REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILALI LIABES

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

SIDI BEL ABBES

THESE

DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématique

Option : Equations différentielles

Présentée par : BELATTAR Zokha

Intitulée

Équations différentielles fonctionnelles avec impulsions

Président : HELAL Mohamed, Maitre de conférences « rang A », Université de SBA

Directeur de Thèse : LAKMECHE Abdelkader, Professeur, Université de SBA

Examinateur : YEBEDRI Mustapha, Professeur, Université de Tlemcen

Examinateur : DJELOULI Ghouti, Professeur, Université de Saida

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance et ma gratitude à mon directeur de recherche Mr LAKMECHE Abdelkader pour sa disponibilité, ses orientations et ses précieux conseils.

Il a enrichi mes connaissances et mon savoir scientifique tout au long de ma thèse de doctorat .

Je remercie profondément les membres du jury Mr YEBEDRI Mustapha ; Mr HELAL Mohamed et Mr DJELLOULI Ghouti pour avoir eu l'amabilité d'accepter d'examiner ma thèse.

J'adresse mes plus affectueuses pensées à ma famille pour son encouragement et son tendre soutien.

Table des Matières

Introduction

Les équations différentielles représentent un champ d'exploration trés important. Elles sont utilisées aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées pour élaborer des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques.
Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont appliquées par rapport à une seule variable, nous parlons d'équation différentielle ordinaire (EDO) [42]. Une équation mettant en jeu des dérivées par rapport à plusiers variables est appelée équation aux dérivées partielles (EDP) [48] . Les objectifs de la théorie des équations différentielles sont l'étude quantitative et qualitative des solutions, qui sont progressivement enrichis dans les mathématiques contemporaines (l'étude des systèmes dynamiques ou la résolution approchée par des procédés d'analyse numérique).
Les problèmes les plus connus dans l'étude des équations différentielles sont les problèmes de Cauchy ou aux limites.
En 1960, les Mathématiciens A. Mishkis et V. D. Milman [82, 83] ont incorporé aux équations différentielles des équations discrètes qui s'appellent les impulsions. Récemment, la théorie des équations différentielles impulsives s'est distinguée comme un domaine d'investigation important parmi plusieurs théories d'équations différentielles, étant donné que de telles équations apparaissent dans de nombreux modèles mathématiques de processus réels et de phénomènes étudiés en sciences appliquées. Une équation différentielle impulsive représente une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle et des sauts instantanés de l'état appelés impulsions.
De nombreux travaux ont paru concernant les équations différentielles impulsives [10, 11, 12, 61] et beaucoup d'entre eux sont consacrés à l'étude de l'existence de solutions aux problèmes aux limites pour les équations différentielles impulsives du second ordre, en utilisant différentes métodes, comme la méthode

des sur et sous solutions [62, 63, 64], la théorie du degré topologique [65, 100, 108] et les méthodes variationnelles [22, 103, 106, 113].
Il existe divers problèmes concrets impliquant des phénomènes de bifurcation, par exemple, les tourbillons de Taylor [17] et les changements catastrophiques dans les écosystèmes [98]. Le phénomène de bifurcation est un changement qualitatif ou topologique dans le comportement de certains systèmes, en général l'analyse de la bifurcation est considérée quand il y a des paramètres dans l'équation différentielle dans létude et dont le nombre des solutions peut changer suivant les valeurs de ces paramètres, qui se produisent dans certaines familles données [24, 25, 45, 50, 52, 78, 90, 94, 95].
Soit, par exemple, l'équation différentielle suivante:

$$x^{'}(t) = f\left(t, x(t), \lambda\right)$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière donnée.
λ est ici le paramètre contrôlant la bifurcation . On dit qu'il y a bifurcation en λ_0 si en une valeur de λ arbitrairement proche de λ_0, il existe une dynamique topologiquement non-équivalente à celle en λ_0. Rabinowitz a établi le théorème de la bifurcation globale à partir de la solution triviale [95], et dans [94] la bifurcation à l'infinie a été étudiée. Cette théorie a été appliquée avec succés aux problèmes de Sturm-Liouville pour les équations différentielles ordinaires, les équations intégrales et les équations différentielles partielles [71, 72, 73].
En 2011, Liu et O'Regan [70] ont adopté une approche révolutionaire en introduisant les téchnique de bifurcation aux équations différentielles impulsives en utilisant les théorèmes de Rabinowitz [94, 95]. Ils ont étudié l'existence de solutions multiples pour l'équation différentielle impulsive du second ordre suivante

$$\begin{cases} x^{''}(t) + ra(t)f\left(t, x(t)\right) = 0, \quad t \in (0,1), \quad t \neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i} = \alpha_i x(t_i - 0), \quad i = 1, 2, ..., k, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ils ont transformé (1) en (2) donné par

$$\begin{cases} y^{''}(t) + \dfrac{r}{\prod\limits_{0<t_i<t}(1+\alpha_i)} a(t) f(t, \prod\limits_{0<t_i<t}(1+\alpha_i) y(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Le but était de confirmer l'existence de solutions multiples pour les problèmes ci-dessus en utilisant les propriétés des valeurs propres et des fonctions propres pour les équations linéaires correspondant au problème (2).
Un travail récent sur cet aspect par Wang et Yan [105], où ils ont consideré l'équation différentielle impulsive du second ordre

$$\begin{cases} -x^{''}(t) = \lambda f\left(t, x(t)\right), \quad t \in (0,1), \quad t \neq \frac{1}{2}, \\ \Delta x|_{t=\frac{1}{2}} = \lambda\beta x(\frac{1}{2}), \\ \Delta x^{'}|_{t=\frac{1}{2}} = -\lambda\beta x^{'}(\frac{1}{2} - 0), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ils ont démontré que les propriétés spectrales de la linéarisation du problème (3) sont similaires aux propriétés d'un problème standard de Sturm-Liouville, en utilisant des théorèmes de bifurcation globaux de type Rabinowitz. Dans [74], Ma, Sun et Elsanosi ont prouvé l'existence de changement de signe de solutions du problème (1) grâce à des techniques de bifurcation globale.
En 2016, Niu et Yan [89]ont analysé le problème suivant

$$\begin{cases} -x^{''}(t) + f\left(t, x(t)\right) = \lambda a x(t), \quad t \in (0,1), \quad t \neq \frac{1}{2}, \\ \Delta x|_{t=\frac{1}{2}} = \beta_1 x(\frac{1}{2}), \\ \Delta x^{'}|_{t=\frac{1}{2}} = -\beta_2 x^{'}(\frac{1}{2}), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

En comparant les propriétés principales et spectrales des équations linéaires correspondant à (4), ils ont prouvé l'existence de solutions via des théorèmes de bifurcation globaux de type Rabinowitz. Cependant, peu de travaux ont abordé ce thème. Notons que dans le cas des équations différentielles impulsives du premier ordre, il y a eu un seul travail [75] sur l'analyse des bifurcations. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser aux problèmes aux limites pour des équations impulsives d'ordre deux, en particulier le cas où des paramètres apparaisses dans les équations différentielles ou bien dans les effets impulsifs. Plus précisèment, nous nous intéressons à l'existence des solutions d'un problème aux limites pour une èquation différentielle d'ordre deux contenant un paramètre, de plus les effets impulsifs contiennent le même paramètre [14]. Notre objectif est d'étudier l'existence des solutions par l'intermédiaire du théorème des fonctions implicites, quand ce dernier n'est pas applicable, nous allons utilisé les théorèmes de bifurcation à partir des valeurs propres en utilisant les théorèmes de Krasnosel'ski [54, 78, 25]. L'hypothèse clés de ces théorèmes est la multiplicité algébrique des valeurs

propres du problème linéaire.
Cette thèse est composée de cinq chapitres, une conclusion, des perspectives et une bibliographie :
Le premier chapitre est consacré aux définitions et résultats préliminaires sur le degré topologique et ses applications. Le chapitre deux est consacré à certains résultats sur les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles impulsives.
Dans le troixième chapitre, nous allons étudier quelques thechniques de bifurcation à partir des valeurs propres en utilisant les théorèmes de Krasnosel'ski.
Le quatri'eme chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions d'un problème aux limites pour une èquation différentielle impulsive d'ordre deux

$$\begin{cases} u^{''}(t) = \lambda f\left(t, u(t), u^{'}(t)\right), \quad t \in (0,1), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = \eta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), \quad k = 1, \dots, r, \\ \Delta u^{'}(t_k) = \theta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

En utilisant des techniques de bifurcation à partir des valeurs propres.
Le dernier chapitre aborde l'existence de solutions d'un problème aux limites pour une équation différentielle impulsive d'ordre deux qui dépend implicitement du paramètre, de plus les effets impulsifs contiennent le même paramètre, il s'agit du système

$$\begin{cases} u^{''}(t) = f\left(t, u(t), u^{'}(t), \lambda\right), \quad t \in (0,1), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = \eta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), \quad k = 1, \dots, r, \\ \Delta u^{'}(t_k) = \theta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Nous appliquons la même approche utilisée dans le chapitre précédent.
A la fin, nous donnons quelques conclusions et perspectives.

Chapitre 1

Le degré topologique et ses applications

Ce chapitre introductif à l'avantage de rappeler brièvement les définitions et les théorèmes de base sur la notion du degré topologique en dimension finie et infinie pour définir l'indice de Schauder.

1.1 Analyse spectrale d'opérateurs linéaires compacts

Dans cette section, nous allons faire appel aux opérateurs compacts et aux caractérisations de leurs spectre [19, 28, 30, 47].

1.1.1 Application compacte

Soient X et Y deux espaces de Banach et $\Omega(\subset X)$ un ouvert.

Définition 1.1.1 *Une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $f(\overline{\Omega})$ est compacte.*

Proposition 1.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- *(i) f est compacte.*
- *(ii) L'image de la boule unité est relativement compacte.*

- *(iii) De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans X, on peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $f(x_{n_k})$ converge dans X.*

Remarque 1.1.1 *Toute application linéaire compacte f est continue. La réciproque est vraie si f est de rang fini.*

Proposition 1.1.2 *Si l'espace X est de dimension finie, tout endomorphisme linéaire sur X est continu et compact.*

Lemme 1.1.1 *Soient $K \subset X$ une partie fermée, bornée et $f : K \to X$ une application. Alors, f est compacte si et seulement si f est limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications compactes de rang fini.*

Lemme 1.1.2 *Soit $f : X \to Y$ une application compacte différentiable au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$. Alors, l'application $Df(x_0) : X \to Y$ est un opérateur linéaire compact.*

1.1.2 Perturbation compacte de l'identité

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques localement compactes et $f : X \to Y$ est une application continue.

Définition 1.1.2 *f est dite application propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.*

Remarque 1.1.2 *Si X est compact, toute application continue est propre.*

Proposition 1.1.3 *Si X et Y sont de dimension finies, alors toute application est propre si et seulement si l'image réciproque d'un borné est un borné.*

Proposition 1.1.4 *Toute application propre est fermée.*

Définition 1.1.3 *Une application de la forme $f = I - T$ où I est l'application identité et T une application compacte est dite perturbation compacte de l'identité ou application de Leray Schauder.*

Proposition 1.1.5 *Soit $K \subset X$ un ensemble fermé et borné. Alors toute perturbation compacte de l'identité définie sur K est une application propre.*

Proposition 1.1.6 *Soit $F : X \to X$ une perturbation compacte de l'identité, coercive. Alors F est une application propre.*

1.1.3 Caractérisation du spectre d'un opérateur compact

Soit X un espace de Banach et $L : X \to X$ un opérateur linéaire compact. Notons par $\sigma(L)$ le spectre de l'opérateur L.

Définition 1.1.4 *$\mu \in \mathbb{R}$ est appelé valeur caractéristique de L s'il existe $x \in X$ non nul tel que $x = \mu L x$.*

Remarque 1.1.3 *μ est l'inverse d'une valeur propre λ. On convient de prendre $\mu = 0$ si $\lambda = \infty$.*

Proposition 1.1.7 *L'ensemble des valeurs caractéristiques de L est au plus dénombrable et admet $+\infty$ pour seule valeur d'accumulation. Par suite, l'ensemble des valeurs caractéristiques comprises entre 0 et 1 est fini et chaque valeur non nulle $\mu \in \sigma(L)$ est une valeur propre de L d'une multiplicité finie.*

Théorème 1.1.1 *Soit $\mu \neq \infty$ une valeur caractéristique de L. Alors, il existe un entier n_0 tel que $Ker(\mu L - I)^{n_0} = Ker(\mu L - I)^n, \ \forall n \geq n_0$. De plus, cet espace appelé espace caractéristique associé à μ est de dimension finie. Sa dimension est appelée ordre de multiplicité de μ,*

$$m(\mu) = dim\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} Ker(\mu L - I)^n\Big].$$

Proposition 1.1.8 *Si μ n'est pas valeur caractéristique de L, alors $\mu L - I$ est inversible et d'inverse continu.*

Lemme 1.1.3 ***(Lemme de Riesz-Schauder)***
Soient E un espace de Hilbert et $u : E \to E$ un opérateur linéaire compact. Alors pour $\lambda \neq 0$ valeur propre de L, le sous espace propre $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda I)$ est de dimension finie.

1.2 Le degré topologique en dimension finie

Cette section est consacrée à la définition et à l'étude des propriétés du degré topologique en dimension finie (degré de Brouwer).

1.2.1 Le degré topologique de Brouwer

On note par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ sa frontière.
Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$.
On désigne par $J_f(x)$ le Jacobien de f au point x, i.e.

$$J_f(x) = det[Df(x)]$$

où $Df(x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{1\leq\ i,j\ \leq\ n}$.
On désigne par S l'ensemble des points singiliers i.e.

$$S = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

On considère le problème suivant:

$$(P): \quad \text{trouver } \ x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = y_0.$$

On dit que le triplet (f, Ω, y_0) est admissible si

$$f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

On désigne par A l'ensemble des triplets admissibles .
Si $x \in \Gamma = \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\})$ et $J_f(x) \neq 0$, alors Γ est un ensemble discret et compact, il contient un nombre fini de points.

Définition 1.2.1 ***[96] (Degré topologique de Brouwer)***
Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. Le degré topologique de l'application f relativement à Ω au point y_0, est l'entier

$$\begin{array}{rcl} deg : A & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (f, \Omega, y_0) & \longmapsto & \begin{cases} \sum\limits_{x \in \Gamma} signJ_f(x) & si\ \Gamma \neq \emptyset \\ 0 & si\ \Gamma = \emptyset. \end{cases} \end{array}$$

Définition 1.2.2 *Soient $\alpha > 0$, $\varphi : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, on dit que φ est une fonction poids d'indice α, s'il existe $\delta \in [0, \alpha]$ telle que $\varphi(t) = 0$ pour $t \notin [\delta, \alpha]$.*

On note par W_α l'ensemble des fonctions poids d'indice α.
On désigne par $\|.\|_2$ la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Remarques 1.2.1 ***1)*** *Si* $\varphi \in W_\alpha$ *et*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \varphi(\|x\|_2) \end{array}$$

alors g *est une fonction continue à support compact dans* $\mathbb{R}^n$.
Ainsi

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2)dx \quad \textit{est bien défini.}$$

2) *On note par* $W_\alpha^1 = \{\varphi \in W_\alpha \ \ \textit{tel que} \ \ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2)dx = 1\}$.

Définition 1.2.3 ***[96]***
Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *et* y_0 *un point de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, *alors le degré de* f *au point* y_0 *dans* Ω *est défini par*

$$deg_\varphi(f, \Omega, y_0) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\|f(x) - y_0\|_2) J_f(x)dx,$$

où $\varphi \in W_\alpha^1$ *une fonction poids d'indice* α *tel que* $0 < \alpha < \gamma = \min\{\|f(x) - y_0\|_2; x \in \partial\Omega\}$.

Proposition 1.2.1 ***[96]***
Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y_0 \notin f(\partial\Omega)$.
Si pour tout $x \in \Gamma = \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\})$ *avec* $J_f(x) \neq 0$, *alors les définitions* 1.2.1 *et* 1.2.3 *sont équivalentes, c'est-à-dire*
il existe une constante $\widehat{\alpha}$ *vérifiant* $0 < \widehat{\alpha} < \gamma = \min\{\|f(x) - y_0\|_2; x \in \partial\Omega\}$ *telle que* $\forall \varphi \in W_\alpha^1$ *avec* $\alpha \in [0, \widehat{\alpha}]$, *on a*

$$deg_\varphi(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \Gamma} sign J_f(x) & si\ \Gamma \neq \emptyset \\ 0 & si\ \Gamma = \emptyset. \end{cases}$$

Preuve i) Si $\Gamma = \emptyset$, i.e. $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$.
Par la compacité de $\overline{\Omega}$, on a

$$\gamma_2 = \min\{\|f(x) - y_0\|_2 \ / \ x \in \partial\Omega\} > 0$$

donc, pour $\widehat{\alpha} = \gamma_2$ et $\alpha \in [0, \widehat{\alpha}]$

$$\varphi(\|f(x) - y_0\|_2) = 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall \varphi \in W^1_\alpha$$

ce qui donne

$$deg_\varphi(f, \Omega, y_0) = \int\limits_\Omega \varphi(\|f(x) - y_0\|_2) J_f(x) dx = 0.$$

D'autre part, la définition (1.2.1) implique

$$deg(f, \Omega, y_0) = 0.$$

Donc les deux définitions sont équivalentes.

ii) Si $\Gamma \neq \emptyset$, alors il est discret et compact i.e. $\exists n > 0$ tel que $\Gamma = \{x_1, ..., x_n\}$.
Par le théorème de l'inversion locale [], pour $i = 1, ..., n$, il existe des voisinages ouverts $U(x_i)$ et $V_i(y_0)$ de x_i et y_0 respectivement, tel que la réstriction f_i de f est un homéomorphisme de $U(x_i)$ vers $V_i(y_0)$.
On choisit $U(x_i)$ suffisament petit de telle sorte que $sign J_f(x)$ est constant sur $U(x_i)$.
Puisque il y a un nombre fini de $V_i(y_0)$, il existe $\widehat{\alpha} \in [0, \gamma]$ tel que

$$K = B(y_0, \widehat{\alpha}) \subset V_i \quad \text{pour } i = 1, ..., n.$$

Soit $U_i = f_i^{-1}(K)$, alors

$$U_i \subset \Omega.$$

Si $x \in \Omega - (\bigcup_{i=1}^n U_i)$ et $\forall \varphi \in W^1_\alpha$, on a

$$\varphi(\|f(x) - y_0\|_2) = 0,$$

ce qui donne

$$\int\limits_{\Omega - (\bigcup_{i=1}^n U_i)} \varphi(\|f(x) - y_0\|_2) J_f(x) dx = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
deg_{\varphi}(f,\Omega,y_0) &= \int\limits_{\Omega} \varphi(\|f(x)-y_0\|_2)J_f(x)dx \\
&= \int\limits_{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} \varphi(\|f(x)-y_0\|_2)J_f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{U_i} \varphi(\|f(x)-y_0\|_2)J_f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{f_i^{-1}(K)} \varphi(\|f(x)-y_0\|_2) sign J_{f_i}(x)|J_{f_i}(x)|dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} sign J_f(x_i) \int\limits_{K} \varphi(\|x\|_2)dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} sign J_f(x_i)
\end{aligned}$$

car $\int\limits_{K} \varphi(\|x\|_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|_2) = 1.$
Par conséquence

$$deg_{\varphi}(f,\Omega,y_0) = \sum_{x\in\Gamma} sign J_f(x) = deg(f,\Omega,y_0). \qquad \blacksquare$$

La proposition suivante nous aide à voir que le degré est indépendent de la fonction poids.

Proposition 1.2.2 ***[96]*** *Soit* $f\colon\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,
si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, *alors pour* $\varphi_1, \varphi_2 \in W_{\alpha}^1$ *avec* $0 < \alpha < \gamma = \min\{\|f(x) - y_0\|_2; x \in \partial\Omega\}$, *on a*

$$deg_{\varphi_1}(f,\Omega,y_0) = deg_{\varphi_2}(f,\Omega,y_0).$$

1.2.2 Extension de la définition du degré

Nous allons étendre la définition du degré aux applications qui sont seulement continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour une fonction f continue sur $\overline{\Omega}$, il existe une suite de fonctions f_k de classe $C^1(\Omega)$ et continue sur $\overline{\Omega}$ vérifiant la condition suivante
$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0.$$

Définition 1.2.4 *[96]: Soit $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, Ω étant un ouvert borné, alors pour tout $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, le degré de f au point y_0 dans Ω est défini par*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega, y_0).$$

1.2.3 Propriétés principales du degré topologique

Dans cette section, nous énonçons quelques propriétés du degré topologique de Brouwer.

1) Le degré de l'Identité

Soit I l'injection canonique de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, i.e. $I(x) = x$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\textbf{(a)}\ \deg(I, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_0 \in \Omega \\ 0 & \text{si } y_0 \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

et

$$\textbf{(b)}\ \deg(-I, \Omega, y_0) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } y_0 \in \Omega \\ 0 & \text{si } y_0 \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

2) La continuité par rapport à la fonction

Soient f, g: $\Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1 sur Ω et continues sur $\overline{\Omega}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\gamma = \min\{\|f(x) - y_0\|_2); x \in \partial\Omega\} > 0$.

Si $\alpha \in]0, \gamma[$ et $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x) - g(x)\|_2 < \dfrac{1}{7}\alpha$, alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

3) La continuité par rapport aux fonctions continues

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, f: $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, si $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\min\{\|f(x) - y_0\|_2); x \in \partial\Omega\} > \alpha > 0$, alors pour toute fonction continue $g : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|f - g\|_\Omega < \frac{1}{7}\alpha$, on a

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

4) Invariance par homotopie
Soit H: $\overline{\Omega} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, supposons que $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1] \quad H(x,t) \neq y_0$, alors $deg(H,\Omega,y_0)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$.
5) Invariance sur le bord
Soient $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues sur Ω.
Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, alors

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(g,\Omega,y_0).$$

6) Additivité
Soient $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω et Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{R}^n$.
Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega_2) \cup f(\partial\Omega_2)$, alors

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega_1,y_0) + deg(f,\Omega_2,y_0).$$

7) Propriété multiplicative du degré
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions de classe C^1, où U et V sont deux ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$. soient $y_0 \notin f(\partial U)$ et $z_0 \notin f(\partial V)$. Alors

$$deg(f \times g, U \times V, (y_0, z_0)) = deg(f,U,y_0).deg(g,V,z_0),$$

où $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(x)), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
8) Propriété d'excision
Soit $f : \mathbb{R}^n \supset \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω, alors pour tout ensemble fermé $K \subset \overline{\Omega}$, tel que $y_0 \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$, on a

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega - K,y_0).$$

9) Propriété d'existence
Soient $f : \mathbb{R}^n \supset \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$.
Si $deg(f,\Omega,y_0) \neq 0$, alors le problème

(P) : trouver $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y_0$ admet au moins une solution.

10) L'invariance du degré par translation
Soient $f : \mathbb{R}^n \supset \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω, $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}^n$, alors

$$deg(f-c,\Omega,y_0-c) = deg(f,\Omega,y_0).$$

11) La continuité par rapport à y_0
Soient Ω un ouvert borné et f: $\Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\|y_1 - y_0\|_2 \leq \varepsilon$, alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1).$$

1.2.4 Applications du degré de Brouwer

Théorème 1.2.1 ***[96](Théorème de point fixe de Brouwer)***
Soit Ω un convexe, compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.

Théorème 1.2.2 ***[96](Théorème de réduction)***
Soient $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ $(n > m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Si $p \in \mathbb{R}^m$ et $p \notin F(\partial\Omega)$, où $F(x) = x - f(x)$, alors

$$deg(F, \Omega, p) = deg(F|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p).$$

Théorème 1.2.3 ***[96] (Formule du produit de Leray)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $(f, g) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \times C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. On désigne par C_i^b les composantes connexes bornées de la différence $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Alors, pour tout $z_0 \notin (g \circ f)(\partial\Omega)$, on a

$$deg(g \circ f, \Omega, z_0) = \sum_{i=1}^{i=n} deg(f, \Omega, C_i^b).deg(g, C_i^b, z_0).$$

Théorème 1.2.4 ***[96](Théorème de Borzuk)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine et
$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue, impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors
(a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est pair.
(b) Si $0 \in \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est impair.

Théorème 1.2.5 ***[96] (Degré d'une application paire)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine et
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue, paire, i.e. $f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \partial\Omega$. Alors

$$deg(f, \Omega, 0) \textit{est pair}.$$

1.3 Le degré topologique en dimension infinie

En règle générale, les théorèmes de point fixe doivent être appliqués dans les espaces de dimension infinie. Nous avons vu que la notion du degré topologique dans un espace de dimension finie sert à prouver le théorème de point fixe de Brouwer pour des applications continues d'un convexe fermé dans lui-même. Il n'est pas possible d'étendre cette notion aux espaces de dimension infinie. Par exemple: On fournit une application continue de la boule unité de l'espace de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$ dans lui-même qui n'a pas de point fixe.

1.3.1 Le degré topologique de Leray-Schauder

Rappelons que dans un espace de dimension infinie, la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte et qu'une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés. En plus, on sait que l'image d'un fermé est un ensemble fermé si f est une application fermée, ceci est vrai si elle est une perturbation compacte. D'une façon générale, la continuité d'une application f ne suffit pas (et même d'ailleurs une régularité supèrieure d'ordre au moins C^1). Pour cela on va introduire la notion des opérateurs compacts qui sont des perturbations compactes de l'identité (i.e. des opérateurs Φ du type $\Phi = I - T$, où T est un opérateur compact et I désigne l'application identité de X) pour donner la nouvelle définition du degré topologique et pour établir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer.
Dans cette partie, X est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.
Le lemme suivant interviendra dans la définition du degré de Leray Schauder dont la preuve est similaire à celle donnée dans [?].

Lemme 1.3.1 ***[96]*** *Soient Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$, alors si $\varepsilon > 0$ tel que*
$\|u - T(u)\| > 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$, il existe un sous espace vectoriel de dimension finie E_ε de X et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ tels que

$$\begin{array}{rl} \forall u \in \overline{\Omega} & \|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon, \\ \forall u \in \partial\Omega & \|u - T_\varepsilon(u)\| \geq 3\varepsilon. \end{array}$$

Nous allons maintenant voir que l'approximation T_ε et l'espace de dimension finie E_ε permettent de définir le degré topologique de $I - T$.

Définition 1.3.1 *[96](Le degré de Leray-Schauder)*
Soient Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact n'ayant pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Soient $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon \subset X$ et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ donnés par le lemme 1.3.1.
On considère F un sous espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε, tel que $\Omega_F = F \cap \Omega \neq \emptyset$. On définit le degré topologique de Leray Schauder par

$$deg(I - T, \Omega, p) := deg(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, p)$$

où $p \in E_\varepsilon$.

Remarques 1.3.1 *1) Cette définition ne dépend que de T et Ω.*
2) Si $T_{1\varepsilon}$, $T_{2\varepsilon}$ sont deux approximations de l'opérateur T telles que pour $i = 1, 2$,
on ait $T_{i\varepsilon}(\Omega) \subset E_\varepsilon$, alors

$$deg(I_F - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, p) = deg(I_F - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, p).$$

3) Si $dimX < \infty$, les degrés de Brouwer et Schauder coïnsident.

1.3.2 Propriétés du degré de Leray-Schauder

On va énoncer les propriétés les plus importantes du degré topologique de Leray-Schauder. La démonstration de ces résultats découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que des propriétés analogues du degré de Brouwer.
Dans la suite de cette partie, on suppose que X est un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact.

1) Soient $E_n \subset X$ des espaces de dimension finie, Il existe une suite d'applications compactes T_n convergeannt uniformément vers T et telle que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(\overline{\Omega}) \subset E_n$. Alors

$$deg(I - T, \Omega, p) = deg(I - T_n, \Omega, p)$$

où $p \in E_n$.
2)Le degré de l'Identité

$$deg(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \in \Omega, \\ 0 \text{ si } p \notin \Omega. \end{cases}$$

3) Additivité
Si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts bornés disjoints de Ω et $p \notin (I-T)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2)$, alors

$$deg(I-T, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = deg(I-T, \Omega_1, p) + deg(I-T, \Omega_2, p).$$

4) Invariance du degré par translation
Si $p \in X$ tel que $p \notin (I-T)(\partial\Omega)$, alors

$$deg(I-T, \Omega, p) = deg(I-T-p, \Omega, 0).$$

5) Propriété d'existence
Si $p \in X$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$, on a $u - Tu \neq p$ et $deg(I-T, \Omega, p) \neq 0$, alors il existe $u \in \Omega$ tel que $u - Tu = p$.
6) La continuité par rapport à l'opérateur
Soient T_1, T_2 deux opérateurs compacts de Ω dans X et $p \in X$ tel que

$$p \notin (I-T_1)(\partial\Omega) \cup (I-T_2)(\partial\Omega),$$

alors, si $\sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} \|T_1 u - T_2 u\| \leq \varepsilon$, on a

$$deg(I-T_1, \Omega, p) = deg(I-T_2, \Omega, p).$$

7) Invariance par homotopie
Soient $p \in X$ et $T_t : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow X$ un opérateur compact, tel que pour tout $(u,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$, on ait : $u - T_t(u) \neq p$. Alors, le degré $deg(I-T_t, \Omega, p)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$.
8) La continuité par rapport à p
Soient p_0 et p_1 deux points de X tels que $p_0, p_1 \notin (I-T)(\partial\Omega)$. Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\|p_1 - p_0\| \leq \varepsilon$, alors

$$deg(I-T, \Omega, p_0) = deg(I-T, \Omega, p_1).$$

1.3.3 Applications du degré de Leray Schauder

Théorème 1.3.1 ***[96](Théorème de point fixe de Schauder)***
Soient Ω un sous ensemble convexe, fermé, borné non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte, alors f admet au moins un point fixe.

Corollaire 1.3.1 *[96] Soient Ω un sous ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application continue, alors f admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.3.2 ***[78](Théorème de Schaefer)***
Soit X un espace de Banach et $f : X \longrightarrow X$ une application compacte. On a alors l'alternative:
Ou bien, l'équation $tf(x) = x$ admet une solution pour tout $t \in [0, 1]$.
Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X : \exists t \in [0, 1], tf(x) = x\}$ est non borné.

Théorème 1.3.3 ***[78](Théorème de Rothe)***
Soit B une boule ouverte d'un espace de Banach X et $f : X \longrightarrow X$ une application compacte tel que $f(\partial B) \subset \overline{B}$. Alors f admet un point fixe dans $\overline{B}$.

Théorème 1.3.4 ***[78](Théorème de Borzuk)***
Soit X un espace de Banach et $\Omega \subseteq X$ un ouvert borné contenant l'origine et symétrique par rapport à celui-ci. On considère une application compacte f définie sur $\overline{\Omega}$ et impaire. Alors, si $0 \notin (I - f)(\partial\Omega)$, le degré $deg(I - f, \Omega, 0)$ est impair.

1.3.4 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Soient Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte, alors l'une des propriétés suivantes est satisfaite:
(i) f admet un point fixe dans Ω.
(ii) il existe $x \in \partial\Omega$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $x = tf(x)$.

1.4 L'indice de Schauder (Degré des points isolés) [28]

Dans cette section, nous allons faire intervenir le degré de Leray Schauder pour calculer l'indice des perturbations compactes de l'identité.

1.4.1 L'indice des applications différentiables

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension finie et $\Omega(\subset X)$ un ouvert borné. On considère une application $f : \Omega \to Y$ continue et

$p \notin f(\partial\Omega)$. Si $x_0 \in \Omega$ est une solution isolée de l'équation $f(x) = p$, alors il existe une boule B_{r_0} dans laquelle x_0 est la seule solution de l'équation $f(x) = p$. D'après la propriété de l'excision du degré topologique, on a

$$deg(f, B_{r_0}(x_0), p) = deg(f, B_r(x_0), p), \quad \forall r \in]0, r_0[.$$

Définition 1.4.1 *On appelle indice de f au point x_0 relativement à p, l'entier*

$$i(f, x_0, p) = deg(f, B_{r_0}(x_0), p).$$

Remarque 1.4.1 *Supposons que $f \in C^1(\Omega)$ et $J_f(x_0) \neq 0$. Alors*

$$i(f, x_0, p) = sign J_f(x_0).$$

Lemme 1.4.1 *Soit A une matrice régulière de type $n \times m$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ les valeurs propres strictement négatives de A et de multiplicités respectives $r_1, r_2, ..., r_m$. Alors, $sign(det A) = (-1)^r$ où $r = \sum\limits_{j=1}^{j=m} r_j$.*

Preuve
Soient $\mu_{m+1}, \mu_{m+2}, ..., \mu_n$ les valeurs propres positives de la matrice A et de multiplicités respectives $k_{m+1}, k_{m+2}, ..., k_n$. Alors

$$\begin{aligned} det(A) &= \prod_{j=1}^{j=m} \lambda_j^{r_j} . \prod_{j=m+1}^{j=n} \mu_j^{k_j} \\ &= \prod_{j=1}^{j=m} (-1)^{r_j} |\lambda_j|^{r_j} . \prod_{j=m+1}^{j=n} \mu_j^{k_j}. \end{aligned}$$

Par suite, $sign(det A) = (-1)^r$.

Remarque 1.4.2 *$\lambda > 1$ est une valeur propre de $I - A$ si et seulement si $1 - \lambda < 0$ est valeur propre de A.*

Corollaire 1.4.1 *Soit A une matrice régulière de type $n \times m$ et $T = I - A$. Alors*

$$sign(det A) = (-1)^\beta$$

où $\beta = \sum\limits_{\lambda > 1} r_\lambda(T)$ et r_λ désignant la multiplicité de la valeur propre λ.

Théorème 1.4.1 *Soient* $x_0 = 0 \in \Omega$ *et* $f(0) = 0$*. Alors*

$$i(f, 0, 0) = (-1)^{\beta}$$

où β *désigne la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de l'opérateur* $I - D_f(0)$ *comprises strictement entre* 0 *et* 1*.*

Preuve
D'après le Corollaire 1.4.1, on a

$$i(f, 0, 0) = signJ_f(0) = (-1)^r$$

où r est la somme des multiplicités des valeurs propres, supèrieures à 1 de la matrice $T = I - D_f(0)$.

Remarque 1.4.3 *S'il n'existe pas de valeur caractéristique comprise entre* 0 *et* 1*, on pose* $\beta = 0$*.*

1.4.2 L'indice des applications linéaires compactes

Soit X un espace de Banach de dimension finie et $L : X \to X$ un opérateur linéaire compact. On désigne par μ une valeur caractéristique de L et par $m(\mu)$ son ordre de multiplicité.

Théorème 1.4.2 *On a*

$$i(I - L, 0, 0) = (-1)^{\beta}$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<1} m(\mu)$*.*

Corollaire 1.4.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* X *contenant l'origine et soit* $\lambda \neq 0$ *une valeur non caractéristique. Alors*

$$deg(I - \lambda L, \Omega, 0) = (-1)^{\beta}$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<\lambda} m(\mu)$*, ou bien* $\beta = 0$ *si* L *n'a pas de valeur caractéristique.*

1.4.3 L'indice des perturbations compactes de l'identité

Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $K : \Omega \to X$ un opérateur compact. Considérons la perturbation compacte de l'identité $F = I - K$ et soit $u_0 \in \Omega$ une solution de l'équation $F(u) = 0$.

Théorème 1.4.3 *Supposons que K soit Fréchet-différentiable au voisinage de u_0 et que 1 n'est pas une valeur caractéristique de $K^{'}(u_0)$. Alors u_0 est une solution isolée de l'équation $F(u) = 0$ et on a la formule de calcul de l'indice*

$$i(I - K, u_0, 0) = i(I - K^{'}(u_0), u_0, 0) = (-1)^{\beta}$$

où $\beta = \sum\limits_{0<\mu<1} m(\mu)$ et μ représente une valeur caractéristique de l'opérateur $K^{'}(u_0)$.

Corollaire 1.4.3 *Sous les hypothèses du théorème* 1.4.3*, pour tout λ qui n'est pas valeur caractéristique de $K^{'}(0)$, on a*

$$i(I - \lambda K, u_0, 0) = (-1)^{\beta};$$

où $\beta = \sum\limits_{0<\mu<\lambda} m(\mu)$ et μ représente une valeur caractéristique de l'opérateur $K^{'}(0)$.

Chapitre 2

Equations différentielles

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénoménes dans des domaines variés. Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions et résultats préliminaires sur les équations différentielles ordinaires et impulsives.

2.1 Equations différentielles ordinaires [21]

Une équation différentielle ordinaire notèe EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $x(t)$ et ses dérivées $x^{'}(t), ..., x^{(n)}(t)$ définie par

$$F(t, x(t), x^{'}(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0,$$

où x est une fonction inconnue de la variable réelle t à valeurs dans un espace de Banach E, $x^{'}, ..., x^{(n)}$ designent les dérivées successives de x, et F est une fonction régulière donnée définie sur $I \times E^{n+1}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

2.1.1 Equations différentielles d'ordre n

Une équation différentielle d'ordre n s'écrit sous forme

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x^{'}(t), ..., x^{(n-1)}(t)), \tag{2.1}$$

où $f : I \times E^n \to E$ est une fonction continue.

Définition 2.1.1 *Une fonction $\varphi : I \to E$ est dite solution de l'équation différentielle* (2.1) *si elle est de classe $C^n(I)$ et qui satisfait les deux conditions suivantes:*
(i) $(t, \varphi(t), \varphi^{'}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)) \in I \times E^n$
(ii) $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{'}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))$ *pour tout $t \in I$.*

Définition 2.1.2 *L'équation différentielle* (2.1) *peut se ramener à un système du premier ordre*

$$X^{'}(t) = F(t, X(t)) \tag{2.2}$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

et la nouvelle fonction F:

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{(n-2)}(t) \\ f(t, x(t), x_1(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix}.$$

Les solutions de ce système sont les fonctions $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1} : I \to E$ de classe C^1, telles que

$$\begin{cases} \varphi^{'}(t) = \varphi_1(t), \varphi_1^{'}(t) = \varphi_2(t), ..., \varphi_{n-2}^{'}(t) = \varphi_{n-1}(t), \\ \varphi_{n-1}^{'}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_{n-1}(t)). \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$ sont les dérivées successives de φ.

Pour cette raison, l'étude d'une équation différentielle d'ordre n peut, en général, revenir à l'étude d'une équation différentielle d'ordre un.
Les problèmes des équations différentielles les plus répondus sont les problèmes aux limites et de Cauchy.

Définition 2.1.3 *Soient $U \subset E$ un ouvert connexe et $f : I \times U \to E$ une fonction continue. Le problème de Cauchy est donnè par le système d'équations*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant $t_0 \in I$ et des solutions φ de classe C^1 sur J satisfaisant (2.3).

Proposition 2.1.1 *Une fonction $\varphi : I \to U$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si*
(i) La fonction φ est continue et $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in I \times U$.
(ii) $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$

Définition 2.1.4 *On dit que f est k-Lipschitzienne en x s'il existe $k > 0$ telle que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

pour $(t, x_1) \in I \times E$ et $(t, x_2) \in I \times E$.

Définition 2.1.5 *On dit que f est localement Lipschitzienne si pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times U$ et $k > 0$ tels que l'on ait*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

pour $(t, x_1), (t, x_2) \in V$.

Théorème 2.1.1 ***(Cauchy-Lipschitz)***
On suppose que $f \in \mathcal{C}(I \times U, E)$ est localement Lipscitzienne par rapport à x.
Existence: *$\forall (t_0, x_0) \in I \times U$, il existe $\tau > 0$ et $\varphi \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], U)$ solution de (1.3) avec $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*
Unicité: *Si ψ est une autre solution de (1.3), elle coincide avec φ sur un intervalle d'interieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*
Régularité: *Si de plus f est de classe $C^r, r \geq 1$, alors φ est de classe C^{r+1}.*

Théorème 2.1.2 *Si f est continue et localement Lipschitzienne, et si $(t_0, x_0) \in I \times U$, il y a un plus grand intervalle $J_1 \ni t_0$ dans lequel existe une solution $\psi : J_1 \to E$ du problème (1.3).*
Cette solution ψ est unique. Elle s'appelle la solution maximale du problème (1.3).

Théorème 2.1.3 *On suppose* $f \in \mathcal{C}(I \times E, E)$ *est continue et Lipschtzienne par rapport à* x. *Alors* $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, *il existe une unique* $\varphi \in C^1(I, E)$ *solution du problème* (1.3).

2.1.2 Equation différentielle dépendant d'un paramètre

Supposons que la fonction $f(t, x(t))$ dépend d'un paramètre λ qui varie dans un espace topologique L. Nous considérons une équation différentielle

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), \lambda) \tag{2.4}$$

où $f : I \times B(x_0, r) \times L \to E$ une fonction continue. I désigne un intervalle compact et $B(x_0, r)$ désigne la boule fermée avec $\|x - x_0\| \leq r$ dans E.
On suppose que

1. $\|f(t, x, \lambda)\| \leq M$ sur $I \times B(x_0, r) \times L$,
2. $\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$ pour $t \in I$.

Autrement dit, f est k-Lipschitzienne en x, avec une constante k indépendante de t et de λ.

Théorème 2.1.4 *Sous les conditions* 1 *et* 2. *Si on fixe* $\lambda \in L$, *alors l'équation* (1.4) *a une solution et une seule* $x = \varphi(t)$, *définie dans* $J = I \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$ *telle que* $\varphi(t_0) = x_0$.

Remarques 2.1.1 *Cette solution dépend du choix du paramètre* λ *notée* $\varphi(t, \lambda)$.

Proposition 2.1.2 $\varphi(t, \lambda)$ *est une fonction continue du couple* $(t, \lambda) \in J \times L$.

2.2 Equations différentielles du second ordre avec des conditions aux limites

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un problème aux limites qui est constitué d'une équation différentielle ordinaire du second ordre dont on recherche une solution avec des conditions aux limites du domaine de

résolution.
Nous considérons l'équation différentielle du second ordre

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \text{ pour } t \in I =]0,1[\tag{2.5}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
La solution de cette équation est une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont la dérivée vérifie (2.5).
On peut considérer des conditions aux limites à l'équation différentielle (2.5) pour étudier le problème aux limites posé sur l'intervalle $I =]0,1[$, par exemple le cas des conditions de Dirichlet, on obtient

$$(I) \begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) & \forall t \in I, \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Définition 2.2.1 *Une fonction $x(t)$ est une solution du problème*

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_1) = x_1 \\ x(t_2) = x_2 \end{cases}$$

avec $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.
Si elle est de classe C^2 et satisfait (2.5) sur (t_1, t_2), continue sur $[t_1, t_2]$ et qui satisfait les valeurs aux bord de t_1 et t_2.

Lemme 2.2.1 *La fonction $x \in \mathbb{R}$ est une solution du problème (I) si et seulement si x est continue et satisfait l'équation suivante*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\Big(s, x(s), x'(s)\Big) \mathrm{d}s$$

où G est la fonction de Green donnée par

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \begin{cases} s(t-1) & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(s-1) & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= ts - \min(t,s), \quad (t,s) \in [0,1]^2. \end{aligned}$$

2.3 Equations différentielles impulsives

Les systèmes impulsifs sont devenus incontournable dans certains processus réels et phénomènes naturels. Une équation différentielle impulsive représente une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire et des sauts instantanés de l'état appelés impulsions.

2.3.1 Equations différentielles impulsives du premier ordre [10]

Définition 2.3.1 *Une équation différentielle impulsive est un système de la forme*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, \ldots, r \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction donnée. Les* $I_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *sont des fonctions impulsives.*
$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ *avec* $x(t_k^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t_k + h)$ *et* $x(t_k^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} x(t_k - h)$.

Nous considérons l'équation différentielle impulsive

$$\begin{array}{l} x^{'}(t) = f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \quad t \in [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \qquad k = 1, \ldots, r \end{array} \tag{2.6}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0. \tag{2.7}$$

Définition 2.3.2 *Soient* $J_0 = [0, t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $\quad k = 1, ..., r$ *avec* $t_{r+1} = 1$ *et soit* x_k *la réstriction d'une fonction* x *à* J_k.
Les solutions de l'équation (2.6) *sont définies sur l'espace des fonctions continues par morceaux*
$PC = \{x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, x \in \mathcal{C}(J_k, \mathbb{R}^n), \ k = 0, ..., r,$ *tel que* $x(t_k^-)$ *et* $x(t_k^+)$ *exitent et satisfont* $x(t_k) = x(t_k^-)$ *pour* $k = 1, ..., r\}$

Lemme 2.3.1 $(PC([0, 1]), \|.\|_{PC})$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|x\|_{PC} = max\{\|x_k\|_\infty, k = 0, ..., r\}$$

où $\|x_k\|_\infty = \sup\limits_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t)|$.

Définition 2.3.3 *La fonction* $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *est une solution de l'équation* (2.6) *si:*

- (1) $(t, x(t)) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$;
- (2) *La fonction* $x(t)$ *est différentiable et* $x^{'} = f(t, x(t))$;
- (3) *La fonction* $x(t)$ *est continue sur* J_k *et si* $t = t_k$*, alors* $x(t_k^+) = x(t_k^-) + I_k(x(t^-)$.

Définition 2.3.4 *Chaque solution* x *de* (2.6) *vérifiant* $\lim\limits_{t \to 0^+} x(t) = x_0$ *est une solution du problème* $(2.6) - (2.7)$. *De plus,* $x \in C^1(J_k, \mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.3.2 *Une fonction* $x \in PC([0,1])$ *est une solution du problème* $(2.6) - (2.7)$ *si et seulement si*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)),$$

pour $t \in [0,1]$.

Preuve:
Supposons que x est une solution de $(2.6) - (2.7)$, alors
pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t x^{'}(s)ds = \int_0^t f(s, x(s))ds$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Si $t \in]t_1, t_2]$, on a

$$x'(t) = f(t, x(t)) \Rightarrow \int_{t_1+h}^{t} x'(s)ds = \int_{t_1+h}^{t} f(s, x(s))ds$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_1 + h) + \int_{t_1+h}^{t} f(s, x(s))ds$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} x(t) = \lim_{h \to 0^+} [x(t_1 + h) + \int_{t_1+h}^{t} f(s, x(s))ds]$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_1^+) + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s))ds$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_1^-) + I_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Puisque $x(t_1^-) = x(t_1)$ alors $x(t_1^-) = x_0 + \int_{0}^{t_1} f(s, x(s))ds$.

Donc

$$x(t) = x_0 + I_1(x(t_1)) + \int_{0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Ainsi, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$, on a

$$x(t) = x_0 + \int_{0}^{t} f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)).$$

D'où

$$x(t) = x_0 + \int_{0}^{t} f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)), \quad \forall t \in [0, 1]. \blacksquare$$

Théorème 2.3.1 *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n$ *une fonction continue sur* $J_k \times \mathbb{R}^n$. *Pour chaque* $x \in \mathbb{R}^n$, *on suppose que*

$$\lim_{(t,y)\to(t_k,x)} f(t,y) < \infty \qquad t > t_k.$$

Alors, il existe $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *une solution du problème* $(2.6)-(2.7)$.

2.3.2 Problème aux limites d'une équation différentielle impulsive du second ordre

Les équations différentielles impulsives jouent un rôle primordial dans les sciences appliquées.
Il y a beaucoup de travaux qui ont étudier l'existence des solutions pour les problèmes aux limites et spécifiquement les équations différentielles impulsives du second ordre.
Soit le problème aux limites d'équation différentielle impulsive du second ordre

$$\begin{cases} u^{''}(t) = f\left(t, u(t), u^{'}(t)\right), \quad t \in (0,1), \quad t \neq t_k, & (2.8) \\ \Delta u(t_k) = \eta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right), \quad k = 1, \ldots, r, & (2.9) \\ \Delta u^{'}(t_k) = \theta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right), & (2.10) \\ u(0) = u(1) = 0, & (2.11) \end{cases}$$

où $r \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k)$, $\Delta u^{'}(t_k) = u^{'}(t_k^+) - u'(t_k)$,
$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r < t_{r+1} = 1$, $f : I^{'} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, $\eta_k \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\theta_k \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ sont des fonctions impulsives avec $I^{'} := I - \{t_k\}_{k=1}^r$.
Commençons par définir l'espace des fonctions impulsives $PC^i(I)$ pour $i \in \mathbb{N}$ où la solution du problème $(2.8)-(2.11)$ doit être définit.

Définition 2.3.5 *Pour tout* $i \geq 0$, *on définit l'espace des fonctions impulsives par*
$PC^i(I) := \{u \in C^i(I^{'}, \mathbb{R}) / u^{(j)}$ *est continue à gauche de* t_k,
et $u^{(j)}(t_k^+)$ *existe pour tout* $k, j;\ 0 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq i\}$.

Lemme 2.3.3 *a)* $(PC^i(I), \|.\|_i)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|w\|_i = \max(\|w\|_0, \|w^{'}\|_0, ..., \|w^{(i)}\|_0)$$

où $\|w\|_0 = \sup\{|w(t)|, t \in I\}$ *pour* $w \in PC^0(I)$.
b)$\mathfrak{L}(PC^i(I))$ *est un espace de Banach pour les opérateurs linéaires bornés sur* $PC^i(I)$ *muni de la norme*

$$\|L\|_{\mathfrak{L}(PC^i(I))} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|_i \ ,$$

où $x \in PC^i(I)$ *et* $L \in \mathfrak{L}(PC^i(I))$.

Définition 2.3.6 *Une fonction* $u \in PC^2(I)$ *est dite solution de* $(2.8)-(2.11)$ *si elle satisfait toutes les équations* (2.8), (2.9), (2.10) *et* (2.11).

Lemme 2.3.4 *La fonction* $u \in PC^2(I)$ *est une solution de* $(2.8) - (2.11)$ *si et seulement si* $u \in PC^1(I)$ *et elle satisfait l'equation suivante*

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G(t,s) f\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \mathrm{d}s \\
&+ \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \eta_k \Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big) + \theta_k \Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)(t - t_k) \Big\} \\
&- t \sum_{0<t_k<1} \Big\{ \eta_k \Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big) + \theta_k \Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)(1 - t_k) \Big\}, \qquad \forall t \in I
\end{aligned}$$

où G *est la fonction de Green du problème linéaire sans impulsions*

Preuve:
On pose $u = y + z$ tel que

$$\begin{aligned}
y^{''}(t) &= f(t, u(t), u^{'}(t)), \quad t \in I, \\
y(0) &= y(1) = 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
z^{''}(t) &= 0, \\
z(0) &= z(1) = 0,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta z(t_k) &= \eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big), \quad k=1,\dots,r,\\ \Delta z^{'}(t_k) &= \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big).\end{aligned}$$

D'un coté, on a

$$y(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u^{'}(s))ds.$$

Et de l'autre coté, on a

$$z(t)=z^{'}(0)t+\sum_{0<t_k<t}\big[x(t_k^+)-x(t_k)\big]+\sum_{0<t_k<t}\big[x^{'}(t_k^+)-x^{'}(t_k)\big](t-t_k),\ t\in I.$$

En effet, pour $t\in[0,t_1]$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t z^{''}(s)ds=\int_0^t 0ds &\Rightarrow z^{'}(t)-z^{'}(0)=0\\ &\Rightarrow z^{'}(t)=z^{'}(0),\\ \int_0^t z^{'}(s)ds=\int_0^t z^{'}(0)ds &\Rightarrow z(t)-z(0)=z^{'}(0)t\\ &\Rightarrow z(t)=z^{'}(0)t+z(0)\\ &\Rightarrow z(t)=z^{'}(0)t.\end{aligned}$$

Si $t\in]t_1,t_2]$, on a

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^t z^{''}(s)ds=\int_{t_1}^t 0ds &\Rightarrow z^{'}(t)-z^{'}(t_1^+)=0\\ &\Rightarrow z^{'}(t)=z^{'}(t_1^+)\\ \int_{t_1}^t z^{'}(s)ds=\int_{t_1}^t z^{'}(t_1^+)ds &\Rightarrow z(t)=z^{'}(t_1^+)+z^{'}(t_1^+)(t-t_1).\end{aligned}$$

Or, $z(t_1^+) - z(t_1) = \eta_1\Big(u(t_1), u^{'}(t_1)\Big)$, $z^{'}(t_1^+) - z^{'}(t_1) = \theta_1\Big(u(t_1), u^{'}(t_1)\Big)$ et $z(t_1) = z^{'}(0)t_1$, $z^{'}(t_1) = z^{'}(0)$.
Donc

$$z(t) = z^{'}(0)t + \eta_1\Big(u(t_1), u^{'}(t_1)\Big) + \theta_1\Big(u(t_1), u^{'}(t_1)\Big)(t - t_1).$$

Raisonnons par récurrence. On suppose que pour $t \in]t_{k-1}, t_k]$, on a

$$\begin{aligned} z(t) &= z^{'}(0)t + \sum_{j=1}^{j=k-1} \big[x(t_j^+) - x(t_j)\big] + \sum_{j=1}^{j=k-1} \big[x^{'}(t_j^+) - x^{'}(t_j)\big](t - t_j) \\ &= z^{'}(0)t + \sum_{j=1}^{j=k-1} \eta_j\Big(u(t_j), u^{'}(t_j)\Big) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j\Big(u(t_j), u^{'}(t_j)\Big)(t - t_j). \end{aligned}$$

Si $t \in]t_k, t_{k+1}]$, on a

$$\int_{t_k}^{t} z^{''}(s)ds = \int_{t_k}^{t} 0ds \Rightarrow z^{'}(t) = z^{'}(t_k^+)$$

$$\int_{t_k}^{t} z^{'}(s)ds = \int_{t_k}^{t} z^{'}(t_k^+)ds \quad \Rightarrow \quad z(t) = z(t_k^+) + z^{'}(t_k^+)(t - t_k).$$

Or $z(t_k^+) = z(t_k) + \eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)$, $z^{'}(t_k^+) = z^{'}(t_k) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)$,
et $z(t_k) = z^{'}(0)t_k + \sum_{j=1}^{j=k-1} \eta_j\Big(u(t_j), u^{'}(t_j)\Big) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j\Big(u(t_j), u^{'}(t_j)\Big)(t_k - t_j)$,
$z^{'}(t_k) = z^{'}(0) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j\Big(u(t_j), u^{'}(t_j)\Big)$.

Donc

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z(t_k)+\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)+(z^{'}(t_k)+\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)(t-t_k)\\
&= z^{'}(0)t_k+\sum_{j=1}^{j=k}\eta_j\Big(u(t_j),u^{'}(t_j)\Big)+\sum_{j=1}^{j=k-1}\theta_j\Big(u(t_j),u^{'}(t_j)\Big)(t_k-t_j)\\
&+ \left(z^{'}(0)+\sum_{j=1}^{j=k}\theta_j\Big(u(t_j),u^{'}(t_j)\Big)\right)(t-t_k)\\
&= z^{'}(0)t+\sum_{j=1}^{j=k}\eta_j\Big(u(t_j),u^{'}(t_j)\Big)+\sum_{j=1}^{j=k}\theta_j\Big(u(t_j),u^{'}(t_j),\lambda\Big)(t-t_j).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$z(t)=z^{'}(0)t+\sum_{0<t_k<t}\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)+\sum_{0<t_k<t}\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\Big)(t-t_k),\ t\in I.$$

Pour $t=1$, on a

$$z(1) = z^{'}(0)+\sum_{0<t_k<1}\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)+\sum_{0<t_k<1}\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)(1-t_k)=0.$$

Donc

$$z^{'}(0)=-\sum_{0<t_k<1}\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)-\sum_{0<t_k<1}\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)(1-t_k).$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \sum_{0<t_k<t}\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)+\sum_{0<t_k<t}\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)(t-t_k)\\
&- t\sum_{0<t_k<1}\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)-t\sum_{0<t_k<1}\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k)\Big)(1-t_k),\ t\in I.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G(t,s) f\left(s, u(s), u^{'}(s)\right) ds \\
&+ \sum_{0<t_k<t} \eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big) + \sum_{0<t_k<t} \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)(t-t_k) \\
&- t\sum_{0<t_k<1} \eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big) - t\sum_{0<t_k<1} \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)(1-t_k), \;\; t \in I. \blacksquare
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Bifurcation à partir des valeurs propres

Dans ce chapitre, nous rappelons certains théorèmes classiques sur l'analyse de bifurcation, comprenant la procédure de Lyapunov-Schmidt et les théorèmes de bifurcation à partir des valeurs propres de multiplicité impaire prouvés par Krasnosel'ski [54, 77, 78].

3.1 Théorème des fonctions implicites [90]

L'un des plus importants outils d'analyse pour résoudre le problème non-linéaire

$$F(x, y) = 0, \tag{3.1}$$

où F est une application de $U \times V$ à valeurs dans Z. Les ensembles U et V désignent des ouverts de X et Y réspectivement, où X, Y, Z sont des espaces de Banach réels, est le théorème des fonctions implicites.

Théorème 3.1.1 ***(Théorème des fonctions implicites* []*)***
Si (3.1) *a une solution* $(x_0, y_0) \in U \times V$ *tel que la dérivée de Fréchet de* F *par rapport à* x *au point* (x_0, y_0) *est bijective, i.e.*

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{et } \ D_xF(x_0, y_0) : X \to Z \ \text{ est borné (continu), d'inverse borné.}$$

On suppose toujours que F *et* D_xF *sont continues, i.e.*

$$F \in \mathcal{C}(U \times V, Z)$$

$$D_xF \in \mathcal{C}(U \times V, L(X,Z)),$$

où $L(X,Z)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Z muni de même norme de l'opérateur.
Alors, il existe un voisinage $U_1 \times V_1$ dans $U \times V$ de (x_0, y_0) et une application $\Phi : V_1 \to U_1 \subset X$ telle que

$$\Phi(y_0) = x_0 \quad \textit{et} \quad F(\Phi(y), y) = 0 \quad \textit{pour tout } y \in V_1.$$

De plus, Φ est continue sur V_1, i.e. $\Phi \in \mathcal{C}(V_1, X)$.
Finalement, chaque solution de (3.1) *dans $U_1 \times V_1$ est de la forme* $(\Phi(y), y)$.

Remarques 3.1.1 1) *Si $D_yF(x_0, y_0) = 0$, nous avons*

$$\Phi'(y_0) = 0, \quad \textit{i.e. } \Phi(y) = o(\|y - y_0\|).$$

2) *Si $F \in \mathcal{C}^k(U \times V, Z)$, alors $\Phi \in \mathcal{C}^k(V_1, X)$ pour $k \geq 1$.*
3) *Si F est une application analytique, alors l'application Φ est aussi analytique.*

Ce théorème a une importance fondamentale dans la théorie de la bifurcation si l'opérateur $D_xF(x_0, y_0) : X \to Z$ n'est pas bijectif, ainsi le problème (3.1) est étudié au voisinage de (x_0, y_0), en utilisant des techniques de bifurcation.

3.2 Quelques résultats sur la bifurcation [78]

Dans cette thèse, on s'intéresse au cas où la bifurcation des solutions signifie la multiplicité de solution de l'équation de la forme

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{3.2}$$

où les paramètres $\lambda \in Y = \mathbb{R}$. supposons que

$$F(0, \lambda_0) = 0, \quad \text{pour certain } (0, \lambda_0) \in U \times V$$

$$\text{et} \quad D_xF(0, \lambda_0) : X \to Z \quad \text{n'est pas bijectif.} \tag{3.3}$$

Alors, le théorème des fonctions implicites, théorème 3.1.1 n'est pas applicable.

Définition 3.2.1 *Le couple* $(0, \lambda_0)$ *est appelé point de bifurcation s'il existe une suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ *et une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U \setminus \{0\}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda_0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_X = 0$.

Dans la suite, on supposera que $X = Z$. Soit l'équation

$$F(x, \lambda) = x - \lambda Ax + N(x, \lambda) = 0 \tag{3.4}$$

où $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A : X \to X$ est un opérateur linéaire compact, et $N : X \times \mathbb{R} \to X$ une application continue vérifiant

$$N(x, \lambda) = \circ(\|x\|), \quad x \in X. \tag{3.5}$$

Remarque 3.2.1 *Il est clair que* $(x, \lambda) = (0, \lambda)$ *est une solution de l'équation* (3.4). *Le problème de bifurcation de* (3.4) *au point* $(0, \lambda)$ *permet de trouver une solution* $(x_\lambda, \lambda) \neq (0, \lambda)$ *de* (3.4) *tel que*

$$x_\lambda \to 0 \ \ \textit{quand} \ \ \lambda \to \lambda_0.$$

Proposition 3.2.1 *Si* $(0, \lambda_0)$ *est un point de bifurcation, alors* 1 *est valeur propre de* $\dfrac{\partial N}{\partial x}(0, \lambda_0)$.

Preuve
Le fait que $(0, \lambda_0)$ est un point de bifurcation, alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0, \lambda_0) = 0$.
Donc

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0, \lambda_0) = \lambda A - I.$$

D'après la condition (3.5), on a $\lambda A - I = 0$, ainsi $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.

Proposition 3.2.2 *Si* $(0, \lambda_0)$ *est un point de bifurcation, alors* λ_0 *est une valeur caractéristique de l'opérateur* A.

Preuve
Dans le cas contraire, on suppose λ_0 n'est pas une valeur caractéristique de A, alors $I - \lambda_0 A$ est inversible et donc il existe $k > 0$ tel que

$$\|(I - \lambda_0 A)x\| \geq k\|x\| \quad \text{pour tout} \ \ x \in X.$$

Alors, pour tout $(x,\lambda)\in X\times\mathbb{R}$, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|x-\lambda Ax+N(x,\lambda)\| &= \|(I-\lambda_0A)x+(\lambda_0-\lambda)Ax+N(x,\lambda)\| \\
&\geq \|(I-\lambda_0A)x\|-\|(\lambda_0-\lambda)Ax+N(x,\lambda)\| \\
&\geq \|(I-\lambda_0A)x\|-\|(\lambda_0-\lambda)Ax\|-\|N(x,\lambda)\| \\
&\geq k\|x\|-|\lambda-\lambda_0|\|Ax\|\pm k^{'}\|x\|^2 \\
&\geq \|x\|(k\pm k^{'}\|x\|)-\|A\||\lambda-\lambda_0|
\end{aligned}$$

avec $k^{'}>0$.
Si x est assez petit avec $x\neq 0$, alors $\|x\|\neq 0$ et $k^{'}<K$. Si, de plus, $|\lambda-\lambda_0|$ est assez petit, alors

$$\|x\|(k\pm k^{'}\|x\|)-\|A\||\lambda-\lambda_0|>0,$$

donc

$$\|x-\lambda Ax+N(x,\lambda)\|>0,$$

pour x assez petit non nul et $|\lambda-\lambda_0|$ est assez petit. Ainsi, l'équation $x-\lambda Ax+N(x,\lambda)=0$ admet 0 pour unique solution au voisinage de $(0,\lambda_0)$. Par conséquent, $(0,\lambda_0)$ n'est pas un point de bifurcation, ce qui est absurde.$\blacksquare$

Remarque 3.2.2 *La réciproque de la proposition* 3.2.1 *est fausse. En effet, si $X=Z=\mathbb{R}^2$ et si $F(x,\lambda)=(1-\lambda)(x_1,x_2)+(x_2^2,-x_2^3)$.*
Alors, 1 *est valeur caractéristique de $A=I$, mais $((0,0),\lambda)$ n'est pas un point de bifurcation.*

3.3 La méthode de Lyapunov-Schmidt

La méthode de Lyapunov et Schmidt décrit la réduction du problème (3.2) qui est de dimension infinie à un problème de dimension finie lorsque (3.3) est satisfaite.
Considérons l'équation (3.4) avec N satisfaisant (3.5). Soit λ_0^{-1} une valeur propre de A de multiplicité algébrique $m\geq 1$. Supposons que l'espace X est décomposable en somme direct de deux sous espaces invariants, avec

$$X=X_0\oplus X_1$$

où

$$X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X/(I - \lambda_0 A)^n x = 0\},$$

$$\dim X_0 = m.$$

Ainsi, l'opérateur A peut se décomposé en

$$A = A_0 + A_1$$

où

$$A_0 = A|_{X_0} : X_0 \to X_0,$$

$$A_1 = A|_{X_1} : X_1 \to X_1.$$

Soient $P_0 : X \to X_0$ et $P_1 = I - P_0 : X \to X_1$ deux projections canoniques. L'équation (3.4) est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} x - \lambda A_0 x + P_0 N(x + y, \lambda) = 0, \quad x \in X_0, & (3.6) \\ y - \lambda A_1 y + P_1 N(x + y, \lambda) = 0, \quad y \in X_1. & (3.7) \end{cases}$$

On pose $H(x, y) = y - \lambda A_1 x + P_1 N(x + y, \lambda)$, alors on a $H(0, 0) = 0$.
Le fait que λ_0^{-1} est une valeur propre de A, alors l'opérateur
$D_y H(0, 0) = I - \lambda_0 A_1$ qui est définie sur X_1 est inversible.
De plus, $D_x H(0, 0) = 0$.
D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $x = 0$ et il existe un voisinage V de $y = 0$ tels que (3.7) admet une unique solution

$$y = y(x, \lambda); \quad y(x, \lambda) = \circ(\|x\|). \tag{3.8}$$

De (3.6) et (3.8), on a

$$x - \lambda A_0 x + P_0 N(x + y(x, \lambda), \lambda) = 0, \quad x \in X_0, \tag{3.9}$$

qui est une équation de dimension m qui s'appelle équation de bifurcation du problème (3.4).

Théorème 3.3.1 *Soit λ_0^{-1} une valeur propre de A de multiplicité algébrique $m \geq 1$. Alors le problème de bifurcation de (3.4) au voisinage de $\lambda = \lambda_0$ est équivalent à*

$$x - \lambda A_0 x + P_0 N(x + y(x, \lambda), \lambda) = 0, \quad x \in X_0. \tag{3.10}$$

3.4 Bifurcation à partir des valeurs propres de multiplicités algébriques impaires

L'utilisation des méthodes topologiques se sont révélées trés précieuses dans la recherche de bifurcation pour les solutions d'équations dépendant d'un paramètre. M.A. Krasnosel'ski a apporté une contribution importante à ce genre de problème en considérant les valeurs propres de multiplicité algébriques impaires du problème linéaire pour démontrer l'existence des branches de solutions.

Théorème 3.4.1 ***(Théorème de Krasnosel'ski*** [77, 78]***)*** *Sous la condition* (3.5)*, si* $A : X \to X$ *est un opérateur linéaire compact, et* λ_0^{-1} *est une valeur propre de* A *de multiplicité algébrique impaire. Alors* $(0, \lambda_0)$ *est un point de bifurcation de* (3.4).

Preuve
Le fait que λ_0^{-1} est une valeur propre de A de multiplicité impaire, alors d'après le théorème 3.3.1, le problème (3.4) est équivalent à (3.9). Léquation de bifurcation (3.9) peut s'écrire sous forme

$$\begin{cases} x - \lambda A_0 x + g(x, \lambda) = 0, \\ g(x, \lambda) = P_0 N(x + y(x, \lambda), \lambda) = \circ(\|x\|). \end{cases} \tag{3.11}$$

Par le Théorème 1.4.3 et le Corollaire 1.4.3, on a

$$\begin{aligned} i(I - \lambda A_0 + g, 0, 0) &= i(I - \lambda A_0, 0, 0) \\ &= (-1)^\beta \end{aligned}$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<\lambda} m(\mu)$ et μ représente une valeur caractéristique de l'opérateur A_0 et $m(\mu)$ sa multiplicité algébrique.
D'un coté, si $\lambda_0 < \lambda$, alors

$$i(I - \lambda A_0, 0, 0) = -1.$$

D'un autre coté, si $\lambda_0 > \lambda$, alors $\beta = 0$, donc

$$i(I - \lambda A_0, 0, 0) = (-1)^0 = 1.$$

Ce qui implique que $(0, \lambda_0)$ est un point de bifurcation de (3.11).
Ainsi, $(0, \lambda_0)$ est un point de bifurcation de (3.4). ■
Maintenant, on considère un cas spécial o*ù* la multiplicité de la valeur propre λ_0^{-1} égale à $m = 1$.

3.5 Bifurcation à partir d'une valeur propre simple

Le résultat suivant donner par Crandall et Rabinovwitz est la base principale de la bifurcation à partir d'une valeur propre simple où ils ont précisé le nombre de branches de solutions du problème (3.4)

Théorème 3.5.1 ***(Théorème de Crandall- Rabinowitz*** [25, 78]***)*** *Soient X, Y deux espaces de Banach, V un voisinage de 0 dans X et*

$$F : V \times (-1, 1) \to Y$$

une application telle que

(a) $F(0, \lambda) = 0$ *pour* $|\lambda| < 1$,

(b) les dérivées partielles F_λ, F_x et $F_{\lambda x}$ existent et elles sont continues,

(c) $N(F_x(0,0))$ et $Y/R(F_x(0,0))$ sont de dimension un, où $N(F_x(0,0))$ et $R(F_x(0,0))$ sont respectivement le noyau et l'image de $F_x(0,0)$,

(d) $F_{\lambda x}(0,0)x_0 \notin R(F_x(0,0))$, oú $N(F_x(0,0)) = span\{x_0\}$.

Si Z est le complémentaire de $N(F_x(0,0))$ dans X, alors il exist un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times X$, un intervalle $(-a, a)$, et des fonctions continues $\varphi : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $\psi : (-a, a) \to Z$ telles que $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ et

$$F^{-1}(0) \cap U = \{(\alpha x_0 + \alpha\psi(\alpha), \varphi(\alpha)) \text{ pour } |\alpha| < a\} \cup \{(0, \lambda) \text{ pour } (0, \lambda) \in U\}.$$

De plus, si F_{xx} est aussi continue, les fonctions φ et ψ sont continuements différentiables.

Théorème 3.5.2 *Sous la condition* (3.5), *si $A : X \to X$ est un opérateur linéaire compact, et λ_0^{-1} est une valeur propre simple de A. Alors l'équation* (3.4) *possède éxactement au point $(0, \lambda_0)$ deux branches de bifurcation Γ_1 et Γ_2 données par la forme suivante*

$$\Gamma : (u_\lambda, \lambda), \quad u_\lambda = se + sv(s), \quad \lambda = \lambda_0 + \omega(s),$$

où $v(s) \in X$, $\omega(s) \in R$ sont des fonctions continues en s avec $v(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$. e est le vecteur propre de A correspondant à λ_0^{-1}.

Preuve:
Soit
$$F(u,\lambda) = u - \lambda Au + N(u,\lambda).$$
on a $F(0,\lambda) = 0$, $F_u(0,\lambda_0) = I - \lambda_0 A$ et $F_{\lambda u}(0,\lambda_0) = -A$.
Le fait que λ_0^{-1} est une valeur propre simple correspondante au vecteur propre e, alors
$N((F_u(0,\lambda_0)) = N(I - \lambda_0 A) = N(\lambda_0^{-1}I - A) = \{e\}$, donc
$$\dim N(F_u(0,\lambda_0)) = 1$$
et puisque $A : X \to X$ alors $F_u(0,\lambda_0) : X \to X$ ce qui donne
$$codimR(F_u(0,\lambda_0)) = codimR(\lambda_0^{-1}I - A) = 1$$
et que $N(\lambda_0^{-1}I - A)^2) = N(\lambda_0^{-1}I - A)$ implique que $e \notin R(\lambda_0^{-1}I - A)$, ce qui donne que
$$N(\lambda_0^{-1}I - A) = span\{e\}$$
D'aprés le lemme 1.3.1, l'équation (2.3) possède éxactement au point $(0,\lambda_0)$ deux branches de bifurcation Γ_1 et Γ_2 données par la forme suivante
$$\Gamma : (u_\lambda, \lambda), \quad u_\lambda = se + sv(s), \quad \lambda = \lambda_0 + \omega(s),$$
où $v(s) \in X$, $\omega(s) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions continues en s avec $v(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$. ■

Chapitre 4

Problème aux limites avec effets impulsifs dépendant d'un paramètre I

4.1 Introduction

Dans les sciences appliquées, plusieurs problèmes nécessite une analyse de bifurcation [24, 25, 77, 78]. Récemment, cette théorie a été appliquée aux équations différentielles impulsives [10, 11, 12, 61].
En 2011, Liu and O'Regan [70] ont été les premiers à introduire une nouvelle approche basée sur l'analyse de bifurcation pour des équations différentielles implsives. Ils n'ont traité que le cas particulier suivant

$$(1)\begin{cases} x^{''}(t)+ra(t)f\left(t,x(t)\right)=0, \quad t\in(0,1), \quad t\neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i}=\alpha_i x(t_i-0), \quad i=1,2,...,k, \\ x(0)=x(1)=0. \end{cases}$$

Ils ont transformé (1) en (2) donné par

$$(2)\begin{cases} y^{''}(t)+\dfrac{r}{\prod\limits_{0<t_i<t}(1+\alpha_i)}a(t)f(t,\prod\limits_{0<t_i<t}(1+\alpha_i)y(t))=0, \quad t\in(0,1), \\ y(0)=y(1)=0. \end{cases}$$

Le but était de confirmer l'existence de solutions multiples pour le problème (1), en utilisant les propriétés des valeurs propres et des fonctions propres pour les équations différentielles ordinaires correspondantes au problème

(2). Ils ont utilisé les théorèmes de bifurcation globaux de type Rabinowitz [94, 95].
Récemment, Wang et Yan [105] ont consideré le problème aux limites impulsif suivant

$$(3) \begin{cases} -x^{''}(t) = \lambda f\left(t, x(t)\right), \quad t \in (0,1), \quad t \neq \frac{1}{2}, \\ \Delta x|_{t=\frac{1}{2}} = \lambda \beta x(\frac{1}{2}), \\ \Delta x^{'}|_{t=\frac{1}{2}} = -\lambda \beta x^{'}(\frac{1}{2} - 0), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Ils ont démontré que les propriétés spectrales de la linéarisation du problème (3) sont similaires aux propriétés d'un problème standard de Sturm-Liouville. Tout en gardant les mêmes techniques de bifurcation que celles utilisées dans [70].
En 2016, Niu et Yan [89] ont analysé le problème suivant

$$(4) \begin{cases} -x^{''}(t) + f\left(t, x(t)\right) = \lambda a x(t), \quad t \in (0,1), \quad t \neq \frac{1}{2}, \\ \Delta x|_{t=\frac{1}{2}} = \beta_1 x(\frac{1}{2}), \\ \Delta x^{'}|_{t=\frac{1}{2}} = -\beta_2 x^{'}(\frac{1}{2}), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

En comparant les propriétés principales et spectrales des équations différentielles ordinaires correspondantes à (4), ils ont prouvé l'existence de solutions de (4).
Dans notre travail [14], nous avons abordé un problème aux limites avec des effets impulsifs plus général où les impulsions sont des fonctions qui dépendent implicitement du paramètre λ. Plus précisément, nous considèrons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u^{''}(t) = \lambda f\left(t, u(t), u^{'}(t)\right), \quad t \in (0,1), \quad t \neq t_k, & (4.1) \\ \Delta u(t_k) = \eta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), \quad k = 1, \ldots, r, & (4.2) \\ \Delta u^{'}(t_k) = \theta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), & (4.3) \\ u(0) = u(1) = 0, & (4.4) \end{cases}$$

où $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k)$, $\Delta u^{'}(t_k) = u^{'}(t_k^+) - u'(t_k)$,
$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r < t_{r+1} = 1$, $r \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $I^{'} := I - \{t_k\}_{k=1}^{r}$. On suppose que la fonction $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est assez régulière, $\eta_k \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $\theta_k \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

L'objectif de ce chapitre est d'analyser l'influence du paramètre λ pour prouver l'existence de solutions non triviales de $(4.1)-(4.4)$, en utilisant les théorèmes de Krasnosel'ski quand le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable.

4.2 Existence et unicité des branches de solutions [14]

Dans cette section, nous allons faire appelle au théorème des fonctions implicites pour prouver l'existence et l'unicité de solutions du problème $(4.1)-(4.4)$.

Définition 4.2.1 *Le couple $(u,\lambda)\in PC^2(I)\times\mathbb{R}$ est appelé une solution de $(4.1)-(4.4)$ s'il satisfait toutes les équations $(4.1),(4.2),(4.3)$ et (4.4).*

Lemme 4.2.1 *Le couple $(u,\lambda)\in PC^2(I)\times\mathbb{R}$ est une solution de $(4.1)-(4.4)$ si et seulement si $(u,\lambda)\in PC^1(I)\times\mathbb{R}$ et il satisfait l'èquation suivante*

$$\begin{aligned}
u(t) &= \lambda\int_0^1 G(t,s)f\Big(s,u(s),u^{'}(s)\Big)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{0<t_k<t}\Big\{\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)+\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)(t-t_k)\Big\} \\
&- t\sum_{0<t_k<1}\Big\{\eta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)+\theta_k\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)(1-t_k)\Big\}, \qquad \forall t\in I
\end{aligned}$$

où G est la fonction de Green du problème linéaire sans impulsions.

Soit $L: D(L)\subset PC^2(I)\to PC^0(I)$ un opérateur défini par

$$(Lv)(t)=v^{''}(t),\ t\in I$$

où $D(L):=\{u\in PC^2(I); u(0)=u(1)=0\}$.

Proposition 4.2.1 *L'opérateur L est inversible et $L^{-1}: PC^0(I)\to PC^2(I)$ est donné par*

$$(L^{-1}v)(t)=\int_0^1 G(t,s)v(s)ds.$$

Soit F l'opérateur de Nemitskii correspondant à f, alors

$$F : PC^1(I) \times \mathbb{R} \to PC^0(I),$$

$$F(u, \lambda)(t) = \lambda f\Big(t, u(t), u^{'}(t)\Big), \quad t \in I.$$

Soit $\Phi : PC^2(I) \times \mathbb{R} \to PC^2(I)$ une fonction donnée par

$$\begin{aligned} \Phi(u, \lambda)(t) \;\; &= \;\; \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big)(t - t_k) \Big\} \\ &- \;\; t \sum_{0<t_k<1} \Big\{ \eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big)(1 - t_k) \Big\}. \end{aligned}$$

Nous considérons l'application $H : PC^2(I) \times \mathbb{R} \to PC^2(I)$ telle que

$$H(u, \lambda) = L^{-1} F J(u, \lambda) + \Phi(u, \lambda)$$

où J est l'injection compacte définie par $J : PC^2(I) \times \mathbb{R} \longrightarrow PC^1(I) \times \mathbb{R}$ avec $J(u, \lambda) = (u, \lambda)$.
Alors, on a

$$L^{-1} \Big[F\Big(J(u, \lambda) \Big) \Big] (t) = \lambda \int_0^1 G(t, s) f\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \mathrm{d}s.$$

Lemme 4.2.2 *Les opérateurs Φ et H sont compacts.*

Preuve
L'opérateur Φ est une combinaison linéaire finie des fonctions de $PC^2(I)$. Alors $dim Im \Phi < \infty$, ce qui signifie que Φ est un opérateur compact. De plus, $L^{-1} F J$ est compact, donc H est compact.$\blacksquare$

Lemme 4.2.3 *Le couple $(u, \lambda) \in PC^2(I) \times \mathbb{R}$ est une solution de $(4.1) - (4.4)$ si et seulement si $H(u, \lambda) = u$.*

Proposition 4.2.2 *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé, on a* $\dfrac{\partial H}{\partial u}(.,\lambda) : PC^2(I) \to \mathfrak{L}(PC^2(I))$ *et*

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial H}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &\leq |\lambda| \int_0^1 \|G\|_{L_\infty} \Big[\left| \frac{\partial f}{\partial x}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \right| \Big] ds \\
&+ 2 \sum_{0<t_k<1} \left\{ \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| + \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| \right\} \\
&+ \left\{ \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| + \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Preuve
Comme

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,\lambda).\varphi = \frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial u}(u,\lambda).\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\lambda).\varphi,$$

pour $\varphi \in PC^2(I)$, avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial u}(u,\lambda).\varphi &= \lambda \int_0^1 G(t,s) \frac{\partial f}{\partial u}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big).\varphi \,\mathrm{d}s \\
&= \lambda \int_0^1 G(t,s) \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big).\varphi^{'}(s) \Big] \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\lambda).\varphi &= \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi^{'}(t_k) \Big] \\
&+ \Big[\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi^{'}(t_k) \Big](t - t_k) \Big\} \\
&- t \sum_{0<t_k<1} \Big\{ \Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi^{'}(t_k) \Big] \\
&+ \Big[\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big).\varphi^{'}(t_k) \Big](1 - t_k) \Big\},
\end{aligned}$$

alors, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &= \sup_{\|\varphi\|_2 \leq 1} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\lambda).\varphi \right\|_2 \\
&\leq 2 \sum_{0<t_k<1} \left\{ \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| + \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| \right. \\
&+ \left. \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| + \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| \right\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &= \sup_{\|\varphi\|_2 \leq 1} \left\| \frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_2 \\
&\leq |\lambda| \int_0^1 \|G\|_{L_\infty} \Big[\left| \frac{\partial f}{\partial x}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \right| \\
&+ |\frac{\partial f}{\partial y}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \Big| \Big] ds.
\end{aligned}$$

Par conséquence

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial H}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &\leq \left\| \frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\lambda) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} \\
&\leq |\lambda| \int_0^1 \|G\|_{L_\infty} \Big[\left| \frac{\partial f}{\partial x}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) \right| \Big] ds \\
&+ 2 \sum_{0<t_k<1} \left\{ \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| + \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| \right. \\
&+ \left. \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial x}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| + \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) \right| \right\} . \blacksquare
\end{aligned}$$

Soit l'opérateur

$$M(u,\lambda) = u - H(u,\lambda). \tag{4.5}$$

Nous considérons les hypothèses suivantes

(H1) $f(t,0,0)=0, \quad \forall t \in I.$

(H2) $\eta_k(0,0,\lambda^\star)=0,$ pour un certains $\lambda^\star \in \mathbb{R}$.

(H3) $\theta_k(0,0,\lambda^\star)=0$ pour un certains $\lambda^\star \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2.3 *Si* (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors* $M(0,\lambda^\star)=0$, *et* $\dfrac{\partial M}{\partial u}(0,\lambda^\star) = I - \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)$.

Nous avons obtenu les résultats suivants

Théorème 4.2.1 *Si* $I - \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)$ *est inversible et* (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (4.1) − (4.4) *admet une unique solution* (u_λ, λ).

Preuve
L'existence d'une solution nontriviale du problème (4.1)−(4.4) est équivalent à l'existence de $u \in PC^2(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$M(u,\lambda)=0.$$

Puisque

$$M(0,\lambda^\star)=0$$

et

$$\frac{\partial M}{\partial u}(0,\lambda^\star) = I - \frac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)$$

est un opérateur inversible, alors le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, le problème (4.1) − (4.4) admet une unique solution (u_λ, λ).

Lemme 4.2.4 *Si* $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$, *alors* $\dfrac{\partial M}{\partial u}(0,\lambda^\star) = I - \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)$ *est inversible.*

Corollaire 4.2.1 *Si* $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$ *et* (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (4.1) − (4.4) *admet une unique solution* (u_λ, λ).

Corollaire 4.2.2 *Si*

$$|\lambda^\star|\int\limits_0^1 \|G\|_{L_\infty}\Big[\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0)\Big|+\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0)\Big|\Big]ds$$

$$+2\sum_{0<t_k<1}\Bigg\{\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda^\star)\Big|+\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda^\star)\Big|$$

$$+\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda^\star)\Big|+\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda^\star)\Big|\Bigg\}<1$$

et (H1) $-$ (H3) *sont satisfaites, alors il existe* $\delta>0$ *tel que pour* $|\lambda-\lambda^\star|<\delta$, *le problème* (4.1) $-$ (4.4) *admet une unique solution* (u_λ,λ).

4.3 Bifurcation des branches de solutions [14]

Dans cette section, nous allons prouver l'existence des branches de solutions, en utilisant les théorèmes 3.4.1 et 3.5.2 de bifucation de Krasnosel'ski lorsque l'opérateur $I-\dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)$ n'est pas inversible au voisinage de $(0,\lambda^\star)$.
Soit $A: PC^2(I)\to PC^2(I)$ un opérateur linéaire compact donné par

$$A\varphi(t):=\int\limits_0^1 G(t,s)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0).\varphi(s)+\frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0).\varphi^{'}(s)\Big)\mathrm{d}s.$$

Nous introduisons les hypothèses suivantes

(H4) $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda)=0,$

(H5) $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda)=0,$

(H6) $\dfrac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda)=0,$

(H7) $\dfrac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda)=0.$

Soit l'équation

$$M(u,\lambda) = u - \lambda A u + N(u,\lambda) = 0$$

où

$$N(u,\lambda) = \lambda A u - H(u,\lambda).$$

Proposition 4.3.1 *Si les hypothèses* (H1) − (H7) *sont satisfaites, alors*

$$N(u,\lambda) = \circ(\|u\|_2).$$

Preuve
Le fait que

$$\begin{aligned}
\Big(D_u N(0,\lambda)\varphi\Big)(t) &= \left(\left(\lambda A - \frac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda)\right)\varphi\right)(t) \\
&= \lambda \int_0^1 G(t,s)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0).\varphi^{'}(s)\Big)\mathrm{d}s \\
&- \lambda \int_0^1 G(t,s)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0).\varphi^{'}(s)\Big)\mathrm{d}s \\
&- \sum_{0<t_k<t}\Bigg\{\frac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda).\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda).\varphi^{'}(t_k) \\
&+ \Big(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda).\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda).\varphi^{'}(t_k)\Big)(t - t_k)\Bigg\} \\
&+ t\sum_{0<t_k<1}\Bigg\{\frac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda).\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda).\varphi^{'}(t_k) \\
&+ \Big(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda).\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda).\varphi^{'}(t_k)\Big)(1 - t_k)\Bigg\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
N(0,\lambda) &= -H(0,\lambda) \\
&= -\lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,0,0)ds - \sum_{0<t_k<t} \Big\{\eta_k(0,0,\lambda) + \theta_k(0,0,\lambda)(t-t_k)\Big\} \\
&+ t \sum_{0<t_k<1} \Big\{\eta_k(0,0,\lambda) + \theta_k(0,0,\lambda)(1-t_k)\Big\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

alors

$$N(u,\lambda) = \circ(\|u\|_2).$$

Les résultats principaux de ce chapitre sont donnés dans les théorèmes suivants

Théorème 4.3.1 *Si* (H1) − (H7) *sont satisfaites et* $\mu \in \mathbb{R}^*$ *est une valeur propre de* A *de multiplicité algébrique impaire, alors* $(u,\lambda) = (0,\mu^{-1})$ *est un point de bifurcation de solutions de* $M(u,\lambda) = 0$ *et le problème* (4.1) − (4.4) *admet des branches de solutions qui bifurquent de ce point.*

Preuve
Puisque la condition (3.5) est satisfaite et le fait que $\mu \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre réelle de A de multiplicité algébrique impaire. Alors d'après le théorème 3.4.1, le problème (4.1)−(4.4) admet des branches de solutions qui bifurquent de ce point.

Théorème 4.3.2 *Si* (H1) − (H7) *sont satisfaites et* $\mu \in \mathbb{R}^*$ *est une valeur propre simple de* A*, alors le problème* (4.1) − (4.4) *admet exactement deux branches de solutions qui bifurquent du point* $(0,\mu^{-1})$.

Preuve
Puisque la condition (3.5) est satisfaite et le fait que $\mu \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre simple de A, alors le théorème 3.5.2 implique que le problème (4.1) − (4.4) admet exactement deux branches de solutions Γ_1 and Γ_2 qui bifurquent du point $(0,\mu^{-1})$.■
Dans le théorème précédent, nous avons supposé que la multiplicité de μ est

simple. Pour trouver le nombre des branches de solutions, nous allons étudier la multiplicité de μ. Posons
$p(s) := \dfrac{\partial f}{\partial x}(s,0,0)$ et $q(s) := \dfrac{\partial f}{\partial y}(s,0,0)$, alors, on a

$$(A\varphi)(t) = \int_0^1 G(t,s)\Big(p(s).\varphi(s) + q(s).\varphi^{'}(s)\Big)ds, \qquad \forall \varphi \in PC^2(I).$$

Proposition 4.3.2 *μ est une valeur propre de A, s'il existe $\varphi \in PC^2(I)\backslash\{0\}$ tel que*

$$\begin{cases} \mu\varphi^{''}(t) - q(t)\varphi^{'}(t) - p(t)\varphi(t) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \\ \Delta\varphi(t_k) = \Delta\varphi^{'}(t_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq r. \end{cases}$$

Preuve

On a $A\varphi(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)\Big(p(s).\varphi(s) + q(s).\varphi^{'}(s)\Big)ds.$

On pose $K(t,s) = p(s)G(t,s) - \dfrac{\partial}{\partial s}\Big(q(s)G(t,s)\Big)$.

Le fait que $G(t,s)q(s).\varphi^{'}(s) = -\dfrac{\partial}{\partial s}\Big(q(s)G(t,s)\Big).\varphi(s)$,
alors

$$A\varphi(t) = \int_0^1 K(t,s)\varphi(s)ds \Rightarrow (A\varphi)^{''}(t) = q(t).\varphi^{'}(t) + p(t).\varphi(t).$$

Puisque μ est une valeur propre de A, alors

$$A\varphi(t) = \mu\varphi(t)$$

avec $\varphi \neq 0$.
Donc

$$(A\varphi)^{''}(t) = \mu\varphi^{''}(t) = q(t).\varphi^{'}(t) + p(t).\varphi(t).$$

Ainsi

$$\mu\varphi^{''}(t) - q(t).\varphi^{'}(t) - p(t).\varphi(t) = 0.$$

De plus, le fait que $KerA = \{0\}$, alors A est injectif et donc

$$\mu \neq 0.$$

D'autre part, $(A\varphi)(0) = \mu\varphi(0) = 0$, ce qui donne

$$\varphi(0) = 0,$$

et $(A\varphi)(1) = \mu\varphi(1) = 0$, ce qui donne

$$\varphi(1) = 0.$$

Démontrons que $\triangle\varphi(t_k) = \triangle\varphi^{'}(t_k) = 0$. On suppose que

$$\mu\varphi^{''}(t) - q(t).\varphi^{'}(t) - p(t).\varphi(t) = 0$$

avec $\triangle\varphi(t_k) = \alpha_k$ et $\triangle\varphi^{'}(t_k) = \beta_k$.
D'après la continuité uniforme de G sur I^2, alors

$$\int_0^1 G(t,s)\Big(p(s).\varphi(s) + q(s).\varphi^{'}(s)\Big)ds \text{ est continue.}$$

Donc $A\varphi$ est continue, par suite $\mu\varphi$ est continue, ce qui donne φ est continue, donc

$$\varphi(t_k^+) = \varphi(t_k)$$

d'où

$$\alpha_k \equiv 0.$$

En plus,

$$\begin{aligned}
\mu\varphi(t) &= \int_0^1 G(t,s)\Big(p(s).\varphi(s) + q(s).\varphi^{'}(s)\Big)ds + \sum_{0<t_k<t}\beta_k(t-t_k) - t\sum_{0<t_k<1}\beta_k(1-t_k) \\
&= A\varphi(t) \\
&= \int_0^1 G(t,s)\Big(p(s).\varphi(s) + q(s).\varphi^{'}(s)\Big)ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{0<t_k<t}\beta_k(t-t_k) - t\sum_{0<t_k<1}\beta_k(1-t_k) = 0,$$

Ainsi

$$\beta_k \equiv 0.\blacksquare$$

Proposition 4.3.3 *Si φ est une fonction propre de A, alors $\varphi \in C^2(I)$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et si $\mu \neq 0$ alors φ satisfait l'équation différentielle*

$$\varphi^{''}(t) - \frac{q(t)}{\mu}\varphi^{'}(t) - \frac{p(t)}{\mu}\varphi(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Preuve
Le fait que $A\varphi$ est continu sur I alors φ est continue,
et que $\triangle\varphi(t_k) = \triangle\varphi^{'}(t_k) = 0$, alors $\varphi \in C^2(I)$.
De plus, on a $\forall t \in I$

$$\varphi^{''}(t) - \frac{q(t)}{\mu}\varphi^{'}(t) - \frac{p(t)}{\mu}\varphi(t) = 0.\blacksquare$$

Lemme 4.3.1 $\mu(\neq 0)$ *est une valeur propre de A, si et seulement s'il existe $\varphi \in C^2(I) \setminus \{0\}$ telle que μ satisfait le problème aux limites suivant*

$$(\mathcal{P}_\mu)\begin{cases} \varphi''(t) - \dfrac{q(t)}{\mu}\varphi'(t) - \dfrac{p(t)}{\mu}\varphi(t) = 0 & \forall t \in I, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Preuve
Le fait que $A\varphi$ est continu sur I et que φ est une fonction propre de A associée à la valeur propre $\mu(\neq 0)$ alors φ est continue sur I.
La proposition 4.3.2 donne $\triangle\varphi(t_k) = \triangle\varphi^{'}(t_k) = 0$.
Alors, on a $\varphi \in C^2(I) \setminus \{0\}$, et

$$\varphi^{''}(t) - \frac{q(t)}{\mu}\varphi^{'}(t) - \frac{p(t)}{\mu}\varphi(t) = 0 \ \ \forall t \in I,$$

avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0.\blacksquare$
Nous déduisons les résultats suivants

Corollaire 4.3.1 *Si* (H1) − (H7) *sont satisfaites et $\mu(\in \mathbb{R}^*)$ est une valeur propre du problème aux limites $(\mathcal{P}_\mu)$, de multiplicité algébrique impaire, alors* (4.1) − (4.4) *admet des branches de solutions qui bifurquent du point* $(0, \mu^{-1})$.

Corollaire 4.3.2 *Si* (H1) − (H7) *sont satisfaits et $\mu(\in \mathbb{R}^*)$ est une valeur propre simple de problème aux limites $(\mathcal{P}_\mu)$, alors* (4.1) − (4.4) *admet exactement deux branches de solutions Γ_1 et Γ_2 bifurquant du point* $(0, \mu^{-1})$.

4.4 Applications

Exemple 1 *Considérons le problème homogène* $(4.1)-(4.4)$ *suivant*

$$\begin{cases} u^{''}(t) = \lambda f\left(t, u(t), u^{'}(t)\right), t \in (0,1), t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = \lambda \eta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right), \quad k = 1, \ldots, r, \\ \Delta u^{'}(t_k) = \lambda \theta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

où $f(t,0,0) = 0$, $\eta_k(0,0) = 0$ *et* $\theta_k(0,0) = 0$.
On a

$$\begin{aligned} H(u,\lambda) &= \lambda\Big[\int_0^1 G(t,s) f\Big(s, u(s), u^{'}(s)\Big) ds \\ &+ \sum_{0<t_k<t} \Big\{\eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)(t-t_k)\Big\} \\ &- t\sum_{0<t_k<1} \Big\{\eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k)\Big)(1-t_k)\Big\}\Big]. \end{aligned}$$

D'une part, si $\left\|\dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)\right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$ *pour un certains* $\lambda^\star \in \mathbb{R}^\star$, *alors le corollaire* 4.2.1 *implique qu' il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (4.6) *admet une unique solution* (u,λ).
De l'autre part, si $\left\|\dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)\right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} > 1$ *pour un certains* $\lambda^\star \in \mathbb{R}^\star$, *alors*
pour $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0) = 0$, *on a*

$$A\varphi(t) = \int_0^1 G(t,s)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0).\varphi^{'}(s)\Big)\mathrm{d}s.$$

Ainsi, les branches de solutions qui bifurquent du point $(0,\mu^{-1})$, *du problème* (4.6) *où* μ *est la valeur propre de* A, *sont les mêmes solutions du problème aux limites* $(\mathcal{P}_\mu)$.

Exemple 2 *Considérons le problème aux limites pour les équations différentielles impulsives du second ordre*

$$\begin{cases} u^{''}(t) = \lambda\left(au(t) + bu^{'}(t)\right), & t \in (0,1), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = \eta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), & k = 1, \ldots, r, \\ \Delta u^{'}(t_k) = \theta_k\left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\right), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

où $\eta_k(0,0,\lambda) = 0$, $\theta_k(0,0,\lambda) = 0$ *et* a, b *des constantes.*
On a

$$\begin{aligned} H(u,\lambda) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)\Big(au(s) + bu^{'}(s)\Big)ds \\ &+ \sum_{0<t_k<t} \Big\{\eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big)(t - t_k)\Big\} \\ &- t \sum_{0<t_k<1} \Big\{\eta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda\Big)(1 - t_k)\Big\}. \end{aligned}$$

D'un coté, si $\left\|\dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)\right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$ *pour un certains* $\lambda^\star \in \mathbb{R}$, *alors le corollaire* 4.2.1 *implique qu' il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$ *et le problème* (4.7) *admet une unique solution* (u,λ).
De l'autre coté, si $\left\|\dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)\right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} > 1$, *nous examinons l'existence des branches de solutions qui bifurquent du point* $(0,\lambda^\star)$.
Pour $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda) = 0$, $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda) = 0$, $\dfrac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda) = 0$ *et* $\dfrac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda) = 0$, *on a*

$$A\varphi(t) = \int_0^1 G(t,s)\Big(a\varphi(s) + b\varphi^{'}(s)\Big)ds.$$

Les valeurs propres de l'opérateur A *sont les mêmes valeurs propres du problème aux limites* $(\mathcal{P}_\mu)$

$$\begin{cases} \varphi''(t) - \dfrac{b}{\mu}\varphi'(t) - \dfrac{a}{\mu}\varphi(t) = 0, & t \in I \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle dans $(\mathcal{P}_\mu)$, *est* $x^2 - \dfrac{b}{\mu}x - \dfrac{a}{\mu} = 0$, *avec le discriminant*

$$\Delta_x = \frac{b^2 + 4a\mu}{\mu^2}.$$

Si $\mu < \dfrac{-b^2}{4a}$ *et* $a \in]-\infty, -bn\pi[\cup]bn\pi, +\infty[$ *avec* $n \geq 1$, *alors pour* $t \in I$, *on a les fonctions propres*

$$\varphi_n^i(t) = \exp\left(\frac{b}{2\mu_n^i}t\right)\left(C_1 \cos \frac{1}{2\mu_n^i}\sqrt{-b^2 - 4a\mu_n^i}\,t + C_2 \sin \frac{1}{2\mu_n^i}\sqrt{-b^2 - 4a\mu_n^i}\,t\right) \qquad i = 1, 2$$

associées aux valeurs propres simples μ_n^1 *et* μ_n^2 *de* A *données par* $\mu_n^1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - b^2n^2\pi^2}}{2n^2\pi^2}$ *et* $\mu_n^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2n^2\pi^2}}{2n^2\pi^2}$.
Le corollaire 4.3.2 *implique que si* $\lambda = \mu_n^1$ *ou* $\lambda = \mu_n^2$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors le problème* (4.7) *admet exactement deux branches de solutions* Γ_1^i *et* Γ_2^i *qui bifurquent du point* $(0, (\mu_n^i)^{-1})$ *avec* $i = 1, 2$.

Chapitre 5

Problème aux limites avec effets impulsifs dépendant d'un paramètre II

5.1 Introduction

Le fait de considérer un problème de bifurcation pour des équations différentielles impulsives n'est pas simple, d'ailleurs à ce jour, il n'existe que quelques articles dans ce domaine [70, 89, 105]. Nous allons généraliser le problème (4.1) – (4.4) dans le cas où la nonlinéarité f depend implicitement du paramètre λ avec des impulsions dépendant de l'état et de sa dérivée de façon non linéaire et linéairement par rapport au paramètre λ. Plus précisément, Nous allons examiner l'existence de solutions du problème aux limites impulsif suivant

$$\begin{cases} u^{''}(t) = f(t, u(t), u^{'}(t), \lambda), \quad t \in (0,1), \quad t \neq t_k, & (5.1) \\ \Delta u(t_k) = \eta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda \right), \quad k = 1, \ldots, r, & (5.2) \\ \Delta u^{'}(t_k) = \theta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k), \lambda \right), & (5.3) \\ u(0) = u(1) = 0, & (5.4) \end{cases}$$

où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r < t_{r+1} = 1$, $r \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que la fonction $f : I \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est assez régulière, $\eta_k \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\theta_k \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

5.2 Existence et unicité [14]

Dans cette section, nous allons étudier l'existence et l'unicité de solutions du problème (5.1) – (5.4), en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Définition 5.2.1 *Le couple* $(u, \lambda) \in PC^2(I) \times \mathbb{R}$ *est appelé une solution de* (5.1) – (5.4)*, s'il satisfait toutes les équations* (5.1) – (5.4)*.*

Lemme 5.2.1 *Le couple* $(u, \lambda) \in PC^2(I) \times \mathbb{R}$ *est une solution de* (5.1) – (5.4) *si et seulement si* $(u, \lambda) \in PC^1(I) \times \mathbb{R}$ *et il satisfait l'équation suivante*

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G(t,s) f\Big(s, u(s), u'(s), \lambda\Big) \mathrm{d}s \\ &+ \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \eta_k\Big(u(t_k), u'(t_k), \lambda\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u'(t_k), \lambda\Big)(t - t_k) \Big\} \\ &- t \sum_{0<t_k<1} \Big\{ \eta_k\Big(u(t_k), u'(t_k), \lambda\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u'(t_k), \lambda\Big)(1 - t_k) \Big\}, \qquad \forall t \in I \end{aligned}$$

où G *est la fonction de Green du problème linéaire sans impulsions.*

Soit F l'opérateur de Nemitskii correspondant à f, alors on a

$$F : PC^1(I) \times \mathbb{R} \to PC^0(I),$$

$$F(u, \lambda)(t) := f\Big(t, u(t), u'(t), \lambda\Big), \quad t \in I.$$

Soit $\Phi : PC^2(I) \times \mathbb{R} \to PC^2(I)$ une fonction donnée par

$$\begin{aligned} \Phi(u, \lambda)(t) &= \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \eta_k\Big(u(t_k), u'(t_k, \lambda)\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u'(t_k, \lambda)\Big)(t - t_k) \Big\} \\ &- t \sum_{0<t_k<1} \Big\{ \eta_k\Big(u(t_k), u'(t_k, \lambda)\Big) + \theta_k\Big(u(t_k), u'(t_k, \lambda)\Big)(1 - t_k) \Big\}. \end{aligned}$$

Nous considérons l'application $H : PC^2(I) \times \mathbb{R} \to PC^2(I)$ telle que

$$H(u, \lambda) = L^{-1} F J(u, \lambda) + \Phi(u, \lambda),$$

où J est l'injection compacte notée $J : PC^2(I) \times \mathbb{R} \longrightarrow PC^1(I) \times \mathbb{R}$.
Alors, on a

$$L^{-1}\left[F\Big(J(u,\lambda)\Big)\right](t) = \int_0^1 G(t,s) f\Big(s, u(s), u^{'}(s), \lambda\Big) \mathrm{d}s.$$

Lemme 5.2.2 *Les opérateurs* Φ *et* H *sont compacts.*

Preuve
La preuve est similaire à celle du chapitre précédent (lemme 4.2.2).

Lemme 5.2.3 *Le couple* $(u,\lambda) \in PC^2(I) \times \mathbb{R}$ *est une solution de* (5.1)−(5.4) *si et seulement si* $H(u,\lambda) = u$.

Proposition 5.2.1 *Pour* $\lambda(\in \mathbb{R})$ *fixé, on a* $\dfrac{\partial H}{\partial u}(.,\lambda) : PC^2(I) \to \mathfrak{L}(PC^2(I))$ *et*

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial H}{\partial u}(u,\lambda)\right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &\leq \int_0^1 \|G\|_{L_\infty}\Big[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Big(s,u(s),u^{'}(s),\lambda\Big)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Big(s,u(s),u^{'}(s),\lambda\Big)\right|\Big] ds \\
&+ 2\Big[\sum_{0<t_k<1}\left\{\left|\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)\right| + \left|\frac{\partial \eta_k}{\partial y}\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)\right|\right\} \\
&+ \left\{\left|\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)\right| + \left|\frac{\partial \theta_k}{\partial y}\Big(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\Big)\right|\right\}\Big].
\end{aligned}$$

Soit l'opérateur

$$\psi(u,\lambda) = u - H(u,\lambda). \tag{5.5}$$

Nous considérons les hypothèses suivantes
$(H1)$ $\quad f(t,0,0,\lambda^\star) = 0, \quad \forall t \in I,$ pour un certains $\lambda^\star \in \mathbb{R}$,
$(H2)$ $\quad \eta_k(0,0,\lambda^\star) = 0,$ pour un certains $\lambda^\star \in \mathbb{R}$,
$(H3)$ $\quad \theta_k(0,0,\lambda^\star) = 0,$ pour un certains $\lambda^\star \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.2.2 *Si* (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors* $\psi(0,\lambda^\star) = 0$, *et* $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(0,\lambda^\star) = I - \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star)$.

Nous avons les résultats suivants

Théorème 5.2.1 *Si* $I - \dfrac{\partial H}{\partial u}(0, \lambda^\star)$ *est inversible et* (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (5.1) − (5.4) *admet une unique solution* (u_λ, λ).

Preuve
La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 4.2.1.

Corollaire 5.2.1 *Si* $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0, \lambda^\star) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$ *et* (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (5.1) − (5.4) *admet une unique solution* (u_λ, λ).

Corollaire 5.2.2 *Si*

$$\int_0^1 \|G\|_{L_\infty} \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0, 0, \lambda^\star) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, 0, 0, \lambda^\star) \right| \right] \mathrm{d}s$$

$$+2 \sum_{k=1}^{r} \left[\left| \frac{\partial \eta_k}{\partial x}(0, 0, \lambda^\star) \right| + \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial y}(0, 0, \lambda^\star) \right| + \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0, 0, \lambda^\star) \right| + \left| \frac{\partial \theta_k}{\partial y}(0, 0, \lambda^\star) \right| \right] < 1,$$

et (H1) − (H3) *sont satisfaites, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (5.1) − (5.4) *admet une unique solution* (u_λ, λ).

5.3 Analyse de la bifurcation [14]

Dans cette section, nous utilisons utilisant les théorèmes 3.4.1 et 3.5.2 pour démontrer l'existence des branches de solutions bifurquées quand l'opérateur $I - \dfrac{\partial H}{\partial u}(0, \lambda^\star)$ n'est pas inversible pour certains $\lambda^\star \in \mathbb{R}$.
Posons

$$N(u, \lambda) = \lambda A u - H(u, \lambda).$$

Si $\Big(D_u N(0, \lambda)\Big)\varphi(t) = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
A\varphi(t) \quad &= \quad \frac{1}{\lambda}\Big[\int_0^1 G(t,s)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0,\lambda)\varphi(s)+\frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0,\lambda)\varphi^{'}(s)\right)ds \\
&+ \sum_{0<t_k<t}\Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda)\varphi(t_k)+\frac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda)\varphi^{'}(t_k) \\
&+ \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda)\varphi(t_k)+\frac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda)\varphi^{'}(t_k)\right)(t-t_k)\Big] \\
&- t\sum_{k=1}^{r}\Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0,\lambda)\varphi(t_k)+\frac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0,\lambda)\varphi^{'}(t_k) \\
&+ \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0,\lambda)\varphi(t_k)+\frac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0,\lambda)\varphi^{'}(t_k)\right)(1-t_k)\Big]\Big] := A(\lambda)\varphi(t).
\end{aligned}
$$

Alors

$$\psi(u,\lambda)=u-\lambda A(\lambda)u+N(u,\lambda)=0.$$

Le théorème de Krasnosel'ski n'est pas applicable, le fait que l'opérateur A dépend de λ. Alors pour pouvoir utiliser le théorème de Krasnosel'skin nous avons besoin des hypothèses suivantes

$(H4)$ $\eta_k\left(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\right)=\lambda\eta_k^1\left(u(t_k),u^{'}(t_k)\right)$,

$(H5)$ $\theta_k\left(u(t_k),u^{'}(t_k),\lambda\right)=\lambda\theta_k^1\left(u(t_k),u^{'}(t_k)\right)$.

Soit $A^1: PC^2(I)\to PC^2(I)$ un opérateur linéaire compact donné par

$$
\begin{aligned}
A^1\varphi(t) \quad &= \quad \sum_{0<t_k<t}\Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k)+\frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) \\
&+ \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k)+\frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(t-t_k)\Big] \\
&- t\sum_{k=1}^{r}\Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k)+\frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) \\
&+ \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k)+\frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(1-t_k)\Big].
\end{aligned}
$$

Nous avons

$$\psi(u,\lambda)=u-\lambda A^1u+N(u,\lambda)=0,$$

où $N(u,\lambda) = \lambda A^1 u - H(u,\lambda)$.
Alors

$$\Big(D_u N(0,\lambda)\Big)\varphi(t) = \lambda A^1\varphi(t) - \frac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda)\varphi(t)$$

$$= \lambda \sum_{0<t_k<t} \Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) + \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(t-t_k)\Big]$$

$$-\lambda t \sum_{k=1}^{r} \Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) + \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(1-t_k)\Big]$$

$$-\int_0^1 G(t,s)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0,\lambda)\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0,\lambda)\varphi^{'}(s)\right)ds$$

$$-\lambda \sum_{0<t_k<t} \Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) + \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(t-t_k)\Big]$$

$$+\lambda t \sum_{k=1}^{r} \Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) + \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(1-t_k)\Big]$$

et

$$\begin{aligned} N(0,\lambda) &= -H(0,\lambda) \\ &= -\int_0^1 G(t,s)f(s,0,0,\lambda)ds - \lambda \sum_{0<t_k<t}\left[\eta_k^1(0,0) + \theta_k^1(0,0)(t-t_k)\right] \\ &+ \lambda t \sum_{k=1}^{r}\left[\eta_k^1(0,0) + \theta_k^1(0,0)(1-t_k)\right]. \end{aligned}$$

Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

$(H6)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0,0,\lambda) = 0 \ \ \forall t \in I, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$(H7)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0,0,\lambda) = 0 \ \ \forall t \in I, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$(H8)$ $\quad \mu \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre de A^1 de multiplicité algébrique impaire,

$(H9)$ $\quad \mu \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre de A^1.

Alors, nous avons $D_u N(0,\lambda) = 0$ et $N(0,\lambda) = 0$, donc

$$N(u,\lambda) = o(\|u\|_2).$$

Ainsi, le théorème 3.4.1 implique

Théorème 5.3.1 *Si les hypothèses (H1)-($H8$) sont satisfaites, alors* $(u,\lambda) = (0,\mu^{-1})$ *est un point de bifurcation de solutions de* $\psi(u,\lambda) = 0$*, et le problème* $(5.1) - (5.4)$ *admet des branches de solutions qui bifurquent de ce point.*

Preuve
La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.3.1.■
Le théorème 3.5.2 implique

Théorème 5.3.2 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H1}) - (\mathrm{H7})$ *et* $(\mathrm{H9})$ *sont satisfaites, alors* $(5.1)-(5.4)$ *possède exactement deux branches de solutions qui bifurquent du point* $(0,\mu^{-1})$.

Preuve
La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 4.3.2.■
Dans ce qui suit, nous allons étudier la multiplicité de valeurs propres de l'opérateur A^1 pour déterminer le nombre de branches de solutions.
Soient $a_k := \dfrac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)$, $b_k := \dfrac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)$, $c_k := \dfrac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)$ et $d_k := \dfrac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)$.
Posons $A_k := -c_k t_k^2 + (a_k - d_k)t_k + b_k$,
$B_k := -c_k t_k^2 + (a_k + c_k - d_k)t_k + b_k + d_k = A_k + c_k t_k + d_k$,
$C_k := -c_k t_k + a_k + c_k$ et
$D_k := -c_k t_k + a_k$.
Soit $g_k(t) = h_k(t).t$ avec

$$h_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]t_k, t_{k+1}[, \\ 0 & \quad\text{sinon,} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, ..., r$.

Proposition 5.3.1

$$\mathbb{E} = \{\varphi \in PC^2(I) / \varphi(t) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k g_k(t) + \beta_k h_k(t),\ t \neq t_k\}$$

est un espace de Banach de dimension $2r+2$.
De plus, $\forall \varphi \in PC^2(I)$, $A^1\varphi \in \mathbb{E}$.

Preuve
Soient $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{r} \alpha_k g_k(t) + \beta_k h_k(t) = 0, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Alors, pour chaque $t \in]t_k, t_{k+1}[$, nous allons

$$\sum_{k=0}^{r} \alpha_k g_k(t) + \beta_k h_k(t) = 0.$$

Donc

$$\alpha_k t + \beta_k = 0, \quad \forall t \in]t_k, t_{k+1}[,$$

ainsi

$$\alpha_k = \beta_k = 0.$$

De plus, on a

$$(A^1\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{r} S_k(\varphi).t + R_k(\varphi)$$

avec

$$\begin{array}{rcl} S_k(\varphi) & = & \chi(t,t_k)\Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi^{'}(t_k)\Big) - a_k\varphi(t_k) - b_k\varphi^{'}(t_k) \\ & - & \Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi^{'}(t_k)\Big)(1-t_k) \end{array}$$

et

$$R_k(\varphi) = \chi(t,t_k)\Big[a_k\varphi(t_k) + b_k\varphi^{'}(t_k) - t_k\Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi^{'}(t_k)\Big)\Big]$$

où

$$\chi(t,t_k) = \begin{cases} 1 & si \quad t_k < t, \\ 0 & si \quad t_k > t. \end{cases}$$

Alors $A^1\varphi \in \mathbb{E}$. ■

Remarque 5.3.1 *Soient μ une valeur propre de A^1 et φ_μ un vecteur propre de A^1 associé à μ. Alors*

$$\varphi_\mu(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k(\varphi_\mu) g_k(t) + \beta_k(\varphi_\mu) h_k(t) & si \quad t \neq t_k, \\ \alpha_{k-1}(\varphi_\mu) t_k + \beta_{k-1}(\varphi_\mu) & si \quad t = t_k, \\ 0 & si \quad t = 1. \end{cases}$$

On note par $\alpha_k(\varphi_\mu) := \alpha_k$ et $\beta_k(\varphi_\mu) := \beta_k$.

Proposition 5.3.2 *Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. Alors μ est une valeur propre de A^1 si et seulement s'il existe $\alpha_0, ..., \alpha_r, \beta_0, ..., \beta_r \in \mathbb{R}$ telle que μ satisfait le système suivant avec $(2r+2)$ équations*

$$(I)\begin{cases} \mu\beta_0 = 0, \\ \Big(\mu + B_1\Big)\alpha_0 + \displaystyle\sum_{i=2}^{r} B_i\alpha_{i-1} + \sum_{i=1}^{r} C_i\beta_{i-1} = 0, \\ \\ A_1\alpha_0 + \Big(\mu + B_2\Big)\alpha_1 + \displaystyle\sum_{i=3}^{r} B_i\alpha_{i-1} + D_1\beta_0 \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=2}^{r} C_i\beta_{i-1} = 0, \\ -A_1\alpha_0 - D_1\beta_0 + \mu\beta_1 = 0, \\ \vdots \\ A_1\alpha_0 + ... + A_k\alpha_{k-1} + (\mu + B_{k+1})\alpha_k + \displaystyle\sum_{i=k+2}^{r} B_i\alpha_{i-1} + D_1\beta_0 + ... + D_k\beta_{k-1} \\ + \displaystyle\sum_{i=k+1}^{r} C_i\beta_{i-1} = 0, \\ -A_1\alpha_0 - ... - A_k\alpha_{k-1} - D_1\beta_0 - ... - D_k\beta_{k-1} + \mu\beta_k = 0, \\ \vdots \\ A_1\alpha_0 + ... + A_{r-1}\alpha_{r-2} + (\mu + B_r)\alpha_{r-1} + D_1\beta_0 + ... + D_{r-1}\beta_{r-2} + C_r\beta_{r-1} = 0, \\ -A_1\alpha_0 - ... - A_{r-1}\alpha_{r-2} - D_1\beta_0 - ... - D_{r-1}\beta_{r-2} + \mu\beta_{r-1} = 0, \\ A_1\alpha_0 + ... + A_r\alpha_{r-1} + \mu\alpha_r + D_1\beta_0 + ... + D_r\beta_{r-1} = 0, \\ -A_1\alpha_0 - ... - A_r\alpha_{r-1} - D_1\beta_0 - ... - D_r\beta_{r-1} + \mu\beta_r = 0, \end{cases}$$

pour $k = 1, ..., r-1$.
De plus, le vecteur propre associé à μ est donné par

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(t) &= \sum_{k=1}^{r} \alpha_k g_k(t) + \beta_k h_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{r} h_k(t)\Big(\alpha_k t + \beta_k\Big),\ t \neq t_k,\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Preuve
Si $t \in]0, t_1[$, $A^1\varphi(t) = \mu\varphi(t)$ est équivalent à

$$\sum_{0<t_k<t} a_k\varphi(t_k) + b_k\varphi^{'}(t_k) + \Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi^{'}(t_k)\Big)(t - t_k)$$

$$- t\sum_{k=1}^{r} a_k\varphi(t_k) + b_k\varphi^{'}(t_k) + \Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi^{'}(t_k)\Big)(1 - t_k) = \mu(\alpha_0 t + \beta_0).$$

Donc, $\forall t \in]0, t_1[$

$$-t\sum_{k=1}^{r} a_k\varphi(t_k) + b_k\varphi^{'}(t_k) + \Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi^{'}(t_k)\Big)(1 - t_k) = \mu(\alpha_0 t + \beta_0),$$

nous obtenons

$$t\Big[\mu\alpha_0 + a_1(\alpha_0 t_1 + \beta_0) + b_1\alpha_0 + \Big(c_1(\alpha_0 t_1 + \beta_0) + d_1\alpha_0\Big)(1 - t_1) +$$
$$\sum_{i=2}^{r} a_i(\alpha_{i-1}t_i + \beta_{i-1}) + b_i\alpha_{i-1} + \Big(c_i(\alpha_{i-1}t_i + \beta_{i-1}) + d_i\alpha_{i-1}\Big)(1 - t_i)\Big] + \mu\beta_0 = 0,$$

$\forall t \in]0, t_1[$.

Alors

$$\begin{cases} \mu\beta_0 = 0, \\ \beta_0\Big[a_1 + c_1(1 - t_1)\Big] + \sum_{i=2}^{r}\beta_{i-1}\Big[a_i + c_i(1 - t_i)\Big] \\ +\alpha_0\Big[\mu + a_1t_1 + b_1 + c_1t_1(1 - t_1) + d_1(1 - t_1)\Big] \\ +\sum_{i=2}^{r}\alpha_{i-1}\Big[a_it_i + b_i + c_it_i(1 - t_i) + d_i(1 - t_i)\Big] = 0. \end{cases}$$

Finalement, on a

$$\begin{cases} \mu\beta_0 = 0, \\ \Big(\mu + B_1\Big)\alpha_0 + \sum_{i=2}^{r} B_i\alpha_{i-1} + \sum_{i=1}^{r} C_i\beta_{i-1} = 0. \end{cases}$$

De même, pour $t \in]t_k, t_{k+1}[$ avec $k = 1, ..., r - 1$, nous obtenons le résultat suivant

$$\left\{\begin{array}{l} A_1\alpha_0 + A_2\alpha_1 + ... + A_k\alpha_{k-1} + (\mu + B_{k+1})\alpha_k + \displaystyle\sum_{i=k+2}^{r} B_i\alpha_{i-1} + \\ D_1\beta_0 + D_2\beta_1 + ... + D_k\beta_{k-1} + \displaystyle\sum_{i=k+1}^{r} C_i\beta_{i-1} = 0, \\ \\ -A_1\alpha_0 - A_2\alpha_1 - ... - A_k\alpha_{k-1} - D_1\beta_0 - D_2\beta_1 - ... - D_k\beta_{k-1} + \mu\beta_k = 0. \end{array}\right.$$

Pour $t \in]t_r, 1[$, $A^1\varphi(t) = \mu\varphi(t)$ est équivalent à

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_r t + \beta_r) &= \sum_{k=1}^{r} a_k\varphi(t_k) + b_k\varphi'(t_k) + \Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi'(t_k)\Big)(t - t_k) \\ &- t\Big[\sum_{k=1}^{r} a_k\varphi(t_k) + b_k\varphi'(t_k) + \Big(c_k\varphi(t_k) + d_k\varphi'(t_k)\Big)(1 - t_k)\Big]. \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} A_1\alpha_0 + A_2\alpha_1 + ... + A_r\alpha_{r-1} + \mu\alpha_r + D_1\beta_0 + D_2\beta_1 + ... + D_r\beta_{r-1} = 0, \\ \\ -A_1\alpha_0 - A_2\alpha_1 - ... - A_r\alpha_{r-1} - D_1\beta_0 - D_2\beta_1 - ... - D_r\beta_{r-1} + \mu\beta_r = 0. \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

Lemme 5.3.1 *Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. Alors μ est une valeur propre de A^1 si et seulement s'il existe $\alpha_0, ..., \alpha_r, \beta_0, ..., \beta_r \in \mathbb{R}$ tel que*

$$(II) \quad M(\mu)\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} = 0$$

où $M(\mu)$ est une matrice carré de type $(2r+2)$ donnée par

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \\ \tilde{E} & \tilde{F} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{A}$ *est une matrice de type* $2\times(r+1)$, $\tilde{B}$ *est une matrice de type* $2\times(r+1)$, $\tilde{C}$ *est une matrice de type* $(2r-2)\times(r+1)$, $\tilde{D}$ *est une matrice de type* $(2r-2)\times(r+1)$, $\tilde{E}$ *est une matrice de type* $2\times(r+1)$ *et* $\tilde{F}$ *est une matrice de type* $2\times(r+1)$ *définies par*

1) $\tilde{A}=(a_{ij})$ *avec*

$$\begin{cases} a_{1j}=0 \quad \textit{pour} \quad j=\overline{1,r+1}, \\ \\ a_{21}=\mu+B_1, a_{2j}=B_j \quad \textit{pour} \quad j=\overline{2,r},\ a_{2(r+1)}=0. \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \mu+B_1 & B_2 & ... & B_r & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\tilde{B}=(a_{ij})$ *avec*

$$\begin{cases} a_{1(r+2)}=\mu,\ a_{1j}=0 \quad \textit{pour} \quad j=\overline{(r+3),(2r+2)}, \\ \\ a_{2j}=C_{j-(r+1)} \quad \textit{pour} \quad j=\overline{(r+2),(2r+1)}, \quad a_{2(2r+2)}=0. \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} \mu & 0 & ... & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & ... & C_r & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $\tilde{C}=(a_{ij})$ *avec*

$$\begin{cases} a_{(2i+1)j}=A_j \quad \textit{avec} \quad i=\overline{1,(r-1)} \quad \textit{pour} \quad 1\leq j\leq i, \\ a_{(2i+1)j}=\mu+B_j \quad \textit{avec} \quad i=\overline{1,(r-1)} \quad \textit{pour} \quad j=i+1, \\ a_{(2i+1)j}=B_j \quad \textit{avec} \quad i=\overline{1,(r-1)} \quad \textit{et} \quad j=\overline{1,r} \quad \textit{pour} \quad j>i+1 \\ a_{(2i+1)(r+1)}=0 \quad \textit{avec} \quad i=\overline{1,(r-1)}. \\ \\ a_{(2i)j}=-A_j \quad \textit{avec} \quad i=\overline{2,r} \quad \textit{pour} \quad 1\leq j<i, \\ a_{(2i)j}=0 \quad \textit{avec} \quad i=\overline{2,r} \quad \textit{et} \quad j=\overline{1,r+1} \quad \textit{pour} \quad j\geq i. \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} A_1 & \mu + B_2 & B_3 & B_4 & ... & B_{r-1} & B_r & 0 \\ -A_1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & \mu + B_3 & B_4 & ... & B_{r-1} & B_r & 0 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & ... & A_{r-1} & \mu + B_r & 0 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 & ... & -A_{r-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $\tilde{D} = (a_{ij})$ *avec*

$$\begin{cases} a_{(2i+1)j} = D_{j-(r+1)} \quad avec \quad i = \overline{1,(r-1)} \quad pour \quad 1 \leq j-(r+1) \leq i, \\ a_{(2i+1)j} = C_{j-(r+1)} \ avec\ i = \overline{1,(r-1)}\ et\ j = \overline{(r+2),(2r+1)}\ pour\ j-(r+1) > i+1, \\ a_{(2i+1)(2r+2)} = 0 \quad avec \quad i = \overline{1,(r-1)}. \\ \\ a_{(2i)j} = -D_{j-(r+1)} \quad avec \quad i = \overline{2,r} \quad pour \quad 1 \leq j-(r+1) < i, \\ a_{(2i)j} = \mu \quad avec \quad i = \overline{2,r} \quad pour \quad j-(r+1) = i, \\ a_{(2i)j} = 0 \quad avec \quad i = \overline{2,r} \quad et \quad j = \overline{r+2, 2r+2}. \quad pour \quad j-(r+1) > i. \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 & C_2 & C_3 & C_4 & ... & C_{r-1} & C_r & 0 \\ -D_1 & \mu & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_2 & C_3 & C_4 & ... & C_{r-1} & C_r & 0 \\ -D_1 & -D_2 & \mu & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & ... & D_{r-1} & C_r & 0 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & -D_4 & ... & -D_{r-1} & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

5) $\tilde{E} = (a_{ij})$ *avec*

$$\begin{cases} a_{(2r+1)j} = A_j \quad pour \quad 1 \leq j \leq r,\ a_{(2r+1)(r+1)} = \mu \\ \\ a_{(2r+2)j} = -A_j \quad pour \quad 1 \leq j \leq r,\ a_{(2r+2)(r+1)} = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & ... & A_r & \mu \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 & ... & -A_r & 0 \end{pmatrix}.$$

6) $\tilde{F} = (a_{ij})$ *avec*

$$\begin{cases} a_{(2r+1)j} = D_{j-(r+1)} \text{ pour } 1 \leq j-(r+1) \leq r \text{ avec } j = \overline{(r+2),(2r+1)}, \\ a_{(2r+1)(2r+2)} = 0 \\ \\ a_{(2r+2)j} = -D_{j-(r+1)} \text{ pour } 1 \leq j-(r+1) \leq r \text{ avec } j = \overline{(r+2),(2r+1)}, \\ a_{(2r+2)(2r+2)} = \mu. \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & ... & D_r & 0 \\ -D_1 & -D_2 & ... & -D_r & \mu \end{pmatrix}.$$

Preuve

D'après la proposition 5.3.2, le système (I) est équivalent à (II).■

Mettons $P(\mu) = detM(\mu)$, alors $\mu \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre de A^1 si et seulement si $M(\mu)$ n'est pas inversible, i.e. $P(\mu) = 0$.

Remarques 5.3.1 *Soit μ une valeur propre de A^1. Si μ satisfait*

$(H10)$ $\quad P(\mu) = P^{'}(\mu) = P^{''}(\mu) = ... = P^{2q}(\mu) = 0$ *et* $P^{2q+1}(\mu) \neq 0,\ q \in \mathbb{N}$,

alors μ est une valeur propre de multiplicité impaire $2q+1$.

Si μ est une valeur propre simple de A^1, i.e. $q = 0$, alors

$(H11)$ $\quad P(\mu) = 0$ *et* $P^{'}(\mu) \neq 0$.

D'après le théorème 5.3.1, nous avons

Corollaire 5.3.1 *Si* (H1) $-$ (H7) *et* (H10) *sont satisfaites avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, alors* $(5.1)-(5.4)$ *possède des branches de solutions qui bifurquent du point* $(0, \mu^{-1})$.

D'après le théorème 5.3.2, nous avons

Corollaire 5.3.2 *Si* (H1) $-$ (H7) *et* (H11) *sont satisfaites avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, alors* $(5.1) - (5.4)$ *possède exactement deux branches de solutions Γ_1 et Γ_2 qui bifurquent du point* $(0, \mu^{-1})$.

Proposition 5.3.3 *Soit $A_k = 0$ pour $k = 1, ..., r-1$. Nous avons*

1. $P(\mu) = \mu^{r+2} \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (\mu + B_k)$.
   De plus les valeurs propres de A^1 sont 0 et $-B_k$ pour $k = 1, ..., r$.
2. *S'il existe $k_0 \in \{1, ..., r\}$ tel que $B_{k_0} \neq B_k \quad \forall k \in \{1, ..., r\}/\{k_0\}$ et $B_{k_0} \neq 0$, alors $-B_{k_0}$ est une valeur propre simple de A^1.*

Nous considérons les hypothèses suivantes
(H12) Si $b_k = t_k^2 c_k + t_k(d_k - a_k)$ avec $k = 1, ..., r-1$.
(H13) $k_0 \in \{1, ..., r-1\}$ tel que $d_{k_0} \neq -t_{k_0} c_{k_0}$, $d_{k_0} + t_{k_0} c_{k_0} \neq d_k + t_k c_k$ $\forall k \in \{1, ..., r-1\}/k_0$ et $d_{k_0} + t_{k_0} c_{k_0} \neq A_r + c_r t_r + d_r$.
(H14) $b_r \neq c_r t_r^2 + (d_r - a_r - c_r)t_r - d_r$ et
$d_k + t_k c_k \neq -c_r t_r^2 + (a_r + c_r - d_r)t_r + d_r + b_r$ $\forall k \in \{1, ..., r-1\}$.

Remarques 5.3.2 1) *Si* (H12) *et* (H13) *sont satisfaites, alors* $\mu = -B_{k_0}$ *est une valeur propre simple de* A^1 *et* $B_{k_0} \neq 0$ *avec* $k_0 < r$.
2) *Si* (H12) *et* (H14) *sont satisfaites, alors* $\mu = -B_r$ *est une valeur propre simple de* A^1 *et* $B_r \neq 0$.

D'après le théorème 5.3.2, nous avons

Corollaire 5.3.3 *Si* (H1) − (H7), (H12) *et* (H13) *sont satisfaites, alors* (5.1)−(5.4) *possède exactement deux branches de solutions* Γ_1 *et* Γ_2 *qui bifurquent du point* $\left(0, -B_{k_0}^{-1}\right)$ *avec* $k_0 \in \{1, ..., r-1\}$.

Corollaire 5.3.4 *Si* (H1) − (H7), (H12) *et* (H14) *sont satisfaites, alors* (5.1)−(5.4) *possède exactement deux branches de solutions* Γ_1 *et* Γ_2 *qui bifurquent du point* $\left(0, -B_r^{-1}\right)$.

Remarque 5.3.2 *Dans ce chapitre, nous allons considérer le problème général où les impulsions dépendent implicitement (non linéairement) de* λ*, mais nous n'avons traité que le cas où les impulsions dépendent linéairement du paramètre* λ*, pour pouvoir utiliser le théorème de Krasnosel'ski. Le cas général reste toujours posé, son étude nécessite sans doute une autre approche.*

5.4 Applications

Dans cette section, nous allons appliquer les résultats de ce chapitre à des cas particuliers du problème (5.1) − (5.4).

Exemple 5.4.1 *Considérons le problème homogène* (4.6) *du problème* (5.1)−(5.4) *nous avons*

$$
\begin{aligned}
H(u,\lambda) \quad &= \quad \lambda \int_0^1 G(t,s) f\left(s, u(s), u^{'}(s)\right) \mathrm{d}s \\
&+ \quad \lambda \sum_{0<t_k<t} \left[\eta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right) + \theta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right)(t-t_k)\right] \\
&- \quad \lambda t \sum_{k=1}^{r} \left[\eta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right) + \theta_k \left(u(t_k), u^{'}(t_k)\right)(1-t_k)\right], \qquad \forall t \in I.
\end{aligned}
$$

D'un coté, pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0,0) = 0 \quad \forall t \in I$*, on a*
pour $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^{\star}) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$*, selon le corollaire* 5.2.1*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^{\star}| < \delta$*, le problème* (4.6) *admet une unique solution* (u,λ).

Si $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^{\star}) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} > 1$*, nous allons examiner l'existence des branches de solutions.*
Alors, on a
$A^1\varphi(t) =$

$$
\sum_{0<t_k<t} \Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) + \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(t-t_k)\Big]
$$

$$
-t\sum_{k=1}^{r} \Big[\frac{\partial \eta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k) + \left(\frac{\partial \theta_k^1}{\partial x}(0,0)\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k^1}{\partial y}(0,0)\varphi^{'}(t_k)\right)(1-t_k)\Big].
$$

Donc, l'existence de solutions bifurquées de (4.6) *est équivalente à* (5.1) − (5.4)*. Par conséquent, nous pouvons appliquer les corollaires* 5.3.1*,* 5.3.2 *et* 5.3.3 *pour prouver l'existence des branches de solutions de* (4.6)*.*

Remarque 5.4.1 *Pour* $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial \eta_k}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial \theta_k}{\partial y}(0,0) = 0$*, on a*

$$
A\varphi(t) := \int_0^1 G(t,s)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(s,0,0).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s,0,0).\varphi^{'}(s)\Big)\mathrm{d}s.
$$

Donc, l'existence de solution bifurquées de (4.6) *est équivalent à* $(\mathcal{P}_\mu)$ (*voir l'exemple* 4.4.1).

Exemple 5.4.2 *Considérons le problème aux limites pour l'équation différentielle impulsive suivant*

$$\begin{cases} u''(t) = f\Big(t, u(t), u'(t), \lambda\Big) \quad t \neq t_1, \\ \Delta u(t_1) = \lambda \gamma u(t_1), \\ \Delta u'(t_1) = \lambda \gamma' u'(t_1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

où $f(t,0,0,\lambda) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0,0,\lambda) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0,0,\lambda) = 0 \quad \forall t \in I$ *et* $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}^*$.
Nous avons

$$\begin{aligned} H(u,\lambda) = \; & \int_0^1 G(t,s) f\left(s, u(s), u'(s), \lambda\right) \mathrm{d}s - \lambda t \Big[\gamma u(t_1) + \gamma' u'(t_1)(1-t_1)\Big] \\ & + \lambda \sum_{0<t_1<t} \Big[\gamma u(t_1) + \gamma' u'(t_1)(t-t_1)\Big]. \end{aligned}$$

Pour $|\lambda^\star| < \dfrac{1}{2(|\gamma| + |\gamma'|)}$, *alors* $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0,\lambda^\star) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$.
Donc d'après le corrolaire 5.2.1, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$, *le problème* (5.6) *admet une unique solution* (u,λ).
Pour $|\lambda^\star| \geq \dfrac{1}{2(|\gamma| + |\gamma'|)}$, *nous examinons l'existence de branches de solutions bifurquées. Alors*

$$A^1 \varphi(t) = -t\left[\gamma \varphi(t_1) + \gamma' \varphi'(t_1)(1-t_1)\right] + \sum_{0<t_1<t} \gamma \varphi(t_1) + \gamma' \varphi'(t_1)(t-t_1).$$

$\mu \in \mathbb{R}^*$ *est une valeur propre de* A^1 *si et seulement si il existe* $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ *tel que* μ *satisfait le système suivant*

$$\begin{cases} \mu \beta_0 = 0, \\ \Big(\mu + B_1\Big)\alpha_0 + C_1 \beta_0 = 0, \\ A_1 \alpha_0 + \mu \alpha_1 + D_1 \beta_0 = 0, \\ -A_1 \alpha_0 - D_1 \beta_0 + \mu \beta_1 = 0 \end{cases}$$

où $A_1 = (\gamma - \gamma^{'})t_1$*,* $B_1 = (\gamma - \gamma^{'})t_1 + \gamma^{'}$ *et* $C_1 = D_1 = \gamma$*.*
La matrice $M(\mu)$ *est donnée par*

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu & 0 \\ \mu + (\gamma - \gamma^{'})t_1 + \gamma^{'} & 0 & \gamma & 0 \\ (\gamma - \gamma^{'})t_1 & \mu & \gamma & 0 \\ -(\gamma - \gamma^{'})t_1 & 0 & -\gamma & \mu \end{pmatrix}.$$

Soit $P(\mu) = \det M(\mu) = \mu^3\Big(\mu + (\gamma - \gamma^{'})t_1 + \gamma^{'}\Big)$*.*
Si $\gamma = \gamma'$*, nous avons exactement deux branches de solutions* Γ_1 *et* Γ_2 *qui bifurquent du point* $(0, (-\gamma)^{-1})$ *.*
Si $\gamma^{'} \neq \gamma$ *et* $t_1 \neq \dfrac{\gamma^{'}}{\gamma^{'} - \gamma}$*, alors* $\mu = -(\gamma - \gamma^{'})t_1 - \gamma^{'}$ *est une valeur propre réelle simple de* A^1*. D'après le corollaire* 5.3.2*,* (5.6) *possède exactement deux branches de solutions* Γ_1 *et* Γ_2 *qui bifuquent du point* $\left(0, \Big(-(\gamma - \gamma^{'})t_1 - \gamma^{'}\Big)^{-1}\right)$*.*

Remarques 5.4.1 *Dans* [105]*, les autheurs considèrent le problème* (5.6) *avec* $\gamma^{'} = -\gamma$ *et* $t_1 = \dfrac{1}{2}$*. Mais dans notre cas, on doit avoir* $t_1 \neq \dfrac{\gamma^{'}}{\gamma^{'} - \gamma} = \dfrac{1}{2}$*. Donc , pour ce cas, nous avons besoin d'utiliser une autre approche.*
Si $\gamma^{'} = -\gamma$ *et* $t_1 \neq \dfrac{1}{2}$*, alors* (5.6) *devient*

$$\begin{cases} u^{''}(t) = f\Big(t, u(t), u^{'}(t), \lambda\Big) & t \neq t_1, \\ \Delta u(t_1) = \lambda\gamma u(t_1), \\ \Delta u^{'}(t_1) = -\lambda\gamma u^{'}(t_1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Pour $|\lambda^\star| < \dfrac{1}{4|\gamma|}$*, alors* $\|\dfrac{\partial H}{\partial u}(0, \lambda^\star)\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$.
Donc d'après le corrolaire 5.2.1*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$*, le probléme* (5.7) *admet une unique solution* (u, λ)*.*
Pour $|\lambda^\star| \geq \dfrac{1}{4|\gamma|}$*, nous étudions l'existence des branches de solutions bifurquées.*
Alors, on a

$$A^1\varphi(t) = -t\left[\gamma\varphi(t_1) - \gamma\varphi^{'}(t_1)(1 - t_1)\right] + \sum_{0<t_1<t} \gamma\varphi(t_1) - \gamma\varphi^{'}(t_1)(t - t_1)$$

et

$$P(\mu) = \det M(\mu) = \mu^3\Big(\mu + \gamma(2t_1 - 1)\Big).$$

Donc $\mu = -\gamma(2t_1 - 1)$ *est une valeur propre simple de* A^1*, alors d'après le corollaire* 5.3.2*, le problème* (5.7) *possède exactement deux branches de solutions* Γ_1 *et* Γ_2 *bifurquant du point* $\left(0, \Big(-\gamma(2t_1 - 1)\Big)^{-1}\right)$.

Exemple 5.4.3 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} u^{''}(t) = f\left(t, u(t), u^{'}(t), \lambda\right), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = \lambda \gamma_k u(t_k), \quad k = 1, 2, \\ \Delta u^{'}(t_1) = \lambda \zeta_k u^{'}(t_k), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Pour $|\lambda^\star| < \dfrac{1}{2(|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\zeta_1| + |\zeta_2|)}$*, alors* $\|\dfrac{\partial H}{\partial u}(0, \lambda^\star)\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$.
Donc, d'après le corollaire 5.2.1*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$*, le problème* (5.8) *admet une unique solution* (u, λ).
Pour $|\lambda^\star| \geq \dfrac{1}{2(|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\zeta_1| + |\zeta_2|)}$*, nous étudions l'existence des branches de solutions bifurquées.*
Alors, on a

$$A^1\varphi(t) = \sum_{0 < t_k < t} \Big[\gamma_k \varphi(t_k) + \zeta_k \varphi^{'}(t_k)(t - t_k)\Big] - t \sum_{k=1}^{2} \Big[\gamma_k \varphi(t_k) + \zeta_k \varphi^{'}(t_k)(1 - t_k)\Big].$$

$\mu \in \mathbb{R}^*$ *est une valeur propre de* A^1 *si et seulement s'il existe* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* μ *satisfait le système suivant*

$$\begin{cases} \mu \beta_0 = 0, \\ \Big(\mu + B_1\Big)\alpha_0 + B_2\alpha_1 + C_1\beta_0 + C_2\beta_1 = 0, \\ A_1\alpha_0 + \Big(\mu + B_2\Big)\alpha_1 + D_1\beta_0 + C_2\beta_1 = 0, \\ -A_1\alpha_0 - D_1\beta_0 + \mu\beta_1 = 0, \\ A_1\alpha_0 + A_2\alpha_1 + \mu\alpha_2 + D_1\beta_0 + D_2\beta_1 = 0, \\ -A_1\alpha_0 - A_2\alpha_1 - D_1\beta_0 - D_2\beta_1 + \mu\beta_2 = 0 \end{cases}$$

où $A_k = (\gamma_k - \zeta_k)t_k, \;\; B_k = (\gamma_k - \zeta_k)t_k + \zeta_k$ *et* $C_k = D_k = \gamma_k$.
La matrice $M(\mu)$ *est donnée par*

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \mu + B_1 & B_2 & 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ A_1 & \mu + B_2 & 0 & D_1 & C_2 & 0 \\ -A_1 & 0 & 0 & -D_1 & \mu & 0 \\ A_1 & A_2 & \mu & D_1 & D_2 & 0 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & -D_1 & D_2 & \mu \end{pmatrix}.$$

Alors

$$P(\mu) = \det M(\mu) = \mu^4 \left[\mu^2 + \mu(B_1 + B_2) + A_1(C_2 - B_2) + B_1B_2\right].$$

μ *est une valeur propre de* A^1 *si elle est égale à zéro ou bien est une solution de l'équation suivante*

$$P_1(\mu) = \mu^2 + \mu(B_1 + B_2) + B_1B_2 + A_1C_2 - A_1B_2 = 0.$$

Nous allons considérer deux cas:
Cas 1: *Pour* $\gamma_1 = \zeta_1$, *nous avons* $A_1 = 0$.
Alors

$$P_1(\mu) = \mu^2 + \mu(B_1 + B_2) + B_1B_2$$

et

$$\Delta_\mu = (B_1 + B_2)^2 - 4B_1B_2 = (B_1 - B_2)^2.$$

Donc

$$P_1(\mu) = (\mu + B_1)(\mu + B_2)$$

et

$$P(\mu) = \mu^4(\mu + B_1)(\mu + B_2).$$

Alors $-B_1$ *et* $-B_2$ *sont des valeurs propres simples si* $B_1 \neq B_2$ *et* $B_1B_2 \neq 0$. *Du corollaire* 5.3.3, *nous déduisons que le problème* (5.8) *possède exactement deux branches de solutions bifurquant du point* $\Big(0, (-B_1)^{-1}\Big)$ *et deux branches de solutions bifurquant du point de* $\Big(0, (-B_2)^{-1}\Big)$, *si* $-B_1$ *et* $-B_2$ *sont des valeurs propres simples.*
Cas2: *Pour* $\gamma_1 \neq \zeta_1$ *et*

$$\begin{aligned}[(\gamma_1 - \zeta_1)t_1 + \zeta_1]^2 + [(\gamma_2 - \zeta_2)t_2 + \zeta_2]^2 \quad &> \quad 2[(\gamma_2 - \zeta_2)\zeta_1 t_2 + \zeta_1\zeta_2 - (\gamma_1 - \zeta_1)(\gamma_2 - \zeta_2)t_1t_2 \\ &- \quad (\gamma_1 - \zeta_1)(\zeta_2 - 2\gamma_2)t_1],\end{aligned}$$

nous avons

$$A_1(C_2 - B_2) + B_1 B_2 \neq 0.$$

Alors $\mu \in \mathbb{R}^\star$ *est une valeur propre de* A^1 *si* μ *est une solution de* $P_1(\mu) = 0$.
Le discriminant de $P_1(\mu)$ *est*

$$\begin{array}{rcl}\Delta_\mu & = & [(\gamma_1 - \zeta_1)t_1 + \zeta_1]^2 + [(\gamma_2 - \zeta_2)t_2 + \zeta_2]^2 \\ & + & 2[(\gamma_1 - \zeta_1)(\gamma_2 - \zeta_2)t_1 t_2 - (\gamma_1 - \zeta_1)(\zeta_2 - 2\gamma_2)t_1 - (\gamma_2 - \zeta_2)\zeta_1 t_2 - \zeta_1\zeta_2] > 0.\end{array}$$

Donc

$$\mu_1^2 = \frac{-(\gamma_1 - \zeta_1)t_1 - (\gamma_2 - \zeta_2)t_2 - \zeta_1 - \zeta_2 - \sqrt{\Delta_\mu}}{2}$$

et

$$\mu_2^2 = \frac{-(\gamma_1 - \zeta_1)t_1 - (\gamma_2 - \zeta_2)t_2 - \zeta_1 - \zeta_2 + \sqrt{\Delta_\mu}}{2}$$

sont des valeurs propres simples de A^1.
Alors, D'après le corollaire 5.3.3*, nous avons exactement deux branches de solutions bifurquant du point* $(0, (\mu_1^2)^{-1})$ *et deux branches de solutions bifurquant du point* $(0, (\mu_2^2)^{-1})$.

Remarques 5.4.2 *Dans* [70]*, les auteurs considèrent le problème* (5.8) *avec* $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$*, dans ce cas le problème* (5.8) *devient*

$$\begin{cases} u''(t) = f\left(t, u(t), u'(t), \lambda\right), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = \lambda\gamma_k u(t_k), \quad k = 1, 2, \\ \Delta u'(t_k) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Si $|\lambda^\star| < \dfrac{1}{2(|\gamma_1| + |\gamma_2|)}$*, alors* $\left\| \dfrac{\partial H}{\partial u}(0, \lambda^\star) \right\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1.$
D'après le corollaire 5.2.1*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $|\lambda - \lambda^\star| < \delta$*, le problème* (5.9) *admet une unique solution* (u, λ).
Pour $|\lambda^\star| \geq \dfrac{1}{2(|\gamma_1| + |\gamma_2|)}$*, nous examinons l'existence des branches de solutions bifurquées.*
Nous avons

$$A^1\varphi(t) = \sum_{0 < t_k < t} [\gamma_k \varphi(t_k)] - t\sum_{k=1}^{2} [\gamma_k \varphi(t_k)]$$

et $P(\mu) = \det M(\mu) = \mu^4 \left[\mu^2 + \mu(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) + \gamma_1\gamma_2 t_1\right].$
Si $\gamma_1 = 0$ *et* $\gamma_2 \neq 0$, *alors*

$$P(\mu) = \mu^5(\mu + \gamma_2 t_2).$$

D'après le corollair 5.3.3, *le problème* (5.9) *possède exactement deux branches de solutions* Γ_1^1 *et* Γ_2^1 *bifurquant du point* $\Big(0, (-\gamma_2 t_2)^{-1}\Big)$.
Si $\gamma_1 \neq 0$ *et* $(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)^2 > 4\gamma_1\gamma_2 t_1$, *alors*

$$\mu_1^2 = \frac{-\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2 - \sqrt{(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)^2 - 4\gamma_1\gamma_2 t_1}}{2}$$

et

$$\mu_2^2 = \frac{-\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2 + \sqrt{(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)^2 - 4\gamma_1\gamma_2 t_1}}{2}$$

sont des valeurs propres simples de A^1. *Le corollaire* 5.3.3 *implique que le problème* (5.9) *possède exactement deux branches de solutions* Γ_1^2 *et* Γ_2^2 *bifurquant du point* $(0, (\mu_i^2)^{-1})$ *avec* $i = 1, 2$.

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons considéré le problème de bifurcation des branches de solutions nontriviales d'un problème aux limites pour une équation différentielle impulsive d'ordre deux, quand le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable. nous avons étudié deux cas, le troxième cas qui est le problème le plus général où le paramètre n'est pas explicite dans l'équation différentielle et dans les équations des impulsions reste posé, il nécessite surement une autre approche.
Ce type de problème n'a été étudié que dans trois publications, sans compter nos deux travaux.
Nous souhaitons dans le futur, considérer le cas général, le cas fonctionnel, et peut être aussi le cas des équations différentielles fractionnaires.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal et D. O'Regan, *Multiple nonnegative solutions for second-second impulsive differential equations*, Appl. Math. Comput, **114** (2000) 51-59.

[2] Z. Agur, L. Cojocaru, G. Mazaur, R.M. Anderson et Y.L. Danson, *pulse mass measles vaccination across age cohorts*, Proc. Nat.Acad. Sci. USA, **90** (1993) 11698-11702.

[3] N.U. Ahmed, *Optimal control for impulsive systems in Banach spaces*, Int. J. Differ.Equ. Appl, **1** (2000), 37-52.

[4] N.I. Akhiezer et I.M. Glasman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces* , Pitman, **1**, (1981).

[5] M.U. Akhhmet et A. Kashkynbayev, *Non-Autonomous Bifurcation in impulsive systems*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **74** (2014) 1-23.

[6] J. Andres et L. Gorniewicz, *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems*, Kluwer, Cambridge, 1993.

[7] A.A. Andronov, A.A. Vitt et S.E. Khaikin, *Theory of Oscillators*, Adiwes International Series in Physics, 1966.

[8] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Presse Universitaire de France (1996).

[9] N.B. Azbelev, V.P. Maximov et L.F. Rakhmatulina, *Introduction to the Funtional Differential Equations*, Russian, Nauka, Moscouw, 1991.

[10] D.D. Bainov, *Impulsive differential equations*, Longman 1993.

[11] D.D. Bainov et P.S. Simeonov, *Systems with Impulsive Effect*, Ellis Horwood Ltd, Chichister, 1989.

[12] D.D Bainov et P.S Simeonov,*Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and applications mathematics, 66, Longman Scientific Technical and John Wiley Sons, Inc, New York, 1993.

[13] G. Ballinger et X. Liu, *Permanence of population growth models with impulsive effects*, Math. Compt. Modelling **26** (1997) 59-72.

[14] Z. Belattar et A. Lakmeche, *Impulsive boundary value problem with parameter*, Georgian Mathematical Journal, **22** (2015) 331-339.

[15] M. Benchohra, J. Henderson et S.K. Ntouyas, *An existence result for first order impulsive functional differential equations in Banach spaces*, Comput. Math. Appl, **42** (2001) 1303-1310.

[16] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas et A. Ouahab, *Impulsive Differential Equations and Inclusions, Contemporary Mathematics and Its Applications*, Hindawi Publishing, New York, 2006.

[17] M.S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1977.

[18] A.A. Boichuk et S.M. Chuiko, *Bifurcation of solutions of an impulsive boundary-value problem*, J. Nonlinear Oscillations, Springer Link, **1** (2008) 18-28.

[19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[20] P. Bruhl, *Intoduction à la théorie spéctrale*, Dunod, Paris, 2003.

[21] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann Paris, 1982.

[22] H. Chen, Z. He, *Variational approach to some damped Dirichlet problems with impulses*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, in press, DOI: 10.1002/mma.2777.

[23] M. Choisy, J. Guegan et P. Rohani, *Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination: teasing apart the embedded resonance effects*, Physica, **22** (2006) 26-35.

[24] S. Chow et J. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer-Verlag 1982.

[25] M. Crandall et P. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. of Func. Anal, **8** (1971) 321-340.

[26] Y. Cui, J. Sun et Y. Zou, *Global bifurcation and multiple results for Sturm-Liouville problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235** (2011) 2185-2192.

[27] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, New York, Oxford, 1985.

[28] S. Djebali, *Le degré topologique: Théorie et Applications*, Département de Mathématiques, ENS, Algérie, 2006.

[29] J.Dugundji et A. Granas, *Fixed point Theory*, PWN-Polish Scintific Pub.Warzawa, **1** (1982).

[30] N.Dunford et J. Schwartz, *Linear Operators Parts I and II*, Interscience, New York, 1958 et 1963.

[31] A. D'Onofrio, *On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission*, Appl. Math. Lett, **18** (2005)729-32.

[32] E. Fadell et G. Fournier, *Fixed point theory*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1981.

[33] I. Fonseca et W. Gangbo, *Degree Theory in Analysis and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[34] M. Frigon et D. O'Regan, *Existence results for first order impulsive differential equations*, J. Math. Anal. Appl, **193** (1995) 96-113.

[35] M. Frigon et D. O'Regan, *Boundary value problems for second order impulsive differential equations using set-valued maps*, Appl. Anal, **58** (1995) 325-333.

[36] S. Fucik et A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.

[37] X. Fu, J. Qi et Y. Liu, *General comparison principal for impulsive variable time differential equations with application*, Nonlinear Anal, **42** (2000) 1421-1429.

[38] X. Fu, B. Yan et Y. Liu, *Introduction to impulsive differential system*, Beijing: China Science Publisher 2005.

[39] R.B. Guenther, *Problèmes aux Limites non Linéaires pour certaines Classes d'E.D.O*, Presses de l'université de Montrial, 1985.

[40] S. Gao, L. Chen, J. J. Nieto et A. Torres, *Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence*, Vaccine **24** (2006), 6037-6045.

[41] D. Guo, *Positive solutions of an infinite boundary value problem for nth-order nonlinear impulsive singular integro-differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Anal., **70** (2003) 2078-2090.

[42] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[43] J. Henderson, *Boundary Value Problems for Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[44] Z. Hu et M. Han, *Periodic solutions and bifurcations of first order periodic impulsive differential equations*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **19** (2009) 2515-2030.

[45] G. Iooss, *Bifurcation of maps and applications*, Study of Mathematics, North Holland, 1979.

[46] M.S. Joshi et R.K. Bose, *Some Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Wiley Eastern Limited, 1985.

[47] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[48] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer Verlag, Paris, 1993.

[49] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, 1981.

[50] H. Kielhfer, *Bifurcation theory, An Introduction with Applications to Partial Differential Equations*, Second Edition. Springer New york Dordrecht Heidelberg London, **156** (2012).

[51] H.W. Knobloch, *Comparison theorems for nonlinear second order differential equations*, J. Diff. Eqs, **1** (1965) 1-26.

[52] M. A. Krasnoselski, *On a topological method in the problem of eigenfunctions of nonlinear operators*, Dokl. Akad. Nauk, **74** (1950).

[53] M. A. Krasnoselski, *On some problems of nonlinear analysis*, Uspekhi Mat. Nauk, **9** (1954) 57-114.

[54] M.A. Krasnosel'ski, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral equations* Pergamon Press, 1963.

[55] M.A. Krasnosel'ski et P.P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer Verlag, 1984.

[56] W. Krawcewicz, *Contribution à la théorie des équations nonlinéaires dans les espaces de Banach*, Dissertationes Math, **273** (1988).

[57] A. Lakmeche et O. Arino, *Nonlinear mathematical model of pulsed therapy of hetergenous tumor*, Nonlinear Anal, Real World Appl, **2** (2001) 455-465.

[58] A. Lakmeche et O. Arino, *Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising in chemotherapeutic treatment*, Dynamics Cont. Discr. Impl. Syst, **7** (2000) 265-287.

[59] Ah. Lakmeche, M. Helal et Abd. Lakmeche, *Pulsed chemotherapy model*, EJMAA, **2** (2014) 127-148.

[60] J.L. Lion, *Quelques méthodes de Résolution de Problèmes aux limites non Linéaires*, Dunud, Paris, 1969.

[61] V. Lakshmikantham, D. Bainov et P. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*, Singapore: World Scientific 1989.

[62] E.K. Lee et Y.H. Lee, *Multiple position solutions of singular two point boundary value problems for second order impulsive differential equations*, Appl. Math. Comut, **40** (2004) 745-759.

[63] E.K. Lee et Y.H. Lee, *Multiple positive solutions of singular gelfand type problem for second order impulsive differential equations*, Appl. Math. Comput, **40** (2004) 307-328.

[64] Y. Lee et X. Liu, *Study of singular boundary value problems for second order impulsive differential equations*, J. Math. Appl, **331** (2007) 159-176.

[65] X. Lin et D. Jiang, *Multiple positive solutions of Dirichlet boundary value problems for second order impulsive differential equations*, J. Anal. Appl., **321** (2006) 501-514.

[66] W. Li, H. Huo, *Global attractivity of positive periodic solutions for an impulsive delay periodic model of respiratory dynamics*, J. Comput. Appl. Math, **174** (2005) 227-238.

[67] X. Lin, D. Jiang, *Multiple positive solutions of Dirichlet boundary-value problems for second order impulsive differential equations*, J. Math. Anal. Appl, **321** (2006) 501-514.

[68] Y. Liu, *Bifurcation techniques for a class of boundary value problems of fractional impulsive differential equations*, J. Nonlinear. Sci. Appl, **8** (2015) 340-353.

[69] E. Liz et J.J. Nieto, *Positive solutions of linear impulsive differential equations*, Commun. Appl. Anal. **2** (1998) 565-571.

[70] Y. Liu et D. O'Regan, *Multiplicity results using bifurcation techniques for a class of boundary value problem of impulsive differential equations*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, **16** (2011) 1769-1775.

[71] R. Ma, *Global behavior of the components of nodal solutions of asymptotically linear eigenvalue problems*, Appl. Math. Lett, **21** (2008) 754-760.

[72] R. Ma et Y. An, *Global structure of positive solutions for nonlocal boundary value problems involving integral conditions*, Nonlinear Anal, **71** (2009) 4364-4376.

[73] R. Ma et D. O'Regan, *Nodal solutions for second-order m-point boundary value problems with nonlinearities across several eigenvalues*, Nonlinear Anal. TMA, **64** (2006) 1562-1577.

[74] R. Ma, J. Sun et M. Elsanosi, *Sign-changing solutions of second order dirichlet problem with impulse effects*, D.C.D.I.Syst, **20** (2013) 241-251.

[75] R. Ma, B. Yang et Z. Wang, *Positive periodic solutions of first-order delay differential equations with impulses*, App.Math. Comput, **219** (2013) 6074-6083.

[76] R. Ma, B. Yang et Z. Wang, *Bifurcation of positive periodic solutions of first-order impulsive differential equations*, Boundary value problems, Springer **83** (2012).

[77] T. Ma, *Nonlinear Operator Methods and Bifurcation Theory in Differential Equations*,

[78] T. Ma et S. Wang, *Bifurcation theory and applications*, World Scientific, **10** (2005).

[79] J.A. MacBain, *Local and Global Bifurcation From Normal Eigenvalues*, Pacific Journal of Mathematics, **63** (1976) 445-466.

[80] J. Mawhin, *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems*, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference, 1979.

[81] J. Mawhin, *Leray Schauder Degree: A Half Century of Extensions and Applications*, Journal of the Juliusz Schauder Center, **14** (1999) 195-228.

[82] V.D. Milman et A.A. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses*, Sib. Math. J, (in Russian), **1** (1960) 233-237.

[83] V.D. Milman et A.A. Myshkis, *Randorn impulses in linear dynamical systems, in Approximante Methods for Solving Differential Eqations*, Publishing house of the Academy of Sciences of Ukainian SSR, Kiev, in Russian, (1963) 64-81.

[84] A.D. Mishkis et A.M. Samoilenko, *Systems with impulses at prescribed moments of time*, Maths. Sb. in Russian, **74** (1967) 202-208.

[85] P.S. Milojevic, *Nonlinear Functional Analysis*, Marcel dekker, New York, Basel, 1989.

[86] M.J. Ortega et W.G.Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, London, 1970.

[87] J. J. Nieto et D. O'Regan, *Variational approach to impulsive differential equations*, Nonlinear Anal. RWA, **10** (2009) 680-690.

[88] J. J. Nieto, *Variational formulation of a damped Dirichlet impulsive problem*, Appl. Math. Lett, **23** (2010) 940-942.

[89] Y. Niu et B. Yan, *Global structure of solutions to boundary value problems of impulsive differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, **55** (2016) 1-23.

[90] S.G. Pandit et S.G. Deo, *Differential Systems Involving Impulses*, Lecture Notes in Mathematics, Springer- Verlag, **954**(1982).

[91] C. Pierson-Gores, *Problèmes aux Limites pour des Equations différentielles avec Impulsions*, Ph. D. Thesis, Univ. Liuvian-la-Neuve, 1993.

[92] P. Rabier, *Lectures on Topics In One-Parameter Bifurcation Problems*, Springer- Verlag, Berlin. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985.

[93] P. Rabinowitz, *Théorie du Degré Topologique et Applications à des Problèmes aux Limites non linéaires*, Univ. Paris VI, 1976.

[94] P. Rabinowitz, *On bifurcation from infinity*, J. Differ. Equations, **14** (1973) 462-475.

[95] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal, **7** (1971) 487-513.

[96] O. O'Regan, Y.J. Cho et Y.Q. Chen, *Topological Degree Theory and applications*, Chapman et Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, **10** (2006).

[97] A.M. Samoilenko et N.A. Perestyunk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[98] M. Scheffer, et al, *Catastrophic shifts in ecosystems*, Nature, **413** (2001) 591-596.

[99] J.T. Schwartz, *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon et Breach, New York, 1969.

[100] J. Sun et H. Chen, *Multiplicity of solutions for a class of impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions via variant fountain theorems*, Nonlinear Anal. RWA, **11** (2010) 4062-4071.

[101] J. Sun et D. O'Regan, *Impulsive periodic solutions for singular problems via variational methods*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **86** (2012) 193-204.

[102] J. Sylvester, *A Generalization of the Leray-Schauder Index Formula*, Journal of Functional Analysis, **45** (1982) 213-225.

[103] Y. Tian et W. Ge, *Variational methods to Sturm-Liouville boundary value problem for impulsive differential equations*, Nonlinear Anal, **72** (2010) 277-287.

[104] A.S. Vatsala et Y. Sun, *Periodic boundary value problems of impulsive differential equations*, Appl. Anal, **44** (1992) 145-158.

[105] J. Wang et B. Yan, *Global properties and multiple solutions for boundary- value problems of impulsive differential equtions*, Electronic Journal of Differntial Equations, **171** (2013) 1-14.

[106] J. Xiao, J.J. Nieto et Z. Luo, *Multiplicity of solutions for nonlinear second order impulsive differential equations with linear derivative dependence via variational methods*, Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **17** (2012) 426-423.

[107] J. Yan, A. Zhao et J. J. Nieto, *Existence and global attractivity of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems*, Math. Comput. Model, **40** (2004) 509-518.

[108] M. Yao, A. Zhao et J. Yun, *Periodic boundary value problems of second order impulsive differential equations*, Nonlinear Anal.TMA., **70** (2009) 262-273.

[109] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[110] D. Yujun, *Periodic boundary value problems for functional differential equations with impulses*, J. Math. Anal. Appl, **210** (1997) 170-181.

[111] S. Zavalishchin et A. Sesekin, *Dynamic impulse systems: Theory and applications*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group 1997.

[112] E. Zeidler, *Nonlinear Funtional Analysis and its Aplications*, Springer Verlag, New York, 1986.

[113] D. Zhang, *Multiple Solutions of Nonlinear Impulsive Differential Equations with Dirichlet Boundary Conditions via Variational Method*, Results in Mathematics, **63** (2013) 611-628.

Abstract

This work is concerned with an impulsive boundary value problem for second order differential equations with real parameter. Our approach is based on the implicit function theorem to prove existence of a unique branches of solutions, moreover we use bifurcation Krasnosel'ski theorems to prove existence of multiple branches of solutions depending on the values of the real parameter.

Key words and phrases: Impulsive boundary value problem, Existence of solution, Implicit function theorem, Bifurcation from odd algebraic multiplicity eigenvalues, Krasnosel'ski theorem.

Résumé

Ce travail concerne un problème aux limites d'équations différentielles impulsives du second ordre avec un paramètre réel. Notre approche est basée sur le théorème des fonctions implicites pour prouver l'existence d'une solution unique . En outre, nous utilisons les théorèmes de Krasnosel'ski de bifurcation pour prouver l'existence de multiples branches de solutions en fonction des valeurs du paramètre réel.

Mots- clés : Problème aux limites impulsif, existence de solution, théorèmes des fonctions implicites, Bifurcation à partir des valeurs propres de multiplicités impaires, théorème de Krasnosel'ski.

الملخص

هذا العمل يتناول حدود المعادلات التفاضلية المندفعة من الدرجة الثانية مع عامل حقيقي. ويستند نهجنا على نظرية الدوال الضمنية لإثبات وجود حل فريد من نوعه. بالاضافة الى ذلك، نحن نستخدم نظريات التشعب لكراسنوسلسكي لإثبات وجود فروع متعددة من الحلول وفقا لقيم العامل الحقيقي.

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية المندفعة, اثبات وجود حل, نظرية الدوال الضمنية, التشعب من خلال القيم الذاتية ذات التعدد الفردي, نظرية كراسنوسلسكي.