un modèle de plaque, par exemple, Carrera [29], définit un modèle de plaque comme un modèle dans lequel le degré d'interpolation au travers de l'épaisseur est au moins d'un degré inférieur à celui des autres directions.

Parmi les modèles de plaque, on distingue deux grandes familles, les modèles *Equivalent Single Layer* (ESL – modèle couche équivalente) et les modèles *Layer-Wise* (LW – par couche). Les modèles ESL expriment chaque composante du champ de déplacement en fonction de variables définies sur un plan de référence, décrit par les coordonnées x et y dans le plan, et fonction de z la direction normale au plan $x ; y$ traduit ce qui se passe dans l'épaisseur.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane et des dérivées de la flèche.

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (3.3). La figure 3.1 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et sur-estimer les charge critique de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de "plaques minces".

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.3b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.3c)$$

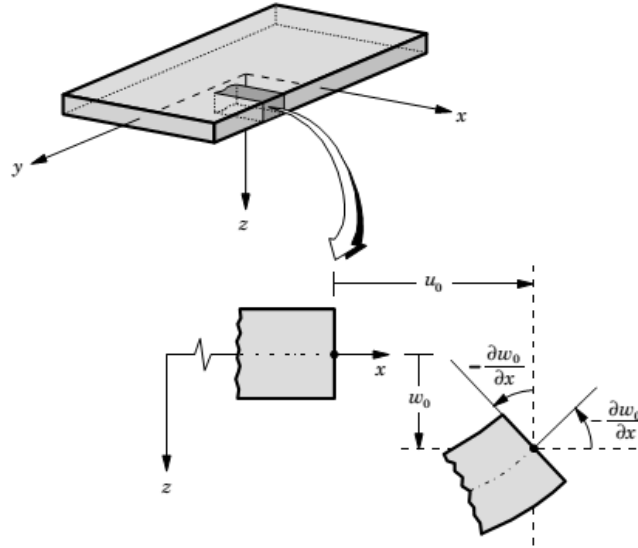


Figure (3.1) Plaque de Love Kirchhoff [30].

Ce modèle a été utilisé par plusieurs chercheurs pour analyser le comportement des plaques. Feldman et Aboudi [29] ont étudié le flambement élastique de plaque en FGM soumise à une charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison micromécanique et des approches structurales. Ils ont donné une solution analytique de la charge de flambement d'une plaque en FGM avec diverses conditions aux limites des équations gouvernantes dérivées par la théorie classique CPT. Javaheri et Eslami [30], [31] utilisent la théorie classique pour étudier le flambement des plaques en FGM sous quatre types de charge thermique et des charges de compression. Basé sur la théorie classique, Kiani et al [32] présentent une solution analytique de la température critique de flambement des plaques encastrées sur fondation élastique soumise à trois types de charges thermiques.

Ghannadpour et al [31] ont examiné aussi le flambement thermique des plaques en FGM en utilisant la théorie classique (CPT). Cependant, la charge de flambement a été calculée par la méthode des bandes finies au lieu de la solution de Navier. Le flambement des plaques en FGM soumise à une compression non uniforme a été analysé par Mahdavian [32] en utilisant la théorie classique et la solution de Fourier. Mohammadi et al [33] ont utilisé la méthode de

Levy pour étudier le flambement des plaques en FGM avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres sous conditions aux limites arbitraire pour résoudre les équations gouvernantes dérivées par la théorie classique.

Alinia et Ghannadpour [34] ont utilisés la théorie classique avec les hypothèses de von - Karman pour étudier la réponse non linéaire des plaques en FGM soumise à des pressions transversales. Par le principe de minimisation de l'énergie potentielle, les auteurs ont obtenus une solution analytique pour une plaque simplement appuyée.

La vibration libre des plaque en FGM avec diverse condition aux limites sur fondation élastique a été analysé par Chakraverty et Pradhan [35] en utilisant la théorie classique et la méthode de Rayleigh – Ritz. Les même auteurs [36] ont confirment leur précédent travail par le prise en considération de l'effet d'un environnement thermique.

La théorie classique des plaques a été aussi utilisée pour analyser le comportement des plaques circulaires et des coques.

Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de u_0 , v_0 , des dérivées de la flèche w_0 et des cisaillements. L'équation (3.4) présente le champ de déplacement associé à ce modèle. Celui-ci, développé par Reissner [27], fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse ; Mindlin [37] développa la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des rotations $\phi_x(x, y)$ et $\phi_y(x, y)$. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (3.4a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (3.4b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.4c)$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations dues à la flexion suivant x et y .

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a été utilisée par Lanhe [38] et Bouazza et al. [39] Ont donné une solution analytique de flambement thermique des plaque en FGM simplement appuyée sous deux types de chargement thermique en utilisant la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la solution de Navier.

Cette théorie a été utilisée par Yaghoobi et Yaghoobi [40] pour analyser le flambement des plaques sandwichs en FGM sur fondation élastique sous chargement thermique et mécanique.

Des solutions analytiques de la vibration libres par la méthode de Levy des plaques sur fondation élastique ont été données par Hosseini-Hashemi et al [41]. Ils ont confirmés leurs précédents travail par la prise en compte de l'effet de couplage entre les déplacements en plan et transverse [42].

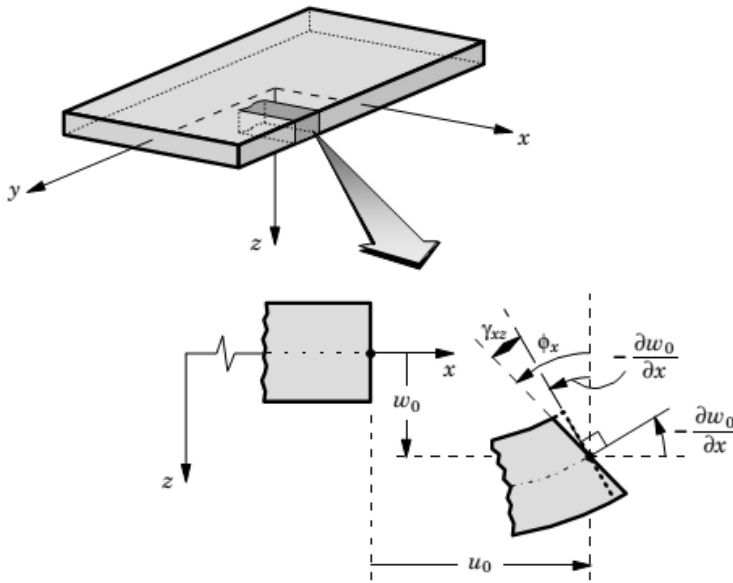


Figure (3.2) Plaque de Reissner-Mindlin [30].

Mohammadi et al. [43] Découple les cinq équations de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) en deux équations indépendantes. Ensuite la méthode de Levy a été utilisée pour obtenir la charge de flambement des plaques en FGM sous chargement en plan. Cette approche a été aussi employée par Saidi et Jomehzadeh [44] pour dériver par la méthode de Levy la flèche et les contraintes des plaques en FGM soumise à un chargement transverse. Yaghoobi et Torabi ont adapté cette approche pour obtenir la charge de flambement des plaques en FGM sur fondation élastique sous chargements thermiques [45].

Comme précisé précédemment, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) nécessite un facteur de correction du cisaillement transversal. Pour dépasser cette insuffisance, Nguyen et al [46] ; ont adoptés les équations d'équilibre pour calculer les contraintes de cisaillement transversales et les forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de la flexion statique des plaques en FGM simplement appuyées et des panneaux sandwich en FGM encastre indique que la valeur du facteur de correction des plaques en FGM n'est pas le même comme dans les plaques homogènes.

Baser sur la surface neutre, la théorie du premier ordre de cisaillement a été adopté par Singha et al pour étudier la flexion non linéaire des plaques en FGM sous pression transversale en utilisant la méthode des éléments finis. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement sont calculées à partir des équations d'équilibre, tandis que l'expression du facteur de correction est obtenue par la méthode énergétique [47].

Park et Kim [48] ont choisis la théorie du premier ordre de cisaillement avec les hypothèses de van – Karman pour étudier le post flambement et la vibration des plaque en FGM sous chargement thermique par la méthode des éléments finis.

Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé

Une fois introduits dans les modèles du premier ordre, les facteurs de correction du cisaillement transversal ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leurs évaluations dépendent malheureusement du nombre de stratifications c.à.d. du problème à résoudre. Pour écarter à jamais ce type de contrainte, des théories d'ordre élevé ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à trois. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand

nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans Reddy [49]; Kant et Swaminathan [50].

Le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque de coordonnées (x, y, z) peut être écrit comme suit :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \theta_x \quad (3.5a)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \theta_y \quad (3.5b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (3.5c)$$

Où u, v, w sont les déplacements suivant les directions x, y et z respectivement, u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations dues à la flexion suivant X et Y respectivement. $\psi(z)$ Représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations de cisaillement transversales et les contraintes à travers l'épaisseur.

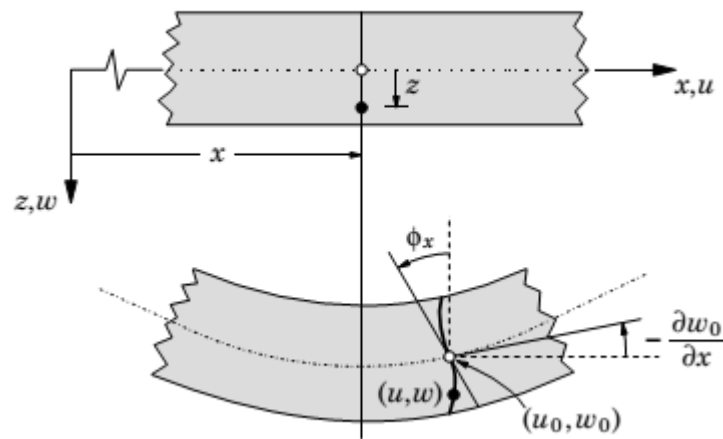


Figure (3.3) Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [30].

Selon l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$, quelques modèles d'ordre élevés se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

L'approche de Reddy [49] - [51] - [30] : théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) $\psi(z)$ est donné comme suit :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^3} \right) \quad (3.6)$$

La théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdale (SSDPT) de Touratier [52] et de Zenkour et Alghamdi [53] est donnée comme suit :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3.7)$$

En outre, la théorie des plaques de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) de Karama [54] est donnée comme suit :

$$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (3.8)$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

La théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) est la théorie d'ordre élevé la plus utilisée due à sa simplicité. Cette théorie a été adoptée par Saidi et al. [55] pour dériver des solutions analytiques pour la déflexion et les contraintes des plaques en FG soumises à des charges transversales par la méthode de Levy. Thaï et Kim [56] ont reformulé la TSDT basée sur la surface neutre, ont dérivée par la solution de Levy la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Nguyen et Pham [57] ont étudié le comportement post flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Des solutions analytiques pour la charge de flambement et la température de flambement des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques ont été obtenues en utilisant la TSDT et la méthode de Galerkin.

Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques :

Shimpi [58] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : *Refined Plate Theory*). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq

dans le cas des autres théories d'ordre élevés. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations d'équilibres, les conditions aux limites et les expressions des moments.

Ait Atmane et al. [59] ont adaptée une théorie raffinée pour étudier la flexion des plaques FGM. Thai et Kim [[60] - [61]] et Hadji et al. [62] ont utilisés la RPT, à l'étude du flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Bouderba et al. [63] Ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwichs reposants sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique.

3.2.2 *Approche par couche*

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [49] - [64] - [65] - [66] . Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes :

- *les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.*
- *les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches (Figures. 3.4 et 3.5)*

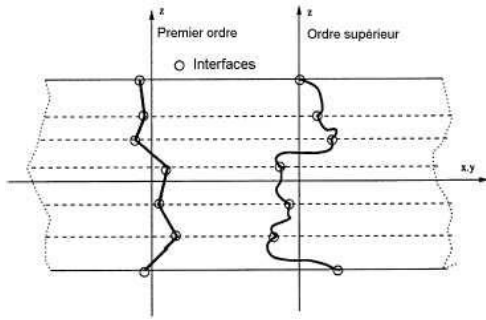


Figure (3.4) Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [67]

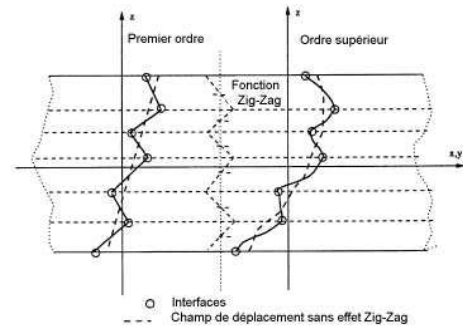


Figure (3.5) Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [67]

3.2.3 Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [68]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure.3.6). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

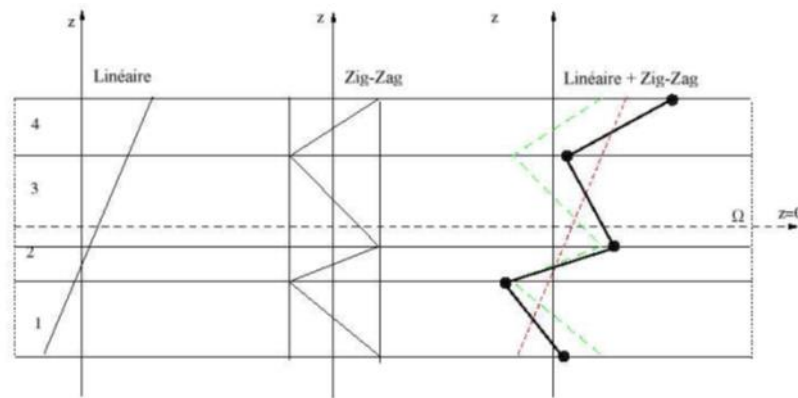


Figure (3.6) Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [67].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur ce concept plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [67] - [69] - [70] - [71]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.3.7).

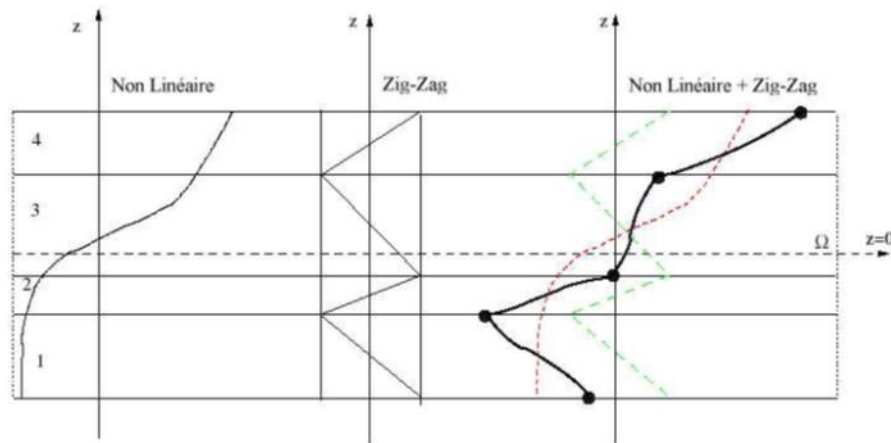


Figure (3.7) Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [67].

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

Dans les travaux de Ossadzow [72] et Karama [73], la fonction zig-zag est ajoutée à la fonction "sinus" de déplacement pour raffiner les effets de cisaillement.

Afaq et al. [66] Combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Cependant quand l'élancement diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis [71].

3.2.4 Modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. 3.4). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux

interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [74] - [75], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [76] - [77] - [78] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [76] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces.

Dans [77], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [78], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [79]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, (n : étant le nombre de couches de la plaque). Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions

aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [67].

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Chapitre 4. Formulation théorique

4.1 Introduction

L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce chapitre est consacré à l'analyse du comportement thermomécanique en flexion des plaques sandwichs en FGM et le flambement avec diverse conditions aux bords.

Les formulations théoriques sont basées sur une théorie raffinée de déformation de cisaillement trigonométrique (RTSDT). La théorie utilisée, est basée sur l'hypothèse que les déplacements axiale et transversale sont constitués d'une partie de flexion et une autre de cisaillement de telle sorte que la composante de flexion ne contribue pas dans les efforts de cisaillement et de même, la composante de cisaillement ne contribue pas dans les moments de flexions, Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

4.2 Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwichs en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) comme le montre la figure 1.1.a

Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont Parallèles aux axes x et y .

La plaque sandwichs est composée de trois couches élastiques : " couche 1", " couche 2" et " couche 3" du bas vers le haut de la plaque (Figure 1.1b). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la plaque sont notées par : $h_0 = -h/2$, $h_1, h_2, h_3 = h/2$, respectivement. Le volume et la surface supérieure qu'est soumise à une charge transversale, $q(x, y)$, sont notés par V et Ω , respectivement. Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la plaque est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-2-2", "1-1-3" et ainsi de suite.

La fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur :

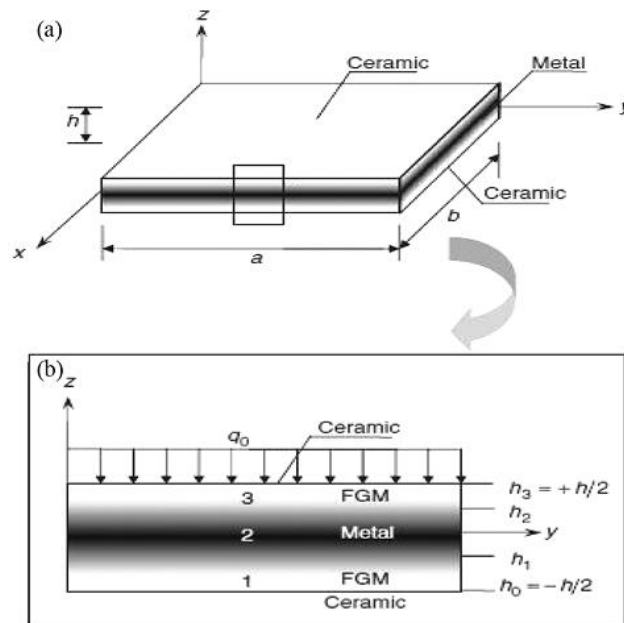


Figure (4.1) Système de coordonnées et numérotation des couches

La fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p, z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)} = 1, z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p, z \in [h_2, h_3] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Où

$V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche n ; p est l'indice de la fraction volumique ($0 < p < +\infty$), qui indique le profil de la variation matérielle à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles, comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , le coefficient de dilatation thermique α , peuvent être exprimées par la loi de mélange [80]

$$P^{(n)}(z) = P_c + (P_m - P_c)V^{(n)} \quad (4.2)$$

Où

$P^{(n)}$ est la propriété de matérielle effective de la couche n . P_c et P_m correspondent à la propriété des faces inférieure et supérieure respectivement de la couche 1 ($h_0 \leq z \leq h_1$), et vice versa pour la couche 3 ($h_2 \leq z \leq h_3$), selon la fraction de volume $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$). On Note que P_c et P_m sont, respectivement, les propriétés correspondantes à la céramique et au métal de la plaque sandwich FGM. Dans cette étude le coefficient de poisson de la plaque est supposé constant. Cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young [81].

4.3 Théorie des plaques raffinée pour les FGM

Contrairement aux autres théories, le nombre des inconnues dans la théorie raffinée (RPT) actuelle est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement [49] - [52] - [53] - [54], le nombre d'inconnus est cinq. La théorie utilisée est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement, et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions des surfaces libres.

4.3.1 Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT)

Les hypothèses de la RPT sont les suivantes :

Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, ces déplacements impliqués sont infinitésimales.

Le déplacement transversal w comprend deux composantes : w_b due à la flexion et w_s due au cisaillement transverse. Ces composantes sont des fonctions des coordonnées x et y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4.7)$$

La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y . Le déplacement U suivant la direction x et V suivant la direction y sont constitués de trois composantes : d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$\begin{cases} U = u_0 + u_b + u_s \\ V = v_0 + v_b + v_s \end{cases} \quad (4.8)$$

Les composants de flexion u_b et v_b sont considérées semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \end{cases} \quad (4.9)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en relation avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle façon que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} seront nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{cases} \quad (4.10)$$

4.3.2 Cinématique et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations (4.7) – (4.10).

$$\begin{cases} U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (4.11a)$$

Avec

$$f(z) = z - \psi(z) \text{ et } \psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^3} \right) \quad (4.11b)$$

Les déformations associées aux déplacements de l'équation (4.11a) sont donnés comme suit

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} = g(z)\gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} = g(z)\gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Avec

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial xy}, k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial xy} \\ \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{cases} \quad (4.13)$$

Pour les matériaux en FGM, élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4.14a)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4.14b)$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (4.2), les coefficients de rigidité Q_{ij} sont exprimés comme suit

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (4.15)$$

4.3.3 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels :

$$\int_{-h/2\Omega}^{+h/2} \int_{\Omega} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (4.16)$$

Où : Ω est la surface supérieure de la plaque.

En substituant les équations (4.12) et (4.14) dans l'équation (4.16) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (4.16) peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (4.17)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^n \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (4.18a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz \quad (4.18b)$$

Et h_n et h_{n-1} sont les coordonnées inférieure et supérieure de la n ème couche.

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues à partir de l'équation (4.17) en intégrant les gradients de déplacement par parties et mettant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s égale à zéro séparément. Ainsi, on obtient les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation de cisaillement :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

En substituant l'équation (4.14) dans l'équation (4.18), les résultantes des efforts de la plaque sandwich seront :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (4.20)$$

Avec

$$\begin{aligned}
N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \\
N^T &= \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \\
\varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \\
A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\
B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \\
S &= \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Où A_{ij} , B_{ij} , etc., sont les éléments de la matrice de rigidités définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz, \tag{4.22}$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \tag{4.23a}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1-\nu)} [g(z)]^2 dz, \tag{4.23b}$$

Les efforts et les moments résultants : $N_x^T = N_y^T, M_x^{bT} = M_y^{bT}$ and $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ due à la charge thermique sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \tag{4.24}$$

La distribution de la température à travers l'épaisseur est supposée sous la forme

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\Psi(z)}{h} T_3(x, y), \tag{4.25}$$

Où T_1 , T_2 and T_3 sont des charge thermique. Dans le cas nous considérons

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right).$$

substituant l'équation (4.19) dans l'équation (4.20), on obtient,

$$\begin{aligned} & A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b \\ & - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = p_1, \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned} & A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b \\ & - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = p_2, \end{aligned} \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned} & B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 \\ & - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s \\ & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s = p_3 \end{aligned} \quad (4.26c)$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 \\ & - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s \\ & - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s = p_4 \end{aligned} \quad (4.26d)$$

avec $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}^t$ est le vecteur des forces généralisé, d_{ij} , d_{ijl} and d_{ijlm} sont les opérateurs de dérivations données comme suit:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (4.27)$$

Les composantes du vecteur force généralisé $\{p\}$ sont données comme suit

$$p_1 = \frac{\partial N_x^t}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial N_y^t}{\partial y}, \quad p_3 = q - \frac{\partial^2 M_x^{bt}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bt}}{\partial y^2}, \quad p_4 = q - \frac{\partial^2 M_x^{st}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{st}}{\partial y^2}, \quad (4.29)$$

Solution exacte pour une plaque sandwichs FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type de support utilisé. Dans ce travail, la solution exacte de l'équation 4.26a–d pour une plaque FGM simplement appuyée est donnée. Pour cette théorie raffinée des plaques à quatre variables, les conditions aux limites suivantes sont imposées sur les surfaces libres :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ at } x = -a/2, a/2 \quad (4.30a)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ at } y = -b/2, b/2 \quad (4.30b)$$

Pour résoudre ce problème, nous supposons que la charge mécanique transversale et le champ de température q, T_1, T_2 et T_3 sont sous la forme d'une double série de Fourier donnée comme suit

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (4.31)$$

avec $\lambda = \pi/a$, $\mu = \pi/b$, $q_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2$ et $\bar{T}_3$ sont des constantes.

Les solutions du problème peuvent alors être recherchées en écrivant les déplacements u_0, v_0, w_b , et w_s sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant aux conditions aux frontières. Par exemple :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Où U, V, W_b et W_s sont des paramètres arbitraires à déterminer suivant que la solution de l'équation (4.32) vérifie l'équation (4.26). Nous obtenons alors l'équation suivante

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (4.33)$$

Avec $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$ et $[K]$ est la matrice symétrique donnée comme suit

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Avec :

$$a_{11} = -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \quad (4.35a)$$

$$a_{12} = -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \quad (4.35b)$$

$$a_{13} = \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \quad (4.35c)$$

$$a_{14} = \lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \quad (4.35d)$$

$$a_{22} = -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \quad (4.35e)$$

$$a_{23} = \mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \quad (4.35f)$$

$$a_{24} = \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \quad (4.35g)$$

$$a_{33} = -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \quad (4.35h)$$

$$a_{34} = -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \quad (4.35j)$$

$$a_{44} = -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2) \quad (4.35k)$$

Les composantes du vecteur généralisé du vecteur force $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^t$ sont :

$$P_1 = \lambda (A^T \bar{T}_1 + B^T \bar{T}_2 + {}^a B^T \bar{T}_3) \quad (4.36a)$$

$$P_2 = \mu (A^T \bar{T}_1 + B^T \bar{T}_2 + {}^a B^T \bar{T}_3), \quad (4.36b)$$

$$P_3 = -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2) (B^T \bar{T}_1 + D^T \bar{T}_2 + {}^a D^T \bar{T}_3) \quad (4.36c)$$

$$P_4 = -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2) ({}^s B^T \bar{T}_1 + {}^s D^T \bar{T}_2 + {}^s F^T \bar{T}_3). \quad (4.36d)$$

ou

$$\{A^T, B^T, D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+\nu) \alpha(z) \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz, \quad (4.37a)$$

$$\{{}^a B^T, {}^a D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+\nu) \alpha(z) \bar{\psi}(z) \{1, \bar{z}\} dz, \quad (4.37b)$$

$$\{{}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+\nu) \alpha(z) \bar{f}(z) \{1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)\} dz. \quad (4.37c)$$

avec $\bar{z} = z/h$, $\bar{f}(z) = f(z)/h$ et $\bar{\psi}(z) = \psi(z)/h$.

4.3.4 Flambement des plaques sandwichs en matériaux FGM avec diverses conditions aux bords

Il sera considéré dans cette partie une plaque sandwich en FGM, avec les faces externes (peaux) en FGM et cœur homogène en céramique. Les propriétés matérielles effectives, sont exprimées par la loi de mélange suivante :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (4.38)$$

La fraction volumique dans la plaque est assurée par une loi de puissance suivant l'équation (4.1).

Équations gouvernantes

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$Ue = \frac{1}{2} \int [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (4.39)$$

En négligeant l'effet de température et en remplaçant les équations (4.12) et (4.14) dans l'équation (4.39) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$Ue = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s \right] dx dy \quad (4.40)$$

Où les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\ (S_{xy}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) g dz \end{aligned} \quad (4.41)$$

Substituant l'équation (4.14) dans l'équation (4.41) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (4.43a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad (4.43b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (4.43c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (4.43d)$$

Où Les composantes de rigidité A_{ij} , B_{ij} , etc , sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} Q \begin{pmatrix} 1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ v^{(n)} \\ \frac{1-v^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (4.44a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-v^2} \quad (4.44b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{2(1+v)} [g(z)]^2 dz \quad (4.44c)$$

Les équations d'équilibres de la plaque sandwich FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe des travaux virtuels sous la forme analytique suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} (\sigma \delta \varepsilon) dx dy dz - \int_{\Omega} \bar{N} \delta W dx dy = 0 \quad (4.45)$$

avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.46)$$

Où δ indique la variation suivant x et y

En remplaçant l'équation (4.41) dans l'équation (4.45) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients δu , δv , δw_b et δw_s , les équations d'équilibres pour la plaque sandwich FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned}
\delta u &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v &= \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w_b &= \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \\
\delta w_s &= \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} = 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Équations (4.47) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_s, v_s, w_b, w_s) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (4.43). Les équations d'équilibre (4.47) prennent la forme :

$$\begin{aligned}
A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
- B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.48a}$$

$$\begin{aligned}
(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
- B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{4.48b}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
- D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
- 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} = 0
\end{aligned} \tag{4.48c}$$

$$\begin{aligned}
B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
- D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
- 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} = 0
\end{aligned} \tag{4.48d}$$

Solution exacte pour les plaques sandwichs FGM

Pour une solution analytique des équations (4.48), la méthode des variables séparées est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM sous diverses conditions aux bords.

- Encastré (C) :

$$u = v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } x = 0 \quad \text{et } y = 0, b \quad (4.49a)$$

- Simplement appuyé (S) :

$$v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } x = 0, a \quad (4.49b)$$

$$u = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{Pour } y = 0, b \quad (4.49c)$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (4.49) sont développées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) \\ V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

Ou U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres à déterminer. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ données dans le tableau (4.1) sont proposés par Sobhy [82] pour satisfaire les diverses conditions aux limites dans les équations (4.49) et (4.50) et $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$.

Tableau (4.1) Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

Conditions aux bords					Fonctions X_m et Y_n	
Notation	$x = 0$	$y = 0$	$x = a$	$y = b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	S	S	S	S	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSCS	C	S	C	S	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	C	C	C	C	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
FCFC	F	C	F	C	$\cos^2(\lambda x) [\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$

Substituant les équations (4.50) dans les équations d'équilibres (4.48) et en multipliant chaque équation par la fonction propre correspondante puis en intégrant sur le domaine de la solution, Nous pouvons obtenir, après quelques manipulations mathématiques, les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

Équation (4.51) présente un système aux valeurs propres pour le problème de flambement des plaques sandwichs en FGM :

$$([K] - [N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (4.52)$$

Ou $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus :

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bn}, W_{sn}\} \quad (4.53)$$

Dans lequel :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' dx dy \\
a_{12} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} + A_{66}) X_m' Y_n'' X_m' Y_n' dx dy \\
a_{13} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m'' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{14} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{21} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} + A_{66}) X_m'' Y_n' X_m' Y_n' dx dy \\
a_{22} &= \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n''' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m' Y_n' dx dy \\
a_{23} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{24} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{31} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m''' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{32} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{33} &= \int_0^a \int_0^b - [B_{22} X_m''' Y_n + 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' Y_n'' + D_{22} X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{34} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{41} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{42} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{43} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{44} &= \int_0^a \int_0^b - \left[H_{11}^s X_m''' Y_n + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) X_m'' Y_n'' + H_{22}^s X_m Y_n''' \right. \\
&\quad \left. + A_{55}^s X_m'' Y_n + A_{44}^s X_m Y_n'' \right] X_m' Y_n' dx dy \\
k &= N_{cr} \int_0^a \int_0^b (\gamma_1 X_m'' Y_n + \gamma_2 X_m Y_n'') X_m' Y_n' dx dy
\end{aligned} \tag{4.54}$$

En supposant qu'il existe un rapport entre les forces de compression de telle façon que $N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}$, $N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$.

4.4 Types de plaques sandwich

On note que l'âme de la plaque non symétrique est entièrement en métal tandis que les peaux supérieure et inférieure de la plaque sont riches en céramique.

Plusieurs types de plaques sandwich sont considérées dans cette étude :

Pour la flexion thermomécanique

La plaque sandwichs en FGM (1-2-2) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de l'âme est identique à l'épaisseur de la peau supérieure tandis qu'elle est le double de l'épaisseur de la peau inférieure. Nous avons Ainsi

$$h_1 = \frac{-3h}{10}, h_2 = \frac{h}{10}$$

La plaque sandwichs en FGM (1-1-3) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de l'âme est identique à l'épaisseur de la face inférieure et un tiers de l'épaisseur de la face supérieure Ainsi

$$h_1 = \frac{-3h}{10}, h_2 = \frac{-h}{10}$$

La plaque sandwichs en FGM (2-1-4) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de la face inférieure est le double de l'épaisseur de l'âme, or que de l'épaisseur de la face supérieure

$$h_1 = \frac{-3h}{14}, h_2 = \frac{-h}{14}$$

La plaque sandwichs en FGM (2-1-3) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de la face inférieure est le double de l'épaisseur de l'âme, or que de l'épaisseur de la face supérieure est triple de celle de l'âme.

$$h_1 = \frac{-h}{6}, h_2 = 0$$

La plaque sandwichs en FGM (4-1-3) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de l'âme est un quart de l'épaisseur de la face inférieure, cependant l'épaisseur de la face supérieure est triple de celle de l'âme.

$$h_2 = 0, h_3 = \frac{h}{8}$$

La plaque sandwichs en FGM (3-1-4) :

C'est une plaque non symétrique dont de l'épaisseur de l'âme est un quart de l'épaisseur de la face supérieure, alors que de l'épaisseur de la face inférieure est triple de celle de l'âme.

$$h_1 = \frac{-h}{8}, h_2 = 0.$$

Les cinq configurations suivantes sont utilisées dans l'analyse du flambement.

Configuration 1-0-1 : composée de deux couches de même épaisseur sans cœur.

Configuration 2-1-2 : dont l'épaisseur du cœur est la moitié de l'épaisseur des peaux.

Configuration 1-1-1 : l'épaisseur du cœur est le même que l'épaisseur des peaux.

Configuration 2-2-1 : l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur de la peau inférieur et le double de celle de la peau supérieur.

Configuration 1-2-1 : dans cette configuration, l'épaisseur du cœur est le double de l'épaisseur des peaux.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution analytique générale du comportement thermomécanique et le flambement avec diverse condition aux limites des plaques sandwichs en FGM. La formulation théorique est basée sur une théorie raffinée de déformation en cisaillement (RTSDT). Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans cette théorie est de quatre, alors que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description trigonométrique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats de l'autre théorie.

Chapitre 5. Validation des résultats

5.1 Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique et le flambement avec diverse condition aux limites des plaques sandwichs en FGM en utilisant une théorie raffinée. Le nombre de fonctions inconnues pour la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque sandwich varient sans interruption à travers l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs configurations de plaques sandwichs symétriques et non symétriques sont utilisés.

5.2 Analyse thermomécanique

Dans ce qui suit, une analyse thermomécanique de la flexion est présentée pour des plaques sandwichs en FGM non symétriques constituées d'une combinaison de métal et de céramique. Les propriétés des matériaux choisis sont :

Céramique P_c : Alumina, Al_2O_3) : $E_c = 380$ GPa; $\nu = 0.3$; $\alpha_c = 7.4 \times (10^{-6} / ^\circ C)$

Métal (P_m : Aluminium, Al) : $E_m = 70$ GPa; $\nu = 0.3$; $\alpha_m = 23.0 \times (10^{-6} / ^\circ C)$

Les paramètres non dimensionnels suivant sont utilisés :

La flèche au centre de la plaque :

$$\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + (10^3 \alpha_0 \bar{T}_2) / h} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

La contrainte axiale :

$$\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 E_0 \alpha_0 \bar{T}_2 a^2 / h^2} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right),$$

La contrainte de cisaillement :

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{a q_0 / h + E_0 \alpha_0 \bar{T}_2 a / 10 h} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right).$$

Avec $E_0 = 1$ GPa and $\alpha_0 = 10^{-6} / ^\circ C$

Des résultats numériques sont présentés dans les tableaux (5.1) – (5.4) pour différentes théories des plaques. D'autres résultats sont représentés dans les figures (5.1) – (5.3) en utilisant la présente théorie raffinée à quatre variables. Il est supposé, sauf dans le cas d'une indication contraire, que : $a / h = 10$, $a / b = 1$, $\bar{T}_1 = 0$, $q_0 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = 100$.

Le facteur de correction de cisaillement pour la théorie FSDPT est prise égale 5/6 ($K = 5/6$).

Afin de vérifier l'exactitude de cette théorie raffinée des plaques à quatre variables, des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir cette théorie et ceux de la théorie classique (CPT), théorie du premier (FSDPT) et la théorie d'ordre élevés (HSDPT).

Le tableau (5.1) présente les valeurs de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ au centre de la plaque sandwichs en FGM soumises à des charges mécaniques et thermiques varie à travers l'épaisseur. Les flèches considérées sont pour des indices de puissance $p = 0, 1, 2, 3, 4$, et 5 et pour différent types de plaques sandwichs non symétrique en FGM. Il est montré à travers ces résultats que l'effet de la déformation de cisaillement augmente de la flèche.

Tableau (1.1) *Flèches adimensionnelles pour différentes plaques carrées sandwichs en FGM ($q_0 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = 100$)*

$\bar{w}$						
p	Théories	1-2-2	1-1-3	2-1-4	2-1-3	4-1-3
0	CLPT	1.413445	1.413445	1.413445	1.413445	1.413445
	FSDPT	2.792544	2.792544	2.792544	2.792544	2.792544
	TSDPT	2.516394	2.516394	2.516394	2.516394	2.516394
	SSDPT	2.480497	2.480497	2.480497	2.480497	2.480497
	Présente	2.516394	2.516394	2.516394	2.516394	2.516394
1	CLPT	0.741921	0.710711	0.684503	0.681645	0.672022
	FSDPT	1.474149	1.411991	1.360459	1.354973	1.335921
	TSDPT	1.314553	1.261255	1.218898	1.215179	1.199409
	SSDPT	1.294093	1.241962	1.200486	1.196878	1.181483
	Présente	1.314553	1.261255	1.218898	1.215179	1.199409
2	CLPT	0.612412	0.589336	0.561763	0.556820	0.548003
	FSDPT	1.216585	1.170531	1.116160	1.106493	1.089006
	TSDPT	1.087560	1.047718	1.002660	0.995299	0.980627
	SSDPT	1.070795	1.031881	0.987788	0.980629	0.966308
	Présente	1.087560	1.047718	1.002660	0.995299	0.980627
3	CLPT	0.563641	0.546881	0.519531	0.513420	0.505581
	FSDPT	1.119518	1.086034	1.032050	1.020039	1.004485
	TSDPT	1.001753	0.972733	0.927670	0.918134	0.904990
	SSDPT	0.986422	0.958114	0.914012	0.904726	0.891893
	Présente	1.001753	0.972733	0.927670	0.918134	0.904990
4	CLPT	0.539273	0.526725	0.499987	0.493277	0.486239
	FSDPT	1.071010	1.045915	0.993119	0.979903	0.965937
	TSDPT	0.958751	0.937077	0.892798	0.882086	0.870242
	SSDPT	0.944143	0.923038	0.879696	0.869252	0.857688
	Présente	0.958751	0.937077	0.892798	0.882086	0.870242
5	CLPT	0.525034	0.515312	0.489265	0.482269	0.475860
	FSDPT	1.042661	1.023199	0.971760	0.957965	0.945248
	TSDPT	0.933568	0.916883	0.873614	0.862296	0.851499
	SSDPT	0.919386	0.903175	0.860813	0.849771	0.839229
	Présente	0.933568	0.916883	0.873614	0.862296	0.851499

Pour les plaques purement en métal ($p=0$), la différence entre la flèche des différentes configurations des plaques est insignifiante. La valeur de la flèche maximale est obtenue pour

la plaque en FGM (1-2-2) alors que la valeur minimale pour la plaque en FGM (4-1-3). De plus, il peut être constaté à travers les résultats du Tableau (5.1), que la présente théorie des plaques à quatre inconnues donne des résultats identiques à ceux déterminés par la théorie TSDPT à cinq inconnues.

Une comparaison entre la flèche des différentes configurations des plaques sandwichs en FGM pour $p = 1$ est représentée dans le tableau (5.2), la flèche calculée par les différentes théories de déformation de cisaillement diminue avec l'augmentation du rapport a/b .

Tableau (5.2) Influence du rapport a/b sur la flèche des plaques sandwichs en FGM ($p = 1$) et ($q_0 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = 100$).

Type	Théorie	$\bar{w}$					
		$a/b=0.5$	$a/b=1$	$a/b=1.5$	$a/b=2$	$a/b=2.5$	$a/b=3$
1-2-2	CLPT	1.197224	0.741921	0.454064	0.294231	0.202555	0.146692
	FSDPT	2.368789	1.474149	0.904666	0.587122	0.404549	0.293138
	TSDPT	2.116770	1.314553	0.804317	0.519956	0.356512	0.256795
	SSDPT	2.084441	1.294093	0.791467	0.511368	0.350382	0.252169
	Présente	2.116770	1.314553	0.804317	0.519956	0.356512	0.256795
1-1-3	CLPT	1.146902	0.710711	0.434953	0.281843	0.194026	0.140515
	FSDPT	2.268950	1.411991	0.866510	0.562355	0.387483	0.280771
	TSDPT	2.030052	1.261255	0.772289	0.499784	0.343155	0.247595
	SSDPT	1.999436	1.241962	0.760255	0.491816	0.337532	0.243405
	Présente	2.030052	1.261255	0.772289	0.499784	0.343155	0.247595
2-1-4	CLPT	1.104091	0.684503	0.419042	0.271580	0.186979	0.135420
	FSDPT	2.185620	1.360459	0.835015	0.541962	0.373450	0.270611
	TSDPT	1.961480	1.218898	0.746391	0.482986	0.331563	0.239171
	SSDPT	1.932307	1.200486	0.734877	0.475335	0.326141	0.235110
	Présente	1.961480	1.218898	0.746391	0.482986	0.331563	0.239171
2-1-3	CLPT	1.099310	0.681645	0.417335	0.270489	0.186234	0.134883
	FSDPT	2.176634	1.354973	0.831690	0.539820	0.371980	0.269548
	TSDPT	1.955561	1.215179	0.744000	0.481311	0.330292	0.238144
	SSDPT	1.926622	1.196878	0.732518	0.473649	0.324834	0.234033
	Présente	1.955561	1.215179	0.744000	0.481311	0.330292	0.238144
4-1-3	CLPT	1.083703	0.672022	0.411464	0.266692	0.183623	0.132993
	FSDPT	2.145942	1.335921	0.820017	0.532251	0.366768	0.265773
	TSDPT	1.930011	1.199409	0.734416	0.475163	0.326115	0.235168
	SSDPT	1.901666	1.181483	0.723171	0.467659	0.320770	0.231142
	Présente	1.930011	1.199409	0.734416	0.475163	0.326115	0.235168

Les contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ sont représentées dans tableau (5.3) pour $p = 0, 1, 2, 3, 4$, et 5 pour différentes configuration de plaque sandwichs en FGM. La plaque est soumise à une charge mécanique à la surface supérieure et une charge thermique variable à travers l'épaisseur.

La différence entre les contraintes pour les différentes configurations de plaque est insignifiante pour $p=0$ (plaque purement en métal). Le maximum de contrainte axiale est obtenu pour la plaque en FGM (1-2-2), or la plaque (2-1-4) à donne le minimum de contrainte axiale. On constate que les contraintes axiales sont très sensibles à la variation de l'indice de puissance p .

Tableau (5.3) Contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ pour des plaques sandwichs carrés en FGM

p	$\bar{\sigma}_x$						
	Théorie	1-2-2	1-1-3	2-1-4	2-1-3	4-1-3	3-1-4
0	CLPT	-3.479476	-3.479476	-3.479476	-3.479476	-3.479476	-3.479476
	FSDPT	-7.138567	-7.138567	-7.138567	-7.138567	-7.138567	-7.138567
	TSDPT	-5.011730	-5.011730	-5.011730	-5.011730	-5.011730	-5.011730
	SSDPT	-4.874091	-4.874091	-4.874091	-4.874091	-4.874091	-4.874091
	Présente	-5.011730	-5.011730	-5.011730	-5.011730	-5.011730	-5.011730
1	CLPT	0.691667	-0.599486	-0.796309	-0.513064	0.107398	-0.621406
	FSDPT	1.132393	-1.430811	-1.817382	-1.254325	-0.030788	-1.469843
	TSDPT	3.425210	1.204504	0.887359	1.381876	2.354094	1.188593
	SSDPT	3.477273	1.300772	0.990222	1.475326	2.417547	1.284867
	Présente	3.425211	1.204503	0.887358	1.381875	2.354094	1.188593
2	CLPT	-2.781057	-3.816567	-4.049561	-3.836583	-3.231453	-3.927204
	FSDPT	-5.774491	-7.834612	-8.293877	-7.869479	-6.672963	-8.050100
	TSDPT	-2.703587	-4.544710	-4.921801	-4.530571	-3.541428	-4.695469
	SSDPT	-2.552915	-4.362581	-4.730898	-4.344928	-3.382407	-4.507586
	Présente	-2.703587	-4.544710	-4.921801	-4.530572	-3.541427	-4.695468
3	CLPT	-4.058427	-4.867866	-5.115283	-4.962304	-4.396726	-5.034810
	FSDPT	-8.317061	-9.928763	-10.417044	-10.111771	-8.992555	-10.256418
	TSDPT	-4.986769	-6.452519	-6.857134	-6.566366	-5.623962	-6.700242
	SSDPT	-4.801038	-6.244638	-6.639804	-6.351645	-5.432486	-6.483860
	Présente	-4.986768	-6.452520	-6.857135	-6.566367	-5.623963	-6.700243
4	CLPT	-4.682735	-5.327060	-5.578862	-5.468539	-4.940960	-5.526891
	FSDPT	-9.560069	-10.843683	-11.340867	-11.120407	-10.076075	-11.236901
	TSDPT	-6.112143	-7.292916	-7.707917	-7.491867	-6.604264	-7.600934
	SSDPT	-5.909939	-7.074536	-7.479993	-7.265005	-6.398142	-7.372845
	Présente	-6.112143	-7.292916	-7.707917	-7.491866	-6.604264	-7.600934
5	CLPT	-5.039916	-5.563985	-5.815537	-5.735472	-5.240884	-5.783042
	FSDPT	-10.271317	-11.315795	-11.812593	-11.652332	-10.673216	-11.747368
	TSDPT	-6.759728	-7.728496	-8.145302	-7.983575	-7.147299	-8.073488
	SSDPT	-6.548418	-7.504927	-7.912321	-7.750728	-6.933354	-7.839728
	Présente	-6.759729	-7.728497	-8.145302	-7.983576	-7.147299	-8.073488

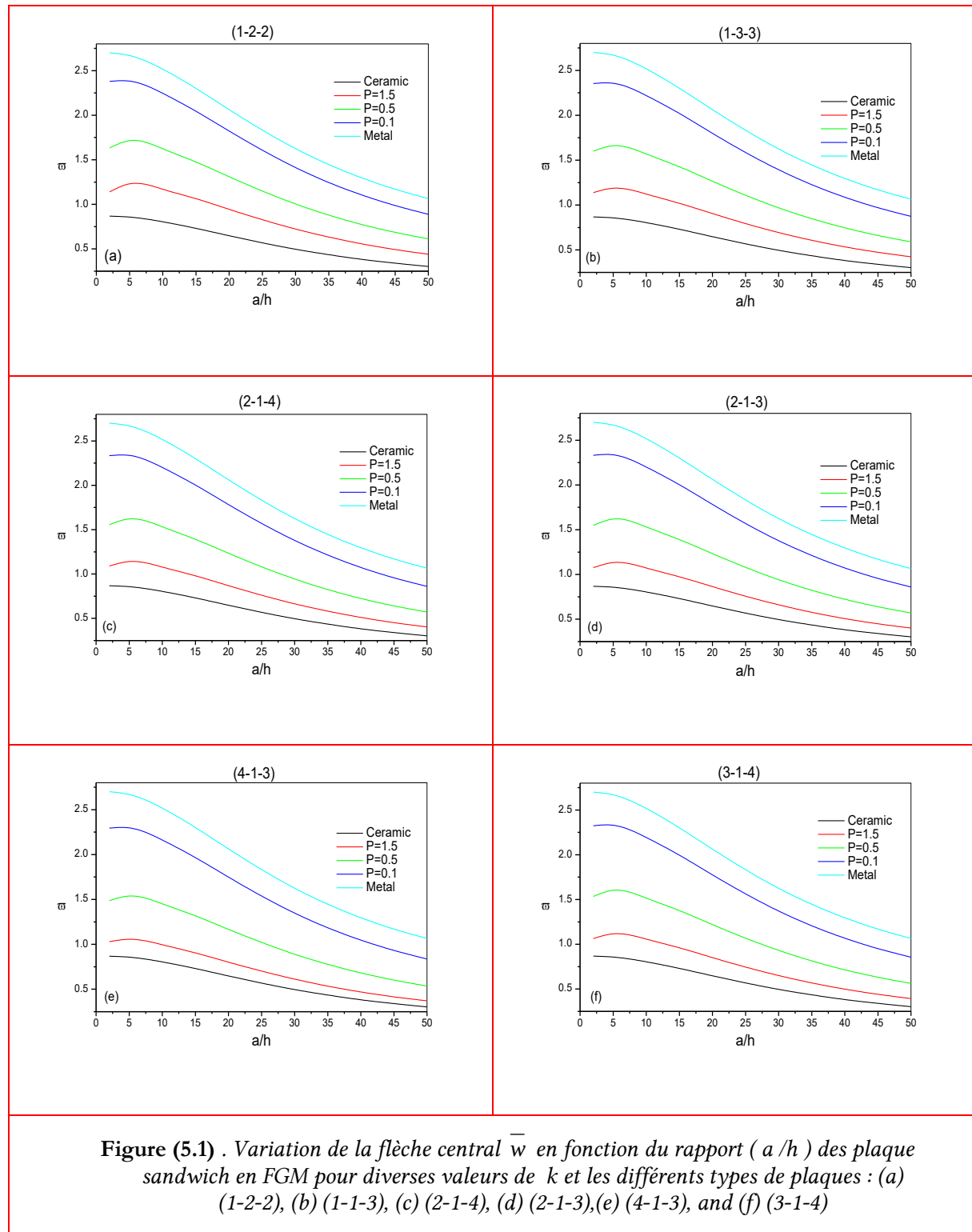
Les contraintes de cisaillement transverse adimensionnelles $\bar{\tau}_{xz}$ sont montrées dans le tableau (5.4). Comme pour les contraintes axiales la différence entre les contraintes des différentes configurations de plaque est insignifiante pour les plaque en métal. Pour les plaques en FGM, la valeur absolue des contraintes de cisaillement transverse diminue avec

l'augmentation de l'indice de puissance p . En générale, les plaques purement en métal donne des grandes flèche et contrainte de cisaillement transverse. Quand l'indice de la fraction volumique des plaques en FGM augmente, la flèche diminuée. On note aussi que la présente théorie et la théorie TSDPT coïncide.

Tableau (5.4) Contraintes $\bar{\tau}_{xz}$ pour des plaques sandwichs carrés en FGM

$\bar{\tau}_{xz}$						
p	Théorie	1-2-2	1-1-3	2-1-4	2-1-3	4-1-3
0	FSDPT	0.173624	0.173624	0.173624	0.173624	0.173624
	TSDPT	0.138737	0.138737	0.138737	0.138737	0.138737
	SSDPT	0.127602	0.127602	0.127602	0.127602	0.127602
	Présente	0.138737	0.138737	0.138737	0.138737	0.138737
1	FSDPT	0.074562	0.062648	0.059912	0.061023	0.059106
	TSDPT	-0.473655	-0.317687	-0.328521	-0.363758	-0.347478
	SSDPT	-0.566482	-0.376917	-0.393345	-0.439146	-0.420507
	Présente	-0.473655	-0.317687	-0.328521	-0.363758	-0.347478
2	FSDPT	0.062648	0.051644	0.049177	0.050176	0.048453
	TSDPT	-0.382601	-0.213288	-0.206870	-0.231508	-0.210823
	SSDPT	-0.466477	-0.256248	-0.252876	-0.286671	-0.262342
	Présente	-0.382601	-0.213288	-0.206870	-0.231508	-0.210823
3	FSDPT	0.058013	0.047475	0.045133	0.046080	0.044448
	TSDPT	-0.298778	-0.153458	-0.135754	-0.148293	-0.128347
	SSDPT	-0.369763	-0.186563	-0.169628	-0.188569	-0.164828
	Présente	-0.298778	-0.153458	-0.135754	-0.148293	-0.128347
4	FSDPT	0.055547	0.045282	0.043011	0.043929	0.042347
	TSDPT	-0.243328	-0.121109	-0.096816	-0.101075	-0.082642
	SSDPT	-0.304722	-0.148753	-0.123730	-0.132304	-0.110202
	Présente	-0.243328	-0.121109	-0.096816	-0.101075	-0.082642
5	FSDPT	0.054016	0.043929	0.041704	0.042603	0.041054
	TSDPT	-0.206248	-0.1020127	-0.073823	-0.072658	-0.055686
	SSDPT	-0.260827	-0.1264059	-0.096512	-0.098209	-0.077751
	Présente	-0.206248	-0.102013	-0.073823	-0.072658	-0.055686

Dans la figure (5.1) est représentée la variation de la flèche de différentes configurations des plaques sandwichs non symétrique en fonction du rapport cote - épaisseur a/h . il a été trouvé que les plaques purement en métal ont une large flèche alors que les plaque en céramique ont une flèche de petite magnitude. On note que les plaques sandwichs non symétrique en FGM de propriétés intermédiaire ont données des valeurs des flèches intermédiaires.



Les flèches des plaques sandwichs non symétrique en FGM diminuent lorsque le rapport côte – épaisseur est supérieur ou égale à quatre ($a/h \geq 4$). Ceci est normal car la plaque métallique est celle qui a la rigidité la plus faible et la plaque en céramique est l’une de la plus grande rigidité.

La variation des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques pour les différentes configurations des plaques sandwichs en FGM sont représentées à la figure (5.2) pour $p = 0, 0.1, 0.5$ et 1.5 . Les contraintes sont des contraintes de traction au-dessous du plan médian et des contraintes de compression au-dessus du plan médian et peuvent changer de traction à la compression, et vice versa.

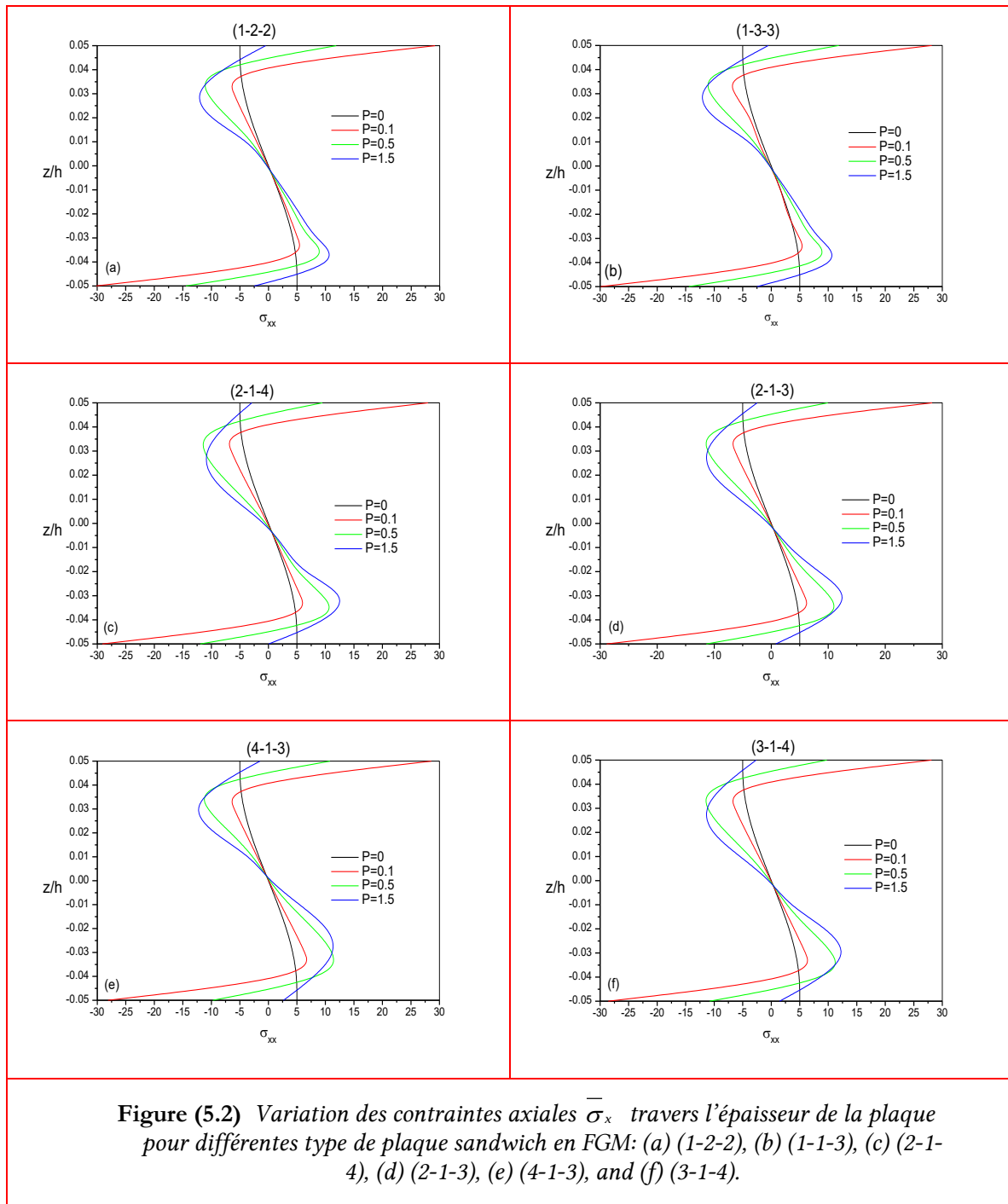
Les plaques FGM sont très sensibles à la variation du rapport de l'épaisseur (z/h). Pour les plaques sandwichs en FGM, quand l'indice de puissance p augmente, des contraintes de traction maximales se produisent au niveau des couches inférieures et des contraintes de compression minimales au niveau des couches supérieures.

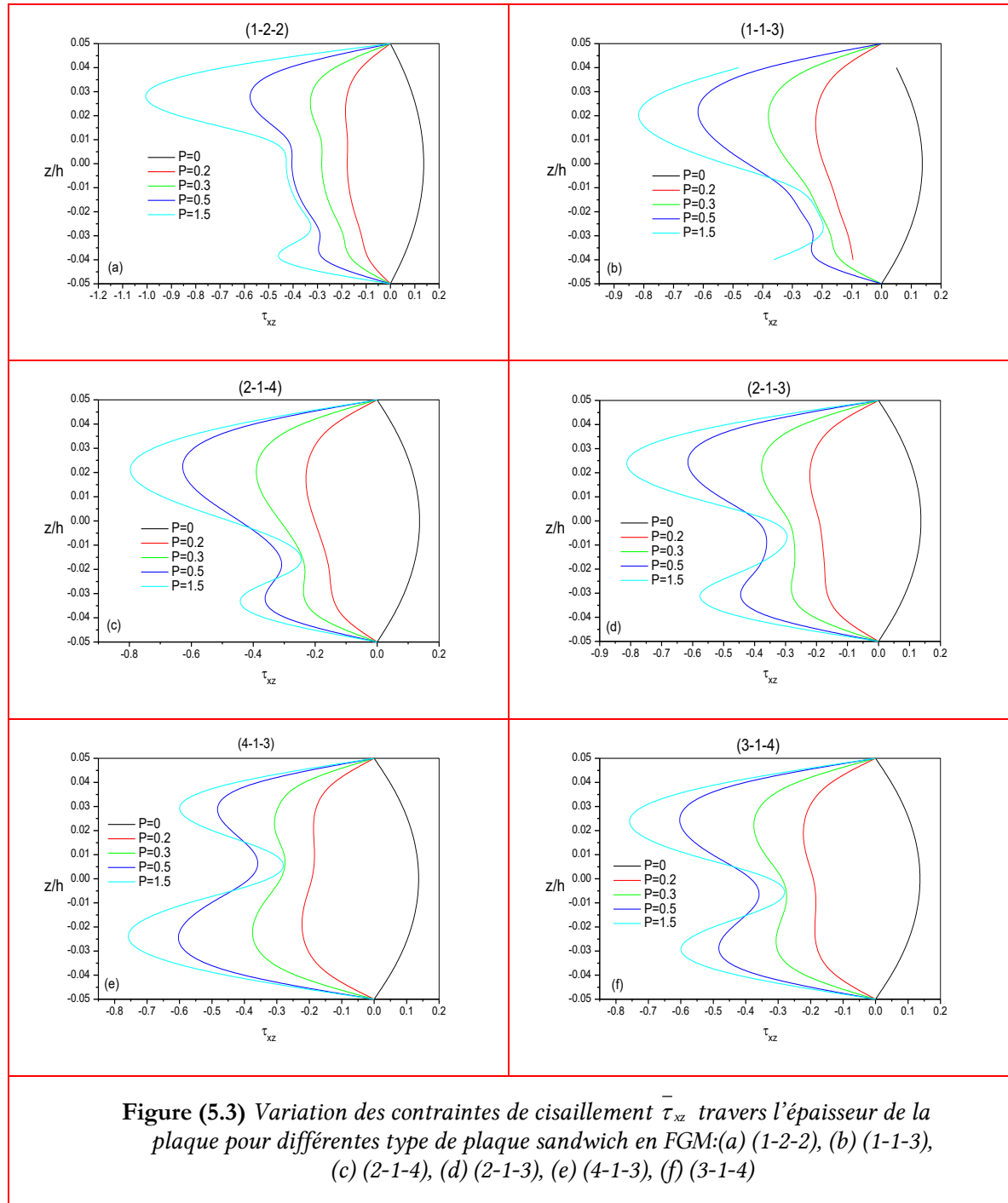
La plaque en FGM donne une traction maximale {compression minimale} des contraintes à un point sur la surface supérieure {inférieure} de la plaque. Ce sont les surfaces riches en céramique dans lesquelles la plaque en métal expérimente la compression minimale {traction maximale}. Notez que la contrainte axiale est continue et lisse à travers chaque interface de couche.

La figure (5.3) représente la distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur des plaques sandwichs en FGM pour $p = 0, 0.2, 0.3, 0.5$ et 1.5 .

Les contraintes de cisaillement prennent particulièrement de grandes valeurs proches des plans latéraux ($z = h_0$ et $z = h_3$) ou près des interfaces en FGM ($z = h_0$ et $z = h_3$).

Comme prévu, il y a une variation beaucoup moins prononcée de la distribution des contraintes de cisaillement dans le cœur de la plaque sandwich en FGM non symétrique par rapport à ses couches inférieure et supérieure. Pour la plaque entièrement métallique, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement se produit au plan médian ($\bar{z} = 0$)





5.3 Flambement des plaques sandwichs en FGM avec diverses conditions aux bords

Dans cette partie, nous présentons et nous discutons plusieurs exemples numériques pour vérifier l'exactitude de la présente théorie et nous étudions les effets de (1) l'indice puissance, (2) rapport d'épaisseur des couches, (3) types d'appuis, (4) l'effet des déformations de cisaillement sur la charge critique de flambement des plaques sandwichs en FGM.

Pour la plaque sandwich en FGM, Les propriétés matérielles utilisées dans cette partie sont :

Céramique (P_1 , alumine, Al_2O_3) $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.

Métal (P_2 , Aluminium, Al) $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes des charges de flambement adimensionnelles défini comme : $\bar{N} = \frac{N a^2}{100 h^3 E_0}$

5.4 Validation des résultats

Pour vérifier l'exactitude de cette théorie raffinée des plaques à quatre variables, des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir de la théorie utilisée et ceux obtenus par El Meiche [83], Zenkour [84] et Thai [85]. Comme indiqué dans les tableaux (5.5) – (5.6). On peut voir que les résultats de cette théorie sont en bon accord avec les résultats publiés pour des plaques carrées en FGM simplement appuyées soumise à une charge de compression uniaxiale et biaxiale. Et identiques avec les résultats de la théorie TSDT.

À partir des résultats présentés dans ces tableaux, On constate que la charge critique de flambement diminué lorsque l'indice de puissance p augmente qui est due à la diminution de la quantité de céramique et l'augmentation de métal ce qui influe sur la rigidité de la plaque sandwich. En général, les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes valeurs des charges de flambement. La configuration 1-2-1 a donné la grande valeur de la charge critique de flambement et la petite charge est obtenue par la configuration 1-0-1.

Tableau (5.5) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées soumise à une compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$ $a/h = 10$)

P	Théorie	Configuration des plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT [83]	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055
	SSDT [84]	13.0061	13.0061	13.0061	13.0061	13.0061
	TSDT [84]	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
	FSDT [84]	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	NFSDT [85]	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	Présente	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
0.5	HSDT [83]	7.3638	7.9405	8.4365	8.8103	9.2176
	SSDT [84]	7.3657	7.9420	8.4371	8.8104	9.2167
	TSDT [84]	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
	FSDT [84]	7.3373	7.9132	8.4103	8.7867	9.1952
	NFSDT [85]	7.3634	7.9403	8.4361	8.8095	9.2162
	Présente	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
1	HSDT [83]	5.1663	5.8394	6.4645	6.9495	7.5072
	SSDT [84]	5.1685	5.8412	6.4654	6.9498	7.5063
	TSDT [84]	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
	FSDT [84]	5.1424	5.8138	6.4389	6.9257	7.4837
	NFSDT [85]	5.1648	5.8387	6.4641	6.9485	7.5056
	Présente	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
5	HSDT [83]	2.6568	3.0414	3.5787	4.1116	4.7346
	SSDT [84]	2.6601	3.0441	3.5806	4.1129	4.7349
	TSDT [84]	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
	FSDT [84]	2.6384	3.0225	3.5596	4.0929	4.7148
	NFSDT [85]	2.6415	3.0282	3.5710	4.1024	4.7305
	Présente	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
10	HSDT [83]	2.4857	2.7450	3.1937	3.7069	4.2796
	SSDT [84]	2.4893	2.7484	3.1946	3.1457	4.3818
	TSDT [84]	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799
	FSDT [84]	2.4690	2.7263	3.1752	3.6889	4.2604
	NFSDT [85]	2.4666	2.7223	3.1795	3.6901	4.2728
	Présente	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799

L'influence de type d'appuis sur la charge critique de flambement des plaques soumises à une compression uniaxiale et biaxiale est montrée dans les deux tableaux 5.7 et 5.8 respectivement. On remarque que. Les plaques sandwichs simplement appuyées donne la plus faible valeur par rapports aux autres conditions aux bords ce qui signifié que le changement de type d'appuis influe sur la réponse mécanique en flambement de la plaque sandwich en FGM. La charge critique de flambement uniaxiale est le double de celui de la charge biaxiale dans le cas des plaques simplement appuyées et encastré sur les quatre bords quelle que soit la valeur de l'indice de puissance de la fraction volumique p .

Tableau (5.6) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression Biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, a/h = 10.$)

P	Théorie	Configuration des plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT [83]	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028
	SSDT [84]	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030
	TSDT [84]	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025
	FSDT [84]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	NFSDT [85]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	Présente	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025
0.5	HSDT [83]	3.6819	3.9702	4.2182	4.4051	4.6088
	SSDT [84]	3.6828	3.9710	4.2186	4.4052	4.6084
	TSDT [84]	3.6822	3.9704	4.2182	4.4050	4.6084
	FSDT [84]	3.6687	3.9566	4.2052	4.3934	4.5976
	NFSDT [85]	3.6817	3.9702	4.2181	4.4047	4.6081
	Présente	3.6822	3.9704	4.2182	4.4050	4.6084
1	HSDT [83]	2.5832	2.9197	3.2323	3.4748	3.7536
	SSDT [84]	2.5842	2.9206	3.2327	3.4749	3.7531
	TSDT [84]	2.5836	2.9200	3.2324	3.4747	3.7533
	FSDT [84]	2.5712	2.9069	3.2195	3.4629	3.7418
	NFSDT [85]	2.5824	2.9193	3.2320	3.4742	3.7528
	Présente	2.5836	2.9200	3.2324	3.4747	3.7533
5	HSDT [83]	1.3284	1.5207	1.7894	2.0558	2.3673
	SSDT [84]	1.3300	1.5220	1.7903	2.0564	2.3674
	TSDT [84]	1.3291	1.5213	1.7898	2.0561	2.3673
	FSDT [84]	1.3192	1.5113	1.7798	2.0464	2.3574
	NFSDT [85]	1.3208	1.5141	1.7855	2.0512	2.3652
	Présente	1.3291	1.5213	1.7898	2.0561	2.3673
10	HSDT [83]	1.2429	1.3725	1.5969	1.8534	2.1398
	SSDT [84]	1.2448	1.3742	1.5973	1.8579	2.1909
	TSDT [84]	1.2436	1.3732	1.5974	1.8538	2.1400
	FSDT [84]	1.2345	1.3631	1.5876	1.8445	2.1302
	NFSDT [85]	1.2333	1.3612	1.5897	1.8450	2.1364
	Présente	1.2436	1.3732	1.5974	1.8538	2.1400

La figure (5.4) représente la variation de la charge critique de flambement adimensionnelle des différentes configurations des plaques sandwichs sous chargement de compression biaxiale en fonction de l'indice de fraction volumique p . Le rapport d'épaisseur de la plaque a/h est pris égal à 10. On peut voir que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance p conduit à une réduction de la charge de flambement. Cela est dû au fait que les grands valeurs de l'indice de puissance p correspond à un faible pourcentage de la quantité de céramique dans la plaque sandwich. Autrement dit, l'augmentation de l'indice de puissance p réduit la rigidité de la plaque en raison de la grande quantité de métal par rapport à la quantité de céramique, et, par conséquent, une réduction de la charge de critique de flambement.

Tableau (5.7) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression uniaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$.

Condition aux limites	P	Configuration des Plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
	0.5	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
	1	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
	2	3.5563	4.1639	4.8086	5.3465	5.9870
	5	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
	10	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799
CSCS	0	20.9112	20.9112	20.9112	20.9112	20.9112
	0.5	12.0059	12.9419	13.7369	14.3275	14.9776
	1	8.4757	9.5789	10.5904	11.3650	12.2617
	2	5.8598	6.8682	7.9216	8.7893	9.8281
	5	4.3777	5.0373	5.9236	6.7892	7.8071
	10	4.0757	4.5484	5.2938	6.1292	7.0692
CCCC	0	31.8526	31.8526	31.8526	31.8526	31.8526
	0.5	18.4746	19.9104	21.1191	22.0069	22.9922
	1	13.1026	14.8075	16.3558	17.5293	18.8959
	2	9.0896	10.6625	12.2861	13.6103	15.2022
	5	6.7881	7.8425	9.2191	10.5474	12.1170
	10	6.2959	7.0833	8.2473	9.5315	10.9860
FCFC	0	39.3928	39.3928	39.3928	39.3928	39.3928
	0.5	23.0064	24.7906	26.2832	27.3710	28.5852
	1	16.3684	18.4978	20.4188	21.8644	23.5547
	2	11.3821	13.3593	15.3832	17.0225	18.9992
	5	8.4979	9.8457	11.5709	13.2217	15.1789
	10	7.8610	8.8942	10.3587	11.9566	13.7746

Tableau (5.8) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression biaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$.

Condition aux limites	P	Configuration des Plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025
	0.5	3.6822	3.9704	4.2182	4.4050	4.6084
	1	2.5836	2.9200	3.2324	3.4747	3.7533
	2	1.7782	2.0820	2.4043	2.6732	2.9935
	5	1.3291	1.5213	1.7898	2.0560	2.3673
	10	1.2436	1.3732	1.5974	1.8538	2.1400
CSCS	0	11.9493	11.9493	11.9493	11.9493	11.9493
	0.5	6.8605	7.3953	7.8497	8.1871	8.5586
	1	4.8432	5.4737	6.0517	6.4943	7.0067
	2	3.3485	3.9247	4.5266	5.0225	5.6161
	5	2.5016	2.8785	3.3849	3.8795	4.4612
	10	2.3290	2.5991	3.0250	3.5024	4.03954
CCCC	0	15.9263	15.9263	15.9263	15.9263	15.9263
	0.5	9.2373	9.9552	10.5596	11.0035	11.4961
	1	6.5513	7.4037	8.1779	8.7647	9.4479
	2	4.5448	5.3313	6.1430	6.8051	7.6011
	5	3.3941	3.9213	4.6095	5.2737	6.0585
	10	3.1479	3.5417	4.1237	4.7658	5.4930
FCFC	0	18.6108	18.6108	18.6108	18.6108	18.6108
	0.5	10.8692	11.7121	12.4173	12.9312	13.5048
	1	7.7331	8.7391	9.6467	10.3296	11.1282
	2	5.3774	6.3115	7.2677	8.0421	8.9760
	5	4.0148	4.6515	5.4666	6.2465	7.1712
	10	3.7139	4.2020	4.8939	5.6488	6.5077

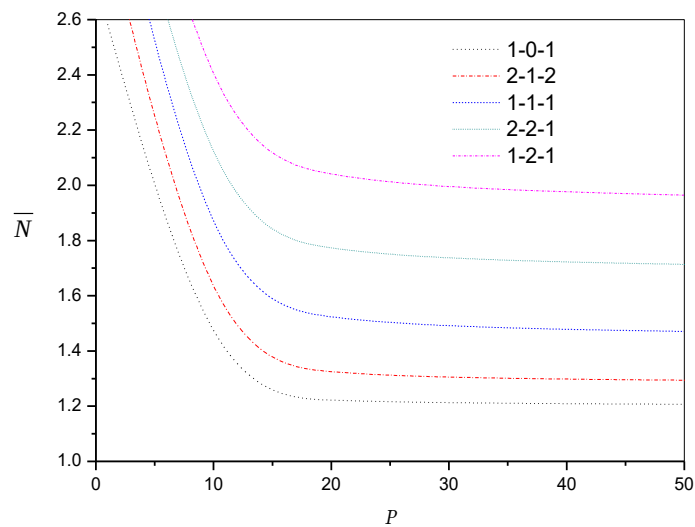


Figure (5.4) Effet de l'indice de puissance p sur la charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaques carrées sous chargement de compression biaxial ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a = 10h$).

Afin de voir l'effet de la déformation de cisaillement sur la charge critique de flambement, la figure 5.5 est représenté la variation de la charge critique de flambement des plaques sandwich en FGM soumise à une compression biaxiale en fonction du rapport a/h pour un indice de puissance $p=1$. La charge critique adimensionnelle de flambement est obtenue pour la théorie raffinée et la théorie CPT. Comme la théorie classique de plaque CPT néglige les déformations de cisaillement, elle surestime la charge critique de flambement. La différence entre la présente théorie et la CPT est significative pour les plaques épaisses et modérément épaisses, mais négligeable pour les plaques minces $a/h > 20$. Ceci signifié que la prise en considération des déformations de cisaillement réduit la charge de flambement, et l'effet de déformations de cisaillement est considérable pour les plaques épaisses et négligeables pour les plaques minces.

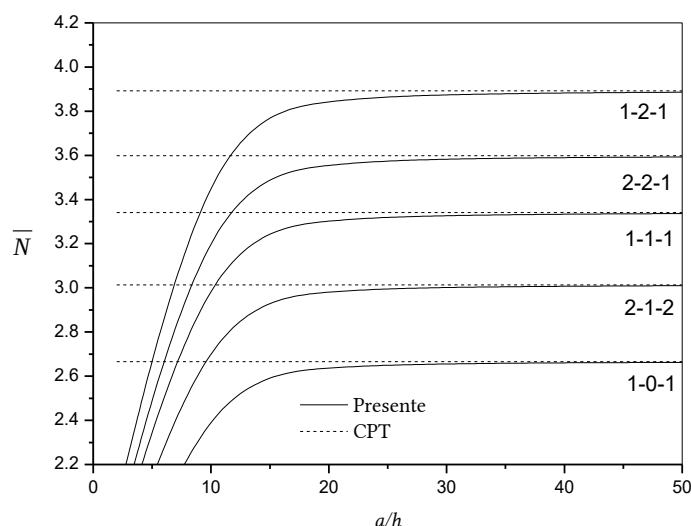


Figure (5.5) Effet des déformations de cisaillement sur la charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaque carrées soumise a une compression biaxiale ($p = 1$)

L'effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement est représenté sur la figure 5.6. On observe que les plaques les plus durs et les plus souples correspondent à ceux de FCFC et SSSS, respectivement. Pour les conditions aux limites CSCS et CCCC, les résultats prennent des valeurs intermédiaires.

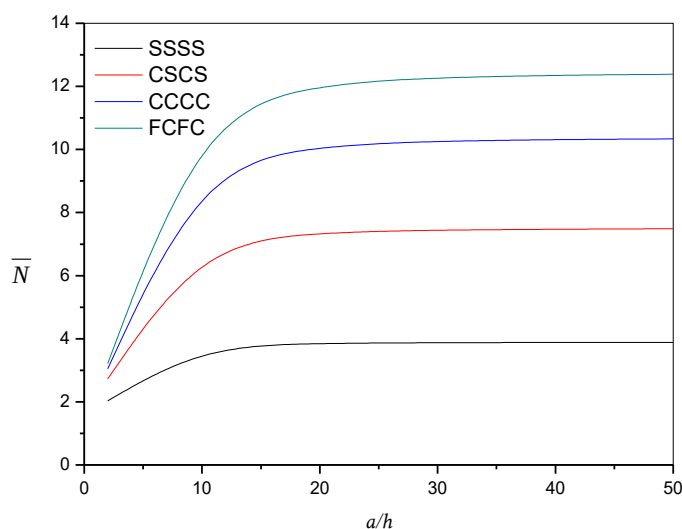


Figure (5.6) Effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement $\bar{N}$ de la plaque (1-2-1) sous chargement de compression biaxiale ($p=1$)

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion et du flambement sous diverses conditions aux bords des plaques sandwichs en FGM en utilisant une théorie raffinée.

La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les flèches et les contraintes dues au chargement mécanique et thermique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé à quatre inconnus et les autres théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé à cinq inconnus sont presque identiques.

La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour le comportement de flambement des plaques sandwichs en FGM. La plaque sandwichs P – FGM avec deux peaux FGM et cœur homogène en céramique est considérée. En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse du problème de flambement des plaques sandwichs en FGM avec diverses conditions aux bords.

Conclusion générale

Les structures sandwichs en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail était double, à savoir l'étudier du comportement des plaques sandwichs en FGM sous un chargement thermomécanique. Afin d'étudier l'influence du chargement thermique et mécanique sur le comportement de la flexion des plaques tout en étudiant l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentielles. Et l'étude du flambement avec diverses conditions aux bords

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons utilisés un modèle analytique basé sur la théorie d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwichs en FGM soumises à un chargement thermomécanique. Pour valider ce modèle, nous avons comparé les résultats de ce modèle aux résultats des autres modèles proposés dans la littérature.

La théorie utilisée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les flèches et les contraintes dues au chargement thermique et mécanique obtenues en utilisant cette théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermomécanique de la flexion des plaques FGM.

Deuxièmement, nous avons étudié le comportement du flambement des plaques sandwichs en FGM avec diverses conditions aux bords. Dans cette étude, les propriétés

matérielles varient à travers l'épaisseur de la plaque seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibres ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie des travaux virtuels. La méthode des variables séparés est utilisée pour la résolution des équations d'équilibres. Les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant un système de valeur propre. une étude comparatives des résultats obtenues en utilisant cette théorie de cisaillement raffinée avec les résultats qui existe dans la littératures permis de dégager plusieurs points :

Les comparaisons des résultats des charges critiques de flambement montrent que les charges critiques de cette théorie raffinée avec les résultats obtenus par les théories de cisaillement sont presque identiques.

- ✓ les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes charges critiques de flambement.
- ✓ les charges critiques de flambement diminué avec la diminution de la rigidité du matériau qui est due à la diminution du pourcentage de céramique et l'augmentation de la quantité de métal, et aussi de l'épaisseur du cœur.
- ✓ la charge critique de flambement adimensionnelle $\bar{N}$ augmente progressivement avec le rapport a/h de la plaque.
- ✓ La charge critique de flambement uniaxiale est le double de celui de la charge biaxiale dans le cas des plaques simplement appuyées et encastré sur les quatre bords quelle que soit la valeur de l'indice de puissance p de la fraction volumique.
- ✓ les plaques les plus durs et les plus souples correspondent à ceux de FCFC et SSSS, respectivement. Pour la plaque sandwich FGM avec des conditions aux limites intermédiaires, les résultats prennent des valeurs intermédiaires.
- ✓ la prise en considération des déformations de cisaillement réduit la charge de flambement, et l'effet de déformations de cisaillement est considérable pour les plaques épaisses et négligeables pour les plaques minces.

En perspective, il est prévu d'appliquer ce modèle d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température. La prise en compte de l'effet de la température sur le flambement des plaques ; utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes statique et de vibration des plaques sandwichs avec diverse condition aux limites.

En fin, on peut dire que cette contribution s'inscrit dans le cadre des recherches la de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements thermomécaniques et du flambement avec diverse condition aux limites.

Références

- [1] M. Savoia et J. Reddy, «Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates,» *Int. J. Solids Structures*, vol. 5, n° 132, pp. 593-608, 1995.
- [2] M. Houari, «Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances,» 2011.
- [3] J. Reddy, «Analysis of functionally graded plates,» *Int J Num Methods Eng*, vol. 47, p. 663–684, 2000.
- [4] G. N. Praveen et J. N. Reddy, «Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 3357-3376, 1998.
- [5] J. N. Reddy et C. Chin, «Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates,» *Journal of Thermal Stresses*, vol. 21, pp. 593-626, 1998.
- [6] C. T. L. K. Y. a. R. J. N. Loy, «Vibration of functionally graded cylindrical shells,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, pp. 309-323, 1999.
- [7] Z.-Q. Cheng et R. C. Batra, «Deflection relationships between the homogeneous plate theory and different functionally graded plate theories,» *Arch Mech*, vol. 52, p. 143–158, 2000.
- [8] Z.-Q. Cheng et R. C. Batra, «Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate,» *Composites Part B*, vol. 31, n° 11, p. 97–106, 2000.
- [9] J. Woo et S. Meguid, «Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells,» *Int J Solids Struct*, vol. 38, p. 7409–21, 2001.
- [10] R. Shimpi et H. Patel, «A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis,» *Int J Solids Struct*, vol. 43, n° 122, p. 6783–99, 2006.
- [11] P. H. Shimpi RP, «Free vibrations of plate using two variable refined plate theory,» *J Sound Vib*, vol. 296, n° 1(4–5), p. 979–99, 2006.
- [12] Mechab, H. Ait Atmane, A. Tounsi, H. Belhadj et E. Adda bedia, «A two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates,» *Acta Mech Sin*, vol. 26, n° 16, p. 941, 2010.
- [13] M. Houari, S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi et E. Adda bedia, «two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates,» *J Therm Stresses*, vol. 34, p. 315–34, 2011.
- [14] D. Zenkert, *The Handbook of Sandwich Construction*, Engineering Materials Advisory Service Ltd., London, 1997.

- [15] H. G. Allen, *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Oxford: Pergamon Press , 1969.
- [16] M. Sudharsan, *Structural Design and Analysis of a Lightweight Composite Sandwich space Radiator Panel*, Coimbatore, India: Phd thesis, Bharathiar University, 2003.
- [17] J. M. Berthelot, *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures*, 4^{ème} éd., 1996.
- [18] Gognard, «collage des métaux généralités et caractéristiques», *Techniques de l'ingénieur* , 2000.
- [19] C. Hexcel, «HexWeb tm honeycomb sandwich design technology.», 2004. [En ligne]. Available: [http/ /:www. hexcel composite.com](http://www.hexcel.composite.com).
- [20] F. Watari, A. Yokoyama, F. Saso, M. Uo et T. Kawasaki, «Fabrication and properties of functionally graded dental implant.», *Composites, Part B: Engineering*, vol. 28, pp. 5-11, 1997.
- [21] M. Koizumi, «The concept of FGM», *ceramic transaction, functionally graded*, vol. 34, pp. 3-10, 1992.
- [22] R. E. Mistler, «high strength substrates produced by multiple layer casting technique», *Am. Ceram. Soc. Bull.* , vol. 52, n° 11, pp. 850-54, 1973 .
- [23] A. Bishop, C. Lin, M. Navaratnam, Rawlings, D. R et M. Chane, «a functionally graded material produced by a powder metallurgical process», *journal of materials science letters*, 1993.
- [24] H. Shen, *Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, New York: CRC Press, Taylor & Francis Group , 2009 .
- [25] G. Bao et L. Wang, «Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, ;», *Int. J; Solids Structures*, vol. 32 , n° 11, p. 2853–2871, 1995.
- [26] S. Timoshenko, «On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars», *Philosophical Magazine*, vol. 41 , n° 146, p. 744–746, 1921.
- [27] E. Reissner, «The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates», *J. Appl. Mech*, vol. 12 , pp. 69-77, 1945.
- [28] Y. Uflyand, «The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates», vol. 12, p. 287–300., 1948.
- [29] E. Carrera, «Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells», *Archives of Computational Methods in Engineering*, p. 87–140, 2002.
- [30] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, Boca Raton: CRC Press, 2007.

- [31] S. Ghannadpour, H. Ovesy et M. Nassirnia, «Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method,» *Comput Struct*, vol. 93, n° %19, p. 108–109, 2012.
- [32] M. Mahdavian, «Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading,» *J Solid Mech*, vol. 1, n° %13, p. 213–25, 2009.
- [33] M. Mohammadi, A. Saidi et E. Jomehzadeh, «Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates,» *Appl Compos Mater*, vol. 17, n° %12, p. 81–93., 2010.
- [34] M. Alinia et S. Ghannadpour, «Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates,» *Compos Struct*, vol. 88, n° %13, p. 354–9, 2009.
- [35] S. Chakraverty et K. Pradhan, «Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method,» *Int J Appl Mech*, vol. 6, n° %14, 2014.
- [36] S. Chakraverty et K. Pradhan, «Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions,» *Aerosp Sci Technol*, vol. 36, p. 132–56, 2014.
- [37] R. D. Mindlin, «Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38., 1951.
- [38] W. Lanhe, «Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate,» *Compos Struct*, vol. 64, n° %12, p. 211–8, 2004.
- [39] M. Bouazza, A. Tounsi, E. Adda-Bedia et A. Megueni, «Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates,» *An analytical approach. Comput Mater Sci*, vol. 49, n° %14, p. 865–70, 2010.
- [40] H. Yaghoobi et P. Yaghoobi, «Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions,» *an analytical approach. Meccanica*, vol. 48, n° %18, p. 2019–35., 2013.
- [41] S. Hosseini-Hashemi, H. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan et M. Omid, «Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory,» *Appl Math Model*, vol. 34, n° %15, p. 1276–91, 2010.
- [42] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee et S. Atashipour, «A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates,» *Int J Mech Sci*, vol. 53, n° %11, p. 11–22, 2011.
- [43] M. Mohammadi, A. Saidi et E. Jomehzadeh, « A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges,» *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*, vol. 224, n° %19, p. 1831–41, 2010.

- [44] A. Saidi et E. Jomehzadeh, «On the analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported,» *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*, vol. 223, n° 19, 2009.
- [45] H. Yaghoobi et M. Torabi, «Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions,» *J Therm Stresses*, vol. 36, n° 19, p. 869–94, 2013.
- [46] T. Nguyen, K. Sab et G. Bonnet, «First-order shear deformation plate models for functionally graded materials,» *Compos Struct*, vol. 83, n° 11, p. 25–36, 2008.
- [47] M. Singha, T. Prakash et M. Ganapathi, «Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load,» *Finite Elem Anal Des*, vol. 47, n° 14, p. 453–60, 2011.
- [48] J. Park et J. Kim, «Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates,» *J Sound Vib*, vol. 289, p. 77–93, 2006.
- [49] J. N. Reddy, «A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates,» *ASME J. Appl. Mech*, vol. 51, n° 14, p. 745–752, 1984.
- [50] T. Kant et K. Swaminathan, «Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory,» *Composite Structure*, vol. 56, n° 14, pp. 329–344, 2002.
- [51] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*, Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [52] M. Touratier, «An efficient standard plate theory,» *Vols. 1 sur 229*, n° 18, pp. 901–916, 1991.
- [53] M. A. Zenkour et A. N. Alghamdi, «Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads,» *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 17, p. 419–432, 2010.
- [54] M. Karama, K. S. Afaq et S. Mistou, «Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity,» *Int. J. Solids Structures*, vol. 40, n° 16, pp. 1525–1546, 2003.
- [55] A. Saidi, M. Bodaghi et S. Atashipour, «Levy-type solution for bending/stretching of thick functionally graded rectangular plates based on third order shear deformation theory,» *Mech Adv Mater Struct*, vol. 19, n° 18, p. 577–89, 2012.
- [56] H. Thai et S. Kim, «Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation,» *Int J Mech Sci*, vol. 75, p. 34–44, 2013.
- [57] D. Nguyen et H. Pham, «Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments,» *Compos Struct*, vol. 100, p. 566–74, 2013.

- [58] R. Shimpi, «Refined plate theory and its variants,» *ALAA Journal*, p. 137–146, 2002.
- [59] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab et E. Adda Bedia, «Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory,» *Int. J. Mech. Mater. Design*, vol. 6, n° 12, pp. 113-121, 2010.
- [60] H.-T. Thai et S.-E. Kim, «Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory,» *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 626–633, 2010.
- [61] H.-T. Thai et S.-E. Kim, «Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory,» *Composite Structures*, p. 1738–1746, 2011.
- [62] L. Hadji, H. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab et E. Adda Bedia, «Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory,» *Applied Mathematics and Mechanics*, p. 925–942, 2011.
- [63] B. Boudierba, M. Houari et A. Tounsi, «Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations,» *Steel and Composite Structures*, vol. 14, n° 11, pp. 85-104, 2013.
- [64] A. Chabot, Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches., ENPC: PhD thesis, 1997.
- [65] E. Carrera, «An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates,» *Composite structures*, vol. 50, pp. 183-198, 2000.
- [66] K. Afaq, M. Karama et S. Mistou, «Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches,» *In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pp. 289-292, March 2003 2003.
- [67] V. Nguyen, Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques, : Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [68] M. Di Sciuva, «An improved shear-deformation theory for moderately thick multi-layered anisotropic shells and plates,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pp. 589-596, 1987.
- [69] E. Carrera et A. Ciuffreda, «A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems,» *Composite Structures*, vol. 69, p. 271–293, 2004.
- [70] M. Cho et R. R. Parmerter, «Efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration,» *ALAA Journal*, vol. 31, p. 1299–1306, 1993.
- [71] U. Icardi, «Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminate approximations,» *Composites Part B : Engineering*, vol. 32, n° 14, pp. 343–354, 2001.

- [72] A. K. Noor et W. Burton, «Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates,» *Composite Structures*, vol. 11, p. 183–204, 1989.
- [73] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou et S. Caperaa, «Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model,» *Composite Part B : Engineering*, vol. 29, n° 13, p. 223–234 , 1998.
- [74] J. N. Reddy, «A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates,» *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pp. 173-180 , 1987.
- [75] M. Tahani et A. Nosier, «Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate,» *Material and Design*, vol. 24, pp. 647- 658 , 2003.
- [76] J. G. Ren, «A new theory of laminated plate,» *Composite Science and Technology*, vol. 26, pp. 225-239 , 1986.
- [77] C. Kassapoglou et P. Lagace, «Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates,» *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pp. 292-308 , 1987.
- [78] W. Yin, «Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, n° 11, pp. 1549-1564 , 1994.
- [79] N. Pagano, «Stress fields in composite laminates,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, p. 385 , 1978.
- [80] P. Marur, *Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials*, Alabama: : Auburn University, 1999. .
- [81] F. Delale et F. Erdogan, « The crack problem for a nonhomogeneous plane,» vol. 50, n° 1, pp. 609 – 614, 1983.
- [82] M. Sobhy, «Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions,» vol. 99, p. 76–87, 2013.
- [83] N. El Meiche , A. Tounsi, N. Ziane , I. Mechab et E. Adda Bedia, «A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, n° 14, pp. 237-247, 2011.
- [84] A. Zenkour, «A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-Buckling and free vibration,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, n° 1(18–19), pp. 5243-5258, 2005.
- [85] H.-T. Thai, T.-K. Nguyen et T. Vo, «Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory,» *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 45, pp. 211-225, 2014.

- [86] Y. Obata, N. Noda et T. Tsuji, «Steady thermal stresses in a functionally gradient material plate,» *International Journal of Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 58, pp. 1689-1695, 1992.
- [87] Y. Fukui et N. Yamanaka, «Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure,» *International Journal of Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 45, pp. 479-485, 1992.
- [88] Z. H. Jin et R. C. Batra, «Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials,» *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, pp. 1221-1235, 1996.
- [89] S. P. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, New York: McGraw-Hill, 1959.
- [90] E. Feldman et J. Aboudi, «Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading,» *Compos Struct*, vol. 38, n° 11, p. 29–36, 1997.
- [91] R. Javaheri et M. Eslami, «Thermal buckling of functionally graded plates,» *ALAA J*, vol. 40, n° 11, p. 162–9, 2002.
- [92] R. Javaheri et M. Eslami, «Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading,» *ZAMM – J Appl Math Mech*, vol. 82, n° 14, p. 277–83., 2002.
- [93] Y. Kiani, B. E et E. M. , «Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions),» *ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech*, vol. 91, n° 17, p. 581–93., 2011.