



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique
Reactive Materials and Systems Laboratory (LMSR)



THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique des Matériaux et Structures

Présentée par Monsieur :

HIMEUR Nabil

Intitulé de la thèse :

ETUDE DE L'EFFET DES FONDATIONS ELASTIQUES SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES EPAISSES

Soutenue le : 03/11/2022 devant le jury composé de :

Président :

M. BOUCHAM Belhadj Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

Directeur de Thèse :

M. BOUCHOUICHA Benattou Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

Co-Directeur de Thèse :

M. BOUHADRA Abdelhakim Maître de Conférences Classe A, Université de Khenchela.

Examineurs :

M. BOURADA Mohamed Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

M. YOUZERA Hadj Maître de Conférences Classe A, Université de Mascara.

M. BOUMIA Lakhdar Maître de Conférences Classe A, Université de Tissemsilt.

Invité :

M. TOUNSI Abdelouahed Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

2022-2023



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا



*Un grand
Merci!*

*Dédicaces
&
Remerciements*

اللهم ارحم ألي المتوفي فقيد قلبي وأذقه حلاوة الجنة ورتبها وطيبها ومسكنها، ولا تحرمه
من نعيم الجنة يا رب، واجعل لقائي به في جنتك ودار مستقر ك.



اللَّهُمَّ ارْحَمْ
أَبِي
فَقِيدُ قَلْبِي وَاغْضِرْ لَهُ وَأَنْسَ وَحْشَتَهُ وَوَسِّعْ
قَبْرَهُ اللَّهُمَّ اجْعَلْ عَيْدَهُ فِي الْجَنَّةِ أَجْمَلِ

آمين



اللهم اجعل هذا العمل المتواضع صدقة جارية لوالدي.

*En Tout Premier Lieu, Je Remercie Le Bon Dieu, Tout
Puissant, De M'avoir Donne La Force Pour Survivre, Ainsi
Que L'audace Pour Dépasser Toutes Les Difficultés.*

Une Grande Dédicace

A ma Famille

A Maman

A ma Femme

A mes Fille: Anfel Badraa, Amani, Meriem

A ma Soeur: Noura

A Tout la Famille Himeur

A Tous mes Amis Fidèle


Nabil

Je remercie en premier et en dernier lieu, DIEU tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie particulièrement mon premier encadreur, le professeur à l'université de Sidi Bel Abbes, monsieur **Benguediab Mohamed** qui a démarré ce travail et le deuxième encadreur, le professeur à l'université de Sidi Bel Abbes, monsieur **Bouchouicha Benattou** qui a finalisé ce travail pour son suivi constitutif, ses précieux conseils et sa disponibilité durant toute notre formation ainsi que lors de la préparation de cette thèse.

Je remercie chaleureusement mon Co-encadreur, monsieur **Bouhadra Abdelhakim**, Maître de Conférences Classe A, à l'université de Khenchela, pour son encadrement consciencieux, la grande autonomie qu'il a su m'accorder ainsi que sa présence et son soutien scientifique et moral durant ces années.

J'adresse mes plus vifs remerciements à l'ensemble des membres du jury, à commencer par le professeur **Bourada Mohamed** de l'université de Sidi Bel Abbes, le docteur **Youzera Hadj** de l'université de Mascara ainsi que le Docteur **Boumia Lakhdar** pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail de thèse. Je remercie le professeur **Boucham Belhadj** de l'université de Sidi Bel Abbes, pour avoir accepté de présider le jury et le Professeur **Tounsi Abdelouahed** pour avoir pris le temps de lire le manuscrit et d'avoir accepté d'assister à la présentation de ces travaux.

Mes vifs remerciements vont aussi à l'ensemble du personnel des Laboratoires **Reactive Materials and Systems Laboratory LMSR** et **Material and Hydrology Laboratory MHL**, à l'université de Sidi Bel Abbes, sans oublier les personnels des départements de **Génie Mécanique** et **Génie Civil**, Université de Sidi Bel Abbes,

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du département de **Génie Mécanique** et **Génie Civil** de l'Université de Khenchela,

Et également aux membres de ma famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse.



Nabil



Résumé

Abstract

ملخص

Résumé

Le but de ce travail est l'étude de l'effet des fondations élastique sur le comportement mécanique des structures épaisses basé sur nouvelle théorie du cisaillement sinusoïdale quasi-3D en tenant compte de l'effet de la déformation normale (effet de stretching). L'influence couplée des fondations de Winkler-Pasternak avec variation non uniforme supposées avoir deux paramètres variant simultanément à la surface des plaques FG exposées à différents chargements est étudiée. L'interaction entre le type de chargement et la variation des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak est considérée. Les équations de mouvement pour les plaques FGM épaisses sont obtenues en utilisant le principe de déplacement virtuel et la technique de résolution de Navier. Une étude paramétrique a été faite afin de quantifier les effets de l'indice de l'épaisseur, l'indice de la loi de puissance, le rapport géométrique, le rapport d'aspect de la plaque, le type de chargement ainsi que les paramètres de fondation de Winkler-Pasternak sur le comportement en flexion régissant le comportement mécanique de ce type de structures FGM et de comparer les résultats obtenues à ceux disponibles dans la littérature.

Mots clés : Fondations Winkler-Pasternak non-uniformes; Théorie quasi-3D; Technique de Navier; Plaques FGM, Effet stretching, Flexion.

Abstract

The aim of this work is to study the effect of elastic foundations on the mechanical behavior of thick structures based on a new quasi-3D sinusoidal shear theory taking into account the effect of normal deformation (stretching effect). The coupled influence of Winkler-Pasternak foundations with non-uniform variation assumed to have two simultaneously varying parameters at the surface of FG plates exposed to different loadings is investigated. The interaction between the type of loading and the variation of the Winkler-Pasternak foundation parameters is considered. The equations of motion for thick FGM plates are obtained using the virtual displacement principle and Navier's solution technique. A parametric study was made in order to quantify the effects of the thickness index, the power law index, the geometric ratio, the aspect ratio of the plate, the type of loading as well as the parameters of Winkler-Pasternak foundation on the bending behavior governing the mechanical behavior of this type of FGM structures and to compare the results obtained with those available in the literature.

Keywords: Non-uniform Winkler-Pasternak foundations; Quasi-3D theory; Navier technique; FGM plates, Stretching effect, Flexion.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير الأساسات المرنة على السلوك الميكانيكي للهياكل السميكة، في هذه الدراسة نحاول تسليط الضوء على التأثير المزدوج لأنواع الأساسات المرنة Winkler-Pasternak على السلوك في الانحناء الخاضع لعدة أنواع من المحملة الميكانيكية ذات الدعم البسيط في الصفائح FG وفقاً لنظرية أصلية للقص شبه ثلاثية الأبعاد 3D بشد السمك ذات دالة جيبية. على وجه الخصوص، تعتبر طبقات Winkler و Pasternak غير منتظمة ومتغيرة على طول الاتجاهات في الصفائح FG. علاوة على ذلك، يتم اعتبار التفاعل بين نوع التحميل والأساسات المرنة Winkler-Pasternak وضمنياً في معادلات التوازن الحاكمة. باستخدام مبدأ العمل الافتراضي وتقنية حلول Navier، يتم حساب النتائج العددية لإجهادات و الإزاحات من غير أبعاد. الأهم من ذلك، تمت دراسة وفحص العديد من الحالات والمناقشات التكميلية لمدى تأثير مختلف الخصائص مثل الأبعاد والسمك بالنسب الهندسية ومعامل تغير المواد داخل الصفيحة. أخيراً، يتم التحقق من صحة النتائج والصيغ من غير أبعاد باستخدام النتائج الموجودة مرجعياً، وتم الكشف عن توافق ممتاز بين النتائج في هذا النموذج التحليلي مما يستخلص مناسبتة لدراسة انحناء الصفائح المتدرجة وظيفياً المدعومة ببساطة والمستخدمه في التطبيقات الهندسية خاصة.

الكلمات الرئيسية: الأسس المرنة غير المنتظمة Winkler-Pasternak؛ نظرية شبه ثلاثية الأبعاد؛ تقنية Navier؛ الصفائح المتدرجة وظيفياً، Effet stretching، الانحناء .



Tables Des Matières

| | |
|--|------|
| <i>Dédicaces</i> | I |
| <i>Remerciements</i> | II |
| <i>Résumé</i> | III |
| <i>Abstract</i> | IV |
| <i>ملخص</i> | V |
| <i>Tables des Matières</i> | VI |
| <i>Liste des Figures</i> | IX |
| <i>Liste des Tableaux</i> | XII |
| <i>Liste des Notations</i> | XIII |
| | |
| <i>Introduction Générale</i> | 1 |
| | |
| <i>Chapitre I : Les Matériaux Fonctionnelles Graduées FGM</i> | 4 |
| I.1 Historique sur le développement des matériaux FGM | 4 |
| I.2 Propriétés effectives des FGM..... | 5 |
| I.3 Les FGM matériaux à gradient fonctionnel (Functionnally Graded Materials) | 5 |
| I.4 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM | 6 |
| I.4.1 Coulage en bande (tape casting)..... | 6 |
| I.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)..... | 7 |
| I.4.3 Dépôt par Centrifugation..... | 7 |
| I.4.4 Méthodes de coulée centrifuge | 8 |
| I.4.5 Dépôt par électrophorèse | 9 |
| I.4.6 Compaction sèche des poudres..... | 9 |
| I.4.7 Projection plasma | 9 |
| I.4.8 C.V.D et P.V.D..... | 10 |
| I.4.9 Frittage en infiltration..... | 10 |
| I.4.10 Frittage laser différentiel | 10 |
| I.4.11 Implantation ionique..... | 11 |
| I.5 Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués FGM | 11 |
| I.5.1 L'aérospatiale..... | 13 |
| I.5.2 La médecine | 13 |
| I.5.3 L'électronique | 13 |
| I.5.4 L'énergie..... | 13 |
| I.5.5 L'automobile..... | 14 |
| I.5.6 La défense | 14 |
| I.5.7 Outils de coupe | 14 |

| | | |
|---|---|-----------|
| I.6 | Les propriétés des FGMs et leurs applications | 14 |
| I.7 | Publication et travaux international des FGMs..... | 15 |
| I.8 | Types des matériaux fonctionnellement graduée FGM | 16 |
| I.9 | Les propriétés matérielles des plaques FGM | 18 |
| I.9.1 | Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM (Loi de puissance) | 19 |
| I.9.2 | Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM (loi sigmoïde) | 19 |
| I.9.3 | Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM (loi exponentielle) | 20 |
| I.10 | Conclusion | 22 |
| Chapitre II : Les Théories Des Plaques | | 24 |
| II.1 | Introduction..... | 24 |
| II.2 | Définition des plaques | 24 |
| II.3 | Historique sur le développement des théories des plaques..... | 25 |
| II.4 | La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) | 27 |
| II.5 | La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) | 28 |
| II.6 | La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) | 31 |
| II.7 | La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)..... | 33 |
| II.8 | La théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)..... | 34 |
| II.9 | La théorie de déformation des plaques quasi-3D..... | 35 |
| II.10 | Conclusion | 36 |
| Chapitre III : Les Fondation Elastique Des Plaque En FGM | | 38 |
| III.1 | Introduction..... | 38 |
| III.2 | Plaques reposant sur fondations élastiques | 38 |
| III.3 | Les approches de la modélisation de la fondation élastique..... | 38 |
| III.4 | Modèle de Winkler | 39 |
| III.5 | La fondation du modèle Winkler modifié..... | 40 |
| III.5.1 | Fondation de Filonenko-Borodich..... | 40 |
| III.5.2 | Fondation de Hetenyi | 40 |
| III.5.3 | Fondation de Pasternak..... | 41 |

| | | |
|--|---|-----------|
| III.5.4 | Fondation de Kerr..... | 42 |
| III.5.5 | Fondation de Kerr simplifie..... | 42 |
| III.6 | Fondation élastique non uniforme | 43 |
| III.6.1 | Fondation élastique variable de Winkler..... | 43 |
| ✓ | Model 1 | 43 |
| ✓ | Model 2 | 44 |
| ✓ | Model 3 | 45 |
| III.6.2 | Fondation élastique variable de Winkler-Pasternak..... | 47 |
| III.6.2.1 | Couplage de la fondation élastique non uniforme Winkler -Pasternak..... | 47 |
| III.6.2.2 | Formulation de la fondation élastique non uniforme | 47 |
| III.7 | Analyses de l'influence des fondations élastiques..... | 48 |
| III.8 | Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques..... | 50 |
| III.9 | Conclusion | 51 |
| <i>Chapitre IV : Analyse de l'Effet Couplé des Fondations Elastiques Variables</i> | | |
| | <i>Sur le Comportement à la Flexion des Plaques en FGM.....</i> | <i>53</i> |
| IV.1 | Introduction..... | 53 |
| IV.2 | Formulation du problème théorique | 53 |
| IV.2.1 | Procédure de simulation numérique..... | 53 |
| IV.2.2 | Effet couplé des fondations Winkler-Pasternak variables | 54 |
| IV.2.3 | Cinématique et relations constitutives | 56 |
| IV.2.4 | Les équations d'équilibre | 59 |
| IV.2.5 | Solutions analytiques explicites | 62 |
| IV.3 | Conclusion | 64 |
| <i>Chapitre V : Résultats Numériques Et Discussions</i> | | |
| V.1 | Introduction..... | 66 |
| V.2 | Résultats numériques et discussions | 66 |
| V.3 | Conclusion | 79 |
| <i>Conclusion Générale</i> | | <i>81</i> |
| <i>Références Bibliographiques</i> | | <i>83</i> |



Listes Des Figures

Chapitre I : Les Matériaux Fonctionnelles Graduées FGM

| | |
|--|----|
| Figure I. 1 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM..... | 5 |
| Figure I. 2 : Le processus de coulée en bande | 7 |
| Figure I. 3 : Principe du coulage par barbotine | 7 |
| Figure I. 4 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation | 8 |
| Figure I. 5 : (a) Machine de coulée centrifuge horizontale (b) Concept de ségrégation des particules pendant la production de FGM..... | 8 |
| Figure I. 6 : Schéma d'un dépôt par électrophorèse..... | 9 |
| Figure I. 7 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma | 9 |
| Figure I. 8 : Disposition du procédé frittage laser différentiel..... | 10 |
| Figure I. 9 : Les différents domaines des matériaux FGM | 11 |
| Figure I. 10 : Pièces en FGMs dans les applications aérospatiales..... | 12 |
| Figure I. 11 : Pièces FGMs dans les applications automobiles..... | 12 |
| Figure I. 12 : Pièces FGMs et ces applications | 13 |
| Figure I. 13 : Le nombre de publications annuelles dans le titre de recherche « Fonctionnellement matériaux classés FGM »..... | 15 |
| Figure I. 14 : Schéma de la distribution dans les FGM..... | 16 |
| Figure I. 15 : Echantillon FG avec gradient. (a), (d) et (c) : Vue de coupes, (d) : Image MEB..... | 16 |
| Figure I. 16 : Différents types de gradients dans les FGM..... | 17 |
| Figure I. 17 : Diagramme schématique de porosité en FGM | 17 |
| Figure I. 18 : Direction du gradient dans un FGM..... | 18 |
| Figure I. 19 : Géométrie d'une plaque en FGM | 18 |
| Figure I. 20 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P- FGM | 19 |
| Figure I. 21 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S- FGM..... | 20 |
| Figure I. 22 : Variation de module de Young dans une plaque E- FGM | 21 |

Chapitre II : Les Théories Des Plaques

| | |
|---|----|
| Figure II. 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire | 24 |
| Figure II. 2 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Kirchhoff)..... | 27 |
| Figure II. 3 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Reissner-Mindlin) | 29 |

| | |
|--|----|
| Figure II. 4 : Distribution du déplacement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans les deux théories CPT et FSDT..... | 30 |
| Figure II. 5 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Théorie d'ordre élevé HSDT ou TSDT)..... | 31 |
| Figure II. 6 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT ou TSDT)..... | 31 |

Chapitre III : Fondation Elastique des Plaques en FGM

| | |
|--|----|
| Figure III. 1 : Fondation de Winkler | 39 |
| Figure III. 2 : La représentation physique de Fondation de Filonenko-Borodich..... | 40 |
| Figure III. 3 : La représentation physique de Fondation de Hetenyi..... | 41 |
| Figure III. 4 : La représentation physique de Fondation de Pasternak | 42 |
| Figure III. 5 : La représentation physique de Fondation de Kerr..... | 42 |
| Figure III. 6 : Différents modèles de fondations. (a) Winkler, (b) Pasternak et (c) kerr..... | 43 |
| Figure III. 7 : Représentation du paramètre variable de Winkler a) Linéaire, b) Parabolique et c) Sinusoïdale | 44 |
| Figure III. 8 : Représentation du paramètre variable de Winkler a) Polynomiale, b) Cousins et c) Exponentiel..... | 45 |
| Figure III. 9 : L'effet du paramètre de fondation élastique variable de Winkler..... | 46 |
| Figure III. 10 : Géométrie d'une plaque annulaire FGM bidirectionnelle reposant sur une fondation élastique à deux paramètres non uniforme..... | 47 |
| Figure III. 11 : Les coefficients de la fondation élastique à deux paramètres de type : (a) Linéaire, (b) Parabolique et (c) Sinusoïdale | 48 |
| Figure III. 12 : Effet de la fondation variable sur la contrainte transversale..... | 51 |

Chapitre IV : Analyse de l'Effet Couplé des Fondations Elastiques Variables

Sur le Comportement à la Flexion des Plaques en FGM

| | |
|---|----|
| Figure IV. 1 : Géométrie et système de coordonnées de la plaque FG | 54 |
|---|----|

Chapitre V : Résultats Numériques Et Discussions

| | |
|--|----|
| Figure V. 1 : Variation de la flèche centrale \bar{w} adimensionnelle par rapport au rapport d'épaisseur a/h de plaques carrées ($k = 2$) soumises à différents types de charge mécanique | 74 |
|--|----|

- Figure V. 2 :** Variation de la flèche centrale \bar{w} adimensionnelle par rapport à l'indice puissance k de plaques carrées ($a/h = 10$) soumises à différents types de charge mécanique 74
- Figure V. 3 :** Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} aux sens de la longueur de la plaque ($a/h = 10$), la plaque carrée reposant sur divers types de fondations élastiques variables Winkler-Pasternak ($k = 2, k_w = 50, k_p = 4, \zeta = 2,5$),
(a) une charge répartie uniforme et (b) une charge concentrée centrale 75
- Figure V. 4 :** Variation de de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ par rapport l'épaisseur ($a/h = 10$) de la plaque carrée reposant sur divers types de fondations variables Winkler-Pasternak ($k = 2, k_w=50, k_p = 4, \zeta = 2.5$),
(a) une charge répartie uniforme et (b) une charge concentrée centrale 76
- Figure V. 5 :** Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ par rapport l'épaisseur ($a/h = 10$) de la plaque carrée reposant sur divers types de fondations variables Winkler-Pasternak ($k = 2, k_w=50, k_p = 4, \zeta = 2.5$),
(a) charge répartie uniforme et (b) charge centrale concentrée 76
- Figure V. 6 :** Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées soumises à une charge répartie sinusoïdale ($k = 2, a/h = 10$) par rapport au paramètre ζ non uniforme de diverses fondations élastiques Winkler-Pasternak variables ($k_w=50, k_p = 4$) 77
- Figure V. 7 :** Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport au rapport d'épaisseur (a/h) de plaques carrées ($k = 2$) soumises à des charges réparties sinusoïdales et reposant sur divers types de fondations élastiques variables Winkler-Pasternak ($k_w=50, k_p = 4, \zeta = 2.5$) 77
- Figure V. 8 :** Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport au rapport géométrique (b/a) des plaques carrées ($k = 2, a/h = 10$) soumises à des charges distribuées sinusoïdales et reposant sur divers types de fondations élastiques variables Winkler-Pasternak ($k_w=50, k_p = 4, \zeta = 2.5$) 78
- Figure V. 9 :** Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport à l'indice de la loi de puissance k de plaques carrées ($a/h = 10$) soumises à des charges distribuées sinusoïdales et reposant sur divers types de fondations variables Winkler-Pasternak ($k_w=50, k_p = 4, \zeta = 2.5$) 78



Listes Des Tableaux

Chapitre I : Les Matériaux Fonctionnelles Graduées FGM

Tableau I. 1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon 4

Tableau I. 2 : Les propriétés des FGM et leurs applications significatives..... 14

Chapitre II : Les Théories Des Plaques

Tableau II. 1 : Diverses fonctions de gauchissements dans la théorie d'ordre élève..... 33

Chapitre III : Fondation Elastique des Plaques en FGM

Chapitre IV : Analyse de l'Effet Couplé des Fondations Elastiques Variables

Sur le Comportement à la Flexion des Plaques en FGM

Chapitre V : Résultats Numériques Et Discussions

Tableau V. 1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG..... 66

Tableau V. 2 : La flèche adimensionnelle des plaques carrées FGM sous des charges uniformes sans fondations Winkler-Pasternak..... 67

Tableau V. 3 : Comparaisons de la flèche et la contrainte normale adimensionnelle dans le plan d'une plaque carrée en utilisant une charge mécanique transversale sinusoïdale ... 68

Tableau V. 4 : Comparaisons la flèche centrales d'une plaque carrée isotrope en utilisant une charge mécanique uniforme ($m, n =$ série de 100 termes)..... 69

Tableau V. 5 : Comparaison de la flèche \bar{w} et les contraintes $\bar{\sigma}_i$ adimensionnelle de la plaque carrée FG soumis à une charge mécanique transversale sinusoïdale ($a = 10h$)..... 71

Tableau V. 6 : La flèche \bar{w} et la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ adimensionnelle au plan médium en utilisant des fondations Winkler-Pasternak uniformes ($\zeta=0$) et variables (variation parabolique) ($kw=10, kp=10$ et $a/h=10$)..... 73



Listes Des Notations

Liste des Notations

| | |
|---|--|
| FGM | Matériaux à gradient de propriétés où bien fonctionnellement gradués |
| $E, E(z)$ | Module de Young, En fonction de z |
| $G, G(z)$ | Module de cisaillement dans le plan (x, z) , En fonction de z |
| $\nu, \nu(z)$ | Coefficient de Poisson, En fonction de z |
| E_c, E_m | Module de Young de la céramique et du métal |
| $V(z)$ | Fraction volumique en fonction de z |
| k | Indice matériel |
| a | Longueur de la plaque |
| b | Largeur de la plaque |
| h | Epaisseur de la plaque |
| x, y, z | Coordonnées cartésiennes rectangulaires |
| u, v, w | Les déplacements dans les directions x, y et z |
| u_0, v_0, w_0 | Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen |
| ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z | Les rotations autour des axes x, y et z |
| θ_i | Rotations autour de l'axe i |
| $f(z)$ | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) |
| $g(z)$ | Dérivée de la fonction de gauchissement $f(z)$ |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Contraintes normales |
| $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ | Contraintes de cisaillement |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformation dans la direction x, y et z |
| $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ | Déformations de distorsion |
| $\delta u, \delta v, \delta w$ | Champ virtuel de déplacement |
| $\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}, \delta\gamma_{xy}$ | Champ de déformation transversal virtuel |
| N_x, N_y, N_z, N_{xy} | Efforts normaux |
| M_x, M_y, M_{xy} | Moments de flexion |
| M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b | Moment supplémentaire du à la flexion |
| M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s | Moment supplémentaire du au cisaillement transverse |
| S_{xz}^s, S_{yz}^s | Effort de cisaillement |
| U | Energie potentielle totale |
| V | Travail externe |

| | |
|---|---|
| R | Densité de la réaction de la fondation élastique |
| δU | Variation de l'énergie de déformation |
| δV | Variation du travail externe |
| δR | Variation du travail de la fondation élastique |
| K_w | Coefficient de Winkler la rigidité de la fondation |
| K_p | Coefficient de Pasternak la rigidité de couche cisaillement de la fondation |
| q, p | Charge mécanique, force mécanique |
| q_{mn} | Charge transversale |
| m, n | Mode selon l'axe x, y |
| Q_{ij}, Q_{ji} | Coefficients de rigidité |
| ∂ | Dérivée partielle |
| i, j | Sont des nombres naturels |
| A_{ij} | Termes de rigidité de la matrice de membrane |
| B_{ij} | Termes de rigidité de la matrice de couplage |
| D_{ij} | Termes de la matrice de flexion |
| B_{ij}^s | Termes de rigidité de la matrice |
| D_{ij}^s | Termes de rigidité de la matrice |
| H_{ij}^s | Termes de rigidité de la matrice |
| A_{ij} | Termes de rigidité de la matrice |
| $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ et ϕ_{mn} | Paramètres arbitraires |
| k_1, k_2, α, β | Coefficients dépendent de la géométrie |
| A', B' | Coefficients dépendent de la solution de Navier |
| C_{ij} | Coefficient de rigidité élastique |
| D_c, D_m | Référence de la rigidité à flexion de Céramique, Métal |
| η, ζ | Nombre real |
| ∇ | Opérateur Laplacien |
| $\{\Delta\}$ | Le vecteur des déplacements généralisés |
| $\{f\}$ | Le vecteur des efforts généralisés |
| $\{ \}$ | Vecteur colonne |
| $[]$ | Matrice |



Introduction

Générale

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (En anglais : Functionally Graded Material) description plus détaillée des matériaux à gradient de propriétés a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion, où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope. En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédiant aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition.

En 1987 le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C, peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été menés afin de développer l'architecture des FGM, et aussi d'étudier ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). L'idée des FGM a été échangée dont le but était de concevoir un matériau avec une graduation continue à travers l'épaisseur, en passant d'une face complètement métallique vers une face complètement céramique, afin d'éviter le problème de la concentration des contraintes aux interfaces.

Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développement dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises

simultanément. Les applications balistiques de cette classe des matériaux sont également très attrayantes. Un matériau à gradient fonctionnel FGM est un matériau dont les propriétés physiques évoluent selon une variation spatiale progressive (discrète ou continue) de la composition ou de la microstructure.

L'évolution continue des propriétés mécaniques entre la surface inférieure et la surface supérieure des structures fonctionnellement graduées surmonte le phénomène de concentrations de contraintes locales induites généralement par des transitions brusques dans les propriétés des matériaux constitutifs. De plus, cette caractéristique contrôle la faible ténacité à la rupture de la céramique et réduit la résistance des métaux lors d'une exposition à une chaleur intense. Il est important de noter que les éléments FG suscitent toujours de nombreux intérêts dans divers domaines de l'ingénierie tels que l'aéronautique, la marine, la construction et l'ingénierie mécanique.

Le comportement stable des structures en composites renforcés est un sujet d'actualité qui a attiré de nombreux chercheurs ces dernières années. Dans les domaines de l'ingénierie des nombreuses études ont été consacrées récemment à l'évaluation du comportement statique et dynamique des structures fonctionnellement graduées imparfaites, notamment l'évaluation des comportements en flexion et l'interaction structures-fondations. En fonction des applications du système structural considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisation pour les fondations.

Les fondations élastiques sont célèbres et essentielles en ingénierie. Elles peuvent être trouvées dans de nombreux domaines industriels et principalement dans des applications de construction comme les réservoirs de stockage et les fondations de radier. La partie la plus difficile de la recherche sur les fondations élastiques consiste à simuler leur comportement. La contribution du présent travail est la prédiction de l'effet couplé des fondations variables (Winkler–Pasternak) sur le comportement en flexion des plaques FG. Plus important encore, il vise à étudier leur réponse sous plusieurs types de chargement. Les fondations élastiques variables ont un large éventail d'applications dans différents domaines d'ingénierie, notamment les voies ferrées, les gratte-ciel, la conception offshore, l'interaction solide-fluide, les réseaux de pipelines et les systèmes de matériaux innovants. De nombreuses études ont étudié la réponse mécanique de ces éléments reposant sur ce type de fondation.

Dans ce contexte, est d'apporter une étude de l'effet des fondations élastiques sur le comportement mécanique des structures épaisses, pour ceci, cette thèse s'articule autour de cinq chapitres. Après une introduction générale.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par des généralités sur les structures des matériaux à gradient de propriétés, l'histoire de leur développement, leurs propriétés effectives, leur revue de méthode d'élaboration, leur branche d'application, leurs propriétés et ces applications, leur publication et travaux internationaux et leurs types ainsi les propriétés matérielles des plaques en FGM.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les différentes théories des plaques, la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT), la théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) et la théorie de déformation des plaques quasi-3D.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une synthèse bibliographique sur les fondations élastique des plaques en FGM, les différentes approches de la modélisation, les différents types et les modèles uniforme et non uniforme ainsi que le couplage de la fondation élastique non uniforme et leur formulation, nous terminons cette partie par une analyse de l'influence des fondations élastiques sur le comportement des plaques.

La formulation d'un modèle analytique des structures FGM basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi 3D est présenté dans le chapitre quatre. Le but de cette formulation est la proposition d'une théorie efficace avec un nombre des variables réduit afin d'analyser le comportement statique ou dynamique des plaques . Généralement, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale dans lesquelles est pris en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement. Une analyse de l'effet couplé des fondations élastiques variables Winkler-Pasternak sur le comportement à la flexion des plaques FG soumise aux plusieurs types de chargement, le comportement en flexion est présentée en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement quasi-3D avec prise en compte de l'effet d'étirement d'épaisseur avec une nouvelle fonction de gauchissement sinusoïdale.

Le cinquième chapitre contient une synthèse des résultats numériques et discussions. Les résultats obtenus sont comparés avec les données disponibles dans la littérature pour la validité et l'exactitude de cette théorie. Une étude paramétrique détaillée sur l'effet de l'indice de la loi de puissance, les rapports d'épaisseur et géométrique de la plaque, le type de chargement et des paramètres de la fondation non uniforme de Winkler-Pasternak sur le comportement en flexion est exposée. Ces résultats ont prouvé que la théorie proposée est efficace et simple pour l'analyse de l'effet de la fondation élastique sur les structures épaisse soumis à la flexion des plaques fonctionnellement graduées.

Finalement, nous terminerons par une conclusion générale reflétant le contenu de cette recherche de la thèse, ainsi que des perspectives pour des travaux futurs.



Chapitre I :

*Les matériaux
Fonctionnelles
Graduées FGM*

Chapitre I :**Les matériaux fonctionnelles graduées FGM****I.1. Historique sur le développement des matériaux FGM**

Le FGM est un matériau constitué de plusieurs couches avec des composants différents tels que les céramiques et les métaux ayant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes. Les matériaux FGM peuvent également être conçus de telle sorte que le matériau est sélectivement renforcé dans les régions qui doivent avoir des propriétés particulières. La composition et la microstructure comprenant la composition chimique, l'état physique et la configuration géométrique peuvent être modifiées progressivement sur l'ensemble du volume dans les matériaux composites. Cela entraînerait une modification correspondante des propriétés du matériau dans ce volume [Atai AA et al, 2012].

Pour la conception de ce nouveau matériau, beaucoup de recherches ont été menées initialement au Japon qui est résumés dans le tableau I.1 [Belarouci AG, 2021]:

Tableau I.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

| Année | Progrès de recherche sur les FGM |
|-----------|--|
| 1984 | Idée pour la conception des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion initiée par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon). |
| 1986 | Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous le patronage de la science et de l'agence de technologie (STA). |
| 1987-1989 | Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1). |
| 1988 | Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF. |
| 1989 | Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) à Kôln, (Allemagne). |
| 1990 | 1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM). |
| 1990-1991 | FGM partie I-phase (2). |
| 1992 | Etude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA). |
| 1993 | Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM, FGM partie II- phase(1). |
| 1994 | 3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse). |
| 1995 | Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai). |
| 1996 | 4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon) |

I.2. Propriétés effectives des FGM

Généralement les FGM sont produits à partir de deux phases (types) de matériaux ayant des propriétés distinctes avec des fractions volumiques de chaque phase qui varient et évoluent graduellement dans la direction de gradation où on constate un changement des propriétés effectives des FGM. Par conséquent, on distingue deux approches possibles pour les modèles des FGM (Figure I.1) [Belarouci AG, 2021], [Zaoui FZ, 2021], [Zhang C et al, 2019], [El-Galy IM et al, 2019] :

- ✓ Dans le graphe (a), on constate une variation en escalier de la fraction volumique (céramique et/ou du métal) qui est conservée pour chacune des sections. Les compositions et / ou les microstructures changent par étapes, généralement avec la présence d'une interface.
- ✓ Dans le graphe (b), la fraction volumique des deux composants (céramique et métal) change semblablement à une fonction dépendant de la coordonnée (z), et continuellement l'une à l'inverse de l'autre,

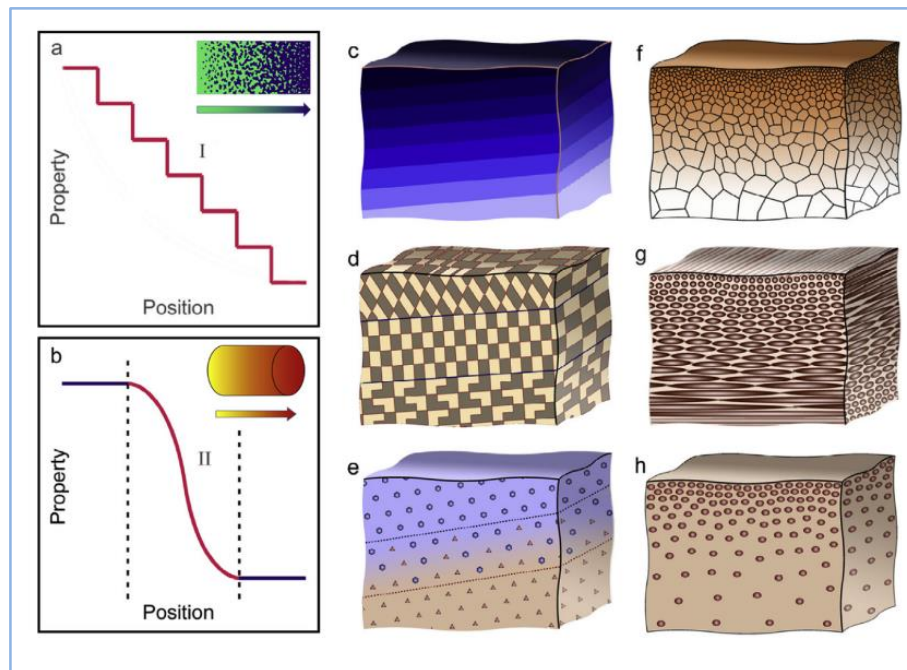


Figure I.1 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM [Zhang et al. 2019].

I.3. Les FGM matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials)

Ce matériau développé en premier temps par un groupe scientifique japonais en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai, s'inscrit dans une tendance relativement nouvelle, répond aux exigences techniques et certaines caractéristiques spécifiques, est conçu pour éliminer les discontinuités au niveau des interfaces et le délaminage, rencontrés dans les matériaux composites classiques. Il a des propriétés physiques qui varient graduellement et continuellement à travers l'épaisseur et aussi pour éviter le problème de la concentration des contraintes aux interfaces. Son utilisation est en progression croissante

et envahit plusieurs domaines telles que la mécanique, l'aérospatiale, le génie civil, le biomédical et autre domaine. Il servira aussi comme barrières thermiques grâce à sa composition riche en céramique [Belarouci AG, 2021].

I.4. Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM

La fabrication des matériaux à gradient de propriété s'effectue en première étape par l'établissement de la structure dans l'espace non homogène « gradation » puis en deuxième étape une transformation en bloc de la structure du matériau « consolidation ». Les procédés de fabrication des produits FGM sont multiples et leurs choix dépendent des paramètres suivants :

- ✓ De la combinaison de matière.
- ✓ Du type de la loi de mélange requise.
- ✓ De la géométrie de la composante souhaitée.

Dans les paragraphes suivants nous présentons les procédés industriels les plus utilisés dans la fabrication des produits FGM à savoir : coulage en bande « tape casting », coulage séquentiel en barbotine « slip casting », dépôt par électrophorèse, compaction sèche des poudres, projection plasma, frittage en infiltration, implantation ionique.

I.4. 1 Coulage en bande (tape casting)

Le coulage en bande est une technique qui consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse sur un support plan sous forme de plusieurs couches minces et régulières pour fabriquer des feuillets dont les épaisseurs sont contrôlées et qui varient de 25 à 1000 μ m. Après un raffermissement de la pâte, ces feuillets sont démoulés puis découpés.

Pour que le procédé réussisse, il faut que le solvant utilisé ait un point d'ébullition très bas et une viscosité faible mais il ne doit pas être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique mais soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts. Le liant est utilisé pour offrir une grande résistance mécanique au produit cru et facilite sa manipulation. Alors que le plastifiant est ajouté au liant pour réduire sa viscosité. Ces dits produits (Le liant, le plastifiant et le défloculant) doivent être totalement dégagés pendant le démoulage. Ce procédé de coulage en bande est souvent utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant les deux méthodes suivantes :

- ✓ Soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (MIST) .
- ✓ Soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch P et al, 1986].

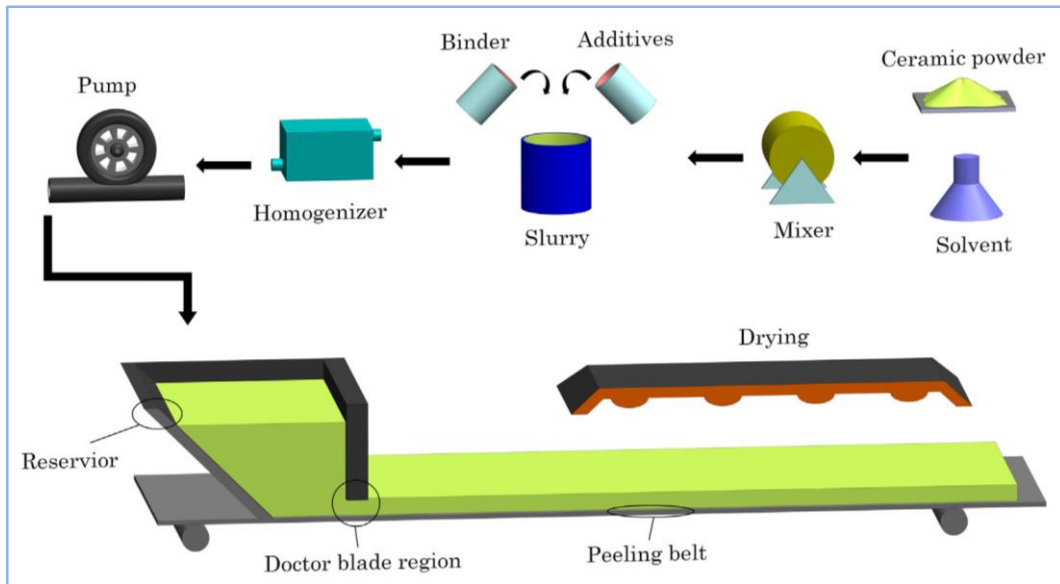


Figure I.2 : Le processus de coulée en bande [Jabbari M et al, 2016].

I.4. 2 Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)

Le principe consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, en laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Ce coulage s'effectue en deux étapes essentielles qui sont, la formation du tesson ou « prise » dans une première phase puis une consolidation du tesson ou « raffermissement ».

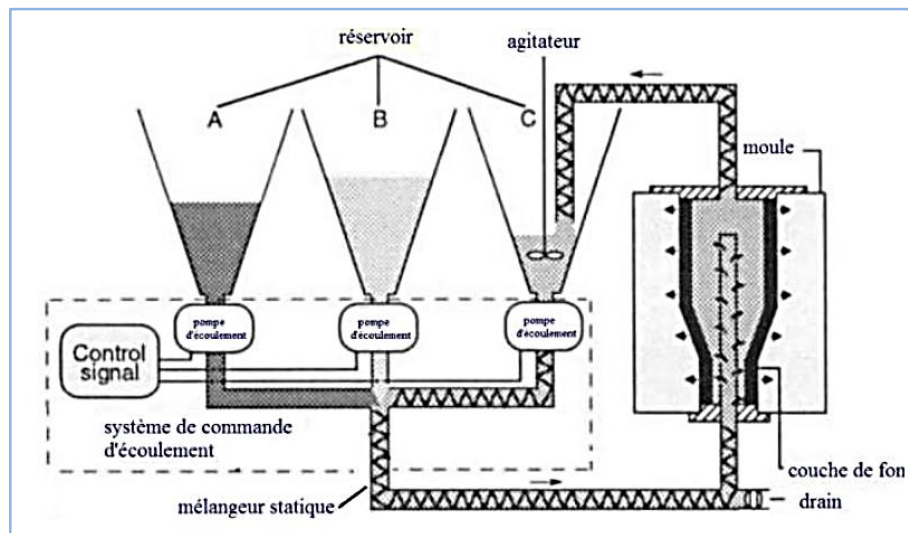


Figure I.3 : Principe du coulage par barbotine [Moya JS et al, 1992].

I.4. 3 Dépôt par Centrifugation

La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques, qui consistent à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure. I. 4) [Lucchini E, 1995], [Hillman C, 1996], [Sbaizero O, 1996].

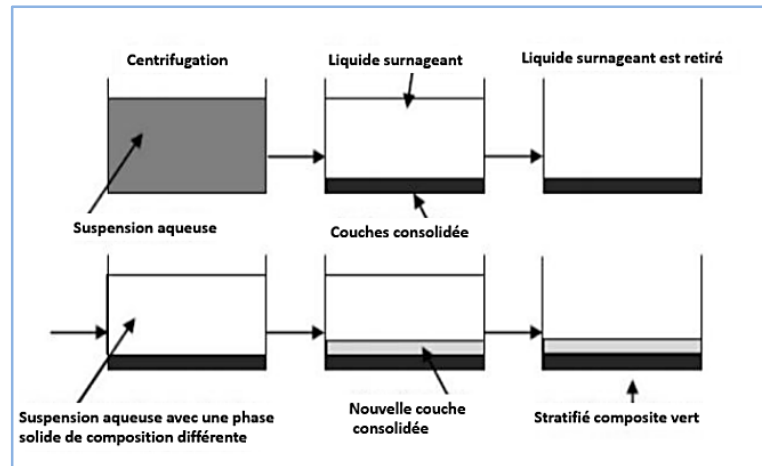


Figure I.4 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Koteswara DR et al, 2013].

I.4. 4 Méthodes de coulée centrifuge

La coulée centrifuge est une méthode à l'état liquide pour façonner et alimenter une variété de paramètres de processus tels que la vitesse de rotation, la vitesse d'alimentation, le préchauffage du moule et le revêtement. La première application commerciale du procédé de coulée centrifuge a été lancée en 1848 pour fabriquer des tuyaux à Baltimore. Au début des années 1990, la technique de coulée centrifuge a été utilisée pour générer les composants gradués et est maintenant l'une des méthodes les plus pertinentes utilisées dans le développement des FGM [Haughwout LB, 1971], [Bassiouny S et al, 2020]. Cette méthode dépend de la force centrifuge due à la différence de densité entre deux matériaux, dont l'un est le métal de base, et l'autre est les particules de renforcement où le métal fondu est versé après le mélange approprié par processus d'agitation à l'intérieur d'un moule rotatif, comme le montre la figure I. 5.

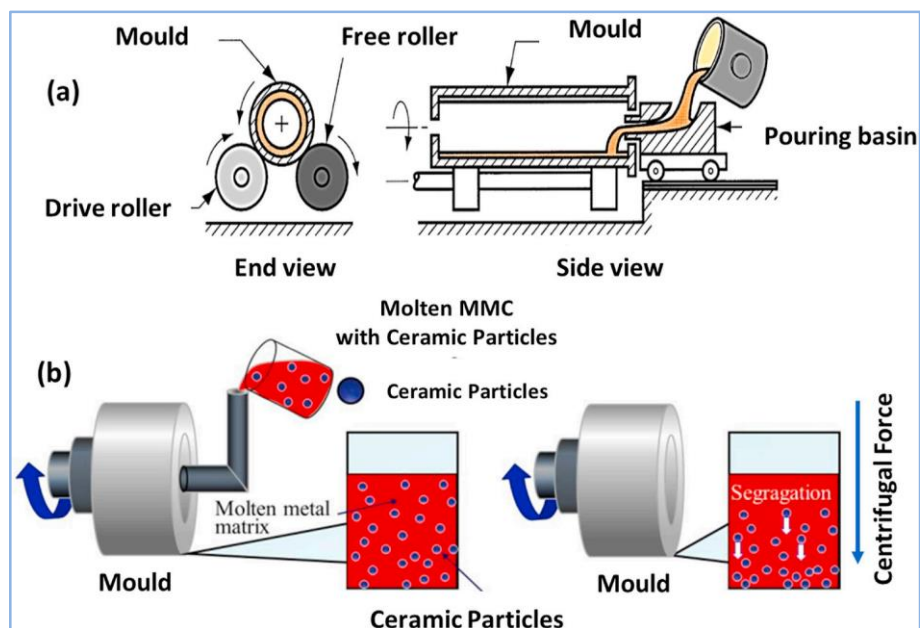


Figure I.5 : (a) Machine de coulée centrifuge horizontale, et (b) Concept de ségrégation des particules pendant la production de FGM [Bassiouny S et al, 2020].

I.4. 5 Dépôt par électrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [Sarkar P et al, 1996].

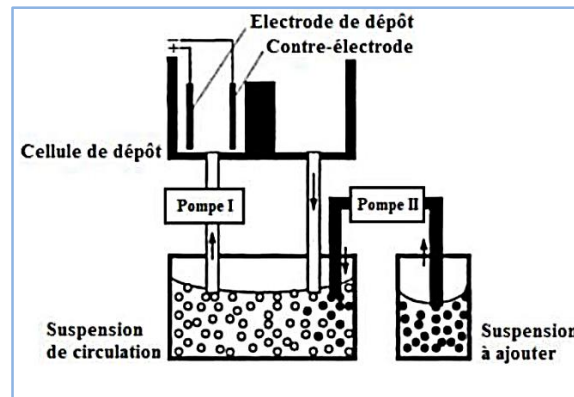


Figure I.6 : Schéma d'un dépôt par électrophorèse [Sarkar P et al, 1996].

I.4. 6 Compaction sèche des poudres

Dans cette technique, les poudres sont coulées successivement dans un moule en acier. A chaque fois qu'une poudre est coulée, une faible compression qui s'exerce généralement par pression isostatique et décapage, la densification sera finalement à la dernière étape [Bishop A et al, 1993].

I.4. 7 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens HD et al, 1990].

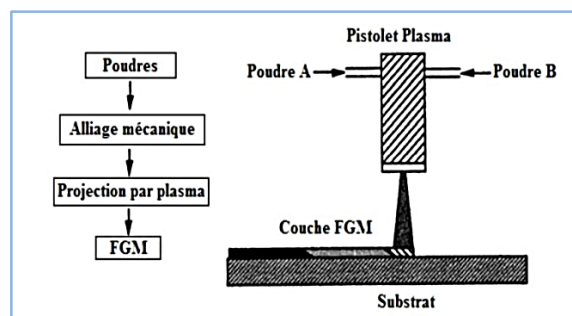


Figure I.7 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [Steffens, 1990].

I.4. 8 C.V.D et P.V.D

Les dépôts chimique (C.V.D) ou physique (P.V.D) en phase vapeur sont des procédés de fabrication des FGM dont lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de FGM sur des substrats de formes compliquées [Kawai C et al, 1990], [Uemura S et al, 1990].

I.4. 9 Frittage en infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi M et al, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4. 10 Frittage laser différentiel

L'utilisation du laser dans ce procédé permet de contrôler la température et focaliser avec précision le point à chauffer. Le frittage différentiel le long de la pièce est obtenu grâce à la différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. [Yuki M et al, 1990] Ont fabriqué une pièce FGM de PSZ/Mo. La figure I.8 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

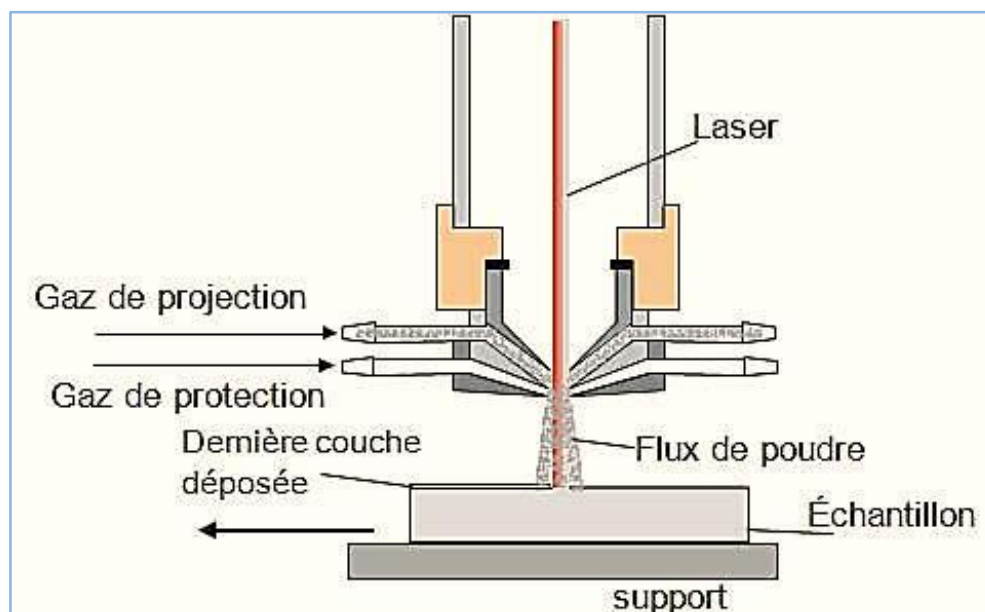


Figure I.8 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [Yuki M et al, 1990].

I.4. 11 Implantation ionique

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Chigasaki M et al,1990], [Benbakhti AJ, 2021].

I.5. Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués FGM

Les matériaux FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatial ou aéronautique, électriques comme les diodes électroniques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et même dans les secteurs chimiques et biologiques. En raison du développement du concept de FGM dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée [Benbakhti AJ, 2021]. Grâce à leurs propriétés mécaniques et thermiques ces matériaux sont utilisés dans des différentes domaines tel que :

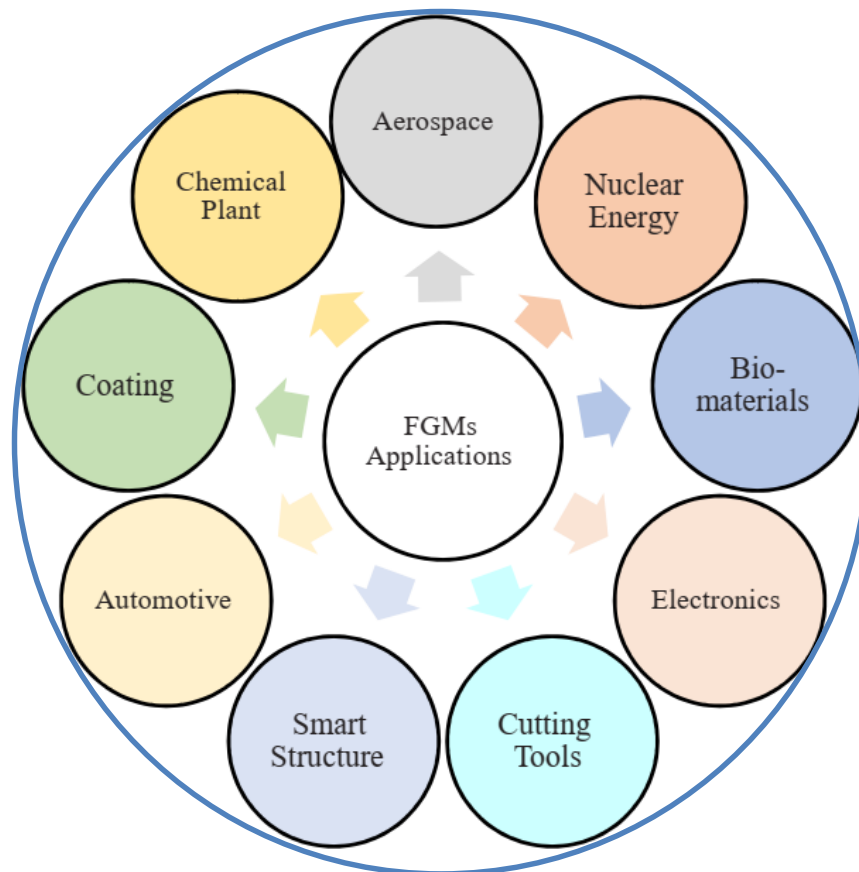


Figure I.9 : Les différents domaines des matériaux FGM [Bassiouny S et al, 2020].



Figure I.10 : Pièces en FGMs dans les applications aérospatiales [Bassiouny S et al, 2020].



Figure I.11 : Pièces FGMs dans les applications automobiles [Bassiouny S et al, 2020].

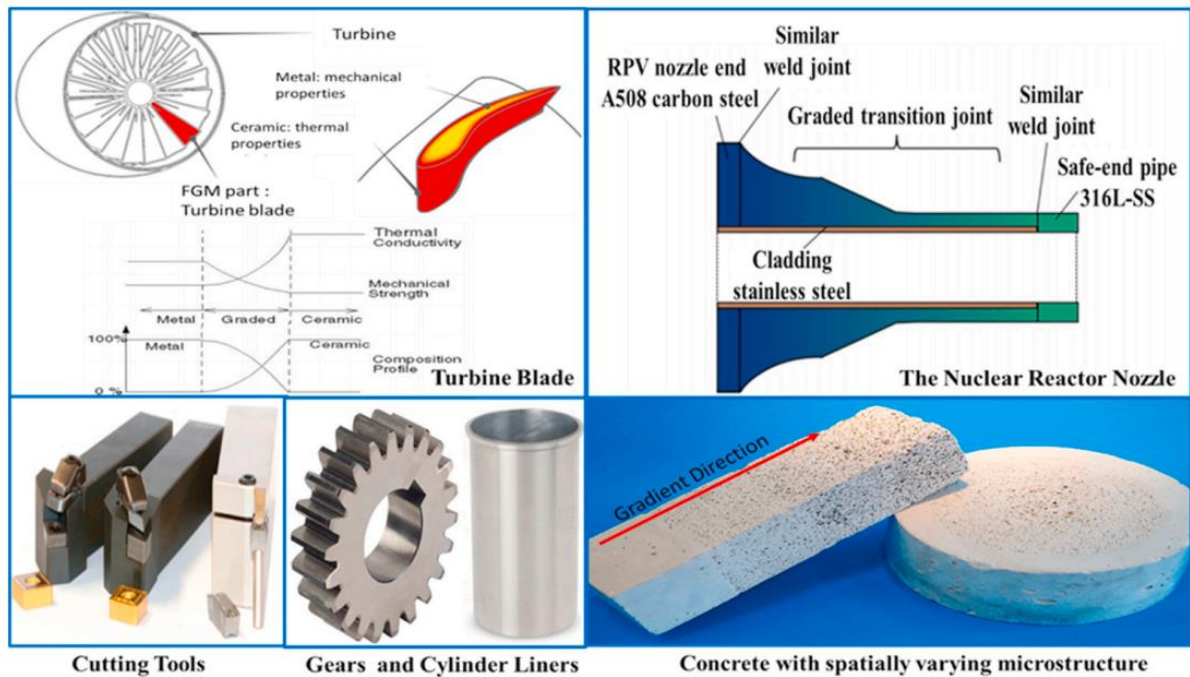


Figure I.12 : Pièces FGMs et ces applications [Bassiouny S et al, 2020].

I.5. 1 L'aérospatiale

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été initialement conçu pour l'industrie aéronautique car les FGM peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend adéquats pour l'usage dans les structures et le corps des navettes spatiales ainsi que pour les composants de moteur des fusées [Marin L, 2005]. Les FGM sont très prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

I.5. 2 La médecine

Les matériaux FGM ont trouvés une large gamme d'application dans les chirurgies dentaires et orthopédiques car ces tissus vivants, tels que les os et les dents, sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature [Matsuo S, 2005], et pour les remplacer un matériau compatible est nécessaire d'où l'intérêt pour l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués.

I.5. 3 L'électronique

Les FGM trouvent également leurs utilités dans l'électronique tel que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde, des cartes de circuits imprimés, les téléphones cellulaires et dans des supports de stockage magnétiques de disques audiovidéo.

I.5. 4 L'énergie

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement de protection sur les pales de la turbine dans le moteur à turbine à gaz.

[Bishop A et al, 1993]. Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM (céramique / métal).

I.5. 5 L'automobile

Les cylindres de moteur de voiture sont faits de FGM. Leurs phase interne est en céramique et la phase externe est métallique.

I.5. 6 La défense

L'une des caractéristiques les plus importantes d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration d'armures des équipements et les gilets pare-balles [Lu L et al, 2011].

I.5. 7 Outils de coupe

Les FGM sont utilisés dans les outils de coupe car ils améliorent la résistance thermique. La fissure se produit près de l'interface pointe-tige dans le type conventionnel mais avec les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration de contrainte [EL-Wazery MS et al, 2015].

I.6. Les propriétés des FGMs et leurs applications

Une synthèse des propriétés des FGMs et leurs applications dans le tableau I.2 :

Tableau I.2 : Les propriétés des FGM et leurs applications significatives [Bohidar SK et al, 2014], [Makwana AB et al, 2014], [Udupa G et al, 2014].

| FGM | Propriétés | Application |
|---|---|--|
| Al₂O₃/ Alliage d'aluminium | Barrière thermique et anti-usure | Buse à fusée, ailes et pièces moulées |
| Fibre de verre / Epoxy | Résistance à la dureté et à l'amortissement | Rotors de frein, dômes solaires, Systèmes de tuyauterie composite. |
| Carbone / Epoxy | Légers et de bonnes propriétés d'amortissement | Composants d'hélicoptères Portes de trains d'atterrissage Panneaux d'échangeurs de chaleur Pièces de moteur |
| TiAl / SiC SiC/C | Revêtements résistants aux températures et aux chocs | Panneaux d'échange de chaleur, buse de fusée, structure de vaisseau spatial, panneaux solaires, réflecteurs et lames de roue de turbine. |
| Graphite / Epoxy | Rapport résistance / raideur élevé, bonne résistance au rayonnement et réduit les distorsions thermiques. | Coques de pression cylindriques Télescopes spatiaux Réservoirs cryogéniques Antennes satellites |

| | | |
|---|---|---|
| Alliage d'aluminium / Nanotubes de carbone (CNT) | Légèreté et haute rigidité | Ligaments artificiels, pièces de rechange pour scanner IRM, lunettes de verre et pièces de dentisterie. |
| SiCw / Alliage d'aluminium | Résistance thermique, inertie chimique, dureté et ténacité | Cylindres de stockage, pistons de moteurs diesel, cadres de vélo et véhicules de course |
| WC / Co | Propriété de résistance à la chaleur, à l'usure et à la déchirure | Machines et les outils de formage, les outils de coupe et les os artificiels. |
| Al / SiC | Dureté et ténacité | Chambres de combustion, Garnitures de cylindre moteur, Volants, |
| BaTiO₃ / Si | Contrôle de perte de signal à haute fréquence | Moteurs diélectriques |

I.7. Publication et travaux international des FGMs

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM représentent un axe de recherche intéressant qui a attiré fortement l'attention de beaucoup de chercheurs. Des travaux intenses ont été effectués et de nombreuses recherches ont été publiées mais il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine (Figure I. 13) [Basé sur le système de recherche Web of Science dans la durée de 1990–12/2019], [Bassiouny S et al, 2020].

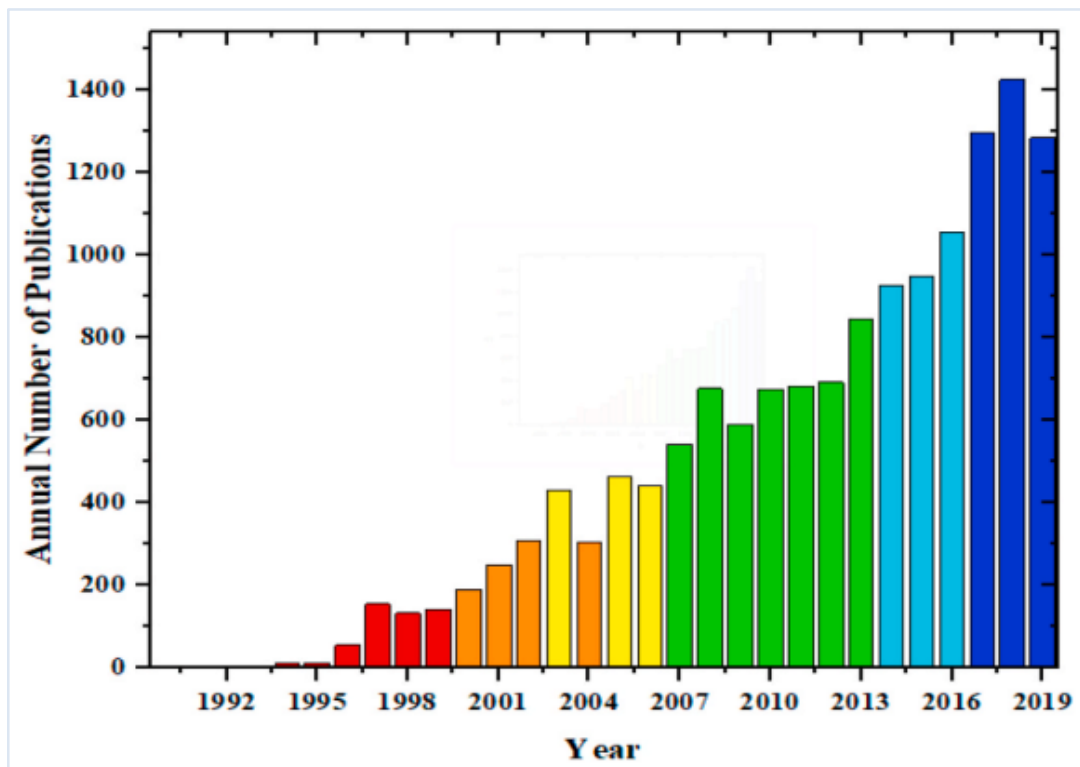


Figure I.13 : Le nombre de publications annuelles dans le titre de recherche « Fonctionnellement matériaux classés FGM ».

I.8. Types des matériaux fonctionnellement graduée FGM

Les FGMs sont des matériaux hétérogènes constitués par l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes [Sarathchandra DT et al, 2018]. Donc, il est très utile d'avoir des schémas d'homogénéisation pour simplifier leurs microstructures non-homogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace (figure I. 14).

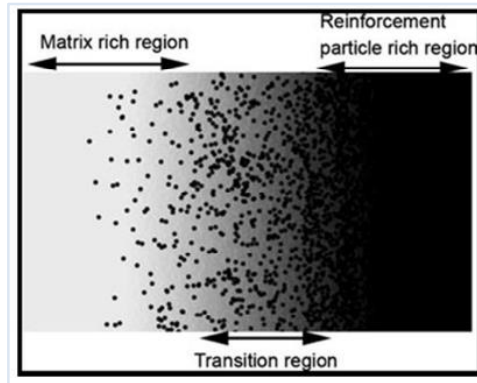


Figure I.14 : Schéma de la distribution dans les FGM [Sarathchandra DT et al, 2018].

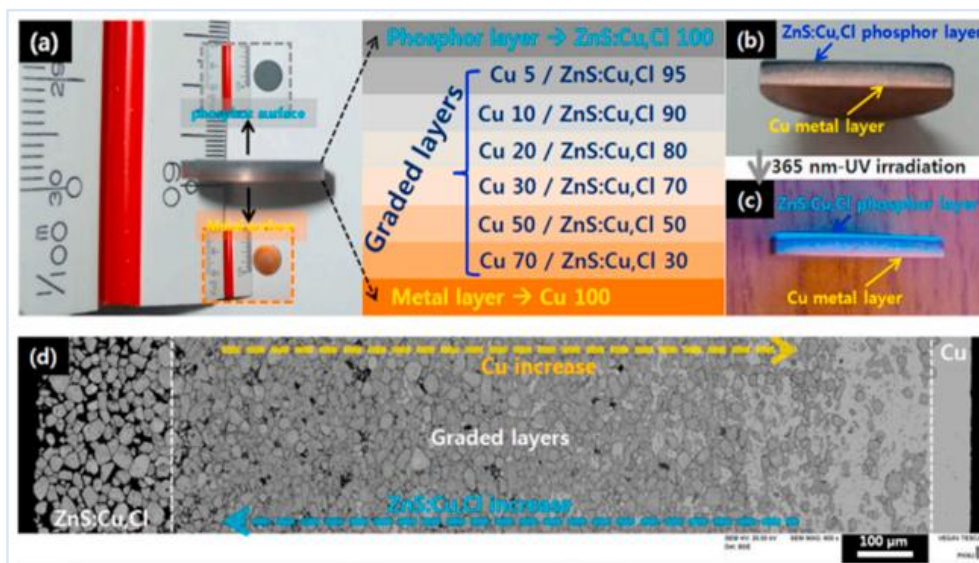


Figure I.15 : Echantillon FG avec gradient [Park J, 2016].

(a), (d) et (c) : Vue de coupes, (d) : Image MEB.

- ✓ Les FGM sont divisés en quatre types (Figure I.16) en fonction de la nature du gradient, tels que le type de gradient de fraction, le type de gradient de forme, le type de gradient d'orientation et le type de gradient de taille [Sarathchandra DT et al, 2018], [Guptha K M, 2015]. Les avantages les plus importants sont que l'interface FGM peut connecter deux matériaux complexes et incompatibles, ainsi que une force de liaison améliorée. Les revêtements FGM sont utilisés pour réduire les contraintes résiduelles internes et l'interface FGM réduit la force d'entraînement des fissures développée dans le matériau. Très peu de travaux ont été rapportés sur les méthodes de modélisation, d'analyse et de

fabrication des FGM. De la (figure I. 16), on observe que très peu de travaux ont été réalisés sur les méthodes de fabrication [Sarathchandra DT et al, 2018], [Gupta A et al, 2015].

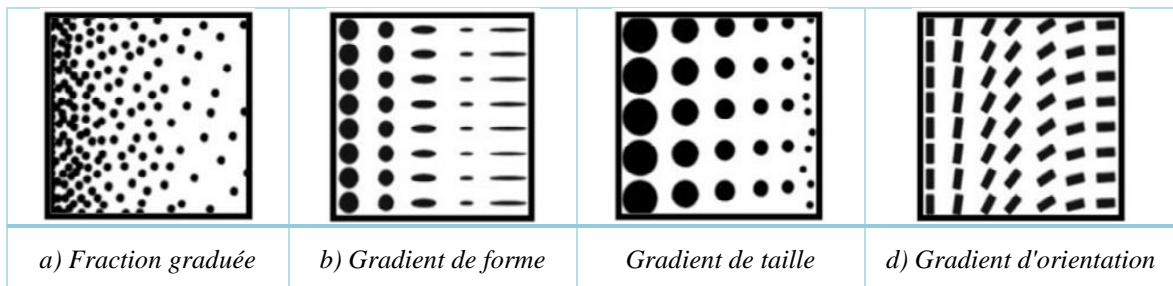


Figure I.16 : Différents types de gradients dans les FGM [Guptha K M, 2015].

- ✓ Les FGM sont caractérisées par des transitions graduelles dans les compositions / constituants ou les microstructures (par exemple, la taille des grains, la texture, la porosité, etc.), dans au moins une direction, conduisant à des changements fonctionnels associés à au moins d'une propriété [El-Galy IM et al, 2019], [Zhang C et al, 2019].

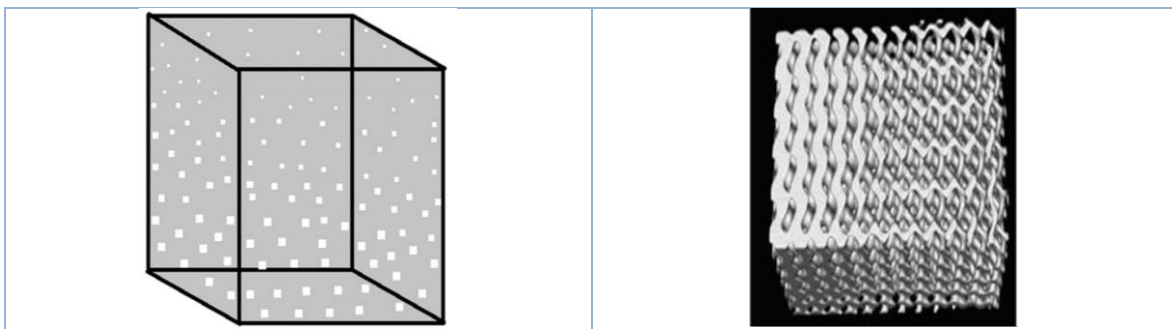


Figure I.17 : Diagramme schématique de porosité en FGM.

- ✓ Les principaux paramètres de conception d'un FGM comprennent la dimension du vecteur de gradient, la forme géométrique et la répartition équipotentielle des surfaces. Les caractéristiques et la fonctionnalité du composant sont en outre déterminées par la direction du gradient dans la composition [Craveiro F et al, 2013]. La conception et les types de gradient volumétrique peuvent être réalisés en une seule dimension (1D), deux dimensions (2D) et en trois dimensions (3D) comme illustré dans la figure I.18, et en distribuant les matériaux uniformément ou par des motifs spéciaux [Zaoui FZ, 2021], [Loh GH et al, 2018], [Muller P et al, 2012].

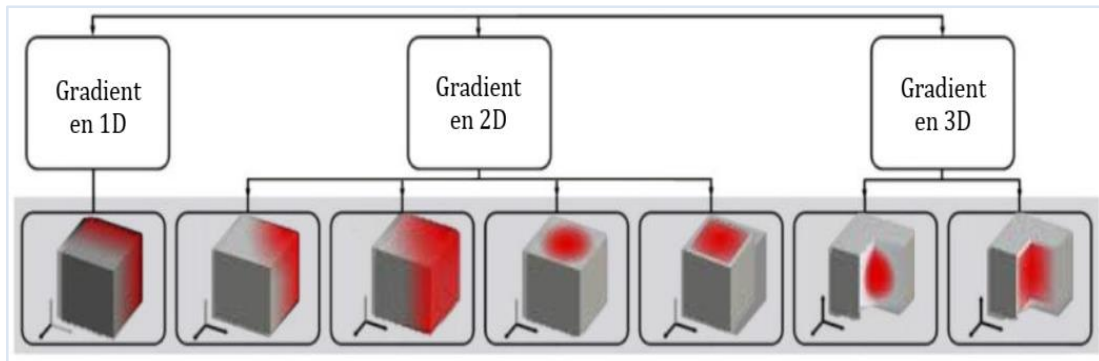


Figure I.18 : Direction du gradient dans un FGM.

I.9. Les propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnels gradués (FGM) peuvent être produits en faisant varier en continu les constituants des matériaux multiphasiques selon un profil prédéfini. Les caractéristiques les plus distinctes d'un FGM sont les microstructures non uniformes avec des macropropriétés à gradation continue. Un FGM typique peut être définie en faisant varier progressivement les propriétés du matériau. On utilise souvent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Considérons une plaque rectangulaire élastique. Comme la montre la figure.I.19, les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, alors que l'axe z est perpendiculaire à la surface médiane de la plaque dans le sens de l'épaisseur.

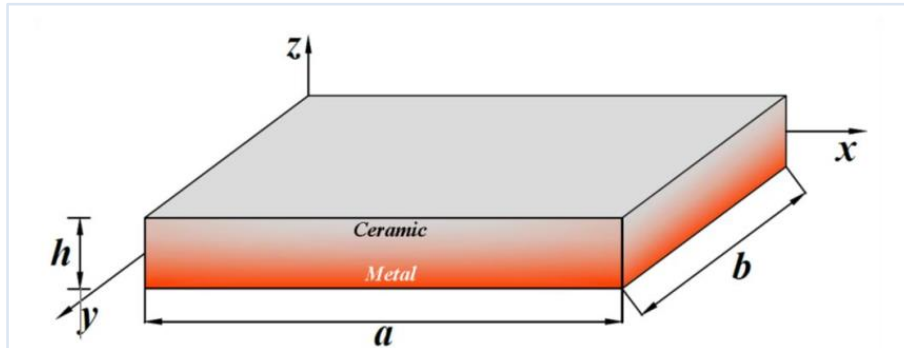


Figure I.19 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les propriétés du matériau, le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents, mais sont prédéfinis en fonction des exigences de performance. Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson des plaques ne varient continuellement que dans le sens de l'épaisseur (axe z), c'est-à-dire $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. [Delale F et Erdogan F, 1983] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, le coefficient de Poisson des plaques est supposé être constant. Néanmoins, les modules de Young dans le sens de l'épaisseur des plaques de FGM varient avec les fonctions de loi de puissance (P-FGM), les fonctions exponentielles (E-FGM) ou les fonctions sigmoïdes (S-FGM) [Addou FY, 2021].

I.9. 1 Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM (Loi de puissance)

La fraction volumique de la FGM correspond à une fonction de loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{I. 1})$$

Où p est le paramètre matériel et h l'épaisseur de la plaque. Après avoir défini la fraction volumique locale $V(z)$, les propriétés matérielles d'une P-FGM peuvent être déterminées par la loi du mélange exprimée par l'équation I.2 [Bao G et Wang L, 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I. 2})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et supérieure ($z = h/2$) de la plaque de FGM. La variation du module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans la figure I.20, ce qui montre que le module d'Young change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$ et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$ [Addou FY, 2021].

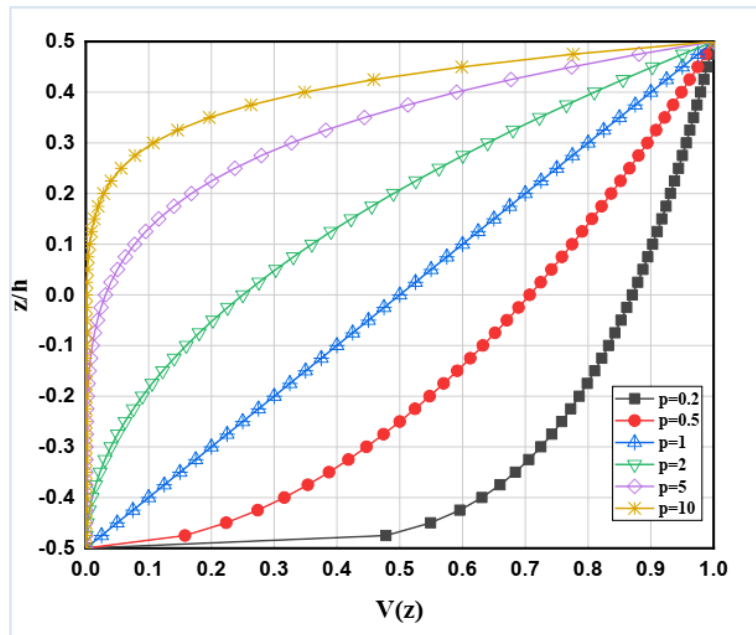


Figure I.20 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P- FGM.

I.9. 2 Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM (Loi sigmoïde)

Les variations des propriétés des FGM sont couramment exprimées à l'aide de la fonction de loi de puissance P-FGM. Néanmoins, dans les FGM, les concentrations de contraintes dans les FGM apparaissent à l'une des interfaces dans laquelle le matériau est continu mais change rapidement. Afin de surmonter cette difficulté et résoudre ce problème,

[Chung YL et Chi SH, 2001] ont défini la fraction volumique sigmoïde S-FGM composée de deux fonctions de loi de puissance définies par les relations I.3:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En appliquant la loi du mélange, le module de Young de la FGM-S peut être calculé par :

$$E_1(z) = V_1(z)E_c + (1-V_1(z))E_m \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E_2(z) = V_2(z)E_c + (1-V_2(z))E_m \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.21 présente la variation de la fraction volumique des répartitions sigmoïdes définie par les équations (I.4.a) et (I.4.b). Ainsi, cette plaque FGM est appelée plaque S-FGM.

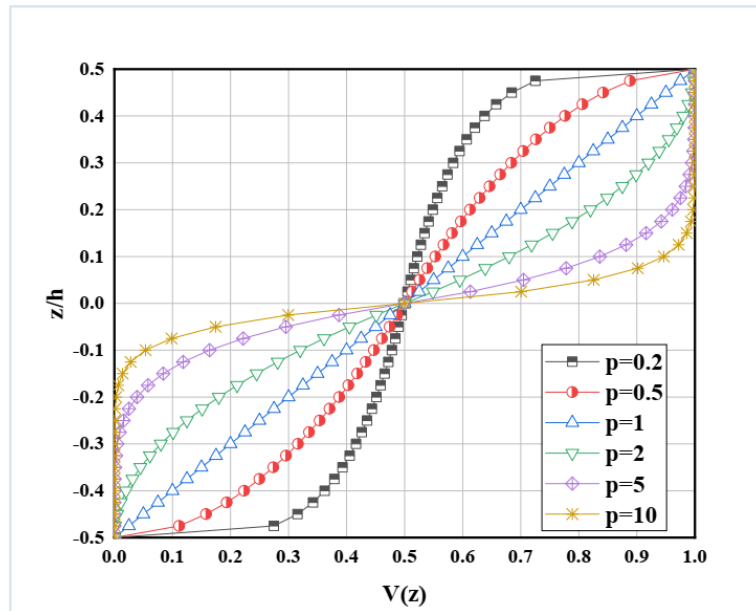


Figure I.21 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S- FGM.

I.9. 3. Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM (Loi exponentielle)

Cette loi s'emploie en utilisant la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM donnée par la formule I.5 [Delale F et Erdogan F, 1983]:

$$E(z) = E_m \exp(\beta(z+h/2)), \quad \beta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (\text{I.5})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur des plaques E-FGM est représentée sur la figure I.22.

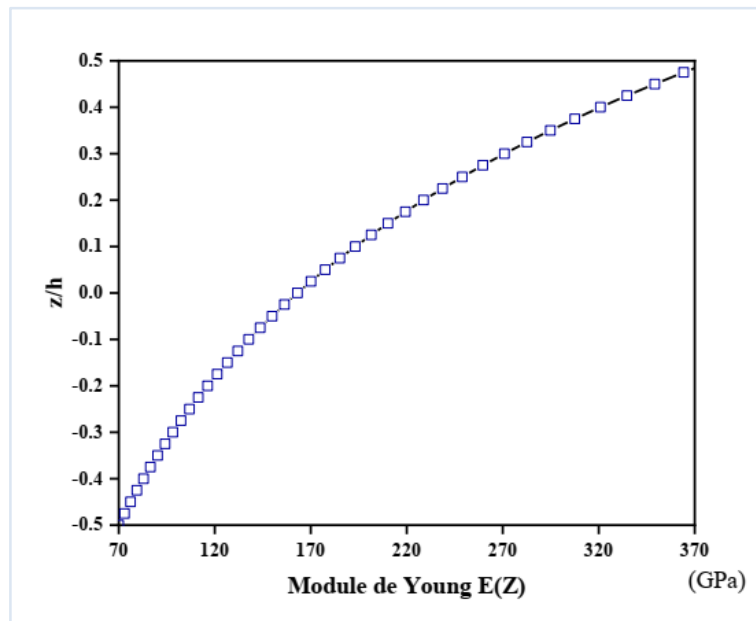


Figure I.22 : Variation de module de Young dans une plaque E- FGM.

Plusieurs théories classiques et d'ordre supérieur des plaques ont été utilisées pour étudier différents comportements des structures en FGM. Des recherches importantes sont disponibles sur les répartitions des propriétés matérielles des plaques FGM selon la loi de puissance, sigmoïde et exponentielle. Nous présentons ci-après une partie de ces travaux : Dans la grande majorité des travaux, une fonction de puissance est utilisée pour représenter la distribution transversale des matériaux métalliques et céramiques (P-FGM) [Boukhlif Z et al, 2019], [Zaoui FZ et al, 2019], [Zarga D et al, 2019], [Kaddari M et al, 2020]. Par conséquent, l'effet d'autres variations transversales des propriétés des matériaux sur l'instabilité des plaques rectangulaires épaisses FGM n'a pas été étudié. [Abdelrahman WG, 2020] a étudié cet effet en utilisant la TSDT pour le cas d'une plaque simplement appuyée. Une fonction sigmoïde et une fonction exponentielle sont toutes les deux utilisées pour représenter la variation des propriétés progressives transversales. L'étude paramétrique réalisée montre que la fabrication des plaques FGM avec une variation sigmoïde dans le sens de l'épaisseur augmente considérablement la charge de flambement. Cette amélioration s'avère plus significative dans le cas des plaques épaisses que dans celui des plaques minces. [Kaci A et al, 2014] ont présenté une étude de la flexion cylindrique non linéaire d'une plaque simplement appelée E-FGM. La plaque est soumise à une charge de pression uniforme et sa non-linéarité géométrique est introduite dans les équations de contrainte-déplacement basées sur les hypothèses de Von-Karman. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées, à l'exception du coefficient de Poisson, sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur de la plaque conformément à la loi de distribution exponentielle. Dans le travail de [Boussoula A et al, 2020] un nouveau type de plaques sandwich en S-FGM, à savoir des plaques frontales en P-FGM et un noyau dur symétrique en S-FGM ont été investi pour l'analyse thermomécanique de la flexion des plaques

sandwich FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du nième ordre. Un modèle d'éléments finis basé sur le champ de déplacement selon la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre a été utilisé pour comparer la réponse des vibrations libres des coques sandwich en FGM dont les couches inférieure et supérieure sont en métal et en céramique et dont l'âme est en FGM. Les propriétés des matériaux du noyau en FGM varient selon le modèle de loi de puissance (P-FGM) et le modèle sigmoïde (S-FGM) ([Karakoti A et al, 2020]).

I.10. Conclusion

Les matériaux FGM sont le résultat de combinaison de produits d'ingénierie développés sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes pour aboutir à des excellents matériaux de pointe qui demeurent une source de fabrication d'élément de structures dans plusieurs domaines industriels. Ces matériaux permettent de réduire les coûts de fabrication en optant pour des alliages moins couteux, tout en préservant les caractéristiques techniques de la pièce.

Dans ce chapitre, nous avons défini les différentes méthodes de fabrication des matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs domaines d'utilisation ainsi que leurs principales méthodes de fabrication.

Un aperçu sur les travaux d'analyse de différents comportements structurels des FGM basé sur les théories de déformation a été aussi présenté ainsi que les modèles possibles qui interviennent dans la description de la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur pour les plaques FG.



Chapitre II :

Les théories des plaques

Chapitre II :**Les théories des plaques****II.1. Introduction**

Les plaques sont des éléments de structures indispensables dans plusieurs domaines tels que l'aérospatiale, génie civil, énergétique et industriel. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. L'utilisation des plaques est très répandue en génie civil, car elles font partie de nombreuses structures, notamment, les dalles, les parois, les réservoirs, les enceintes de réacteurs, barrages, les ouvrages d'art...

Les plaques utilisées en génie civil présentent certaines particularités de calcul et de modélisation et afin de résoudre les problèmes liés à ce type d'élément dans le domaine élastique, il est impératif de choisir une théorie reflétant correctement le comportement statique, thermique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Les théories des plaques permettent de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elles s'inspirent de la théorie des poutres. Plusieurs modèles sur les théories des plaques sont développés dans la littérature avec différentes équations de la variation du champ de déplacements à travers l'épaisseur des plaques [Ali Rachedi, 2020].

II.2. Définition des plaques

Les plaques sont des solides limités par deux surfaces planes parallèles dont la distance entre-elles (appelée épaisseur h) est petite par rapport aux dimensions, elle est généralement employée pour modéliser des structures minces. Les plaques peuvent être rectangulaires, circulaires, polygonales ou de forme quelconque. Est défini à la figure II-1 [Ali Rachedi, 2020] :

- ✓ Le plan moyen (plan médian) : plan situé à équidistance entre les faces.
- ✓ La fibre neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y), avec $z = 0$.
- ✓ Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné, elle a pour direction z .

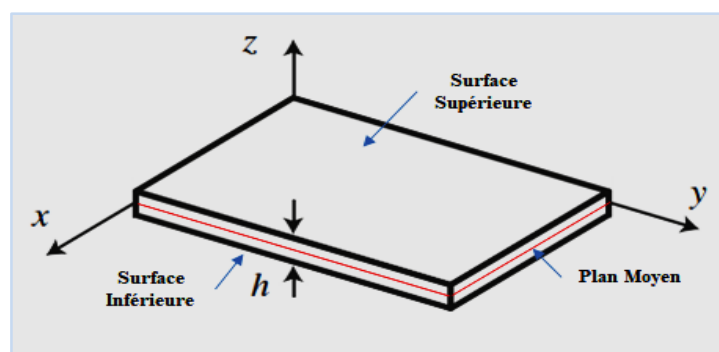


Figure II. 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire.

II.3. Historique sur le développement des théories des plaques

Le premier à avoir établi l'énoncé mathématiquement des problèmes de plaques a probablement été Euler, qui en 1776 a effectué une analyse de vibration libre des problèmes de plaque [Euler L, 1766]. Chladni, un physicien allemand, a découvert les différents modes de vibrations libres [Chladni EF, 1802]. J. Bernoulli [Bernoulli J, 1789] a tenté de justifier théoriquement les résultats de ces expériences acoustiques. La solution de Bernoulli était basée sur les résultats des travaux précédents qui ont abouti à la théorie de flexion des poutres d'Euler-D. Bernoulli.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle des plaques qui n'inclut pas le terme de gauchissement [Germain S, 1826]. Lagrange, étant l'un des critiques de son travail, a corrigé les résultats de Germain (1813) en ajoutant le terme manquant [Lagrange JL, 1828] ainsi, il était la première personne à présenter l'équation générale des plaques correctement. Cauchy [Cauchy AL, 1828] et Poisson [Poisson SD, 1829] ont été les premiers à formuler le problème de flexion des plaques sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. En 1829, Poisson étendit avec succès l'équation Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous chargement statique. Cependant, dans cette solution la rigidité flexionnelle était prise égale à un terme constant.

La première théorie satisfaisante de la flexion des plaques est associée à Navier [Navier, 1823], qui a considéré l'épaisseur de la plaque dans l'équation générale comme une fonction de rigidité. Il a également introduit une méthode « exacte » qui a transformé l'équation différentielle en expressions algébriques par l'utilisation de séries trigonométriques de Fourier.

En 1850, Kirchhoff a publié une importante thèse sur la théorie des plaques minces [Kirchhoff G R, 1850]. Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie des plaques en flexion et sont connues sous le nom d'hypothèses « Kirchhoff's ». À l'aide de ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié l'énergie fonctionnelle de la théorie 3D de l'élasticité pour les plaques fléchies.

Le livre de Kirchhoff a été traduit par Clebsch [Clebsch, 1883]. Cette traduction contient de nombreux commentaires précieux de Saint-Venant, le plus important étant l'extension de l'équation différentielle de Kirchhoff de plaques minces, qui a considéré, d'une manière mathématiquement correcte l'action combinée de flexion et d'étirement. Saint-Venant a également souligné que la série proposée par Cauchy et Poissons est en général divergente.

À la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^e siècle, les constructeurs de navires ont changé leurs méthodes de construction en remplaçant le bois par de l'acier de construction. Ce changement dans les matériaux structurels a été extrêmement fructueux dans le développement de diverses théories de plaque. Krylov [Krylov A N, 1898] et son étudiant Bubnov [Bubnov I G, 1914] ont largement contribué à la théorie des plaques minces avec des rigidités flexionnelles et extensionnelles.

Timoshenko a apporté une contribution importante à la théorie et l'application de l'analyse de la flexion des plaques [Timoshenko S P, 1915] et [Timoshenko S P, 1913]. Des études approfondies dans le domaine de la théorie de la flexion des plaques et de ses diverses

applications ont été réalisées par des scientifiques éminents tels que Hencky [Hencky H, 1921], Huber [Huber MT, 1929], Von Karman [Von Karman T, 1910], [Von Karman T, 1932], Nadai [Nadai A, 1915], Föppl [Föppl A, 1944, 1951].

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné une forte impulsion vers des enquêtes analytiques plus rigoureuses des problèmes des plaques soumises au flambement et à la vibration. E. Reissner [Reissner E, 1945] a mis au point une théorie rigoureuse des plaques qui tient compte des déformations causées par les forces de cisaillement transversales. Dans l'ancienne Union soviétique, les travaux de Volmir [Volmir AS, 1956] et de Panov [Panov D Yu, 1941] étaient principalement consacrés à la solution de problèmes non linéaires de la flexion des plaques.

Les équations gouvernantes des plaques rectangulaires minces soumises à des forces de compression directes ont d'abord été dérivées par Navier [Navier, 1823]. Le problème de flambement d'une plaque simplement appuyée, soumise à des forces de compression directes et constantes agissant dans une ou deux directions, a été résolu en premier lieu par Bryan [Bryan G N, 1981] en utilisant la méthode de l'énergie. Cox [Cox H L, 1933] et Hartmann [Hartmann F, 1933] ont présenté des solutions à divers problèmes de flambement des plaques rectangulaires minces en compression. Timochenko et Gere [Timoshenko S P et Gere J M, 1961] et Bubnov [Bubnov I G, 1914] ont étudié le comportement de flambement d'une plaque rectangulaire sous des forces de compression directes non uniformes. Le comportement de flambage des plaques de différentes formes a été analysé par Karman et al. [Karman, Th et al. 1952], Levy [Levy S, 1942], Marguerre [Marguerre K, 1937].

Une équation différentielle du mouvement des plaques minces peut être obtenue en appliquant soit le principe de D'Alambert, soit la formulation de travail basée sur la conservation de l'énergie. La première solution exacte du problème des vibrations libres pour les plaques rectangulaires, dont les deux faces opposées sont simplement appuyées, a été réalisée par Voight [Voight W, 1893]. Ritz [Ritz W, 1909] a utilisé le problème de la vibration libre d'une plaque rectangulaire à bords libres pour démontrer sa méthode célèbre pour étendre le principe de Rayleigh pour obtenir des limites supérieures sur les fréquences de vibration. Les monographies de Timoshenko et Young [Timoshenko S P et Young D H, 1963], Den Hartog [Den Hartog J P, 1958], Thompson [Thompson W, 1973], etc., contiennent une analyse complète et des considérations de conception de vibrations libres et forcées de plaques de formes diverses.

La tendance récente dans le développement des théories de plaque est caractérisée par une forte dépendance sur les ordinateurs modernes à grande vitesse d'analyse et le développement de méthodes basées sur l'analyse numérique, ainsi que par l'introduction de théories plus rigoureuses concernant divers effets physiques, types de charges, etc.

Le résumé ci-dessus est un aperçu très bref du contexte historique du développement de la théorie des plaques et de son application et n'inclut pas tous les travaux et recherches menés dans cet axe. Pour un historique plus détaillé et approfondi se référer ouvrages de Timoshenko, S.P [Timoshenko S P, 1953] et Truesdell, C [Truesdell C, 1968].

II.4. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Bien qu'en réalité, un tel élément soit un corps tridimensionnel, l'analyse en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle n'est pas essentielle si l'épaisseur est faible par rapport aux dimensions dans le plan. En supposant des variations raisonnablement réalistes dans l'épaisseur, des déplacements, des déformations et des contraintes, le problème peut être réduit à une analyse bidimensionnelle. Une telle théorie bidimensionnelle, le plus souvent utilisée pour l'analyse pratique, est la théorie classique des plaques (CPT), également appelée théorie des plaques minces [Jones RM, 1999], [Timoshenko S P et Woinowsky-Krieger S, 1959].

La CPT est basée sur les hypothèses de Love- Kirchhoff [Kirchhoff G R, 1850] :

- ✓ Les lignes droites qui sont perpendiculaires à la surface médiane (c'est-à-dire les normales transversales) avant la déformation restent droites après la déformation.
- ✓ Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont inextensibles).
- ✓ Les normales transversales tournent de manière à rester perpendiculaires au milieu de la surface après la déformation.
- ✓ L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

Ces hypothèses sont clairement résumées dans la figure II.2. Les deux premières hypothèses impliquent que le déplacement transversal est indépendant de la coordonnée transversale (ou de l'épaisseur) et que la déformation normale transversale ε_{zz} est nulle. La troisième hypothèse donne des contraintes de cisaillement transversales nulles ($\tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$).

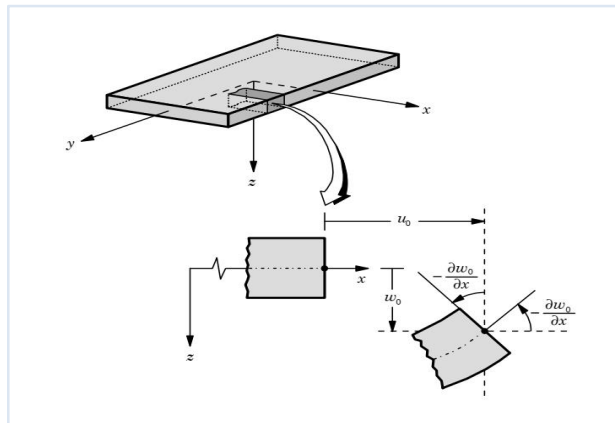


Figure II.2 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Kirchhoff).

Le champ des déplacements requis par ces hypothèses est le suivant [Reddy JN, 2004].

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} & \text{(II.1.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} & \text{(II.1.b)} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) & \text{(II.1.c)} \end{cases}$$

Où (u_0, v_0, w_0) désignent les déplacements d'un point matériel à $(x, y, 0)$ dans les directions des coordonnées (x, y, z) . Notez que (u_0, v_0) sont associés à la déformation d'extension de la plaque tandis que (w_0) désigne la déformation de flexion.

La CPT est le modèle le plus simple et il ne convient qu'aux plaques/coques FG minces où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables. [Yang J et Shen HS, 2001] ont utilisé la CPT pour étudier la réponse transitoire de plaques FG initialement sollicitées, reposant sur une fondation élastique soumise à des charges latérales impulsives. Les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sous des charges axiales et transversales ont été étudiées par [Yang J et Shen HS, 2003] en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. [Javaheri R et Eslami M R, 2002] et [Javaheri R et Eslami M R, 2002a] ont utilisé le CPT pour étudier le comportement au flambement des plaques FG sous quatre types de charges thermiques et de compression. [Woo J et al, 2006] ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires dérivées du CPT avec les hypothèses de Von Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode des séries. La CPT a été également utilisé pour analyser des plaques circulaires. Par exemple, [Ma L S et Wang T J, 2004] ont étudié les comportements de flexion non linéaire et de post-flambement thermique des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques. [Ma L S et Wang Taihong, 2003] ont également étudié le comportement non linéaire de post-flexion des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. [Allahverdizadeh et al, 2008] ont étudié la vibration en régime permanent des plaques circulaires FG dans des environnements thermiques en se basant sur la CPT et une approche semi analytique. [Du C et al, 2014] ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation basées sur la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode à échelle multiple.

II.5. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les études réalisées en utilisant la théorie classique de Love-Kirchhoff ont montré que cette théorie sous-estime les déformations et surestime les fréquences naturelles et les charges de flambement pour les plaques modérément épaisses. Ces divergences sont dues à la négligence de l'effet des contraintes de cisaillement transversales, puisque (selon la théorie des poutres) il a été supposé que les normales au plan médian restent droites et normales au plan médian déformé [Szilard R, 2004]. Les principales limites de la théorie classique des plaques, évoquées ci-dessus, sont partiellement éliminées par Reissner en introduisant l'influence du cisaillement transversal et celle de la contrainte transversale σ_z . [Reissner E, 1975], [Reissner E, 1945] a fait deux hypothèses. Premièrement, il a supposé une variation linéaire du champ de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque. Deuxièmement, il a supposé que, lorsque la plaque se fléchit, toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (Figure II.3). Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la

contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, [Mindlin R, 1951] a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie de rotation soit inclus [Wang CM et al, 2000].

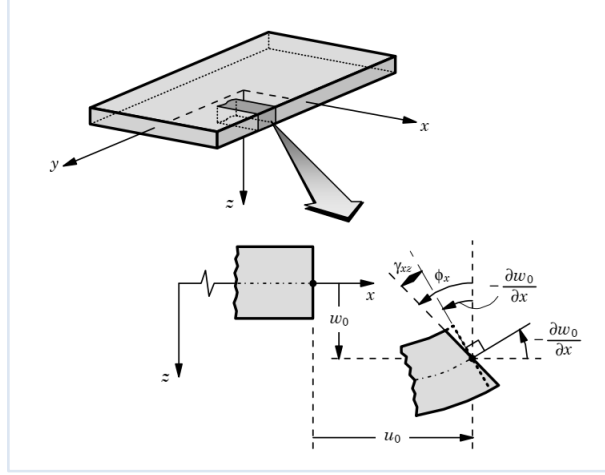


Figure II.3 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Reissner-Mindlin).

La théorie du premier ordre est basée sur un champ des déplacements comportant cinq inconnues (il y en avait que trois dans le cas de la CPT) comme suivant [Mindlin R, 1951] :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + z\phi_x(x, y) & \text{(II.2.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + z\phi_y(x, y) & \text{(II.2.b)} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) & \text{(II.2.c)} \end{cases}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et ϕ_x et ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement : $\phi_x = -\partial w_0 / \partial x$ et $\phi_y = -\partial w_0 / \partial y$. Seule la contrainte σ_{zz} est nulle, par contre les contraintes τ_{xz} et τ_{yx} sont différentes de zéro. D'après l'équation (II.2), la contrainte de cisaillement vaut :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \phi_x \quad \text{(II.3.a)}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \phi_x \quad \text{(II.3.b)}$$

Les équations (II.3.a) et (II.3.b) donne des valeurs constantes pour les déformations et les contraintes de cisaillement transversales correspondantes (Figure II.4). Étant donné que la distribution réelle des contraintes dans les plaques d'épaisseur moyenne est

parabolique, cette hypothèse est incorrecte. En outre, elle ne satisfait pas la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

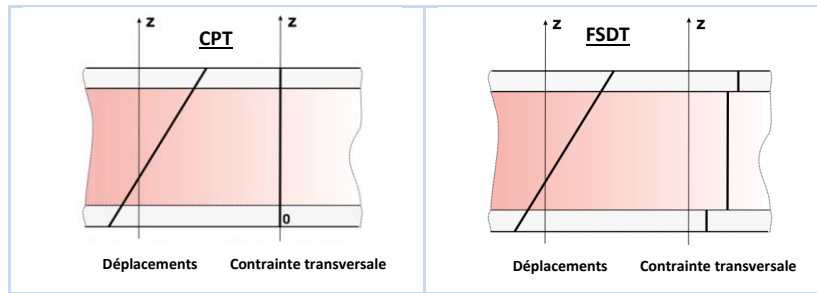


Figure II.4 : Distribution du déplacement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans les deux théories CPT et FSDT [Carrera E, 2008].

Les équations (II.3.a) et (II.3.b) donne des valeurs constantes pour les déformations et les contraintes de cisaillement transversales correspondantes (Figure II.4). Étant donné que la distribution réelle des contraintes dans les plaques d'épaisseur moyenne est parabolique, cette hypothèse est incorrecte. En outre, elle ne satisfait pas la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Les facteurs de correction (CT ou FC), notés k , sont ajoutés pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversal réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre. Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal. Pour les matériaux isotropes homogène, le premier concept de FC a été présenté par [Reissner E, 1945], [Reissner E, 1985] et [Reissner E, 1972]. Il a proposé une valeur de $5/6$ qui est largement utilisée, en employant une méthode de calcul basée sur des considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique. Puis, [Mindlin R, 1951] a proposé une valeur de $k = \pi^2/12$, en utilisant la méthode d'analyse dynamique pour la première fois (équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en CT ou de vitesse de propagation d'ondes de flexion [Belarbi MT, 2000]). Une autre méthode a été présentée par [Ayad R, 1993] pour calculer les facteurs de correction. Il les évalue par une comparaison entre l'énergie de cisaillement obtenue via les équations d'équilibre et celle obtenue par la théorie du premier ordre. L'article de Birman et Bert [Birman V et al, 2002] résume les différentes méthodes concernant la détermination de ces facteurs pour les poutres/plaques isotropes et sandwichs.

La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs pour examiner les différents comportements des structures en matériaux composites. Telque : [Ardestani MM et al, 2014], [Bellifa H et al, 2016], [Bouazza M et al, 2010], [Chen Y et al, 2005], [Della Croce L et Venini P, 2004], [Fallah A et al, 2012], [Golmakani ME et Alamatian J, 2013], [Hadji Lazreg et al, 2019], [Hosseini-Hashemi S et al, 2010], [Nguyen-Van H et al, 2008], [Pradyumna S et Nanda N, 2013], [Praveen GN et Reddy JN, 1998], [Reddy JN, 1979], [Reddy JN et Chin CD, 1998] et [Wu TL et al, 2007]. Bien que la FSDT offre une description assez précise de la réponse des plaques minces à modérément épaisses, elle n'est pas pratique à utiliser en raison de la difficulté de déterminer la valeur correcte du facteur de correction du cisaillement. Pour éviter l'utilisation du cisaillement facteur de

correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Afin d'atténuer les limitations rencontrées dans les deux théories précédentes (i.e., détermination des contraintes de cisaillement transverse et leurs distributions au sens de l'épaisseur de la plaque), des théories raffinées dites "théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur" (HSDT), ont été développées par plusieurs chercheurs [Abdelbari et al, 2016], [Mantari JL et al, 2012a], [Nguyen-Thoi T et al, 2014], [Reddy JN, 2000], [Taibi FZ et al, 2015], [Tebboune W et al, 2015], [Thai CH et al, 2013]. Ces théories sont basées sur une distribution non-linéaire du champ de déplacement (Figure II.5), afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement transverse sans recours à l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement transverse. En plus, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation [Belarbi MO, 2015], [Berthelot, 2012].

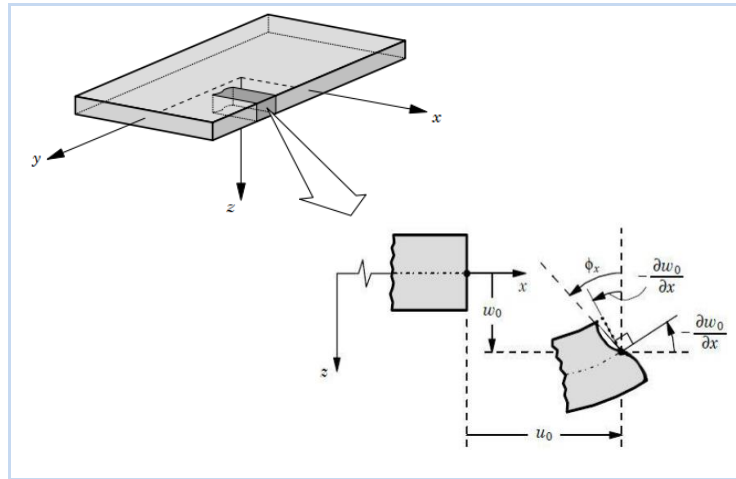


Figure II.5 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Théorie d'ordre élevé HSDT ou TSDT, [Reddy JN, 1997]).

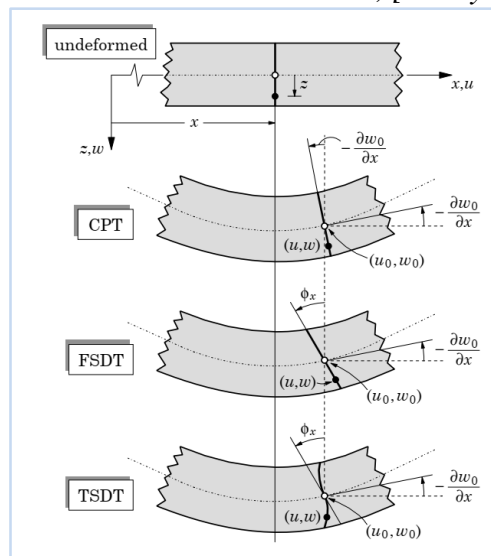


Figure II.6 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT ou TSDT).

Le champ des déplacements est généralement formulé comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) & \text{(II.3.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) & \text{(II.3.b)} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) & \text{(II.3.c)} \end{cases}$$

Avec : u_0, v_0, w_0 et φ_x, φ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement. $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$ et $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$ et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue pour $f(z) = z$.

La théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT), [Reddy JN, 1997], [Reddy JN, 1999] est obtenue par :

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad \text{(II.4)}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier M, 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{(II.5)}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

[Mantari JL et al, 2012] propose un nouveau modèle sinusoïdal (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier. La fonction de cisaillement transverse est comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) + m\left(\frac{\pi z}{h}\right)} \quad \text{avec} \quad m \geq 0 \quad \text{(II.6)}$$

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par [Karama M et al, 2003] est obtenue avec la fonction :

$$f(z) = ze^{-\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{(II.7)}$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane H et al, 2010] avec la fonction :

$$f(z) = \left(z \cdot \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{z}{h} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) / \left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) \quad \text{(II.8)}$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en intégrant différentes fonctions de cisaillement transverse, sur le tableau II.1 sont exposées différentes fonctions présentes dans la littérature.

Tableau II.1 : Diverses fonctions de gauchissements dans la théorie d'ordre élevé.

| <i>Théories</i> | <i>Fonction</i> |
|------------------|--|
| TSDT | |
| Reissner (1975) | $f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$ |
| HSDT | |
| Nguyen (2014) | $f(z) = h \arctan \frac{rz}{h} - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2+4)}$ |
| HSDPT | |
| Refrafi (2020) | $f(z) = (0.1212\pi z \left[\pi - (0.135)^{1/3} \cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right])$ |
| ESSDPT | |
| Belkhodja (2020) | $f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} \left[e^{\left(\frac{hz}{\pi}\right)} \left(\pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - h^2 \right]$ |
| HSDT-3D | |
| Himeur (2022) | $f(z) = \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{4z^3}{3h^2}\right)$ |

On trouve les mêmes parties : le déplacement dû à l'effet de membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction $f(z)$ qu'on l'appelle «fonction de gauchissement» ou «fonction de forme». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle «le gauchissement», donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la plaque.

La fonction de gauchissement doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque.

II.7. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002, un modèle raffiné pour les plaques isotropes et qui a été nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) [Shimpi RP, 2002]. Cette théorie propose des caractéristiques très intéressantes telles que la non-nécessité d'un coefficient de correction pour les contraintes de cisaillement et les similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre d'inconnues dans la présente théorie est égal à quatre, par contre, égal à cinq ou plus pour d'autres théories d'ordre élevé [Ait Atmane H et al, 2010], [Reddy JN, 1984], [Touratier M, 1991], [Karama M et al, 2003]. Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} & \text{(II.9.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} & \text{(II.9.b)} \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) & \text{(II.9.c)} \end{cases}$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de la flexion et du cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

II.8. La théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

Pour étudier le comportement exact des plaques épaisses, le plus laborieux est de trouver une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur surtout les contraintes de cisaillement sans omissions et simplifications dues à l'application de la théorie classique ou celle du premier ordre. Bien que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, reste-il que la déformation normale transverse est négligée ce qui influence directement et de manière importante la précision des résultats. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc primordial, les approches principales pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs de contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations. Les équations différentielles régissent la flexion dans le cas tridimensionnel sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_1 = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} & \text{(II.10.a)} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_2 = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} & \text{(II.10.b)} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} & \text{(II.10.c)} \end{cases}$$

Où : f_i , $\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ et ρ sont respectivement les forces volumiques, les composantes du vecteur d'accélération et la masse volumique.

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, les méthodes numériques sont les seules permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que pour différentes conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives offrent des avantages et des potentialités capitales, ces méthodes dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent un outil informatique puissant pour obtenir des résultats d'une très grande et

satisfaisante précision. [Huang ZY et al, 2008] et [Amini MH et al, 2009] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, [Malekzadeh P, 2009], a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, [Zenkour, 2006] a étudié des plaques en FGM épaisses se basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle de propriétés matérielles à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

II.9. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

Afin d'éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle, l'approche quasi-tridimensionnelle est devenue une alternative importante, cette approche consiste en introduisant l'effet de déformation normale transverse, afin de définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire.

De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche se base sur la jonction d'une fonction non-linéaire à la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. En procédant de la sorte, le but est de réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En général, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale dans lesquelles est pris en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [Carrera E, 2001], [Carrera E, 2003], [Carrera E, 2005] et récemment évoluée par Demasi [Demasi L, 2009a], [Demasi L, 2009b]: [Demasi L, 2009c], [Demasi L, 2009d] et [Demasi L, 2009e]. Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera se référer aux ouvrages de l'auteur [Carrera E et al, 2011a] et [Carrera E et al, 2011b]. [Talha M et al, 2010] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé. [Thai HT et Kim SE, 2013] ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. [Hebali H et al, 2014], [Tounsi AA et al, 2015], [Hamidi A, 2015], [Thai, 2014], [Belabed Z et al, 2014] et [Bennoun et al, 2016] ont proposé à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D.

En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM, les plaques sandwich [Zenkour AM, 2013] et des plaques composites stratifiées [Zenkour AM, 2015]. [Mantari JL et al, 2014], ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement graduées en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal

pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z) , alors la cinématique devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.10.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.10.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{II.10.c})$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec : $g(z) = 1 - f'(z)$

II.10. Conclusion

Ce chapitre présente un aperçu général sur les différentes théories des plaques ainsi que leurs évolutions. Commenant par la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces puis la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) qui est plus générale, mais qui nécessite l'introduction d'un coefficient de sécurité, ensuite la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) avec ses différents modèles pour arriver à la théorie raffinée des plaques (RPT) qui divise le déplacement transversal en une composante de flexion et une de cisaillement. Ensuite pour étudier le comportement exact des plaques épaisses la théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) a été présentée avec une alternative plus simple qui est la théorie de déformation des plaques quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur.



Chapitre III :

Fondation élastique des plaques en FGM

Chapitre III :

Fondation élastique des plaques

En FGM

III.1. Introduction

La philosophie de la conception des fondations étant de répartir la charge de la structure sur le sol, la modélisation idéale des fondations est celle dans laquelle la répartition de la pression de contact est simulée de manière plus réaliste [Taylor D, 1964]. Cependant, le comportement mécanique du sol est complètement erratique et complexe du fait de son hétérogénéité, il semble impossible d'établir une loi mathématique conforme à l'observation réelle [Dutta SC, 2002]. Plusieurs auteurs, on étudie des fondations reposant sur différents types de sols afin d'établir des modèles de calcul reflétant le plus réellement possible leurs comportements. Dans ce qui suit seront présentes quelques modèles de fondations élastiques issus de la littérature.

III.2. Plaques reposant sur des fondations élastiques

La modélisation des plaques reposant sur les fondations élastiques présente un problème très délicat lors de l'analyse du comportement résultant de cette association. Cette difficulté est due principalement aux types de fondations étudiées (rigides ou souples) et à la nature du sol de fondation (Cohérent ou pulvérulent) qui est par définition un matériau hétérogène. Ainsi pour parvenir à des résultats cohérents, le développement de modèles plus réalistes de fondation et mathématiquement plus au moins simples afin de résoudre le problème complexe d'interaction sol-structure est indispensable [Ali Rachedi M, 2020].

III.3. Les approches de la modélisation de la fondation élastique

La recherche d'un modèle physiquement proche et mathématiquement simple pour représenter le sol dans le problème de l'interaction sol-structure montre deux approches classiques de base, à savoir l'approche de Winkler et l'approche de Continuum. A l'interface sol support, la répartition de la pression de contact est un paramètre important [Dutta SC, 2002]. La variation de la répartition de la pression dépend du comportement de la fondation (à savoir, rigide ou flexible) et de la nature du dépôt de sol (argile ou sable, etc.).

La philosophie de la conception des fondations étant de répartir la charge de la structure sur le sol, la modélisation idéale des fondations est celle dans laquelle la répartition de la pression de contact est simulée de manière plus réaliste [Taylor D, 1964]. De ce point de vue, les deux approches fondamentales présentent certaines limitations caractéristiques. Cependant, le comportement mécanique du sous-sol semble être complètement erratique et complexe et il semble impossible d'établir une loi mathématique conforme à l'observation réelle [Dutta SC, 2002]. Dans ce contexte, la simplicité des modèles, maintes fois, devient une considération primordiale et donne souvent des résultats raisonnables. Des tentatives ont été faites pour améliorer ces modèles par des modifications appropriées afin de simuler de

plus près le comportement du sol d'un point de vue physique [Dutta SC, 2002]. Ces dernières années, un certain nombre d'études ont été menées dans le domaine de l'interaction sol-structure, qui modélise le sol sous-jacent de nombreuses manières sophistiquées. Les détails de ces modélisations sont décrits ci-dessous en bref.

III.4. Modèle de Winkler

L'idéalisation de Winkler représente le sol comme un système de ressorts identiques, linéairement élastiques, proches les uns des autres. Selon cette idéalisation, la déformation de la fondation due à la charge appliquée est limitée aux régions chargées uniquement [Dutta SC, 2002]. La Figure III.1 montre la représentation physique de la fondation de Winkler. La relation de déflexion de pression en tout point est donnée par :

$$R = K_w w_0 \quad (\text{III.1})$$

Où R est la pression, K_w est le coefficient de réaction ou du module du sous-sol, et w_0 est le fléchissement.

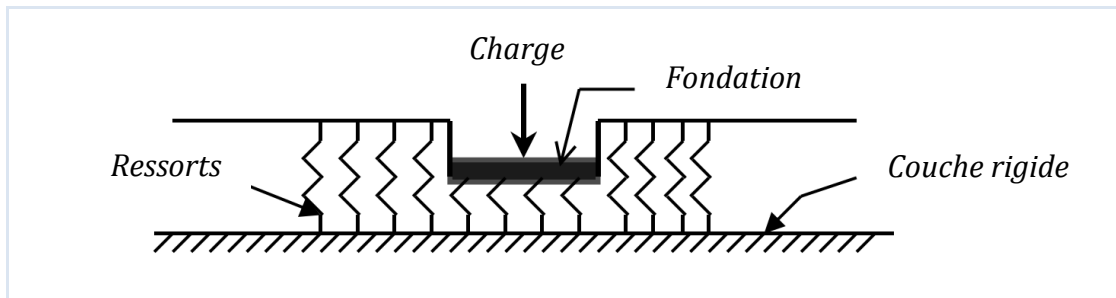


Figure III.1 Fondation de Winkler [Dutta SC, 2002].

Un certain nombre d'études sur le domaine de l'interaction sol-structure ont été menées sur la base de l'hypothèse de Winkler pour sa simplicité ([Popov E, 1950], [Al B, 1957], [Vesic AB, 1961], [Kramrisch & Rogers, 1961], [Brown et al, 1977]). Le problème fondamental de l'utilisation de ce modèle est de déterminer la rigidité des ressorts élastiques utilisés pour remplacer le sol sous la fondation. Le problème devient double car la valeur numérique du coefficient de réaction du sous-sol dépend non seulement de la nature du sous-sol, mais également des dimensions de la zone chargée. Étant donné que la rigidité du sol de fondation est le seul paramètre du modèle de Winkler permettant d'idéaliser le comportement physique du sol de fondation, il faut prendre soin de la déterminer numériquement pour l'utiliser dans un problème pratique [Dutta SC, 2002]. Le module de réaction du sol de fondation ou le coefficient de réaction du sol de construction K_w est le rapport entre la pression R en un point donné de la surface de contact et le tassement y produit par la charge à ce point :

$$K_w = R/y \quad (\text{III.2})$$

En suivant une méthode appropriée mentionnée pour estimer K_w , une valeur raisonnable du module de fondation, comme seul paramètre permettant d'idéaliser la rigidité du sol, peut être obtenue. En l'absence de données de test appropriées, des valeurs représentatives

peuvent être choisies en suivant les recommandations présentées dans la littérature [Terzaghi K, 1955].

Cependant, les limites fondamentales de l'hypothèse de Winkler résident dans le fait que ce modèle ne peut pas prendre en compte la dispersion de la charge sur une zone d'influence augmentant progressivement avec une profondeur croissante. De plus, il considère le comportement linéaire contrainte-déformation du sol. Le plus grave démerite du modèle de Winkler est celui qui concerne l'indépendance des ressorts. Ainsi, l'effet de la charge appliquée de manière externe n'est localisé dans la couche de fondation que jusqu'au point de son application ; Ceci implique qu'aucune liaison cohésive n'existe entre les particules comprenant le sol [Dutta SC, 2002].

III.5. La fondation du modèle Winkler modifié

III.5.1. Fondation de Filonenko-Borodich

La Figure III.2 montre la représentation physique du modèle de fondation de Filonenko-Borodich [Filonenko-Borodich M, 1940]. Selon ce modèle, la connectivité des différents ressorts de Winkler est obtenue grâce à une fine membrane élastique soumise à une tension constante T . Cette membrane est fixée aux extrémités supérieures des ressorts [Dutta SC, 2002]. Ainsi, la réponse du modèle est mathématiquement exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} R &= K_w w_0 - T \nabla^2 w_0 && \text{pour fondation rectangulaire ou circulaire} \\ R &= K_w w_0 - T \frac{d^2 w_0}{dx^2} && \text{pour fondation en bande} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Avec : L'opérateur de Laplace est : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et T : La force de traction.

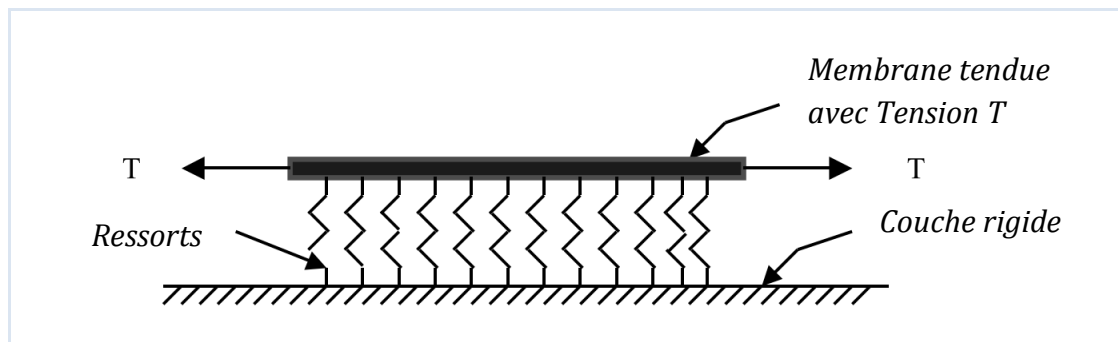


Figure III. 2 : La représentation physique de Fondation de Filonenko-Borodich [Dutta SC, 2002].

Par conséquent, l'interaction des éléments à ressort est caractérisée par l'intensité de la tension T dans la membrane. Un modèle de base essentiellement composé de liquide lourd avec tension superficielle est également suggéré dans la littérature [Hetenyi M, 1950].

III.5.2 Fondation de Hetenyi

Ce modèle suggéré dans la littérature [Hetenyi M, 1946] peut être considéré comme un juste compromis entre deux approches extrêmes (à savoir la fondation de Winkler et le continuum isotrope). Dans ce modèle, l'interaction entre les ressorts discrets est réalisée en

incorporant une poutre élastique ou une plaque élastique, qui ne subit qu'une déformation en flexion [Dutta SC, 2002], comme illustré à la Figure III.3. Ainsi, la relation pression-déflexion devient :

$$R = K_w w_0 + D \nabla^4 w_0 \quad (\text{III.4})$$

Où, D de rigidité en flexion de la poutre ou la plaque élastique

$$D = (E_p h_p^3) / (12(1 - \nu_p)^2) \quad (\text{III.5})$$

R : est la pression à l'interface du plateau et des ressorts ; E_p et ν_p sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau de la plaque ; h_p c'est l'épaisseur de la plaque,

Avec : L'opérateur de Laplace est : $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$

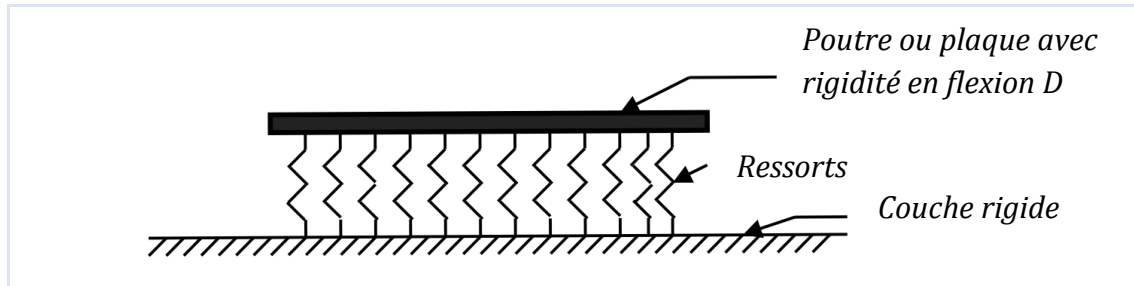


Figure III. 3 : La représentation physique de Fondation de Hetenyi [Dutta SC, 2002].

Ainsi, on voit que la rigidité en flexion d'une poutre ou d'une plaque incorporée caractérise l'interaction entre les éléments à ressort du modèle de Winkler. Des descriptions détaillées de ce modèle, ainsi que quelques exemples numériques, sont disponibles dans la littérature [Hetenyi M, 1946], [Hetenyi M, 1950].

III.5.3 Fondation de Pasternak

Dans ce modèle, on suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les éléments de ressort, qui est réalisée en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque qui ne subit qu'une déformation de cisaillement transverse (Figure III.4). La relation charge-flèche est obtenue en considérant l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement [Dutta SC, 2002]. La relation pression déflexion est donnée par :

$$R = K_w w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{III.6})$$

Où K_p est le module de cisaillement de la couche de cisaillement. Ainsi, la continuité dans ce modèle est caractérisée par la prise en compte de la couche de cisaillement. Une comparaison de ce modèle avec celui de Filonenko – Borodich implique leur équivalence physique («T» a été remplacé par « K_p »).

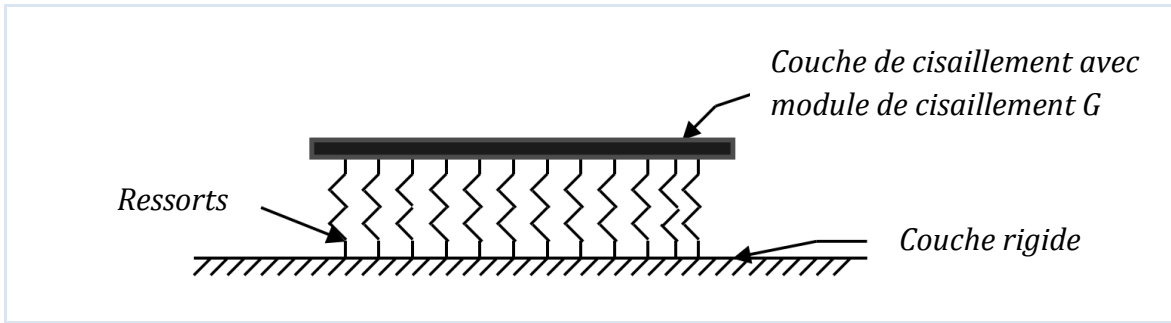


Figure III. 4 : La représentation physique de Fondation de Pasternak [Dutta SC, 2002].

Une formulation détaillée et la base de développement du modèle ont été discutées bien avant, dans la référence [Pasternak P, 1954]. Des solutions analytiques pour les plaques sur des assises de type Pasternak avec un résumé de la dérivation du modèle ont été rapportées dans la littérature [Kerr AD, 1965], [Wang CM et al, 2001].

III.5.4 Fondation de Kerr

Une couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes selon cette formulation. La figure III.5 montre la représentation physique de ce modèle mécanique. L'équation différentielle qui gouverne ce modèle peut être exprimée comme suit :

$$\left(1 + \frac{K_2}{K_1}\right)R = \frac{K_p}{K_1}R + K_2 w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{III.7})$$

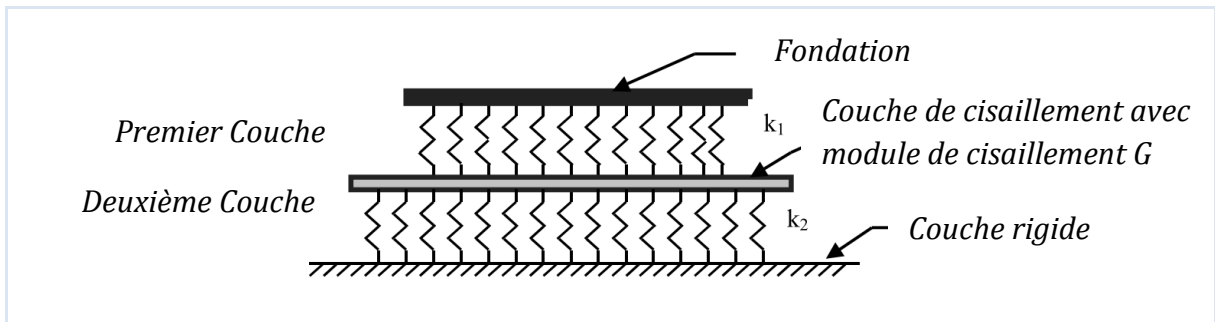


Figure III. 5 : La représentation physique de Fondation de Kerr [Dutta SC, 2002].

III.5.5 Fondation de Kerr simplifiée

Le modèle Kerr est un modèle élastique à trois paramètres, composé d'une couche de cisaillement K_s , d'une couche élastique supérieure K_u et d'une couche élastique inférieure K_l . Cette couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes selon cette formulation. La densité de réaction de cette fondation est donnée par [Daikh AA, 2019] :

$$q_{Kerr} = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w \quad (\text{III.8})$$

Où : K_s est le module de cisaillement, K_u est le module élastique de la couche supérieure et K_l le module élastique de la couche inférieure.

La figure III.6 schématise les différents modèles de fondations [Daikh AA, 2019].

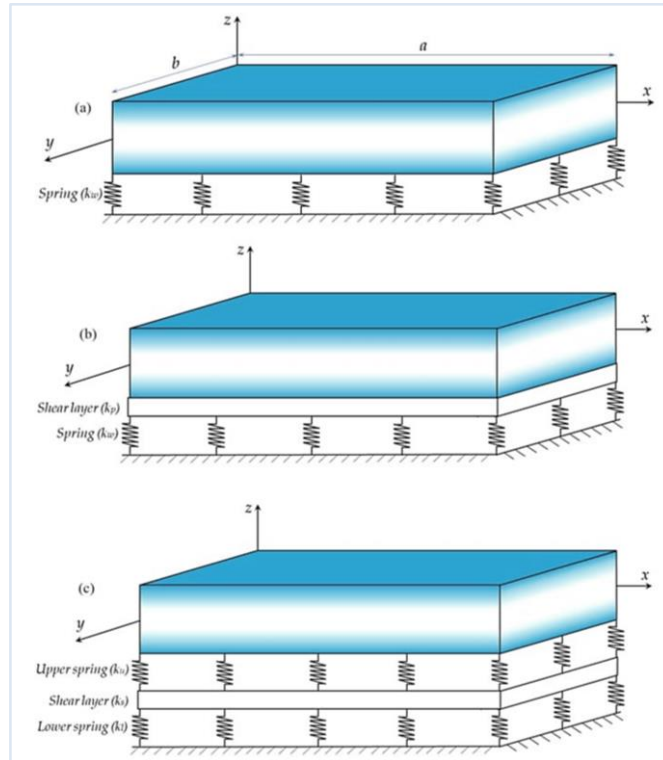


Figure III. 6 : Différents modèles de fondations [Daikh AA, 2019]

(a) Winkler, (b) Pasternak et (c) kerr.

III.6. Fondation élastique non uniforme

La distribution des couches de sol n'est pas uniforme d'un point à un autre. Cela signifie que les modules des fondations élastique soit de Winkler ou bien de Pasternak est variable et n'est pas fixé sur la longueur d'une structure sous forme de plaque ou de poutre.

III.6.1 Fondation élastique variable de Winkler

On a classé cette variation de la fondation élastique de Winkler à trois modèles selon la formulation qui noté publiés par des chercheurs comme suit :

✓ Model 1

La distribution des couches de sol n'est pas uniforme d'un point à un autre. Cela signifie que le module de Winkler est variable et n'est pas fixé sur la longueur d'une structure sous forme de plaque ou de poutre. La réaction de cette fondation peut être exprimée sous

forme linéaire, parabolique ou sinusoïdale ([Sobhy M, 2015], [Attia A et al, 2018], [Pradhan et Murmu, 2009]) :

$$R_f(x) = K_w(x)w + K_p \nabla^2 w \quad (\text{III.9})$$

Où : R_f est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, K_w est le paramètre Winkler dépendant de x seulement. Il peut être exprimé sous forme linéaire, parabolique ou sinusoïdale représenté sur la figure III.7 ([Sobhy M, 2015], [Attia A et al, 2018], [Pradhan et Murmu, 2009]) :

$$K_w(x) = \frac{J_1 h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{Linéaire} & (\text{III.10.a}) \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} & (\text{III.10.b}) \\ 1 + \zeta \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) & \text{Sinusoïdale} & (\text{III.10.c}) \end{cases}$$

Une représentation qualitative des différentes distributions des coefficients de la fondation élastique à deux paramètres le long de la plaque est illustrée à la Figure III.7 pour une meilleure compréhension.



Figure III. 7 : Représentation du paramètre variable de Winkler [Nebab M et al, 2019].

a) Linéaire, b) Parabolique et c) Sinusoïdale

Où J_1 est une constante et ζ un paramètre variable. K_p est la rigidité de la couche de cisaillement ∇^2 est l'opérateur Laplacien en x, y et w est la déflexion de la plaque.

Il est à noter que, si le paramètre variable $\zeta = 0$ la fondation élastique devient celle de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient la fondation Winkler.

✓ Model 2

Le modèle de fondation élastique de Winkler variable de type non uniforme est proposé par [Nebab M et al, 2019] d'une forme de variation : polynômiale, cousins et exponentiel sont :

$$K_w(x) = \frac{D_i h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \sum_{i=0}^j c_i \left(\frac{x}{a}\right)^i & \text{Polynômiale} \quad (\text{III.11.a}) \\ 1 + \zeta \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) & \text{Cousins} \quad (\text{III.11.b}) \\ 1 + \zeta \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\eta\right) \right) & \text{Exponentiel} \quad (\text{III.11.c}) \end{cases}$$

Où que si ζ est nul, la fondation de Pasternak devient uniforme et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la fondation de Winkler. $\eta > 1$ est un nombre réel tel qu'il est supérieur à la valeur unitaire, c_i est le paramètre de coefficient du polynôme.

Une représentation qualitative des différentes distributions des coefficients de la fondation élastique à deux paramètres le long de la plaque est illustrée à la Figure III.8 pour une meilleure compréhension.



Figure III. 8 : Représentation du paramètre variable de Winkler [Nebab M et al, 2019].

a) Polynomiale, b) Cousins et c) Exponentiel.

✓ Model 3

Les fondations élastiques ont un large éventail d'applications d'ingénierie telles que les voies ferrées, les gratte-ciel, la conception offshore, l'interaction solide-fluide, le réseau de pipelines, les systèmes de matériaux intelligents, les dispositifs électromécaniques [Jena SK et al, 2019] ont utilisé la méthode de la quadrature différentielle pour étudier la vibration d'un nanopoutre non local reposant sur de fondations élastiques de Winkler des formes constants, linéaires, paraboliques et sinusoïdaux.

[Daikh AA et al, 2020] ont une étude sur la déflexion et la distribution des contraintes de nanoplaques sandwich fonctionnellement graduées reposant sur une base élastique variable de Winkler basée sur la nouvelle théorie du cisaillement hyperbolique quasi 3D en conjonction avec la théorie du gradient de déformation non local.

Le modèle de fondation élastique de Winkler variable est proposé pour la première fois pour inclure la variable environnementale élastique sous la nanoplaque S-FGM. Le modèle développé est vérifié avec des travaux antérieurs et les études paramétriques pour illustrer les influences des modèles de fondation élastiques.

La force due à la fondation élastique variable, f_e qui peut être évaluée par :

$$f_e = k_w w \quad (\text{III.12})$$

Où k_w est le module de réaction du sol de fondation (coefficient élastique de la fondation de Winkler). La fondation Winkler actuelle est basée sur deux paramètres κ et ξ et comme suit :

$$k_w = \begin{cases} k + \xi \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) & \text{Sinusoïdal} & (\text{III.13.a}) \\ k + \xi \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right) & \text{Inverse sinusoïdal} & (\text{III.13.b}) \\ k + \xi \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} & (\text{III.13.c}) \\ k + \xi \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) & \text{Inverse parabolique} & (\text{III.13.d}) \\ k + \xi \left(\frac{x}{a}\right) & \text{Linéaire} & (\text{III.13.e}) \end{cases}$$

Où paramètres de fondation sont : $k_w = \frac{a^4}{D_c} K_w$ Avec : $D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$

La figure III. 9 est représenté l'effet des différentes type des fondations élastique variable de Winkler dans le cas de la déflexion en fonction de rapport géométrique.

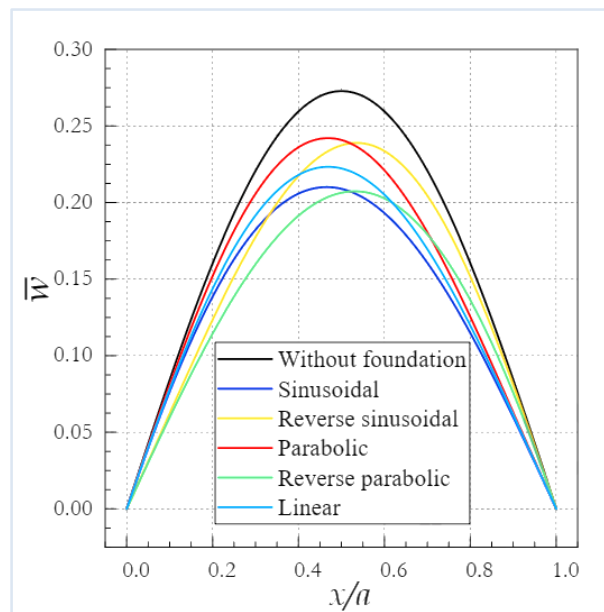


Figure III.9 : L'effet du paramètre de fondation élastique variable de Winkler.

III.6.2 Fondation élastique variable de Winkler-Pasternak

La variation de la fondation élastique de Winkler-Pasternak, d'après l'approche de cette dernier qui supposer les deux paramètres de la fondation est non uniforme, La variation de cette fondation peut être exprimée sous forme linéaire, parabolique ou sinusoïdale, ce modèles selon la formulation qui noté et publiés par des chercheurs comme suit :

III.6.2.1 Couplage de la fondation élastique non uniforme Winkler -Pasternak

Dans l'article [Rad AB et al, 2013] , ont les analyses de flexion et de contrainte de plaques annulaires bidirectionnelles fonctionnellement graduées (FG) reposant sur des fondations Winkler-Pasternak à deux paramètres non uniformes et soumises à des tractions de cisaillement normales et dans le plan sont étudiées à l'aide de la méthode tridimensionnelle exacte théorie de l'élasticité. Trois types différents de variations de la rigidité de la fondation sont considérés dans la direction radiale : linéaire, parabolique et sinusoïdale. Une étude paramétrique consistant à évaluer les effets de différents paramètres (par exemple, les exposants des lois des propriétés des matériaux, le rapport épaisseur sur rayon, les tendances des variations de la rigidité de la fondation et différentes conditions de bord) est réalisée. Les résultats sont rapportés pour la première fois.

Les effets des exposants de la loi de puissance, des paramètres géométriques, des paramètres de fondation, de modèle de variation du type non uniforme de la rigidité de la fondation élastique et des conditions de bord sur le comportement en flexion des plaques annulaires étés mentionnées avec une description détaillée de ces modèles, ainsi que quelques exemples numériques, sont disponibles dans la littérature[Rad AB et al 2013].

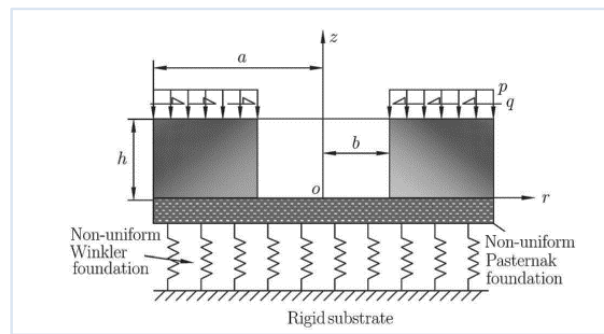


Figure III. 10 : Géométrie d'une plaque annulaire FGM bidirectionnelle reposant sur une fondation élastique à deux paramètres non uniforme.

III.6.2.2 Formulation de la fondation élastique non uniforme

La force d'interaction entre la plaque et la fondation de support non uniforme pour un problème axisymétrique peut être exprimée comme :

$$f_{zo}(r) = K_1(r)w_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rK_2(r) \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \quad (\text{III. 14})$$

Où $f_{zo}(r)$ est la densité de la force de réaction sur la surface inférieure de la plaque, w_o est la déflexion de cette surface, et $K_1(r)$ et $K_2(r)$ sont les coefficients de Winkler et Pasternak de la fondation élastique, respectivement. Trois types de variations radiales des coefficients de fondation sont considéré linéaire, parabolique et sinusoïdale comme suit :

$$K_1(r) = k_{w_0} \left(1 - \phi \frac{r}{a} \right), \quad K_2(r) = k_{p_0} \left(1 - \phi \frac{r}{a} \right) \quad \text{Linéaire} \quad (\text{III.15.a})$$

$$K_1(r) = k_{w_0} \left(1 - \psi \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right), \quad K_2(r) = k_{p_0} \left(1 - \psi \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad \text{Parabolique} \quad (\text{III.15.b})$$

$$K_1(r) = k_{w_0} \left(1 - \mu \sin \left(\pi \frac{r}{a} \right) \right), \quad K_2(r) = k_{p_0} \left(1 - \mu \sin \left(\pi \frac{r}{a} \right) \right) \quad \text{Sinusoïdale} \quad (\text{III.15.c})$$

Une représentation qualitative des différentes distributions des coefficients de la fondation élastique à deux paramètres le long de la direction radiale est illustrée à la Figure III.11 pour une meilleure compréhension.

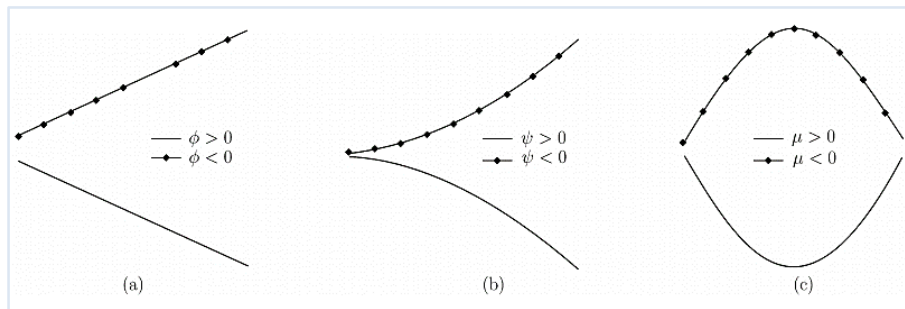


Figure III. 11 : Les coefficients de la fondation élastique à deux paramètres de type :
(a) Linéaire, (b) Parabolique et (c) Sinusoïdale.

III.7. Analyses de l'influence des fondations élastiques

Les plaques basant sur des fondations élastiques sont très courantes dans l'ingénierie des structures. De nombreuses études de flexion linéaire et de vibration pour des plaques épaisses soumises à des charges transversales avec des fondations élastiques sont disponibles dans la littérature. Dans certaines analyses des plaques sur fondations élastiques, un seul paramètre est utilisé pour décrire le comportement des fondations selon le modèle de Winkler ([Bezine G, 1988], [El-Zafrany A, 1995], [Liu FL, 2000]). Cette fondation est modélisée par des ressorts verticaux discrets et ne prend pas en compte la déformation transversale de cisaillement. D'autres chercheurs ont modélisé la fondation avec deux paramètres selon le modèle de Pasternak [Pasternak P, 1954]. Ce modèle à deux paramètres prend en compte l'effet de l'interaction du cisaillement entre les points de la fondation [Shen HS, 1999], [Shen HS, 2000], [Sladek J et al, 2002]. [Akavci SS, 2007] a analysé le comportement en flambage et en vibration libre des plaques composites laminées antisymétriques sur des appuis élastiques. [Baferani AH et al, 2011] ont étudié la réponse dynamique d'une plaque rectangulaire FG reposant sur des fondations à deux paramètres

élastiques en se basant sur la théorie de la plaque de déformation en cisaillement du troisième ordre. Une théorie raffinée de la déformation par cisaillement est présentée pour l'analyse de la vibration libre de la plaque FG reposant sur la fondation de Pasternak par [Thai HT et Choi DH, 2012]. Sur la base d'une théorie de déformations normales et de cisaillement d'ordre supérieur des plaques, [Sheikholeslami SA et Saidi AR, 2013] ont analysé la réponse aux vibrations libres des plaques FG posées sur des fondations élastiques à deux paramètres. [Thai HT et Choi DH, 2014a] ont développé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro pour analyser les réponses en flexion et en vibration des plaques FG. La vibration libre des plaques rectangulaires à gradation fonctionnelle (FG) soumises à différentes conditions aux limites en utilisant la théorie classique des plaques a été étudiée par [Chakraverty S et Pradhan KK, 2014] où la méthode de Rayleigh-Ritz a été utilisée pour obtenir le problème généralisé des valeurs propres. [Akavci SS, 2014] a examiné l'effet des déformations de cisaillement transversales lors de la réponse vibratoire d'une plaque de FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur. [Mantari JL et Granados EV, 2015a] a analysé l'effet d'étirement sur le comportement en vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant une théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur raffinée. [Meksi A et al, 2015] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement de premier ordre simple et efficace basée sur la position de surface neutre afin de calculer les fréquences naturelles des plaques FG reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak. [Akavci SS, 2016] a présenté un nouveau modèle de cisaillement hyperbolique pour étudier l'état statique, les vibrations libres et le flambement des plaques sandwich FG sur fondations élastiques. Une théorie de la déformation de cisaillement non locale d'ordre zéro pour la vibration libre des nanoplaques FG reposant sur une fondation élastique a été donnée par [Bounouara F et al, 2016]. Récemment, l'effet de la fondation élastique de type Winkler-Pasternak sur les fréquences naturelles des plaques et coques composites laminées renforcées de nanotubes de carbone (CNT) a été étudié par [Banić D et al, 2017]. [Benahmed A et al, 2017] a proposé une nouvelle théorie quasi-3D pour analyser les interactions mécaniques des plaques souples avec différentes distributions des propriétés matérielles. [Meftah A et al, 2017] ont développé une théorie non polynomiale de déformation de cisaillement à quatre variables pour l'analyse des vibrations libres des plaques FG sur des appuis élastique. [Barati MR et Shahverdi H, 2018] ont présenté de nouvelles solutions pour examiner les vibrations à grande amplitude d'une nanoplaque poreuse reposant sur une fondation élastique à durcissement non linéaire modélisée par une théorie des plaques non linéaire à quatre variables. L'effet des modèles micromécaniques sur la vibration libre des plaques rectangulaires de FGM reposant sur des fondations élastiques a été étudié par [Mahmoudi AK et al, 2018]. [Guerroudj HZ et al, 2018] ont développé une théorie des plaques quasi-3D hybride afin d'investiguer les vibrations libres des plaques FG appuyant sur des fondations élastiques. L'influence de la porosité sur le comportement dynamique des plaques FGM reposant sur différents fondations élastiques a été investiguée par [Shahsavari D et al, 2018] en développant une théorie quasi-3D hyperbolique où le déplacement transversale a été divisé en termes de flexion, cisaillement et d'étirement de l'épaisseur. [Ghasemi AR et Meskini M, 2019] présentent des recherches sur la vibration libre de coquilles cylindriques poreuses laminées, basées sur la théorie des coques de Love

avec des conditions aux limites simplement supportées. Les vibrations libres linéaires et non linéaires des poutres de Timoshenko composites rotatives fonctionnellement graduées renforcées par des nanotubes de carbone ont été étudiées par [Heidari M et Arvin H, 2019]. Sur la base du modèle des poutres d'Euler-Bernoulli et de la théorie de déformation à gradient modifié, la vibration forcée dépendant de la taille des micropoutres en sandwich avec un noyau fonctionnellement gradué (FG) a été présentée par [Taati E et Fallah F, 2019]. [Addou FY et al, 2019] ont établi une étude paramétrique détaillée pour évaluer les influences de l'indice de gradient, du paramètre de porosité, de la rigidité des paramètres de fondation, du nombre de modes et de la géométrie sur les fréquences naturelles des plaques FG en utilisant une théorie quasi-3D simple. L'influence des différents types de conditions aux limites sur le comportement en flexion et en vibration libre de plaques sandwichs fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres a été examinée à l'aide d'une nouvelle théorie originale du cisaillement d'ordre élevé a été analysée par [Rahmani MC et al, 2020].

III.8. Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques

Les plaques reposant sur des fondations élastiques ont fait l'objet de plusieurs études et discutées par un certain nombre de chercheurs utilisant plusieurs techniques. [Trinh MC et Kim SE, 2018] ont présenté une procédure théorique fondée sur la FSDT pour étudier les charges de flambement et l'équilibre post-flambement des coques sandwichs en FGM modérément épaisses reposant sur des fondations élastiques et soumises à des charges thermomécaniques.

[Nguyen DD et al, 2016] ont présenté une solution analytique pour étudier la stabilité thermique d'une plaque FGM d'épaisseur excentrique reposant sur des fondations élastiques soumises à une charge mécanique, thermique et thermomécanique en utilisant la théorie TSDT de Reddy. En utilisant la même théorie, [Nguyen DD et al, 2018] ont étudié la réponse thermomécanique non linéaire des coques cylindriques sigmoïdes S-FGM reposant sur des fondations élastiques.

[Kolahchi R et al, 2016] ont étudié le comportement de la stabilité dynamique non linéaire des plaques viscoélastiques polymériques renforcées par des SWCNT dépendantes de la température reposant sur un milieu élastique orthotrope.

La plus grande partie des recherches sur les plaques ou poutres FGM reposant sur des fondations élastiques ont été entreprises avec des modules constants. Cependant, les études sur les structures basées sur des fondations élastiques variables sont rares et ont fait l'objet d'un traitement limité dans la littérature.

[Pradhan SC et Murmu T, 2009] ont illustré l'analyse thermomécanique des vibrations des poutres FGM et des poutres sandwichs FGM reposant sur des fondations élastiques variables.

[Sobhy M, 2015] a présenté une théorie 2D basée sur la théorie SSDT pour étudier la flexion thermomécanique des plaques FGM avec diverses conditions aux limites et reposant sur des fondations élastiques variables. [Attia A et al, 2018] ont utilisé une analyse 2D avec

la théorie HSDT pour étudier la flexion thermomécanique des plaques FGM dépendantes de la température reposant sur des fondations élastiques variables.

La figure III-12 présente l'effet de la fondation variable sur la contrainte transversale donné par différents auteurs.

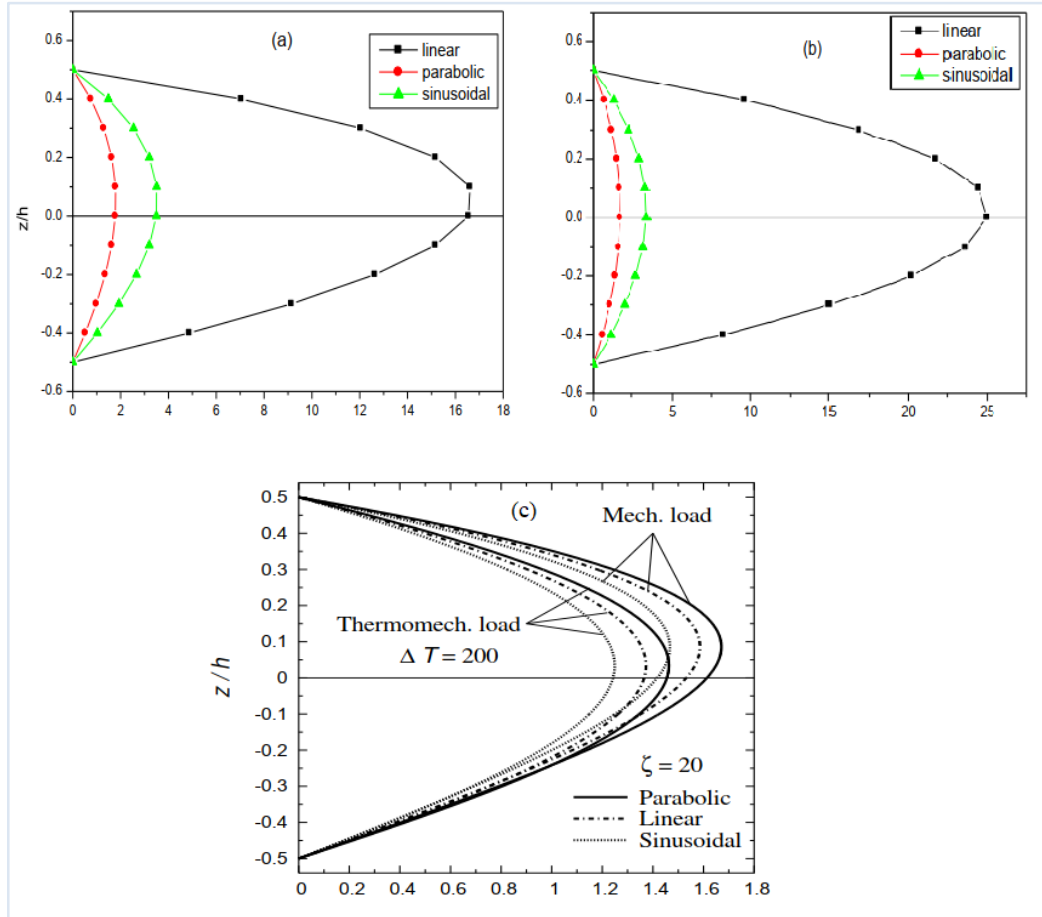


Figure III. 12 : Effet de la fondation variable sur la contrainte transversale

(a) et (b) [Attia A et al, 2018], (c) [Sobhy M, 2015].

III.9. Conclusion

Dans ce chapitre, une partie de la recherche bibliographique sur les structures reposant sur une fondation élastiques a été effectué.

Nous avons également présenté une bibliographie de recherche sur différents modèles de fondations élastiques pour modéliser le sol. On remarque que peu de recherches et de travaux ont été effectués sur les structures de type FGM reposant sur des modèles de fondation avancés (non-uniforme).

Le comportement mécanique des structures faites de matériaux à gradient de propriétés reposant sur des modèles avancés ou améliorés de fondation élastique utilisant une théorie d'ordre élevée 2D et 3D sera détail aux chapitres IV et V.



Chapitre IV :

*Analyse de l'effet
couplé des fondations
élastiques variables sur
le comportement à la
flexion des plaques
en FGM*

Chapitre IV :**Analyse de l'effet couplé des fondations élastiques variables sur le comportement à la flexion des plaques en FGM****IV.1. Introduction**

L'évolution continue des propriétés mécaniques entre la surface inférieure et la surface supérieure des structures fonctionnellement graduées maîtrise le phénomène de concentrations de contraintes locales induites généralement par des transitions brusques dans les propriétés des matériaux constitutifs. De plus, cette caractéristique contrôle la faible ténacité à la rupture de la céramique et réduit la résistance des métaux lors d'une exposition à une chaleur intense. Il est important de noter que les éléments FG suscitent toujours de nombreux intérêts dans divers domaines de l'ingénierie tels que l'aéronautique, la marine, la construction et l'ingénierie mécanique.

Ce chapitre présente une recherche traitant de l'influence couplée des fondations non uniformes de Winkler-Pasternak et de divers types de chargement sur le comportement en flexion des plaques FG en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D pour étudier l'effet couplé des fondations variables de Winkler-Pasternak supposées avoir deux paramètres variant simultanément à la surface des plaques FG exposées à diverses charges. La technique de résolution de Navier, dont les solutions sont des fonctions sous forme de séries de Fourier et qui satisfont les conditions aux limites pour résoudre les équations d'équilibre obtenues. Plus important encore, les effets de l'indice de l'épaisseur, de l'indice de loi de puissance, le rapport géométrique, le rapport d'aspect de la plaque, le type de charge et des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak sur le comportement en flexion sont discutés en détails. Les résultats de ce travail sont comparés avec les données disponibles dans la littérature.

IV.2. Formulation du problème théorique**IV.2.1. Procédure de simulation numérique**

La figure IV.1 montre une plaque FG simplement appuyée de longueur a , largeur b , épaisseur h et fabriquée à partir d'un mélange de céramique (*alumine- Al_2O_3*) et de métal (*aluminium- Al*). Les coordonnées x , y sont prises dans les directions du plan et z selon la

direction de l'épaisseur. Le plan médian de la plaque FGM est défini par $z = 0$. Les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sont à $z = +h/2$ et $z = -h/2$ respectivement. Ce travail de recherche vise à étudier le comportement en flexion de plaques FGM simplement appuyées soumises à plusieurs types de chargement (distribué sinusoïdal, uniforme, hydrostatique, patch central, charge concentrée) et soutenues par des fondations Winkler-Pasternak non uniformes selon plusieurs modèles mathématiques (fixes, linéaires, parabolique, parabolique inverse, sinusoïdale, sinusoïdale inverse, cosinusoïdale, exponentielle).

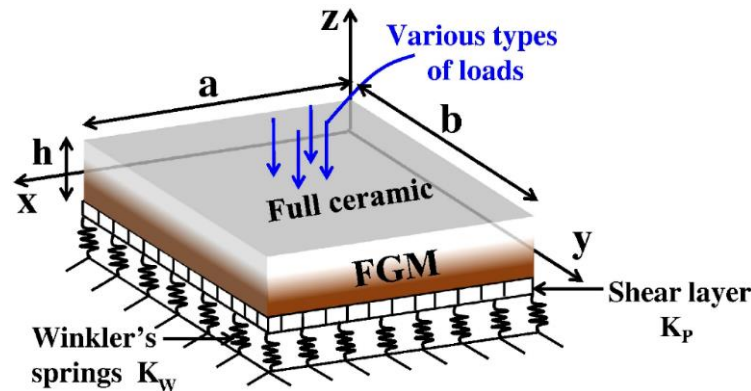


Figure IV. 1 : Géométrie et système de coordonnées de la plaque FG.

Il est important de noter que les propriétés du matériau de la plaque $p(z)$, telles que le module de Young, sont exprimées sous la forme :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_c \quad (IV.1)$$

Où : P_c et P_m désignent respectivement les caractéristiques du matériau céramique et métallique.

Le V_c désigne la fraction volumique du constituant de la surface supérieure (céramique) et donné par la formule suivante :

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (IV.2)$$

Où : k est l'indice matériel.

IV.2.2. Effet couplé des fondations Winkler – Pasternak variables

La fondation élastique est généralement composée de deux couches, la première couche présente des ressorts de Winkler reliés entre eux à leurs extrémités par une plaque

d'une couche de cisaillement incompressible appelée Pasternak. La relation entre la réaction totale et la flèche s'exprime par :

$$R = K_w w - K_p \nabla^2 w \quad (IV.3a)$$

Où est la réaction totale, est le déplacement transversal et sont les paramètres de fondation de Winkler-Pasternak.

La contribution de ce travail est que les deux paramètres sont variables dépendent de x et ξ . Il est important de noter que les variations considérées sont supposées être fixes, linéaires, paraboliques, paraboliques inverses, sinusoidales, sinusoidales inverses, cosinusoidales, exponentielle, comme indiqué dans les combinaisons suivantes, voir Eq. IV.3b :

$$K_w = \frac{k_w \cdot D_c}{a^4} \begin{pmatrix} 1 \\ \left(1 + \xi \frac{x}{a}\right) \\ \left(1 + \xi \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\ \left(1 + \xi \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) \\ \left(1 + \xi \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right) \\ \left(1 + \xi \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)\right) \\ \left(1 + \xi \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right) \\ \left(1 + \xi \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\frac{x}{a}\right)^\eta\right)\right) \end{pmatrix} \quad \text{et ;} \quad K_p = \frac{k_p \cdot D_c}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & : \text{Fixes} \\ \left(1 + \xi \frac{x}{a}\right) & : \text{Linéaires} \\ \left(1 + \xi \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) & : \text{Paraboliques} \\ \left(1 + \xi \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right) & : \text{Paraboliques inverses} \\ \left(1 + \xi \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right) & : \text{Sinusoidales} \\ \left(1 + \xi \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)\right) & : \text{Sinusoidales inverses} \\ \left(1 + \xi \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right) & : \text{Cosinusoidales} \\ \left(1 + \xi \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\frac{x}{a}\right)^\eta\right)\right) & : \text{Exponentielle} \end{pmatrix} \quad (IV.3b)$$

Où

k_w, k_p sont des constantes ;

a est un paramètre variable ;

D_c est la rigidité en flexion de référence de la plaque FGM ;

η est un nombre réel et considéré égal à 1,5 ;

La fondation élastique est uniforme car $\zeta = 0$.

Certaines des variations envisagées ont été rapportées dans des travaux antérieurs [Pradhan SC et Murmu T, 2009], [Rad AB et al, 2013] et [Nebab M et al, 2019]. De plus, dans toutes les recherches mentionnées précédemment, l'un des paramètres des fondations de Winkler-Pasternak est toujours considéré comme variable tandis que l'autre est constant.

IV.2.3. Cinématique et relations constitutives

Le champ de déplacement est décrit en suivant des procédures similaires à celles données comme ci-dessous [Ali Rachedi M et al, 2020]:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \phi_z(x, y) \end{cases} \quad (IV.4)$$

Où u_0, v_0, w_0, ϕ_x et ϕ_z sont inconnus les déplacements du plan médian de la plaque FG.

$f(z)$ est la forme sinusoidale et $g(z)$ sa dérivée.

En introduisant les intégrales indéterminées suivantes : $\phi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\phi_y = \int \theta(x, y) dy$, le nombre des déplacements inconnus est réduit de six à seulement cinq. Avec la prise en compte de l'effet stretching (3D), le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \phi_z(x, y) \end{cases} \quad (IV.5a)$$

Si l'effet stretching est négligé (2D), il devient :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (IV.5b)$$

Où :

$$k_1 = \alpha^2 \text{ and } k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.6})$$

La nouvelle fonction de gauchissement est proposée comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{4z^3}{3h^2}\right) \quad (\text{IV.7})$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.8})$$

Les relations cinématiques du champ de déplacement décrites dans l'Eq. (IV.5a), basées sur la théorie de l'élasticité aux petites déformations, sont présentées comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta \, dy + \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta \, dx + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10c})$$

Les intégrales indéterminées dans les équations ci-dessus sont simplifiées et déclarées comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \\ \int \theta \, dx &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta \, dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (IV.11a)$$

Où les coefficients A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (IV.11b)$$

Où α et β sont utilisés dans l'équation. (IV.26).

Basé sur le champ de déplacement 3D exprimé en Eq. (IV.5a), les relations constitutives linéaires de la plaque FGM sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (IV.12)$$

C_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) Sont les constantes élastiques dépendant de la déformation normale ε_z :

- Cas de 2D ($\varepsilon_z = 0$), alors C_{ij} sont :

$$\begin{aligned} C_{ii} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (i=1,2); \\ C_{ij} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad (i,j=1,2); \\ C_{ii} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (i=4,5,6) \end{aligned} \quad (IV.13)$$

- Cas de quasi-3D ($\varepsilon_z \neq 0$), alors C_{ij} sont :

$$\begin{aligned} C_{ii} &= \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (i=1,2,3); \\ C_{ij} &= \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (i,j=1,2,3); \\ C_{ii} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (i=4,5,6) \end{aligned} \quad (IV.14)$$

IV.2.4. Les équations d'équilibre

Les équations d'équilibre principales et les conditions aux limites sont obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels comme suit [Ali Rachedi M et al, 2020], [Kiani Y, 2019]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dA dz - \int_A (q - R) \delta w dA = 0 \quad (IV.15)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz + \int_A (R - q) \delta w dA = 0 \quad (IV.16)$$

Substitution d'éqs. (IV.9) et éq. (IV.10) en éq. (IV.16) et en intégrant sur l'épaisseur de la plaque FGM, Eq. (IV.14) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b \\ & + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz} \\ & + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}] dA + \int_A (R - q) \delta w dA = 0 \end{aligned} \quad (IV.17)$$

Où δ est l'opérateur variationnel, q est la charge transversale répartie et A est la surface.

Les résultantes de contrainte N , M , et Q sont définies par :

$$\begin{bmatrix} \{N_x\} & \{N_y\} & \{N_{xy}\} \\ \{M_x^b\} & \{M_y^b\} & \{M_{xy}^b\} \\ \{M_x^s\} & \{M_y^s\} & \{M_{xy}^s\} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (IV.18a)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz \quad (IV.18b)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (IV.18c)$$

Les équations différentielles d'équilibre (IV.19) sont obtenues en intégrant l'équation (IV.17) par parties et en prenant $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta, \delta \varphi_z)$ égal à zéro :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q - R = 0 \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0 \\
 \delta \varphi_z : \quad & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z = 0
 \end{aligned} \tag{IV.19}$$

Tel que :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon, \text{ Avec : } S = A^s \gamma \tag{IV.20a}$$

$$N_z = R^a \varphi + L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s) \tag{IV.20b}$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\} \tag{IV.21a}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \tag{IV.21b}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \tag{IV.21c}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{IV.22a}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{IV.22b}$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} g'(z) dz, \{R^a\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{33} [g'(z)]^2 dz \text{ Avec : } (i=1, 2; j=3) \tag{IV.22c}$$

En plus, les éléments de rigidité sont indiqués comme suit :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \{A_{11}\}, \{B_{11}\}, \{D_{11}\}, \{B_{11}^s\}, \{D_{11}^s\}, \{H_{11}^s\} \\ \{A_{12}\}, \{B_{12}\}, \{D_{12}\}, \{B_{12}^s\}, \{D_{12}^s\}, \{H_{12}^s\} \\ \{A_{66}\}, \{B_{66}\}, \{D_{66}\}, \{B_{66}^s\}, \{D_{66}^s\}, \{H_{66}^s\} \end{array} \right\} \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} \left[1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z) \right] \left\{ \begin{array}{l} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{66} \end{array} \right\} dz \end{aligned} \quad (IV.22d)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ii} [g(z)]^2 dz \quad \text{Avec: } (i = 4, 5) \quad (IV.22e)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (IV.22f)$$

En remplaçant l'éq. (IV.20) en éq. (IV.19), les équations principales s'énoncent comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\ & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{11}^s k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_{12}^s k_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_{66}^s (A'k_1 + B'k_2) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + L \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (IV.23a)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}^s k_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} + B_{22}^s k_2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + B_{66}^s (A'k_1 + B'k_2) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + L \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (IV.23b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ & - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11}^s k_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + D_{12}^s \left(k_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \\ & + D_{22}^s k_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2D_{66}^s (A'k_1 + B'k_2) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + L^a \left(\frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} \right) + q - R = 0 \end{aligned} \quad (IV.23c)$$

$$\begin{aligned}
 \delta\theta : & -B_{11}^s k_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{12}^s \left(k_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} + k_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - B_{22}^s k_2 \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{66}^s (A'k_1 + B'k_2) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 & + D_{11}^s k_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12}^s \left(k_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + D_{22}^s k_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66}^s (A'k_1 + B'k_2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - H_{11}^s (k_1)^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - H_{22}^s (k_2)^2 \theta - H_{66}^s (A'k_1 + B'k_2)^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s (A'k_1) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 & + A_{44}^s (B'k_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + R(k_1 + k_2) \varphi_z + A_{55}^s A'k_1 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + A_{44}^s B'k_2 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{IV.23d}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_z : & -L \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + L^a \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \left(k_2 (A_{44}^s - R) + k_1 (A_{55}^s - R) \right) \theta \\
 & - R^a \varphi_z + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{IV.23e}$$

IV.2.5. Solutions analytiques explicites

Cette présente recherche tente d'offrir des solutions analytiques explicites de l'Eq. (IV.23) pour une plaque FG simplement appuyée. De plus, les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords :

$$v_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \varphi = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ at } x=0, a \tag{IV.24a}$$

$$u_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \varphi = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ at } y=0, b \tag{IV.24b}$$

Suivant la technique de résolution de Navier, les auteurs adoptent que les composantes de déplacement $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi_z)$ satisfaisant les conditions aux limites précédentes sont données par [Ali Rachedi M et al, 2020] :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{IV.25}$$

Où $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, \Phi_{mn}$ trouver des paramètres arbitraires, α et β sont définis comme :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \tag{26}$$

Selon la technique de résolution de Navier, la charge transversale est donnée dans la série sinusoidale Double-Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (IV.27)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad (IV.28)$$

Les valeurs de q_{mn} en utilisant Eq. (IV.28) sont fixés comme suit :

$$q_{mn} = q_0 \text{ avec } (m=1, n=1) \quad \text{-Distribution sinusoidale de la charge}$$

$$q_{mn} = \frac{16 q_0}{m n \pi^2} \quad \text{-Distribution uniforme de la charge}$$

$$q_{mn} = -\frac{8 q_0 \cos(m \pi)}{m n \pi^2} \quad \text{-Distribution hydrostatique de la charge}$$

$$q_{mn} = \frac{4 q_0}{m n \pi^2} \left(\frac{2 \sin(m \pi)}{m \pi} + \frac{2 \cos(m \pi)}{m^2 \pi^2} - \cos(m \pi) - \frac{2}{m^2 \pi^2} \right) (1 - \cos(n \pi)) \quad \text{-Charge parabolique}$$

$$q_{mn} = \frac{16 q_0}{m n \pi^2} \sin\left(m \pi \cdot 0.02 \left(\frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(n \pi \cdot 0.02 \left(\frac{b}{2}\right)\right) \quad \text{-Patch central}$$

$$q_{mn} = \frac{4 p_0}{a b} \sin\left(\frac{m \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n \pi}{2}\right) \quad \text{-Charge centrale concentrée}$$

avec : $m = 25$, $n = 25$, $p_0 = q_0 (a b)$

En remplaçant les Eqs. (25) et (27) dans l'équation. (23), les équations obtenues sont :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.29)$$

Les composantes de la matrice sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= -A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2, \quad S_{12} = -(A_{66} + A_{12})\alpha\beta, \quad S_{13} = B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \\
 S_{14} &= -BS_{66}(A'k_1 + B'k_2)\alpha\beta^2 + (BS_{11}k_1 + BS_{12}k_2)\alpha, \quad S_{15} = A_{13}\alpha \\
 S_{22} &= -A_{22}\beta^2 - A_{66}\alpha^2, \quad S_{23} = B_{22}\beta^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta \\
 S_{24} &= -BS_{66}(A'k_1 + B'k_2)\alpha^2\beta + (BS_{12}k_1 + BS_{11}k_2)\beta, \quad S_{25} = A_{23}\beta \\
 S_{33} &= -D_{11}\alpha^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 - D_{22}\beta^4 - K_w - K_p(\alpha^2 + \beta^2) \\
 S_{34} &= -(DS_{11}k_1 + DS_{12}k_2)\alpha^2 - (DS_{12}k_1 + DS_{22}k_2)\beta^2 + 2DS_{66}(A'k_1 + B'k_2)\alpha^2\beta^2 \\
 S_{35} &= -B_{13}\alpha^2 - B_{23}\beta^2 \\
 S_{44} &= -(k_1A')^2 AS_{55}\alpha^2 - (k_2B')^2 AS_{44}\beta^2 - HS_{66}(A'k_1 + B'k_2)^2 \alpha^2\beta^2 \\
 &\quad - k_1(HS_{11}k_1 + HS_{12}k_2) - k_2(HS_{12}k_1 + HS_{22}k_2) \\
 S_{45} &= -A'k_1 AS_{55}\alpha^2 - k_2B' AS_{44}\beta^2 - BS_{13}k_1 - BS_{23}k_2 \\
 S_{55} &= -AS_{55}\alpha^2 - AS_{44}\beta^2 - A_{33}
 \end{aligned}$$

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle fonction de gauchissement en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D pour étudier l'effet couplé des fondations variables de Winkler-Pasternak supposées avoir deux paramètres variant simultanément à la surface des plaques FG exposées à diverses charges. En considérant davantage de suppositions simplifiées aux HSDT classiques et en incorporant le terme intégral indéterminé, le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes du HSDT utilisée est réduit d'un, et rend ainsi ce modèle simple et efficace à utiliser. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Ensuite résolues via la méthode de Navier.



Chapitre V :

Résultats numériques et discussions

Chapitre V :**Résultats numériques et discussions****V.1. Introduction**

Ce chapitre présente une recherche traitant de l'influence couplée des fondations non uniformes de Winkler-Pasternak et de divers types de chargement sur le comportement en flexion des plaques FG en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D pour étudier l'effet couplé des fondations variables de Winkler-Pasternak supposées avoir deux paramètres variant simultanément à la surface des plaques FG exposées à diverses charges. La technique de résolution de Navier, dont les solutions sont des fonctions sous forme de séries de Fourier et qui satisfont les conditions aux limites pour résoudre les équations d'équilibre obtenues. Plus important encore, les effets de l'indice de l'épaisseur, de l'indice de loi de puissance, le rapport géométrique, le rapport d'aspect de la plaque, le type de charge et des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak sur le comportement en flexion sont discutés en détails. Les résultats de ce travail sont comparés avec les données disponibles dans la littérature.

V.2. Résultats numériques et discussion

Le comportement en flexion des plaques FG simplement appuyées sur des fondations Winkler-Pasternak variables (fixes, linéaires, paraboliques, paraboliques inverses, sinusoïdales, sinusoïdales inverses, cosinusoïdales, exponentielle) et exposées à plusieurs types de charges (distribuées sinusoïdales, uniformes, hydrostatiques, patch central et charge concentrée) est pris en compte. Il est important de noter qu'un certain nombre d'études paramétriques sont résolues et comparées aux données disponibles dans la littérature.

Les plaques FGM actuelles sont fabriquées à partir du mélange d'aluminium (Al) en tant que phase métallique et d'alumine (Al_2O_3) en tant que phase céramique. Leurs propriétés mécaniques, telles que le module de Young et le coefficient de Poisson, sont définies dans le tableau V.1. Les réponses mécaniques en flexion sont présentées dans les tableaux V.2 à V.6 et les figures V.2–V.10. Les résultats numériques sont discutés dans des formules non dimensionnelles couramment utilisées dans la littérature :

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right), \quad w^* = \frac{10^2 D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right), \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right), \quad \bar{\sigma}_{zz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{zz}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right),$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}\left(0, 0, \frac{z}{h}\right), \quad k_w = \frac{a^4}{D_c} K_W, \quad k_p = \frac{a^2}{D_c} K_P, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Les résultats numériques de l'analyse de flexion de diverses plaques FGM avec différentes géométries et propriétés des matériaux sont analysés en incluant et en excluant l'influence de la déformation normale transversale, voir les tableaux V.2 à V.6.

Tableau V.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.

| Propriétés | Aluminium (Al) | Alumina (Al ₂ O ₃) |
|-------------------------------|----------------|---|
| Module d'Young: E (GPa) | 70 | 380 |
| Coefficient de Poisson: ν | 0.3 | 0.3 |

Le tableau V.2 donne l'effet du rapport d'épaisseur a/h et de l'indice de loi de puissance k sur la flèche adimensionnelle en utilisant des charges uniformes. Dans ce tableau, le rapport d'épaisseur a/h est égal à 5 pour les plaques épaisses, 10, 20 pour les plaques moyennement épaisses, 50 et 100 pour les plaques minces. Notamment, la flèche diminue à mesure que l'indice de loi de puissance k diminue et que le rapport d'épaisseur a/h augmente. En d'autres termes, les résultats présentés dans le tableau V.2 sont en bon accord avec ceux publiés par [Thai HT et Choi DH, 2013], [Zenkour AM et al, 2014].

Tableau V.2 : La flèche adimensionnelle des plaques carrées FGM sous des charges uniformes sans fondations Winkler-Pasternak.

| a/h | Théorie | k | | | | | |
|-------|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 0 | 0.5 | 1 | 2 | 5 | 10 |
| 5 | Present: 2D | 0.53535 | 0.80843 | 1.04496 | 1.35397 | 1.69406 | 1.90646 |
| | Thai and Choi (2013) | 0.5381 | 0.8120 | 1.0486 | 1.3572 | 1.6973 | 1.9125 |
| | Present: 3D | 0.52445 | 0.78385 | 1.00068 | 1.28306 | 1.61690 | 1.84243 |
| | Zenkour et al. (2014) | 0.52308 | 0.78217 | 0.99834 | 1.27965 | 1.61486 | 1.83985 |
| 10 | Present: 2D | 0.46657 | 0.71540 | 0.92877 | 1.19402 | 1.43521 | 1.58736 |
| | Thai and Choi (2013) | 0.4693 | 0.7190 | 0.9324 | 1.1973 | 1.4393 | 1.5937 |
| | Present: 3D | 0.46380 | 0.70264 | 0.89823 | 1.13847 | 1.37660 | 1.54561 |
| | Zenkour et al. (2014) | 0.46252 | 0.70102 | 0.89608 | 1.13521 | 1.37405 | 1.54362 |
| 20 | Present: 2D | 0.44936 | 0.69209 | 0.89969 | 1.15394 | 1.37032 | 1.50738 |
| | Thai and Choi (2013) | 0.4521 | 0.6956 | 0.9033 | 1.1572 | 1.3747 | 1.5138 |
| | Present: 3D | 0.44853 | 0.68218 | 0.87244 | 1.10208 | 1.31614 | 1.47092 |
| | Zenkour et al. (2014) | 0.44727 | 0.68057 | 0.87031 | 1.09882 | 1.31341 | 1.46903 |
| 50 | Present: 2D | 0.44453 | 0.68558 | 0.89153 | 1.14269 | 1.35216 | 1.48496 |
| | Thai and Choi (2013) | 0.4472 | 0.6891 | 0.8951 | 1.1460 | 1.3565 | 1.4915 |
| | Present: 3D | 0.44424 | 0.67647 | 0.86520 | 1.09187 | 1.29919 | 1.44997 |
| | Zenkour et al. (2014) | 0.44299 | 0.67483 | 0.86308 | 1.08861 | 1.29640 | 1.44810 |
| 100 | Present: 2D | 0.44384 | 0.68463 | 0.89039 | 1.14109 | 1.34957 | 1.48175 |
| | Thai and Choi (2013) | 0.4465 | 0.6882 | 0.8940 | 1.1444 | 1.3539 | 1.4883 |
| | Present: 3D | 0.44364 | 0.67561 | 0.86417 | 1.09042 | 1.29678 | 1.44699 |
| | Zenkour et al. (2014) | 0.44237 | 0.67401 | 0.86205 | 1.08715 | 1.29397 | 1.44511 |

Le tableau V.3 présente les valeurs de la flèche adimensionnelle et la contrainte normale dans le plan en utilisant une charge mécanique transversale sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et de l'indice de loi de puissance k . On note qu'il y a une bonne corrélation entre les résultats obtenus par la présente théorie et ceux obtenus par [Neves AMA et al, 2012], [Zenkour AM et al, 2014], [Nebab M et al, 2019]. On remarque aussi que La flèche diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h et la diminution de l'indice de fraction volumique k par contre la contrainte normale dans le plan augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h et la diminution de l'indice de fraction volumique k .

Tableau V.3 : Comparaisons de la flèche et la contrainte normale adimensionnelle dans le plan d'une plaque carrée en utilisant une charge mécanique transversale sinusoïdale.

| k | Théorie | \bar{w} | | | $\bar{\sigma}_{xx}$ | | |
|-----|-----------------------|-----------|--------|--------|---------------------|--------|---------|
| | | a/h | | | a/h | | |
| | | 4 | 10 | 100 | 4 | 10 | 100 |
| 1 | Présent: 2D | 0.7283 | 0.5889 | 0.5626 | 0.5810 | 1.4897 | 14.9675 |
| | Nebab el al. (2019) | 0.7280 | 0.5889 | 0.5625 | - | - | - |
| | Présent: quasi-3D | 0.6913 | 0.5694 | 0.5460 | 0.5807 | 1.4489 | 14.4789 |
| | Zenkour et al. (2014) | 0.6896 | 0.5680 | 0.5446 | 0.5706 | 1.4159 | 14.1343 |
| | Neves et al. (2012) | 0.6998 | 0.5845 | 0.5622 | 0.5925 | 1.4945 | 14.957 |
| 4 | Present: 2D | 1.1608 | 0.8816 | 0.8287 | 0.4442 | 1.1791 | 11.9209 |
| | Nebab el al. (2019) | 1.1619 | 0.8819 | 0.8287 | - | - | - |
| | Présent: quasi-3D | 1.0987 | 0.8422 | 0.7930 | 0.4311 | 1.1206 | 11.2818 |
| | Zenkour et al. (2014) | 1.0970 | 0.8403 | 0.7910 | 0.4181 | 1.0802 | 10.8630 |
| | Neves et al. (2012) | 1.1178 | 0.8750 | 0.8284 | 0.4404 | 1.1783 | 11.923 |
| 10 | Présent: 2D | 1.3913 | 1.0088 | 0.9362 | 0.3252 | 0.8782 | 8.9060 |
| | Nebab el al. (2019) | 1.3917 | 1.0089 | 0.9362 | - | - | - |
| | Présent: quasi-3D | 1.3357 | 0.9820 | 0.9142 | 0.3151 | 0.8392 | 8.4849 |
| | Zenkour et al. (2014) | 1.3333 | 0.9807 | 0.9130 | 0.3033 | 0.8031 | 8.1112 |
| | Neves et al. (2012) | 1.3490 | 0.8750 | 0.8284 | 0.3227 | 1.1783 | 11.923 |

Le tableau V.4 montre la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée isotrope soumise à une charge mécanique uniforme pour diverses valeurs du rapport d'épaisseur a/h et des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak (k_W , k_P). Les résultats de la théorie proposée sont comparés aux d'autres théories de [Zenkour AM et al, 2014],

[Park M et Choi DH, 2018], [Nebab M et al, 2019], où les résultats sont obtenus pour toutes les valeurs de a/h et (k_w, k_p) .

Tableau V.4 : Variation de la flèche centrales d'une plaque carrée isotrope soumise à une charge mécanique uniforme ($m, n =$ série de 100 termes).

| Théories | a/h | $k_w = 1$ | | | | |
|-----------------------|-----|-----------|-------------|--------|--------|----|
| | | k_p | | | | |
| | | 5 | 10 | 15 | 20 | |
| Présent: 2D | 5 | 3.7060 | 2.9806 | 2.4905 | 2.1374 | |
| Nebab el al. (2019) | | 3.7053 | 2.9802 | 2.4901 | 2.1372 | |
| Park and Choi (2018) | | 3.7067 | 2.9808 | 2.4905 | 2.1373 | |
| Présent: quasi-3D | | 3.6768 | 2.9801 | 2.5031 | 2.1565 | |
| Zenkour et al. (2014) | | 3.669 | 2.976 | 2.500 | 2.154 | |
| | | | $k_w = 3^4$ | | | |
| Présent: 2D | | 3.0855 | 2.5622 | 2.1893 | 1.9104 | |
| Nebab el al. (2019) | | 3.0850 | 2.5619 | 2.1891 | 1.9102 | |
| Park and Choi (2018) | | 3.0857 | 2.5622 | 2.1892 | 1.9102 | |
| Présent : quasi-3D | | 3.0826 | 2.5742 | 2.2083 | 1.9327 | |
| Zenkour et al. (2014) | | 3.078 | 2.571 | 2.206 | 1.931 | |
| | | | $k_w = 5^4$ | | | |
| Présent: 2D | | 1.4032 | 1.2812 | 1.1787 | 1.0913 | |
| Nebab el al. (2019) | | 1.4033 | 1.2812 | 1.1786 | 1.0913 | |
| Park and Choi (2018) | | 1.4028 | 1.2807 | 1.1782 | 1.0909 | |
| Présent: quasi-3D | | 1.4319 | 1.3084 | 1.2045 | 1.1159 | |
| Zenkour et al. (2014) | | 1.431 | 1.308 | 1.204 | 1.115 | |
| Théories | | a/h | $k_w = 1$ | | | |
| | | | k_p | | | |
| | | | 5 | 10 | 15 | 20 |
| Présent: 2D | 10 | 3.3454 | 2.7504 | 2.3330 | 2.0244 | |
| Nebab el al. (2019) | | 3.3455 | 2.7504 | 2.3331 | 2.0243 | |
| Park and Choi (2018) | | 3.3455 | 2.7504 | 2.3331 | 2.0244 | |
| Présent: quasi-3D | | 3.3373 | 2.7499 | 2.3363 | 2.0295 | |
| Zenkour et al. (2014) | | 3.330 | 2.745 | 2.333 | 2.027 | |
| | | | $k_w = 3^4$ | | | |
| Présent: 2D | | 2.8421 | 2.3983 | 2.0730 | 1.8244 | |
| Nebab el al. (2019) | | 2.8421 | 2.3983 | 2.0729 | 1.8244 | |
| Park and Choi [2018] | | 2.8421 | 2.3983 | 2.0730 | 1.8245 | |

| | | | | | |
|------------------------|-------------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| Présent: quasi-3D | | 2.8409 | 2.4013 | 2.0781 | 1.8306 |
| Zenkour et al. (2014) | | 2.836 | 2.398 | 2.075 | 1.829 |
| | | $k_w = 5^4$ | | | |
| Présent: 2 D | | 1.3784 | 1.2615 | 1.1627 | 1.0782 |
| Nebab el al. (2019) | | 1.3784 | 1.2614 | 1.1627 | 1.0782 |
| Park and Choi (2018) | | 1.3785 | 1.2615 | 1.1627 | 1.0782 |
| Présent: quasi-3D | | 1.3865 | 1.2692 | 1.1701 | 1.0853 |
| Zenkour et al. (2014) | | 1.385 | 1.268 | 1.169 | 1.085 |
| <i>Théories</i> | <i>a/h</i> | $k_w = 1$ | | | |
| | | k_p | | | |
| | | 5 | 10 | 15 | 20 |
| | | | | | |
| Présent : 2D | | 3.2200 | 2.6684 | 2.2762 | 1.9834 |
| Nebab el al. (2019) | | 3.2200 | 2.6684 | 2.2763 | 1.9834 |
| Park and Choi (2018) | | 3.2200 | 2.6684 | 2.2763 | 1.9834 |
| Present: quasi-3D | | 3.2190 | 2.6677 | 2.2757 | 1.9830 |
| Zenkour et al. (2014) | | 3.212 | 2.663 | 2.272 | 1.980 |
| | | $k_w = 3^4$ | | | |
| Présent : 2D | | 2.7552 | 2.3390 | 2.0306 | 1.7932 |
| Nebab el al. (2019) | | 2.7552 | 2.3389 | 2.0306 | 1.7932 |
| Park and Choi (2018) | 200 | 2.7552 | 2.3390 | 2.0306 | 1.7932 |
| Présent: quasi-3D | | 2.7545 | 2.3384 | 2.0302 | 1.7929 |
| Zenkour et al. (2014) | | 2.749 | 2.335 | 2.027 | 1.791 |
| | | $k_w = 5^4$ | | | |
| Present: 2D | | 1.3688 | 1.2542 | 1.1572 | 1.0740 |
| Nebab el al. (2019) | | 1.3688 | 1.2542 | 1.1572 | 1.0740 |
| Park and Choi (2018) | | 1.3688 | 1.2543 | 1.1572 | 1.0740 |
| Présent: quasi-3D | | 1.3686 | 1.2541 | 1.1571 | 1.0739 |
| Zenkour et al. (2014) | | 1.367 | 1.253 | 1.156 | 1.073 |

Le tableau V.5 présente les effets des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak et de l'indice de fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée FG soumise à une charge mécanique transversale sinusoïdale. L'augmentation des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak (k_w , k_p) entraînent une diminution des valeurs de la flèche et des contraintes. Par contre la flèche augmente avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique k . Cette augmentation est due au fait que la rigidité en flexion est maximale pour la plaque céramique et minimale pour la plaque métallique. Il se

dégrade au fur et à mesure que l'indice de fraction volumique k augmente. On remarque que lorsque les plaques sont entièrement en céramique et en métal sans paramètres Winkler et Pasternak ($k_w, k_p=0$) ont la même valeur. Cela est dû à leur parfaite homogénéité et les contraintes ne dépendent pas du module de Young. Cependant, l'inclusion des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak fait la différence entre les contraintes dans les plaques de céramique et de métal. Les résultats adimensionnels présentés dans le tableau V.5 sont comparés et validés avec des résultats connus de [Zenkour AM et al, 2014], [Nebab M et al, 2019].

Tableau V.5 : Variation de la flèche \bar{w} et des contraintes $\bar{\sigma}_i$ adimensionnelle de la plaque carrée FG soumis à une charge mécanique transversale sinusoïdale ($a = 10h$).

| (\bar{w}, σ_i) | (k_w, k_p) | Théories | k | | | | | |
|--------------------------|--------------|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | | 0 | 1 | 2 | 5 | 10 | Metal |
| \bar{w} | (0, 0) | Présent : 2D | 0.29605 | 0.58895 | 0.75732 | 0.91155 | 1.00880 | 1.60715 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.29603 | 0.58891 | 0.75733 | 0.91184 | 1.00892 | 1.60703 |
| | | Present: quasi-3D | 0.29415 | 0.56939 | 0.72195 | 0.87418 | 0.98200 | 1.59679 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.29334 | 0.56802 | 0.71988 | 0.87256 | 0.98072 | 1.59239 |
| | (100, 0) | Présent: 2D | 0.23291 | 0.38260 | 0.44719 | 0.49682 | 0.52438 | 0.65021 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.23290 | 0.38258 | 0.44719 | 0.49691 | 0.52441 | 0.65019 |
| | | Présent: quasi-3D | 0.23221 | 0.37534 | 0.43597 | 0.48724 | 0.51916 | 0.65229 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.23171 | 0.37476 | 0.43524 | 0.48679 | 0.51890 | 0.65161 |
| | (0, 10) | Présent: 2D | 0.19285 | 0.28526 | 0.31969 | 0.34428 | 0.35728 | 0.41155 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.19284 | 0.28525 | 0.31969 | 0.34432 | 0.35730 | 0.41154 |
| | | Present: quasi-3D | 0.19269 | 0.28181 | 0.31460 | 0.34047 | 0.35583 | 0.41387 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.19235 | 0.28149 | 0.31424 | 0.34028 | 0.35575 | 0.41361 |
| | (100, 10) | Present: 2D | 0.16390 | 0.22618 | 0.24729 | 0.26175 | 0.26921 | 0.29890 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.16390 | 0.22617 | 0.24729 | 0.26178 | 0.26921 | 0.29890 |
| | | Present: quasi-3D | 0.16403 | 0.22440 | 0.24467 | 0.26004 | 0.26895 | 0.30093 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.16379 | 0.22419 | 0.24445 | 0.25994 | 0.26893 | 0.30081 |
| $\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$ | (0, 0) | Present: 2D | 1.99472 | 3.08569 | 3.60760 | 4.24608 | 5.08624 | 1.99472 |
| | | Nebab el al. (2019) | 1.99550 | 3.08700 | 3.60936 | 4.24883 | 5.08901 | 1.99550 |
| | | Present: quasi-3D | 2.03137 | 3.11958 | 3.64669 | 4.27100 | 5.10271 | 2.03137 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 2.12463 | 3.27707 | 3.82256 | 4.47146 | 5.32910 | 2.12463 |
| | (100, 0) | Present: 2D | 1.56927 | 2.00457 | 2.13024 | 2.31426 | 2.64383 | 0.80701 |
| | | Nebab el al. (2019) | 1.56991 | 2.00546 | 2.13127 | 2.31542 | 2.64512 | 0.80736 |
| | | Present: quasi-3D | 1.60362 | 2.05643 | 2.20219 | 2.38051 | 2.69770 | 0.82981 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 1.67827 | 2.16212 | 2.31114 | 2.49458 | 2.81963 | 0.86939 |
| | (0, 10) | Present: 2D | 1.29937 | 1.49457 | 1.52286 | 1.60367 | 1.80138 | 0.51080 |
| | | Nebab el al. (2019) | 1.29991 | 1.49526 | 1.52360 | 1.60439 | 1.80222 | 0.51103 |
| | | Present: quasi-3D | 1.33073 | 1.54397 | 1.58910 | 1.66343 | 1.84898 | 0.52651 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 1.39321 | 1.62400 | 1.66859 | 1.74376 | 1.93308 | 0.55186 |
| | (100, 10) | Present: 2D | 1.10434 | 1.18501 | 1.17800 | 1.21927 | 1.35730 | 0.37098 |
| | | Nebab el al. (2019) | 1.10480 | 1.18556 | 1.17857 | 1.21978 | 1.35791 | 0.37115 |
| | | Present: quasi-3D | 1.13279 | 1.22941 | 1.23585 | 1.27047 | 1.39753 | 0.38283 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 1.18631 | 1.29346 | 1.29805 | 1.33209 | 1.46131 | 0.40135 |

| | | | | | | | | |
|----------------------------|-----------|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\bar{\sigma}_{xy} (-h/3)$ | (0, 0) | Present: 2D | 0.70662 | 0.61108 | 0.54418 | 0.57561 | 0.58953 | 0.70662 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.70652 | 0.61104 | 0.54409 | 0.57546 | 0.58937 | 0.70652 |
| | | Present: quasi-3D | 0.70068 | 0.56582 | 0.49413 | 0.52449 | 0.54795 | 0.70068 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.69856 | 0.56467 | 0.49269 | 0.52346 | 0.54777 | 0.69856 |
| | (100, 0) | Present: 2D | 0.55591 | 0.39699 | 0.32133 | 0.31373 | 0.30644 | 0.28588 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.55584 | 0.39696 | 0.32128 | 0.31360 | 0.30634 | 0.28585 |
| | | Present: quasi-3D | 0.55314 | 0.37299 | 0.29839 | 0.29233 | 0.28969 | 0.28623 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.55179 | 0.37256 | 0.29789 | 0.29203 | 0.28983 | 0.28585 |
| | (0, 10) | Present: 2D | 0.46030 | 0.29599 | 0.22971 | 0.21740 | 0.20879 | 0.18095 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.46024 | 0.29597 | 0.22968 | 0.21730 | 0.20872 | 0.18093 |
| | | Present: quasi-3D | 0.45901 | 0.28005 | 0.21532 | 0.20427 | 0.19855 | 0.18161 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.45807 | 0.27983 | 0.21507 | 0.20414 | 0.19869 | 0.18145 |
| | (100, 10) | Present: 2D | 0.39121 | 0.23468 | 0.17769 | 0.16529 | 0.15732 | 0.13142 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.39116 | 0.23467 | 0.17766 | 0.16521 | 0.15726 | 0.13141 |
| | | Present: quasi-3D | 0.39073 | 0.22299 | 0.16746 | 0.15602 | 0.15007 | 0.13205 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.39005 | 0.22288 | 0.16731 | 0.15594 | 0.15021 | 0.13196 |
| $\bar{\sigma}_{xz} (0)$ | (0, 0) | Present: 2D | 0.24193 | 0.24193 | 0.22200 | 0.19660 | 0.21491 | 0.24193 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.24618 | 0.24618 | 0.22650 | 0.20167 | 0.21981 | 0.24618 |
| | | Present: quasi-3D | 0.24168 | 0.24168 | 0.22178 | 0.19642 | 0.21472 | 0.24168 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.24541 | 0.24541 | 0.22581 | 0.20107 | 0.21916 | 0.24541 |
| | (100, 0) | Present: 2D | 0.19033 | 0.15716 | 0.13109 | 0.10716 | 0.11171 | 0.09788 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.19368 | 0.15993 | 0.13375 | 0.10990 | 0.11425 | 0.09960 |
| | | Present: quasi-3D | 0.19079 | 0.15932 | 0.13393 | 0.10948 | 0.11352 | 0.09873 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.19385 | 0.16191 | 0.13652 | 0.11217 | 0.11596 | 0.10042 |
| | (0, 10) | Present: 2D | 0.15759 | 0.11718 | 0.09371 | 0.07425 | 0.07612 | 0.06195 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.16037 | 0.11924 | 0.09561 | 0.07615 | 0.07784 | 0.06304 |
| | | Present: quasi-3D | 0.15832 | 0.11961 | 0.09665 | 0.07650 | 0.07780 | 0.06264 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.16093 | 0.12162 | 0.09857 | 0.07841 | 0.07949 | 0.06374 |
| | (100, 10) | Present: 2D | 0.13394 | 0.09291 | 0.07249 | 0.05646 | 0.05735 | 0.04499 |
| | | Nebab el al. (2019) | 0.13630 | 0.09455 | 0.07396 | 0.05790 | 0.05865 | 0.04579 |
| | | Present: quasi-3D | 0.13477 | 0.09524 | 0.07516 | 0.05843 | 0.05881 | 0.04555 |
| | | Zenkour et al. (2014) | 0.13703 | 0.09686 | 0.07668 | 0.05990 | 0.06009 | 0.04636 |

Le tableau V.6 montre la variation de la flèche et de la contrainte normale adimensionnelle dans le plan en utilisant des fondations uniformes ($\zeta = 0$) et variables de Winkler-Pasternak (variation parabolique). Dans le tableau V.6, les paramètres adimensionnels (\bar{w} et $\bar{\sigma}_{xx}$) sont présentés pour plusieurs valeurs d'indice de loi de puissance k et types de chargement. Les flèches augmentent avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique k . Cette augmentation de l'indice de fraction volumique signifie que les plaques FG ont une plus faible teneur en céramique et que leur rigidité est réduite. Les valeurs de la flèche adimensionnelle pour la théorie 3D sont légèrement supérieures à celles obtenues pour la 2D en raison de l'effet d'éirement de l'épaisseur. La contrainte normale dans le plan augmente à mesure que l'indice de fraction volumique k diminue. Il convient de mentionner que la flèche et la contrainte normale dans le plan diminuent avec l'augmentation du paramètre ζ .

Tableau V.6 : Variation de la flèche \bar{w} et la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ adimensionnelle au plan médium en utilisant des fondations Winkler-Pasternak uniformes ($\zeta=0$) et variables (variation parabolique) ($kw=10, kp=10$ et $a/h=10$).

| Types de charge | \bar{w} $\bar{\sigma}_{xx}$ | ζ | Modèle actuel | k | | | | | | |
|--|---------------------------------------|-----------|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| | | | | 0 | 1 | 2 | 5 | 10 | ∞ | |
| Distribution uniforme de la charge | \bar{w} | 0 | 2D | 0.2955 | 0.4294 | 0.4788 | 0.5126 | 0.5305 | 0.6019 | |
| | | | 3D | 0.2953 | 0.4248 | 0.4727 | 0.5069 | 0.5282 | 0.6057 | |
| | | 1 | 2D | 0.2705 | 0.3788 | 0.4157 | 0.4408 | 0.4530 | 0.5035 | |
| | | | 3D | 0.2705 | 0.3756 | 0.4108 | 0.4370 | 0.4522 | 0.5073 | |
| | | 2 | 2D | 0.2493 | 0.3380 | 0.3668 | 0.3861 | 0.3956 | 0.4332 | |
| | | | 3D | 0.2496 | 0.3361 | 0.3632 | 0.3834 | 0.3960 | 0.4359 | |
| | 5 | 2D | 0.2017 | 0.2554 | 0.2714 | 0.2807 | 0.2857 | 0.3047 | | |
| | | 3D | 0.2024 | 0.2549 | 0.2698 | 0.2801 | 0.2863 | 0.3070 | | |
| | $\bar{\sigma}_{xx}$ | 0 | 2D | 1.1728 | 0.9496 | 0.7588 | 0.5345 | 0.3944 | 0.4050 | |
| | | | 3D | 1.1779 | 0.9408 | 0.7610 | 0.5244 | 0.3877 | 0.4077 | |
| | | 1 | 2D | 1.1086 | 0.8836 | 0.7083 | 0.4921 | 0.3593 | 0.3482 | |
| | | | 3D | 1.1232 | 0.8920 | 0.7192 | 0.4916 | 0.3582 | 0.3546 | |
| | | 2 | 2D | 1.0182 | 0.7567 | 0.5834 | 0.3976 | 0.2895 | 0.2770 | |
| | | | 3D | 1.0333 | 0.7652 | 0.5897 | 0.3917 | 0.2856 | 0.2766 | |
| | 5 | 2D | 0.7308 | 0.3830 | 0.2302 | 0.1368 | 0.1101 | 0.1194 | | |
| | | 3D | 0.7271 | 0.3574 | 0.2029 | 0.1095 | 0.0890 | 0.1031 | | |
| | Distribution Sinusoïdale de la charge | \bar{w} | 0 | 2D | 0.1895 | 0.2780 | 0.3106 | 0.3338 | 0.3460 | 0.3967 |
| | | | | 3D | 0.1894 | 0.2748 | 0.3059 | 0.3303 | 0.3447 | 0.3986 |
| 1 | | | 2D | 0.1738 | 0.2455 | 0.2708 | 0.2881 | 0.2971 | 0.3339 | |
| | | | 3D | 0.1739 | 0.2434 | 0.2673 | 0.2858 | 0.2966 | 0.3359 | |
| 2 | | | 2D | 0.1605 | 0.2200 | 0.2399 | 0.2534 | 0.2604 | 0.2882 | |
| | | | 3D | 0.1607 | 0.2182 | 0.2374 | 0.2519 | 0.2601 | 0.2901 | |
| 5 | | 2D | 0.1308 | 0.1675 | 0.1788 | 0.1862 | 0.1899 | 0.2042 | | |
| | | 3D | 0.1310 | 0.1668 | 0.1778 | 0.1857 | 0.1902 | 0.2059 | | |
| $\bar{\sigma}_{xx}$ | | 0 | 2D | 0.8400 | 0.7026 | 0.5725 | 0.4040 | 0.3013 | 0.3238 | |
| | | | 3D | 0.8449 | 0.6991 | 0.5682 | 0.3958 | 0.2946 | 0.3280 | |
| | | 1 | 2D | 0.7974 | 0.6580 | 0.5342 | 0.3735 | 0.2743 | 0.2825 | |
| | | | 3D | 0.8083 | 0.6637 | 0.5392 | 0.3725 | 0.2722 | 0.2883 | |
| | | 2 | 2D | 0.7380 | 0.5746 | 0.4518 | 0.3098 | 0.2274 | 0.2314 | |
| | | | 3D | 0.7499 | 0.5790 | 0.4556 | 0.3067 | 0.2235 | 0.2339 | |
| 5 | | 2D | 0.5523 | 0.3289 | 0.2191 | 0.1372 | 0.1067 | 0.1194 | | |
| | | 3D | 0.5533 | 0.3145 | 0.2025 | 0.1190 | 0.0925 | 0.1112 | | |
| Variation linéaire ou hydrostatique de la charge | | \bar{w} | 0 | 2D | 0.1477 | 0.2151 | 0.2393 | 0.2559 | 0.2646 | 0.3011 |
| | | | | 3D | 0.1477 | 0.2128 | 0.2359 | 0.2536 | 0.2638 | 0.3028 |
| | 1 | | 2D | 0.1352 | 0.1895 | 0.2077 | 0.2202 | 0.2261 | 0.2521 | |
| | | | 3D | 0.1354 | 0.1877 | 0.2054 | 0.2185 | 0.2261 | 0.2535 | |
| | 2 | | 2D | 0.1247 | 0.1689 | 0.1834 | 0.1928 | 0.1976 | 0.2168 | |
| | | | 3D | 0.1249 | 0.1678 | 0.1818 | 0.1918 | 0.1975 | 0.2181 | |
| | 5 | 2D | 0.1008 | 0.1276 | 0.1357 | 0.1404 | 0.1430 | 0.1525 | | |
| | | 3D | 0.1012 | 0.1272 | 0.1347 | 0.1401 | 0.1432 | 0.1535 | | |
| | $\bar{\sigma}_{xx}$ | 0 | 2D | 0.5864 | 0.4758 | 0.3812 | 0.2662 | 0.1979 | 0.2029 | |
| | | | 3D | 0.5888 | 0.4719 | 0.3780 | 0.2617 | 0.1937 | 0.2038 | |
| | | 1 | 2D | 0.5542 | 0.4426 | 0.3541 | 0.2467 | 0.1795 | 0.1745 | |
| | | | 3D | 0.5608 | 0.4455 | 0.3578 | 0.2460 | 0.1782 | 0.1776 | |
| | | 2 | 2D | 0.5092 | 0.3786 | 0.2935 | 0.1981 | 0.1446 | 0.1385 | |
| | | | 3D | 0.5163 | 0.3812 | 0.2942 | 0.1956 | 0.1419 | 0.1385 | |
| | 5 | 2D | 0.3652 | 0.1915 | 0.1163 | 0.0651 | 0.0557 | 0.0589 | | |
| | | 3D | 0.3647 | 0.1795 | 0.1024 | 0.0564 | 0.0444 | 0.0518 | | |

Les variations de la flèche centrale adimensionnelle par rapport au rapport d'épaisseur a/h soumise de différents types de charges mécaniques sont présentées à la figure V.1. À l'exception de la charge centrale concentrée, les valeurs obtenues par la théorie quasi-3D sont légèrement plus petites que celles obtenues par la théorie 2D, et cette légère différence est due à l'effet d'étirement d'épaisseur. En outre, les valeurs les plus élevées de la flèche centrales sont obtenues pour la charge concentrée centrale, quelle que soit la valeur du rapport d'épaisseur a/h . En revanche, l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h entraîne une diminution de la flèche centrale \bar{w} .

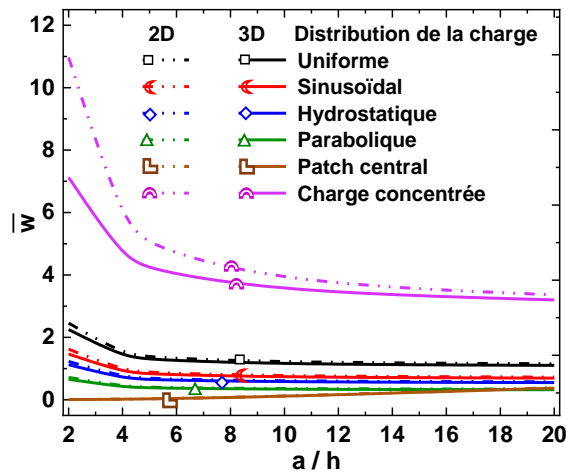


Figure V. 1 : Variation de la flèche centrale \bar{w} adimensionnelle par rapport au rapport d'épaisseur a/h des plaques carrées ($k = 2$) soumises à différents types de charge mécanique.

L'effet de l'indice de loi de puissance k sur la flèche centrale adimensionnelle à l'aide de diverses charges mécaniques est illustré à la figure V.2. Des plaques de céramique complètes montrent la flèche centrale adimensionnelle minimale. Cependant, l'augmentation de l'indice de loi de puissance k entraîne une diminution de la rigidité des plaques et une augmentation de la flèche centrale.

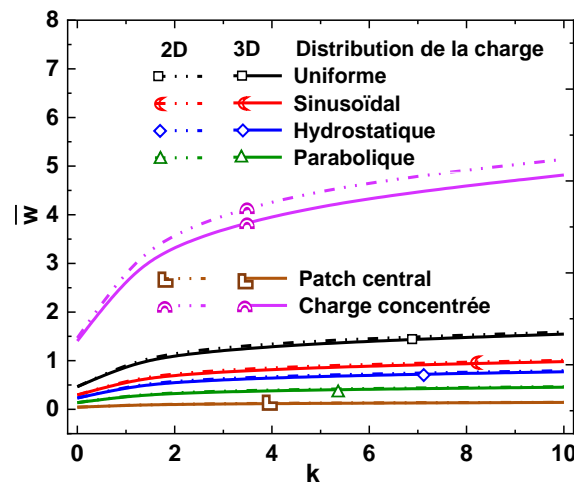


Figure V. 2 : Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport à l'indice de loi de puissance k des plaques carrées ($a/h = 10$) soumises à différents types de charges mécaniques.

Les Figures V.3.a et V.3.b représentent respectivement les flèches adimensionnelles le long de la direction x des plaques pour une charge répartie uniforme et une charge concentrée centrale. La flèche dépend du type de fondations Winkler-Pasternak pour les deux types de charges, figures V.3.a, V.3.b. De plus, les valeurs les plus élevées de la flèche centrale sont obtenues pour les fondations Winkler-Pasternak dont les paramètres de rigidité varient selon des fonctions fixes et sinusoidales inverses. Cependant, les valeurs les plus basses ont été obtenues pour la variation sinusoidale. Ces observations sont les mêmes quel que soit le type de charge. Enfin, la valeur maximale des flèches ne se situe pas toujours au centre de la plaque FG ; cela dépend du type de charge.

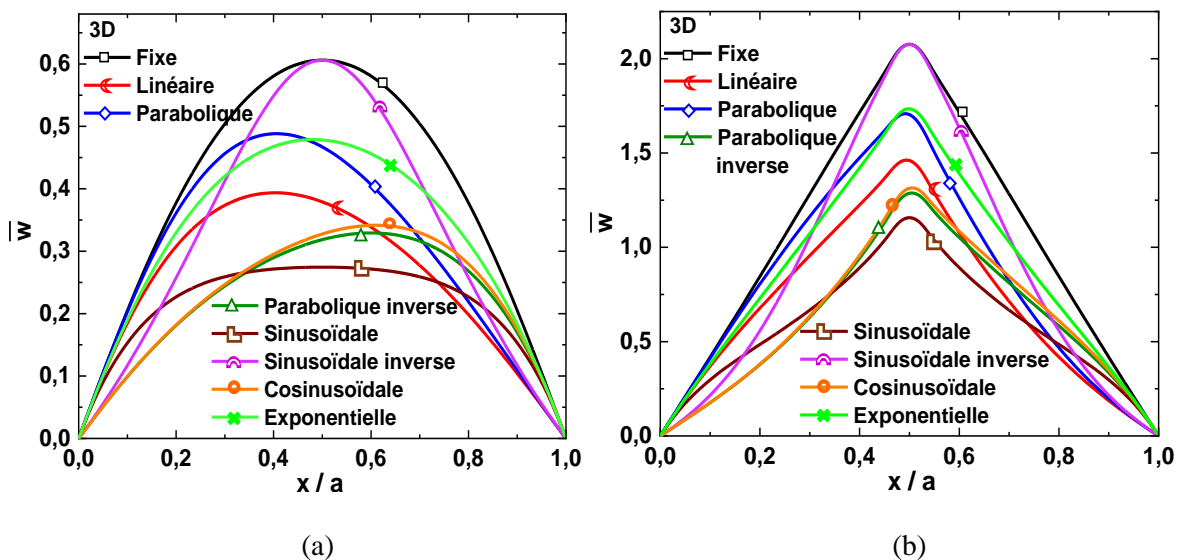


Figure V. 3 : Variation de la flèche adimensionnelle aux sens de la longueur de la plaque ($a/h = 10$), la plaque carrée reposant sur divers types de fondations élastiques variables Winkler-Pasternak ($k = 2, k_w = 50, k_p = 4, \zeta = 2,5$), en utilisant :
(a) une charge répartie uniforme et (b) une charge concentrée centrale.

Les figures V.4.a et V.4.b montrent l'évolution de la contrainte normale adimensionnelle soumises respectivement à une charge répartie uniformément et une charge concentrée centrale. Comme le montre la figure V.4.a, l'effet des fondations variables Winkler-Pasternak sur les contraintes normales adimensionnelles est important. Toutefois, pour la charge concentrée centrale, les valeurs ne dépendent pas du type de fondation variable Winkler-Pasternak. En particulier, les contraintes normales sont la traction à la surface supérieure et la compression à la surface inférieure pour les deux charges.

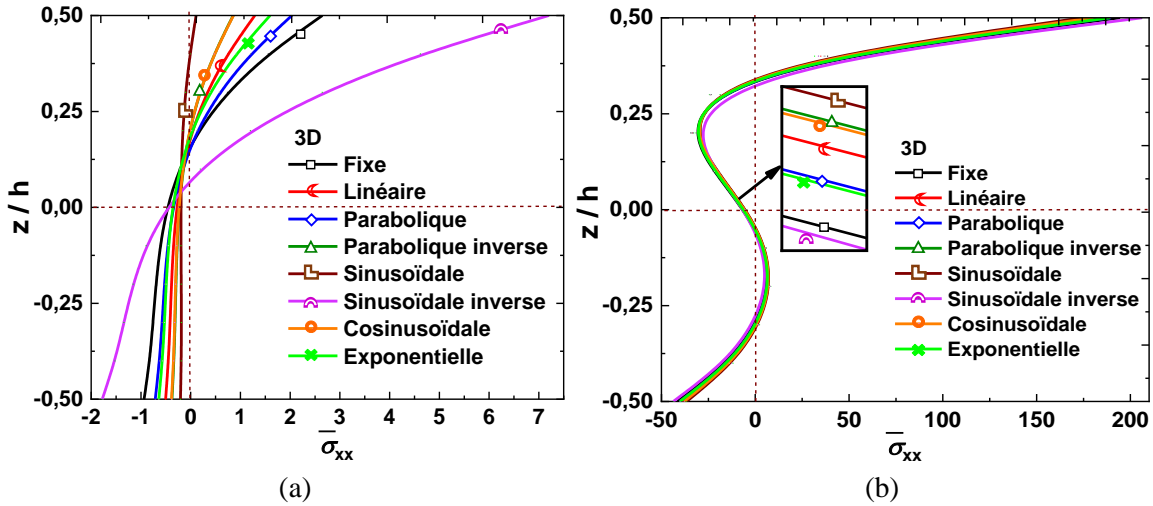


Figure V. 4 : Variation de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xx}$ par rapport l'épaisseur ($a/h = 10$) de la plaque carrée reposant sur divers types de fondations variables Winkler-Pasternak ($k = 2, k_W=50, k_P = 4, \zeta = 2.5$), en utilisant :
 (a) une charge répartie uniforme et (b) une charge concentrée centrale.

Les figures V.5.a et V.5.b représentent la variation des contraintes de cisailment transversales adimensionnelles respectivement pour une charge répartie uniforme et une charge concentrée centrale. Pour les deux chargements, la contrainte de cisailment transversale maximale dépend directement du type de fondations Winkler-Pasternak variables et du type de charges. De plus, l'évolution des contraintes de cisailment est lisse pour ce type de charge. Néanmoins, les valeurs de contrainte de cisailment sont relativement plus élevées dans le cas d'une charge uniformément répartie.

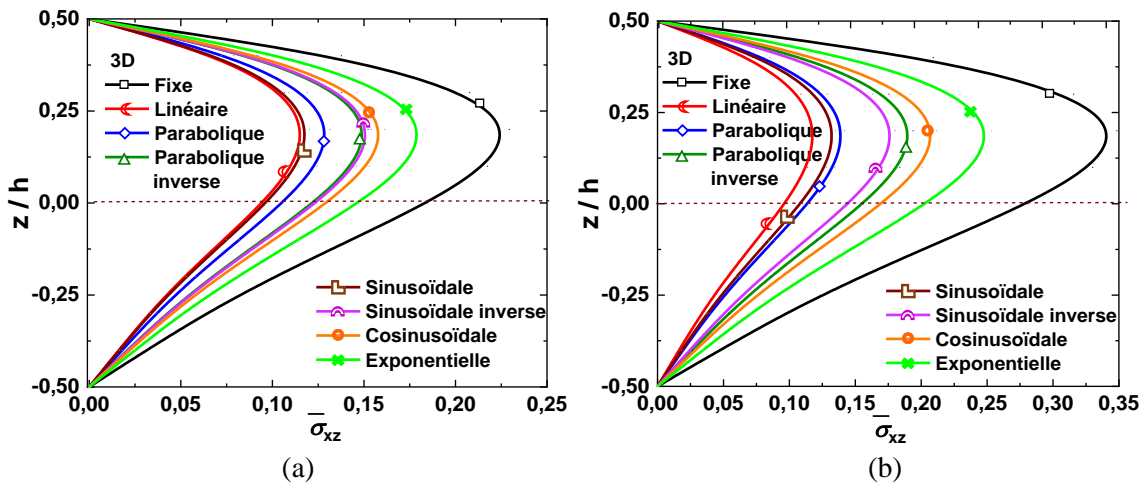


Figure V. 5 : Variation de la contrainte de cisailment transversale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ par rapport l'épaisseur ($a/h = 10$) de la plaque carrée reposant sur divers types de fondations variables Winkler-Pasternak ($k = 2, k_W=50, k_P = 4, \zeta = 2.5$), en utilisant :
 (a) charge répartie uniforme et (b) charge centrale concentrée.

L'effet du paramètre non uniforme ζ sur la variation de la flèche centrale adimensionnelle à l'aide de divers types de fondations Winkler-Pasternak variables (linéaire, parabolique, parabolique inverse, sinusoïdale, Co sinusoïdale, exponentielle) et de charge répartie sinusoïdale ($k = 2$, $a/h = 10$) est représenté sur la figure V.6. On remarque que la flèche diminue avec l'augmentation du paramètre non uniforme ζ . Les valeurs minimale et maximale de la flèche résultantes pour les fondations Winkler-Pasternak avec une variation sinusoïdale et exponentielle dépendent directement du paramètre non uniforme ζ , ceci montre que la dépendance et l'effet de ce paramètre sur la flèche. La même tendance est observée pour tous les types de charges. La figure V.7 montre la variation de la flèche centrale adimensionnelle pour divers types de fondations Winkler-Pasternak variables.

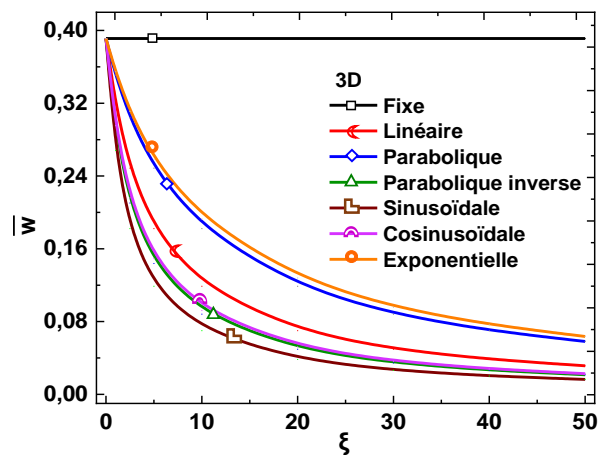


Figure V. 6 : Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées soumises à une charge répartie sinusoïdale ($k = 2$, $a/h = 10$) par rapport au paramètre ζ non uniforme de diverses fondations élastiques Winkler-Pasternak variables ($k_w=50$, $k_p = 4$).

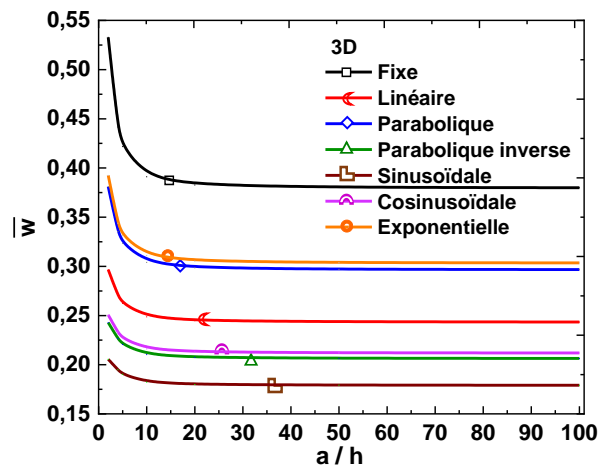


Figure V. 7 : Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport au rapport d'épaisseur (a/h) de plaques carrées ($k = 2$) soumises à des charges réparties sinusoïdales et reposant sur divers types de fondations élastiques variables Winkler-Pasternak ($k_w=50$, $k_p = 4$, $\zeta = 2.5$).

La flèche diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h , elle devient constante lorsque le rapport géométrique est égal ou supérieur à 10 (Figure V.7). Les valeurs les plus élevées sont obtenues pour les plaques reposant sur une fondation élastique est fixe.

Les figures V.8 et V.9 montrent l'effet des divers types de fondations Winkler-Pasternak variables sur la flèche centrale adimensionnelle pour différentes valeurs du rapport géométrique b/a et d'indice de loi de puissance k . La flèche centrale adimensionnelle augmente avec l'augmentation de b/h et k . Quel que soit le type de chargements et le modèle variable des fondations de Winkler-Pasternak, la flèche suit la même tendance.

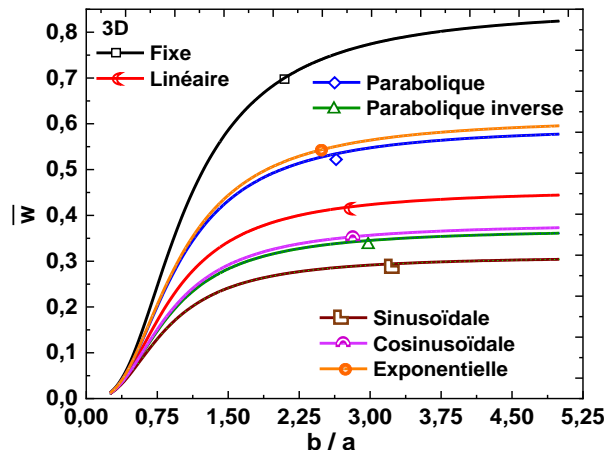


Figure V. 8 : Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport au rapport géométrique (b/a) des plaques carrées ($k = 2$, $a/h = 10$) soumises à des charges distribuées sinusoidales et reposant sur divers types de fondations élastiques variables Winkler-Pasternak ($k_W=50$, $k_P = 4$, $\zeta = 2.5$).

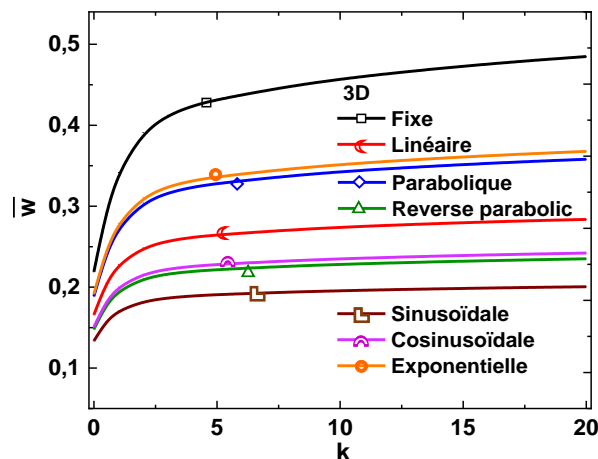


Figure V. 9 : Variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} par rapport à l'indice de la loi de puissance k de plaques carrées ($a/h = 10$) soumises à des charges distribuées sinusoidales et reposant sur divers types de fondations variables Winkler-Pasternak ($k_W=50$, $k_P = 4$, $\zeta = 2.5$).

V.3. Conclusions

Un modèle analytique est développé pour étudier le comportement en flexion des plaques FG simplement appuyées exposées à plusieurs types de charges mécaniques et reposant sur des fondations Winkler-Pasternak variables (fixes, linéaires, paraboliques, paraboliques inverses, sinusoïdale, inverse sinusoïdale, cosinusoïdale, exponentielle). Les deux couches Winkler et Pasternak sont considérées comme non uniformes et variant le long de la direction x . Les principales équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe du déplacement virtuel. Ces équations sont résolues numériquement par la technique de Navier. Les résultats sont présentés en avec et sans effets de la déformation normale transversale. Les valeurs obtenues de flèche adimensionnelle, de la contrainte normale et de la contrainte de cisaillement en fonction du rapport d'épaisseur a/h , de l'indice de loi de puissance k , du type de charge et des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak (K_W, K_P) sont présentées et comparées avec les résultats issus des modèles de la littérature. Les résultats obtenus ont montré que :

- D'une part, la flèche centrale adimensionnelle diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h , d'autre part elle augmente avec l'augmentation du rapport géométrique b/a et de l'indice de loi de puissance k . Cette tendance est la même quel que soit le type de charges et le modèle de fondations variable de Winkler-Pasternak.
- Les valeurs les plus basses des flèches adimensionnelles sont obtenues pour une fondation sinusoïdale quel que soit le type de charge.
- Pour une charge centrale concentrée, les contraintes normales sont indépendantes du type de fondations Winkler-Pasternak variables. ; par contre la contrainte de cisaillement transversale maximale dépend directement du type de fondations Winkler-Pasternak variables et du type de charges.
- Quel que soit le paramètre non uniforme ζ , les valeurs minimales et maximales de la flèche centrale adimensionnelle résultent pour les fondations Winkler-Pasternak dont les paramètres de rigidité varient selon des fonctions sinusoïdales et exponentielles, respectivement. Cette conclusion vaut pour tous les types de charges.
- Enfin, les résultats numériques actuels pourraient aider les ingénieurs et les chercheurs à choisir le type approprié de fondations variables Winkler-Pasternak pour obtenir les réponses optimales en flexion des structures FG. La formulation actuelle peut être étendue à d'autres types de structures et de matériaux avec diverses conditions aux limites [Akbaş ŞD, 2015], [Mahapatra TR, 2016], [Mehar K et al, 2017], [Mehar K et Panda SK, 2019], [Al-Basyouni KS et al, 2020], [Timesli A, 2020], [Civalek Ö et Avcar M, 2020], [Yaylaci M et Avcar M, 2020], [Bharath HS, 2020], [Selmi A, 2020].



Conclusion

Générale

Conclusion générale

Le comportement mécanique des structures (plaques, poutres, etc..) est principalement obtenu à partir d'hypothèses sur la forme du champ des déplacements dans l'épaisseur du modèle privilégié ou choisi. Ces modèles sont conçus comme une approximation d'une réalité tridimensionnelle, il puisse exister plusieurs, la différence entre elle est principalement constatée par la précision des approximations des déplacements sur lesquelles elles sont fondées.

Le principal but de ce travail de thèse, est de proposer un nouveau modèle simple et facile à exploiter, qui permet d'évaluer les solutions tridimensionnelles des déplacements et des contraintes au sein des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, qui sont des approximations de qualité de la solution exacte dans le cas de plaques épaisses en FGM.

Les solutions analytiques 3D pour les plaques en FGM sont très utiles car ils fournissent des résultats de référence pour évaluer la précision des divers théories de la plaque 2D et formulations éléments finis, mais leur méthodes de résolution impliquent des complexités mathématiques et sont très difficile et fastidieux à résoudre. Au-delà qui nous intéresse.

Sur la base de la nouvelle théorie des plaques, le modèle analytique actuel est développé pour étudier le comportement en flexion des plaques FG simplement appuyées exposées à plusieurs types de charges mécaniques et reposant sur des fondations Winkler-Pasternak variables (fixes, linéaires, paraboliques, paraboliques inverses, sinusoïdale, inverse sinusoïdale, cosinusoïdale, exponentielle). Les deux couches Winkler et Pasternak sont considérées comme non uniformes et varient le long de la direction x .

Le modèle développé c'est un modèle de déformation de cisaillement Quasi-3D qui tient en compte de la déformation normale (Effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur). A la différence des autres théories d'ordre supérieur quasi-3D, le modèle proposé est basé sur une cinématique dans laquelle le terme intégral avec une nouvelle fonction de gauchissement sinusoïdal est inclus permettant à une réduction du nombre d'inconnues et d'équations d'équilibre. Ainsi, le nombre des variables et les équations d'équilibre du modèle proposé est seulement cinq comme le model raffiné contre six ou plus de fonctions de déplacement inconnues utilisées dans les autres théories de déformation de cisaillement avec la prise en compte de (*l'effet stretching*).

Nous avons réussi à développer notre nouveau modèle, La notion de déplacement virtuel est appliquée pour obtenir les principales équations d'équilibre. Ces équations sont résolues numériquement par la technique de Navier. Ensuite, les résultats sont présentés en incluant et en excluant les effets de la déformation normale transversale. Les valeurs de la flèche adimensionnelle, de contrainte normale et de contrainte de cisaillement avec l'impact des rapports d'épaisseur et géométrique, de l'indice de loi de puissance, du type de

charge et des paramètres de fondation de Winkler-Pasternak sont comparées et validé avec des résultats connus dans la littérature. Sur la base de la présente recherche, les principales conclusions sont résumées comme suit :

- ✓ D'une part, la flèche centrale adimensionnelle diminue en augmentant le rapport d'épaisseur. En revanche, il augmente en augmentant le rapport géométrique et l'indice matériel. Cette conclusion est valable quel que soit le type de charges et le modèle de fondations variable de Winkler-Pasternak.
- ✓ Les valeurs les plus basses de déplacements adimensionnels résultent pour une fondation sinusoïdale quel que soit le type de charge.
- ✓ Pour une charge centrale concentrée, les contraintes normales ne dépendent pas du type de fondations Winkler-Pasternak variables.
- ✓ La contrainte de cisaillement transversale maximale dépend directement du type de fondations Winkler-Pasternak variables et du type de charges.
- ✓ Quel que soit le paramètre des fondations élastique non uniforme, les valeurs minimales et maximales de la flèche centrale adimensionnelle résultent pour les fondations Winkler-Pasternak dont les paramètres de rigidité varient selon des fonctions sinusoïdales et exponentielles, respectivement. Cette conclusion vaut pour tous les types de charges.

Enfin, les résultats numériques actuels pourraient aider les ingénieurs et les chercheurs à choisir le type approprié de fondations variables Winkler-Pasternak pour obtenir les réponses optimales en flexion des structures FG. La formulation actuelle peut être étendue à d'autres types de structures et de matériaux avec diverses conditions aux limites.

En perspective, il est prévu d'appliquer un nouveau modèle d'ordre élevé à cinq variables avec la prise en compte de (*l'effet stretching*) pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement soit mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux dû à la température.



Références

Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [Abdelbari et al, 2016] : Abdelbari, S., Fekrar, A., Heireche, H., Said, H., Tounsi, A., & Adda Bedia, E. A. (2016). An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Wind & structures*, 22(3), 329-348.
- [Abdelrahman WG, 2020]: Abdelrahman, Wael G. (2020), Effect of material transverse distribution profile on buckling of thick functionally graded material plates according to TSDT, *Structural Engineering and Mechanics*, 74(1). doi: 10.12989/sem.2020.74.1.083.
- [Addou FY et al, 2019]: Addou, F. Y., Meradjah, M., Bousahla, A. A., Benachour, A., Bourada, F., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2019). Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT. *Computers and Concrete*, 24(4), 347-367. <https://doi.org/10.12989/cac.2019.24.4.347>.
- [Addou FY, 2021]: ADDOU Farouk Yahia, Analyse statique et dynamique des structures FGM : formulation théorique et application dans le domaine de génie civil, Soutenue 2021, Thèse de doctorat LMD, Université djillali liabes de Sidi bel abbes.
- [Ait Atmane H et al, 2010] : Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A. (2010), Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- [Akavci SS, 2007] : Akavci, S. S. (2007). Buckling and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26(18), 1907-1919. <https://doi.org/10.1177/0731684407081766>.
- [Akavci SS, 2014]: Akavci, S. S. (2014). An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*, 108, 667-676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.019>.
- [Akavci SS, 2016]: Akavci, S. S. (2016). Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 96, 136-152. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.035>.
- [Akbaş ŞD, 2015]: Akbaş, Ş.D. (2015), Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments, *Steel Compos. Struct.*, 19(6), 1421-1447. <https://doi.org/10.12989/SCS.2015.19.6.1421>.
- [Al B, 1957]: Raft foundations. third edition. london: Concrete Publications Ltd: london: Concrete Publications Ltd; 1957.
- [Al-Basyouni KS et al, 2020]: Al-Basyouni, K.S., Ghandourah, E., Mostafa, H.M. and Algarni, A. (2020), Effect of the rotation on the thermal stress wave propagation in non-homogeneous viscoelastic body, *Geomech. Eng.*, 21(1), 1-9. <https://doi.org/10.12989/GAE.2020.21.1.001>.

- [Ali Rachedi M et al, 2020]: Rachedi, Mohamed Ali, Samir Benyoucef, Abdelhakim Bouhadra, Rabbab Bachir Bouiadjra, Mohamed Sekkal, and Abdelkader Benachour. "Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation." *Geomechanics and Engineering* 22, no. 1 (2020): 65-80.
- [Ali Rachedi M, 2020]: Ali Rachedi Mohamed, Approche mathématique pour l'étude des structures non homogènes reposant sur fondation élastique variable, Soutenue 2020, Thèse de doctorat d'état, Université djillali liabes de Sidi bel abbes.
- [Allahverdizadeh et al, 2008]: Allahverdizadeh A, Naei M, Nikkhah Bahrami M. Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *J Sound Vib* 2008; 310(4):966e84. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.011>.
- [Amini MH et al, 2009]: Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. (2009), Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct*; 18(8):085015.
- [Ardestani MM, 2014]: M.Memar Ardestani, B.Soltani and Sh.Shams, Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method, *Composite Structures*, Volume 112, June 2014, Pages 231-240, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.032>.
- [Atai AA et al, 2012]: Atai, A.A., Nikranjbar, A., Kasiri, R (2012), Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607– 614.
- [Attia A et al, 2018]: Attia A, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud S, Alwabli AS. A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations. *Structural engineering and mechanics*. 2018; 65(4):453.
- [Ayad R, 1993]: Ayad, R., *Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France. 1993.
- [Baferani AH et al, 2011]: Baferani, A. H., Saidi, A., & Ehteshami, H. (2011). Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*, 93(7), 1842-1853. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020>.
- [Banić D et al, 2017]: Banić, D., Baccocchi, M., Tornabene, F., & Ferreira, A. J. (2017). Influence of WinklerPasternak foundation on the vibrational behavior of plates and shells reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Applied Sciences*, 7(12), 1228. <https://doi.org/10.3390/app7121228>.
- [Bao G et Wang L, 1995]: Bao, G. et Wang, L. (1995) « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *International Journal of Solids and Structures*, 32(19). doi: 10.1016/0020-7683(94)00267-Z.
- [Barati MR et Shahverdi H, 2018]: Barati, M. R., & Shahverdi, H. (2018). Nonlinear vibration of nonlocal four-variable graded plates with porosities implementing homotopy perturbation and Hamiltonian methods. *Acta Mechanica*, 229(1), 343-362. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1952-y>.
- [Bassiouny S et al, 2020]: Bassiouny Saleh, Jinghua Jiang, Reham Fathi, Tareq Al-hababi, Qiong Xu, Lisha Wang, Dan Song, Aibin Ma, 30 Years of functionally graded materials:

- An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges, Composites Part B: Engineering, Volume 201, 2020, 108376, ISSN 1359-8368, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>.
- [Belabed Z et al, 2014]: Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates, *Compos.: Part B*, 60, 274-283.
- [Belarbi MO, 2015]: BELARBI, Mohamed Ouejdi. Éléments finis pour l'analyse des structures sandwichs. 2015. Thèse de doctorat. Université de Mohamed khider biskra.
- [Belarbi MT, 2000]: Belarbi, M.T., Développement de nouveaux éléments finis basés sur le modèle en déformation. Application linéaire et non linéaire, 2000, Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine.
- [Belarouci AG, 2021]: Belarouci Abdelghani, Etude comparative du comportement des plaques épaisses P-FGM et S-FGM, , Soutenue 2021, Thèse de doctorat d'état en Sciences, Université djillali liabes de Sidi bel abbes.
- [Belkhodja Y et al, 2020]: Belkhodja Y. Ouinas D. Zaoui F, Z. and Fekirini F. (2020), An exponential-trigonometric higherorder shear deformation theory(HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates, *Advanced Composites Letters*. 29, 1-19.
- [Bellifa H et al, 2016]: Hichem Bellifa, Kouider Halim Benrahou, L. Hadji, Mohammed Sid Ahmed Houari & Abdelouahed Tounsi, Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* volume 38, pages265–275 (2016). DOI: 10.1007/s40430-015-0354-0.
- [Benahmed A et al, 2017]: Benahmed, A., Houari, M. S. A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., & Tounsi, A. (2017). A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34. <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.1.009>.
- [Benbakhti AJ, 2021]: Benbakhti Abdeldjalil, Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials), Soutenue 2021, Thèse de doctorat LMD, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem.
- [Bennoun M, 2016]: Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [Bernoulli J, 1789]: Bernoulli, J., Jr. (1789) ,Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers, *Nova Acta Acad Petropolit*, vol. 5, pp. 197-219.
- [Berthelot, 2012]: BERTHELOT Jean-Marie, Matériaux composites, (5° Éd.),Comportement mécanique et analyse des structures, Date de parution : 10-2012. ISBN 978-2-7430-6450-1.
- [Bezine G,1988]: Bezine, G. (1988). A new boundary element method for bending of plates on elastic foundations. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6), 557-565. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90057-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90057-1).
- [Bharath HS, 2020]: Bharath, H.S., Waddar, S., Bekinal, S.I., Jeyaraj, P. and Doddamani, M. (2020), Effect of axial compression on dynamic response of concurrently printed sandwich, *Compos. Struct.*, 113223. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113223>.

- [Birman V et al, 2002]: Birman, V. and C.W. Bert,(2002), On the choice of shear correction factor in sandwich structures, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 4 (1) 83-95.
- [Bishop A et al, 1993]: Bishop A., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, (1993) , A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Boch P et al, 1986]: Boch P., Chartier T., Huttepain M; (1986), Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192, 1986.
- [Bohidar SK et al, 2014]: Bohidar SK, Sharma R, Mishra PR. Functionally graded materials: A critical review. *Int J Res*; 1:289–301.2014.
- [Bouazza M et al, 2010]: M. Bouazza, E.A. Adda-Bedia, Application of First Order Shear Deformation Theory for Buckling Analysis of Functionally Graded Plates, *Journal of Materials, Processes and Environment* December edition. Vol.1. No2. (2013) ISSN : 2335-1020.
- [Boukhelif Z et al, 2019]: Boukhelif, Z. et al. (2019) « A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation », *Steel and Composite Structures*, 31(5). doi:10.12989/scs.2019.31.5.503.
- [Bounouara F et al, 2016]: Bounouara, F., Benrahou, K. H., Belkorissat, I., & Tounsi, A. (2016). A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*, 20(2), 227-249. <https://doi.org/10.12989/SCS.2016.20.2.227>.
- [Boussoula A et al, 2020]: Boussoula, A., Boucham, B., Bourada, M., Bourada, F., Tounsi, A., Bousahla, A. A., & Tounsi, A. (2020). A simple nth-order shear deformation theory for thermomechanical bending analysis of different configurations of FG sandwich plates. *Smart Structures and Systems, An International Journal*, 25(2), 197-218.
- [Brown et al, 1977]: Brown CB, Tilton JR, Laurent JM. Beam-plate system on Winkler foundation. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1977; 103(4):589.
- [Bryan G N, 1981] : Bryan, G.N. (1981) ,On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, *Proc London Math Soc*, 22, 54–67.
- [Bubnov I G, 1914] : Bubnov, I.G.(1914) ,*Theory of Structures of Ships*, vol. 2, St . Petersburg.
- [Carrera E et al, 2011a]: Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. (2011a), Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Comp. Part B: Eng* 42, 123-133.
- [Carrera E et al, 2011b]: Carrera E, Brischetto S, Nali P. (2011b), *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, Wiley, New York, USA.
- [Carrera E, 2001]: Carrera E, (2001), Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells, *Appl. Mech. Revs.* 54, 301-329.
- [Carrera E, 2003]: Carrera E, (2003), Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking, *Arch. Comp. Meth. Eng.* 10, 215-296.
- [Carrera E, 2005]: Carrera E, A. (2005), Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Compos. Struct.* 69, 271-293.

- [Carrera E, 2008]: Carrera, E. and S. Brischetto,(2008), A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 62 (1) 010803-010803.
- [Cauchy A.L, 1828] : Cauchy, A.L. (1828), Sur l'équilibre le mouvement d'une plaque solide, *Exercices Math*, vol. 3, p. 328.
- [Chakraverty S et Pradhan KK, 2014]: Chakraverty, S., & Pradhan, K. K. (2014). Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. *International Journal of Applied Mechanics*, 06(04), 1450043. <https://doi.org/10.1142/S1758825114500434>.
- [Chen Y et al, 2005] : Zhou, Y. G., Chen, Y. M., & Ding, H. J. (2005). Analytical solutions to piezoelectric bimorphs based on improved FSDT beam model. *Smart Structures and Systems*, 1(3), 309-324.
- [Chigasaki M et al, 1990]: Chigasaki, M., Kojima, Y., Nakashima, S. & Fukaya, Y., (1990), Partially Stabilized ZrO₂ and Cu FGM Prepared by Dynamic Ion Mixing Process, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*,p.269-72.
- [Chladni EF, 1802]: Chladni, E.F. (1802), *Die Akustik*, Leipzig.
- [Chung YL et Chi SH, 2001]: Chung, Y.-L. et Chi, S. H. (2001) « The residual stress of functionally graded materials », *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 13, p. 1-9
- [Civalek Ö et Avcar M, 2020]: Civalek, Ö. and Avcar, M. (2020), Free vibration and buckling analyses of CNT reinforced laminated non-rectangular plates by discrete singular convolution method, *Eng. Comput.*, 1-33. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01168-8>.
- [Clebsch, 1883] : Clebsch, A. (1883), *Theorie de l'Elasticite des Corps Solids*, Avec des Notes Entendues de Saint Venant, Dunod, Paris, pp. 687–706.
- [Cox H L, 1933]: Cox, H.L. (1933), *Buckling of Thin Plates in Compression*, Rep. and Memor., No. 1553,1554.
- [Craveiro F et al, 2013]: Craveiro, F., Bartolo, H. and Bartolo, P. (2013) *Functionally graded structures through building manufacturing*. *Advanced Materials Research*. Vol. 683, 775-778
- [Daikh AA et al, 2020]: Ahmed Amine Daikh, Mohammed Sid Ahmed Houari, Mohamed A. Eltaher , A Novel Nonlocal Strain Gradient Quasi-3D Bending Analysis of Sigmoid Functionally Graded Sandwich Nanoplates, *Composite Structures*,(2020) 262,113347, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113347>.
- [Daikh AA, 2019]: Ahmed Amine Daikh, Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation, *Materials Research Express*, 6 (2019) 065702, <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab097b>.
- [Delale F et Erdogan F, 1983]: Delale, F. et Erdogan, F. (1983) « The crack problem for a nonhomogeneous plane », *Journal of Applied Mechanics*, *Transactions ASME*, 50(3). doi: 10.1115/1.3167098.

- [Della Croce L et Venini P, 2004]: DELLA CROCE, L., & VENINI, P. (2004). Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(9-11), 705-725.
- [Demasi L, 2009a]: Demasi L. (2009a), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. *Compos. Struct.* 87, 1-11.
- [Demasi L, 2009b]: Demasi L. (2009b), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos. Struct.* 87, 183-194.
- [Demasi L, 2009c]: Demasi L. (2009c), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories. *Compos. Struct.* 87, 195-205.
- [Demasi L, 2009d]: Demasi L. (2009d), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results. *Compos. Struct.* 88, 1-16.
- [Demasi L, 2009e]: Demasi L. (2009e), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part II: Layerwise theories. *Compos. Struct.* 87, 12-22.
- [Den Hartog J P, 1958]: Den Hartog, J.P. (1958), *Mechanical Vibrations*, 4th edn, McGraw-Hill, New York.
- [Du C et al 2013]: Du, C., & Li, Y. (2013). Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*, 102, 164–174. doi:10.1016/j.compstruct.2013.02.028
- [Dutta SC, 2002]: Dutta SC, Roy R. A. (2002), critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system. *Computers & structures*. 2002. 80(20-21). 1579.
- [El-Galy IM et al, 2019]: El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 1(11), 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>.
- [EL-Wazery MS et al, 2015]: M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508, 2015.
- [El-Zafrany A, 1995]: El-Zafrany, A., Fadhil, S., & Al-Hosani, K. (1995). A new fundamental solution for boundary element analysis of thin plates on Winkler foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(6), 887-903. <https://doi.org/10.1002/nme.1620380602>.
- [Euler L, 1766] : Euler, L. (1766), *De motu vibratorio tympanorum*, *Novi Commentari Acad Petropolit*, vol. 10, pp. 243–260.
- [Fallah A et al, 2012] : Zamani, M., Fallah, A., & Aghdam, M. M. (2012). Free vibration analysis of moderately thick trapezoidal symmetrically laminated plates with various combinations of boundary conditions. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 36, 204-212.
- [Filonenko-Borodich M, 1940]: Filonenko-Borodich M. Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, Moscow. 1940; 46:3.
- [Föppl A, 1944, 1951]: Föppl A.: *Vorlesungen über technische Mechanik*, Vols 1 and 2, 14th and 15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich, 1944, 1951

- [Germain S, 1826] : Germain, S. (1826), Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation général de ces surfaces, Paris.
- [Ghasemi AR et Meskini M, 2019] : Ghasemi, A. R., & Meskini, M. (2019). Free vibration analysis of porous laminated rotating circular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Control*, 25(18), 2494-2508. <https://doi.org/10.1177/1077546319858227>.
- [Golmakani ME et Alamatian J, 2013] : Golmakani, M. E., & Alamatian, J. (2013). Large deflection analysis of shear deformable radially functionally graded sector plates on two-parameter elastic foundations. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42, 251-265.
- [Guerroudj HZ et al, 2018]: Guerroudj, H. Z., Yeghnem, R., Kaci, A., Zaoui, F. Z., Benyoucef, S., & Tounsi, A. (2018). Eigenfrequencies of advanced composite plates using an efficient hybrid quasi-3D shear deformation theory. *Smart Structures and Systems*, 22(1), 121-132. <https://doi.org/10.12989/SSS.2018.22.1.121>.
- [Gupta A et al, 2015]: Ankit Gupta, Mohammad Talha, *Prog. Aerosp. Sci.* 79 (2015) 1-14.
- [Guptha K M, 2015]: K M. Guptha, *Engineering Materials, Research, Applications and Advances*, CRC Press, New York, 2015.
- [Hadji Lazreg et al, 2019] : Safa, A., Hadji, L., Bourada, M., & Zouatnia, N. (2019). Thermal vibration analysis of FGM beams using an efficient shear deformation beam theory. *Earthq. Struct*, 17(3), 329-336.
- [Hamidi A , 2015]: Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015) ,A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [Hartmann F, 1933]: Hartmann, F., *Knickung, Kippung, Beulung*, Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- [Haughwout LB, 1971]: Haughwout LB. Centrifugal casting processes. In: Beadle J0, editor. *Cast. (Production eng. Ser. The Macmillan Press Limited; 1971. p. 109–16.* <https://doi.org/10.1007/978-1-349-01179-7>.
- [Hebali H et al, 2014]: Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), ,A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *J. Eng. Mech., ASCE*, 140(2), 374- 383.
- [Heidari M et Arvin H, 2019] : Heidari, M., & Arvin, H. (2019). Nonlinear free vibration analysis of functionally graded rotating composite Timoshenko beams reinforced by carbon nanotubes. *Journal of Vibration and Control*, 25(14), 2063-2078. <https://doi.org/10.1177/1077546319847836>.
- [Hencky H, 1921]: Hencky H.: *Der Spanngszustand in rechteckigen Platten (Diss.)*, *Z. Angew Math und Mech*, Vol. 1, 1921
- [Hetenyi M, 1946]: Hetenyi M. *Beams on elastic foundations. Scientific series. Ann Arbor, University of Michigan Press. 1946.*
- [Hetenyi M, 1950]: Hetenyi M. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *Journal of Applied Physics*. 1950;21(1):55.
- [Hillman C, 1996]: Hillman, C., Suo, Z. & Lange, F.F.(1996), *Cracking of Laminates Subjected to Biaxial Tensile Stresses*, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1996, Vol. 79, N°. 8, p. 2127-33.

- [Himeur N et al, 2020]: Nabil Himeur, Belgacem Mamen, Soumia Benguediab, Abdelhakim Bouhadra, Abderrahmane Menasria, Benattou Bouchouicha, Fouad Bourada, Mohamed Benguediab and Abdelouahed Tounsi,(2022), Coupled effect of variable Winkler–Pasternak foundations on bending behavior of FG plates exposed to several types of loading, *Steel Compos. Struct.*, Vol. 44, No. 3 (2022) 339-355, <https://doi.org/10.12989/scs.2022.44.3.339>.
- [Hosseini-Hashemi S et al, 2010]: Hosseini-Hashemi, S., Taher, H. R. D., Akhavan, H., & Omidi, M. (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(5), 1276-1291.
- [Huang ZY et al, 2008]: Huang Z.Y, Lu C.F, Chen W.Q , (2008), Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations, *Compos. Struct.* 85 (95), 104.
- [Huber MT, 1929]: Huber M. T.: *Probleme der Statik technisch wichtiger Orthotroper Platten*, Warsawa, 1929
- [Jabbari M et al, 2016]: M. Jabbari, R. Bulatova, A.I.Y. Tok, C.R.H. Bahl, E. Mitsoulis, J.H. Hattel, Ceramic tape casting: A review of current methods and trends with emphasis on rheological behaviour and flow analysis, *Materials Science and Engineering: B*, Volume 212, 2016, Pages 39-61, <https://doi.org/10.1016/j.mseb.2016.07.011>.
- [Javaheri R et Eslami M R, 2002]: Javaheri, R. and Eslami, M.R. (2002). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J.* 40(1), 162–169.
- [Javaheri R et Eslami M R, 2002a]: Javaheri, R. and Eslami, M.R. (a). (2002). Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *Z. Angew. Math. Mech.*, 82(4), 277–283.
- [Jena SK et al, 2019]: Jena SK, Chakraverty S, Tornabene F. Dynamical behavior of nanobeam embedded in constant, linear, parabolic, and sinusoidal types of Winkler elastic foundation using first-order nonlocal strain gradient model. *Materials Research Express* 2019;6(8):0850f2. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab2779>.
- [Jones RM, 1999]: Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials* (2e éd.). Taylor & Francis
- [Kaci A et al, 2014]: Kaci, Abdelhakim, Khalil Belakhdar, Abdelouahed Tounsi, and El Abbes Adda Bedia. (2014). « Nonlinear cylindrical bending analysis of E-FGM plates with variable thickness », *Steel and Composite Structures*, 16(4). doi: 10.12989/scs.2014.16.4.339.
- [Kaddari M et al, 2020]: Kaddari, Miloud, Abdelhakim Kaci, Abdelmoumen Anis Bousahla, Abdelouahed Tounsi, Fouad Bourada, Abdeldjebbar Tounsi, EA Adda Bedia et Mohammed A. Al-Osta. (2020) « A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: Bending and free vibration analysis », *Computers and Concrete*, 25(1). <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.25.1.037>
- [Karakoti A et al, 2020]: Karakoti, A., Pandey, S. et Kar, V. R. (2020) « Free vibration response of P-FGM and S-FGM sandwich shell panels: A comparison », in *Materials Today: Proceedings*. doi:10.1016/j.matpr.2020.05.131.

- [Karama M et al, 2003]: Karama M., Afaq K.S., Mistou S. (2003), Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [Karman, Th et al. 1952]: Karman, Th., Sechler, E.E. and Nadai, L.H. (1952), The strength of thin plates in compression, *Trans ASME*, 54, 53–57.
- [Kawai C et al, 1990]: Kawai C., Wakamatsu S., Sakagami S., Igarashi T., (1990). Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced composite by CVD, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Graded Materials*, Sendai, Japan, 77–82.
- [Kerr AD, 1965] Kerr AD. A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*. 1965;1(2):135.
- [Kiani Y, 2019]: Kiani, Y. (2019), NURBS-based thermal buckling analysis of graphene platelet reinforced composite laminated skew plates, *J. Thermal Stresses*, 43(1), 1–19.
- [Kirchhoff G R, 1850] : Kirchhoff, G.R. (1850), *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe*, *J. Für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.
- [Kolahchi R et al, 2016]: Kolahchi, R., Safaria, M. and Esmailpour, M. (2016), Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium, *Compos. Struct.*, 150, 255-265.
- [Koteswara DR et al, 2013]: Koteswara D. R., Tarapada R., Debabrata G., Prasad k. (2013), namdar, Finite Element Analysis Of Functionally Graded Rotor Shaft Using Timoshenko Beam Theory, *International Journal Of Mechanical And Production Engineering*, Issn: 2320-2092,.
- [Kramrisch & Rogers, 1961] Kramrisch F, Rogers P. Simplified design of combined footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1961;87(5):19.
- [Krylov A N, 1898] : Krylov, A.N. (1898), *On stresses experienced by a ship in a sea way*, *Trans Inst Naval Architects*, vol. 40, London, pp. 197–209.
- [L.S Ma et T.J Wang, 2004]: L.S Ma, T.J Wang, Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory, *International Journal of Solids and Structures*. 41 (2004) 85–101.
- [Lagrange JL, 1828] : Lagrange, J.L., *Ann Chim*, vol. 39, pp. 149–207 (1828).
- [Levy S, 1942]: Levy, S., *Bending of Rectangular Plates with Large Deflections*, NACA, Rep. No.737, 1942.
- [Liu FL, 2000]: Liu, F. L. (2000). Rectangular thick plates on winkler foundation : Differential quadrature element solution. *International Journal of Solids and Structures*, 37(12), 1743-1763. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00306-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00306-0).
- [Loh GH et al, 2018]: Loh GH, Pei E, Harrison D, Monzon MD, An Overview of Functionally Graded Additive Manufacturing, *Additive Manufacturing* (2018), <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.06.023>
- [Lu L et al, 2011]: L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin and G. Villain, Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, *NDT & E International*, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177, March 2011.

- [Lucchini E, 1995]: Lucchini, E. & Sbaizero, O. (1995)., Alumina/Zirconia Multilayer Composites Obtained by Centrifugal Consolidation, *J. European Ceram. Soc.*, Vol. 15, p. 975-81.
- [Ma L S et Wang Taihong, 2003]: Ma L S, Wang Taihong, Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings, June 2003, *International Journal of Solids and Structures* 40(13-14):3311-3330, DOI:10.1016/S0020-7683(03)00118-5.
- [Mahapatra TR, 2016]: Mahapatra, T.R., Kar, V.R. and Panda, S.K. (2016), Large amplitude vibration analysis of laminated composite spherical panels under hygrothermal environment, *J. Struct. Stability Dynam.*, **16**(3), 1450105. <https://doi.org/10.1142/s0219455414501053>.
- [Mahmoudi AK et al, 2018]: Mahmoudi, Abdelkader, Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., & Bedia, E. A. A. (2018). On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation. *Earthquakes and Structures*, 14(2), 117-128. <https://doi.org/10.12989/EAS.2018.14.2.117>.
- [Makwana AB et al, 2014]: Makwana AB, Panchal KC. A review of stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *Int J Eng Res Technol* ; 3:2020–5, 2014.
- [Malekzadeh P, 2009]: Malekzadeh P. (2009), Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*; 89(3):367–73.
- [Mantari JL et al, 2012] : Mantari J.L., C. Guedes Soares. (2012), Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.* 94, 2561- 2575.
- [Mantari JL et al, 2012a]: Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- [Mantari JL et al, 2014] : Mantari JL, Granados EV, Hinostroza MA, Guedes Soares C. (2014), Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455–71.
- [Mantari JL et Granados EV, 2015a]: Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015a). A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates. *Thin-Walled Structures*, 90, 150-158. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.015>.
- [Marguerre K, 1937]: Marguerre, K. (1937), Die mittragende briete des gedru`ckten plattenstreifens, *Luftfahrtforschung*, 14, No. 3.
- [Marin L, 2005]: L. Marin, Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials, *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, 2005.
- [Matsuo S, 2005]: S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata, Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root, *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274, 2001.
- [Meftah A et al, 2017] : Meftah, A., Bakora, A., Zaoui, F. Z., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2017). A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*, 23(3), 317-330. <https://doi.org/10.12989/SCS.2017.23.3.317>.

- [Mehar K et al, 2017]: Mehar, K., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R. (2017), Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure, *European J. Mech. A/Solids*, **65**, 384–396. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.05.005>.
- [Mehar K et Panda SK, 2019]: Mehar, K. and Panda, S.K. (2019), Multiscale modeling approach for thermal buckling analysis of nanocomposite curved structure, *Adv. Nano Res.*, **7**(3), 181–190. <https://doi.org/10.12989/ANR.2019.7.3.181>.
- [Meksi A et al, 2015]: Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015). A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics*, **53**(6), 1215-1240. <https://doi.org/10.12989/SEM.2015.53.6.1215>.
- [Mindlin R, 1951]: Mindlin, R.,(1951), Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. of Appl. Mech.*, **18** 31-38.
- [Moya JS et al, 1992]: Moya J.S., A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO (1992), Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; **14** (5-6): 333-35, 1992.
- [Muller P et al, 2012]: Muller, P., Hascoet, J.Y. and Mognol, P. (2012) Functionally graded material (FGM) parts: from design to the manufacturing simulation. Proceedings of the ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis ESDA2012 July 2-4, 2012, Nantes, France. ESDA2012-82586.
- [Nadai A, 1915]: Nadai A.: Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, *Forsch a. d. Gebiete d Ingenieurwesens*, Berlin, Vols 170 and 171, 1915
- [Navier, 1823]: Navier, C.L.M.H. (1823), *Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris*.
- [Nebab M et al, 2019]: Mokhtar Nebab, Hassen Ait Atmane, Riadh Bennai, Abdelouahed Tounsi, Effect of variable elastic foundations on static behavior of functionally graded plates using sinusoidal shear deformation, *Arabian Journal of Geosciences* (2019) **12**:809, <https://doi.org/10.1007/s12517-019-4871-5>.
- [Nebab M, 2020]: Nebab Mokhtar, Etude de l'effet de l'assise elastique sur le comportement statique et dynamique des structures non-homogenes, , Soutenue 2020, Thèse de doctorat d'état, Université Hassiba Benbouali de Chlef.
- [Neves AMA et al, 2012]: Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera. E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., and Soares, C.M.M. (2012), A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Compos Part B*, **43**(2), 711–725.
- [Nguyen DD et al, 2016]: Nguyen, D.D., Cong, P.H. and Quang, V.D. (2016), hermal stability of eccentrically stiffened FGM plate on elastic foundation based on Reddy's third-order shear deformation plate theory, *J. Therm. Stresses*, **39**(7), 772-794.
- [Nguyen DD et al, 2018]: Nguyen, D.D., Nguyen, D.K. and Hoang, T.T. (2018) ,Nonlinear thermo-mechanical response of eccentrically stiffened Sigmoid FGM circular cylindrical shells subjected to compressive and uniform radial loads using the Reddy's third-order shear deformation shell theory, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **25**(13), 1156-1167.

- [Nguyen-Thoi T et al, 2014] : Phung-Van, P., Nguyen-Thoi, T., Luong-Van, H., & Lieu-Xuan, Q. (2014). Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using a cell-based smoothed three-node plate element (CS-MIN3) based on the C0-HSDT. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270, 15-36.
- [Nguyen-Van H et al, 2008] : Nguyen-Van, H., Mai-Duy, N., & Tran-Cong, T. (2008). Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element. *Journal of Sound and Vibration*, 313(1-2), 205-223.
- [Panov D Yu, 1941]: Panov, D.Yu. (1941), On large deflections of circular plates, *Prikl Matem Mech*, vol. 5, No. 2, pp. 45–56, (in Russian).
- [Park J, 2016]: Park J, Park K, Kim J, Jeong Y, Kawasaki A, Kwon H. Fabrication of a functionally graded copper-zinc sulfide phosphor. *Sci Rep* 2016;6:1–6. <https://doi.org/10.1038/srep23064>.
- [Park M et Choi DH, 2018]: Park, M. and Choi, D.H. (2018), A simplified first-order shear deformation theory for bending, buckling and free vibration analyses of isotropic plates on elastic foundations, *KSCE J. Civ. Eng.*, 22(4), 1235–1249. <https://doi.org/10.1007/s12205-017-1517-6>.
- [Pasternak P, 1954]: Pasternak P. On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture*. 1954.
- [Poisson SD, 1829] : Poisson, S.D. (1829), Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastique, *Mem Acad Sci*, vol. 8, p. 357.
- [Popov E, 1950]: Popov E, Successive approximations for beams on an elastic foundation. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers: ASCE*; 1950. p. 1-13.
- [Pradhan SC et Murmu T, 2009]: Pradhan, S.C. and Murmu, T. (2009), Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method, *J. Sound Vib.*, 321, 342-362.
- [Pradyumna S et Nanda N, 2013] : Pradyumna, S., & Nanda, N. (2013). Geometrically nonlinear transient response of functionally graded shell panels with initial geometric imperfection. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(3), 217-226.
- [Praveen GN et Reddy JN, 1998]: Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998) Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476.
- [Rad AB et al, 2013]: Rad, A.B. and Shariyat, M. (2013), A three-dimensional elasticity solution for two-directional FGM annular plates with non-uniform elastic foundations subjected to normal and shear tractions, *Acta. Mech. Solida. Sin.*, 26(6), 671–690. [https://doi:10.1016/s0894-9166\(14\)60010-0](https://doi:10.1016/s0894-9166(14)60010-0).
- [Rahmani MC et al, 2020]: Rahmani, M. C., Kaci, A., Bousahla, A. A., Bourada, F., Tounsi, A., Bedia, E. A. A., Mahmoud, S. R., Benrahou, K. H., & Tounsi, A. (2020). Influence of boundary conditions on the bending and free vibration behavior of FGM sandwich plates using a four-unknown refined integral plate theory. *Computers and Concrete*, 25(3), 225-244. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.3.225>.

- [Reddy JN et Chin CD, 1998] : Reddy, J. N., & Chin, C. D. (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of thermal Stresses*, 21(6), 593-626.
- [Reddy JN, 1979] : Reddy, J. N. (1979). Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 66(4), 565-576.
- [Reddy JN, 1984]: Reddy JN. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley: New York, 1984.
- [Reddy JN, 1997] : Reddy JN. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press: Boca Raton, FL, 1997.
- [Reddy JN, 2000]: Reddy, J. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for numerical methods in engineering*, 47(1-3), 663-684.
- [Reddy JN, 2004]: Reddy JN (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*. CRC Press, New York.
- [Refrafi, S et al, 2020]: Refrafi, S., Bousahla, A.A., Bouhadra, A., Menasria, A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H. and Tounsi, A. (2020), Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations, *Comput. Concrete*, 25(4), 311-325.
- [Reissner E, 1945]: Reissner, E. (1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J Appl Mech Trans ASME*, vol. 12, pp. A69–A77.
- [Reissner E, 1961]: Reissner E & Y. Stavsky. (1961), Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408.
- [Reissner E, 1972]: Reissner, E.,(1972), A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates, *AIAA Journal*, 10 (5) 716-718.
- [Reissner E, 1975]: Reissner E. (1975), on transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- [Reissner E, 1985]: Reissner, E.,(1985), Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 38 (11) 1453-1464.
- [Ritz W, 1909]: Ritz, W. (1909), Theorie der transversalschwingungen, einer quadratischen platte mit frein ra`ndern, *Ann Physic*, Bd., 28, pp. 737–786.
- [Sarithchandra DT et al, 2018]: D.T. Sarathchandra, S. Kanmani Subbu, N. Venkaiah, Functionally graded materials and processing techniques: An art of review, *Materials Today: Proceedings*, Volume 5, Issue 10, Part 1, 2018, Pages 21328-21334,ISSN 2214-7853, <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2018.06.536>.
- [Sarkar P et al, 1996]: Sarkar, P., Nicholson, P. S. (1996), Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 79, N°. 8, p. 1987-2002.
- [Sbaizero O, 1996]: Sbaizero, O. & Lucchini, E. Influence of Residual Stresses on the Mecanical Properties of a Layered Ceramic Composite, *J. European Ceram. Soc.*, 1996, Vol. 16, p. 813-18.
- [Selmi A, 2020]: Selmi, A. (2020), Exact solution for nonlinear vibration of clamped-clamped functionally graded buckled beam, *Smart Struct. Syst.*, 26(3), 361–371. <https://doi.org/10.12989/SSS.2020.26.3.361>.

- [Shahsavari D et al, 2018]: Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., & Karami, B. (2018). A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerospace Science and Technology*, 72, 134-149. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>.
- [Sheikholeslami SA et Saidi AR, 2013]: Sheikholeslami, S. A., & Saidi, A. R. (2013). Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory. *Composite Structures*, 106, 350-361. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.016>
- [Shen HS, 1999]: Shen, H. S. (1999). Nonlinear bending of Reissner-Mindlin plates with free edges under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(7), 845-864. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00060-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00060-5).
- [Shen HS, 2000]: Shen, H. S. (2000). Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner-Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *Engineering Structures*, 22(7), 847-856. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00044-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00044-9).
- [Shimpi RP, 2002]: Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137- 146.
- [Sladek J et al, 2002]: Sladek, J., Sladek, V., & Mang, H. A. (2002). Meshless local boundary integral equation method for simply supported and clamped plates resting on elastic foundation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(51-52), 5943-5959. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00505-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00505-4).
- [Sobhy M, 2015]: Sobhy M. Thermoelastic Response of FGM Plates with Temperature-Dependent Properties Resting on Variable Elastic Foundations. *International Journal of Applied Mechanics*. 2015; 07(06).
- [Steffens HD et al, 1990]: Steffens H.D., M. Dvorak., M. Wewel,(1990), Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [Szilard R, 2004]: Szilard R. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. New Jersey: John Wiley & Sons; 2004
- [Taati E et Fallah F, 2019]: Taati, E., & Fallah, F. (2019). Exact solution for frequency response of sandwich microbeams with functionally graded cores. *Journal of Vibration and Control*, 25(19-20), 2641-2655. <https://doi.org/10.1177/1077546319864645>.
- [Taibi FZ et al, 2015]: Taibi, F. Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2015). A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17(2), 99-129.
- [Takahashi M et al, 1990]: Takahashi M., Y. Itoh., H. Kashiwaya(1990), Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.

- [Talha M et al, 2010]: Talha M, B.N. Singh. (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.* 34 3991-4011.
- [Taylor D, 1964]: Taylor, D. (1964) ,*Fundamentals of soil mechanics*. New York: John Wiley and Sons. 1964.
- [Tebboune W et al, 2015] : Tebboune, W., Benrahou, K. H., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015). Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory. *Steel Compos. Struct*, 18(2), 443-465.
- [Terzaghi K, 1955] Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique*. 1955; 5(4):297.
- [Thai CH et al, 2013]: Tran, L. V., Thai, C. H., & Nguyen-Xuan, H. (2013). An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73, 65-76.
- [Thai HT et Choi DH, 2012] : Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2012). A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 43(5), 2335-2347. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.11.062>.
- [Thai HT et Choi DH, 2013] : Thai, H.T. and Choi, D.H. (2013), A simple first order shears deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates, *Compos. Struct.*, 101, 332-340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.019>.
- [Thai HT et Choi DH, 2014a] : Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2014a). Zeroth-order shear deformation theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 35-43.
- [Thai HT et Kim SE, 2013]: Thai, H. T., & Kim, S. E. (2013). A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Composite Structures*, 99, 172–180. doi:10.1016/j.compstruct.2012.11.030.
- [Thai HT, 2014]: Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK.(2014) ,A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mech*; 225(3):951–64.
- [Thompson W, 1973]: Thompson, W.T. *Theory of Vibrations and Applications*, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [Timesli A, 2020]: Timesli, A. (2020), Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation, *Comput. Concrete.*, 26(1), 53–62. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.1.053>.
- [Timoshenko S P et Gere J M, 1961]: Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), *Theory of Elastic Stability*, 2nd edn, McGraw-Hill, New York.
- [Timoshenko S P et Woinowsky-Krieger S, 1959]: Timoshenko S P end Woinowsky-Krieger S, (1959), *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- [Timoshenko S P et Young D H, 1963]: Timoshenko, S.P. and Young, D.H. (1963), *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley and Sons., New York.
- [Timoshenko S P, 1913]: Timoshenko, S.P. (1913), *Sur la stabilite des systemes elastiques*, *Ann des Points et Chaussees*, vol. 13, pp. 496–566; vol. 16, pp. 73–132.
- [Timoshenko S P, 1915]: Timoshenko, S.P. (1915), *On large deflections of circular plates*, *Mem Inst Ways Commun*, 89.

- [Timoshenko S P, 1953]: Timoshenko, S.P. (1953), *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York.
- [Timoshenko S P]: Timoshenko ,beam theory, *Adv. Nano Res.*, 8(4), 293-305.
- [Touratier M, 1991]: Touratier M. (1991), *An efficient standard plate theory*, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.
- [Trinh MC et Kim SE, 2018]: Trinh, M.C. and Kim, S.E. (2018), *Nonlinear stability of moderately thick functionally graded sandwich shells with double curvature in thermal environment*, *Aerosp. Sci. Technol.*, 84, 672-685.
- [Truesdell C, 1968]: Truesdell, C. (1968), *Essays in the History of Mechanic*, Springer-Verlag, Berlin.
- [Udupa G et al, 2014]: Udupa G, Shrikantha SR, Gangadharan K V. *Functionally graded composite materials: An overview*. *Procedia Mater Sci* ; 5:1291–9,2014.
- [Uemura S et al, 1990]: Uemura S., Sohda Y., Kude Y., (1990). *SiC/C Functionally Gradient Material Prepared by Chemical Vapor Deposition*, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai, Japan, 237–242.
- [Vesic AB, 1961] Vesic AB. *Bending of beams resting on isotropic elastic solid*. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1961;87(2):35.
- [Voight W, 1893]: Voight, W. (1893), *Bemerkungen zu dem problem der transversalem schwingungen rechteckiger platten*, *Nachr. Ges (Go'ttingen)*, No. 6, pp. 225–230.
- [Volmir AS, 1956]: Volmir, A.S. (1956), *Flexible Plates and Shells*, Gos. Izd-vo Techn.-Teoret. Lit-ry, Moscow, (in Russian).
- [Von Karman T, 1910]: Von Karman T.: *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*, *Encycl der Math Wiss*, Vol. 4, 1910, pp. 348–351
- [Von Karman T, 1932]: Von Karman T., E. F. Sechler, Donnel, L. H.: *The strength of thin plates in compression*, *Trans ASME*, Vol. 54, 1932, pp. 53–57
- [Wang C M, 2000]: Wang C M, Reddy J N and Lee K H (2000), *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions* (Amsterdam: Elsevier)
- [Wang CM et al, 2001] Wang CM, Xiang Y, Wang Q. *Axisymmetric buckling of Reddy circular plates on Pasternak foundation*. *Journal of engineering mechanics*. 2001; 127(3):254.
- [Woo J et al, 2006] : J. Woo, S.A. Meguid, L. S. Ong, *Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates*, January 2006, *Journal of Sound and Vibration* 289(3):595-611, DOI:10.1016/j.jsv.2005.02.031
- [Wu TL et al, 2007] : Wu, T. L., Shukla, K. K., & Huang, J. H. (2007). *Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates*. *Composite structures*, 81(1), 1-10.
- [Yang J et Shen HS, 2001]: Yang J, Shen HS. *Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates*. *Composite Structures* 2001;54(4): 497–508.
- [Yang J et Shen HS, 2003]: Yang J, Shen HS. *Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads*. *International Journal of NonLinear Mechanics* 2003;38(4):467–82
- [Yaylaci M et Avcar M, 2020]: Yaylaci, Murat, and Mehmet Avcar. "Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes." *Computers and Concrete, An International Journal* 26, no. 2 (2020): 107-114.

- [Yuki M et al, 1990]: Yuki. M., Murayama, T., Irisawa, T., Kawasaki, A. &Watanabe. R., (1990), In Proc., 1st Int. Sump. On FGM », Sendai, ed. M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai & I. Shiota. FGM Forum. Society for Non-traditional Technology, Tokyo, , p. 203.
- [Zaoui FZ et al, 2019]: Zaoui, F. Z., Ouinas, D. and Tounsi, A. (2019) « New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations », *Composites Part B: Engineering*, 159. doi:10.1016/j.compositesb.2018.09.051.
- [Zaoui FZ, 2021]: Zaoui Fatima Zohra, Contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées, Soutenue 2021, Thèse de doctorat LMD, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem.
- [Zarga D et al, 2019]: Zarga, D., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Bourada, F. and Mahmoud, S.R. (2019), "Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 32(3), 389-410. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.32.3.389>.
- [Zenkour AM, 2006]: Zenkour AM. (2006), Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2006; 77(4):197–214.
- [Zenkour AM, 2013]: Zenkour AM. (2013), Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandwich Struct Mater* ; 15(6):629–56.
- [Zenkour AM, 2013]: Zenkour AM. (2013), A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*; 37(20–21):9041–51.
- [Zenkour AM, 2014]: Zenkour, A.M., Allam, M.N.M., and Radwan, A.F. (2014), Effects of transverse shear and normal strains on FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading, *Int. J. Appl. Mech.*, 6(5), 1450063. <https://doi.org/10.1142/S175882511450063X>.
- [Zenkour AM, 2015]: Zenkour AM. (2015), Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory. *Compos Struct*; 122:260–70.
- [Zhang C et al, 2019] : Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y., Lin, Y., Liu, W., Chen, B., Shen, Q., Zhang, L., & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of functionally graded materials : A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>.

