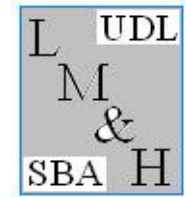


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES
Spécialité : Génie Civil
Option : Structures & Matériaux

Présentée par

KOUIDER Djilali

Sujet de thèse

Analyse dynamique des plaques épaisses avec la prise en compte de l'effet de la microstructure

Soutenu devant le Jury composé de :

Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Président
Mr. BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	Professeur	UDL-SBA	Directeur de thèse
Mr. BOURADA Mohamed	Professeur	UDL-SBA	Co-Directeur de thèse
Mr. HADJ MOSTEFA Adda	MCA	U-Relizane	Examineur
Mr. CHIKH Abdelbaki	Professeur	U-Tiaret	Examineur
M ^{me} .ATTIA Amina	MCA	U-Temouchent	Examinatrice

Année universitaire : 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Ce travail est le fruit de quatre années de recherche passées au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes, où j'ai eu la chance de pouvoir travailler et vivre dans une ambiance exceptionnelle entourée par une équipe aussi sympathique que motivée.

Je tiens tout d'abord à souligner la qualité de l'encadrement remarquable qui m'a permis d'effectuer mes premiers pas de chercheur dans d'excellentes conditions. **BOUSAHLA Abdelmoumen Anis** maître de conférence classe "A" a proposé un sujet de recherche passionnant et original. Sa pédagogie et sa rigueur scientifique ont rendu très constructives les années passées ensemble. Je tiens en particulier à le remercier pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son expérience et ses projets.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Monsieur professeur **BOURADA MOHAMED** directeur de laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de m'avoir fait l'honneur, pour m'avoir accueilli dans leur laboratoire et les moyens donnés pour réaliser ce travail. Je ne sais comment le remercier pour sa disponibilité, sa patience, ses conseils et tout ce qu'il a pu m'apprendre au cours de ces années.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Madame Messieurs, **TOUNSI Abdelouahed**, **HADJ MOSTEFA Adda**, **CHIKH Abdelbaki**, et **ATTIA Amina** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Enfin, je ne saurais terminer sans adresser mes chaleureux remerciements à mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie Bouraada Fouad, Zine Abdallah, l'ingénieur d'état en informatique Melle Benyoucef Houria, tous mes amis, pour les nombreuses discussions, pour leur participation à la mise en forme de ce document et à la préparation de la soutenance de Thèse.

Dédicaces

À ma chère mère,

À mon cher père,

À ma femme

À mes frères et sœurs,

À ma famille,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Résumé

Dans cette thèse, l'étude et la modélisation des structures épaisses avec prise en compte de l'effet de la microstructure a été entreprise. A cet effet l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques est présentée en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSST) ou le nombre de variables de la cinématique proposé est réduit. Pour cela cette théorie est donc simple d'utilisation vu les quatre variables proposées contrairement à d'autres théories de déformation de cisaillement qui proposent cinq variables ou plus. Aussi, de nouveaux types de plaques sandwich en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont considérés, à savoir avec des faces FGM dont les propriétés varient en fonction de loi de puissance et l'âme du FGM qui varie d'une manière exponentielle. Les équations du mouvement pour ce problème sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Les conditions aux limites sont prises en charge pour plaque simplement appuyée, et l'approche de Navier est utilisée pour résoudre les équations de mouvement. L'exactitude de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec des solutions d'élasticité tridimensionnelles et avec d'autres théories d'ordre élevé quasi-3D trouver dans la littérature. D'autres exemples numériques sont également présentés pour montrer les influences de la répartition de la fraction volumique, des paramètres géométriques et de l'indice de loi de puissance sur les réponses en flexion et en vibration libre des plaques sandwich FGM. On peut conclure que la formulation actuelle qui prend en compte à la fois le cisaillement transverse et la déformation prédit les fréquences naturelles avec le même degré de précision que celles des solutions d'élasticité 3D et donne de bons résultats de déplacements et des contraintes par rapport aux autres théories Quasi-3D. On peut également en déduire que la variation de la flèche adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre d'inhomogénéité et la fréquence propre.

Mots clé : Analyse de la flexion et de la vibration libre ; plaque fonctionnellement graduée ; nouvelle théorie quasi-3D ; nouveau type de plaque sandwich ; théorie des plaques raffinée

Abstract

In this thesis, the study and modeling of thick structures taking into account the effect of the microstructure was undertaken. For this purpose the analysis of bending and free vibration of the plates is presented using a new theory of high order shear deformation (HSDT) where the number of variables of the proposed kinematics is reduced. For this reason, this theory is therefore easy to use given the four variables proposed, unlike other shear deformation theories which offer five or more variables. Also, new types of sandwich plates in functionally graded materials (FGM) are considered, namely with FGM faces whose properties vary according to the power law and the core of the FGM which varies exponentially. The equations of motion for this problem are derived using Hamilton's principle. Boundary conditions are supported for simply supported plate, and Navier's approach is used to solve the equations of motion. The correctness of the present theory is verified by comparing the results obtained with three-dimensional elasticity solutions and with other quasi-3D high-order theories found in the literature. Other numerical examples are also presented to show the influences of volume fraction distribution, geometric parameters and power law index on the bending and free vibration responses of FGM sandwich plates. It can be concluded that the current formulation which takes into account both the transverse shear and the deformation predicts the natural frequencies with the same degree of accuracy as those of the 3D elasticity solutions and gives good results of displacements and stresses with respect to other Quasi-3D theories. It can also be deduced that the variation of the dimensionless sag is inversely related to the inhomogeneity parameter and the natural frequency.

Keywords: Analysis of bending and free vibration; functionally graduated plate; new quasi-3D theory; new type of sandwich plate; refined plate theory

ملخص

في هذه الأطروحة ، تم إجراء دراسة ونمذجة الهياكل السميكة مع مراعاة تأثير البنية المجهرية. لهذا الغرض ، تم تقديم تحليل الانحناء والاهتزاز الحر للألواح باستخدام نظرية جديدة لتشوه القص عالي الترتيب ، و، حيث يتم تقليل عدد متغيرات المقترحة. لهذا السبب فإن هذه النظرية سهلة الاستخدام بالنظر إلى المتغيرات الأربعة المقترحة ، على عكس نظريات تشوه القص الأخرى التي تقدم خمسة متغيرات أو أكثر. أيضاً ، يتم النظر في أنواع جديدة من الألواح العازلة في المواد المصنفة ، وبالتحديد مع تشويه الأعضاء التي تختلف خصائصها وفقاً لقانون القوة. تم اشتقاق معادلات الحركة لهذه المشكلة باستخدام مبدأ هاملتون. يتم دعم شروط الحدود للوحة مدعومة ببساطة ، و يتم التحقق من صحة النظرية الحالية من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع حلول المرونة ثلاثية الأبعاد ومع نظريات أخرى شبه ثلاثية الأبعاد عالية الترتيب. كما تم تقديم أمثلة عددية أخرى لإظهار تأثيرات توزيع الكسور الحجمية والمعلومات الهندسية ومؤشر قانون الطاقة على استجابات الانحناء والاهتزاز الحر لألواح شظيرة تشويه الأعضاء التناسلية الأنثوية. يمكن استنتاج أن الصيغة الحالية التي تأخذ في الاعتبار كل من القص المستعرض والتشوه تنتبأ بالترددات الطبيعية بنفس درجة الدقة مثل تلك الخاصة بحلول المرونة ثلاثية الأبعاد وتعطي نتائج جيدة من عمليات الإزاحة والضغط. يمكن أيضاً استنتاج أن تباين الانحناء غير ذي الأبعاد يرتبط عكسياً بمعامل عدم التجانس والتردد الطبيعي.

الكلمات المفتاحية: تحليل الانحناء والاهتزازات الحرة. لوحة تخرج وظيفي، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد. نظرية الصفيحة

المكررة

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
ملخص	iii
Table Des Matières	iv
Liste Des Figures	viii
ListeDes Tableaux	ix
Liste Des Notations	iiix
Introduction Générale	1

Chapitre I : Généralités Sur les Matériaux à Gradient de propriété

I.1. Introduction.....	5
I.2. Histoire du développement architectural du concept FGM.....	5
I.3. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	9
I.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	9
➤ I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	11
➤ I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	11
➤ I.4.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	12
I.5. Champs d'utilisation.....	13
➤ I.5.1. Aéronautique	13
➤ I.5.2. Matières industrielles.....	13
➤ I.5.3. Optoélectronique.....	13
➤ I.5.4. Biomatériaux.....	14
➤ I.5.5. Autres.....	14
I.6 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	14
I.7. Revue Des Méthodes D'élaboration Des FGM.....	15
➤ I.7.1 Coulage En Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)	16
➤ I.7.2. Coulage Séquentiel En Barbotine (Slip Casting)	17
I.8. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM	17
➤ I.8.1. Processus de formation et de consolidation des FGM	18
➤ I.8.2. Densification des poudres compactes pour FGM	21
I.9. Conclusion.....	24

Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

II.1. Introduction	25
II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM	25
➤ II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	25
➤ II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	26
➤ II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT.).....	27
II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	28
II.4. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques	32
II.5. Les modèles en couches discrètes	34
II.6. Modèles éléments finis des structures coposites	38
➤ II.6.1. Modèles éléments finis 2D	38
➤ II.6.2. Modèles éléments finis 3D	38
II.7. Sollicitations et ruine des matériaux sandwichs	40
II.8. Théorie des structures sandwichs	42
➤ II.8.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs	42
➤ II.8.2 Modèle bidimensionnel d'une poutre en flexion simple	43
II.9. Rigidité en flexion	43
II.10. Revue de la littérature sur l'analyse de la vibration libre des structures en FGM	46
II.11. Conclusion	50

Chapitre III : Généralité sur les phénomènes d'instabilité

III. Introduction	52
III.1. Définition : Traction/Compression.	53
III.2. Essai de traction	53
➤ III.2.1. Essai de traction uniaxiale	53
➤ III.2.2. Module d'Young	55
➤ III.2.3. Limite d'élasticité.....	56
➤ III.2.4. Module d'élasticité transverse	56
➤ III.2.5. Zones de déformation plastique	56
➤ III.2.6. Conditions de Résistance des Matériaux	57
III.3. Compression simple	58
➤ III.3.1. Définition	58
➤ III.3.2. Déformations et contraintes	59
➤ III.3.3. Conditions de Résistance	59
III.4. Cisaillement simple	60
➤ III.4.1. Définition	60

➤ III.4.2. Essai de cisaillement simple	61
➤ III.4.3. Etude des déformations en cisaillement	63
➤ III.4.4. Déformations élastiques	65
➤ III.4.5. Contraintes	65
➤ III.4.6. Relation entre contrainte et déformation	65
III.5. Torsion simple	65
➤ III.5.1. Définition	65
➤ III.5.2. Essai de torsion	66
➤ III.5.3. Etude des déformations	67
➤ III.5.4. Etude des contraintes	67
➤ III.5.5. Relation entre contrainte et moment de torsion	69
➤ III.5.6. Condition de résistance	69
➤ III.5.7. Condition de rigidité	70
III.6. Le flambement	70
➤ III.6.1. Introduction	70
➤ III.6.2. Phénomènes d'instabilité des pièces métalliques	71
➤ III.6.3. Les type de flambement	71
➤ III.6.4. Les dangers du flambement	77
➤ III.6.5. Mise en évidence du flambement	77
➤ III.6.6. Le flambement de la plaque FGM sous augmentation de température	79
➤ III.6.7. Le flambement de la plaque sous variation de température non linéaire à travers l'épaisseur	80
III.7. Flexion simple	80
➤ III.7.1. Introduction	80
➤ III.7.2. Essai de flexion simple (domaine élastique)	81
➤ III.7.3. Relation entre contrainte et moment fléchissant	85
➤ III.7.4. Déformation en flexion	87
➤ III.7.5. Condition de rigidité en flexion	87
III.8. La vibration	87
➤ III.8.1. Introduction	87
➤ III.8.2. Introduction aux équations de Lagrange	89
➤ III.8.3. Les problèmes de vibration des plaques en FGM	90
III.9 Conclusion	92

Chapitre IV : Etude Analytique De la flexion et de la vibration libre des Plaques

IV.1. Introduction	94
IV.2. Formulation Théorique	94
➤ IV.2.1 Propriétés matérielles des couches	95
➤ IV.2.2 Propriétés matérielles de l'âme du sandwich	96
➤ IV.2.3 Différents types des plaques sandwich symétriques	96
- IV.2.3.1 La plaque sandwich (2-1-2)	97
- IV.2.3.2 La plaque sandwich (1-1-1)	97
- IV.2.3.3 La plaque sandwich (1-2-1)	97
- IV.2.3.4 La plaque sandwich (1-3-1)	97
➤ IV.2.4 Cinématique et équations constitutives	98
➤ IV.2.5 Equations directrices	100
IV.3 Solution adopté pour une plaque FGM simplement appuyée.....	104
IV.4. Conclusion	106

Chapitre V : Etude Résultats et discussions

V.1. Introduction	107
V.2. Résultats numériques et discussion	107
➤ V.2.1. Analyse de la flexion	107
-V.2.1.1. Plaque sandwich avec les faces FGM et âme homogène (type A) ...	107
-V.2.1.2. Plaque sandwich à faces homogènes et une âme FGM (type B)	112
-V.2.1.3 Analyse de flexion d'une plaque sandwich avec des feuilles de face FGM et un noyau FGM	117
➤ V.2.2. Analyse vibratoire	120
-V.2.2.1. Plaque sandwich avec faces FGM et âme homogène (type A) carrées simplement appuyées avec faces FGM et âme homogène (Type A) ...	120
-V.2.2.2. Plaque sandwich à faces homogènes et âme FGM (type B)	122
-V.2.2.3. Plaque sandwich avec des faces FGM et l'âme FGM (type C)	125
V.3. conclusion	129

Conclusion Générale.....	130
---------------------------------	------------

Référence Bibliographique.....	131
---------------------------------------	------------

Liste des Figures

Chapitre I

Fig. I. 1 Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale	6
Fig. I. 2 Concept des matériaux à gradient de propriétés	7
Fig. I. 3 Concept des matériaux à gradient de propriétés (Protection Thermique).....	8
Fig. I. 4 Les principaux domaines d'application des FGM	9
Fig. I. 5 Géométrie d'une plaque en FGM.	10
Fig. I. 6 P Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	11
Fig. I. 7 Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	12
Fig. I. 8 La distribution composante des matériaux	15
Fig. I. 9 Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].....	16
Fig. I. 10 Processus de traitement des Poudre pour les FGM [Neubrand 1997]	18
Fig. I. 11 Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM [Anné 2006].....	20
Fig. I.12 Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al ₂ O ₃ /ZrO ₂) [Anné 2006].....	21
Fig. I. 13 Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [Anné 2006]	11
Fig. I. 14 (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al ₂ O ₃ / ZrO ₂ [Anné 2006].....	22

Chapitre II

Fig. II. 1 Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].....	26
Fig. II. 2 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].....	27
Fig. II. 3 Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].	28
Fig. II. 4 Profil de variation de $\varphi(z)$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$) (Mahi ,2012)	33
Fig. II. 5 : Profil de variation de $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$) (Mahi , 2012).....	33
Fig. II. 6 Poutre sollicitée en cisaillement.	37
Fig. II. 7 Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [Nguyen, 2004].	37
Fig. II. 8 Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [Nguyen, 2004].....	37
Fig. II. 9 Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant z [Nguyen , 2004]	38
Fig. II. 10 Élément brique à 20 nœuds	39
Fig. II. 11 Élément singulier à 15 nœuds.....	39
Fig. II.12 Etudes du problème de bord libre par EF 3D	39
Fig. II. 13 Élément brique mixte à 18 nœuds	40
Fig. II.14 Élément d'interface	40

Fig. II. 15 différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.	41
Fig. II. 16 Poutre sandwich chargée dans son plan.	43

Chapitre III

Fig. III. 1 Essai de traction simple sur éprouvette normalisé	53
Fig. III. 2 Allongement d'une éprouvette sollicitée en traction	54
Fig. III. 3 Cartographie de répartitions de contraintes autour	58
Fig. III. 4 Répartition uniforme des contraintes	59
Fig. III. 5 : Modélisation d'une éprouvette sollicitée au cisaillement.	60
Fig. III. 6 Poutre sollicitée en cisaillement.	62
Fig. III. 7 Glissement transversale Δy	63
Fig. III. 8 Courbe de $F=f(\Delta y)$	64
Fig. III. 9 Effort de torsion simple appliqué à une poutre, et torseur correspondant	66
Fig. III. 10 Illustration de l'essai de torsion simple.....	66
Fig. III. 11 Courbe $Mt=f(\alpha)$	67
Fig. III.12 Répartition des contraintes au niveau de la section.....	68
Fig. III. 13 Moment quadratique polaire en fonction de la section	69
Fig. III.14 Poutre rectiligne en condition de flambage avec sa déformée	70
Fig. III. 15 Phénomènes d'instabilité.	71
Fig. III. 16 Flambement simple.	72
Fig. III. 17 flambement par flexion	73
Fig. III. 18 Flambement par torsion.....	74
Fig. III. 19 Flambement par flexion-torsion	75
Fig. III. 20 Flambement avec point limite	76
Fig. III. 21 : Les causes de Flambement par divergence.	76
Fig. III. 22 Essai de flambement lors 'que N est inférieur a N_C	78
Fig. III. 23 Essai de flambement lors 'que N est égale à N_C	78
Fig. III.24 Essai de flambement lors 'que N est supérieur à N_C	79
Fig. III. 25 Modélisation des efforts extérieurs sur une poutre soumise à une flexion simple	80
Fig. III. 26 Modélisation d'un essai de flexion trois points.....	81
Fig. III. 27 Flexion trois points d'une poutre à plan moyen.....	82
Fig. III.28 Flexion simple d'une poutre à plan moyen	83
Fig. III. 29 Profils de section considérés.....	84
Fig. III.30 Coefficient de concentration de contraintes K en flexion simple	86
Fig. III. 31 Définition de la déformée	87
Fig. III. 32 Trois familles de vibrations présentées en usinage : les vibrations libres, les vibrations forcées et les vibrations auto-entretenues.	88

Chapitre IV

Fig. IV. 1 Géométrie de la plaque sandwich FGM (Li et al.2017)	95
Fig. IV. 2 Variation de la fonction de fraction volumique en fonction de l'épaisseur de la plaque pour différentes valeurs de $P = \{0.5, 1, 2, 5\}$ et $K = \{0, 1, 2, 5\}$ et différents types des plaques sandwich FGM	98

Chapitre III

Fig. V. 1 Effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} de plaques sandwich à faces homogènes et une âme FGM	114
Fig. V. 2 Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport a/b de la plaque sandwich (1-2-1) à faces homogènes et une âme FGM	115
Fig. V. 3 Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport a/h de la plaque sandwich (1-2-1) avec des faces homogènes et une âme FGM	115
Fig. V. 4 Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich à faces homogènes et une âme FGM.....	116
Fig. V 5 : Effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques sandwich avec des faces FGM et une âme FGM	119
Fig. V. 6 Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich avec les faces de surface FGM et une âme FGM	120

Liste des Tableaux

Chapitre I

Tableau I. 1 comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.7

Chapitre II

Tableau II. 1 Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM.....31

Chapitre III

Tableau III. 1 Quelques module d'élasticité transversal ou module de Coulomb pour certains matériaux.....65

Chapitre V

Tableau V. 1 Flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich FGM carrée avec des faces en FGM et une âme homogène soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).....109

Tableau V. 2 Contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque sandwich FGM carrée avec faces en FGM et une âme homogène soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).....110

Tableau V. 3 Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque sandwich FGM carrée avec faces en FGM et une âme homogène soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).....111

Tableau V. 4 Flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich carrée FGM avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).....112

Contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque sandwich carrée FGM avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).113

Tableau V. 6 Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque sandwich carrée FG avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$)..... 113

Tableau V. 7 Flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich FGM carrée avec des facettes en FGM et une âme FGM soumis à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$). 117

Tableau V. 8 Contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque sandwich FGM carrée avec des tôles de surface FGM et une âme FGM soumis à charge sinusoïdale ($a/h = 10$)... 118

Tableau V. 9 Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec faces FGM et âme homogène (Type A).....121

Tableau V. 10 Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec de faces homogènes et âme FGM (type B).....123

Tableau V. 11 Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec faces FGM et âme FGM (type C)126

$\{ \}$	Vecteur colonne ;
$[]$	Matrice.

Lettres latines majuscules

A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque ;
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque ;
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque ;
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement ;
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux ;
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement ;
N_x^T, N_y^T	Effort due à la charge thermique ;
$M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}, M_y^{sT}$	Moment due à la charge thermique
$T(x, y, z)$	Distribution de la température à travers l'épaisseur ;
$\{P\}$	Vecteur des efforts généralisés.
P_c	Propriété Matérielle de la céramique ;
P_m	Propriété Matérielle de métal ;
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z) ;
E	Module de Young suivant x ;
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z » ;
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z » ;
$V(z)$	Fraction volumique.

Lettres latines minuscules

a	Longueur de la plaque ;
b	Largeur de la plaque ;
h	Épaisseur de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) ;
i, j	Nombres naturels ;
k	Indice de la fraction volumique.
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ;
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .

Lettres grecques

α	Coefficient de dilatation thermique ;
ν	Coefficient de Poisson ;
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements généralisés ;
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales ;
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement ;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z ;
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion ;
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel ;
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel ;
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement ;
δW_{int}	Travail virtuel intérieur ;
δW_{ext}	Travail virtuel extér



Introduction Générale

Introduction générale :

Les progrès technologiques ont ouvert la voie à la transition des structures composites des composants structurels secondaires aux composants structurels primaires. En raison de cette amélioration de statut, ces structures composites doivent supporter des charges plus élevées, nécessitant donc la conception des structures composites plus épaisses. Cette exigence de structures composites épaisses a donné naissance à une classe des structures composites appelées plaques sandwich. Ces plaques se composent généralement de deux feuilles de face minces et d'un noyau qui. Cette composition de plaque sandwich offre de multiples avantages, notamment une rigidité et une résistance élevées, une capacité d'absorption d'énergie et un rapport résistance /poids plus élevé. En raison de ces avantages, les plaques sandwich trouvent leurs applications dans le domaine de l'aérospatiale, de la marine et des industries civiles (Zenkert 1997, Marshall 1982, Vinson 2001, 2005, Lindström et Hallström 2010, Dean et al. 2011, Sobhani et al 2021) Les structures sandwich, dont l'utilisation n'a cessé d'augmenter depuis un demi-siècle, sont les composites les plus utilisés comme pièces de structure. La plus utilisée est la structure sandwich conventionnelle constituée de trois couches homogènes, deux faces faces collées sur l'âme (Carrera et Brischetto 2009, Katariya et Panda 2020, Forcellese et Michela 2020).

Les scientifiques des matériaux, à Sendai, au Japon (Koizumi (1997) ont reçu beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de la diminution des disparités dans les propriétés des matériaux et de la réduction des contraintes thermiques (Suresh et Mortensen 1998, Miyamoto 1999). La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Cette classe de matériaux hautes performances est largement étudiée à savoir les travaux de (Daouadji et al. 2015, Akbaş 2015, Attia 2017, Rezaiee-Pajand et al. 2018a, Avcar 2019, Asiri et al. 2020 , Eltaher et Akbaş 2020, Fenjan et al. 2020, Ghandourah et Abdraboh 2020, Gafour et al. 2020, Karami et al. 2020, Mirjavadi et al. 2020, Shahmohammadi et al. 2020, Selmi 2020, Seyfaddini et al. 2021) Aussi, le développement de ce type de matériau a donné lieu à son utilisation dans la conception des plaques sandwich. Deux nouveaux types des structures sandwich avec plaques frontales FGM et âme homogène (Shen et Li 2008, Sobhy 2013, Fazzolari 2015) ou avec plaques frontales homogènes et noyau FGM (Fazzolari 2015, Kashtalyan et Menshykova 2009, Alibeigloo et Liew 2014, Rezaiee-Pajand et al. 2018b) ont été proposés et étudiés.

De nombreuses recherches sur les structures sandwich FGM ont reçu beaucoup d'attention. Méhar et al. (2017) ont étudié la réponse en fréquence propre non linéaire de la structure sandwich renforcée de nanotubes de carbone à simple paroi à gradation fonctionnelle, le panneau sandwich est constitué de feuilles de face de nanotubes de carbone gradués et d'un noyau homogène. Bharat et al. (2020) ont examiné expérimentalement la réponse vibrationnelle d'un sandwich imprimé sous compression axiale. Le sandwich est réalisé en utilisant une âme en mousse syntactique et des peaux en polyéthylène. Do et al. (2017) ont étudié des analyses de flambage thermique de plaques sandwich en matériau à gradation fonctionnelle (FGM) qui utilisent deux types de plaques sandwich FGM avec un schéma de composition différent, c'est-à-dire l'une avec des peaux FGM et un noyau homogène et l'autre composée de peaux homogènes et noyau FGM. Fu et al. (2018) étudie des plaques sandwich remplies de matériau poreux, dans lesquelles deux types de structures sandwich FGM sont considérés, dont l'un avec des feuilles de face FG et un noyau homogène en céramique ou en métal, et l'autre avec FGM. Rezaiee-Pajand et al. (2019) ont examiné la réponse non linéaire des plaques et coques sandwich céramique/métal à gradation fonctionnelle de la loi de puissance sur la base de la coque triangulaire isoparamétrique à six nœuds et de la théorie de la couche unique équivalente . Rezaiee-Pajand et al. (2018c) ont examiné l'analyse statique d'une plaque sandwich FG à loi de puissance non prismatique à l'aide des théories des faisceaux de Timoshenko et Reddy.

Même si ces recherches portent sur les développements les plus récents des structures sandwich, les applications croissantes des FGM nécessitent le développement de formulations théoriques et numériques. En théorie classique des plaques (CPT) basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, ne donne que des résultats acceptables pour l'analyse des plaques minces. Cette théorie a été développée en 1988 par Love (1888) en utilisant les hypothèses de Kirchhoff. Les modèles développés selon la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de (Reissner 1945 et Mindlin 1951), selon lesquelles la déformation de cisaillement transverse est supposée constante dans la direction de l'épaisseur. , des facteurs de correction de cisaillement doivent être incorporés pour ajuster. Sur la base des formulations FSDT et de la méthode généralisée de quadrature différentielle (GDQM), Rezaiee-Pajand et al. (2020) ont étudié la réponse vibrationnelle libre des coques coniques nano composites hybrides FGM.

Pour augmenter la précision de la prédiction du cisaillement transverse, plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé ont été proposées ; ces théories supposaient une

distribution transversale sous la forme d'un polynôme ou plus. Avec cette hypothèse, la contrainte transversale est nulle sur le haut et le bas de la plaque sans avoir besoin d'un facteur de correction de cisaillement (Shimpi 2002, Mantari et al. 2012a, b, Sobhy 2016, Ahmed et al. 2019, Madenci 2019, Vinyas2020, Nguyen et al 2020a, b, c, Hadji 2020, Merzoug et al 2020). Cependant, étant donné que toutes les théories mentionnées ci-dessus supposent que les déplacements transversaux sont constants le long de la direction de l'épaisseur, l'effet de l'étirement dans la direction transversale est ignoré (c'est-à-dire $\epsilon_z = 0$). Afin de prendre en compte l'influence de l'effet d'étirement, de nombreuses théories quasi-3D ont été proposées dans la littérature pour analyser le comportement mécanique des plaques épaisses (Rachedi et al. 2020, Merzoug et al. 2020). Ces théories quasi-3D sont trop lourdes et coûteuses en calcul car elles traitent de nombreuses inconnues. Par exemple, on trouve dans la littérature des théories à douze inconnues (Kant et Swaminathan 2002), à onze inconnues (Chen et al. 2009, Talha et Singh 2010, Reddy 2011) et à neuf inconnues (Ferreira et al. 2011, Neves et al. 2012a, b, 2013). Mantari et Soares (2013) ont présenté une formulation quasi-3D avec six inconnues pour examiner le comportement statique d'une plaque à gradient exponentiel (E-FGP) en incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur. Belabed et al. (2014) ont proposé une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D efficace avec cinq variables inconnues pour la flexion et les réponses vibrationnelles libres de la plaque FGM simplement appuyée. Le comportement géométriquement non linéaire des structures de coque minces, modérément épaisses et épaisses et l'effet d'étirement de l'épaisseur sont étudiés par Rezaiee-Pajand et al. (2018d) utilisant un élément triangulaire à sept paramètres. Récemment, Nguyen et al. (2021) ont présenté une formulation quasi-3D basée sur la théorie des plaques raffinée (RPT) en conjonction avec l'analyse iso géométrique (IGA) pour examiner la réponse statique et dynamique d'une nouvelle plaque sandwich poreuse. En outre, d'autres travaux sur l'analyse statique et dynamique des plaques sandwich FG / FG sont présentés par (benachour et al. 2011, hadji et al. 2011, Jung et al. 2016) utilisant quatre théories de plaques raffinées variables dont l'épaisseur s'étirant l'effet n'est pas inclus. Bennoun et al. (2015) ont étudié la réponse vibrationnelle de deux types de plaques sandwich FG à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé quasi-3D à cinq variables dont la déformation normale transversale (étirement) est incluse dans le calcul. Le but de notre thèse est d'utiliser une théorie de plaque à quatre variables raffinée pour étudier le comportement de la flexion et vibratoire libre d'un nouveau type de plaque sandwich FGM qui se compose de plaque frontale FGM et d'un noyau FGM via la théorie quasi-tridimensionnelle de plaques de contrainte de cisaillement hyperbolique.

Le nombre de variables inconnues de la formulation développée est réduit à quatre contre six ou plus dans les autres solutions existantes (quasi-3D) bien que l'effet de l'étirement de l'épaisseur soit inclus. la distribution transversale des contraintes de cisaillement est décrite à l'aide de la fonction hyperbolique et l'effet de l'étirement en épaisseur est pris en compte (c'est-à-dire, $\varepsilon_z \neq 0$).

Le gouvernement équations sont déduites selon le principe de Hamilton et résolu en utilisant la solution de Navier. Le nombre d'inconnues fonctions impliquées dans les équations gouvernantes n'est que de quatre.

Des études comparatives sont menées pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle.

CHAPITRE I

**Généralité sur les matériaux à Gradient de
propriété**

I.1 Introduction

Les matériaux composites légers, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été Généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées dues à leur Fiable dureté. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Hirai 1999, Chan 2001, Uemura 2003]. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.1 [Yin 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

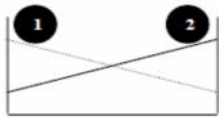

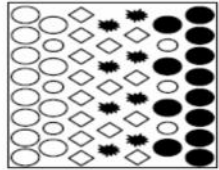
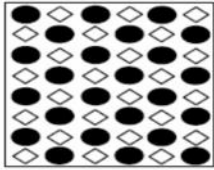
En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases

I.2. Histoire du développement architectural du concept FGM

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques).

Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives. dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la Figure. III.3 [Koizumi 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

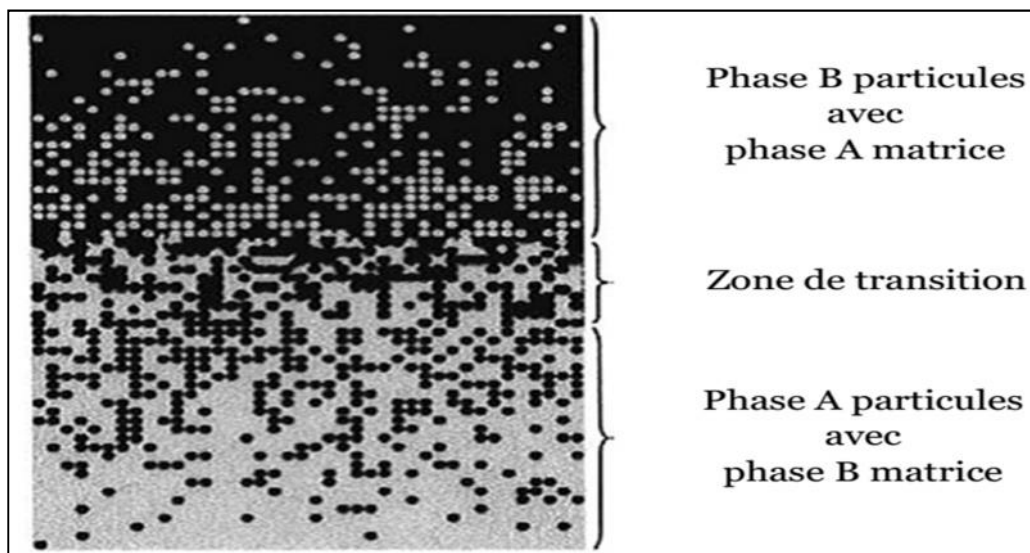


Figure. I.1 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [Yin 2004]

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau 1.1.

Tableau (1.1) comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaire »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface. -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure 1.4. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

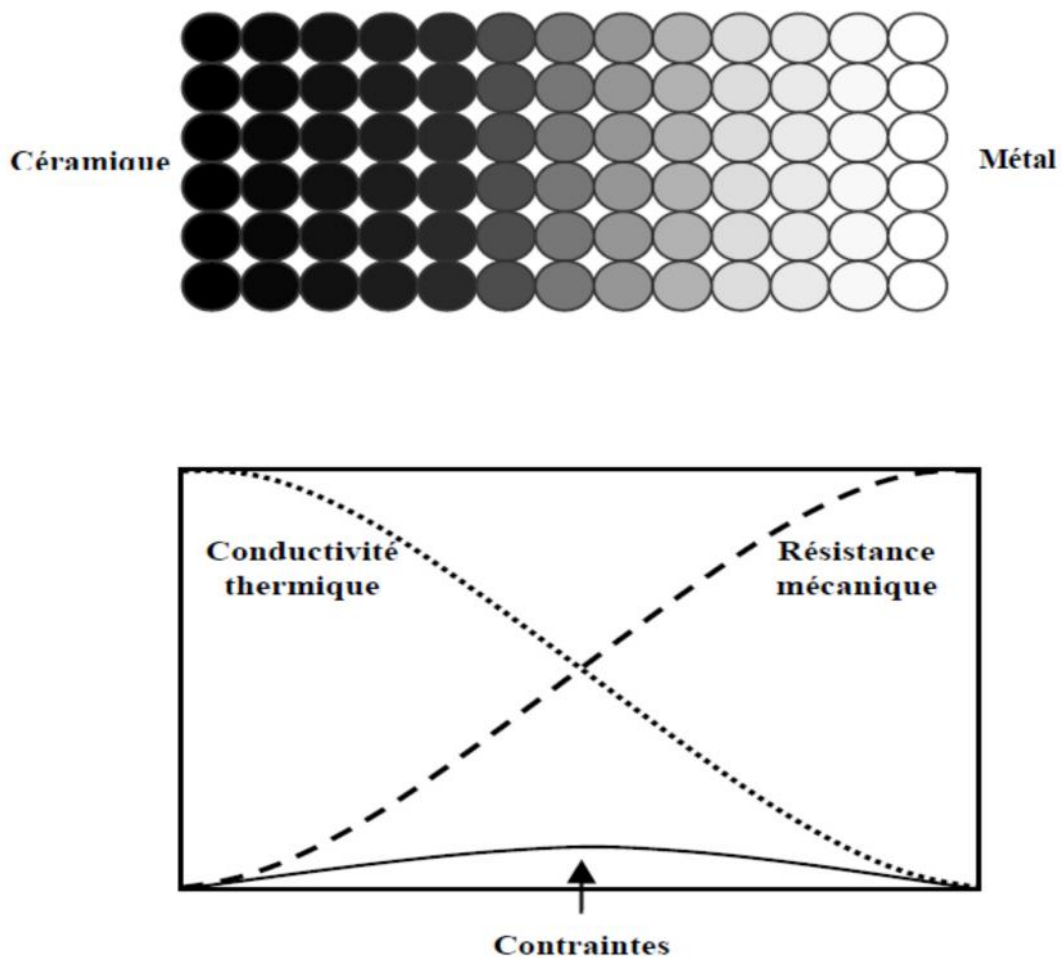


Figure. I.2 Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection

thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

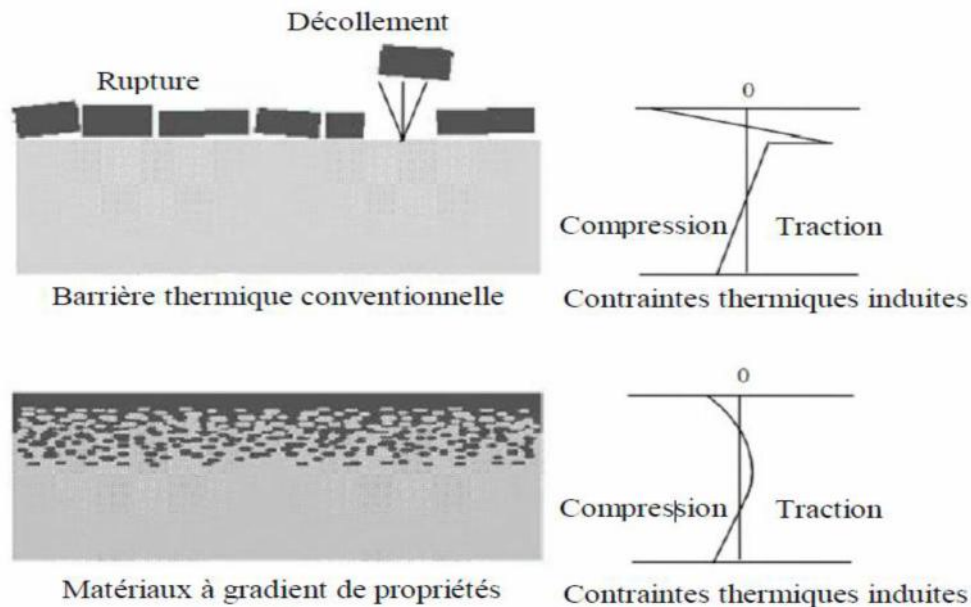


Figure. I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés (Protection Thermique).

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc ... [Nguyen 2007]. D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [Müller 2003], des déclencheurs [Qiu 2003], des armures metal/ceramic [Liu 2003], des détecteurs photoélectriques [Paszkiewicz 2008] et des implants dentaires [Watari 2004]. Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériaux ont été éditées pendant les deux dernières décennies [Fuchiyama 1995, Markworth 1995, Tanigawa 1995, Noda 1999, Paulino 2003]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [Hui 2009].

I.3. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

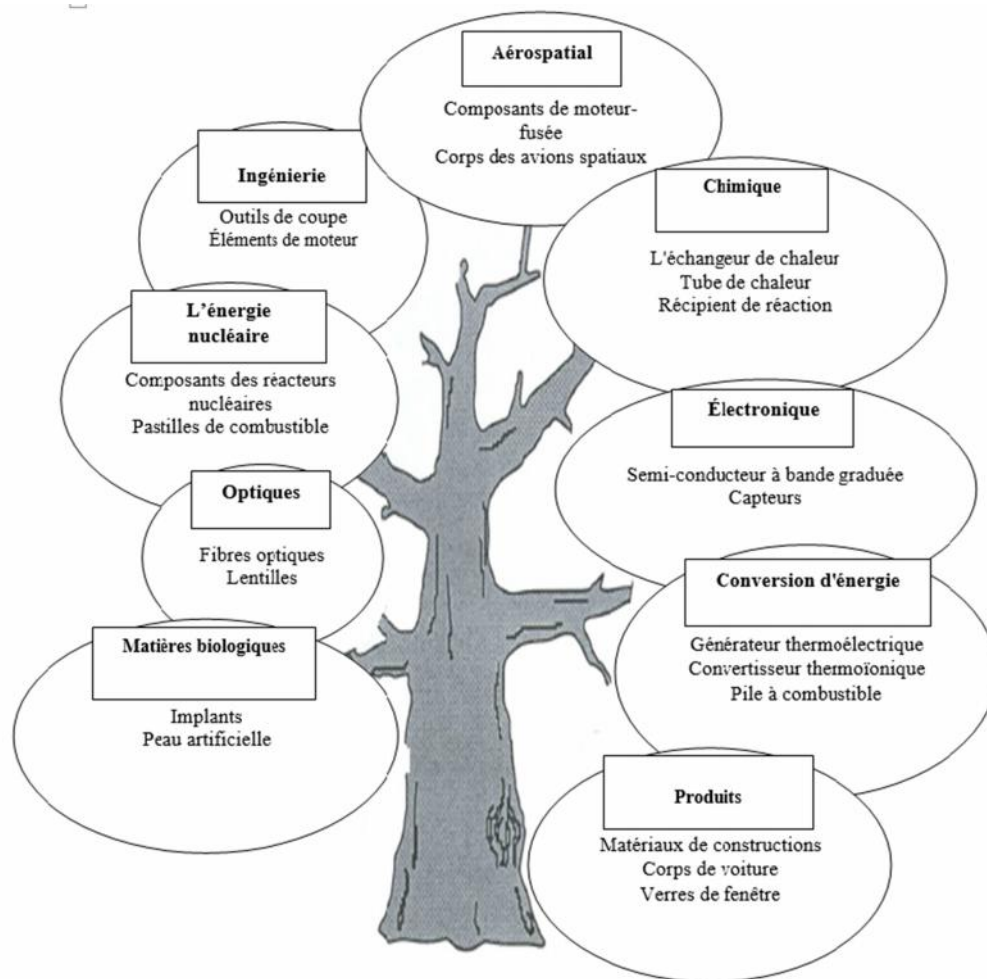


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

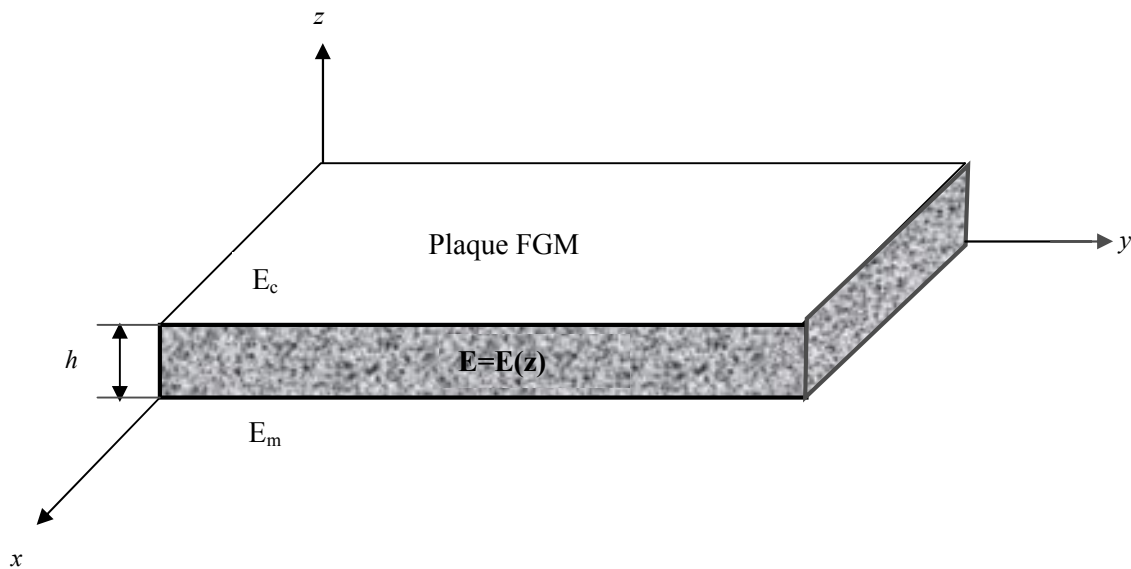


Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (**P-FGM**) ou la fonction exponentielle (**E-FGM**) ou avec la fonction sigmoïde (**S-FGM**).

I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [35] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

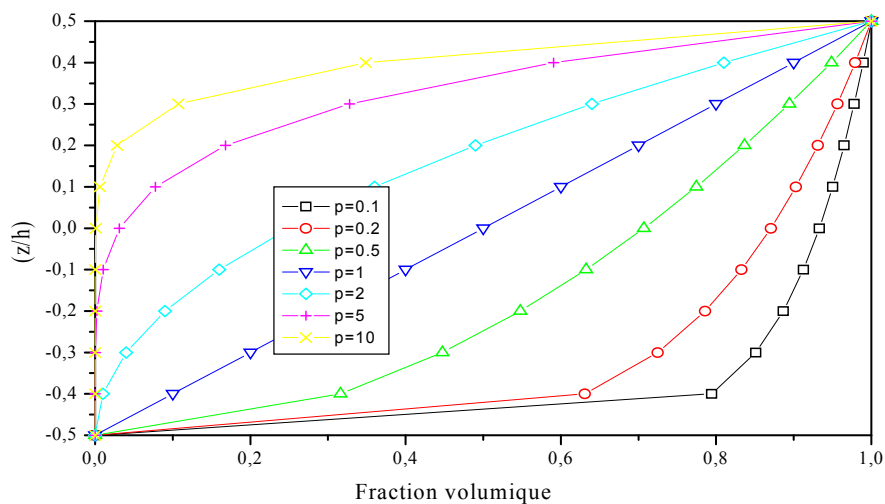


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [35].

Par conséquent, Chung et chi [36] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.5 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

I.4.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [37] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.7.

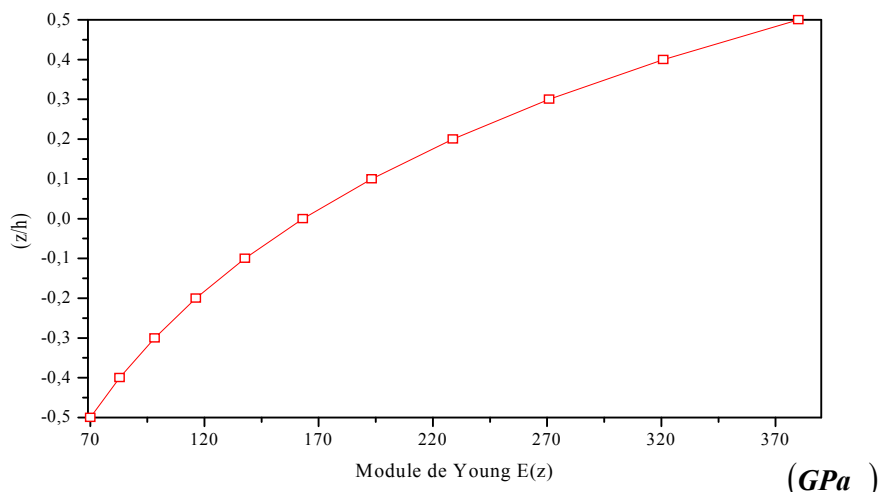


Figure I.7 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

On remarque que l'augmentation du module de Young suit l'augmentation de la quantité de la céramique (Al_2O_3 ou l'Alumina) par rapport à celle du métal (Al) tout en allant vers l'extrémité supérieure de la plaque.

I.5. Champs d'utilisation

I.5. 1.Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Possédant deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau, il permet de produire le poids-léger et des matériaux solides. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGM sont également applicables à un mur externe de l'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.5. 2.Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance ac- crue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité ; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environ- nement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.5. 3.Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, les outils de communication utilisant les fibres optiques ont besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure.

Application des FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à

haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.5. 4.Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os couvrant le cerveau et d'autres organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, on a besoin d'un nouveau matériau qui peut remplacer les os et les articulations et a une longue vie a été souhaité. La technologie FGM est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents. La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer aussi.

I.5. 5.Autres

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. La technologie FGM est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, les FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faites de polymère fluoré ont été développées.

I.6 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.8) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

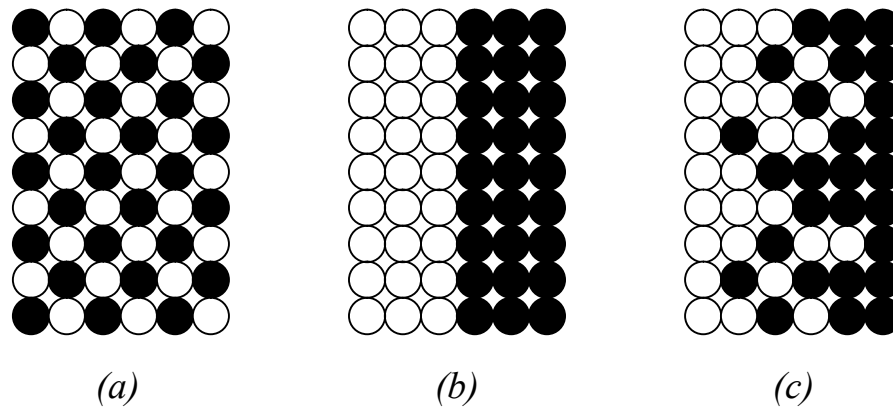


Figure I.8. La distribution composante des matériaux.
Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

I.7. Revue Des Méthodes D'élaboration Des FGM:

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeur,...etc

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapté à FGM : les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [kieb2003].

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule.

En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est

possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.7.1 Coulage En Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade):

Le coulage en bande à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées ($25-1000\mu m$). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [MIST73] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [BOCH86], [BOCH87].

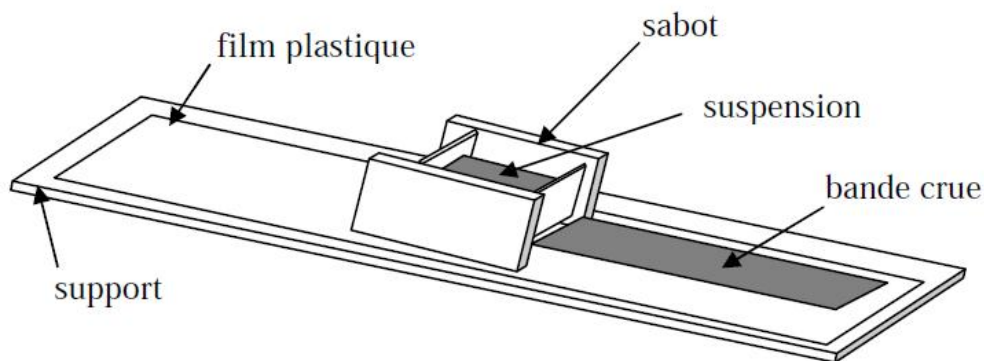


Figure I.9 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].

I.7.2. Coulage Séquentiel En Barbotine (Slip Casting):

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion de la plate (coulage classique [MOYA92]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.8. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM

S'il y'a Une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles [Anné 2006]. Les matériaux fonctionnellement gradués incluent des matériaux avec un gradient dans la composition, La taille de grain et/ou la porosité. Le but général du traitement des FGM est de réaliser une distribution spatiale en microstructure et/ou en composition dans le produit final. Quand en choisit la méthode de traitement, les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont d'extrême importance. Dans la composition d'un FGM, par exemple, la différence dans la résistance thermique entre les deux phases est un facteur clé. Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doit être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

I.8.1. Processus de formation et de consolidation des FGM

Pour la fabrication de FGM en bloc, le traitement métallurgique en poudre est le plus économique et approprié à la production en série. Afin de produire un FGM par traitement conventionnel à la poudre, un corps vert avec un gradient de fraction volumique désirée est d'abord fabriqué. Après la formation et la consolidation, ce corps doit être densifié par frittage. Les méthodes de graduation peuvent être divisées en deux groupes : le processus sec et l'autre humide (figure I.10) [Neubrand 1997]. Les processus secs sont rapides, mais, généralement, ils permettent seulement la génération des profils gradués par étape. Dans le processus humide, une étape de séchage est exigée pour l'élimination du liquide mais la continuité du mélange est facilitée et il peut y avoir une production des gradients continus et lisses. En outre, des procédés de transport apparaissent dans les suspensions, par exemple sédimentation et électrophorèse, peuvent être employés pour produire des gradients à bas prix.

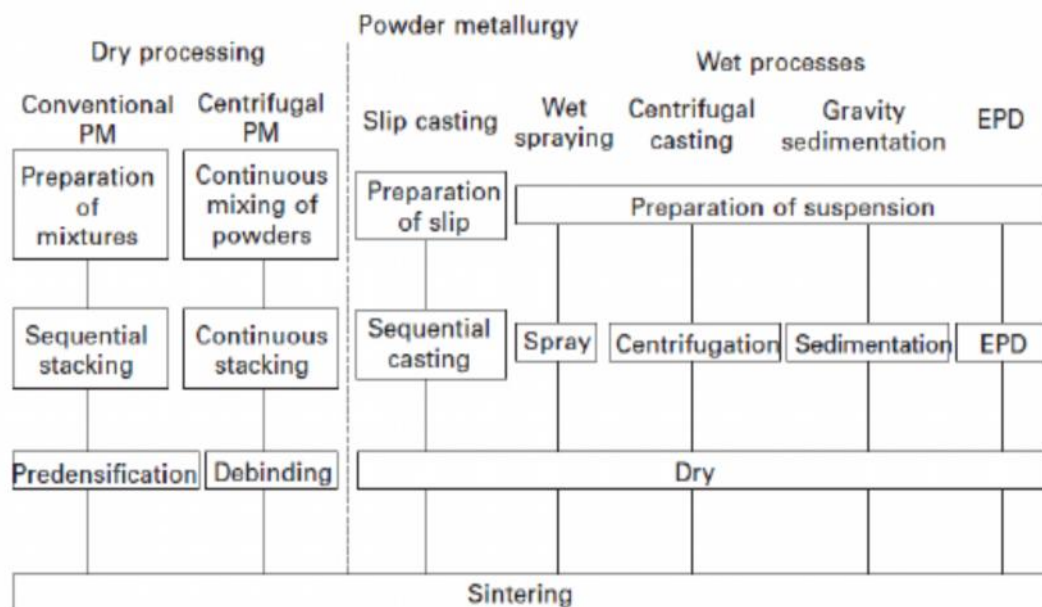


Figure. I.10: Processus de traitement des Poudre pour les FGM [Neubrand 1997]

Le défi principal lié au traitement aux poudres est fréquemment lié à la densification du compact de poudre gradué. Les taux de frittage différent avec la position et le rétrécissement inégal peut conduire à la déformation et à la fissuration, à moins que des techniques sophistiquées de frittage soient utilisées.

Une technique largement utilisée pour les matériaux gradués en céramique/céramique elle consiste à la coulée en barbotine séquentielle où de glissades de différentes compositions moulées l'une au-dessus de l'autre [Requena 1993]. En utilisant un système pré mélange, la composition en jet peut être faite sans interruption [Chu 1993].

Dans un processus appelé la pulvérisation humide [Schindler 1998], des suspensions en deux poudres sont créées, mélangées et pulvérisées sous control informatique sur un substrat chauffé. Après la formation, le corps vert est enlevé du substrat, pour les feuilles en FGM.

Un excellent gradient de composition suivant l'épaisseur peut être créé en contrôlant la proportion de deux poudres dans la suspension mélangée. La Coulée par centrifugation [Watanabe 1998] est une autre méthode de consolidation du FGM en utilisant le mélange de suspensions pour réaliser le gradient. Quand les suspensions des deux poudres de densités différentes ou de grosseurs de grains différents sont mélangées et injectées dans la cavité cylindrique, qui tourne à la grande vitesse, les forces centrifuges causent un gradient compositionnel ou de porosité dans le compact de poudre croissant dans la direction radiale. Avant d'arrêter la rotation, la cire est injectée dans le système pour lier les poudres afin d'augmenter la force verte pour le façonnage du corps. Les FGM poreux avec une distribution graduelle de la porosité peuvent être utilisés comme préforme pour des filtres, ou pour les membranes en céramique. Un processus similaire à la coulée par centrifugation est la sédimentation gravitationnelle [Bernhardt 1999]. La coulée par centrifugation, peut seulement être utilisée pour les pièces de forme cylindrique, tandis que la sédimentation gravitationnelle convient aux plaques en FGM.

Parmi les différentes techniques de traitement colloïdales, la méthode électro phorétiques de dépôt (EPD) est une méthode très prometteuse [Anné 2004] parce que c'est un processus assez rapide qui ne coute pas cher pour la fabrication des couches en céramique, des monolithes, des composites et des matériaux fonctionnellement gradués variant selon l'épaisseur de quelques nanomètres à quelques centimètres. Le dépôt électro phorétique est un processus en deux étapes (figure. I. 13). Dans la première étape, des particules ayant acquis une charge électrique dans le liquide dans lequel elles sont suspendues sont forcées de se déplacer vers l'une des électrodes par l'application de champ électrique à la suspension (électrophorèse). Dans la deuxième étape (dépôt), les particules se rassemblent à l'une des électrodes et forment un dépôt cohérent. Le dépôt prend la forme imposée par cette électrode. Après séchage et enlèvement de la matière de l'électrode, une forme de corps en céramique vert est obtenue. La cuisson de ce corps vert donne un composé en céramique. Des matériaux graduels peuvent être obtenus puisque la composition de la prochaine couche de poudre déposé est déterminée par la composition de la suspension en ce moment (fig.I.13).

L'adaptation Judicieuse de la concentration de la poudre dans la suspension permet de générer un profil gradué bien contrôlé dans une étape de mise en forme continue.

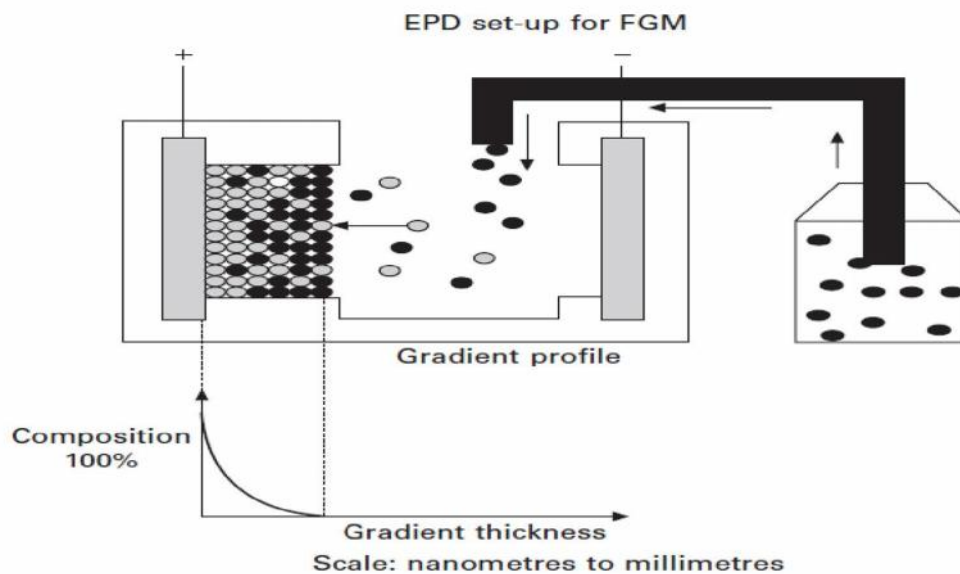


Figure. I. 11: Procédé électrophorétique de dépôt pour des matériaux de FGM [Anné 2006].

Le processus n'est pas spécifiquement matériel, puisqu'une large variété de matériaux a été déjà déposée, comme les poudres en métal, en céramique, en verres, et en polymères [Van der Biest 1999]. Généralement la seule limitation de forme est la faisabilité d'enlever le dépôt de l'électrode après la déposition. Les matériaux gradués dans le système $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$, ZrO_2/WC , et WC/Co ont déjà été explorés au moyen du processus EPD [Anné 2006].

Une pré-requise d'une production réussie des matériaux en FGM au moyen d'EPD s'avère le meilleur moyen de contrôle de la cinétique du processus. Des modèles cinétiques ont été donc développés pour traiter les FGM dans un système à plusieurs éléments au moyen d'EPD [Put 2003]. Comme exemple, en présente une composition d'un profil (figure. III.14) et sa microstructure (figure. I. 15) ; c'est un disque en FGM $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ [Vleugels 2003] avec un noyau homogène (75% volume d' Al_2O_3), une couche Al_2O_3 extérieure pure d'un côté et un composé homogène (90% volume d' Al_2O_3) sur l'autre face, et des couches symétriquement graduées à profilées intermédiaire.

Comme montré dans le graphe, un profil convexe gradué en alumine est suggéré pour donner un effort de compression plus élevé aux couches externes d'alumine et les plus basses contraintes de traction au noyau du disque. Les phases ZrO_2 (blanc) et Al_2O_3 (grises) peuvent être clairement différenciées dans la microstructure. La phase ZrO_2 est bien dispersée dans la matrice Al_2O_3 dans les parties graduées et dans le noyau du FGM.

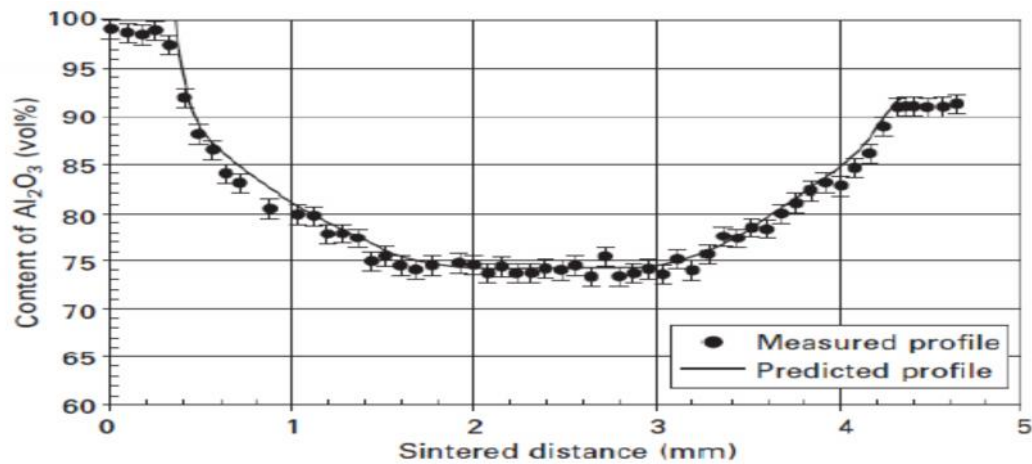


Figure I.12 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$) [Anné 2006]

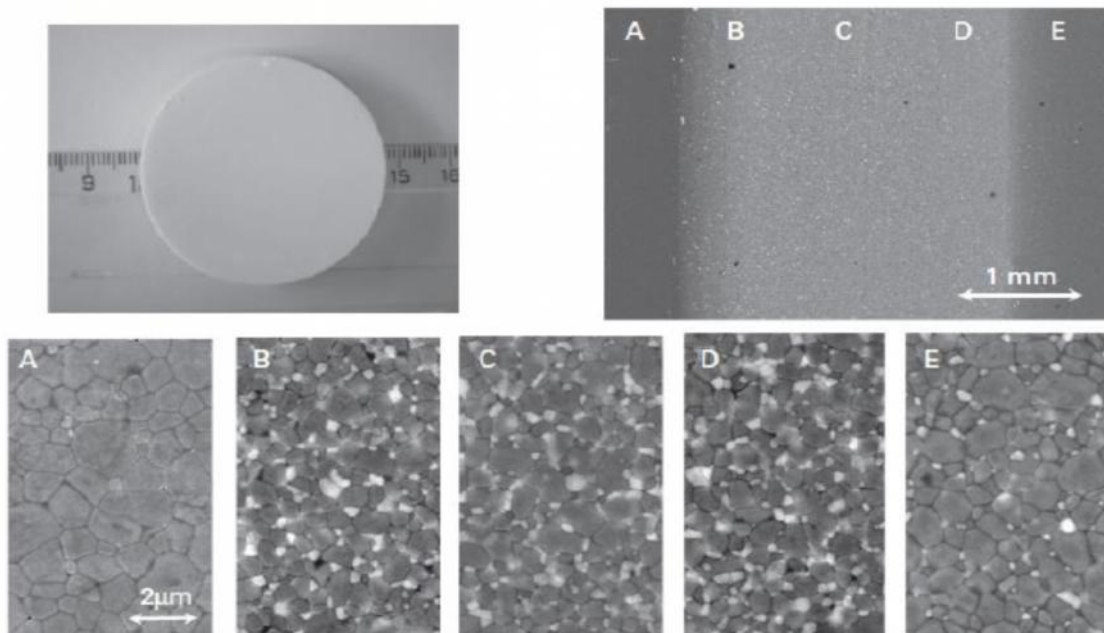


Figure.I.13. Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [Anné 2006]

I.8.2. Densification des poudres compactes pour FGM

Le défi le plus important est la densification des poudres compactes graduées. Le traitement des matériaux en FGM par des méthodes métallurgiques des poudres induit des flèches de déformation excessives et indésirables du composant après frittage. A cause de ces contraintes thermiques résiduelles excessives, des fissures et d'autres défauts peuvent souvent être observés dans le composant FGM final à moins que des corrections soient apportées [Miyamoto 1999].

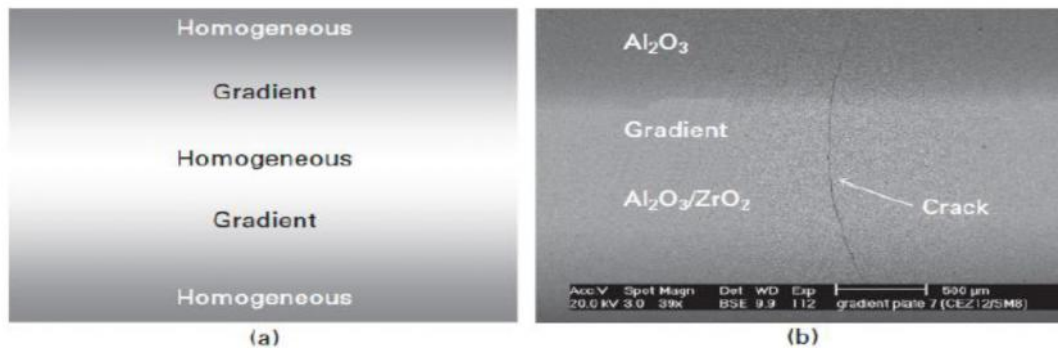


Figure.I.14: (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ [Anné 2006].

La figure. I.14 montre des fissures typiques observées dans les disques symétriquement gradués en $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$, formés par les dépôts électrophorétiques et densifiés par frittage à basse pression. À partir de la figure, il est à voir que des fissures transversales apparaissent dans le noyau riche en ZrO_2 d'un disque symétrique fritté en TZP/ Al_2O_3 . Cependant, La propagation des fissures s'est arrêtée dans la couche externe Al_2O_3 , indiquant que la contrainte de traction plane est située au centre des disques, qui devraient être abaissés. Hillman [Hillman 1996] a observé des défauts similaires dans des stratifiés symétriques avec des couches $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ sur les surfaces et une couche médiane en ZrO_2 . Ces défauts sont les plus susceptibles aux contraintes résiduelles de traction pendant le refroidissement du noyau, dues au coefficient de dilatation thermique élevé de zircone. Ces régions de plus faible densité (pores) doivent être formées comme conséquence de la contrainte de traction qui se développe pendant le rétrécissement différentiel durant la densification entre les couches Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$. Les pores agissent alors en tant que pailles préexistantes pour la génération de la dilatation thermique inadéquate des fissures pendant le refroidissement par l'intermédiaire du lien des pores et des défauts cavitationnels.

L'élimination des fissures transversales peut être accomplie en diminuant le retrait de tous les composés. Ceci se fait seulement en diminuant le grand écart compositionnel entre les différentes couches [Cai 1997a, Cai 1997b] ou en ajustant la densité verte des différentes couches [Novak 2005]. Une autre possibilité est de diminuer le taux de chauffage et de refroidissement pendant le frittage [Cai 1997b]. Les forces résiduelles pendant le cycle de chauffage sont diminués par nature visqueuse du FGM à la Température de frittage. La force de frittage résiduelle est proportionnelle au taux de frittage résiduel. La rupture est réduite sous un refroidissement lent ; ceci est probablement dû à la relaxation des tensions résiduelles pendant la période initiale de refroidissement.

Presque tous les volumes FGM en matériaux céramique/céramique sont frittés par un frittage conventionnel à basse pression ou par un pressage à chaud, selon les propriétés de

frittage des deux composants [Anné 2006]. Dans un FGM métal/ céramique avec une phase continue en métal et une phase en céramique discontinue, les taux de frittage sont contrôlés par la densification de la phase métallique et un tel FGM peut être densifié par des méthodes de frittage conventionnelles [Neubrand 1997]. Cependant, dans la plupart des FGM où une phase céramique élevée est envisagée quelques approches spéciales doivent être considérées pour la densification entière.

En plus du frittage conventionnel, le traitement réactif en poudre, également appelé synthèse de combustion ou la synthèse à hautes températures (SHS), peut être utilisée si les composés voulus sont synthétisés d'un premier mélange de poudre. Ce processus comporte une réaction chimique rapide et exothermique pour synthétiser simultanément quelques ou toutes les phases des constituants dans le FGM et puis densifier le composant.

Une technique plus avancée, telle que le frittage de plasma en étincelle (SPS) ou le frittage par courant électrique pulsé, est également utilisé pour la fabrication de FGM [Anné 2006]. C'est une méthode de frittage à pression assistée dans laquelle un haut courant est pulsé à travers une installation matrice/poinçon/échantillon, qui peut être comparée à ceux du cas de pressage conventionnel à chaud. Les grandes impulsions de courant produisent des plasmas d'étincelle, une pression d'impact d'étincelle et une énergie de chauffage en Joule.

Le mécanisme de frittage et les propriétés mécaniques des compacts frittés montrent des caractéristiques différentes des processus de frittage conventionnels aux pressions assistés. Cette technique offre des avantages significatifs pour différentes sortes de nouveaux matériaux et produit toujours un compact dense dans un petit temps de frittage et avec une dimension du grain plus fins que des méthodes conventionnelles. Le frittage de plasma en étincelle des FGM utilise un gradient de température dans le système, qui permet une densification homogène des FGM en Correspondant le gradient de température au gradient de taux de retrait du compact. Avec un système de plasma d'étincelle, une grande masse FGM (céramique/métal) (~100 millimètres se section) peut être homogènement densifié en peu de temps avec des temps de chauffage et d'entreposage à moins d'une heure. Parmi les systèmes de frittage de plasma en étincelle rapportés on site des matériaux à base de WC (WC/Co, WC/Co/steel, WC/Mo), des composés à base de ZrO_2 (ZrO_2 /acier, ZrO_2 /TiAl, ZrO_2 /Ni), Al_2O_3 /TiAl, ...etc. [Anné 2006].

Le frittage à la micro-onde est une autre technique prometteuse pour les FGM en céramique/métal pour remédier à la difficulté de l'inégalité du taux de rétrécissement. Comme une nouvelle technique de frittage, le frittage aux micro-ondes utilise des micro-ondes et des radiations pour chauffer la céramique ou un compacte composite à base de céramique [Zhao 2000].

Le mécanisme de chauffage par micro-ondes est basé sur la perte diélectrique des phases céramiques injectées, ayant obtenue par une technique volumétrique de chauffage dans laquelle la chaleur est produite par le compacte lui-même.

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l’histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d’application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d’application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II

Rappel sur les théories des plaques

II.1. Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

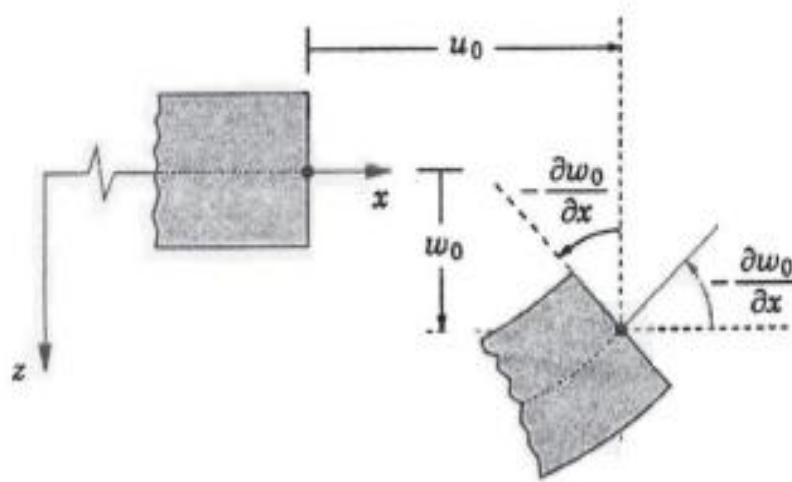


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945], [Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z\varphi_x(x, y) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

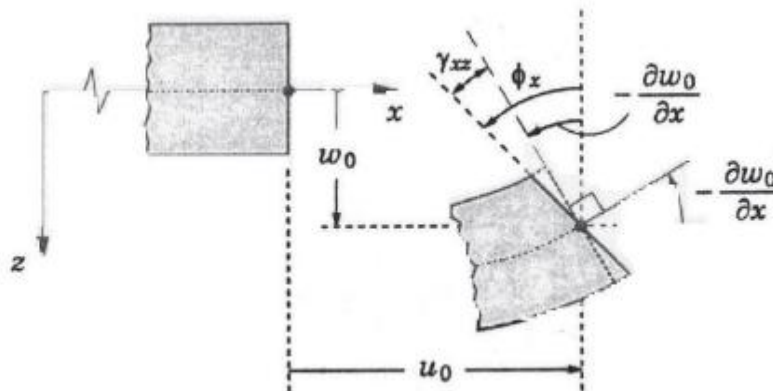


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand, 1949], [Naghdi, 1957], [Reissner, 1975], [Reddy, 1984], et [Kant, 2002].

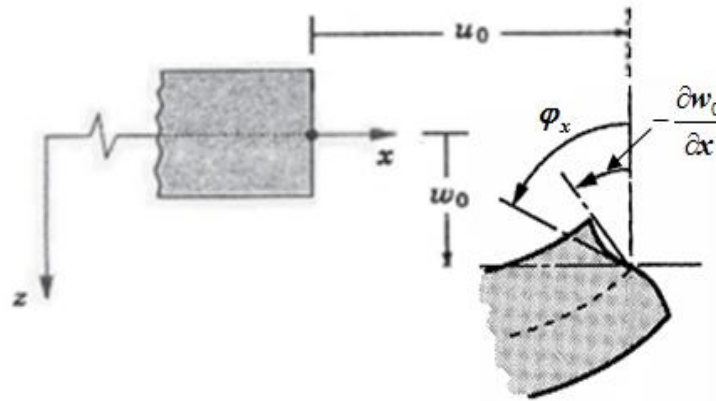


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

II.3. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [Whitney, 1973] ; [Nelson, 1974] ; [Lo, 1977]; [Touratier, 1991]. Nous citons en particulier :

-**Le modèle de Reddy** : Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [Reddy, 1997, 1999] sont obtenus par

$$\Psi(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \quad (\text{II.4})$$

Dans ce modèle, le déplacement transversal dû au cisaillement est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites [Reddy, 1984]. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [Kan, 2002].

-**Le modèle de Touratier** : Touratier (1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme Co-sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (1984). En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Polit, 1997] et [Dau, 2006].

- **Le modèle d'Afaq** : Récemment, [Afaq et al, 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de [Touratier, 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair. Ce modèle a été utilisé par Karama (2003).

-**Le modèle hyperbolique** : La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé développée par Ait Atmane (2010) est obtenue en prenant

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

- **L'approche d'Ambartsumyan** [Ambartsumyan, 1969] avec

$$\psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- **L'approche de Reissner** [Reissner, 1945] avec

$$\Psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [Duong, 2008].

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $\psi(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT [Kirchoff, 1850a, 1850b]	Théorie classique des plaques	0	Plaques minces
FSDT [Midlin, 1951]	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces, moyennement épaisses
Ambartsumian, (1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non Requis	Plaques minces, moyennement épaisses
Reissner (1975)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, [Touratier, 1991]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT, [Karama et al. 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z e^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT, [Levinson, 1980], Reddy [Reddy, 1984]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu, (2009)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Elmeiche et al. (2011)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{hz}{\pi}\right) z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi, (2002)	Théorie raffinée des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

II.4. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Une nouvelle théorie de déformation d'ordre supérieur dont le paramétrage permet l'adaptation au problème structural étudié. Les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont rigoureusement satisfaites. Aucune restriction n'est portée sur l'épaisseur de la plaque, ce qui permet une étude des poutres, plaques et coques minces et épaisses. La théorie de déformation d'ordre supérieur de Reddy est un cas particulier de cette nouvelle théorie.

Cette dernière permet aussi d'approcher la théorie de déformation trigonométrique de Touratier (1991) et la théorie de déformation exponentielle de Karama (2003). Elle est basée sur un développement en série d'ordre impair de la coordonnée z , limité au degré 5. Le nombre de variables est identique à celui de la théorie de Reddy (u, v, w, ψ_x, ψ_y).

Le champ de déplacements proposé s'écrit sous la forme des équations (II.3) avec une nouvelle fonction de forme :

$$\varphi(z) = z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \beta \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \quad (\text{II.10a})$$

Où α et β sont les paramètres (réels) de forme de la nouvelle théorie, définis par :

$$\beta = \frac{4}{5}(3\alpha - 4), \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \quad (\text{II.10b})$$

Les hypothèses sur lesquelles est basée cette théorie sont les mêmes que celles de la formulation de Reddy (1984, 1985, 2000). De plus, la fonction de forme est développée de telle façon que les conditions suivantes sont rigoureusement satisfaites :

- Les contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} sont nulles au niveau des surfaces supérieure et inférieure, ce qui est vérifié par : $\left. \frac{d\varphi(z)}{dz} \right|_{z=\pm h/2} = 0$
- Le profil des contraintes du cisaillement transverse à travers l'épaisseur est parabolique (figure II.5).
- La déformation en cisaillement est maximale au niveau du plan moyen ($z = 0$), ce qui est vérifié par : $\left. \frac{d\varphi(z)}{dz} \right|_{z=0} = 1$
- La fonction de forme $\varphi(z)$ et sa dérivée première sont continues à travers l'épaisseur (figures II.4 et II.5). Ceci permet d'avoir une continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement le long de l'axe z .

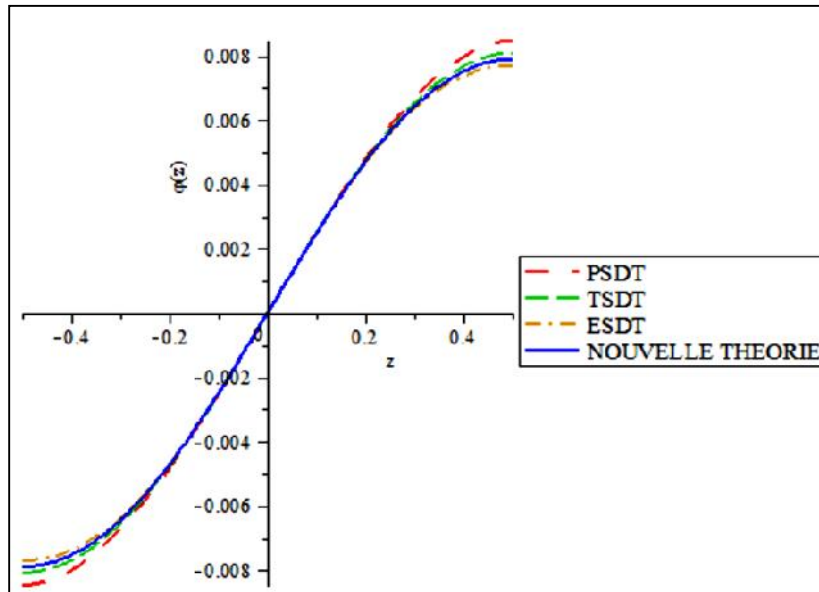


Figure II.4: Profil de variation de $\varphi(z)$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$) (Mahi ,2012) .

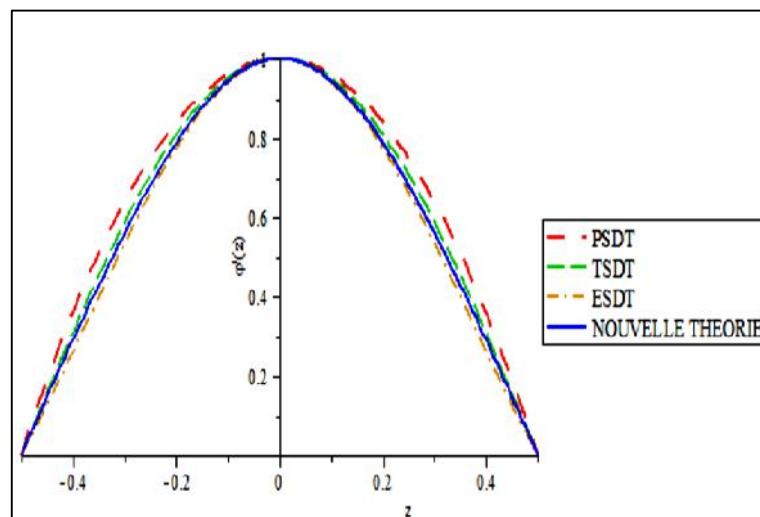


Figure II.5: Profil de variation de $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$) (Mahi , 2012).

Comme nous l'avons souligné plus haut, le paramètre α permet d'adapter la fonction de forme au problème étudié. Les valeurs particulières de α sont les suivantes :

- $\alpha = 4/3$ permet de retrouver exactement la fonction de forme de la théorie de Reddy
- $\alpha = \pi^2/6$ permet d'approcher la théorie de Touratier (1991) (TSDPT) avec une bonne précision.
- $\alpha = 2$ permet d'approcher la théorie de Karama (2003) (ESDPT) avec une bonne précision.

II.5. Les modèles en couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou Zigzag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couples par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

- Dans les travaux de Srinivas (1973), Reddy (1987), Tahani et Nosier (2003), une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche est utilisée. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.
- D'une manière alternative, les travaux de Ren (1986), Kassapoglou et (1987) et Yin (1994) utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi, Ren (1986) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans Kassapoglou et Lagace (1987), le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans Yin (1994), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.
- Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [Pagano, 1978]. Le modèle local a été construit à partir

de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

- Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.
- La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

II.6. Modèles éléments finis des structures composites

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides). Ci-dessous, nous passons en revue différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

II.6.1. Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction, (Reddy, 1980, Ganapathi et Touratier, 1997). Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité C_0 , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter,

convergence rapide. . .) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans Nguyen (2004), une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [Nguyen, 2004].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux « w » mais encore leurs dérivées normales doivent être continus à travers les frontières inters éléments [Reddy, 1999]. Dans Ren (1986), un élément de continuité « C^1 » basé sur le modèle cubique de Reddy. [Reddy, 1984] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse. En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier. [Touratier, 1991], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité « C^1 » sont développés (Nguyen, 2004, Polit et Touratier, 2002). L'élément triangulaire développé par Polit et al. est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds.

La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurés. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure. II.6.

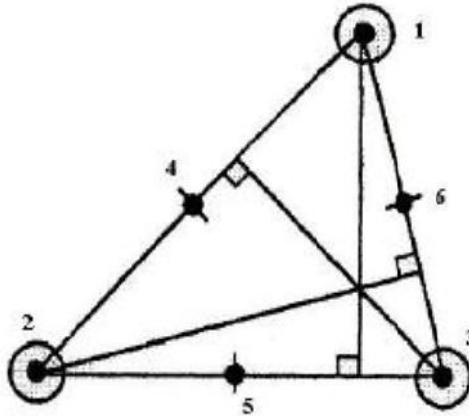


Figure II.6: Elément « Sinus » triangulaire 6 nœuds [Polit, 2002].

Les travaux de Khare [Khare et al, 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures. II.7 et II.8). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:

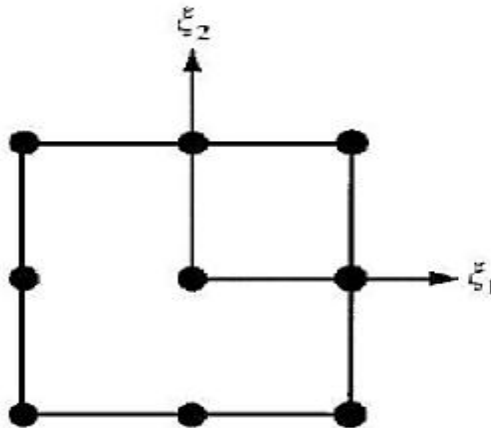


Figure II.7 : Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [Nguyen, 2004].

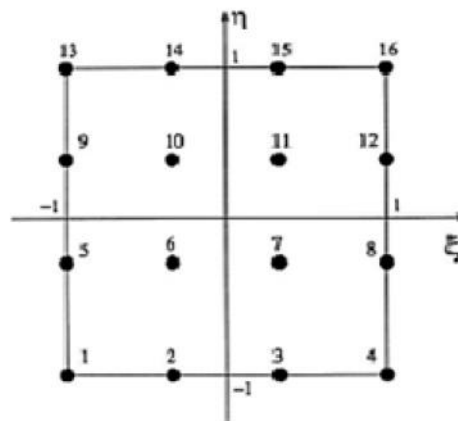


Figure II.8 : Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [Nguyen, 2004].

II.6.2. Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso paramétrique 20 nœuds de Raju et Crews. [Raju et Crews, 1981] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure. II.9.

Icardi et al. [Icardi et al, 1995] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 nœuds (Figure. II.10) et un élément singulier 15 nœuds (Figure. II.11) généré à partir d'un élément de brique 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases prédicteur-correcteur est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces.

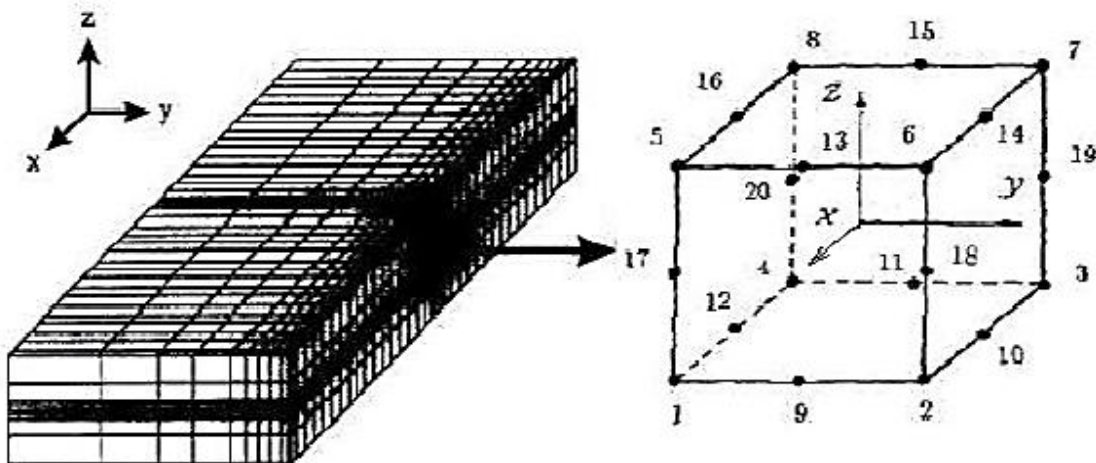


Figure. II.9: Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant z [Nguyen , 2004].

Cho et al. [Cho et al, 2000] développe un élément fini brique zig-zag à 8 nœuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans Desai et al. (2003), un élément mixte à 18 nœuds est proposé (Figure. II.13). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément est à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux nœuds sont les contraintes inter laminaires.

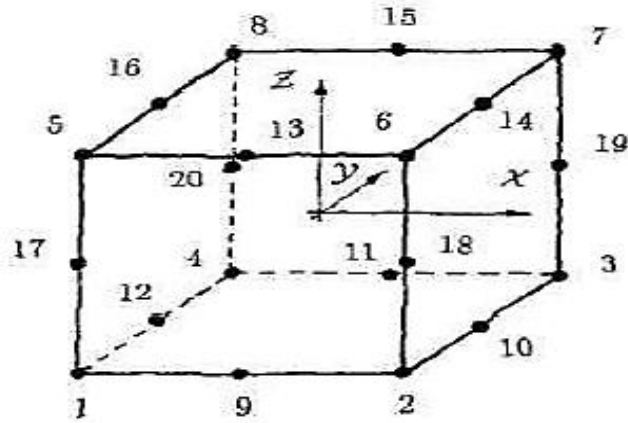


Figure II.10 : Élément brique à 20 nœuds.

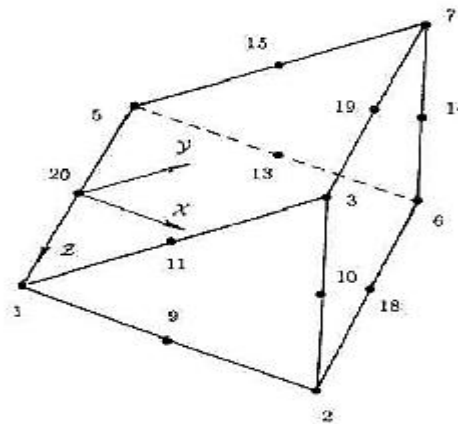


Figure II.11 : Élément singulier à 15 nœuds.

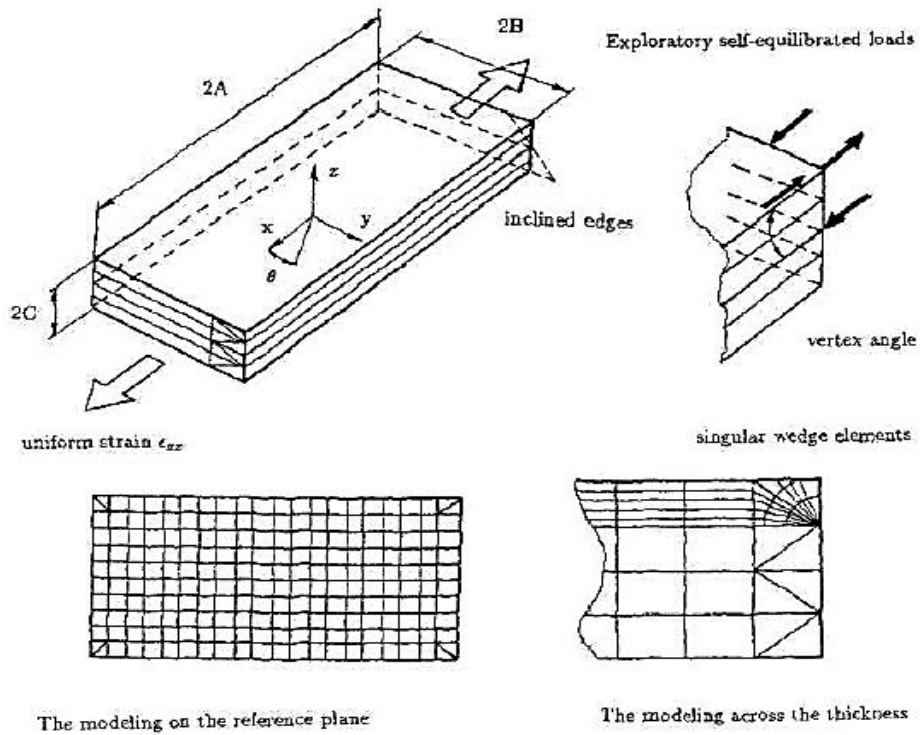


Figure II.12: Etudes du problème de bord libre par EF 3D.

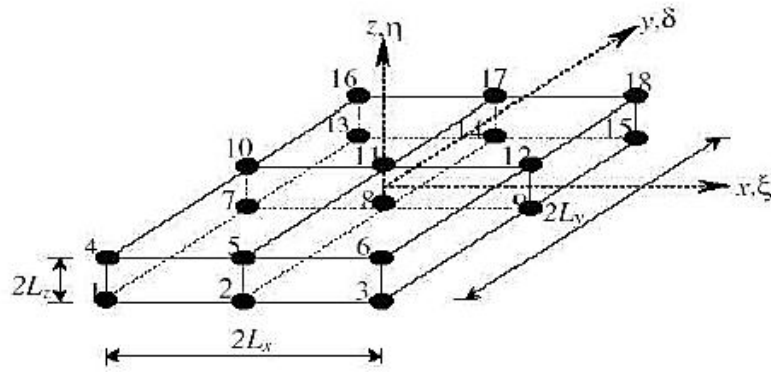


Figure II.13: Elément brique mixte à 18 nœuds.

Dans Bui et al. (2000), les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (voir Figure. II.14). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

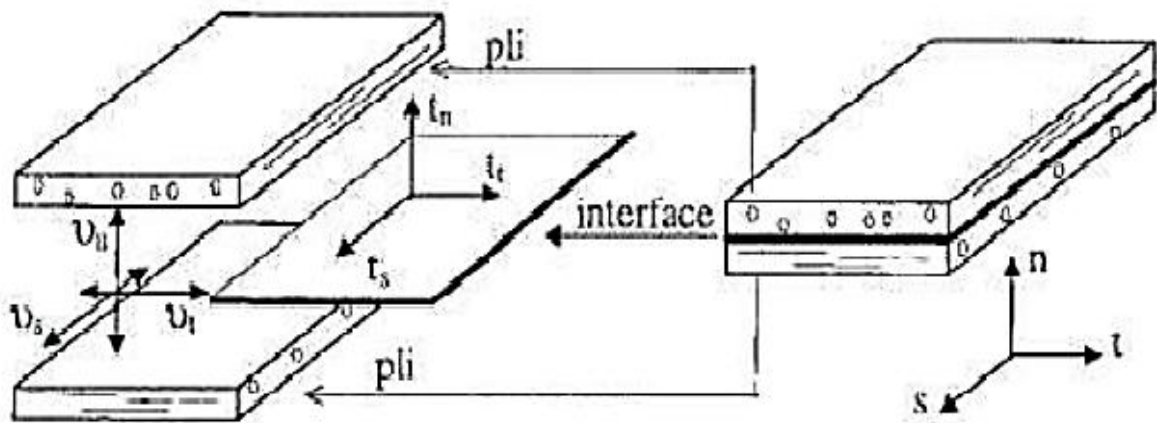


Figure II.14 : Elément d'interface.

Cette méthode évite un écueil classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les l'élément finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singuliers et dépendent du raffinement du maillage.

II.7. Sollicitations et ruine des matériaux sandwichs

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,

- Effort tranchant.

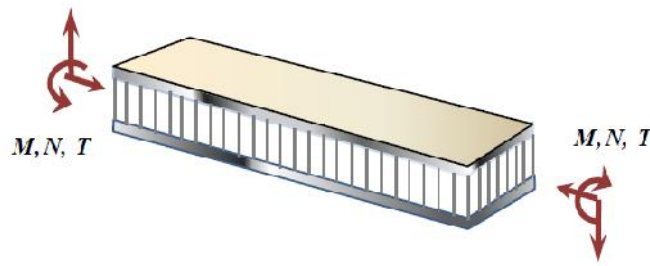


Figure II.15 : différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.

Les différents modes de ruine résultants de ces sollicitations [Al bachi, 2002] sont récapitulés dans le tableau II.1 :

<p style="text-align: center;">Flambement généralisé des peaux</p> <p>Le flambement généralisé peut survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures aux résistances à la rupture. La charge de flambement du sandwich dépend des paramètres tels que les dimensions dans le plan de la poutre et les conditions aux limites, qui ne peuvent être modifiées que partiellement lors de conception. D'autres grandeurs également importantes dans la définition de la charge de flambement dépendent directement, du type de sandwich comme la rigidité de flexion du sandwich, l'épaisseur des peaux, les propriétés élastiques des peaux, l'épaisseur de l'âme ou le module de cisaillement de l'âme.</p>	
<p style="text-align: center;">Flambement généralisé des peaux "crimping"</p> <p>Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme d'un flambement de l'âme (figure ci-contre). Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux, par contre il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement dans l'âme.</p>	
<p style="text-align: center;">Mode local de rupture par indentation</p> <p>L'indentation locale est un mode de rupture due à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique.</p>	
<p style="text-align: center;">Rupture de l'âme par cisaillement</p> <p>Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme. Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau pour l'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme.</p>	

<p style="text-align: center;">Dégradation de l'adhésive</p> <p>La dégradation de l'adhésif entre les peaux et le cœur se fait généralement selon trois types :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ dégradation de l'adhésif entre les peaux et le cœur, ▪ dégradation de l'attachement des cellules du cœur, ▪ dégradation de l'attachement du nœud des cellules du cœur. <p>La Figure ci-contre illustre les modes de dégradation de l'adhésif cité ci-dessus. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif du sandwich qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich</p>	
---	--

Tableau II.2 : Différents modes de ruine des panneaux sandwichs

II.8. Théorie des structures sandwichs

Un matériau sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée h_c et l'épaisseur totale du sandwich H ($H = h_1 + h_c + h_2$). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen.

II.8.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$).
- Les déplacements de le cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.

- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} , σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.

Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

II.8.2 Modèle bidimensionnel d'une poutre en flexion simple

La théorie des poutres simples est adaptée aux poutres sandwich, avec quelques modifications mineures. L'utilisation de cette théorie permet de trouver une méthode simple permettant de calculer la rigidité en flexion, la rigidité en cisaillement, les contraintes dans les peaux et la contrainte de cisaillement dans l'âme.

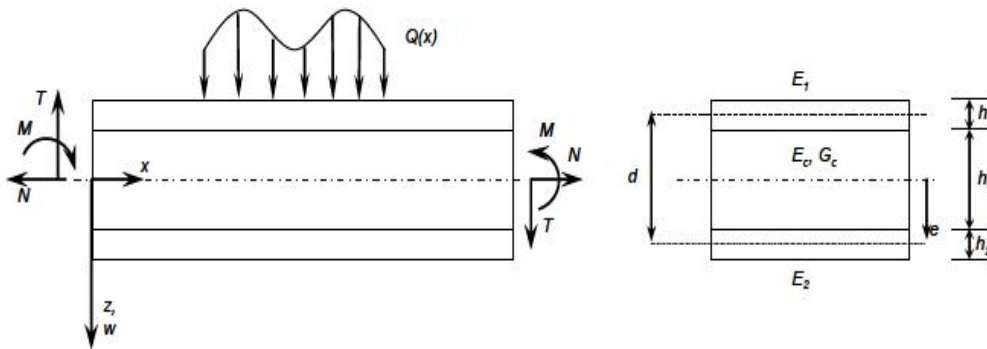


Figure II.16 : Poutre sandwich chargée dans son plan.

II.9. Rigidité en flexion

Dans le cas général, la répartition des sollicitations dans une structure sandwich est décrite comme sur la Figure II.16. Dans cette étude on suppose que la poutre sandwich est soumise uniquement, à un moment de flexion M_x et une force transversale T_x . La déformation à une distance z par rapport à l'axe neutre de sandwich est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{M_x z}{D} \quad (\text{II.11})$$

D : désigne la rigidité en flexion du sandwich, et s'écrit :

$$D = \int E z^2 dz = \frac{E_1 b h_1^3}{12} + \frac{E_2 b h_2^3}{12} + \frac{E_c b h_c^3}{12} + E_1 b h_1 (d - e)^2 + E_2 b h_2 e^2 + E_c b t_c \left(\frac{h_c + h_2}{2} - e \right)^2 \quad (\text{II.12})$$

Avec $e = d/2$

h_f, d, e et le module d'élasticité E_f sont ceux représentés dans la Figure II.16. Dans le cas

d'un sandwich à peaux fines, les deux premiers termes du second membre peuvent être négligés et même le troisième et le sixième terme pour une âme à module d'élasticité faible.

Pour un sandwich symétrique (même épaisseur et matériau) $h_1 = h_2 = h_f$, $E_1 = E_2 = E_f$, l'équation [II.12] devient :

$$D = \frac{E_f b h_f^3}{6} + \frac{E_f b h_f^3}{2} + \frac{E_c b h_c^3}{12} \quad (\text{II.13})$$

Dans cette étude, la position de l'axe neutre est celle qui vérifie la condition suivante :

$$\int \sigma_x dz = 0 \quad (\text{II.14})$$

Pour une intégration sur la totalité de la section transversale, la rigidité est donnée :

$$E_1 t_1 \left(\frac{h_1}{2} + h_c + \frac{h_2}{2} \right) + E_c h_c \left(\frac{h_c}{2} + \frac{h_2}{2} \right) = e [E_1 h_1 + E_c h_c + E_2 h_2] \quad (\text{II.15})$$

- Contraintes normales dans les peaux :

Pour un sandwich symétrique, la position de l'axe neutre est au milieu du cœur. Les contraintes de traction ou de compression dans les peaux peuvent être calculées en utilisant l'équation II.16 :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{M_x z}{D} \quad (\text{II.16})$$

- Contrainte de compression dans la peau supérieure :

$$\sigma_1 = -E_1 \frac{M_x (d - e)}{D} \approx -\frac{M_x}{h_f b d} \quad (\text{II.17})$$

- Contrainte de traction dans la peau inférieure :

$$\sigma_2 = \frac{M_x e}{D} E_2 \approx +\frac{M_x}{h_f b d} \quad (\text{II.18})$$

La contrainte de cisaillement est calculée en utilisant une définition plus générale de l'équation d'équilibre.

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0 \rightarrow \tau_{xz}(z) = \int_z^{(d+h_f)/2} \frac{d\sigma_x}{dx} dz \quad (\text{II.19})$$

Sachant que τ_{xz} est nulle pour $z = \frac{d}{2} + h_f$, et en utilisant $\frac{dM_x}{dx} = T_x$, l'équation [1.64] devient

:

$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{D} \int_z^{(d+h_f)/2} E z dz = \frac{T_x B(z)}{D} \quad (\text{II.20})$$

Avec $B(z)$ est le moment surfacique d'ordre 1, calculé par :

$$B(z) = \int_z^{(d+h_f)/2} E z dz \quad (\text{II.21})$$

- Contraintes de cisaillement dans les peaux :

Les contraintes de cisaillement dans les peaux et l'âme sont données par :

Dans la peau supérieure pour $-d + e - \frac{h_1}{2} \leq z \leq -d + e + \frac{h_1}{2}$

$$\tau_1(z) = \frac{T_x E_1}{D} \frac{1}{2} \left[\left(d - e + \frac{h_1}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (\text{II.22})$$

Dans la peau inférieure pour $e - \frac{h_2}{2} \leq z \leq e + \frac{h_2}{2}$.

$$\tau_2(z) = \frac{T_x E_2}{D} \frac{1}{2} \left[\left(e + \frac{h_2}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (\text{II.23})$$

- Contraintes de cisaillement dans le cœur :

Dans l'âme pour $-d + e - \frac{h_1}{2} \leq z \leq 0$

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[E_1 h_1 (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left(d - e - \frac{h_1}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (\text{II.24})$$

Dans l'âme pour $0 \leq z \leq e - \frac{h_2}{2}$

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[E_2 h_2 e + \frac{E_c}{2} \left\{ \left(e - \frac{h_2}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (\text{II.25})$$

Pour un sandwich symétrique de mêmes peaux fines avec $E_1 = E_2 = E_p$, $h_1 = h_2 = t$ et $e = d/2$ et une âme avec un faible module d'élasticité, la contrainte de cisaillement reste constante dans l'âme et donnée par la formule suivante :

$$\tau_c = \frac{T_x}{bd} \quad (\text{II.26})$$

La faible densité, du matériau composant le noyau associé à une contrainte de cisaillement plus ou moins constante dans la section transversale, fait que, dans toute analyse mécanique de ce type de structure, la prise en compte des déformations de cisaillement est

primordiale. On peut admettre que la déformation est composée d'une contribution classique due à la flexion notée, W_f et d'une autre due au cisaillement W_s . Pour une poutre sandwich de peaux fines, l'analyse mécanique est plus simple et on peut définir la courbure totale comme étant la contribution d'une flexion et d'un cisaillement donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{dT_x}{Sdx} \quad (\text{II.27})$$

S : La rigidité en cisaillement donnée par :

$$S = \frac{Gd^2}{k} \quad (\text{II.28})$$

II.10. Revue de la littérature sur l'analyse de la vibration libre des structures en FGM

L'analyse numérique des vibrations des plaques rectangulaires FGM a été effectuée par un grand nombre de chercheurs.

En se basant sur la théorie classique des plaques (CPT), Cheng et Kitipornchai (1999) ont utilisé cette théorie et la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) pour analyser la réponse en flambement et en vibration des plaques FGM ainsi que les vibrations membranaires. He et al. (2001) ont rapporté la formulation d'éléments finis basée sur la théorie des plaques minces (CPT) pour contrôler la forme et la vibration de la plaque FGM avec des capteurs piézo-électriques intégrés et des actionneurs sous charge mécanique. Yuda et Xiaoguang (2011) a également adopté le CPT avec les hypothèses de Von Karman pour effectuer des analyses de vibration et de stabilité des plaques FG sous des excitations axiales. Ruan et Wang (2016) ont étudié aussi les vibrations et la stabilité des plaques FG obliques en utilisant le CPT et la méthode de quadrature différentielle (DQM).

En plus des plaques FG, la CPT était également adopté pour l'étude des coques FG à cause de sa simplicité. Loy et al. (1999) ont étudié la vibration des coques cylindriques FG avec des conditions aux limites simplement appuyées en utilisant la CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Une approche similaire a été développé par Arshad et al. (2007) et Pradhan et al. (2000) pour voir les caractéristiques vibratoires des enveloppes cylindriques de FG sous différentes conditions aux limites et pour différents types de lois de fraction volumique, respectivement. Ce problème a été réexaminé par Naeem et al. (2010) en utilisant la méthode Ritz. Les vibrations forcées non linéaires des coques FG doublement courbés ont été évaluées par Alijani et al. (2011) en utilisant le CPT avec les hypothèses de Von Karman et la discrétisation multimodale de Galerkin. La vibration libre d'une coquille cylindrique circulaire

bidimensionnelle fonctionnellement graduée a été analysée par Ebrahimi et Najafizadeh, (2014) en se basant sur la théorie classique des coques de Love. Les dérivées spatiales des équations du mouvement et des conditions aux limites sont discrétisées par les méthodes de quadrature différentielle généralisée (GDQ) et de quadrature intégrale généralisée (GIQ).

Sur la base de la théorie de déformation du premier ordre (FSDT), Liew et al. (2003) ont analysé les vibrations des plaques stratifiées symétriquement. Shufrin et Eisenberger (2005) ont étudié la vibration libre et la stabilité des plaques déformables FG, en utilisant des théories de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé. Ferreira et al. (2005b) ont prédit les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées basée sur la théorie du premier ordre avec la méthode de collocation globale avec des fonctions de base radiales multi-quadratiques. En utilisant la méthode du maillage de Galerkin, Liew et al. (2009) ont rapporté une analyse des vibrations des plaques ondulées. Peng et al. (2007) ont également fait état d'une analyse des vibrations libres des plaques pliées par la méthode sans maillage en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre. Liew et al. (2004), Dai et al. (2004) ont utilisé la technique de maillage (Mesh-Free Method) pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites laminées en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. Analyse des vibrations libres des plaques composites stratifiées symétriquement avec la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) par la méthode de convolution singulière discrète a été présentée par Civalek (2008). Zhao et al. (2009) ont présenté une analyse des vibrations libres pour les plaques FG carrées et obliques avec différentes conditions aux limites en utilisant la méthode d'élément libre kp-Ritz sur la base de FSDT. La technique de collocation globale avec de nouvelles fonctions de base radiales multi-quadratiques pour examiner les vibrations libres des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) est développée par Ngo-Cong et al. (2010, 2011). Hosseini-Hashemi et al. (2011) ont proposé une solution analytique exacte pour étudier la vibration transversale des plaques rectangulaires de type Lévy. Une simple théorie de déformation de cisaillement du premier ordre avec seulement quatre variables a été présentée par Thai et Choi (2013a, 2013b) pour la flexion et la vibration libre des plaques FGM et composites laminées, respectivement. Contrairement à la FSDT existante à cinq variables, Mantari et Granados (2015a, 2015b, 2016) ont analysé la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie déformation de cisaillement de première ordre (FSDT) avec une nouvelle cinématique contenant des termes indéterminés avec seulement quatre inconnus. Madani et al. (2016) ont étudié la vibration libre d'une coque cylindrique piézoélectrique

renforcée par des nanotubes de carbone (FG-CNT) soumise à des distributions de température uniformes et non uniformes basées sur le FSDT en utilisant la Méthode Différentielle Cubique.

Afin d'introduire les effets de déformation de cisaillement, plusieurs théories de déformation de cisaillement polynomiales et non polynomiales d'ordre élevé (HSDT) ont été développées. Ces théories satisfont les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques dont le facteur de correction de cisaillement n'est donc pas pris en considération. Matsunaga (2008) a analysé la vibration libre et la stabilité des plaques FG en se basant sur une théorie bidimensionnelle d'ordre supérieur (2D). Xiang et al. (2011) ont suggéré une théorie de plaque de déformation de cisaillement d'ordre n pour étudier la réponse de vibration libre des plaques sandwich composites à gradations fonctionnelles. Le champ de déplacement est représenté par un terme polynomial d'ordre n où les conditions de contrainte de cisaillement transversale nulle sont satisfaites aux faces supérieure et inférieure de la plaque. En utilisant une théorie des plaques raffinées à quatre variables, Benachour et al. (2011) ont analysé la réponse dynamique des plaques FG avec une gradation aléatoire des matériaux. Cette théorie considère les effets de cisaillement transverse avec une distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque, de sorte que les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas nécessaires. Draiche et al. (2014) ont présenté une théorie des plaques trigonométrique à quatre variables pour l'analyse des vibrations libres d'une plaque rectangulaire laminée supportant une masse de pièce localisée.

Plusieurs études ont été réalisées sur la vibration des structures en utilisant les théories quasi-3D et 3D afin d'introduire les effets des déformations de cisaillement et d'étirement d'épaisseur. Reddy et Cheng (2003) ont développé des analyses vibratoires tridimensionnelles pour les plaques rectangulaires FGM en utilisant une formulation asymptotique et une méthode de matrice de transfert. Une solution tridimensionnelle exacte pour la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées a été présentée par Vel et Batra (2004). Qian et al. (2004) ont réalisé une étude sur le comportement statique et dynamique des plaques élastiques épaisses à gradient de propriétés en utilisant la théorie du cisaillement d'ordre supérieur, la déformation normale des plaques et la méthode locale de Petrov-Galerkin où les propriétés mécaniques ont été obtenues à partir du modèle de Mori-Tanaka. L'effet de l'étirement de l'épaisseur sur la vibration libre des plaques FG a été évalué par Mantari et Guedes Soares (2013a), Carrera et al., (2011) et Thai et Choi (2014b). Une solution 3D exacte

pour les vibrations libres des plaques FG épaisses avec des conditions aux limites générales a été proposée par Jin et al. (2014). Les effets du cisaillement transverse et des déformations normales pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG ont été pris en compte par Bessaim et al. (2013). Hebali et al. (2014) ont présenté une nouvelle théorie quasi-3D pour l'étude de la flexion statique et la vibration libre des plaques FGM. Neves et al. (2012a; 2012b; 2013) ont proposé des théories de déformation par cisaillement hyperbolique de type sinusoïdal et hybride quasi-3D pour étudier les réponses des plaques FG à la flexion, aux vibrations libres et au flambage. Une théorie de la déformation normale et du cisaillement d'ordre supérieur simple et efficace pour la vibration statique et libre des plaques FG a été développée par Belabed et al. (2014) en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Le comportement statique et dynamique de plaques à fonctionnellement graduées basées sur des théories de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D a été étudié Akavci et Tanrikulu (2015). La vibration libre des plaques sandwich a été analysée par une nouvelle théorie de plaque quasi-3D par Bennoun et al. (2016).

En se basant sur la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQ), (Tornabene et al., 2016, 2017, 2018) ont étudié les vibrations libres et des plaques et des coquilles stratifiés et en matériaux à gradient fonctionnel. En utilisant une théorie non-local quasi-3D où les effets de déformation de cisaillement et d'étirement d'épaisseur sont introduits, Bouafia et al. (2017) ont investigués le comportement dynamique et statique des nano-poutres en FGM. Sekkal et al. (2017) ont réalisés une étude numérique détaillée pour examiner le flambement et vibration des plaques FGM avec une nouvelle théorie quasi-3D HSDT. L'effet de la porosité sur la vibration libre des plaques piézoélectriques à gradient fonctionnel (FGP) a été étudié par Barati et al. (2017) sur la base de la théorie des quatre plaques inconnues. En développant une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à seulement deux variables, Mouffoki et al. (2017) ont analysé la vibration des nanopoutres dans un environnement hygrothermique. Younsi et al. (2018) ont présenté des théories 2D et quasi-3D de déformation de cisaillement pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques FG à l'aide d'une nouvelle forme de fonction hyperbolique. Une nouvelle théorie quasi-3D de déformation de cisaillement hyperbolique pour les plaques fonctionnellement graduées est proposée par Ait Sidhoum et al. (2018). Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la vibration libre des plaques à gradation fonctionnelle simplement supportées dans un environnement thermique a été développée par Taleb et al. (2018). Cette théorie considère à la fois la déformation de cisaillement et les influences d'étirement de l'épaisseur par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans

l'épaisseur et respecte les conditions aux limites de contraintes libres sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans employer n'importe quel coefficient de correction de cisaillement. Abualnour et al. (2018) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique en tenant compte l'effet d'étirement « stretching » pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées. Bouhadra et al. (2018) ont amélioré une théorie HSDT de telle façon que l'effet de l'étirement soit pris en compte afin d'analyser la flexion et la vibration libre des plaques FGM. Une théorie efficace et originale de déformation de cisaillement d'ordre élevé incluant la déformation normale a été présentée par Khiloun et al. (2020) pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM. Meksi et al. (2019) a proposé une nouvelle théorie d'ordre élevé en utilisant une cinématique avec seulement quatre variables pour étudier le flambement, la flexion et la vibration libre des plaques sandwich en matériaux FGM. (Zaoui et al., 2019, 2020) ont étudié le comportement statique et vibratoire des plaques FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé raffinée. Les études comparatives et de validation montrent que les théories avec moins d'inconnues peuvent atteindre la même précision du HSDT conventionnelle qui a plus de variables inconnues.

II.11. Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires à l'étude de notre problème. Tout d'abord, nous avons introduit quelques concepts généraux concernant les matériaux FGM, un aperçu de la théorie des plaques, ainsi que des modèles analytiques des plaques FGM, à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de la déformation par cisaillement élevé (HSDT), qui sert à analyser et modéliser le comportement des plaques à gradient fonctionnel sous diverses charges.

CHAPITRE III

Généralité sur les phénomènes d'instabilité

III. Introduction :

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N , il n'existe qu'une configuration hors flambement.

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : « L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe. Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de V minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit « neutre »

L'introduction de la théorie des poutres en RdM peut être envisagée principalement de 2 façons différentes. Une première approche consiste à partir des considérations particulières pour des grandes familles d'exemples. Une telle approche nécessite une bonne connaissance et une bonne maîtrise de la modélisation des problèmes physiques à résoudre. Une approche plus systématique, choisie ici, permet de poser la formulation rigoureuse de la théorie des poutres à partir de considérations purement mécaniques. Cette théorie tout à fait générale sera ensuite appliquée aux cas plus simples permettant d'isoler les comportements linéaires en traction, flexion simple, et en torsion. Les comportements non-linéaires seront ensuite abordés, et la mécanique des plaques sera décrite à partir d'une cinématique proche de celle

des poutres. Au fur et à mesure des exemples traités, le lien entre les problèmes physiques et leur formulation devra apparaître de plus en plus naturellement.

III.1. Définition : Traction/Compression.

On dit qu'une poutre (E) travaille en extension simple (ou en compression simple) quand elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes qui tendent à l'allonger (ou à la raccourcir).

III.2. Essai de traction

III.2.1. Essai de traction uniaxiale

Il permet de déterminer la Limite élastique et la Résistance à la rupture des différents matériaux. Il permet de définir les caractéristiques de résistance des matériaux.

Cet essai consiste à soumettre à 20°C une « éprouvette » de longueur l à un effort de traction, progressivement croissant, généralement jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Le suivi de la déformation d'un solide en mode de traction simple peut être réalisé lors d'un essai de traction uniaxiale sur éprouvette normalisée (Figure III.1.). De telles éprouvettes sont souvent cylindriques (toutefois d'autres formes sont utilisées) et leurs extrémités permettent l'accrochage dans des mors de tirage. Les états de surface de l'éprouvette sont particulièrement contrôlés, car une trop grande rugosité de surface peut induire des propagations de fissures faussant les mesures. Le rapport des dimensions longitudinales et transverses est également important et doit respecter certaines proportions. Dans un essai de traction simple l'effort appliqué total \vec{F} est purement axial, et seule la composante normale de la contrainte est mesurée

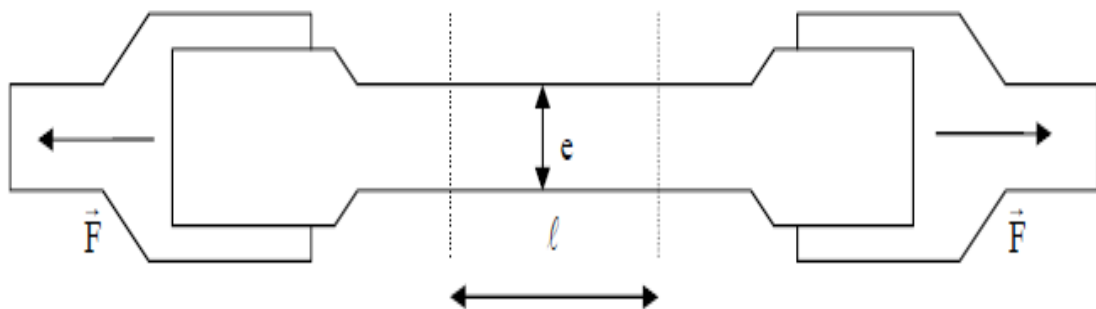


Figure III.1.: Essai de traction simple sur éprouvette normalisé

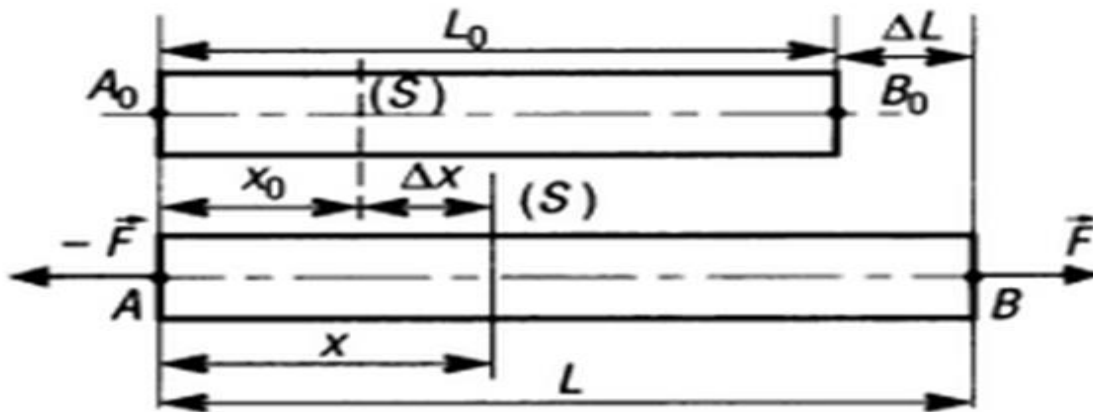


Figure III.2. Allongement d'une éprouvette sollicitée en traction

Sous l'effet de la force \vec{F} l'éprouvette s'allonge et on mesure Δl : $\Delta l = l - l_0$ par rapport à la référence initiale l_0 avant traction. Le bilan des forces sur la section droite donne $\vec{F} + \vec{N} = 0$. La contrainte de traction s'obtient en considérant une répartition des contraintes uniforme sur la section droite:

$$\vec{N} = \int d\vec{F} = \int \vec{\sigma} dS = \vec{\sigma} \int dS = \vec{\sigma} S, \text{ soit} \quad (\text{III-1})$$

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Lors de l'essai de traction, l'effort de traction N est enregistré en fonction de l'allongement Δl (Figure III.2.a). On représente cependant plutôt la contrainte σ en fonction de la déformation $\Delta l/l$. Un diagramme contrainte – déformation type est représenté en (Figure III.2.b.) Sur ce diagramme on peut délimiter plusieurs domaines de déformation, de O à D.

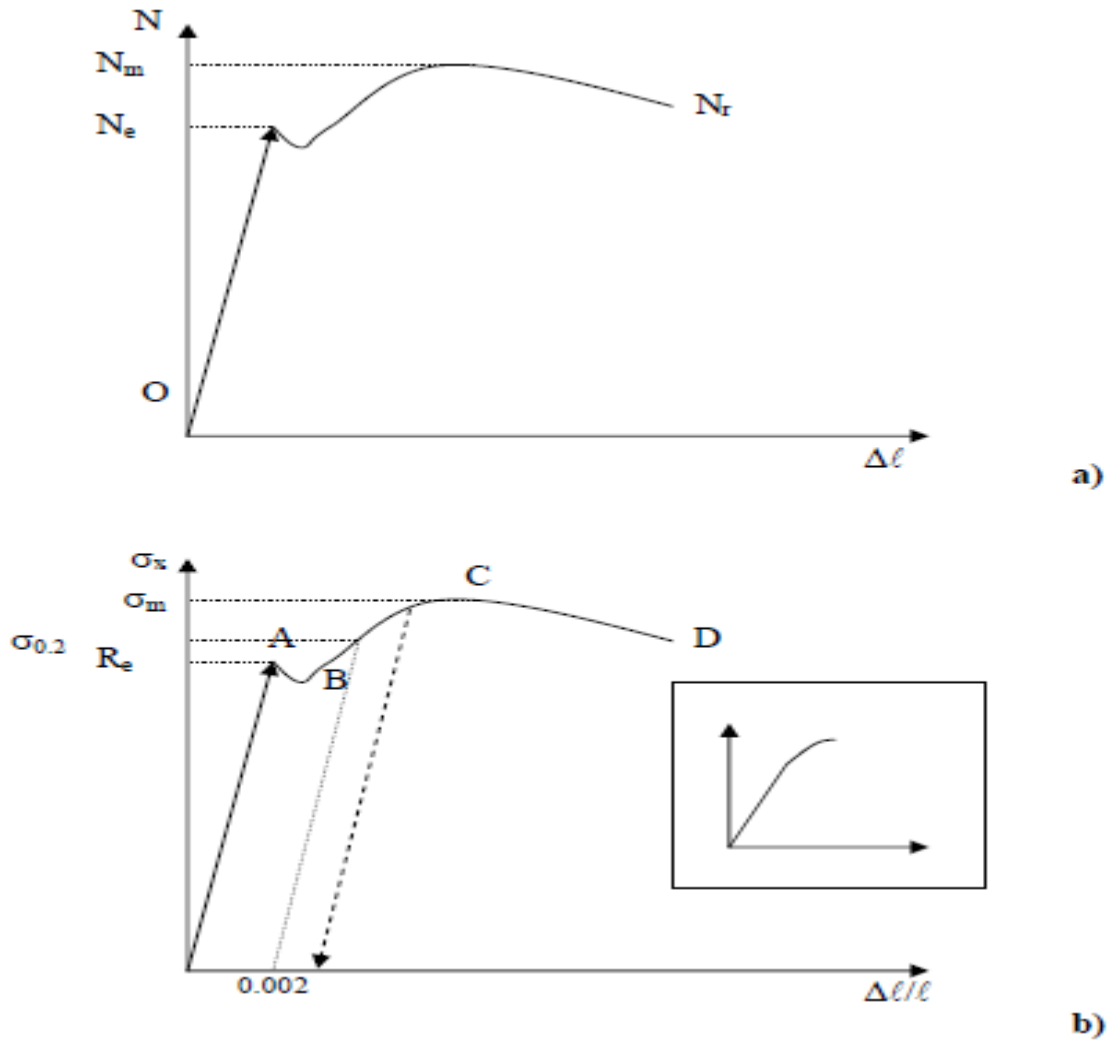


Figure III.2. a) Diagramme type effort – allongement et b) Diagramme type contrainte – déformation lors d'un essai de traction pour un matériau ductile. En insert: diagramme type pour un matériau fragile.

III.2.2. Module d'Young

Dans le domaine OA (Figure III.2.b), la déformation est élastique et il y a proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation (ou entre l'allongement et l'effort de traction), le phénomène de déformation reste réversible, et si la contrainte est relâchée l'éprouvette retrouve sa longueur initiale et $\ell = \ell_0$

Le coefficient de proportionnalité E s'exprime sous la forme de la loi de Hooke (Robert Hooke 1635-1703):

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \text{ ou } \sigma = E \varepsilon \quad \text{Loi de Hooke} \quad (\text{III-2})$$

E est alors appelé module d'élasticité longitudinal ou module de Young (Thomas Young 1773-1829).

Ce module dépend du matériau considéré et est la pente de l'essai de traction dans le domaine élastique. On voit que l'unité de mesure de ce module est homogène à une contrainte puisque ε est sans dimension. Des valeurs typiques de module d'Young vont de quelques MPa à quelques centaines de GPa. Une valeur de E élevée indique une rigidité élevée du matériau (le diamant par exemple). En revanche le plomb ou l'étain sont des matériaux de rigidité faible. Pour les aciers, on atteint typiquement des modules de Young de 2.10^5 N/mm^2 , soit quelques 200 GPa. Les fontes en revanche présentent des modules d'Young typiques de 8.10^4 N/mm^2 , et sont moins élastiquement déformables.

III.2.3.Limite d'élasticité

La longueur OA du domaine élastique dépend également du matériau. La valeur R_e maximum du domaine élastique s'appelle limite élastique, au-delà de laquelle le matériau se déformera plastiquement de façon irréversible. La Table 2 répertorie les limites d'élasticité de quelques matériaux usuels.

III.2.4.Module d'élasticité transverse

Dans le domaine OA on observe également une diminution du diamètre e de l'éprouvette, ou striction. Cette diminution est caractérisée par une relation de proportionnalité:

$$\frac{\Delta e}{e} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$$

III.2.5. Zones de déformation plastique

Au-delà des petites déformations et du domaine élastique, pour de plus fortes contraintes appliquées, on observe une déformation rémanente de l'éprouvette: la courbe de décharge du matériau ne se superpose pas à la courbe de charge (pointillés de la Figure III.2 .b).

Domaine AB: On entre dans le domaine de déformation plastique, irréversible. Sans réelle augmentation de contrainte appliquée, le matériau continue à se déformer plastiquement. Ce domaine présente quelquefois des oscillations de σ correspondant à la création de fissures ou de glissements cristallins dans le matériau. Pour d'autres matériaux ce domaine apparaît comme un plateau.

Domaine BC: La contrainte appliquée participe à augmenter la déformation plastique, jusqu'à une valeur maximale σ_m dite contrainte maximale avant rupture.

Domaine CD: La déformation conduit progressivement à rupture pour un allongement maximum en D. On parle de contrainte à la rupture R_r .

Tous ces domaines sont variables selon les matériaux et leurs modes d'élaboration.

Remarque:

Il ne faut pas confondre rigidité et raideur. La rigidité caractérise un matériau, la raideur une construction mécanique. On peut ainsi avoir une pièce massive en plastique possédant une raideur bien plus élevée qu'un ressort en acier !

- On rencontrera la limite élastique $\sigma_{0,2}$ dans la littérature. Très utilisée en métallurgie, elle correspond à la transition élastique-plastique qui est assez floue. Il s'agit de la valeur de la contrainte qui laisse 0.2% de déformation plastique lorsqu'elle est retirée (Figure III.2.b).

- Il n'est pas rare de rencontrer un matériau qui casse lors d'un essai de traction avant d'atteindre le régime plastique de déformation. Ceci est généralement dû à des facteurs extrinsèques comme la présence de fissures, et se rencontre surtout dans des matériaux rigides. C'est par exemple le cas du béton fibré à ultra haute performance, qui malgré un module d'Young élevé (50 GPa typiquement), possède une résistance à la traction de seulement 8 MPa environ.

On peut distinguer deux grandes catégories de matériaux selon leur courbe de déformation en traction simple. Les matériaux dits ductiles donneront lieu à des courbes $\sigma(\eta)$ telles que celle de la Figure 8b, alors que les matériaux dits fragiles, montreront des courbes de déformation sans zone de déformation plastique (insert Figure III.2.b).

III.2.6. Conditions de Résistance des Matériaux

III.2.6.1. Situation classique

La contrainte appliquée sur le matériau doit impérativement rester inférieure à la limite pratique à l'extension du matériau, R_{pe} . Cette limite pratique prend en compte, pour des raisons de sécurité bien compréhensibles, différents aléas inhérents aux matériaux et sollicitations appliquées, via un coefficient de sécurité s :

$$\sigma \leq R_{pe} \text{ avec } R_{pe} = \frac{R_e}{S} \quad (\text{III-3})$$

Le coefficient **S** traduit les incertitudes et le type de construction réalisée.

III.2.6.2. Concentrations de contraintes

S'il y a variation brusque de section (Figure III.3), une des hypothèses de base de la RdM n'est plus vérifiée à proximité de cette variation de section. La contrainte ne varie plus lentement, on doit appliquer un coefficient de concentration de contrainte, k , et la condition de résistance devient:

$$\sigma_M \leq R_{pe} \text{ avec } \sigma_M = K\sigma \quad (\text{III-4})$$

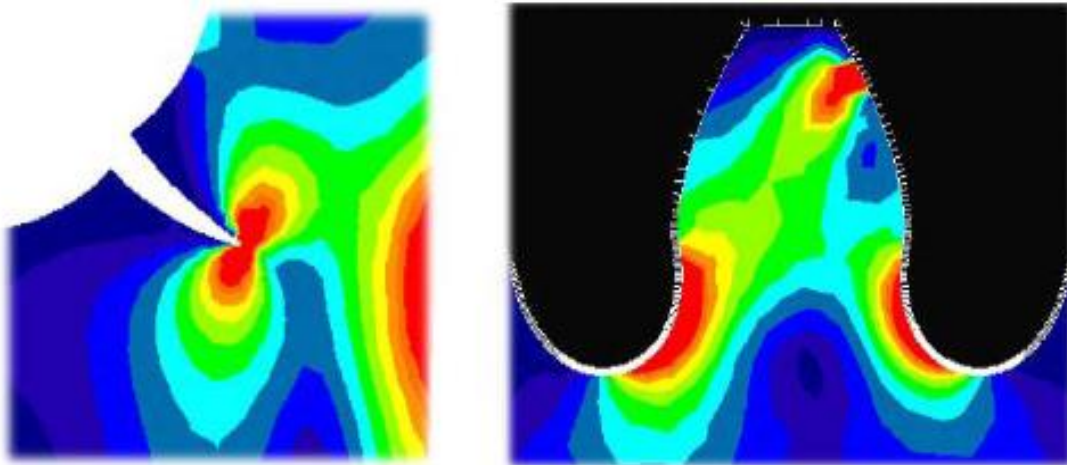


Figure III.3. Cartographie de répartition de contraintes autour **a)** d'une fissure et autour **b)** d'une dent d'engrenage. Les contraintes sont représentées croissantes du bleu vers le rouge

III.3. Compression simple

III.3.1. Définition

Une poutre est soumise à un régime de compression simple si on applique à ses extrémités 2 forces directement opposées qui tendent à la raccourcir.

La principale hypothèse de travail est la condition de non-flambage:

$$l_0 < 8e$$

Où e est la plus petite dimension transverse de la poutre.

III.3.2. Déformations et contraintes

Les équations de la traction simple restent valables. En revanche, selon le matériau, les limites élastiques pour la compression et pour la traction diffèrent notablement. Pour les aciers, R_e est identique en compression et en traction. Par contre, pour d'autres matériaux comme la fonte et le béton par exemple, on doit différencier les régimes de traction et compression. On appellera les valeurs correspondantes de limites élastiques R_{et} et R_{ec} respectivement pour ces matériaux:

Fontes: $R_{et} \approx 20 \text{ Nmm}^{-2}$

$R_{ec} \approx 150 \text{ Nmm}^{-2}$

Bétons (non armé): $R_{et} \approx 1 \text{ Nmm}^{-2}$

$R_{ec} \approx 10 \text{ Nmm}^{-2}$

III.3.3. Conditions de Résistance

La condition de résistance s'exprimera alors en compression par la limite pratique à la compression du matériau, R_{pc} :

$$\sigma \leq R_{pc} \text{ avec } R_{pc} = \frac{R_{pc}}{S} \quad (\text{III-5})$$

III.3.4. Contraintes en traction-compression :

Chaque élément de surface supporte un effort de traction parallèle à la ligne moyenne.

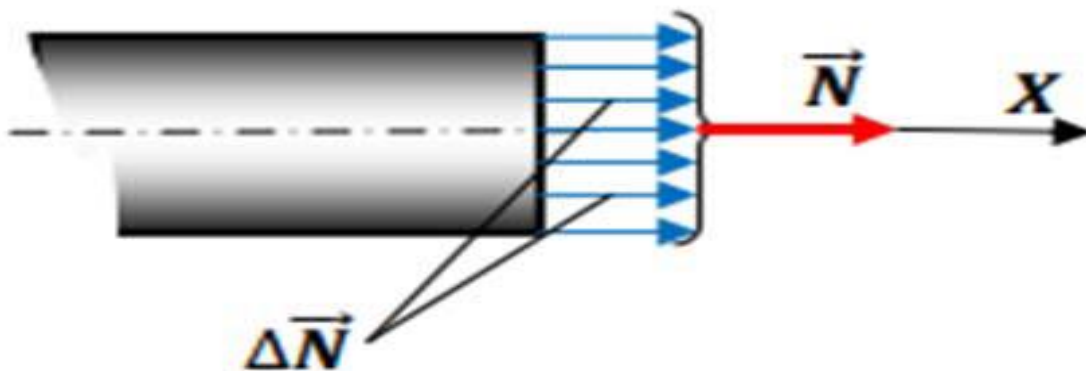


Figure III.4: Répartition uniforme des contraintes.

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{x} \text{ et comme } N = \iint \sigma \cdot dS = \sigma \cdot S, \text{ on aura : } \sigma = \frac{N}{S} \quad (\text{III-6})$$

$N[N]; S[\text{mm}^2]; \sigma[\text{MPa}]$

Cette relation peut éventuellement être algébrique. On obtiendra alors :

- Une contrainte $\sigma < 0$ en compression.
- une contrainte $\sigma > 0$ en traction.

III.4. Cisaillement simple

III.4.1. Définition :

Il y a cisaillement lorsqu'une pièce est sollicitée par deux forces égales, de même droite d'action mais de sens contraires qui tendent à faire glisser l'une sur l'autre les deux parties de la pièce.

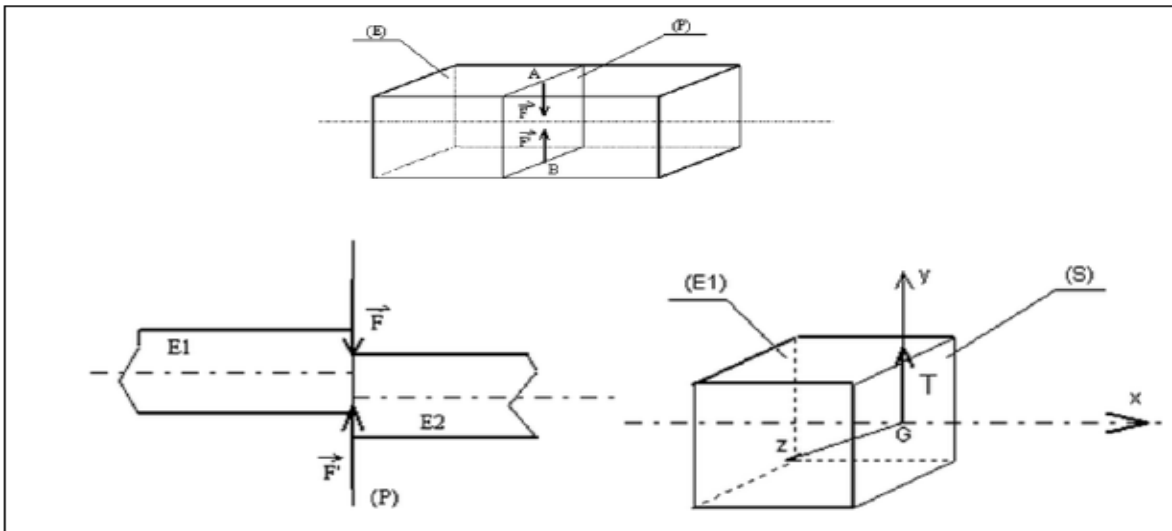


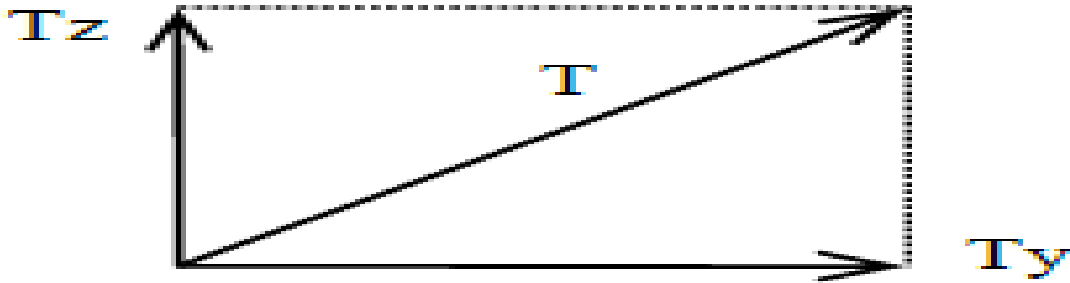
Figure III.5. Modélisation d'une éprouvette sollicitée au cisaillement.

Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons **E1** et **E2** glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P).

Une section droite (S) d'une poutre (E) est sollicitée au cisaillement simple si les éléments de réduction au centre de surface G de (S) du torseur des efforts de cohésion sont :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ 0 \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_G \quad (\text{III-7})$$

On peut toujours remplacer les composantes d'effort tranchant (T_y et T_z) par une unique composante T en réalisant un changement de repère.



Le cisaillement pur n'existe pas, il subsiste toujours de la flexion...

III.4.2. Essai de cisaillement simple

Il est physiquement impossible de réaliser du cisaillement pur au sens de la définition précédente. Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

On se gardera cependant le droit d'adopter des coefficients de sécurités majorés pour tenir compte de l'imperfection de la modélisation.

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement \vec{F} Uniformément réparti dans le plan (P) de la section droite (S) distante de Δx du plan (S_0) d'encastrement (Figure III.6.).

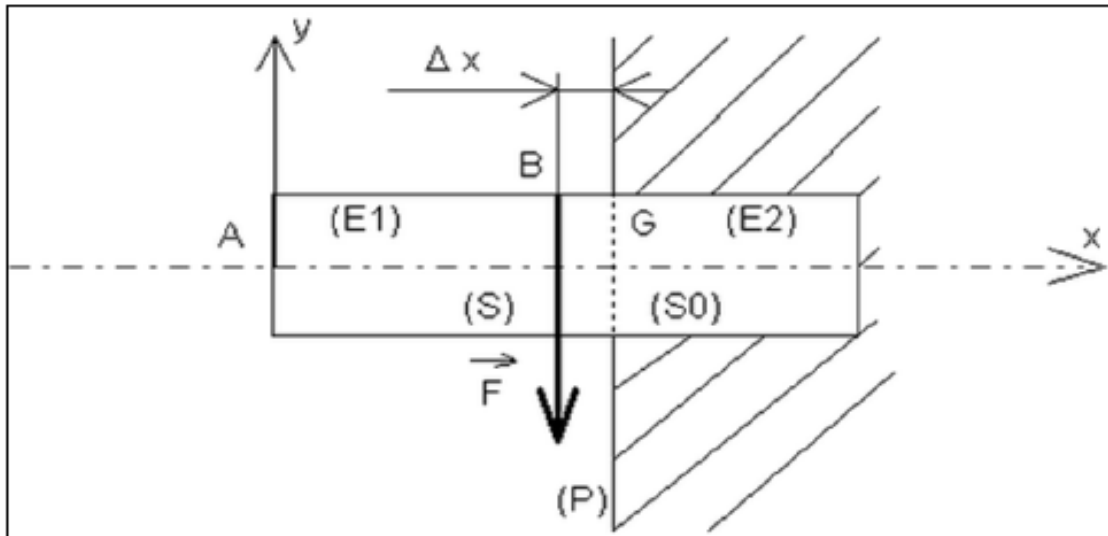


Figure III.6. Poutre sollicitée en cisaillement.

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement F uniformément réparti dans le plan (P) de la section droite (S) distante de Δx du plan (S₀) d'encastrement.

On se rapproche des conditions du cisaillement réel, à condition de vérifier que Δx es très petit.

Si l'on isole (E1), on trouve alors le torseur de cohésion suivant :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F \cdot \Delta x \end{array} \right\}_G \quad (\text{III-8})$$

Lorsque Δx tend vers 0, on retrouve alors le torseur de cohésion du cisaillement pur.

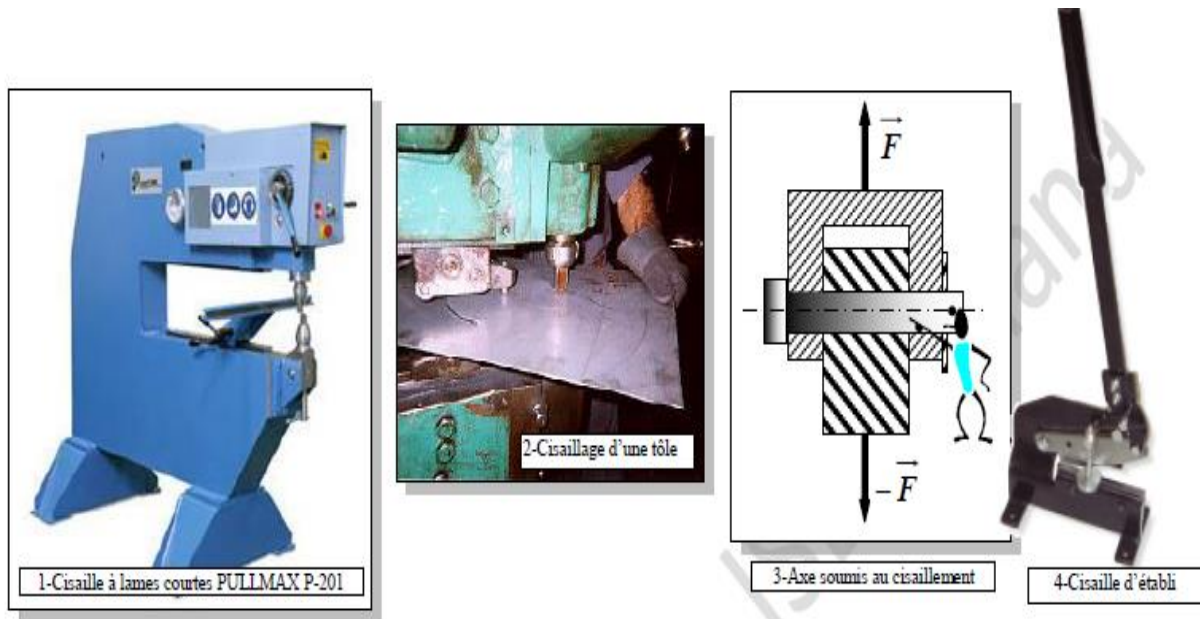


Photo III.1. les types du cisaillement

III.4.3. Etude des déformations en cisaillement :

Si on trace la variation du glissement Δy en fonction de l'effort F , on obtient la courbe représentée à la Figure III.7, ayant une zone de déformations élastiques (OA) et une zone de déformations permanentes (ABC).

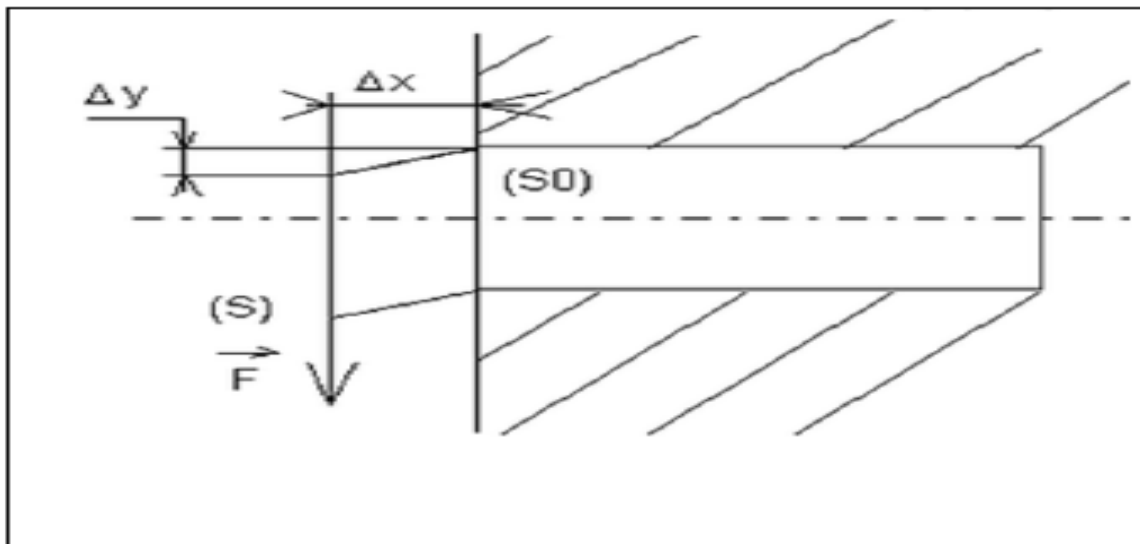


Figure III.7. Glissement transversale Δy

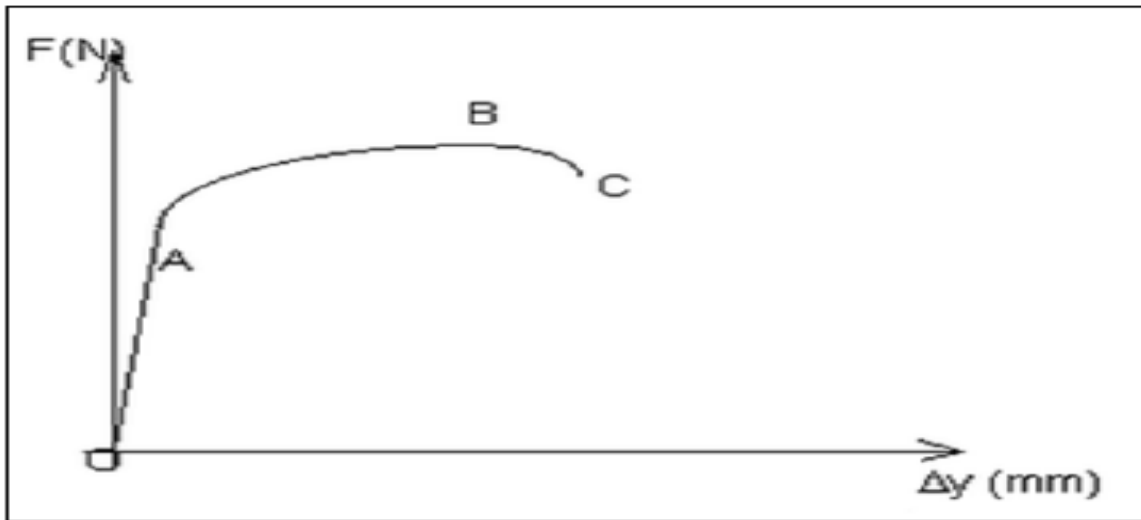


Figure III.8. Courbe de $F=f(\Delta y)$.

- **Zone OA** : c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa forme initiale.
- **Zone ABC** : c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa forme initiale. (déformations plastiques)

La section S cisailée se déplace dans son plan. Ce déplacement est un glissement. Il est défini par un angle de glissement γ . Cet angle défini par $\text{tg } \gamma = \Delta y / \Delta x$.

La déformation γ , appelée glissement relatif ou déviation (sans unité) reste faible dans le domaine élastique d'où $\gamma = \Delta y / \Delta x$

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ , on introduit alors le module de Coulomb G telle que :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν : Étant le coefficient de Poisson

III.4.4. Déformations élastiques

L'essai précédent a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{III-9})$$

G : est une caractéristique appelée module d'élasticité transversal ou module de Coulomb

Tableau III.1 : Quelques module d'élasticité transversal ou module de Coulomb pour certains matériaux

Matériau	Fontes	Aciers	Laiton	Duralumin	Plexiglas
G (MPa)	40000	80000	34000	32000	11000

III.4.5. Contraintes

On définit la contrainte τ dans une section droite (S) par la relation :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

III.4.6. Relation entre contrainte et déformation

Nous avons déjà vu que

$$\tau = \frac{T}{S}, \quad \text{que} \quad \frac{F}{S} = G \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{et nous savons que } F = T.$$

$$\tau = G \frac{\Delta y}{\Delta x} = G \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{III-10})$$

III.5. Torsion simple

III.5.1. Définition

Une poutre est soumise à un régime de torsion simple (Figure 12) lorsqu'elle est soumise à ses extrémités à un moment porté par l'axe de symétrie de la poutre (encastrement par exemple). Les

formules de la torsion simple ne sont valables que pour des poutres de révolution (section de poutre circulaire). On néglige le poids de la poutre.

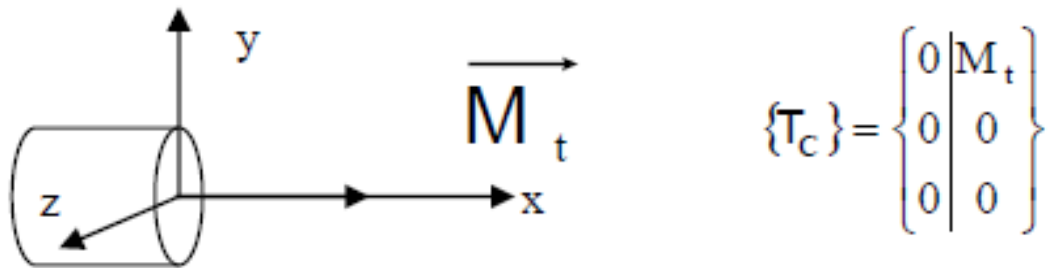


Figure III.9. Effort de torsion simple appliqué à une poutre, et torseur correspondant

III.5.2. Essai de torsion

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastree à son extrémité (S1) de centre de gravité G1. On applique à l'extrémité droite sur la section (S2) de centre de gravité G2 une action mécanique modélisée en G2 par un torseur « couple » :

$$\{\tau\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{0} \\ \bar{M}_{G_2} \end{array} \right\}_{G_2} \tag{III-11}$$

En faisant croître on mesure les déformations de la poutre

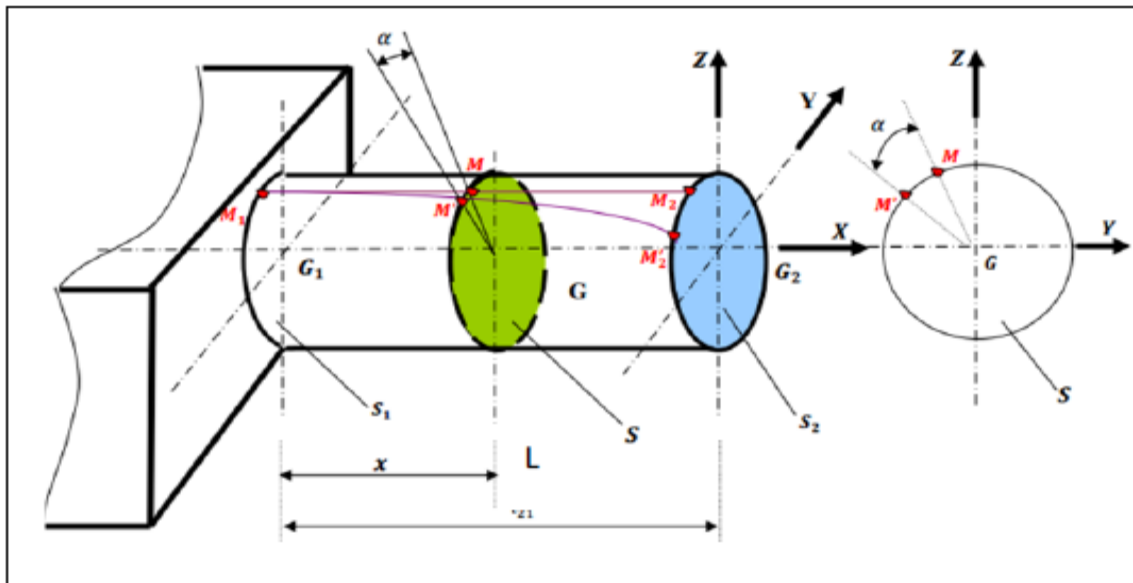


Figure III.10. Illustration de l'essai de torsion simple.

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S₁).

On obtient une courbe illustrée à la Figure III.11. Semblable à celle de l'essai de traction :

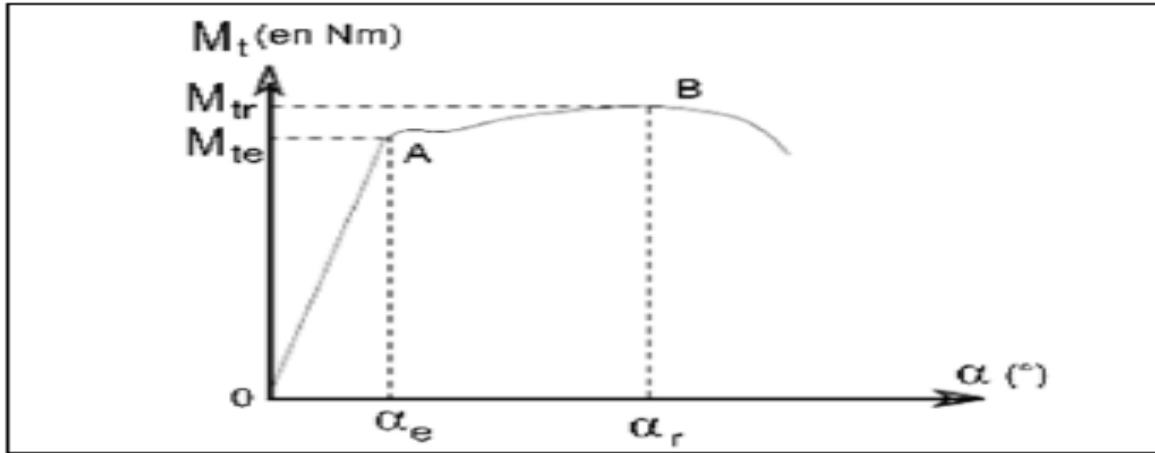


Figure III.11. Courbe $M_t=f(\alpha)$

Elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

III.5.3. Etude des déformations :

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

On constate que le rapport $\theta = \frac{\alpha}{x}$ reste toujours constant. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion [rad /mm].

α = Angle de rotation de la section S en rad.

x = Distance séparant S à la section de référence S₀ en mm.

III.5.4. Etude des contraintes :

On considère un petit élément de longueur Δx d'une fibre : Après déformation, le point M₂ (Figure III.10.) Situé à une distance x du point G vient en M₂', la génératrice M₁M₂ subit alors une déviation γ comparable à celle observée dans l'étude du cisaillement simple

La distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement $\Delta x = 0$, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\epsilon_x = 0$, on admet donc que la composante normale nulle.

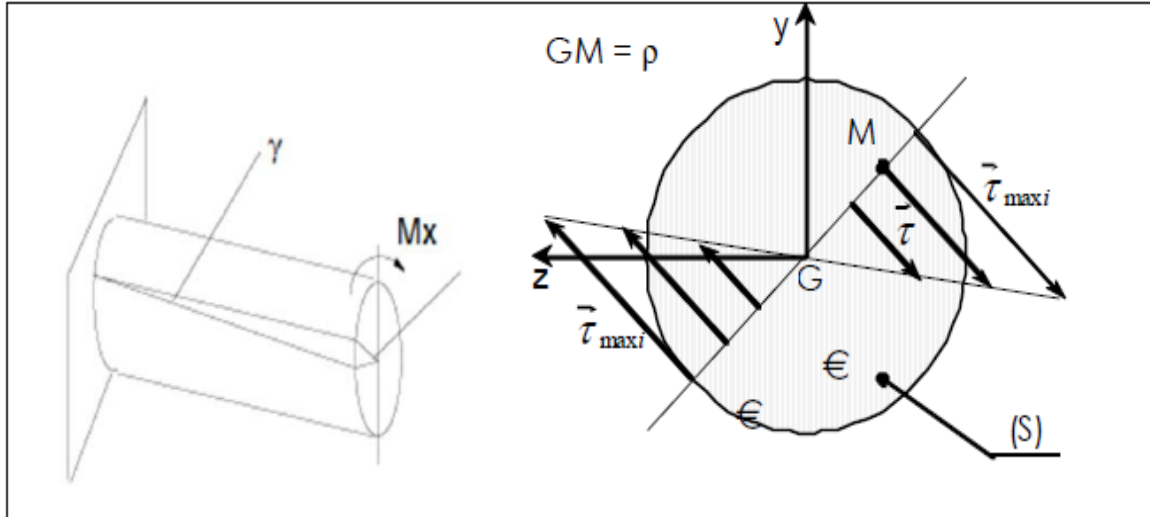


Figure III.12. Répartition des contraintes au niveau de la section.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = G \cdot \gamma$ où G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

Comme l'angle γ est petit : l'arc $M2 M2' = \alpha\rho = \gamma x$ On aura

$$\gamma = \frac{\alpha\rho}{x} = \theta \cdot \rho \quad (\text{III-12})$$

La contrainte tangentielle s'écrit : $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$

τ : Contrainte tangentielle de torsion (en MPa)

ρ : Distance du point M à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort (en mm)

θ : Angle unitaire (en rad/ mm)

G : Module d'élasticité transversal ou module de coulomb (en M

τ_{Max} : est atteint pour les points M périphériques de la surface du solide tels que $\rho = R$ (Rayon)

III.5.5. Relation entre contrainte et moment de torsion :

En un point M de la section, Le vecteur contraint s'écrit

$$\vec{C}(M, \vec{X}) = \tau_{(M)} \vec{t} = G \theta r \vec{t} \tag{III-13.a}$$

Le moment de torsion est suivant l'axe $(0, \vec{x})$ s'écrit : $\vec{M} = M \vec{x}$ (III-13.b)

D'autre part :

$$\vec{M}_t = \int_S G \vec{M} \wedge \vec{C}(M, \vec{x}) dS = \int_S r \vec{x}_1 \wedge G \theta r \vec{t} dS = G \theta \int_S r^2 dS \vec{x} \Rightarrow M_t = G \theta \int_S r^2 dS \tag{III-13.c}$$

$\int_S r^2 dS$ est par définition le moment quadratique polaire de la surface S par rapport à son centre de gravité G. Il est noté I_G qui dépend de la forme et des dimensions de cette section.

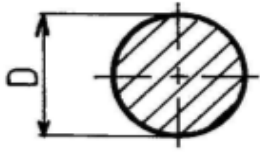
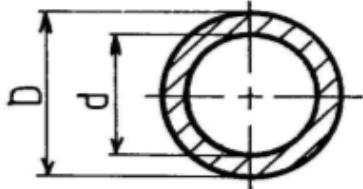
Sections	Caractéristiques
	$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$
	$I_o = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ $\frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$

Figure III.13. Moment quadratique polaire en fonction de la section.

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est: $M_t = G \theta I_G$

Il en découle $\tau_{(M)} = \frac{M_t}{I_G} r$ ou $\tau_{(M)} = \frac{M_t}{r}$ (III-14.a)

La contrainte maximale de torsion est obtenue pour

$$r = R : \tau_{max} = \frac{M_t}{I_G} R \tag{III-14.b}$$

III.5.6. Condition de résistance

La contrainte maximale ne doit pas dépasser la limite élastique pratique au cisaillement, soit:

$$\tau_{max} \leq R_{pg} \Leftrightarrow \frac{M_t}{(I_o/R)} \leq \frac{R_{eg}}{S} \tag{III-15}$$

Si le cylindre utilisé pour transmettre le mouvement possède des cannelures, rainures, épaulements, goupilles ..., il sera nécessaire comme dans le cas de la traction simple, d'introduire un coefficient de concentrations de contraintes.

III.5.7. Condition de rigidité

Pour les systèmes de transmission qui tournent vite (typiquement avec des vitesses de rotation supérieures à 750 tr/min), on doit limiter les déformations de torsion du cylindre de transmission pour éviter les vibrations.

Pour assurer une rigidité convenable de la transmission, on impose une limite à l'angle unitaire de torsion:

$$\theta \leq \theta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{M_t}{(GI_0)} \leq \theta_{lim} \quad (\text{III-16})$$

III.6. Le flambement :

III.6.1. Introduction :

Tous les éléments de structure longs et minces ont un comportement similaire en compression. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint une valeur pour laquelle l'élément mince, au lieu de simplement se raccourcir, s'infléchit, et d'ordinaire se rompt. Cette valeur critique est appelée : charge de flambement.

Dans le cas du flambage, les formules établies tiennent compte des déformations qui ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents, de même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations.

Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de flambement.

Les formules de flambage sont utilisées avec prudence, c'est-à-dire en prenant un coefficient de sécurité très grand. Les pièces soumises au flambage doivent impérativement être droite et ne doivent pas avoir subi des déformations précédemment.

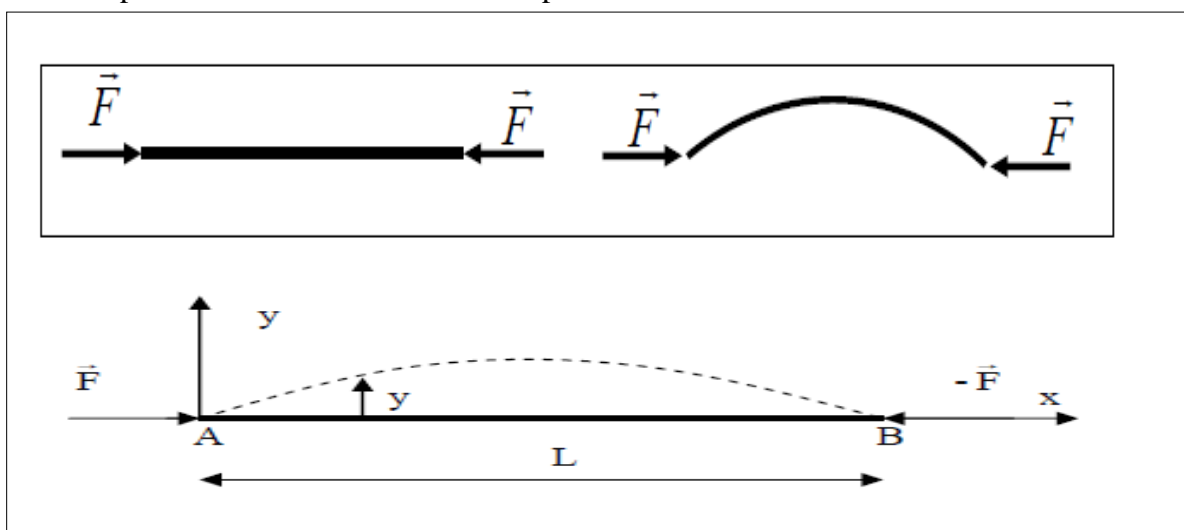


Figure III.14. Poutre rectiligne en condition de flambage avec sa déformée

III.6.2. Phénomènes d'instabilité des pièces métalliques

L'étude des phénomènes métallique, car ils sont très fréquents du fait de l'utilisation des profilés minces et de grand élancement.

Les zones comprimées des pièces métalliques peuvent présenter trois types de phénomènes d'instabilité qui sont :

- Le flambement : phénomène très aisé que les poteaux comprimés et fléchi
- Le déversement : moins dangereux, il affecte les semelles comprimées des
- Le voilement : de moindre importance

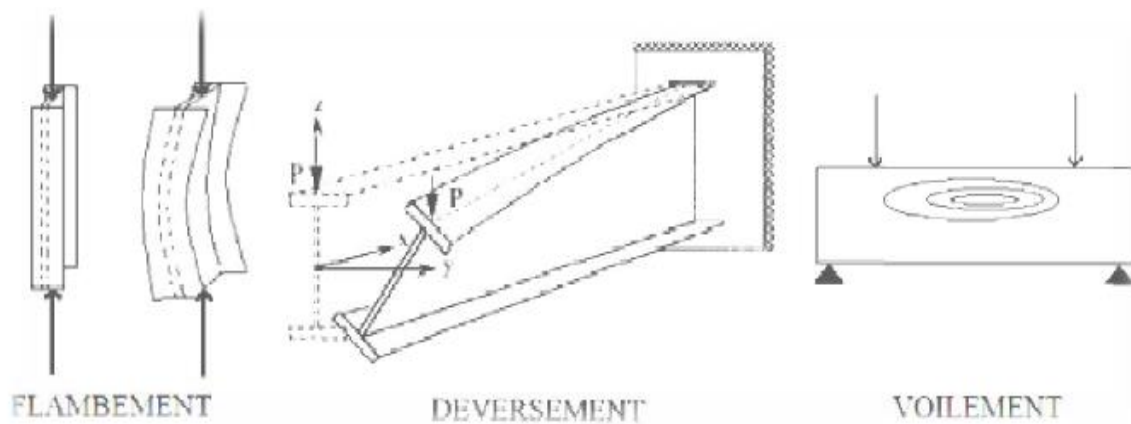


Figure III.15. Phénomènes d'instabilité.

III.6.3. Les type de flambement :

III.6.3.1. Flambement simple des poteaux idéals

Le flambement simple affecte les poteaux soumis à la compression simple. Le premier qui a étudié ce phénomène est l'ingénieur et mathématicien **Euler** en **1880** La théorie d'Euler est fondée sur :

- ✓ un poteau de grand élancement dont ses dimensions transversales sont faibles par rapport à sa longueur,
- ✓ un poteau droit (parfaitement rectiligne), bi-articulé à ses extrémités
- ✓ soumis à un effort normal de compression N centré et appliqué suivant l'axe ox

Lorsque N croit, à partir de zéro, l'état initial d'équilibre rectiligne du poteau évolue vers un état d'équilibre curviligne fléchi. Dès que N atteint la valeur de N_{cr} l'équilibre curviligne devient instable et le poteau va se rompre par flambement.

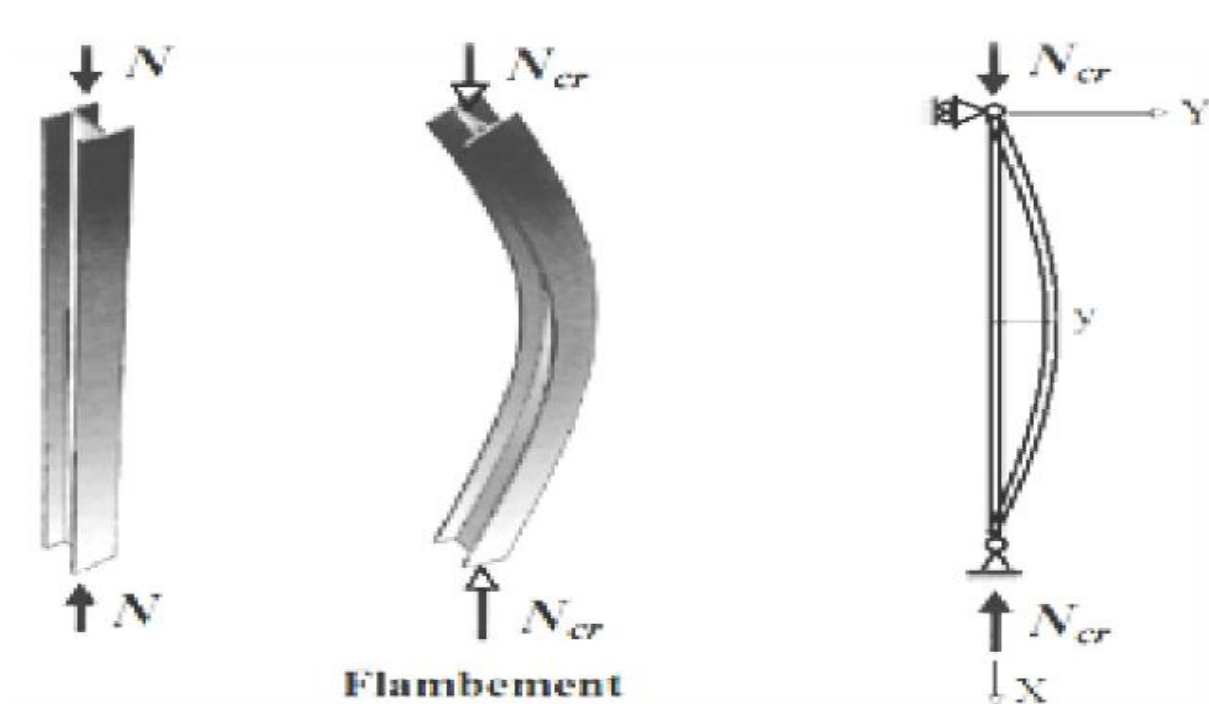


Figure III.16. Flambement simple.

L'effort critique de compression N_{cr} à partir duquel apparaît le phénomène de flambement a été défini par **Euler** par l'expression suivante :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \quad (\text{III-17})$$

l_f : La longueur de flambement du poteau.

III.6.3.2. Flambement par flexion :

A la charge critique, l'équilibre stable du poteau rectiligne se trouve à sa limite et il existe une configuration légèrement déformée du poteau qui peut aussi satisfaire l'équilibre. Pour cette configuration, le moment de flexion, à chaque position de la section droite et pour une barre bi articulée, est donné par: $M = N y$

Un poteau idéal à section uniforme doublement symétrique et chargé axialement à ses extrémités en compression peut flamber par flexion autour de l'un des axes principaux de sa section transversale sous une charge critique élastique, dite aussi « charge critique d'Euler » :

$$N_C = \pi^2 \cdot \frac{EI}{\alpha L^2} \quad (\text{III-18})$$

α : Facteur traduisant l'influence des conditions d'appui aux extrémités du poteau.

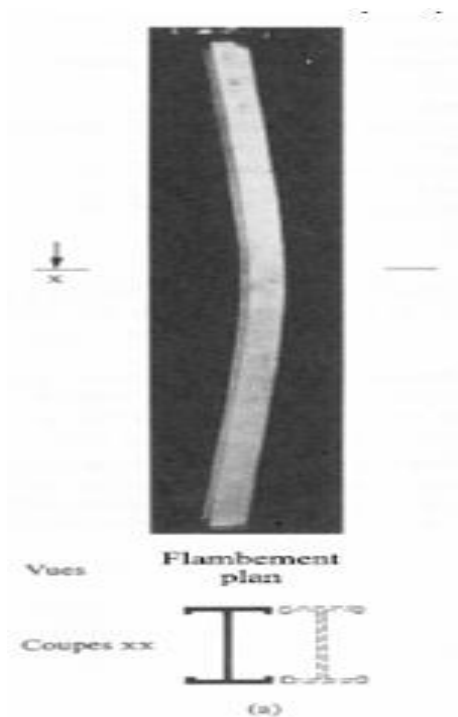


Figure III.17. flambement par flexion

III.6.3.3. Flambement par torsion :

L'effort normal critique pour le mode de flambement par torsion, $N_{cr, T}$, peut être calculé à partir de :

$$N_{cr, T} = \frac{1}{i^2} \left(GI_i + \frac{\pi^2 EI_w}{l^2 T} \right) \quad (\text{III-19})$$

E : est le module d'élasticité

G : est le module de cisaillement

I_w : est l'inertie de gauchissement.

l_T : est la longueur de flambement correspondant au mode de flambement par torsion.

i_0 : rayon d'inertie polaire

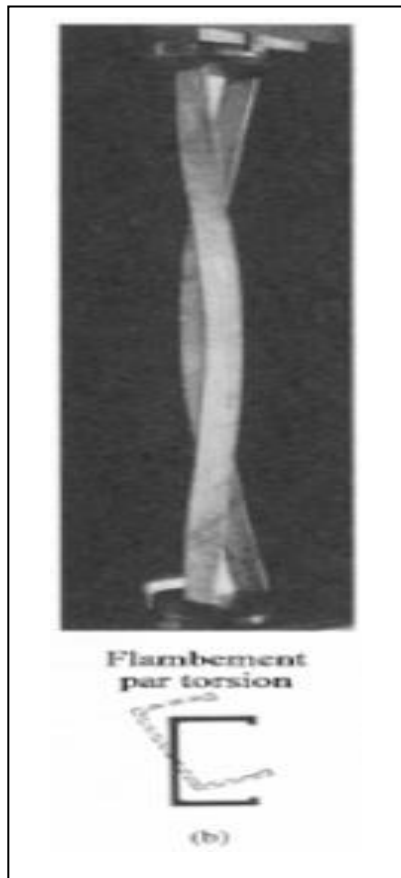


Figure III.18. Flambement par torsion.

III.6.3.4. Flambement par flexion-torsion :

Le mode de flambement par flexion-torsion ne devrait être considéré que si le centre de cisaillement ne coïncide pas avec le centre de gravité. L'effort normal critique $N_{cr,TF}$ pour le mode de flambement par flexion-torsion est la plus petite des racines de l'équation en N du troisième degré suivante :

$$i_0^2 (N - N_{cr,y})(N - N_{cr,z})(N - N_{cr,T}) - N^2 y_0^2 (N - N_{cr,z}) - N^2 z_0^2 (N - N_{cr,y}) = 0 \quad (\text{III-20})$$

$N_{cr,y}$ et $N_{cr,z}$ sont les efforts normaux critiques pour le flambement par flexion par rapport aux axes yy et zz , respectivement. $N_{cr,T}$ est l'effort normal critique pour le mode de flambement par torsion, voir formule (1). L'équation peut également s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{i_y^2 + i_z^2}{i_0^2}\right)N^3 + \left[i_0^2 - \frac{1}{i^2}(N^2 z_0^2 + N^2 y_0^2) - (N_{cr,y} + N_{cr,z} + N_{cr,T})\right]N^2$$

$$+ (N_{cr,y} \cdot N_{cr,z} + N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} + N_{cr,T} \cdot N_{cr,y})N - N_{cr,y} N_{cr,z} N_{cr,T} = 0 \quad (\text{III-21})$$

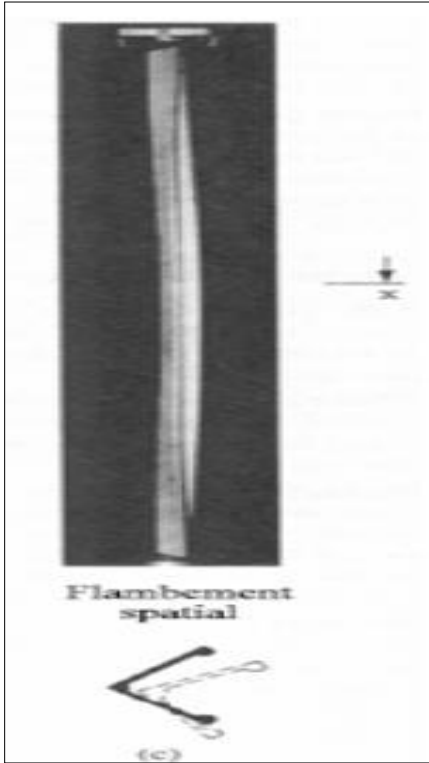


Figure III.19. Flambement par flexion-torsion

III.6.3.5. Flambement avec point limite :

Le flambement associé à une bifurcation d'équilibre n'est pas la seule forme d'instabilité que l'on peut rencontrer. Dans le cas des arcs, des treillis de faible hauteur et des dômes sphériques, par exemple, un flambement de changement de position d'équilibre, se produisant avec un claquement sec peut avoir lieu quand le trajet initialement stable perd sa stabilité dès que l'on atteint localement une valeur maximum de la charge, appelée « point limite » du système.

Ceci est représenté sur Figure III.20., on peut voir aussi sur ce schéma que la réponse d'un système non-parfait est semblable à celle du système parfait correspondant.

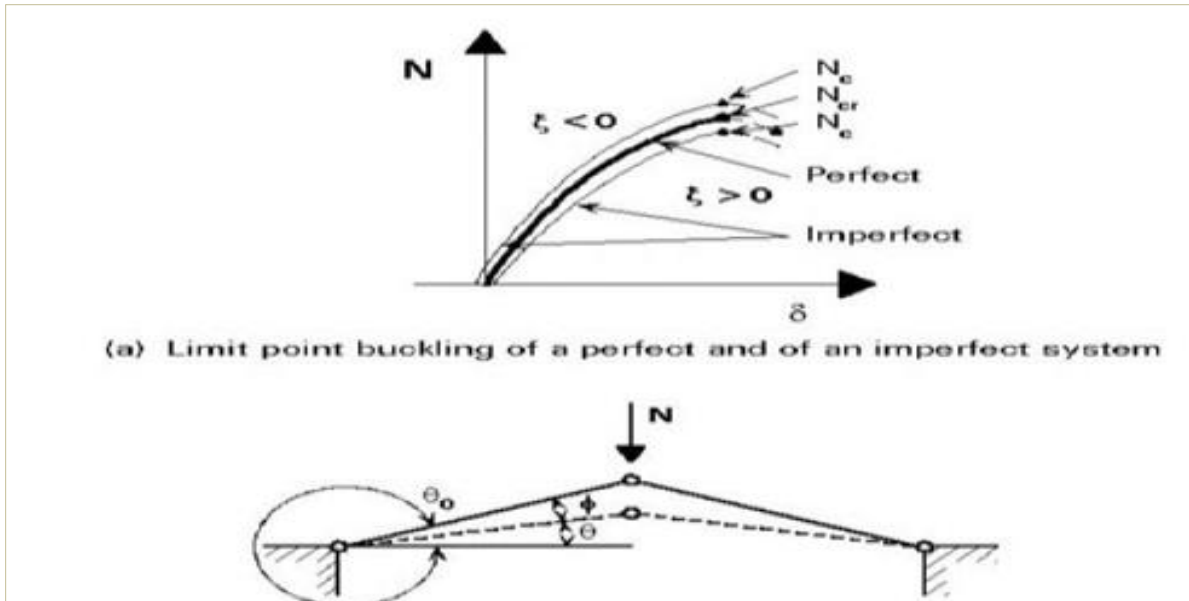


Figure III.20. Flambement avec point limite

III.6.3.6. Le flambement par divergence :

Il est caractérisé par le fait essentiel que la poutre se dérobe à l'effort normal de compression en fléchissant transversalement. Il se déclenche à cause de la flexion initiale (courbure initiale (Figure III.21.a), charge excentrée (Figure III.21.b), charge transversale (Figure III.21.c), l'effort normal de compression accentue, comme on s'en rend compte en se plaçant en configuration déformée.

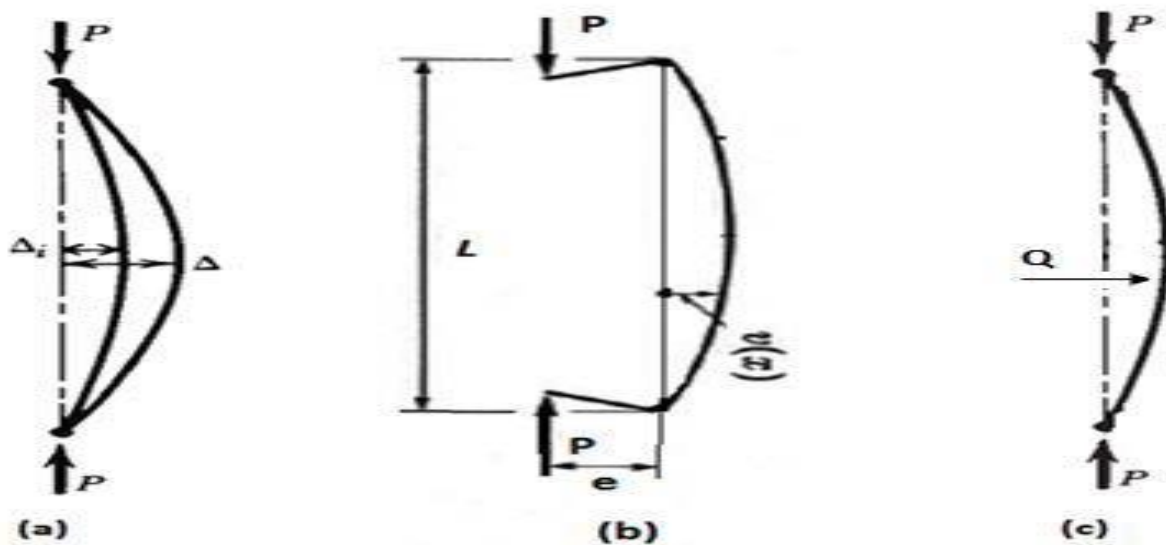


Figure III.21. Les causes de Flambement par divergence.

III.6.4. Les dangers du flambement :

Le flambement est l'une des premières causes de sinistres des structures, parce qu'il affecte essentiellement les poteaux, l'élément porteur principal de bâtiment. Ces sinistres ont été à l'origine de grandes catastrophes comme l'effondrement du pont de Québec (1907, 74 mort, Photo III.2).



Photo III.2. L'effondrement du pont de Québec 1907

Dans une structure, le flambement d'un élément comprimé provoque des grandes déformations dues au non linéarité géométrique, et par conséquent, il engendre une chute de la force supportée. Cela modifie le cheminement des forces dans la structure et peut causer l'instabilité des autres éléments. Les contreventements sont les plus exposés à ce type de risque. Pour l'éviter soit on dimensionne les éléments comprimés pour résister, soit on considère que les éléments tractés participent à la résistance.

III.6.5. Mise en évidence du flambement :

Considérons une pièce élancée (telle que sa longueur soit très supérieure à sa plus grande dimension transversale), de ligne moyenne rectiligne, de section droite constante, articulée à ses deux extrémités, et soumettons-la à un effort normal de compression centré. On observe successivement deux types de sollicitation :

- pour un effort N inférieur à une limite N_c , la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.

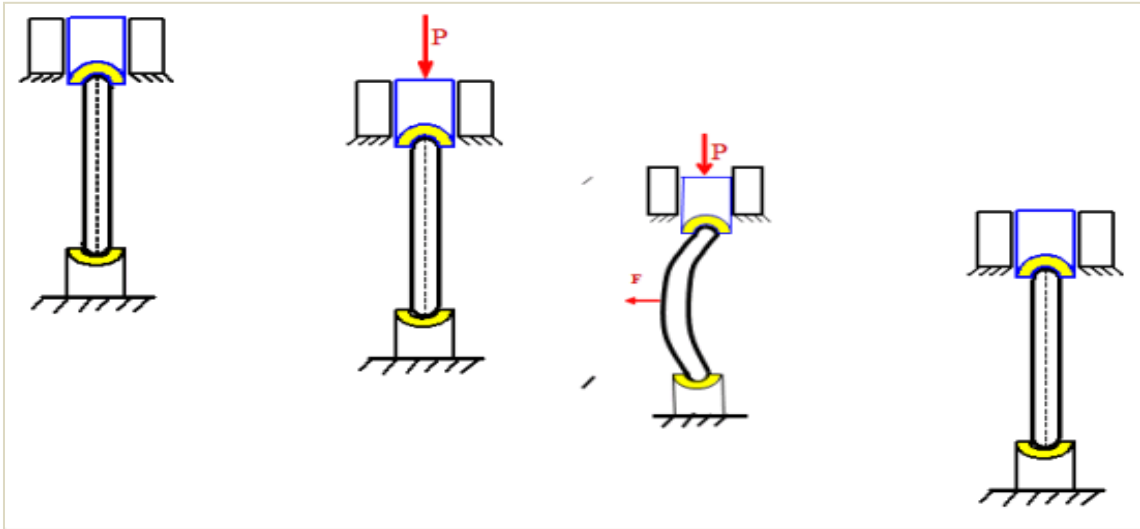


Figure III.22. Essai de flambement lors 'que N est inférieur à N_c

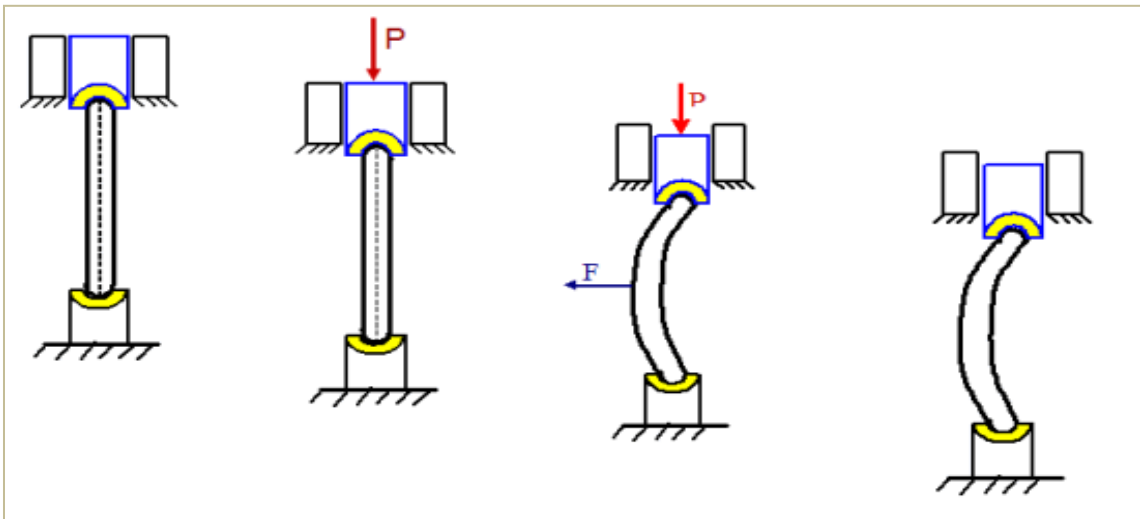


Figure III.23.: Essai de flambement lors 'que N est égale à N_c

La poutre conserve la déformée qui lui a été conférée par la perturbation

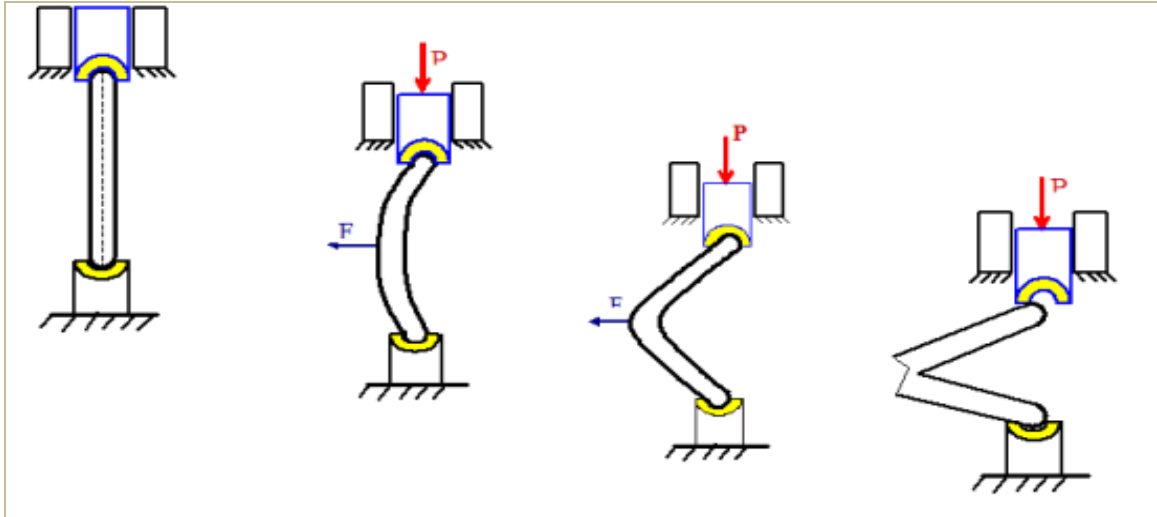


Figure III.24. Essai de flambement lors 'que N est supérieur à N_C

III.6.6. Le flambement de la plaque FGM sous augmentation de température

III.6.6.1. Le flambement de la plaque FGM sous augmentation uniforme de température

La température initiale de la plaque est supposée être T_i , ensuite elle augmente uniformément à une valeur finale T_f dans laquelle la plaque se déforme. La variation de température est $\Delta T = T_f - T_i$. La charge critique de flambement N_{cr} est donnée par :

$$N_{cr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\alpha(z)E(z)(T_f - T_i)}{1 - \nu} dz, \quad (\text{III-22})$$

III.6.6.2. Le flambement de la plaque FGM sous augmentation linéaire de température

Pour les plaques fonctionnellement graduées, la variation de température n'est pas uniforme. La température est supposée varier linéairement à travers l'épaisseur de la façon suivante :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + T_M, \quad (\text{III-23})$$

Où la différence de température de flambement $\Delta T = T_c - T_M$ avec T_c et T_M sont les températures de la surface supérieure et inférieure qui sont entièrement en céramique et en métal, respectivement.

Similaire au cas de chargement précédent, l'expression de la charge critique de flambement N_{cr} est obtenue en substituant l'équation. (III-23) dans l'équation. (III-22).

III.6.7. Le flambement de la plaque sous variation de température non linéaire à travers l'épaisseur

On suppose que la température de la surface supérieure T_M est la température varie à partir de T_M , suivant la fonction de la loi de puissance à travers l'épaisseur, a la température de surface inférieure T_s pour laquelle la plaque se flambe. Dans ce cas, la température est donnée

par :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_M, \quad (\text{III-24})$$

Où la différence de température de flambement $\Delta T = T_C - T_M$ et « γ » l'exposant de la température ($0 < \gamma < \infty$). A noter que la valeur de « γ » égale à l'unité représente une variation de température linéaire à travers l'épaisseur. La valeur de « γ » différente de l'unité représente une variation non linéaire de température.

Similaire au cas de chargement précédent, l'expression de la charge critique de flambement N_{cr} est obtenue en substituant l'équation. (III-24) dans l'équation. (III-22).

III.7. Flexion simple

III.7.1. Introduction :

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque toutes les forces appliquées à la poutre que ce soient les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et soit situées dans le plan de symétrie, soit réparties symétriquement par rapport à celui-ci, ou concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

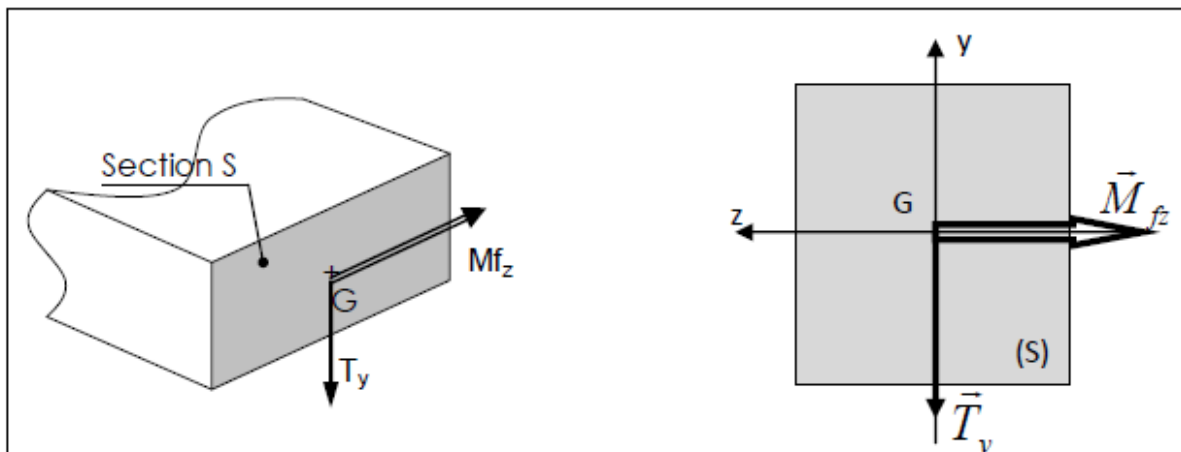


Figure III.25. Modélisation des efforts extérieurs sur une poutre soumise à une flexion simple

Au cours de la déformation, les sections droites (constantes) restent planes et normales à la ligne moyenne.

La ligne moyenne de la poutre est rectiligne et confondue avec l'axe (o,x) .

Le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G , barycentre de la section droite S , à une résultante contenue dans le plan de la section et à un moment perpendiculaire à cette dernière.

$$\{\tau_{coh}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{pmatrix}_G \quad (\text{III-25})$$

III.7.2. Essai de flexion simple (domaine élastique)

Existe plusieurs types de flexions (pure, plane..... déviée).

III.7.2.1. Flexion simple trois points :

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale (Figure III.26).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

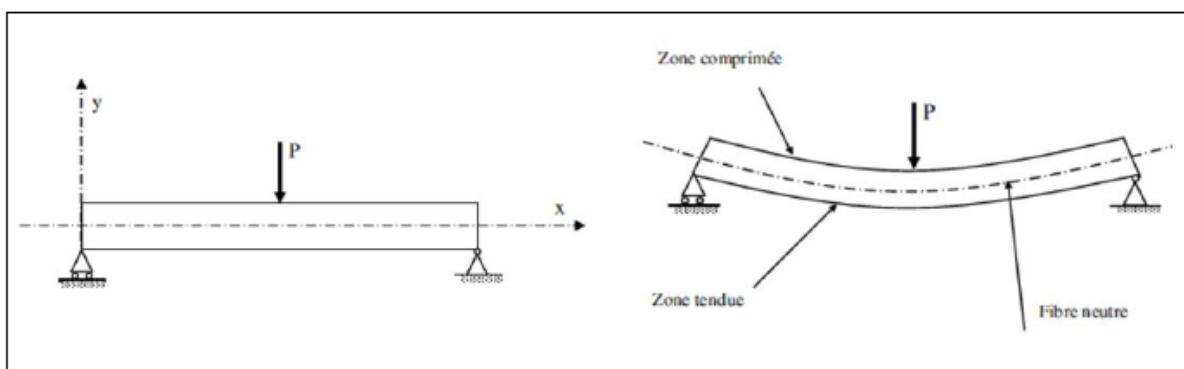


Figure III.26. Modélisation d'un essai de flexion trois points.

Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

La Figure III.27. représente une poutre à plan moyen sollicitée en flexion trois points dans son plan par une force \vec{F}_y

Py. Par symétrie, nous allons utiliser le segment $0 \leq x \leq l/2$ pour traiter le problème, en posant des conditions de symétrie en $x = l/2$. Du fait de cette symétrie, la sollicitation ponctuelle \vec{F}_y

Py est diminuée de moitié. Une théorie avec cisaillement sera utilisée pour résoudre ce problème.

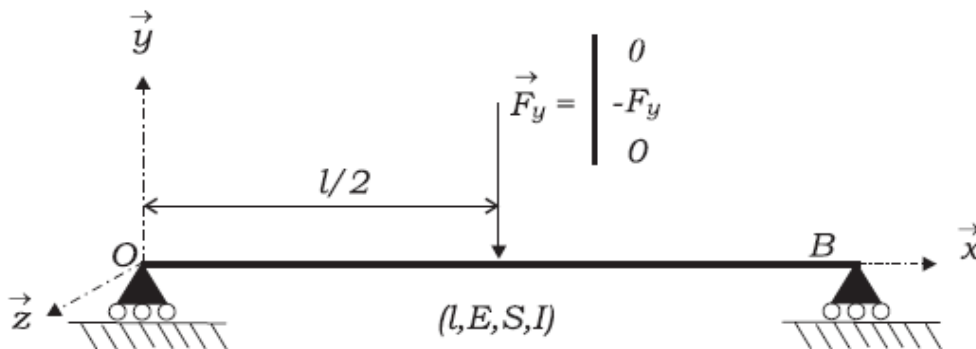


Figure III.27. Flexion trois points d'une poutre à plan moyen.

III.7.2.1.1. Résolution complète

- Poser le problème à résoudre pour déterminer complètement les quantités cinématiques et statiques (équations d'équilibre + conditions aux limites).
- Résoudre complètement le problème en intégrant les équations d'équilibre. Donner la flèche et la rotation maximale ainsi que les abscisses de ces maxima.
- Tracer les profils des efforts tranchants et des moments fléchissant.

III.7.2.1.2. Résolution par transport des efforts extérieurs

- Donner l'expression du torseur des efforts internes en tout point de la poutre.
Attention aux réactions aux appuis !!!
- En déduire le torseur des déformations.
- Donner la flèche et la rotation de la poutre en tout point x , et tracer leur profil.

La flexion 3 points est un essai couramment utilisé dans l'industrie pour caractériser les matériaux. Pourtant, cet essai, s'il a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre, pose de

nombreux problèmes pour des mesures de résistance. En effet, le profil des efforts tranchants et des moments fléchissant montre clairement que ces 2 grandeurs sont maximales au centre de la poutre. De plus, sous l'appui central, la poutre subit un écrasement transverse (E_{yy}). La concomitance de ces valeurs extrêmes au centre de la poutre conduit systématiquement à une rupture sous l'appui central, rendant difficile l'identification du mode de rupture et l'état de contraintes à l'intérieur de la poutre au moment de la rupture.

III.7.2.2. Flexion simple d'une poutre console :

Considérons la poutre représentée sur la Figure III.28 sollicitée par une force ponctuelle (Vecteur $\vec{F}_y(l)$)

$F_y(l)$ en son extrémité B ($x = l$). On notera E le module d'Young du matériau, G son module de cisaillement, S la section de la poutre et I son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz.

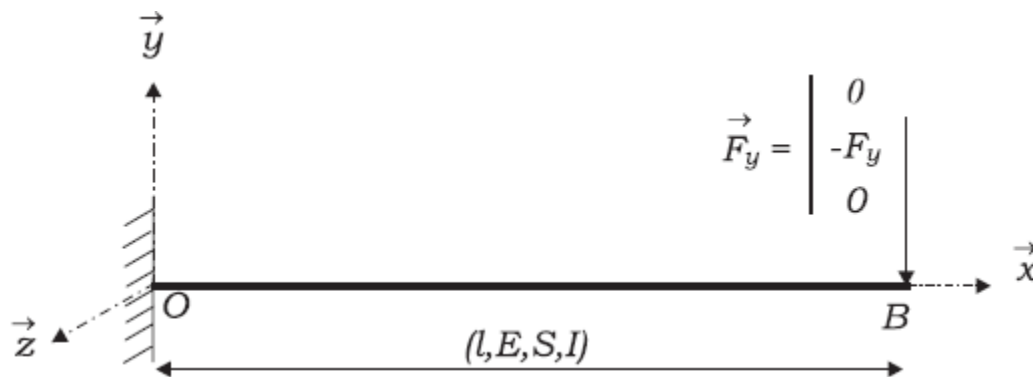


Figure III.28. Flexion simple d'une poutre à plan moyen

III.7.2.2.1. Résolution complète

- Poser le problème à résoudre pour déterminer complètement les quantités cinématiques et statiques (équations d'équilibre + conditions aux limites).
- Résoudre complètement le problème en intégrant les équations d'équilibre.
- Tracer les profils des efforts tranchants et des moments fléchissant.

III.7.2.2.2. Résolution par transport des efforts extérieurs

- Donner l'expression du torseur des efforts internes en tout point de la poutre.
- En déduire le torseur des déformations.
- Donner la flèche et la rotation de la poutre en tout point x , en utilisant la méthode du double intégration, et donner leur profil.

4. Choix d'une section en fonction de sa rigidité de flexion

- Évaluer et comparer les moments quadratiques des sections (a) et (b) présentées sur la Figure III.29.
- Comparer les moments quadratiques et les masses des sections en I et sandwich par rapport à la section pleine en fonction de k . On considérera de l'acier, et de la mousse PUR pour l'âme du sandwich, avec un rapport de rigidité $\frac{E_a}{E_p} = 5 \times 10^{-2}$

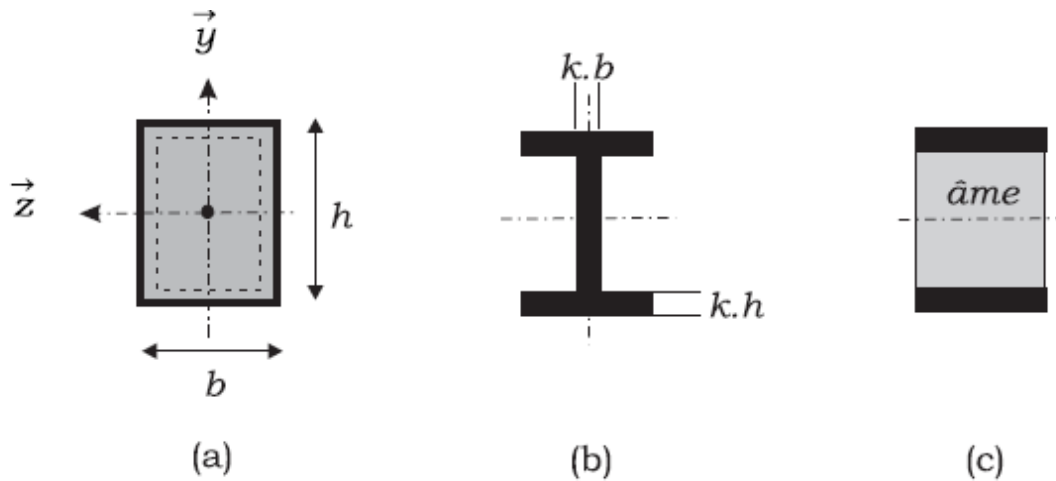


Figure III.29. Profils de section considérés : (a) section rectangulaire pleine, (b) section en I, et (c) matériau sandwich.

III.7.2.3. Flexion déviée

La flexion déviée se produit lorsque les moments produits de la section ne sont pas nuls.

Ce peut être le cas par exemple lorsque les directions principales d'inertie de la section ne sont pas confondues avec les axes du repère de référence, ou bien pour les sections ne possédant pas de plans de symétrie. On retrouve alors le résultat énoncé précédemment (Eq. III-26), où le moment fléchissant M_{fz} est dû pour une part à la flexion selon \vec{z} mais également à de la flexion selon \vec{y} . Ce qui donne dans une théorie sans cisaillement:

$$M_{fz}(x) = EI_{Gz}v''(x) - EI_{Gyz}w''(x) \quad (\text{III-26})$$

Où I_{Gy} , I_{Gz} et I_{Gyz} sont respectivement le moment quadratique de la section par rapport à l'axe \vec{y} , par rapport à l'axe \vec{z} , et le moment produit. w'' est la courbure due à la flèche selon

\vec{z} . Dans ce cas la contrainte normale se calcule en prenant en compte les grandeurs suivant les 2 axes concernés.

III.7.3. Relation entre contrainte et moment fléchissant :

$$M_{fz} = -\frac{\sigma_x}{y} I_{GZ} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_{fz}}{I_{GZ}} y \tag{III-27}$$

Les contraintes maximales se développent dans les fibres les plus éloignées de la fibre neutre :

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_{fz}|_{max}}{\frac{I_{GZ}}{v}} \tag{III-28}$$

$v = |y|_{max}$: Ordonnée du point le plus éloigné de (G, \vec{z}) [mm].

$\frac{I_{GZ}}{v}$: Module de flexion de la section droite (S1).

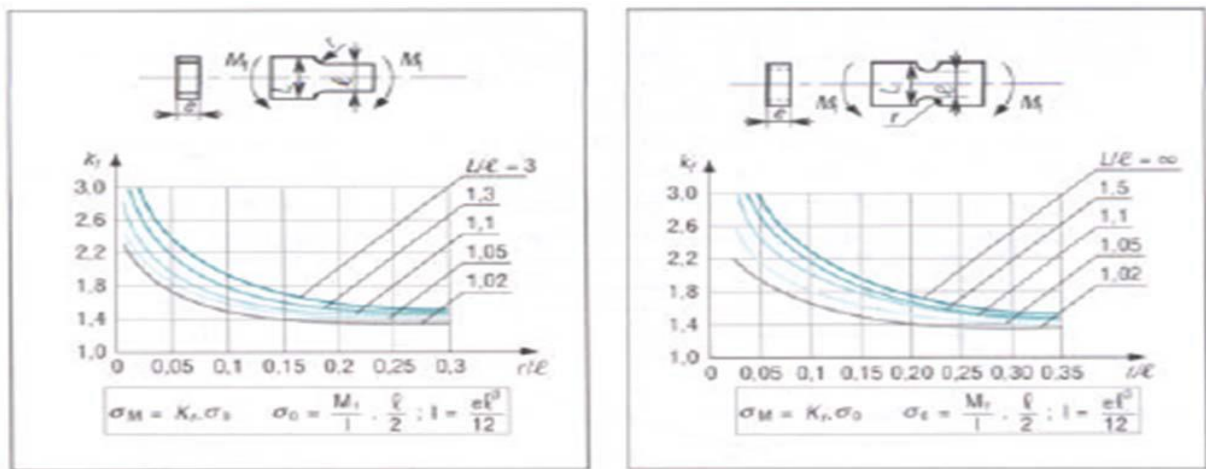
σ_M : Contrainte normale de flexion en M [MPa]

III.7.3.1. Concentration de contraintes :

En tenant compte d'un éventuel coefficient **k** de concentration de contraintes, La condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{max}|_{eff} \leq R_{pe} \tag{III-29}$$

Les coefficients de concentration des contraintes **K** sont donnés à partir des abaques (Figure III.30)



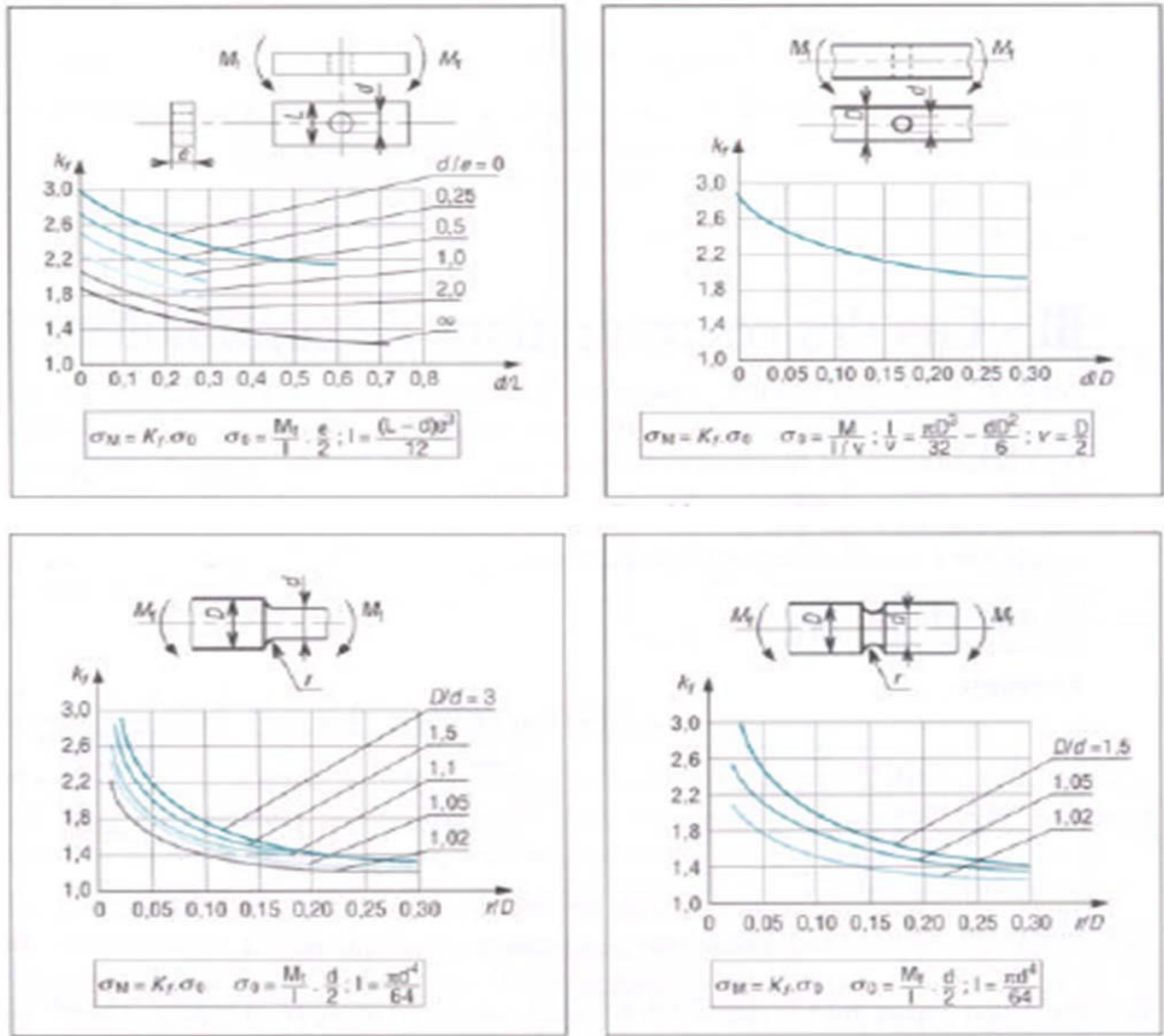


Figure III.30. Coefficient de concentration de contraintes K en flexion simple.

III.7.4. Déformation en flexion :

On appelle déformée, la courbe de la ligne moyenne de la poutre après déformation.

L'équation de la déformée est: $y = f(x)$.

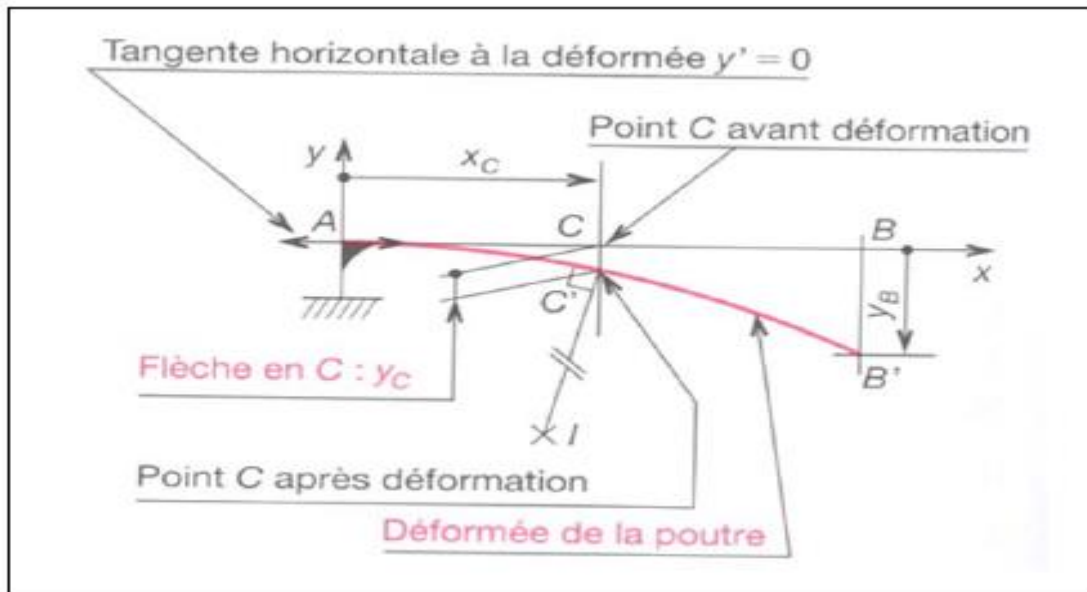


Figure III.31. Définition de la déformée

y est la flèche au point d'abscisse x .

Les dérivées première et seconde sont notées y' et y'' .

III.7.5. Condition de rigidité en flexion :

On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite f_{lim} $y_{max} \leq f_{lim}$

III.8. La vibration

III.8.1. Introduction

La vibration des systèmes mécaniques constitue une préoccupation majeure des scientifiques et ingénieurs depuis plusieurs siècles. De nos jours, presque toute nouvelle conception mécanique est sujette à une étude détaillée de sa susceptibilité à la vibration.

La détermination du comportement vibratoire de structures déstabilisées par le frottement est au coeur de nombreux problèmes industriels. La linéarisation de la loi de frottement et l'imposition du contact permet ensuite d'aboutir à un système.

Linéaire du deuxième ordre à deux degrés de liberté dont les signes des parties réelles des valeurs propres complexes déterminent la stabilité de l'équilibre glissant. Le critère de Routh-Hurwitz est appliqué afin de déterminer les différentes zones de stabilités du système, amorti ou non amorti, avec l'hypothèse de frottement plan ou de frottement rectiligne. Les graphes de bifurcations du système amorti, en particulier l'évolution des parties réelles des valeurs propres avec le coefficient de frottement, sont enfin présentés pour différentes directions de la vitesse de glissement.

Les problèmes de vibrations en usinage, sont apparus dès le début du XXe siècle. Selon Vincent MOREAU [6], Frederick W. Taylor en 1907 évoquait le broutement en usinage comme l'un des problèmes les plus délicats à traiter.

Au cours du XXe siècle, il a été constaté que trois types de vibrations sont présents dans le cas d'une opération d'usinage: les vibrations libres, les vibrations forcées et les vibrations auto-entretenues. Ces trois familles sont représentées sur la Figure III.32.

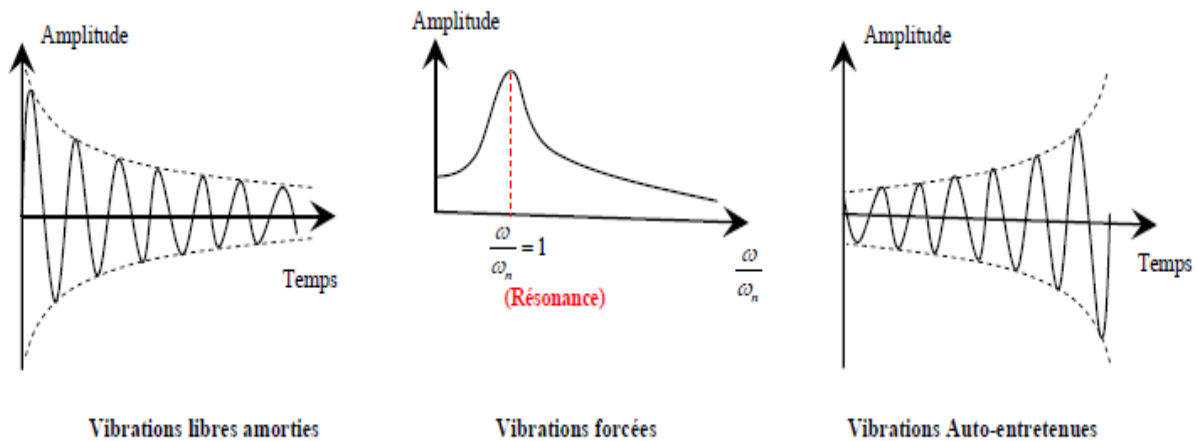


Figure III.32. Trois familles de vibrations présentées en usinage : les vibrations libres, les vibrations forcées et les vibrations auto-entretenues.

III.8.1.1. Les Vibrations libres amorties

Elles correspondent à la réponse vibratoire naturelle de tout système mécanique après une brève excitation: un impact. Dans le cas de l'usinage, que ce soit en fraisage ou en tournage, elles sont généralement utilisées pour la caractérisation du système.

III.8.1.2. Les vibrations Forcées

Les vibrations forcées sont la réponse vibratoire d'un système mécanique à une excitation périodique. En usinage, c'est l'exemple de la réponse du système lors d'une opération où la coupe est interrompue.

III.8.2. Introduction aux équations de Lagrange

III.8.2.1. Equations de Lagrange

Considérons le cas particulier d'une particule astreinte à se déplacer, sans frottement, sur une courbe plane contenue dans le plan xoy . La courbe sur laquelle est astreinte se déplacer la particule de masse m , est le lieu des points dont les coordonnées vérifient les relations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-30})$$

La première relation correspond au plan xoy . La seconde relation représente l'équation de la trajectoire dans ce plan. Ces deux relations définissent les équations des liaisons appelées souvent liaisons. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées qui représentent la position de \mp (trois dans le cas général) moins le nombre de liaisons (deux dans le cas présent). La particule possède donc un degré de liberté. Il faut choisir une variable q pour repérer sa position. Cette variable est appelée coordonnée généralisée. Il est possible d'exprimer le vecteur position \vec{r} de la particule en fonction de la coordonnée généralisée q pour la relation: $\vec{r} = \vec{r}(q)$.

Soit \vec{F} la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{III-31.a})$$

Ou $\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse de la particule.

Soit δW le travail fourni par la force \vec{F} lors d'un déplacement infinitésimal $\delta \vec{r}$: $\delta w = \vec{F} \delta \vec{r}$

Le déplacement $\delta \vec{r}$ peut s'écrire en fonction de la variation δq de la coordonnée généralisée q :

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q \quad (\text{III-31.b})$$

Dans ce cas le travail δw peut se mettre la forme :

$$\delta w = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q \quad (\text{III-31.c})$$

On appelle force généralisée conjuguée de q , ou q -composante de la force, la quantité \vec{F}_q définie par :

$$\vec{F}_q = \frac{\delta w}{\delta q} = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \quad (\text{III-31.d})$$

Par conséquent δw s'écrit :

$$\delta w = F_q \delta q$$

On en déduit l'équation de Lagrange pour un système à un degré de liberté et on note $T = \frac{1}{2} m v^2$ l'énergie cinétique de la masse m , on obtient finalement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = F_q \quad (\text{III-32})$$

III.8.3 Les problèmes de vibration des plaques en FGM

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Nous rappelons que le problème de vibration des plaques FGM n'a pas été traité dans le cadre de cette thèse. Nous le présentons juste dans le but de monter l'importance que la communauté scientifique donne à ces nouveaux matériaux ce qui justifie le nombre important de recherches traitant les structures faites à partir de ces matériaux sous diverses sollicitations. Praveen et Reddy.[Praveen et Reddy, 1998] ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. Reddy.[Reddy, 2000] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

Yang et Shen.[Yang et Shen, 2001] ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élanement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM.

Reddy et Chen.[**Reddy et Chen, 2003**] ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

En 2006, les travaux de Ferreira et al.[**Ferreira et al, 2006**] ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites.

C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. Uymaz et Aydogdu.[**Uymaz et Aydogdu, 2007**] ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li et al.[**Li et al, 2007**]. La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM.

L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites.

L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'indice des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse. Les propriétés mécaniques sont supposées varier dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance. Pradhan et Murmu[**Pradhan et Murmu, 2008**] ont présenté une analyse des vibrations thermomécaniques d'une poutre FGM sandwich. La DQM (Differential Quadrature Method) a été utilisée pour la résolution des équations. Une étude paramétrée a été effectuée sur une poutre FGM en appuis simples reposant sur un support élastique. Une théorie des poutres de déformation en cisaillement efficace basée sur la position de la surface neutre a été proposée par Ould Larbi et al [**Ould Larbi et al, 2009**] pour la flexion et la réponse des poutres FG en vibration libre.

Dans la majorité des articles mentionnés ci-dessus, l'effet thermique n'a pas été pris en considération, certains auteurs ont juste considéré la poutre dans un champ de température constant. Les méthodes de résolution utilisées sont des méthodes approximatives. Rares sont les méthodes analytiques proposées, particulièrement lorsque les contraintes thermiques sont prises en considération, ce qui compliquerait encore plus l'écriture des équations et rendrait la résolution analytique fastidieuse et très difficile.

III.9. Conclusion:

Il n'est pas exagéré de dire que la majeure partie des écroulements des constructions est due à des phénomènes d'instabilités, plutôt qu'à une sollicitation excessive des matériaux.

C'est ce qui justifie l'importance sans cesse croissante réservée à l'étude des phénomènes d'instabilité.

Les charges critiques théoriques des différents phénomènes d'instabilité sont établies sur la base d'hypothèse d'élasticité et l'absence de tout défaut. En réalité le comportement des éléments comprimés est influé par la présence des imperfections, la plasticité de la section critique avant la ruine et l'interaction des différents modes d'instabilité. Cela nécessite le recours aux méthodes expérimentales et numériques pour l'étude de la résistance.

La torsion est la sollicitation subie par un corps soumis à l'action d'un couple de forces opposées agissant dans des plans parallèles et dont l'élément de réduction est un moment de force agissant dans l'axe de la poutre.

CHAPITRE IV

**Etude Analytique De la flexion et de la
vibration libre des Plaques**

IV.1. Introduction :

Le comportement mécanique des structures est soumis au calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

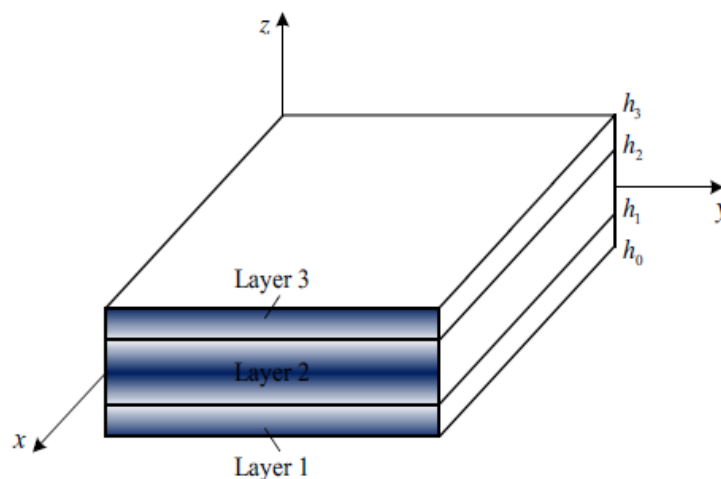
Ce chapitre est consacré à l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé de quatre variables simple et efficace. En se basant sur les relations contrainte-déformation et les conditions aux limites, les équations d'équilibre sont obtenues par l'utilisation du principe de Hamilton. Les résultats analytiques sont obtenus par les solutions de Navier.

IV.2. Formulation Théorique :

Trois types de plaque sandwich comme indiqué sur la Figure (IV -1) sont considérés dans notre thèse :

- Type A : plaque sandwich avec les faces extérieur en FGM et l'âme homogène .
- Type B : plaque sandwich avec les faces extérieur homogènes et unel'âme en FGM
- Type C : plaque sandwich avec les faces extérieur et l'âme en FGM.

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de la plaque rectangulaires sont utilisés pour décrire les déformations infinitésimales d'un plaque élastique sandwich occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ dans la configuration de référence. Le plan médian est défini par $z = 0$ et les bornes externes du plans étant définis par $z = \pm h/2$. Les positions verticales de la surface inférieure, les deux interfaces entre le noyau et les couches des faces, et la surface supérieure sont respectivement notées $h_0 = -h/2, h_1, h_2$ et $h_3 = h/2$.



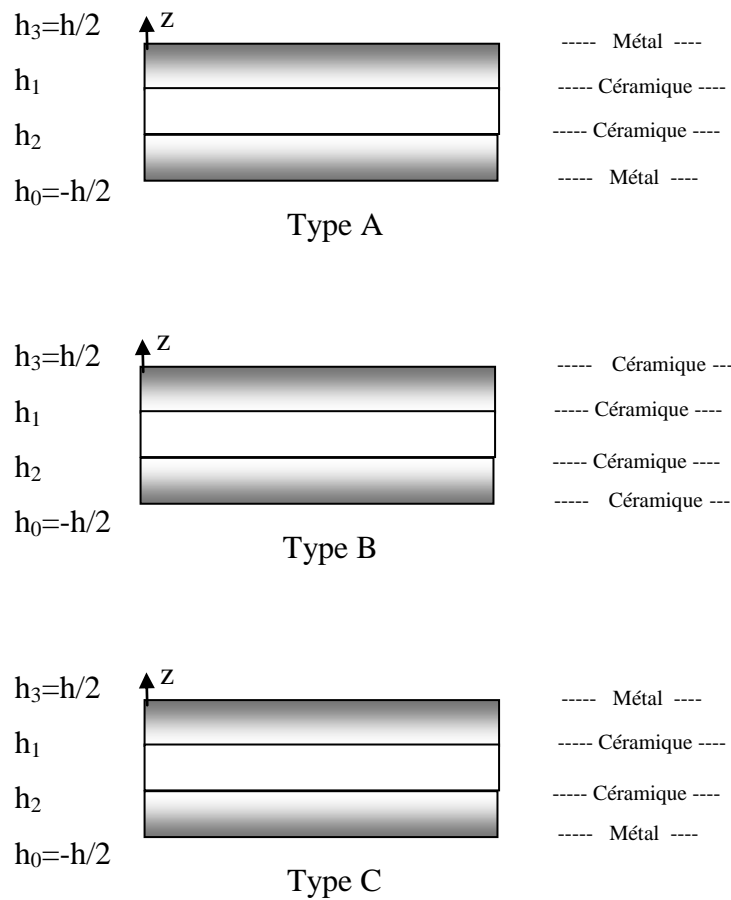


Figure (IV -1) : Géométrie de la plaque sandwich FGM (Li et al.2017)

IV.2.1 Propriétés matérielles des couches :

La borne de la face inférieure varie d'une surface riche en métal($z = h_0 = -h/2$) à une surface riche en céramique tandis que la borne de la face supérieure varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal($z = h_3 = h/2$). La fraction volumique des facettes suit une fonction de loi de puissance à travers l'épaisseur :

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} &= \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p, & z \in [h_0, h_1] \\
 V^{(3)} &= \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p, & z \in [h_2, h_3]
 \end{aligned}
 \tag{IV -1}$$

Où $V^{(n)}$, ($n=1,3$) désigne la fonction de fraction volumique de la couche n . p est l'indice de fraction volumique, ($0 \leq p \leq \omega$) qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur.

Notez que tout matériau isotrope peut être obtenu en tant qu'un cas particulier de la fonction de loi de puissance en définissant $p = 0$. La fraction volumique de la phase métallique est donnée par. $V_m = 1 - V_c$.

Les propriétés matérielles effectives pour n^{th} couche, comme le module de Young $E^{(n)}$ et le coefficient de Poisson $\nu^{(n)}$ peuvent être déterminés par la règle de mélange linéaire comme

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (\text{IV -2})$$

Où : m et c représentent les indices respectivement le métal et la céramique

IV.2.2 Propriétés matérielles de l'âme du sandwich:

La fraction volumique de l'âme de la plaque sandwich est donnée par :

$$V^{(2)} = \left(\frac{2|z|}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV -3})$$

Où K est le paramètre d'inhomogénéité qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Les propriétés matérielles effectives de l'âme du FGM sont supposées varier de manière exponentielle le long de la direction de l'épaisseur :

$$P^{(2)} = P_m \exp(\bar{\beta} V^{(2)}), \quad \bar{\beta} = \ln \frac{P_c}{P_m} \quad (\text{IV -4})$$

Où $P^{(2)}$ représentent les propriétés matérielles effectives du noyau FGM. P_m et P_c représente les propriétés matérielles effectives du métal et du céramique, respectivement

IV.2.3 Différents types des plaques sandwich symétriques

Selon divers rapports d'épaisseur de couche, les plaques sandwich peuvent être classées en : (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1), (1-3-1) les fasses de la plaque sandwich

Plusieurs types de plaques sandwich sont présentés dans la Figure IV.2 montrant la variation d'épaisseur de la fraction volumique des quatre types de plaques sandwich FGM symétriques ci-dessus pour différentes valeurs de $P = \{0.5, 1, 2, 5\}$ et $K = \{0, 1, 2, 5\}$

IV.2.3.1 La plaque sandwich (2-1-2)

Dans cet état, le noyau de la plaque fait la moitié de l'épaisseur de la face (voir Figure IV.2a).

$$h_1 = -\frac{h}{10}, \quad h_2 = \frac{h}{10} \tag{IV -5}$$

IV.2.3.2 La plaque sandwich (1-1-1)

Comme le montre la figure IV .2b, la plaque est constituée de trois couches d'égale épaisseur. Ainsi, on obtient

$$h_1 = -\frac{h}{6}, \quad h_2 = \frac{h}{6} \tag{IV -6}$$

IV.2.3.3 La plaque sandwich (1-2-1)

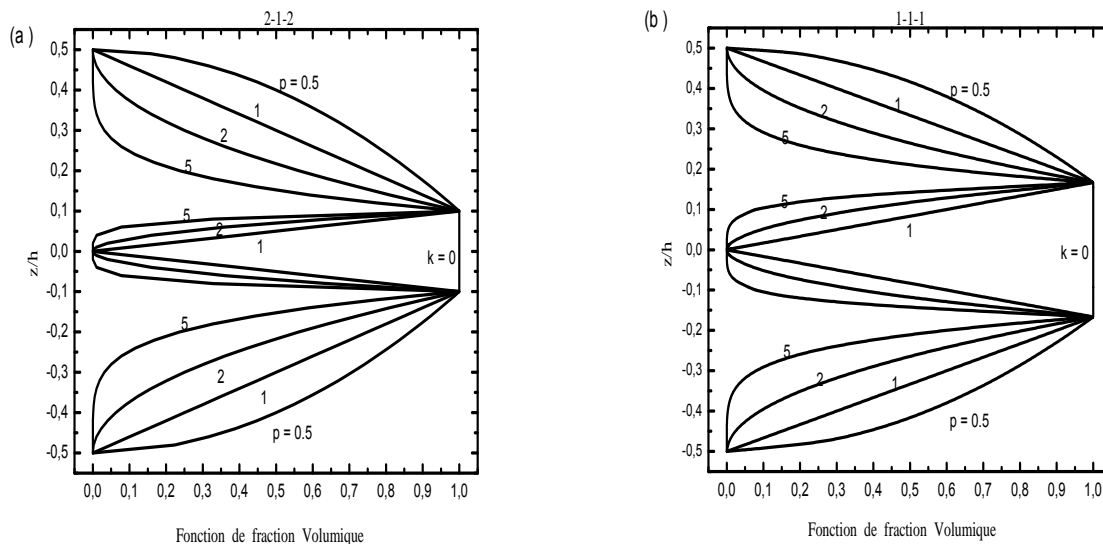
ici, l'épaisseur de l'âme est le double de l'épaisseur de la face (voir Figure III.2c).

$$h_1 = -\frac{h}{4}, \quad h_2 = \frac{h}{4} \tag{IV -7}$$

IV.2.3.4 La plaque sandwich (1-3-1)

Dans cet état, comme le montre la Figure IV.2 d, les couches de face représentent un tiers de l'épaisseur de la couche centrale. Alors, on obtient

$$h_1 = -\frac{3h}{10}, \quad h_2 = \frac{3h}{10} \tag{IV-8}$$



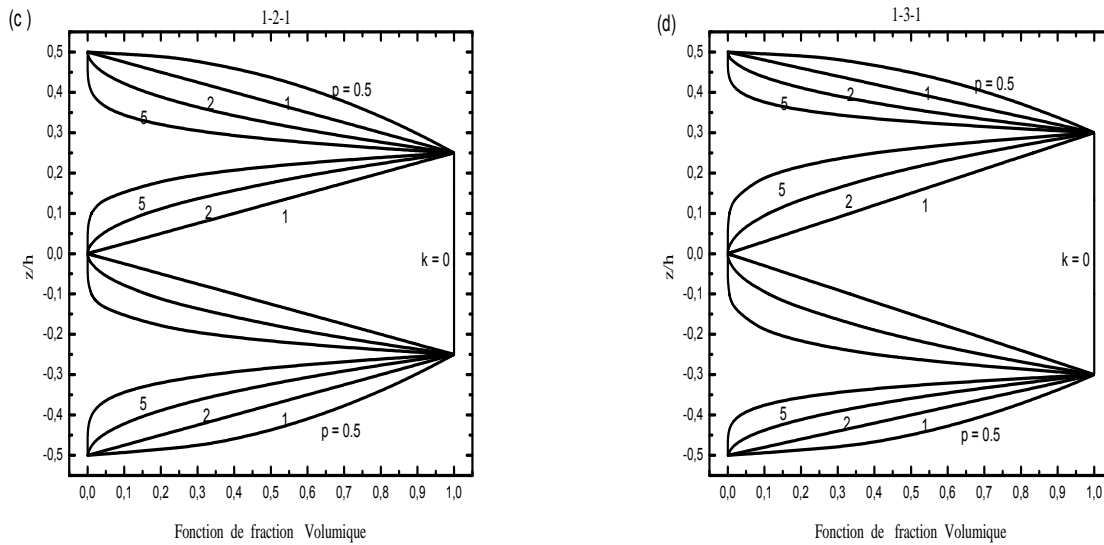


Figure IV.2 : Variation de la fonction de fraction volumique en fonction de l'épaisseur de la plaque pour différentes valeurs de $P = \{0.5, 1, 2, 5\}$ et $K = \{0, 1, 2, 5\}$ et différents types des plaques sandwich FGM : (a) 2-1-2, (b) 1-1-1, (c) 1-2-1, (d) 1-3-1.

IV.2.4 Cinématique et équations constitutives

Le but de notre thèse est de développer une théorie quasi-3D à quatre variables qui est simplifiée par rapport à d'autres théories d'ordre élevé qui utilise cinq variables ou plus. Le champ de déplacement satisfaisant les conditions des contraintes de cisaillement transversales (et donc de déformations) qui s'annule en un point (x et $y = \pm h/2$) sur les surfaces extérieure (supérieure) et intérieure (inférieure) de la plaque. La cinématique est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) + \beta g(z) \varphi
 \end{aligned}
 \tag{IV-9}$$

Où u_0 et v_0 désignent les déplacements le long de x et y les coordonnées des directions d'un point sur le plan médian de la plaque ; w_0 est la composante de flexion du déplacement transversale, et le déplacement supplémentaire φ tient compte de l'effet de la contrainte

normale (effet d'étirement). Dans cette étude, la fonction de forme $f(z)$ est choisie comme suit :

$$f(z) = z \left(\cosh \left(\frac{z}{h} \right) - 1.388 \right) \quad (\text{IV-10})$$

Et $g(z)$ est donné comme suit :

$$g(z) = f'(z) \quad (\text{IV-11})$$

En utilisant le champ de déplacement dans l'équation (IV.9), les déformations linéaires sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \beta f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-12.a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \beta g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = \beta g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III-12.b})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ -\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ -\frac{\partial^2 (\nabla^2 w_0)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-13.a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi \quad (\text{IV-13.b})$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{IV-14})$$

Les relations constitutives contraintes - déformations d'une plaque FGM peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (IV-15)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement.

Le calcul des constantes élastiques C_{ij} dépend de l'hypothèse de déformation (ε_z) et sont considérés :

Si $\varepsilon_z = 0$ donc C_{ij} sont les constantes élastiques à contrainte plane réduite

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad (IV-16.a)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (IV-16.b)$$

Si $\varepsilon_z \neq 0$ (étirement d'épaisseur), C_{ij} sont des constantes élastiques 3D, données par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z), \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \quad (IV-17.a)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (IV-17.b)$$

Où $\lambda(z) = [\nu E(z)] / [(1-2\nu)(1+\nu)]$ et $\mu(z) = G(z) = E(z) / [2(1+\nu)] =$ Coefficients de Lamé.

Le module E et G et les coefficients élastiques C_{ij} à travers l'épaisseur, selon les équations (III.2) et (III.4).

IV.2.5 Equations directrices

Le principe de Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme suit :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV-18})$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta U \text{ variation de l'énergie de déformation} \\ \delta V \text{ variation de l'énergie potentielle} \\ \delta K \text{ variation de l'énergie cinétique} \end{array} \right.$$

La variation de l'énergie de déformation δU de la plaque est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \\ &= \int_A \left[N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_x \delta \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \beta S_x \delta \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} - M_y \delta \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \beta S_y \delta \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right. \\ &\quad + \beta N_z \delta \varphi + N_{xy} \delta \frac{\partial u_0}{\partial y} + N_{xy} \delta \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \beta S_{xy} \left(\delta \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + \delta \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \right) \\ &\quad \left. + Q_{yz} \beta \delta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q_{yz} \beta \delta \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + Q_{xz} \beta \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} - Q_{xz} \beta \delta \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

Où A est la surface supérieure et les contraintes résultantes, N, M, S, et Q sont définies par :

$$(N_i, M_i, S_i) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (l, z, f) (\sigma_i)^n dz \quad (i = x, y, xy) \quad (\text{IV-20.a})$$

$$Q_i = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_i)^n g(z) dz \quad (i = xz, yz) \quad (\text{IV-20.b})$$

$$N_z = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_z)^n g'(z) dz \quad (\text{IV-20.c})$$

La variation d'énergie potentielle des charges appliquées peut s'exprimer ainsi :

$$\delta V = - \int_A q \delta (w_0 + g(z) \varphi) dA \quad (\text{IV-21})$$

Où q est la charge transversale répartie.

La variation d'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\delta K = & \int_{-h/2A}^{h/2} \int_A [\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}] \rho(z) dA dz = \int_A \{I_0[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0] \\
& - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x} \delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y} \delta\dot{v}_0 \right) \\
& - \beta J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial^3\delta\dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\dot{w}_0}{\partial x^3} \delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial^3\delta\dot{w}_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3\dot{w}_0}{\partial y^3} \delta\dot{v}_0 \right) \\
& + I_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} \right) + \beta^2 K_2 \left(\frac{\partial^3\dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial^3\delta\dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\dot{w}_0}{\partial y^3} \frac{\partial^3\delta\dot{w}_0}{\partial y^3} \right) \\
& + \beta J_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial^3\delta\dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial^3\delta\dot{w}_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3\dot{w}_0}{\partial y^3} \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} \right) \\
& + \beta J_1^s (\dot{\phi}\delta\dot{w} + \dot{w}\delta\dot{\phi}) + \beta^2 K_2^s \dot{\phi}\delta\dot{\phi} \} dA
\end{aligned} \tag{IV-22}$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps t et ($I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^s, J_2, K_2, K_2^s$) = inerties de masse définies comme suit :

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^s, J_2, K_2, K_2^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (I, z, z^2, f, g, zf, f^2, g^2) \rho(z) dz \tag{IV-23}$$

On Remplace les expressions par $\delta U, \delta V$ et δK à partir des équations. (IV-19), (IV-21) et (IV-22) dans l'équation. (IV-18), en intégrant par parties, et en collectant les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \phi$ les équations suivantes du mouvement de la plaque sont obtenues :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial y^3} \\
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \beta \left[\frac{\partial^4 S_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 S_y}{\partial y^4} + \left(\frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial x \partial y^3} \right) - \frac{\partial^3 Q_{yz}}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 Q_{xz}}{\partial x^3} \right] + q = \\
& I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left[\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right] - I_2 \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right] + \beta J_1 \left[\frac{\partial^3 \ddot{u}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \ddot{v}_0}{\partial y^3} \right] \\
& - 2\beta J_2 \left[\left(\frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} \right) + \left(\frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial y^4} \right) \right] - \beta^2 K_2 \left[\frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial y^6} \right] + \beta J_1^s \ddot{\phi} \\
\delta \phi : \beta \left[\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - N_z \right] &= \beta^2 K_2^s \ddot{\phi} + \beta J_1^s \ddot{w}_0
\end{aligned} \tag{IV-24}$$

En remplaçant l'équation. (IV-12) et (IV-13) dans l'équation. (IV-15) et les résultats ultérieurs dans l'équation. (III-20), les résultantes de contrainte sont obtenues comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{ccccccccc} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & \beta B_{11}^s & \beta B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & \beta B_{12}^s & \beta B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & \beta D_{11}^s & \beta D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & \beta D_{12}^s & \beta D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & \beta D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & \beta H_{11}^s & \beta H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & \beta H_{12}^s & \beta H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & \beta H_{66}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \beta L \\ \beta L \\ 0 \\ \beta L^a \\ \beta L^a \\ 0 \\ \beta R \\ \beta R \\ 0 \end{array} \right\} \varphi \quad (IV-25.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{array} \right\} = \beta \left[\begin{array}{cc} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{array} \right\} \quad (IV-25.b)$$

$$N_z = L\gamma_{xy}^0 + L^a(k_x + k_y) + \beta R(\eta_x + \eta_y) + \beta R^a\varphi_z \quad (IV-25.c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \lambda(z) \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{array} \right\} g'(z) dz$$

Où les coefficients de rigidité A_{ij} et B_{ij}, \dots , etc., sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \lambda(z) \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{array} \right\} dz \quad (IV-26.a)$$

Et

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (IV-26.b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \mu(z) [g(z)]^2 dz \quad (IV-26.c)$$

En remplaçant l'équation (IV-25) en équation (IV-24), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \varphi$) comme le montre l'équation (27)

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 \\ & - \beta(B_{66}^s d_{11122}w_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s)d_{12222}w_0 + B_{11}^s d_{11111}w_0) + Ld_1\varphi \\ & = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_0 + \beta J_1d_{111}\ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (IV-27a)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 \\ & - \beta(B_{66}^s d_{11222}w_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s)d_{11112}w_0 + B_{22}^s d_{22222}w_0) + Ld_2\varphi \\ & = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_0 + \beta J_1d_{222}\ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (IV-27b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11}d_{11}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 \\ & - D_{11}d_{11111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 \\ & + \beta[B_{11}^s d_{11111}u_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s)d_{12222}u_0 + (B_{12}^s + B_{66}^s)d_{11112}v_0 \\ & + B_{22}^s d_{22222}v_0 + B_{66}^s(d_{11122}u_0 + d_{11222}v_0) - 2D_{11}^s d_{11111}w_0 \\ & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{11222}w_0 - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{11112}w_0 - 2D_{22}^s d_{22222}w_0] \\ & - \beta^2[H_{11}^s d_{1111111}w_0 + 2(H_{12}^s + H_{66}^s)d_{1111222}w_0 + H_{66}^s(d_{1111112}w_0 + d_{1122222}w_0) \\ & + H_{22}^s d_{2222222}w_0 - A_{44}^s d_{22222}w_0 - A_{55}^s d_{11111}w_0] + \beta[R(d_{111}\varphi + d_{222}\varphi)] \\ & - A_{44}^s d_{222}\varphi - A_{55}^s d_{111}\varphi + L^a(d_{11}\varphi + d_{22}\varphi) + q = I_0\ddot{w}_0 + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) \\ & - I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) + \beta J_1(d_{111}\ddot{u}_0 + d_{222}\ddot{v}_0) - 2\beta J_2[d_{111}\ddot{w}_0 + d_{222}\ddot{w}_0] \\ & - \beta^2 K_2[d_{11111}\ddot{w}_0 + d_{22222}\ddot{w}_0] + J_1^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (IV-27c)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi : & -\beta L(d_{11}u_0 + d_{22}v_0) + L^a\beta(d_{11}w_0 + d_{22}w_0) + \beta^2(R - A_{55}^s)d_{111}w_0 \\ & + \beta^2(R - A_{44}^s)d_{222}w_0 + \beta^2(A_{55}^s d_{11}\varphi - R^a\varphi + A_{44}^s d_{22}\varphi) \\ & = J_1^s \ddot{w}_0 + K_2^s \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (IV-27d)$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, & d_{ijl} &= \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, & d_{ijlm} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \\ d_i &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, & (i, j, l, m &= 1, 2) \end{aligned} \quad (IV-28)$$

IV.3 Solution adoptée pour une plaque FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type d'appuis utilisé. Ici, nous nous intéressons aux solutions des équations. (27a)– (27d) pour une plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords latéraux :

$$N_x = v_0 = w_0 = \varphi = M_x = S_x = Q_{yz} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (IV-29.a)$$

$$(IV-29.b)$$

$$N_y = u_0 = w_0 = \varphi = M_y = S_y = Q_{xz} = 0 \quad \text{at } x=0, b$$

Et après nous utilisons la solution Navier, nous supposons la forme de solution suivante pour u_0, v_0, w_0 et φ qui satisfait les conditions aux limites données dans les équations. (IV-29a), (IV-29b)

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{cases} \quad (\text{IV-30})$$

Où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et Φ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer ; ω fréquence propre associée au (m,n) mode propre et $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$

La charge transversale q est également étendue dans la série Fourier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(\mu_n y) \quad (\text{IV-31})$$

Dans le cas d'une charge répartie sinusoidalement :

$$m = n = 1 \text{ et } q_{11} = q_0 \quad (\text{IV-32})$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie (UDL) :

$$q_{11} = \frac{16q_0 ab}{\lambda \mu}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (\text{IV-33})$$

Substitution l'équation (III-30) et (III-31) dans l'équation. (III-27), les solutions analytiques peuvent être obtenues :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{cases} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{IV-34})$$

Les éléments du système matriciel de l'éq. (34) sont :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\
a_{12} &= (A_{12} + A_{66})\lambda\mu \\
a_{13} &= \beta \left[\lambda^3 (B_{11}^s \lambda^2 + B_{66} \mu^2) + \lambda \mu^4 (B_{12}^s + B_{66}^s) \right] - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 - B_{11}\lambda^3 \\
a_{14} &= -\beta L \lambda \\
a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\
a_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (2B_{66} + B_{12})\lambda^2 \mu + \beta (B_{12}^s + B_{66}^s)\lambda^4 \mu + \beta (B_{66}^s \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2)\mu^3 \\
a_{24} &= -\beta L \mu \\
a_{33} &= \lambda^2 (D_{11}\lambda^2 + 4D_{66}\mu^2) + \tilde{n}^2 (2D_{12}\lambda^2 + D_{22}\mu^2) + \beta^2 \mu^6 (H_{66}^s \lambda^2 + H_{22}^s \mu^2) \\
&\quad + \beta^2 \lambda^4 \mu^4 (H_{12}^s + 2H_{66}^s + H_{12}^s) + \beta^2 (A_{55}^s \lambda^6 + A_{44}^s \mu^6) + \beta^2 \lambda^6 (H_{11}^s \lambda^2 + H_{66}^s \mu^2) \\
&\quad - 4\beta \lambda^2 \mu^2 (D_{66}^s \lambda^2 + D_{66}^s \mu^2) - 2\beta \lambda^2 (D_{11}^s \lambda^4 + D_{12}^s \mu^4) - 2\beta \mu^2 (D_{12}^s \lambda^4 + D_{22}^s \mu^4) \\
a_{34} &= \beta L^a (\lambda^2 + \mu^2) - \beta^2 R (\lambda^4 + \mu^4) + \beta^2 (A_{55}^s \lambda^4 + A_{44}^s \mu^4) \\
a_{44} &= \beta^2 (R^a + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2) \\
\\
m_{11} &= m_{22} = I_0 \\
m_{13} &= -\lambda (I_1 + \beta J_1 \lambda^2) \\
m_{23} &= -\mu (I_1 + \beta J_1 \mu^2) \\
m_{33} &= I_0 + \beta^2 K_2 \lambda^6 + \beta^2 K_2 \mu^6 - 2\beta J_2 \lambda^4 - 2\beta J_2 \mu^4 + I_2 \lambda^2 + I_2 \mu^2 \\
m_{34} &= \beta J_1^s \\
m_{44} &= \beta^2 K_2^s
\end{aligned} \tag{IV-35}$$

IV.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution analytique en utilisant la théorie d'ordre élevé quasi 3D. Le nombre de variable dans la présente théorie est seulement quatre. La théorie présentée une forte similitude avec la théorie classique et n'exigeant pas de facteurs de correction de cisaillement. En utilisant le principe d'Hamilton ; les équations générales du mouvement sont déterminées. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques des plaques sandwich en appliquant les conditions aux limites simplement appuyées.

Les solutions analytiques obtenues dans ce présent chapitre seront exploitées dans le chapitre suivant et permettront d'apprécier clairement l'apport de cette théorie tout en comparant nos résultats avec ceux de d'autres théories. Les résultats numériques présentés dans le chapitre suivant sont fournis pour les plaques fonctionnellement graduées.

CHAPITRE V

Résultats et discussions

V.1. Introduction :

Pour faire une comparaison entre les différentes théories ; un code de calcul a été développé pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques sandwich.

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie à quatre variables ou des comparaisons seront faites avec les différentes théories disponibles dans la littérature. Nous considérons une fonction de gauchissement $f(z)$ qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transversale, et d'autre part d'en approcher une forme de distribution optimale suivant l'épaisseur.

V.2. Résultats numériques et discussion :

Pour illustrer l'approche proposée, un nouveau type de plaques sandwich FGM épaisses et moyennement épaisses à savoir des variations des faces FGM ou l'âme en FGM qui sont utilisés pour prédire les réponses de flexion et de vibration libre des plaques sandwich fonctionnellement gradués simplement appuyées. Les valeurs adimensionnelles utilisées pour présenter les résultats numériques sont comme suit:

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, \bar{z}\right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \bar{\omega} = \omega \frac{b^2}{h} \sqrt{\rho_0/E_0}$$

Où les valeurs de référence sont prises comme $\rho_0 = 1Kg/m^3, E_0 = 1GPa$

V.2.1 Analyse de la flexion :

Les matériaux choisis dans notre thèse sont l'aluminium et le zircon. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont donnés par (Neves et al. 2012c, Bessaim et al. 2013) : pour l'aluminium : 70 GPa et pour le Zircon : 151 GPa, 0,3 respectivement.

V.2.1.1 Plaque sandwich avec les faces FGM et l'âme homogène (type A):

Dans cet exemple, les déformations et les contraintes d'une plaque sandwich carrée simplement appuyées avec les facettes de surface FGM et une âme homogène sont présentés et comparés aux solutions existantes pour vérifier la précision de la présente théorie. Il peut être considéré comme un cas particulier de la présente théorie où $k = 0$.

Les résultats numériques sont donnés dans les tableaux (V-1 à V-3) en utilisant la présente théorie raffinée des plaques à quatre variables. La flèche adimensionnelle \bar{w} , la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ et la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ obtenus à partir de la théorie actuelle avec $\varepsilon_z \neq 0$ avec un rapport hauteur/largeur $a/h = 10$ sont mis en tableau et comparés à la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdal, hyperbolique et quasi-3D (Bessaim et al. 2013) pour divers exposants de la loi de puissance (Pas de facteur de correction de cisaillement) et la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D (Neves et al. 2012c). Par conséquent, on peut conclure que la présente théorie quasi-3D est plus précise que la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé ayant plus d'inconnues.

Tableau V-1 : Flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich FGM carrée avec des faces en FGM et une âme homogène soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

p	Théories	\bar{w}				
		2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.194858	0.194858	0.194858	0.194858	0.194858
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949	0.1949
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	FSDT	0.196071	0.196071	0.196071	0.196071	0.196071
	CPT	0.185604	0.185604	0.185604	0.185604	0.185604
0.5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.261424	0.255979	0.252954	0.246535	0.240702
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.26144	0.25599	0.25296	0.24655	0.24072
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2650	0.2597	0.2566	0.2503	0.2444
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2667	0.2614	0.2583	0.2519	0.2460
	FSDT	0.263842	0.258364	0.255227	0.248750	0.242727
	CPT	0.251628	0.246276	0.243343	0.237024	0.231232
1	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.304295	0.294473	0.290052	0.278738	0.269133
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.30430	0.29448	0.29007	0.27874	0.26915
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.3070	0.2975	0.2929	0.2820	0.2722
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.3090	0.2995	0.2949	0.2838	0.2740
	FSDT	0.307497	0.297714	0.293008	0.281676	0.271665
	CPT	0.294170	0.284610	0.280261	0.269201	0.259576
2	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.350000	0.334953	0.330666	0.313552	0.300580
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.35001	0.33495	0.33068	0.31356	0.30060
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.3519	0.3376	0.3329	0.3164	0.3032
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.3542	0.3399	0.3351	0.3186	0.3053
	FSDT	0.354080	0.339187	0.334410	0.317376	0.303701
	CPT	0.339418	0.324883	0.320665	0.304049	0.290954
5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.389322	0.369814	0.369013	0.346490	0.332533
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.38934	0.36981	0.36902	0.34649	0.33255
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.3905	0.3722	0.3705	0.3490	0.3347
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.3930	0.3746	0.3729	0.3514	0.3370
	FSDT	0.394180	0.374849	0.373564	0.351233	0.336308
	CPT	0.377885	0.359102	0.358652	0.336928	0.322827
10	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.401529	0.381113	0.383018	0.358848	0.345892
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.40153	0.38111	0.38303	0.35885	0.34591
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.4026	0.3835	0.3843	0.3612	0.3480
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.4051	0.3861	0.3868	0.3637	0.3503
	FSDT	0.406571	0.386262	0.387872	0.363918	0.349960
	CPT	0.389408	0.369758	0.372362	0.349120	0.336117

Tableau V-2 : Contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque sandwich FGM carrée avec faces en FGM et une âme homogène soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

p	Théories	$\bar{\sigma}_x$				
		2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	1.988191	1.988191	1.988191	1.988191	1.988191
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	2.0066	2.0064	2.0066	2.0065	2.0064
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	1.9947	1.9945	1.9947	1.9946	1.9946
	FSDT	1.975763	1.975763	1.975763	1.975763	1.975763
	CPT	1.975763	1.975763	1.975763	1.975763	1.975763
0.5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	1.246381	1.182602	1.205500	1.141825	1.145906
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.25129	1.18741	1.21028	1.14646	1.15045
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.2757	1.2153	1.2351	1.1743	1.1759
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	1.2690	1.2088	1.2285	1.1679	1.1694
	FSDT	1.241732	1.180814	1.200848	1.139680	1.141084
	CPT	1.241732	1.180814	1.200848	1.139680	1.141084
1	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	1.455450	1.344800	1.386770	1.277279	1.284990
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.46131	1.35053	1.39243	1.28274	1.29030
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.4813	1.3768	1.4137	1.3092	1.3133
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	1.4742	1.3700	1.4067	1.3026	1.3064
	FSDT	1.451669	1.345550	1.383034	1.277494	1.280958
	CPT	1.451669	1.345550	1.383034	1.277494	1.280958
2	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	1.678052	1.514441	1.585210	1.422625	1.438890
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.68472	1.52101	1.59170	1.42887	1.44497
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.6994	1.5456	1.6088	1.4543	1.4659
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	1.6920	1.5386	1.6017	1.4476	1.4588
	FSDT	1.674960	1.517538	1.582419	1.425275	1.435800
	CPT	1.674959	1.517538	1.582419	1.425275	1.435800
5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	1.868099	1.661446	1.772197	1.559438	1.595322
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.87516	1.66856	1.77919	1.56627	1.60203
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.8838	1.6909	1.7906	1.5893	1.6195
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	1.8761	1.6836	1.7833	1.5826	1.6123
	FSDT	1.864789	1.665697	1.769879	1.564011	1.593087
	CPT	1.864789	1.665697	1.769879	1.564011	1.593087
10	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	1.925584	1.711097	1.839975	1.610908	1.660659
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.93266	1.71835	1.84705	1.61792	1.66754
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	1.9397	1.7405	1.8559	1.6395	1.6832
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	1.9316	1.7328	1.8485	1.6327	1.6761
	FSDT	1.921650	1.715077	1.837535	1.615951	1.658672
	CPT	1.921650	1.715077	1.837535	1.615951	1.658672

Tableau V-3: Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque sandwich FGM carrée avec faces en FGM et une âme homogène soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

p	Théories	$\bar{\tau}_{xz}$				
		2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.237530	0.237530	0.237530	0.237530	0.237530
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2538	0.2291	0.2461	0.2411	0.2363
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2538	0.2284	0.2459	0.2407	0.2358
	FSDT	0.190986	0.190986	0.190986	0.190986	0.190986
0.5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.256915	0.256689	0.251401	0.250377	0.246380
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.25729	0.25709	0.25178	0.25078	0.24679
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2694	0.2498	0.2595	0.2542	0.2461
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2693	0.2489	0.2593	0.2537	0.2455
	FSDT	0.222866	0.220565	0.216834	0.213938	0.209737
1	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.270156	0.269793	0.260245	0.258528	0.251577
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.27050	0.27017	0.26060	0.25890	0.25196
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2745	0.2640	0.2643	0.2594	0.2496
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2744	0.2630	0.2640	0.2590	0.2489
	FSDT	0.243161	0.239079	0.232572	0.227615	0.220565
2	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.287628	0.287069	0.271073	0.268481	0.257396
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.28792	0.28742	0.27138	0.26885	0.25776
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2760	0.2877	0.2668	0.2636	0.2523
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2758	0.2866	0.2664	0.2632	0.2515
	FSDT	0.267522	0.260985	0.250773	0.243161	0.232572
5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.313952	0.312576	0.285796	0.281834	0.264293
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.31419	0.31293	0.28606	0.28217	0.26463
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2712	0.3377	0.2655	0.2669	0.2546
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2710	0.3367	0.2651	0.2666	0.2538
	FSDT	0.297308	0.287311	0.272065	0.260985	0.245961
10	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.331858	0.329207	0.295116	0.290048	0.268183
	Bessaim et al. (2013)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.33210	0.32959	0.29534	0.29036	0.26850
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z \neq 0$)	0.2671	0.3806	0.2639	0.2692	0.2568
	Neves et al. (2012c)($\varepsilon_z = 0$)	0.2669	0.3795	0.2635	0.2690	0.2559
	FSDT	0.313157	0.301118	0.282986	0.269981	0.252570

V.2.1.2 Plaque sandwich à faces homogènes et une âme FGM (type B):

Comme cas particulier de la présente théorie où $p = 0$, une plaque sandwich carrée simplement appuyées avec des faces homogènes et une âme FGM est considérée. Les tableaux (V-4 a V-6) contiennent des éléments transversaux adimensionnelles : la flèche \bar{w} contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ et contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$. L'analyse de flexion est effectuée pour des divers rapports d'épaisseur de couche de (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1). Le tableau V-4 présente la flèche adimensionnelle \bar{w} pour des plaques sandwich avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une sollicitation mécanique sinusoïdale. On peut voir sur ce tableau qu'avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k , la flèche adimensionnelle augmente légèrement. Les flèches adimensionnelles obtenues par la présente théorie sont plus petites que celles calculées par la FSDT et plus grandes que celles calculées par la CPT.

On peut voir sur ce tableau qu'avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k , la flèche adimensionnelle \bar{w} , contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ et contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ augmente légèrement.

Tableau V-4 : Flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich carrée FGM avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

k	Théories	\bar{w}			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.194858	0.194858	0.194858	0.194858
	FSDT	0.196071	0.196071	0.196071	0.196071
	CPT	0.185604	0.185604	0.185604	0.185603
0.5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.195704	0.196628	0.198519	0.200198
	FSDT	0.196573	0.197263	0.198894	0.200453
	CPT	0.185717	0.186132	0.187399	0.188727
1	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.196192	0.197750	0.201043	0.204020
	FSDT	0.196864	0.198025	0.200857	0.203615
	CPT	0.185803	0.186530	0.188768	0.191140
2	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.196741	0.199109	0.204310	0.209126
	FSDT	0.197197	0.198975	0.203466	0.207951
	CPT	0.185923	0.187090	0.190719	0.194624
5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.197639	0.200819	0.208755	0.216338
	FSDT	0.197598	0.200238	0.207203	0.214398
	CPT	0.186103	0.187937	0.193722	0.200094
10	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.197705	0.201782	0.211387	0.220760
	FSDT	0.197817	0.200983	0.209540	0.218562
	CPT	0.186218	0.188484	0.195697	0.203765

Le tableau V-5 représente les valeurs de contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque sandwich carrée avec des faces homogènes et une âme FGM. On peut déduire dans ce tableau que la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ augmente légèrement avec l'augmentation de l'indice k . Les contraintes axiales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ obtenues par la présente théorie sont plus grandes que celles calculées par FSDPT.

Tableau V-5 : Contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque sandwich carrée FGM avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

k	Théories	$\bar{\sigma}_x$			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.988191	1.988191	1.988191	1.988191
	FSDT	1.975763	1.975763	1.975763	1.975763
	CPT	1.975763	1.975763	1.975763	1.975763
0.5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.991123	1.996703	2.011548	2.026402
	FSDT	1.976975	1.981387	1.994872	2.009017
	CPT	1.976975	1.981387	1.994872	2.009017
1	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.992976	2.002608	2.028683	2.055114
	FSDT	1.977885	1.985625	2.009448	2.034702
	CPT	1.977885	1.985625	2.009448	2.034702
2	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.995252	2.010390	2.052280	2.095513
	FSDT	1.979160	1.991590	2.030216	2.071784
	CPT	1.979160	1.991590	2.030216	2.071784
5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.998222	2.021340	2.087173	2.156979
	FSDT	1.981077	2.000605	2.062185	2.130013
	CPT	1.981077	2.000605	2.062185	2.130013
10	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.999944	2.028053	2.109433	2.197258
	FSDT	1.982307	2.006427	2.083214	2.169092
	CPT	1.982307	2.006427	2.083214	2.169092

Le tableau V-6 représente les valeurs de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ d'une plaque sandwich carrée avec des faces homogènes et une âme FGM. On peut déduire dans ce tableau que la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ augmente légèrement avec l'augmentation de l'indice k entre 0,5 et 10 mais pour k=0 la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ est la plus grande valeur. Les contraintes de cisaillement transversales adimensionnelles $\bar{\tau}_{xz}$ obtenues par la présente théorie sont plus grandes que celles calculées par FSDT.

Tableau V-6 : Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque sandwich carrée FG avec des faces homogènes et une âme FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

k	Théorie	$\bar{\tau}_{xz}$			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	Présent ($\epsilon_z \neq 0$)	0.237530	0.237530	0.237530	0.237530
	FSDT	0.190986	0.190986	0.190986	0.190986
0.5	Present ($\epsilon_z \neq 0$)	0.117831	0.123267	0.130048	0.133951
	FSDT	0.091820	0.094148	0.097229	0.099177
1	Present ($\epsilon_z \neq 0$)	0.122083	0.130955	0.142464	0.149251
	FSDT	0.093555	0.097229	0.102249	0.105517
2	Present ($\epsilon_z \neq 0$)	0.126617	0.139474	0.156738	0.167070
	FSDT	0.095357	0.100519	0.107815	0.112724
5	Present ($\epsilon_z \neq 0$)	0.131432	0.148799	0.172595	0.186649
	FSDT	0.097229	0.104039	0.114021	0.120987
10	Present ($\epsilon_z \neq 0$)	0.133706	0.153240	0.179974	0.195360
	FSDT	0.098105	0.105722	0.117085	0.125157

La figure V-1 montre l'effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques sandwich (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) à faces homogènes et une âme FGM

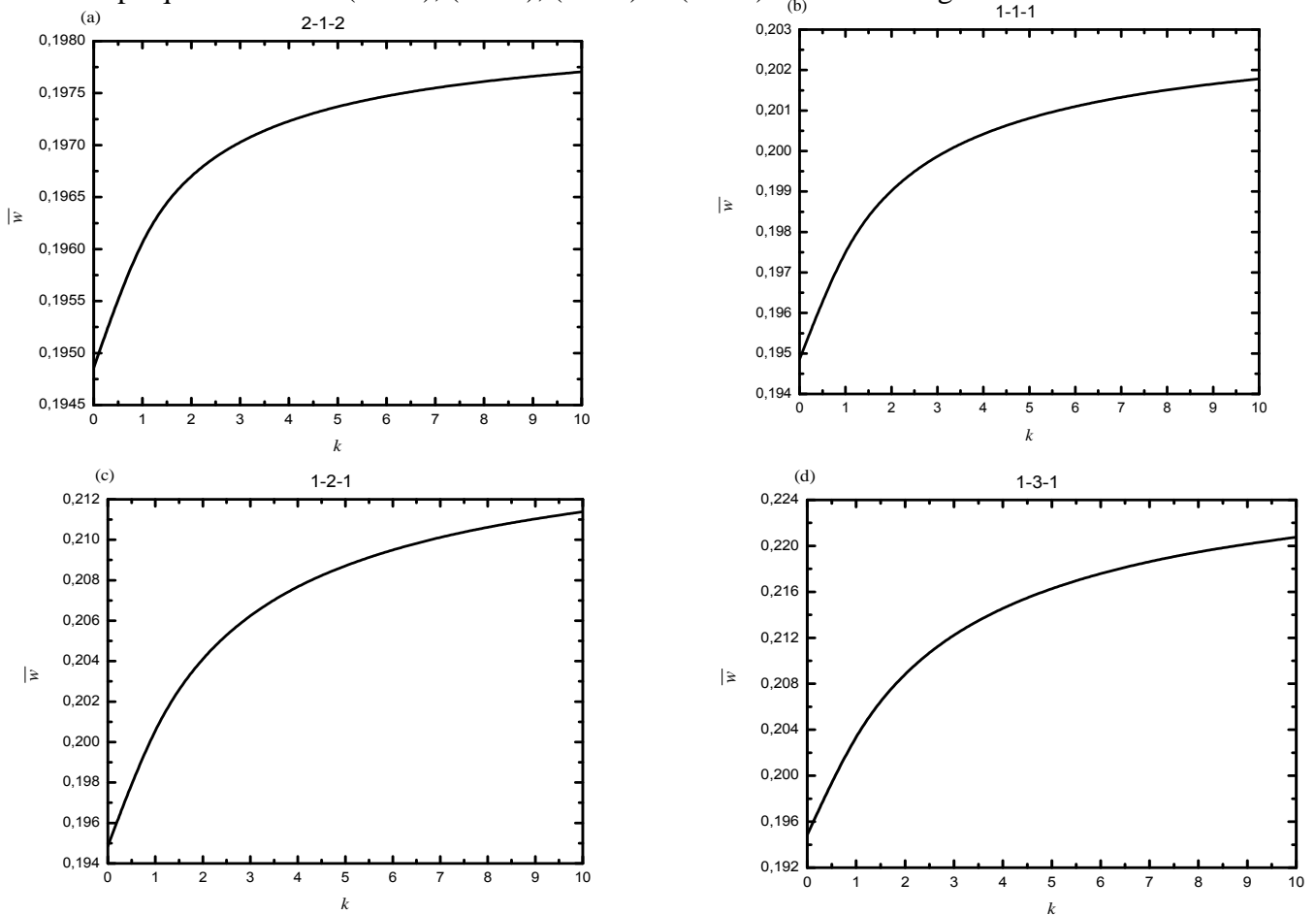


Figure V-1 : Effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} de plaques sandwich à faces homogènes et une âme FGM : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

Nous pouvons voir sur la figure V-1 que lorsque le paramètre d'inhomogénéité k augmente la flèche adimensionnelle \bar{w} augmente parce que l'âme de la plaque devient plus métallique, donc la rigidité diminue. Ces quatre courbes correspondant aux quatre configurations (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1) et montrent la même tendance.

La figure V-2 montre la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport a/b pour la plaque sandwich (1-2-1) à faces homogènes et une âme FGM

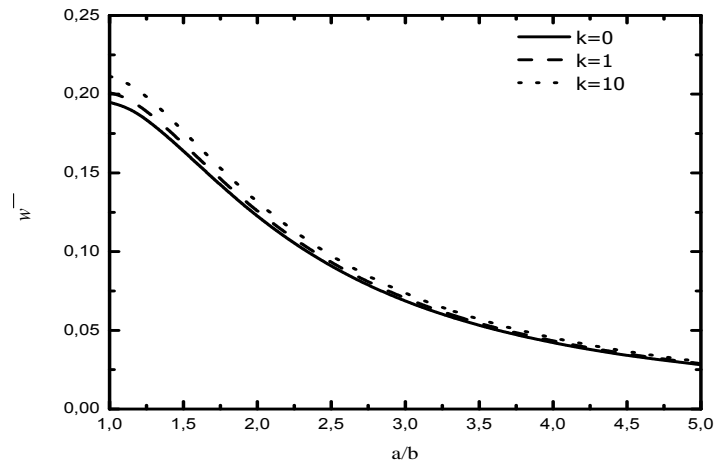


Figure V-2 :Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport a/b de la plaque sandwich (1-2-1) à faces homogènes et une âme FGM

On a constaté d'après cette figure qu'avec l'augmentation du rapport a/b la flèche adimensionnelle \bar{w} diminue parce que la plaque devient flexible et lorsque k augmente, la flèche adimensionnelle \bar{w} augmente ce qui montre que l'âme de la plaque devient moins rigide.

La figure V-3 représente l'effet du rapport a/h sur la flèche adimensionnelle \bar{w} pour la plaque sandwich (1-2-1) FGM avec des faces homogènes et une âme FGM

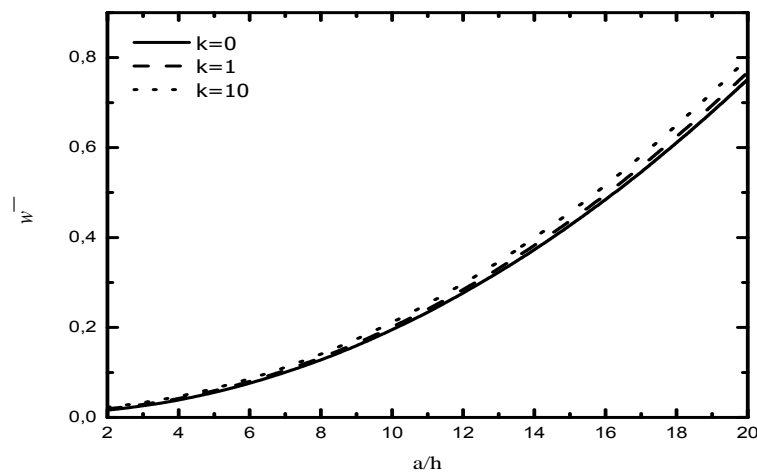


Figure V-3 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport a/h de la plaque sandwich (1-2-1) avec des faces homogènes et une âme FGM

On remarque, lorsque a/h augmente la flèche adimensionnelle \bar{w} augmente parce que la plaque sandwich devient mince et flexible. Nous pouvons conclure à nouveau que la flèche adimensionnelle \bar{w} est en relation et en corrélation directe avec le paramètre d'inhomogénéité k .

La figure V-4 compare les distributions de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ dans l'épaisseur des plaques sandwich FGM (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) pour $k = 0, 0,5, 2$ et 10 .

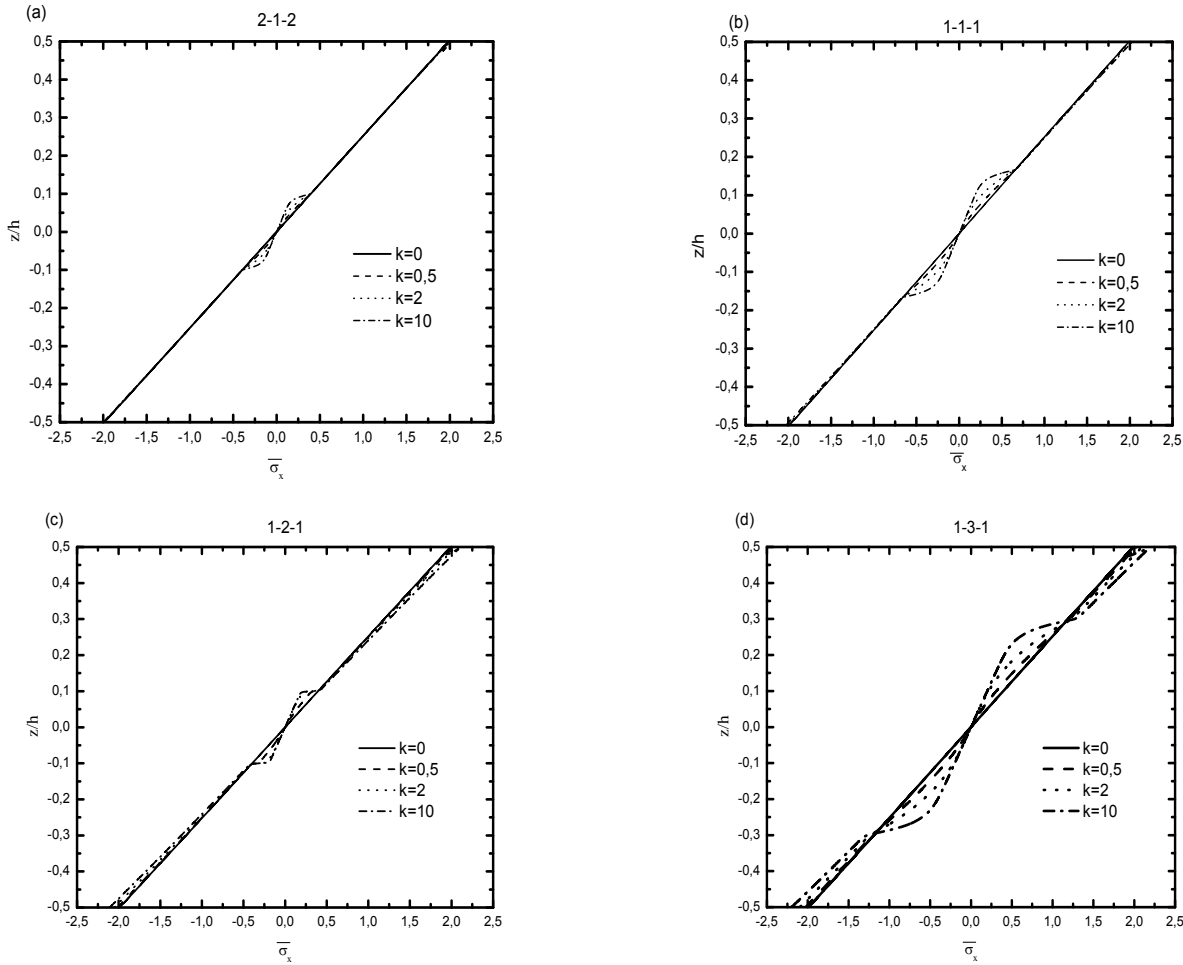


Figure V-4 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich à faces homogènes et une âme FGM : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

D'après ces figures, la contrainte normale est continue à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi les graphiques montrent une variation non linéaire de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque sandwich. La contrainte de traction maximale se produit sur la feuille de face inférieure tandis que la contrainte de compression minimale se produit sur la facette supérieure. Lorsque l'épaisseur de l'âme augmente l'influence du paramètre d'inhomogénéité k devient plus significative.

Il ressort des résultats obtenus que les valeurs les plus élevées de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ sont obtenus pour une plaque sandwich FGM 1-3-1 car l'épaisseur de l'âme est trois fois supérieure à celle de l'épaisseur des facettes.

V.2.1.3 Analyse de flexion d'une plaque sandwich avec des feuilles de face FGM et un noyau FGM :

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée simplement appuyées avec des facettes en FGM et une âme FGM sous des charges de flexion est considérée.

Le tableau V-7 présente la flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich avec des faces FGM et une âme FGM pour différentes valeurs de $p = \{0, 0,5, 1, 2, 5, 10\}$ et différents rapports d'épaisseur de couche $\{2-1-2, 1-1-1, 1- 2-1, 1-3-1\}$. La plaque est soumise à une charge mécanique sinusoïdale. Le paramètre d'inhomogénéité k est fixé à 1.

Tableau V-7: Flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich FGM carrée avec des facettes en FGM et une âme FGM soumis à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

p	Théories	\bar{w}			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.196192	0.197750	0.201043	0.204020
	FSDT	0.198025	0.198025	0.200857	0.203615
	CPT	0.186530	0.186530	0.188768	0.191140
0.5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.263126	0.256760	0.248885	0.244368
	FSDT	0.258165	0.258165	0.249645	0.244759
	CPT	0.244938	0.244938	0.236164	0.231122
1	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.306279	0.294549	0.278756	0.268927
	FSDT	0.296683	0.296683	0.280112	0.269807
	CPT	0.282379	0.282379	0.265808	0.255503
2	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.352362	0.336038	0.311987	0.296133
	FSDT	0.339013	0.339013	0.314041	0.297582
	CPT	0.323441	0.323441	0.298806	0.282543
5	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.392194	0.375408	0.345992	0.324616
	FSDT	0.379216	0.379216	0.348817	0.326711
	CPT	0.362128	0.362128	0.332522	0.310858
10	Présente($\varepsilon_z \neq 0$)	0.404714	0.389905	0.360304	0.337202
	FSDT	0.393989	0.393989	0.363468	0.339602
	CPT	0.376110	0.376110	0.346640	0.323349

On peut voir à partir de ce tableau qu'avec l'augmentation de l'indice P , la flèche adimensionnelle augmente. Les flèches adimensionnelles obtenues par la présente théorie sont plus petites que celles calculées en utilisant le FSDPT.

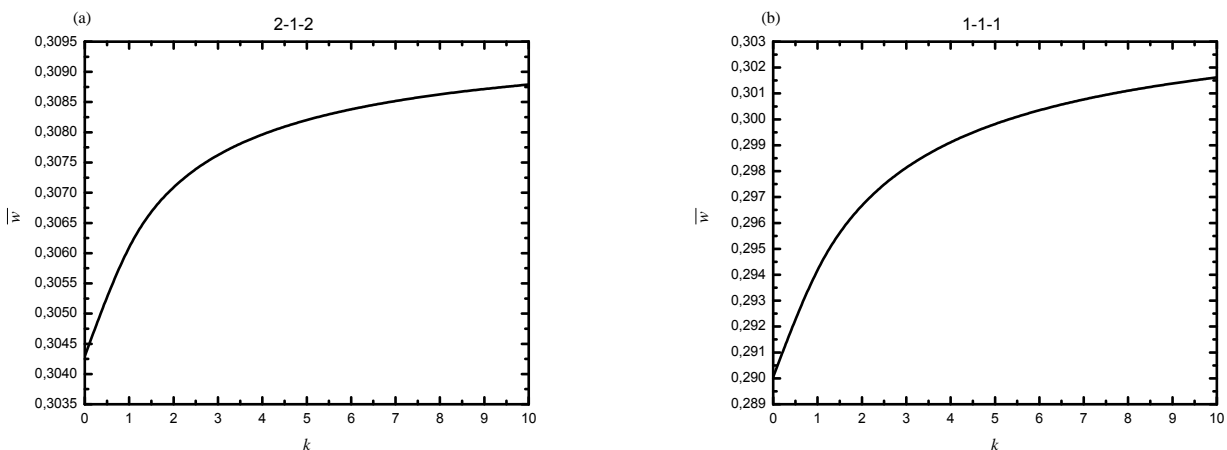
Le tableau V-8 présente la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich pour $p = \{0, 0,5, 1, 2, 5\}$ et divers rapports d'épaisseur de couche : 2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1

Tableau V- 8 : Contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque sandwich FGM carrée avec des tôles de surface FGM et une âme FGM soumis à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

p	Théories	$\bar{\sigma}_x$			
		2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
0	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.992976	2.002608	2.028683	2.055114
	FSDT	1.977885	1.985625	2.009448	2.034702
	CPT	1.977885	1.985625	2.009448	2.034702
0.5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.249769	1.215963	1.173949	1.149778
	FSDT	1.243541	1.208719	1.165423	1.140539
	CPT	1.243541	1.208719	1.165423	1.140539
1	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.459710	1.400080	1.319727	1.269727
	FSDT	1.454142	1.393485	1.311710	1.260857
	CPT	1.454142	1.393485	1.311710	1.260857
2	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.683366	1.602035	1.481883	1.402615
	FSDT	1.678252	1.596116	1.474548	1.394294
	CPT	1.678252	1.596116	1.474548	1.394294
5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.874525	1.792774	1.647636	1.541706
	FSDT	1.868871	1.787031	1.640931	1.534021
	CPT	1.868871	1.787031	1.640931	1.534021
10	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.932505	1.862081	1.717163	1.603096
	FSDT	1.925985	1.856030	1.710602	1.595661
	CPT	1.925985	1.856030	1.710602	1.595661

On a constaté dans ce tableau que pour le cas de $p \geq 0.5$ la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ augmente avec l'augmentation de l'indice P.

La figure V-5 représente l'effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques sandwich (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) avec des faces FGM et une âme FGM ($p = 1$)



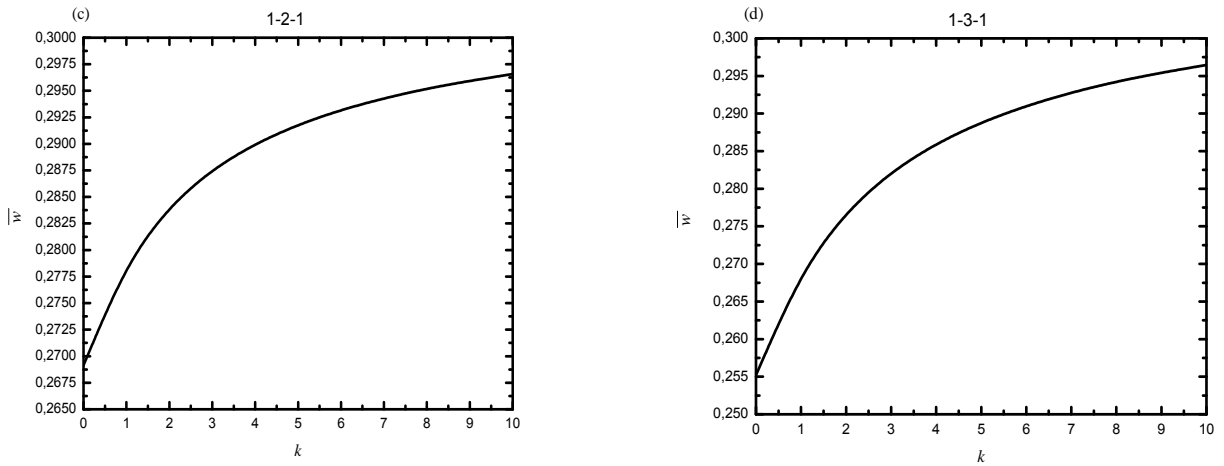
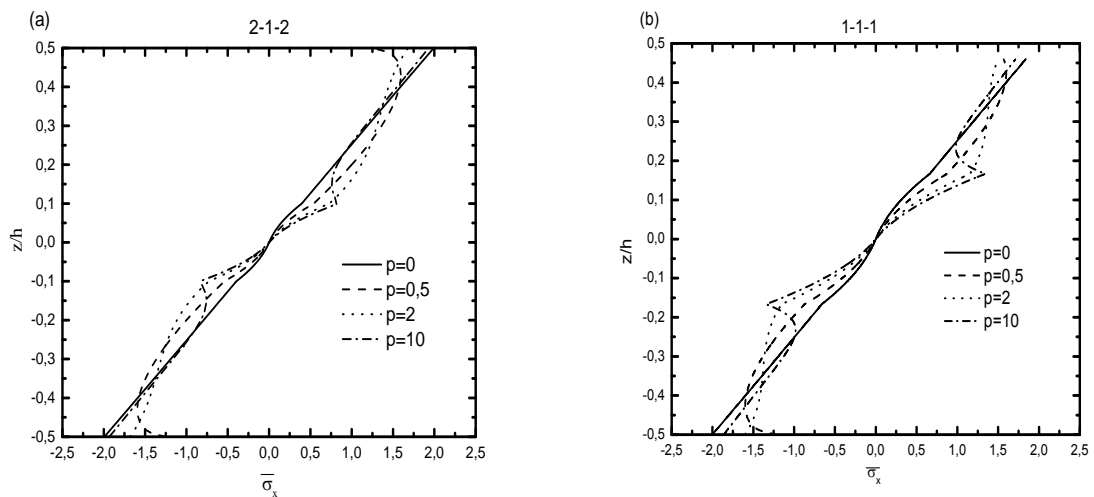


Figure V-5 : Effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques sandwich avec des faces FGM et une âme FGM : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

On peut voir que lorsque le paramètre d'inhomogénéité k augmente la flèche adimensionnelle \bar{w} augmente. Ces quatre courbes montrent la même tendance.

La figure V-6 représente des tracés de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich FGM (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) pour $p = 0, 0.5, 2$ et 10 ($k = 1$)



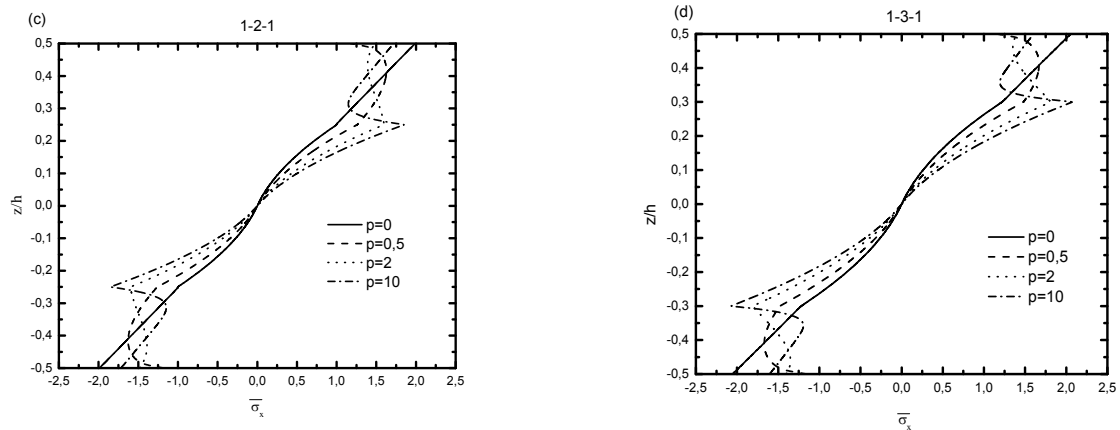


Figure V-6 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich avec les faces de surface FGM et une âme FGM : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2 -1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

On peut remarquer que la contrainte normale est continue sur toute l'épaisseur de la plaque mais n'est pas adjacente aux interfaces. Les résultats démontrent une variation non linéaire de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque sandwich. La contrainte de traction maximale se produit sur la fibre de la face inférieure tandis que la contrainte de compression minimale se produit sur la fibre de la face supérieure.

V.2.2 Analyse vibratoire:

La plaque FGM est considérée en aluminium et en alumine. Le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson sont donnés par (Bessaim et al. 2013) : pour l'aluminium : 70 GPa, 2 707 kg/m³, 0,3, et pour l'alumine : 380 GPa, 3 800 kg/m³, 0,3, respectivement.

V.2.2.1 Plaque sandwich avec faces FGM et âme homogène (type A)

Les résultats calculés par la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevé sont comparés à ceux obtenus en utilisant la théorie linéaire 3D et la théorie de Li et al. (2008). Les comparaisons sont données dans le tableau (V- 9) sur la base d'une plaque sandwich avec des tôles de surface FGM et une âme homogène (Type A).

Tableau V-9 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec faces FGM et âme homogène (Type A)

b/h	p	Théories	$\bar{\omega}$							
			1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1	
5	0	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.67844	1.67844	1.67844	1.67844	1.67844	1.67844	1.67844	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.67724	1.67724	-	1.67724	1.67724	1.67724	1.67724	
		Li et al. (2008) (3D)	1.67711	1.67711	-	1.67711	1.67711	1.67711	1.67711	
		FSDT	1.66974	1.66974	1.66974	1.66974	1.66974	1.66974	1.66974	
	0.5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.35471	1.39159	1.41121	1.42279	1.44715	1.47054	1.58324	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.35379	1.39065	-	1.42181	1.44614	1.46952	1.58210	
		Li et al. (2008) (3D)	1.35358	1.39053	-	1.42178	1.44535	1.46940	1.58186	
		FSDT	1.33953	1.37643	1.39600	1.40814	1.43257	1.45715	1.57322	
	1	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.17635	1.23034	1.26132	1.27864	1.31718	1.35455	1.53300	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.17558	1.22953	-	1.27778	1.31628	1.35361	1.53189	
		Li et al. (2008) (3D)	1.17485	1.22915	-	1.27770	1.31434	1.35341	1.53142	
		FSDT	1.16069	1.21453	1.24409	1.26322	1.30070	1.34027	1.52254	
	5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	0.89907	0.94086	0.99084	1.00115	1.06483	1.12015	1.43059	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	0.89853	0.94028	-	1.00051	1.06419	1.11939	1.42955	
		Li et al. (2008) (3D)	0.89086	0.93362	-	0.99798	1.05607	1.11900	1.42845	
		FSDT	0.88358	0.92561	0.97017	0.98621	1.04471	1.10559	1.41934	
	10	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	0.87597	0.90359	0.95440	0.95551	1.02149	1.07415	1.40791	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	0.87544	0.90305	-	0.95490	1.02092	1.07343	1.40690	
		Li et al. (2008) (3D)	0.86833	0.89228	-	0.94984	1.00949	1.07290	1.40568	
		FSDT	0.86128	0.88814	0.93346	0.94061	1.00065	1.05958	1.39644	
	10	0	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.82687	1.82687	1.82687	1.82687	1.82687	1.82687	1.82687
			Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.82682	1.82682	-	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
			Li et al. (2008) (3D)	1.82682	1.82682	-	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
			FSDT	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442
0.5		Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.44624	1.48614	1.50962	1.52134	1.55020	1.57675	1.71142	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.44621	1.48611	-	1.52130	1.55016	1.57670	1.71137	
		Li et al. (2008) (3D)	1.44614	1.48608	-	1.52131	1.54926	1.57668	1.71130	
		FSDT	1.44168	1.48159	1.50424	1.51695	1.54518	1.57274	1.70850	
1		Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.24498	1.30198	1.33810	1.35530	1.39990	1.44148	1.65133	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.24495	1.30195	-	1.35527	1.39987	1.44143	1.65128	
		Li et al. (2008) (3D)	1.24470	1.30181	-	1.35523	1.39763	1.44137	1.65113	
		FSDT	1.24032	1.29729	1.33093	1.35072	1.39336	1.43722	1.64826	
5		Présente($\epsilon_z \neq 0$)	0.94717	0.98313	1.03939	1.04616	1.11719	1.17583	1.53031	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	0.94716	0.98311	-	1.04613	1.11723	1.17579	1.53026	
		Li et al. (2008) (3D)	0.94476	0.98103	-	1.04532	1.10983	1.17567	1.52993	
		FSDT	0.94256	0.97870	1.02793	1.04183	1.10646	1.17159	1.52700	
10		Présente($\epsilon_z \neq 0$)	0.92952	0.94412	1.00119	0.99687	1.07009	1.12489	1.50376	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	0.92952	0.94410	-	0.99684	1.07015	1.12486	1.50371	
		Li et al. (2008) (3D)	0.92727	0.94078	-	0.99523	1.06104	1.12466	1.50333	
		FSDT	0.92508	0.93962	0.98937	0.99256	1.05849	1.12067	1.50037	
100		0	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.88835	1.88835	1.88835	1.88835	1.88835	1.88835	1.88835
			Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.88830	1.88830	-	1.88830	1.88830	1.88830	1.88830
			Li et al. (2008) (3D)	1.88829	1.88829	-	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829
			FSDT	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825
	0.5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.48249	1.52361	1.54876	1.56050	1.59132	1.61920	1.76363	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.48245	1.52357	-	1.56046	1.59129	1.61916	1.76359	
		Li et al. (2008) (3D)	1.48244	1.52355	-	1.56046	1.59031	1.61915	1.76357	
		FSDT	1.48238	1.52350	1.54749	1.56040	1.59028	1.61910	1.76354	
	1	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	1.27163	1.32979	1.36806	1.38515	1.43231	1.47562	1.69911	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	1.27160	1.32976	-	1.38512	1.43229	1.47559	1.69908	
		Li et al. (2008) (3D)	1.27158	1.32974	-	1.38511	1.42992	1.47558	1.69906	
		FSDT	1.27153	1.32969	1.36505	1.38506	1.42988	1.47552	1.69903	
	5	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	0.96569	0.99910	1.05788	1.06315	1.13713	1.19704	1.56992	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	0.96567	0.99907	-	1.06312	1.13717	1.19701	1.56990	
		Li et al. (2008) (3D)	0.96563	0.99903	-	1.06309	1.13020	1.19699	1.56988	
		FSDT	0.96560	0.99900	1.05013	1.06306	1.13017	1.19694	1.56984	
	10	Présente($\epsilon_z \neq 0$)	0.95049	0.95943	1.01901	1.01243	1.08853	1.14413	1.54168	
		Bessaim et al. (2013)($\epsilon_z \neq 0$)	0.95047	0.95940	-	1.01239	1.08860	1.14409	1.54166	
		Li et al. (2008) (3D)	0.95042	0.95934	-	1.01237	1.08065	1.14408	1.54164	
		FSDT	0.95041	0.95933	1.01088	1.01233	1.08063	1.14403	1.54161	

On peut voir que la présente théorie qui prend en compte à la fois le cisaillement transversale et la déformation normale transversale prédit les fréquences propres avec le même degré de précision que celle des solutions d'élasticité 3D.

V.2.2.2 Plaque sandwich à faces homogènes et âme FGM (type B)

Comme cas particulier de la présente théorie où $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ une plaque sandwich carrée simplement appuyées avec des fibres des faces homogènes et une âme FGM est considérée.

Le tableau (V-10) contient la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$. L'analyse de flexion est effectuée pour $K=0, 0.5, 1, 5$ et 10 avec les rapports d'épaisseur de couche : 2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1.

Tableau V-10 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec de faces homogènes et âme FGM (type B)

a/h	k	Théories	$\bar{\omega}$			
			2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1
5	0	Présente	1.67844	1.67844	1.67844	1.67844
		FSDT	1.66974	1.66974	1.66974	1.66974
		CPT	1.82971	1.82971	1.82971	1.82971
	0.5	Présente	1.67816	1.67527	1.66744	1.66008
		FSDT	1.67654	1.67891	1.67741	1.49184
		CPT	1.84563	1.85398	1.85912	1.85813
	1	Présente	1.67683	1.66988	1.65244	1.63679
		FSDT	1.67959	1.68216	1.67721	1.39511
		CPT	1.85354	1.86557	1.87130	1.86744
	5	Présente	1.67098	1.64770	1.59105	1.54229
		FSDT	1.68450	1.68373	1.66081	1.19833
		CPT	1.86876	1.88512	1.88127	1.85901
	10	Présente	1.66892	1.63994	1.56983	1.51046
		FSDT	1.68526	1.68252	1.65177	1.15736
		CPT	1.87193	1.88803	1.87770	1.84611
10	0	Présente	1.82683	1.82687	1.82687	1.82687
		FSDT	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442
		CPT	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359
	0.5	Présente	1.83842	1.84356	1.84479	1.84175
		FSDT	1.83836	1.84533	1.84880	1.61285
		CPT	1.89073	1.89981	1.90567	1.90495
	1	Présente	1.84372	1.85012	1.84842	1.84045
		FSDT	1.84518	1.85494	1.85782	1.49986
		CPT	1.89926	1.91240	1.91916	1.91562
	5	Présente	1.85272	1.85629	1.83316	1.79979
		FSDT	1.85798	1.86990	1.86016	1.27470
		CPT	1.91572	1.93385	1.93126	1.90892
	10	Présente	1.85428	1.85556	1.82267	1.77874
		FSDT	1.86056	1.87168	1.85474	1.22869
		CPT	1.91917	1.93714	1.92794	1.89597
100	0	Présente	1.88835	1.88835	1.88835	1.88835
		FSDT	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825
		CPT	1.88879	1.88879	1.88879	1.88879
	0.5	Présente	1.90577	1.91501	1.92100	1.92030
		FSDT	1.90570	1.91497	1.92098	1.66157
		CPT	1.90635	1.91570	1.92182	1.92119
	1	Présente	1.91444	1.92781	1.93471	1.93117
		FSDT	1.91439	1.92780	1.93476	1.54148
		CPT	1.91511	1.92864	1.93577	1.93235
	5	Présente	1.93117	1.94960	1.94700	1.92437
		FSDT	1.93117	1.94970	1.94727	1.30431
		CPT	1.93202	1.95078	1.94865	1.92630
	10	Présente	1.93467	1.95294	1.94362	1.91123
		FSDT	1.93468	1.95307	1.94396	1.25622
		CPT	1.93556	1.95421	1.94543	1.91334

On peut voir sur ce tableau qu'avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k, la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ diminue.

La figure (V-7) représente la variation de fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaques sandwich simplement appuyées avec des faces homogènes et une âme FGM en fonction du rapport a / h pour différents indices de loi de puissance k en utilisant une nouvelle

théorie de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D

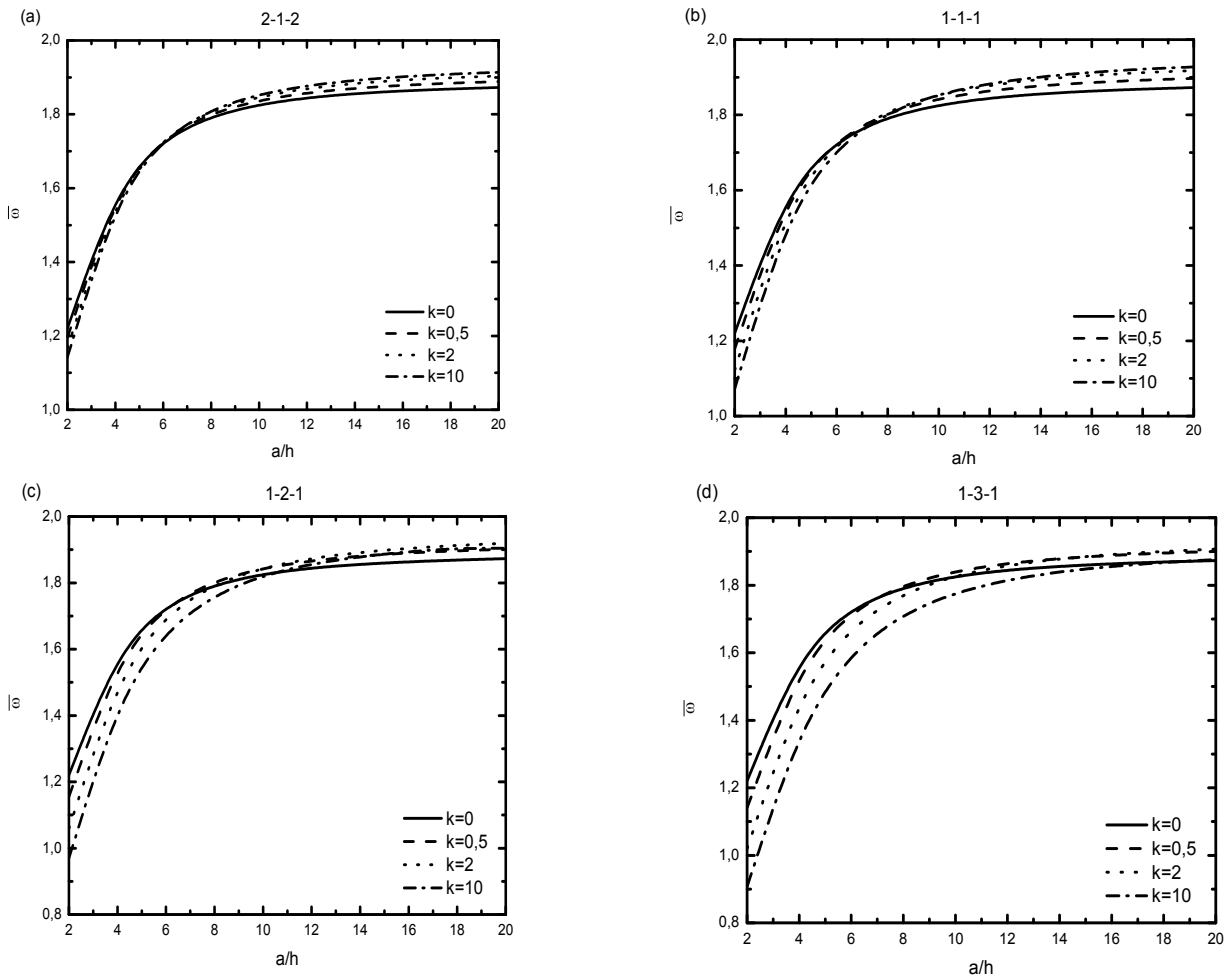
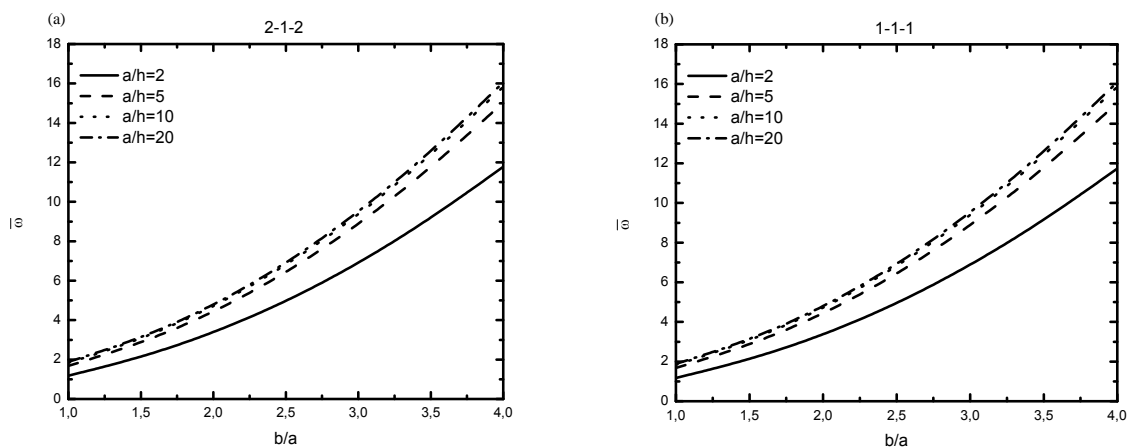


Figure V-7 : Effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwich à faces homogènes et une âme FGM en fonction du rapport a/h : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

On a constaté que la fréquence diminue significativement avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k .

La figure (V-8) représente la variation du paramètre de fréquence en fonction du rapport (b/a) de plaques sandwich simplement appuyées avec des feuilles de face homogènes et une âme FGM pour différents valeurs du rapport a/h avec $k = 0,2$



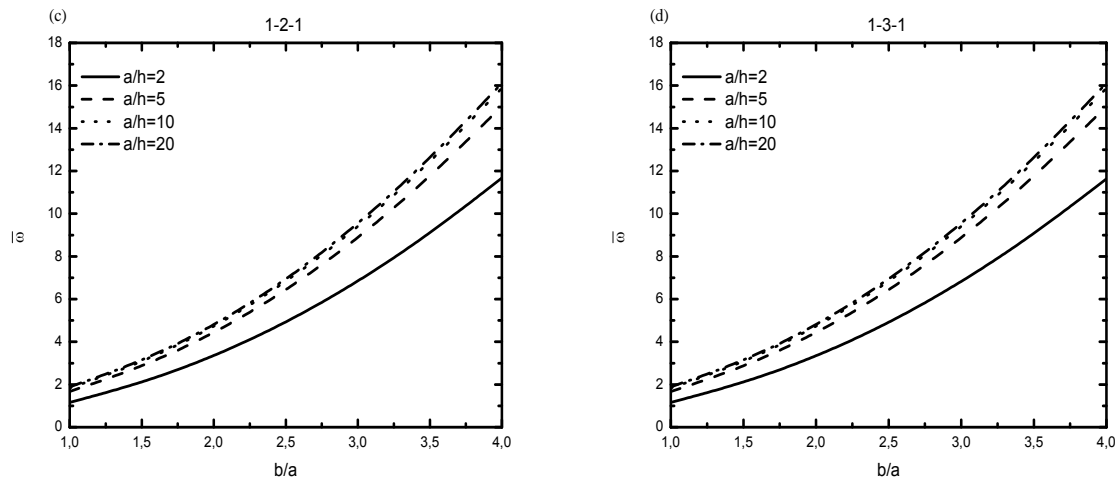


Figure V-8 : Fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwich simplement appuyées avec des faces homogènes et une âme FGM en fonction du rapport b/a pour différents valeurs du rapport a/h avec $k=0,2$: (a) la plaque sandwich (2-1-2) , (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

V.2.2.3 Plaque sandwich avec des faces FGM et l'âme FGM (type C)

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée simplement appuyées avec des faces FGM et une âme FGM sous charges mécaniques est considérée.

Le tableau (V-11) présente le paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ pour une plaque sandwich avec des faces FGM et une âme FGM pour différentes valeurs de $p = \{0, 0.5, 1, 5, 10\}$ et différents rapports d'épaisseur de couche $\{2-1-2, 1-1-1, 1-2-1, 1-3-1\}$. Le paramètre d'inhomogénéité k est fixé à 1.

Tableau V-11 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec faces FGM et âme FGM (type C)

a/h	p	Théories	$\bar{\omega}$				
			2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-3-1	
5	0	Présente $\varepsilon_z \neq 0$	1.67683	1.66988	1.65244	1.63679	
		FSDT	1.67958	1.68216	1.67721	1.66825	
		CPT	1.85354	1.86557	1.87130	1.86744	
	0.5	Présente	1.39454	1.42144	1.45285	1.46986	
		FSDT	1.38498	1.41769	1.45877	1.48258	
		CPT	1.49994	1.54440	1.60185	1.63620	
	1	Présente	1.23457	1.27918	1.33861	1.37518	
		FSDT	0.92952	1.27064	1.33779	1.38067	
		CPT	1.31045	1.37079	1.45611	1.51181	
	5	Présente	0.94432	1.00040	1.10095	1.17498	
		FSDT	0.92952	0.98689	1.09130	1.16979	
		CPT	0.98473	1.04831	1.16837	1.26128	
	10	Présente	0.90566	0.95335	1.05292	1.13193	
		FSDT	0.89051	0.93922	1.04197	1.12495	
		CPT	0.94538	0.99696	1.11274	1.20948	
	10	0	Présente	1.84372	1.85012	1.84842	1.84045
			FSDT	1.84518	1.85495	1.85782	1.85237
			CPT	1.89926	1.91240	1.91915	1.91561
0.5		Présente	1.50224	1.54267	1.59368	1.62349	
		FSDT	1.49942	1.54175	1.59605	1.62827	
		CPT	1.53451	1.58071	1.64049	1.67628	
1		Présente	1.31687	1.37413	1.45386	1.50512	
		FSDT	1.31313	1.37162	1.45387	1.50728	
		CPT	1.33992	1.40217	1.49032	1.54795	
5		Présente	0.99440	1.05717	1.17425	1.26376	
		FSDT	0.99001	1.05315	1.17138	1.26229	
		CPT	1.00678	1.07179	1.19486	1.29030	
10		Présente	0.95455	1.00603	1.11963	1.21337	
		FSDT	0.95005	1.00182	1.11636	1.21133	
		CPT	0.96680	1.01939	1.13791	1.23718	
100		0	Présente	1.91444	1.92781	1.93471	1.93117
			FSDT	1.91439	1.92780	1.93476	1.93125
			CPT	1.54645	1.92864	1.93577	1.93235
	0.5	Présente	1.54574	1.59245	1.65290	1.68910	
		FSDT	1.54566	1.59239	1.65288	1.68910	
		CPT	1.54645	1.59326	1.65387	1.69017	
	1	Présente	1.34937	1.41222	1.50123	1.55945	
		FSDT	1.34929	1.41214	1.50118	1.55943	
		CPT	1.35009	1.41301	1.50215	1.56046	
	5	Présente	1.01365	1.07915	1.20318	1.29944	
		FSDT	1.01356	1.07905	1.20311	1.29938	
		CPT	1.01439	1.07989	1.20401	1.30033	
	10	Présente	0.97341	1.02637	1.14580	1.24586	
		FSDT	0.97332	1.02627	1.14571	1.24580	
		CPT	0.97419	1.02713	1.14660	1.24674	

On peut voir à partir de ce tableau que lorsque l'indice p augmente le paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle diminue. La fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ obtenue par la théorie actuelle est plus petite que celles calculés en utilisant la théorie CPT.

La figure (V-9) révèle l'effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques sandwich (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) avec des faces FGM et une âme FGM ($p = 1$) en fonction du rapport a/h pour différents indices de loi de puissance k en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D.

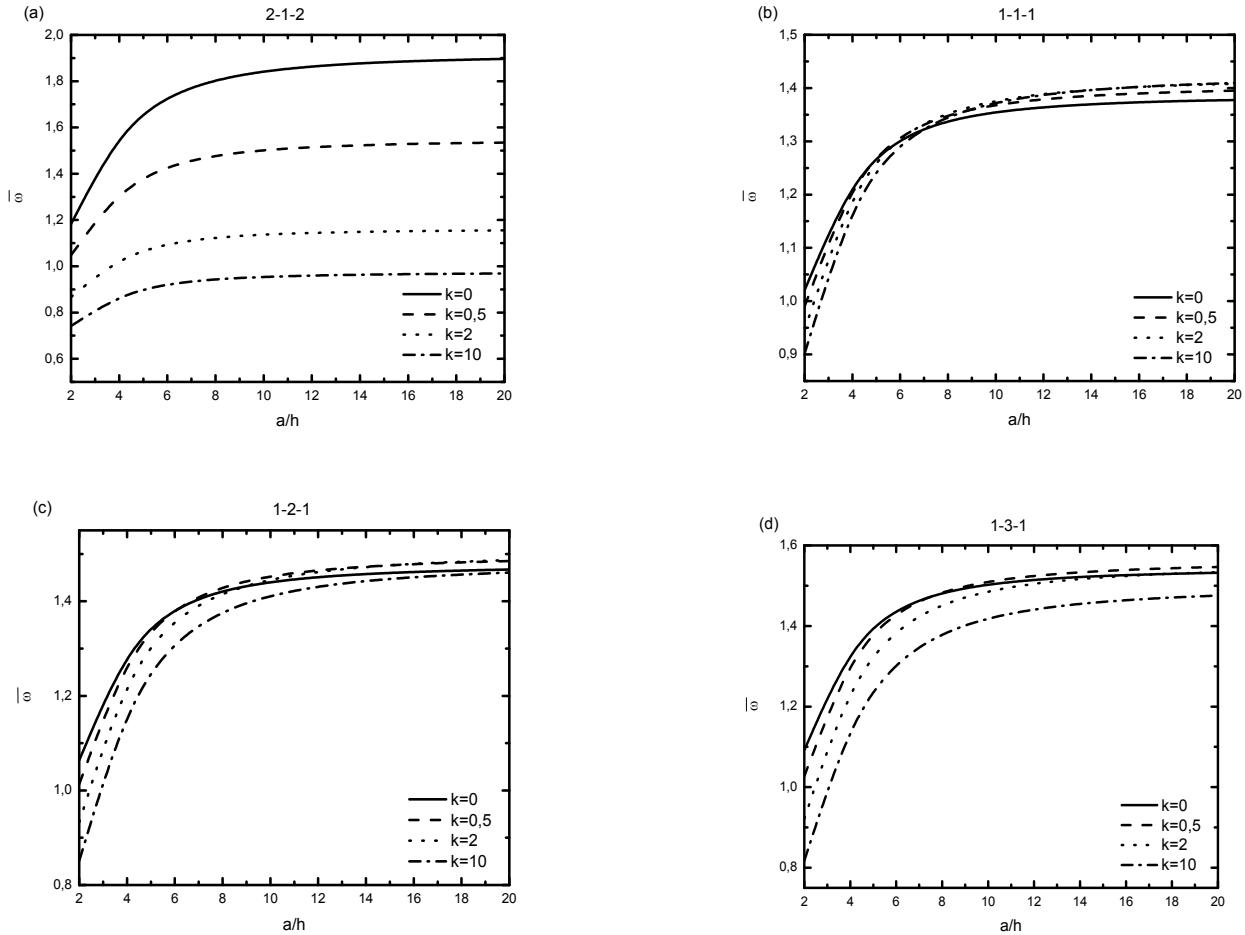


Figure V-9 : Effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaques sandwich avec des faces FGM et une âme FGM en fonction du rapport a/h : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

On a constaté que lorsque le paramètre d'inhomogénéité k augmente la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ diminue ; et aussi l'augmentation des valeurs du rapport a/h conduit à augmenter les valeurs de la fréquence propre fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaque sandwich FGM simplement appuyée. Les valeurs les plus élevées de la fréquence $\bar{\omega}$ sont obtenues pour la plaque sandwich FG 2-1-2 avec ($k = 0$).

La figure (V-10) représente l'effet de l'indices de loi de puissance P sur la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques sandwich (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) avec des feuilles de face FGM et une âme FGM ($k = 1$) en fonction du rapport a/h en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D .

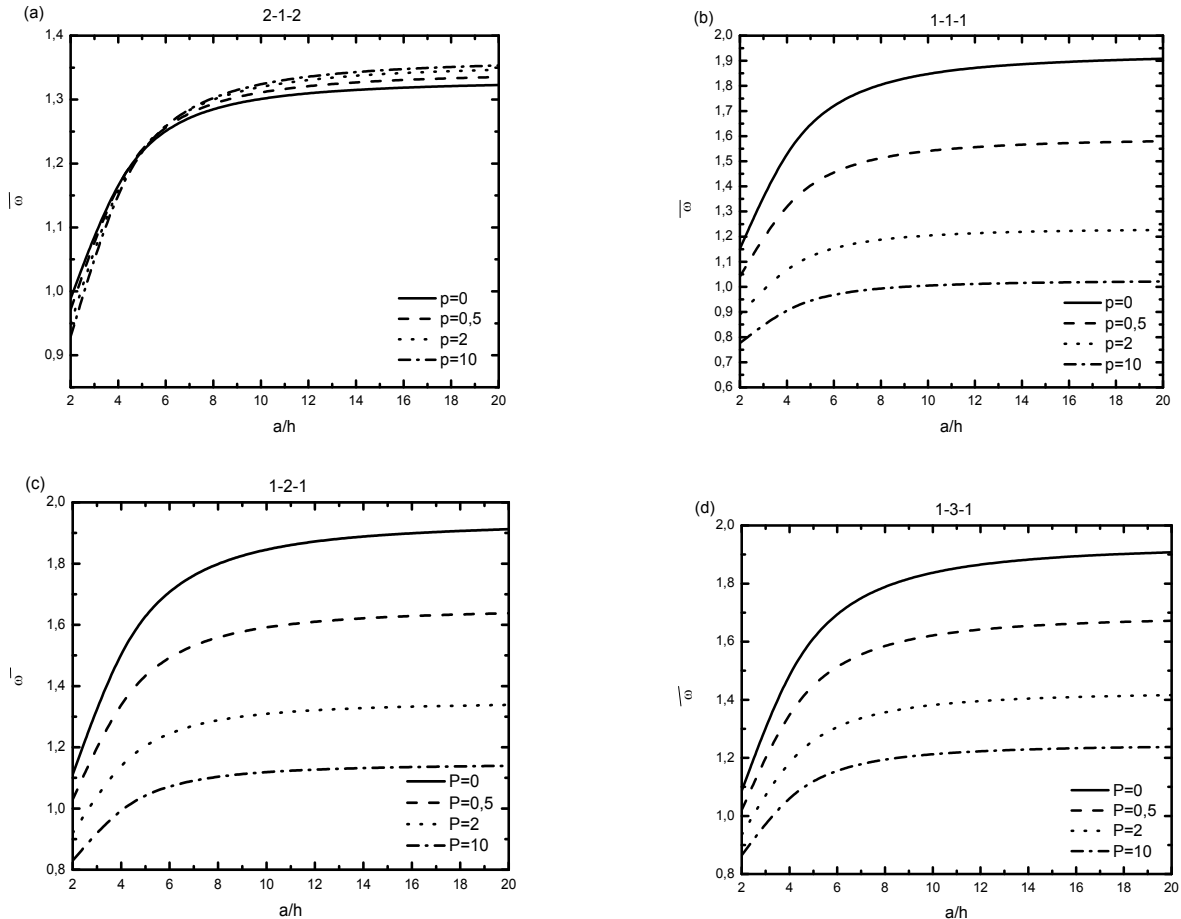


Figure V-10 : L'effet de l'indices de loi de puissance P sur la fréquence propre fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques sandwich avec des faces FGM et une âme FGM en fonction du rapport a/h : (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2 -1), (d) la plaque sandwich (1-3-1).

On a remarqué que lorsque le paramètre d'indices de loi de puissance P augmente la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ diminue. On peut confirmer que la fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ est en relation de corrélation directe avec le rapport a/h.

La figure (V-11) représente la fréquence propre fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ de plaques sandwich simplement appuyées avec des faces FGM et une âme FGM ($p = 1, k = 1$) en fonction du rapport b/a pour différents valeurs du rapport a/h.

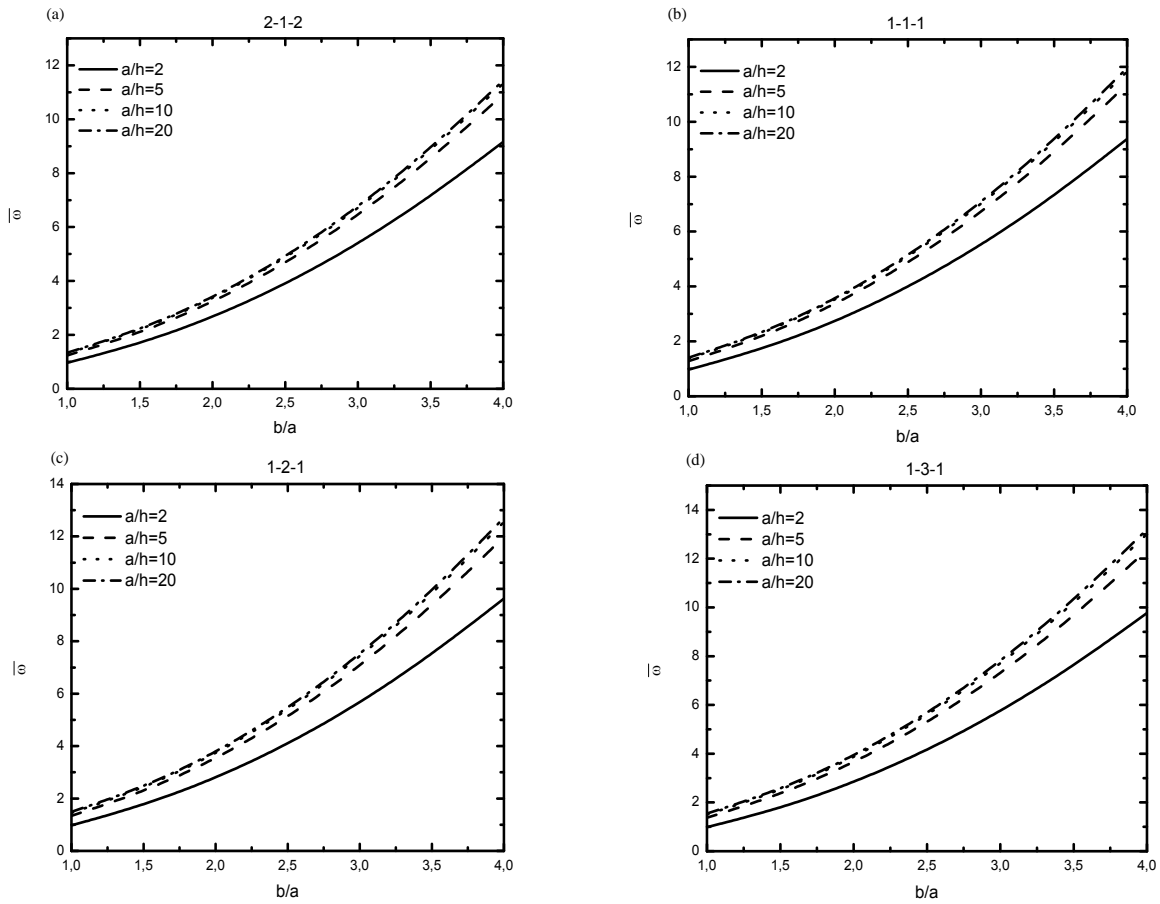


Figure V-11 : Variation de fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}_0$ de plaque sandwich simplement appuyées avec des faces homogènes et une âme FGM en fonction du rapport b/a pour différents valeurs du rapport a/h avec $p=1$, $k=1$: (a) la plaque sandwich (2-1-2), (b) la plaque sandwich (1-1-1), (c) la plaque sandwich (1-2-1), (d) la plaque sandwich (1-3-1)

On a constaté sur cette figure que la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}_0$ augmente lorsque b/a augmente. Il est à noter aussi que pour l'augmentation des valeurs du rapport a/h entraîne une augmentation des valeurs de la fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_0$, ce qui se confirme pour tous les types de plaques sandwich étudiées (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1).

V.3 conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement de flexion et de vibration libre des plaques sandwich en utilisant plusieurs théories à quatre variables. Il s'avère bien que les résultats obtenus par la présente théorie sont en bonne concordance avec la littérature ce qui démontre clairement l'efficacité de cette théorie. On peut dire que la théorie actuelle est non seulement précise mais aussi simple pour prédire les flèches, les contraintes et la fréquence naturelle des plaques sandwich FGM simplement appuyées.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale :

Dans cette thèse ,nous avons utilisés une nouvelle théorie de cisaillement et de la déformation hyperbolique d'ordre élevé simple et efficace pour étudier l'analyse statique et dynamique d'une plaque sandwich FGM simplement appuyée en utilisant à la fois des feuilles de surface FGM , loi de puissance et un noyau à gradient exponentiel. L'avantage de la théorie actuelle est de prendre en compte l'effet d'étirement transverselle, elle contient que quatre variables inconnues contre cinq ou plus dans les autres modèles trouvés dans la littérature . Il a été confirmé que le modèle actuel est en excellent accord avec les solutions existantes. On peut dire que la théorie actuelle est non seulement précise mais aussi simple pour prédire les déplacements, les contraintes et la fréquence naturelle des plaques sandwich FGM. On peut conclure que l'effet d'étirement transversal est plus important dans le cas de la plaque épaisse fonctionnellement graduée simplement appuyée. Une amélioration du modèle actuel sera envisagée dans les travaux futurs pour considérer d'autres types de matériaux et de structures.

Références Bibliographiques

References Bibliographiques :

- Abbas, S., Benguediab, S., Draiche, K., Bakora, A., & Benguediab, M. (2020), “An efficient shear deformation theory with stretching effect for bending stress analysis of laminated composite plates”, *Structural Engineering and Mechanics*, **74**(3), 365–380. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.74.3.365>. Abbas et al. 2020
- Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., Faleh, N.M. (2019), “Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections”, *Geomechanics and Engineering*, **17**(2), 175-180. <https://doi.org/10.12989/gae.2019.17.2.175>
- Akbas, S. D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures*, **19**(6), 1421–1447. <https://doi.org/10.12989/SCS.2015.19.6.1421>.
- Akbaş, Ş. D. (2020), “Dynamic responses of laminated beams under a moving load in thermal environment”, *Steel and Composite Structures*, **35**(6), 729–737. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.35.6.729>. Akbaş 2020
- Al-Basyouni, K. S., Ghandourah, E., Mostafa, H. M. and Algarni, A. (2020), “Effect of the rotation on the thermal stress wave propagation in non-homogeneous viscoelastic body”, *Geomechanics and Engineering*, **21**(1), 1–9. <https://doi.org/10.12989/GAE.2020.21.1.001>.
- Alibeigloo, A. and Liew, K. M. (2014), “Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity”, *Composite Structures*, **113**, 23–30. doi:10.1016/j.compstruct.2014.03.004.
- Asiri, S. A., Akbaş, Ş. D., & Eltahir, M. A. (2020), “Damped dynamic responses of a layered functionally graded thick beam under a pulse load”, *Structural Engineering and Mechanics*, **75**(6), 713–722. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.75.6.713>. Asiri et al. 2020
- Attia, M.A. (2017), “On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity”, *International Journal of Engineering Science*. **115**,73-101. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.03.011>.
- Avcar, M. (2019), “Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **30**(6), 603–615. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.30.6.603>.
- Abualnour, M., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bedia, E. A. A., & Mahmoud, S. R. (2018). A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Composite Structures*, **184**, 688–697. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.047>
- Ait Sidhoum, I., Boutchicha, D., Benyoucef, S., & Tounsi, A. (2018). A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of simply supported functionally graded plates. *Smart Structures and Systems*, **22**(3), 303–314. <https://doi.org/10.12989/sss.2018.22.3.303>
- Akavci, S. S., & Tanrikulu, A. H. (2015). Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories. *Composites Part B: Engineering*, **83**, 203–215. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.043>
- Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., & Bakhtiari-Nejad, F. (2011). Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, **330**(7), 1432–1454. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.003>
- Arshad, S., Naeem, M., & Sultana, N. (2007). Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **221**(12), 1483–1495. <https://doi.org/doi.org/10.1243/09544062JMES738>

- Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., & Bakhtiari-Nejad, F. (2011). Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, Schnell, W., *Zur Stabilität dünnwandiger längsgedrückter Kreiszyinderscha-len bei*
- APK (Association pour la Promotion de l'enseignement de la construction acier). "Stabilité appliqué" <http://www.mmaya.fr/Insta/amphi>
- ALVAREZ R.A. (1975) "La estructura Metalica Hoy" Tomo I, vol 1°, 2a Edición, Madrid.
- Belabed, Z., Ahmed Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., & Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites Part B: Engineering*, **60**, 274–283. doi:10.1016/j.compositesb.2013.12.057.
- Benachour, A., Tahar, H. D., Atmane, H. A., Tounsi, A., & Ahmed, M. S. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Composites Part B: Engineering*, **42**(6), 1386–1394. doi:10.1016/j.compositesb.2011.05.032.
- Benferhat, R., Daouadji, T.H. and Rabahi, A. (2021b), "Effect of air bubbles in concrete on the mechanical behavior of RC beams strengthened in flexion by externally bonded FRP plates under uniformly distributed loading", *Composite Materials and Engineering*, **3**(1), 41-55. DOI: 10.12989/cme.2021.3.1.041. Benferhat et al. 2021
- Bennoun, M., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015), "A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23**(4), 423–431. doi:10.1080/15376494.2014.984088.
- Bessaim, A., Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S. and Bedia, E. A. A. (2013), "A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **15**(6), 671–703. doi:10.1177/1099636213498888.
- Bharath, H. S., Waddar, S., Bekinal, S. I., Jeyaraj, P. and Doddamani, M. (2020), "Effect of axial compression on dynamic response of concurrently printed sandwich", *Composite Structures*, 113223. doi:10.1016/j.compstruct.2020.113223.
- Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H., & Adda Bedia, E. A. (2020), "Buckling of carbon nanotube reinforced composite plates supported by Kerr foundation using Hamilton's energy principle", *Structural Engineering and Mechanics*, **73**(2), 209-223. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2020.73.2.209>. Boulal et al. 2020
- Barati, M. R., Shahverdi, H., & Zenkour, A. M. (2017). Electro-mechanical vibration of smart piezoelectric FG plates with porosities according to a refined four-variable theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **24**(12), 987–998. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1196799>
- Belabed, Z., Ahmed Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., & Anwar Bég, O. (2014). An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*, **60**, 274–283. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.057>
- Benachour, A., Tahar, H. D., Atmane, H. A., Tounsi, A., & Ahmed, M. S. (2011). A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Composites Part B: Engineering*, **42**(6), 1386–1394. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.05.032>
- Bennoun, M., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2016). A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23**(4), 423–431. <https://doi.org/10.1080/15376494.2014.984088>

- Bessaim, A., Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S., & Bedia, E. A. A. (2013). A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(6), 671–703. <https://doi.org/10.1177/1099636213498888>
- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., & Tounsi, A. (2017). A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams. *Smart Structures and Systems*, 19(2), 115–126. <https://doi.org/10.12989/SSS.2017.19.2.115>
- Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A. A., Benyoucef, S., & Mahmoud, S. R. (2018). Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(1), 61–73. <https://doi.org/10.12989/SEM.2018.66.1.061>
- BENAISSA Abdelhak et KHADRAOUI Mohammed F . (2017) . Flambement des barres comprimées et comprimées fléchies-effet de déformation initial et l'excentricité du chargement
- BERT CW (1984) Improved technique for estimating buckling loads J. of Eng Mech., ASCE, vol 110. n°12. pp 1655-1665
- Carrera, E. and Brischetto, S. (2009), “A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates”, *Applied Mechanics Reviews*, 62(1), 010803. [doi:10.1115/1.3013824](https://doi.org/10.1115/1.3013824).
- Chen, C.-S., Hsu, C.-Y. and Tzou.G.J. (2009), “Vibration and Stability of Functionally Graded Plates Based on a Higher-order Deformation Theory”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 28(10), 1215–1234. [doi:10.1177/0731684408088884](https://doi.org/10.1177/0731684408088884).
- Civalek, Ö., & Avcar, M. (2020), “Free vibration and buckling analyses of CNT reinforced laminated non-rectangular plates by discrete singular convolution method”, *Engineering with Computers*. [doi:10.1007/s00366-020-01168-8](https://doi.org/10.1007/s00366-020-01168-8). Civalek and Avcar 2020
- Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., & Soave, M. (2011). Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering*, 42(2), 123–133. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.10.005>
- Cheng, Z. Q., & Kitipornchai, S. (1999). Membrane Analogy of Buckling and Vibration of Inhomogeneous Plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(11), 1293–1297. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:11\(1293\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1293))
- Civalek, Ö. (2008). Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(12–13), 725–731.
- Dai, K. Y., Liu, G. R., Lim, K. M., & Chen, X. L. (2004). A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 269(3–5), 633–652. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00089-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00089-0)
- Cours résistance des matériaux RDM / A.U : 2012-2013* Définir le flambage, la charge d'Euler et la contrainte critique et Vérifier Dimensionner une poutre sollicitée au flambement.
- CARTER W.O. – GERE J.M.(1963) “Critical Buckling Loads for Tapered Columns” Transaction of ASCE vol. 128 Part II, p 736 – 754 *BAEL91*- Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites DTU P 18-702, Paris, 1999.
- Draiche, K., Tounsi, A., & Khalfi, Y. (2014). A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass. *Steel and Composite Structures*, 17(1), 69–81. <https://doi.org/10.12989/SCS.2014.17.1.069>
- <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.04.001>

- Daouadji, T.H. and Hadji, L. (2015), “Analytical solution of nonlinear cylindrical bending for functionally graded plates”, *Geomechanics and Engineering*, **9**(5), 631–644. <https://doi.org/10.12989/GAE.2015.9.5.631>.
- Dean, J., S-Fallah, A., Brown, P. M., Louca, L. A. and Clyne, T. W. (2011), “Energy absorption during projectile perforation of lightweight sandwich panels with metallic fibre cores”, *Composite Structures*, **93**(3), 1089–1095. doi:10.1016/j.compstruct.2010.09.019.
- Do, V. N. V. and Lee, C.-H. (2017), “Thermal buckling analyses of FGM sandwich plates using the improved radial point interpolation mesh-free method”, *Composite Structures*, **177**, 171–186. doi:10.1016/j.compstruct.2017.06.054.
- Eltaher, M. A., & Akbaş, Ş. D. (2020), “Transient response of 2D functionally graded beam structure”, *Structural Engineering and Mechanics*, **75**(3), 357–367. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.75.3.357>. Eltaher and Akbaş 2020
- Ebrahimi, M. J., & Najafzadeh, M. M. (2014). Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*, **38**(1), 308–324. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.06.015>
- Emile Youssef. Etude théorique et expérimentale du flambement des pieux. Matériaux. Ecole Nationale . F. décembre 1994
- <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523301> Submitted on 4 Oct 2010
- Fazzolari, F. A. (2015), “Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions”, *Composite Structures*, **121**, 197–210. doi:10.1016/j.compstruct.2014.10.039.
- Fenjan, R.M., Moustafa, N.M. and Faleh, N.M. (2020a), “Scale-dependent thermal vibration analysis of FG beams having porosities based on DQM”, *Advances in Nano Research*, **8**(4), 283–292. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/anr.2020.8.4.283>. Fenjan et al. 2020
- Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C. and Polit, O. (2011), « Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations”, *Composites Part B: Engineering*, **42**(5), 1276–1284. doi:10.1016/j.compositesb.2011.01.031.
- Forcellese, A. and Simoncini, M. (2020), “Mechanical properties and formability of metal–polymer–metal sandwich composites”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*.1-17. doi:10.1007/s00170-020-05245-6.
- Fu, T., Chen, Z., Yu, H., Wang, Z. and Liu, X. (2018), “An analytical study of sound transmission through corrugated core FGM sandwich plates filled with porous material”, *Composites Part B: Engineering*, **151**, 161–172. doi:10.1016/j.compositesb.2018.06.010.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., & Jorge, R. M. N. (2005). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(39–41), 4265–4278. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.004>
- Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M., & Bensattalah, T. (2020), “Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle”, *Advances in nano research*, **8**(1), 37–47. DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.037>. Gafour et al. 2020
- Ghandourah, E.E. and Abdraboh, A.M. (2020), “Dynamic analysis of functionally graded nonlocal nanobeam with different porosity models”, *Steel and Composite Structures*, **36**(3), 293–305. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2020.36.3.293>. Ghandourah and Abdraboh 2020
- Gomes, G. F., de Almeida, F. A., Ancelotti, A. C., & da Cunha, S. S. (2020), “Inverse structural damage identification problem in CFRP laminated plates using SFO algorithm based on strain fields”, *Engineering with Computers*. doi:10.1007/s00366-020-01027-6. Gomes et al. 2020

GALÉA Y. (2009) "Instabilité des barres de portique en acier" Centre technique Industriel Construction Métallique (CTICM), p 103 – 130.

Ghellabe zoulikha f. (2018) calcul des poteaux métalliques selon le règlement algérien c.c.m.97

Hadji, L., (2020), "Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model", *Smart Structures and Systems*, **26**(2), 253-262. <https://doi.org/10.12989/sss.2020.26.2.253>.

Hadji, L., Atmane, H. A., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, **32**(7), 925–942. doi:10.1007/s10483-011-1470-9.

Hashim, H.A. and Sadiq, I.A. (2021), "A five-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of composite plates", *Composite Materials and Engineering.*, **3**(2), 135-155. <http://dx.doi.org/10.12989/cme.2021.3.2.135>.

Hashim and Sadiq 2021
Katariya, P. V., & Panda, S. K. (2020), "Numerical analysis of thermal post-buckling strength of laminated skew sandwich composite shell panel structure including stretching effect", *Steel and Composite Structures*, **34**(2), 279–288. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.34.2.279>. Katariya, and Panda 2020

He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashanker, S., & Liew, K. M. (2001). Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International Journal of Solids and Structures*, **38**(9), 1641-1655. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00050-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00050-0)

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., & Bedia, E. A. A. (2014). New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*, **140**(2), 374-383. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000665](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000665)

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., & Rokni Damavandi Taher, H. (2011). Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, **35**(2), 708-727. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.028>

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., & Bedia, E. A. A. (2014). New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*, **140**(2), 374-383.

Jung, W.-Y., Han, S.-C., & Park, W.-T. (2016), "Four-variable refined plate theory for forced-vibration analysis of sigmoid functionally graded plates on elastic foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*, **111-112**, 73–87. doi:10.1016/j.ijmecsci.2016.03.001.

Jin, G., Su, Z., Shi, S., Ye, T., & Gao, S. (2014). Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, **108**, 565-577. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.051>

Kant, T. and Swaminathan, K. (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite Structures*, **56**(4), 329–344. doi:10.1016/s0263-8223(02)00017-x.

Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M. and Li, L. (2020), "Free vibration analysis of FG nanoplate with poriferous imperfection in hygrothermal environment", *Structural Engineering and Mechanics.*, **73**(2), 191–207. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.73.2.191>. Karami et al. 2020

Kashtalyan, M. and Menshykova, M. (2009), "Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core", *Composite Structures*, **87**(1), 36–43. doi:10.1016/j.compstruct.2007.12.003.

Kiani, Y. (2019), "NURBS-based thermal buckling analysis of graphene platelet reinforced composite laminated skew plates", *Journal of Thermal Stresses*, 1–19. doi:10.1080/01495739.2019.1673687.

Koizumi, M. (1997), "FGM activities in Japan", *Composites Part B: Engineering*, **28**(1-2), 1–4. doi:10.1016/s1359-8368(96)00016-9.

- Khiloun, M., Bousahla, A. A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2020). Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT. *Engineering with Computers*, *36*(3), 807–821. <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00732-1>
- Kim S.B. Kim M.Y. ; Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures*, N°22, 2000, pp. 446-458.
- Li, D., Deng, Z., Chen, G., Xiao, H. and Zhu, L. (2017), “Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core”, *Composite Structures*, **169**, 29–41. [doi:10.1016/j.compstruct.2017.01.026](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.026).
- Li, Q., Iu, V. P., and Kou, K. P. (2008), “Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates”, *Journal of Sound and Vibration*, **311**(1-2), 498–515. [doi:10.1016/j.jsv.2007.09.018](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.018).
- Lindström, A. and Hallström, S. (2010), “Energy absorption of SMC/balsa sandwich panels with geometrical triggering features”, *Composite Structures*, **92**(11), 2676–2684. [doi:10.1016/j.compstruct.2010.03.018](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.03.018).
- Love, A.E.H. (1888), “On the small free vibrations and deformations of elastic shells”, *Philosophical trans. of the Royal Society (London)*, **17** . 491–549.
- Liew, K. M., Huang, Y. Q., & Reddy, J. N. (2003). Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *192*(19), 2203–2222. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00238-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00238-X)
- Liew, K. M., Peng, L. X., & Kitipornchai, S. (2009). Vibration analysis of corrugated Reissner–Mindlin plates using a mesh-free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Sciences*, *51*(9–10), 642–652. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.06.005>
- Liew, K. M., Wang, J., Ng, T. Y., & Tan, M. J. (2004). Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on FSDT meshfree method. *Journal of Sound and Vibration*, *276*(3–5), 997–1017. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.08.026>
- Loy, C. T., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, *41*(3), 309–324. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00054-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00054-X)
- Madenci, E. (2019), “A refined functional and mixed formulation to static analyses of fgm beams”, *Structural Engineering and Mechanics*, **69**(4), 427–437. DOI: 10.12989/sem.2019.69.4.427.
- Mantari, J. L. and Guedes Soares, C. (2013), “A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates”, *Composites Part B: Engineering*, **45**(1), 268–281. [doi:10.1016/j.compositesb.2012.05.036](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.036).
- Mantari, J. L., Oktem, A. S. and Guedes Soares, C. (2012a), “A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates”, *Computers & Structures*, **94–95**, 45–53. [doi:10.1016/j.compstruc.2011.12.003](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.12.003).
- Mantari, J. L., Oktem, A. S. and Guedes Soares, C. (2012b), “A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates”, *Composites Part B: Engineering*, **43**(3), 1489–1499. [doi:10.1016/j.compositesb.2011.07.017](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017).
- Marshall, A. (1982), “Sandwich construction”, *Handbook of composites.*, Springer, Boston, MA, 557–601.
- Mehar, K. and Panda, S. K. (2019), “Multiscale modeling approach for thermal buckling analysis of nanocomposite curved structure”, *Advances in Nano Research*, **7**(3), 181–190. <https://doi.org/10.12989/ANR.2019.7.3.181>.
- Mehar, K., Panda, S. K. and Mahapatra, T. R. (2017), “Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **65**, 384–396. [doi:10.1016/j.euromechsol.2017.05.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.05.005).

- Mercan, K., Ebrahimi, F., & Civalek, Ö. (2020), “Vibration of angle-ply laminated composite circular and annular plates”, *Steel and Composite Structures*, **34**(1), 141–154. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.34.1.141>. Mercan et al. 2020
- Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Ali Chaibdra, A., Belmokhtar, C., Benyoucef, S. and Benachour, A. (2020), “2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models”, *Geomechanics and Engineering.*, **22**(4), 361-374. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.4.361>
- Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J Appl Mech*, **18**, 31–38.
- Mirjavadi, S. S., Forsat, M., Nia, A. F., Badnava, S. and Hamouda, A. M. S. (2020), “Nonlocal strain gradient effects on forced vibrations of porous FG cylindrical nanoshells”, *Advances in Nano Research.*, **8**(2), 149–156. <https://doi.org/10.12989/ANR.2020.8.2.149>. Mirjavadi et al. 2020
- Miyamoto, Y. (1999), “Functionally graded materials: design, processing and applications”, *Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.*
- Moayedi, H., Ebrahimi, F., Habibi, M., Safarpour, H., & Foong, L. K. (2020), “Application of nonlocal strain–stress gradient theory and GDQEM for thermo-vibration responses of a laminated composite nanoshell”, *Engineering with Computers.* doi:10.1007/s00366-020-01002-1. Moayedi et al. 2020
- Madani, H., Hosseini, H., & Shokravi, M. (2016). Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Steel and Composite Structures*, **22**(4), 889–913. <https://doi.org/10.12989/SCS.2016.22.4.889>
- Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015a). A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates. *Thin-Walled Structures*, **90**, 150–158. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.015>
- Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015b). Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT. *Composites Part B: Engineering*, **75**, 148–155. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.01.028>
- Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2016). An original FSDT to study advanced composites on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, **107**, 80–89. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.024>
- Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2013). A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, **45**(1), 268–281. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.036>
- Matsunaga, H. (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, **82**(4), 499–512. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.030>
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2019). An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **21**(2), 727–757. <https://doi.org/10.1177/1099636217698443>
- Mouffoki, A., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2017). Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory. *Smart Structures and Systems*, **20**(3), 369–383. <https://doi.org/10.12989/SSS.2017.20.3.369>
- MAQUOI R. (2009) ‘ ‘Instabilités structurales des barres - Flambement et déversement‘ ‘ la base documentaire, *L'expertise technique et scientifique de référence, document C 2 511.*
- Massonnet, Ch. : Etat actuel du problème du flambement des barres en acier, à la lumière des travaux de la Commission VIII (Instabilité) de la CEACM, *Acier-Stahl-Steel*, n° 10, 1966, p. 459-466 (nombreuses références bibliographiques).

- Naeem, M. N., Arshad, S. H., & Sharma, C. B. (2010). The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 224(1), 43–54. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1548>
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Jorge, R. M. N. and Soares, C. M. M. (2012c), “Static analysis of functionally graded sandwich plates according to a hyperbolic theory considering Zig-Zag and warping effects”, *Advances in Engineering Software*, **52**, 30–43. [doi:10.1016/j.advengsoft.2012.05.005](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2012.05.005).
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N. and Soares, C. M. M. (2012b), “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Composite Structures*, **94**(5), 1814–1825. [doi:10.1016/j.compstruct.2011.12.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.12.005).
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N. and Soares, C. M. M. (2013), “Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique”, *Composites Part B: Engineering*, **44**(1), 657–674. [doi:10.1016/j.compositesb.2012.01.089](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.089).
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Roque, C. M. C., Cinefra, M., Jorge, R. M. N. and Soares, C. M. M. (2012a), “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”. *Composites Part B: Engineering*, **43**(2), 711–725. [doi:10.1016/j.compositesb.2011.08.009](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009).
- Nguyen, N. V., Nguyen-Xuan, H., & Lee, J. (2021), “A quasi-three-dimensional isogeometric model for porous sandwich functionally graded plates reinforced with graphene nanoplatelets”, *Journal of Sandwich Structures & Materials*. <https://doi.org/10.1177/10996362211020451>
- Nguyen, N. V., Nguyen-Xuan, H., Lee, D., & Lee, J. (2020a), “A novel computational approach to functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement”, *Thin-Walled Structures*, **150**, 106684. [doi:10.1016/j.tws.2020.106684](https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106684).
- Nguyen, N.V., Nguyen-Xuan, H., Nguyen, T.N., Kang, J., Lee, J. (2020b), “A comprehensive analysis of auxetic honeycomb sandwich plates with graphene nanoplatelets reinforcement”, *Composite Structures*, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113213>.
- Nguyen, Q. H., Nguyen, L. B., Nguyen, H. B., & Nguyen-Xuan, H. (2020c), “A three-variable high order shear deformation theory for isogeometric free vibration, buckling and instability analysis of FG porous plates reinforced by graphene platelets”, *Composite Structures*, **245**, 112321. [doi:10.1016/j.compstruct.2020.112321](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112321).
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2012). A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94(5), 1814–1825. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.12.005>
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 657–674. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.089>
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Roque, C. M. C., Cinefra, M., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2012). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(2), 711–725. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>
- Ngo-Cong, D., Mai-Duy, N., Karunasena, W., & Tran-Cong, T. (2010). Integrated-RBF network method for free vibration analysis of laminated composite plates. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 10, 012236. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/10/1/012236>

- Ngo-Cong, D., Mai-Duy, N., Karunasena, W., & Tran-Cong, T. (2011). Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method. *Computers & Structures*, 89(1-2), 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.07.012>
- Pourmoayed, A., Fard, K.M. and Rousta, B. (2021), “Free vibration analysis of sandwich structures reinforced by functionally graded carbon nanotubes”, *Composite Materials and Engineering.*, 3(1), 1-23. <http://dx.doi.org/10.12989/cme.2021.3.1.001>. Pourmoayed et al. 2021
- Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. (2000). Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Applied Acoustics*, 61(1), 111–129. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(99\)00063-8](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(99)00063-8)
- Qian, L. F., Batra, R. C., & Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8), 685–697. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.02.004>
- Rachedi, M.A., Benyoucef, S., Bouhadra, A., Bachir Bouiadjra, R., Sekkal, M., Benachour, A. (2020), “Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation”, *Geomechanics and Engineering*, 22(1), 65-80. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.1.065>
- Reddy, J. N. (2011), “A General Nonlinear Third-Order Theory of Functionally Graded Plates”, *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures (IJALS)* -, 1(1), 1-21. [doi:10.3850/s201042861100002x](https://doi.org/10.3850/s201042861100002x).
- Reissner, E. (1945), “Reflection on the theory of elastic plates”, *J Appl Mech.* 38, 1453–1464.
- Rezaiee-Pajand, M., Arabi, E., & Masoodi, A. R. (2019), “Nonlinear analysis of FG-sandwich plates and shells”, *Aerospace Science and Technology.*, 87, 178-189. [doi:10.1016/j.ast.2019.02.017](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.02.017).
- Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A. R., & Arabi, E. (2018a), “Geometrically nonlinear analysis of FG doubly-curved and hyperbolical shells via laminated by new element”, *Steel and Composite Structures*, 28(3), 389–401. <https://doi.org/10.12989/SCS.2018.28.3.389>.
- Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A. R., & Arabi, E. (2018d), “On the shell thickness-stretching effects using seven-parameter triangular element”, *European Journal of Computational Mechanics*, 27(2), 163–185. [doi:10.1080/17797179.2018.1484208](https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1484208).
- Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A. R., & Mokhtari, M. (2018c), “Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams”, *Advances in Computational Design*, 3(2), 165–190. <https://doi.org/10.12989/ACD.2018.3.2.165>.
- Rezaiee-Pajand, M., Mokhtari, M., & Masoodi, A. R. (2018b), “Stability and free vibration analysis of tapered sandwich columns with functionally graded core and flexible connections”, *CEAS Aeronautical Journal.*, 9(4), 629-648. [doi:10.1007/s13272-018-0311-6](https://doi.org/10.1007/s13272-018-0311-6).
- Rezaiee-Pajand, M., Sobhani, E., & Masoodi, A. R. (2020), “Free vibration analysis of functionally graded hybrid matrix/fiber nanocomposite conical shells using multiscale method”, *Aerospace Science and Technology*, 105, 105998. [doi:10.1016/j.ast.2020.105998](https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105998).
- Reddy, J. N., & Cheng, Z. Q. (2003). Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(8), 896–900. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:8\(896\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:8(896))
- Ruan, M., & Wang, Z. M. (2016). Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material. *Journal of Vibration and Control*, 22(16), 3504–3517. <https://doi.org/10.1177/1077546314563967>
- Safaei, B. (2020), “The effect of embedding a porous core on the free vibration behavior of laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures*, 35(5), 659–670. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.35.5.659>. Safaei et al. 2020
- Selmi, A. (2020), “Exact solution for nonlinear vibration of clamped-clamped functionally graded buckled beam”. *Smart Structures and Systems.*, 26(3), 361–371. <https://doi.org/10.12989/SSS.2020.26.3.361>.

- Seyfaddini, F., Nguyen-Xuan, H. & Nguyen, V.H. (2021), “A semi-analytical isogeometric analysis for wave dispersion in functionally graded plates immersed in fluids”, *Acta Mech.*, **232**, 15–32. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02818-0>.
- Shahmohammadi, M. A., Azhari, M., & Saadatpour, M. M. (2020), “Free vibration analysis of sandwich FGM shells using isogeometric B-spline finite strip method”, *Steel and Composite Structures*, **34**(3), 361–376. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.34.3.361>. Shahmohammadi et al. 2020
- Shen, H.-S. and Li, S.-R. (2008), “Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties”, *Composites Part B: Engineering*, **39**(2), 332–344. doi:10.1016/j.compositesb.2007.01.004.
- Shimpi, R. P. (2002), “Refined Plate Theory and Its Variants”, *AIAA Journal*, **40**(1), 137–146. doi:10.2514/2.1622.
- Sobhani, E., Masoodi, A.R., Ahmadi-Pari, A.R. (2021), “Vibration of FG-CNT and FG-GNP sandwich composite coupled Conical-Cylindrical-Conical shell”, *Composite Structures*, **273**, 114281. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114281>.
- Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Composite Structures.*, **99**, 76–87. doi:10.1016/j.compstruct.2012.11.018.
- Sobhy, M. (2016), “An accurate shear deformation theory for vibration and buckling of FGM sandwich plates in hygrothermal environment”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **110**, 62–77. doi:10.1016/j.ijmecsci.2016.03.003.
- Suresh, S. and Mortensen, A. (1998), “Fundamentals of functionally graded materials”, *London: Maney Publishing*.
- Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2017). A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate. *Steel and Composite Structures*, **25**(4), 389–401.
- Shufrin, I., & Eisenberger, M. (2005). Stability and vibration of shear deformable plates—first order and higher order analyses. *International Journal of Solids and Structures*, **42**(3-4), 1225-1251. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.067>
- Talebizadehsardari, P., Eyvazian, A., Azandariani, M. G., Tran, T. N., Rajak, D. K., & Mahani, R. B. (2020), “Buckling analysis of smart beams based on higher order shear deformation theory and numerical method”, *Steel and Composite Structures*, **35**(5), 635–640. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.35.5.635>. Talebizadehsardari et al. 2020
- Talha, M. and Singh, B. N. (2010), “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, *Applied Mathematical Modelling*, **34**(12), 3991–4011. doi:10.1016/j.apm.2010.03.034.
- Tanzadeh, H., & Amoushahi, H. (2021), “Analysis of laminated composite plates based on different shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, **75**(2), 247–269. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.75.2.247>. Tanzadeh and Amoushahi 2021
- Tayeb, T. S., Zidour, M., Bensattalah, T., Heireche, H., Benahmed, A., & Bedia, E. A. (2020), “Mechanical buckling of FG-CNTs reinforced composite plate with parabolic distribution using Hamilton's energy principle”, *Advances in nano research*, **8**(2), 135-148. DOI : <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.2.135>. Tayeb et al. 2020
- Timesli, A. (2020), “Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation”, *Computers and Concrete.*, **26**(1), 53–62. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.1.053>.
- Taleb, O., Houari, M. S. A., Bessaim, A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018). A new plate model for vibration response of advanced composite plates in thermal environment. *Structural Engineering and Mechanics*, **67**(4), 369–383. <https://doi.org/10.12989/SEM.2018.67.4.369>
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2013a). A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, **101**, 332–340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.019>

- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2013b). A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 106, 754–763. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.013>
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2014). Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 56, 705–716. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.09.008>
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., & Baccocchi, M. (2016). The GDQ method for the free vibration analysis of arbitrarily shaped laminated composite shells using a NURBS-based isogeometric approach. *Composite Structures*, 154, 190–218. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.041>
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., & Baccocchi, M. (2018). Strong and weak formulations based on differential and integral quadrature methods for the free vibration analysis of composite plates and shells: Convergence and accuracy. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 92, 3–37. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.08.020>
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., Baccocchi, M., & Reddy, J. N. (2017). An equivalent layer-wise approach for the free vibration analysis of thick and thin laminated and sandwich shells. *Applied Sciences*, 7(1), 17. <https://doi.org/10.3390/app7010017>
- Vinson J.R. (2005), “Sandwich Structures: Past, Present, and Future”, In: *Thomsen O., Bozhevolnaya E., Lyckegaard A. (eds) Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials. Springer, Dordrecht.* 3–12. https://doi.org/10.1007/1-4020-3848-8_1.
- Vinson, J. R. (2001), “Sandwich Structures”, *Applied Mechanics Reviews*, 54(3), 201-214. [doi:10.1115/1.3097295](https://doi.org/10.1115/1.3097295).
- Vinyas, M. (2020), “On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT”, *Composite Structures*, 240, 112044. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112044>.
- Vel, S. S., & Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3–5), 703–730. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00412-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00412-7)
- Xiang, S., Jin, Y., Bi, Z., Jiang, S., & Yang, M. (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93(11), 2826–2832. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.05.022>
- Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F. Z., Bousahla, A. A., & Mahmoud, S. R. (2018). Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *Geomechanics and Engineering*, 14(6), 519–532. <https://doi.org/10.12989/GAE.2018.14.6.519>
- Yuda, H., & Xiaoguang, Z. (2011). Parametric Vibrations and Stability of a Functionally Graded Plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 39(3), 367–377. <https://doi.org/10.1080/15397734.2011.557970>
- Zaoui, F. Z., Tounsi, A., Ouinas, D., & Vina Olay, J. A. (2020). A refined HSDT for bending and dynamic analysis of FGM plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 74(1), 105–119. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.74.1.105>
- Zhao, X., Lee, Y. Y., & Liew, K. M. (2009). Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 319(3–5), 918–939. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.025>
- Zusätzlichem Innendruck.* In: Proceedings of the IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, 1959, Delft, Netherlands, pp.167-188.

- Wang, H., Yan, W., & Li, C. (2020), “Response of angle-ply laminated cylindrical shells with surface-bonded piezoelectric layers”, *Structural Engineering and Mechanics*, **76**(5), 599–611. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.76.5.599>. Wang et al. 2020
- Wu, Z. P., Liu, G. R., & Han, X. (2002), “An Inverse Procedure for Crack Detection in Anisotropic Laminated Plates Using Elastic Waves”, *Engineering with Computers*, **18**(2), 116–123. doi:10.1007/s003660200010. Wu et al. 2002
- Yaylaci, M. and Avcar, M. (2020), “Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes”, *Computers and Concrete*, **26**(2), 107–114. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.2.107>.
- Zenkert, D. (1997), “The handbook of sandwich construction”, *Engineering Materials Advisory Services*,.