

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes, Sidi Bel-Abbes
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil et Travaux Publics
Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil
et Travaux Publics



THÈSE

Pour l'obtention du titre de Docteur en Travaux Publics
Spécialité : Voies et Ouvrages d'Arts

Thème :

**Analyse du Comportement Mécanique des Poutres
des Ponts en Béton Armé Renforcé par
des Nanoparticules de Silice**

Présentée et soutenue publiquement par :

HARRAT Zouaoui Rabie

Devant le jury composé de :

Pr. N. ZIANE	Professeur	Président	U.D.L Sidi Bel-Abbes
Pr. M. BACHIR BOUIADJRA	Professeur	Encadreur	U.D.L Sidi Bel-Abbes
Pr. S. AMZIANE	Professeur	Co-encadreur	U.C.A Clermont-Ferrand
Pr. M. BOUREMANA	Professeur	Examineur	U.D.L Sidi Bel-Abbes
Dr. M. A. BENATTA	MCA	Examineur	U.D.L Sidi Bel-Abbes
Pr. Z. SEREIR	Professeur	Examineur	U.S.T Oran
Pr. S. A. MEFTAH	Professeur	Invité	U.D.L Sidi Bel-Abbes

Octobre 2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Louange à dieu, maître de l'univers pour toutes ses bontés, pour la science qu'il nous a enseigné et pour la fois qu'il sème dans nos cœurs et pour sa miséricorde. Que les jours qui viennent soient des instants de succès, de bénédictions et d'amour.

Un grand merci à mon directeur de thèse le Pr. Mohamed Bachir Bouiadjra qui m'a encadré, je le remercie pour sa gentillesse, sa disponibilité, sa patience pendant des intenses et rationnelles discussions qui m'ont permis de réaliser ce modeste travail. Pour tout cela et aussi pour son aide, sa confiance et son soutien moral, je le remercie vivement.

Je tiens à remercier aussi le Pr. Sofiane Amziane pour avoir accepté de me co-encadrer, et de m'avoir accueilli au sein de l'institut Pascal, dans un pays étranger et tout cela dans de très bonnes conditions, et de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche ainsi que de me transmettre sa curiosité.

Un grand merci également pour le Pr. Noureddine Ziane, pour avoir accepté de présider le jury afin d'examiner ce modeste travail, et pour son aide et ses conseils utiles.

Je suis très reconnaissant envers les membres du jury à savoir messieurs les professeurs Mohamed Bouremana et Zouaoui Sereir, ainsi qu'au maître de conférences Atif Benatta, pour s'être déplacé et d'avoir accepté d'examiner cette thèse. Un grand merci à notre invité monsieur le Pr. Sid Ahmed Meftah de nous avoir honoré par sa présence, qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude.

J'adresse mes remerciements au Dr. Baghdad Krour, pour son aide, pour ses conseils, ainsi que pour sa gentillesse et sa bonne humeur.

Je voudrais remercier l'ensemble des doctorants du LSMAGCTP et de l'institut Pascal, que j'ai eu le plaisir de croiser au cours de ces merveilleuses années et pour la bonne ambiance qui régnait dans les deux laboratoires.

Je n'oublierai jamais le personnel administratif des deux universités ainsi que du consulat d'Algérie à Saint-Etienne pour sa présence, son efficacité et son professionnalisme.

Je remercie mon père, ma mère, mes frères, ma sœur et ma belle sœur pour le soutien dont ils m'avaient montré, c'est de loin la plus belle des familles.

Je dédie ce travail à ma deuxième famille en France, Chawqui, Youcef, Samir, tout simplement pour leur amitié et pour tous les moments passés ensemble.

Enfin, je ne pourrai finir sans remercier Asma qui, tous les jours, a été en première ligne pour me soutenir, m'encourager et me donner confiance.

المخلص

الهدف الرئيسي من هذه الاطروحة هو التحقق من التحليل الساكن و الديناميكي للهياكل الخرسانية المدمجة مع جزيئات ثاني أكسيد السيليكون. النانوسيليكا بحكم حجمها الجزيئي الصغير يمكنها التأثير على البنية الدقيقة للخرسانة و تعزيز خصائصها. يستخدم نموذج فويت (Voigt) للنظر في تأثير التكتل والحصول على خصائص مركب النانو المكافئة. بالإضافة إلى ذلك يتم محاكاة روافد و طاولة الجسر رياضيا باستخدام نظرية الرتب العالية نظراً لبساطتها ودقتها. يتم محاكاة وسط القاعدة الأساسية بأساس مرن من نوع باسترناك (Pasternak)، ونوابض وينكلر (Winkler). يتم اشتقاق معادلات التوازن باستخدام مبدأ العمل الافتراضي، وباستخدام مبدأ هاملتون (Hamilton)، يتم الحصول على المعادلات الطاقوية. بالإضافة إلى ذلك، على أساس الطرق التحليلية، تم الحصول على حلول الشكل للروافد و الصفائح المدعومة. يتم عرض النتائج العددية من خلال النظر في تأثير العوامل المختلفة مثل النسبة المئوية لحجم جسيمات النانوسيليكا (SiO_2)، الأحمال الميكانيكية، المعلمات الهندسية، وسط القاعدة الأساسية، على السلوك الثابت و الديناميكي للروافد و الصفائح الخرسانية.

تشير معظم نتائج هذا العمل إلى أن استخدام جزيئات (SiO_2) على الخرسانة يزيد من مقاومتها الميكانيكية، حيث أن الإثنيات والضغوطات تنخفض و ان التردد الطبيعي يرتفع. بالإضافة إلى ذلك، فإن الأساس المرن له تأثير كبير على ثني الهياكل الخرسانية وترددها.

الكلمات الرئيسية : السلوك الثابت؛ التحليل الديناميكي؛ رافدة من الخرسانة المسلحة؛ صفيحة من الخرسانة المسلحة؛

جزيئات النانوسيليكا؛ قاعدة مرنة.

RÉSUMÉ

L'objectif principal de la présente thèse est d'étudier l'analyse statique et dynamique des éléments structuraux en béton incorporé avec des nanoparticules de dioxyde de silicium (SiO_2). La nano-silice, de par sa petite taille de particules, peut affecter la microstructure des bétons et améliorer leurs propriétés. Le modèle de Voigt est utilisé pour considérer l'effet d'agglomération et pour obtenir les propriétés nano-composites équivalentes. En outre, les poutres et le tablier en béton armé sont simulés mathématiquement avec une théorie de déformation par cisaillement d'ordre-élevé en raison de sa simplicité et de sa précision. Le milieu du sol est simulé avec une fondation élastique Pasternak, y compris une couche de cisaillement, et des ressorts Winkler. Les équations d'équilibre sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel, et en utilisant le principe d'Hamilton, les équations énergétiques sont obtenues. Par ailleurs, sur la base des méthodes analytiques, les solutions de forme des poutres et des plaques simplement appuyées ont été obtenues. Des résultats numériques sont présentés en considérant l'effet de différents paramètres tels que le pourcentage en volume des nanoparticules de SiO_2 , les charges mécaniques, les paramètres géométriques, le milieu du sol, sur le comportement mécanique des poutres et du tablier en béton armé.

La plupart des résultats de cette étude indiquent que l'utilisation de nanoparticules de SiO_2 s'avère bénéfique sur les bétons. Elle donne une meilleure résistance mécanique, les déformations et les contraintes diminuent, et la fréquence naturelle s'amplifie. De plus, la fondation élastique a un impact significatif sur la flexion et la vibration des structures en béton.

Mots-clés : Comportement statique; Analyse dynamique; Poutre en béton armé; Plaque en béton renforcé; Nanoparticules de silice; Fondation élastique.

ABSTRACT

The main objective of the present thesis is to investigate the static and dynamic analysis of concrete structural elements incorporated with Silicon Dioxide (SiO_2) nanoparticles. Nanosilica, by virtue of its small particle size can affect the microstructure of concretes and enhances their properties. Voigt's model is used for considering agglomeration effect and for obtaining the equivalent nano-composite properties. Furthermore, the reinforced concrete beams and deck are simulated mathematically with higher-order shear deformation theory because of its simplicity and accuracy. The soil medium is simulated with Pasternak elastic foundation, including a shear layer, and Winkler's spring. The equilibrium equations are derived using the principle of virtual work, and using Hamilton's principle, the energy equations are obtained. Also, based on the analytical methods, the closed-form solutions of simply supported beams and plates have been obtained. Numerical results are presented considering the effect of different parameters such as volume percent of SiO_2 nanoparticles, mechanical loads, geometrical parameters, soil medium, on the mechanical behavior of reinforced concrete structures.

The most findings of this work indicate that the use of SiO_2 nanoparticles has been shown to be beneficial on concretes. It increases better mechanical resistance, deflections and stresses decrease, and the natural frequency amplifies. In addition, the elastic foundation has a significant impact on the bending and vibration of concrete beams and deck.

Keywords: Static behavior; Dynamic analysis; Reinforced-concrete beam; Reinforced-concrete plate; Silica nanoparticles; Elastic foundation.

SOMMAIRE

Remerciements	i
الملخص	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Sommaire	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Liste des notations	xii
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les pathologies des ponts	
I.1 Définition	3
I.2 Éléments constitutifs d'un pont	3
I.3 Modes d'altération des ponts en béton armé	4
I.3.1 La carbonatation	4
I.3.1.A Paramètres influençant la carbonatation du béton	5
I.3.1.B Mesure de la profondeur de carbonatation	5
I.3.2 L'attaque des sulfates	6
I.3.3 L'attaque des ions-chlorures	7
I.3.4 L'alcali-réaction	8
I.3.5 Le gel-dégel	9
I.4 Pathologie des ponts en béton armé	9
I.4.1 Pathologie des ponts courants en béton armé	10
I.4.2 Pathologie issues de défauts de conception	10
I.4.2.A Conséquences sur la résistance à la flexion	11
I.4.2.B Conséquences sur la résistance à l'effort tranchant	11
I.4.2.C Pathologie résultant d'une insuffisance du modèle d'étude	12
I.5 Conclusion	12
Chapitre II : Méthodes et principes de renforcement des bétons	
II.1 Définition du béton	14
II.1.1 Propriétés mécaniques du béton	14
II.1.2 Durabilité et durée de service des ouvrages en béton	14
II.2 Les différents types de béton	15
II.2.1 Béton armé	15
II.2.2 Béton précontraint	15
II.2.3 Béton fibré	16
II.2.3.A Classification des fibres	16
II.2.4 Béton à hautes performances (BHP)	17
II.2.5 Béton à très hautes performances (BTHP)	18
II.2.6 Béton fibré à ultra hautes performances (BFUHP)	18
II.2.7 Béton renforcé par nanoparticules	19
II.2.7.A Les familles des nanomatériaux	20
II.2.7.B Nanoparticules de Silicium SiO ₂	21
II.2.7.C Les avantages et les bénéfices des nano-silices dans le béton	22
II.3 Généralités sur les méthodes et principes généraux de renforcement	23
II.3.1 Les méthodes de réparation structurale	23

II.3.1.A	Réparation par béton projeté	23
II.3.1.B	Réparation par précontrainte additionnelle	24
II.3.1.C	Renforcement par collage de plats métalliques	25
II.3.1.D	Renforcement par collage de plats composites	26
II.3.2	Les matériaux de renforcement	27
II.3.2.A	Composite	27
II.3.2.B	Colles et résines époxydes	29
II.4	Conclusion	29

Chapitre III : Théories des poutres et des plaques

III.1	Introduction	30
III.2	Les poutres	30
III.2.1	Définition	30
III.2.2	Hypothèses de calcul	31
III.2.2.A	Principe de Saint Venant	31
III.2.2.B	Principe de Navier-Bernoulli généralisé	31
III.2.2.C	Principe de la théorie classique des poutres (CBT)	32
III.2.2.D	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	33
III.2.2.E	Déformation en cisaillement d'ordre-élevé (HSDT)	34
III.3	Théorie des plaques	36
III.3.1	Définition	36
III.3.2	Modèles analytiques des plaques	36
III.3.2.A	Les modèles classiques Love-Kirchhoff (CPT)	36
III.3.2.B	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	37
III.3.2.C	Déformation en cisaillement d'ordre-élevé	38
III.4	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre-élevé	39
III.5	Conclusion	40

Chapitre IV : Méthodes d'homogénéisation

IV.1	Généralités sur l'homogénéisation	41
IV.2	Étapes d'homogénéisation analytique	41
IV.2.1	Étape de représentation	41
IV.2.2	Étape de localisation	42
IV.2.3	Étape d'homogénéisation	42
IV.3	Modèles analytiques d'homogénéisation	43
IV.3.1	Modèle de Voigt et de Reuss	43
IV.3.2	Modèle de Hashin et Shtrikman	43
IV.3.3	Modèles de De Lallard et Le Roy	44
IV.3.4	Approximation diluée	45
IV.3.5	Modèle de Mori-Tanaka	47
IV.3.6	Modèle auto-cohérent	50
IV.4	Conclusion	51

Chapitre V : Modèle théorique pour l'étude du comportement mécanique des éléments structuraux en béton armé renforcé par des nanoparticules de Silicium

V.1	Introduction	52
V.2	Modèle de Voigt	52
V.3	Le modèle 'Poutre'	53
V.3.1	Cinématique	53
V.3.2	Équation de mouvement	54
V.3.3	Solutions analytiques pour poutres simplement appuyées	57
V.4	Le modèle 'Plaque'	58

V.4.1	Cinématique	58
V.4.2	Équation de mouvement	59
V.4.3	Solutions analytiques pour plaques simplement appuyées	62
V.5	Conclusion	64
Chapitre VI : Résultats numériques et discussion		
VI.1	Introduction	65
VI.2	Effet d'agglomération des nanoparticules sur le module de Young	66
VI.3	Validation des modèles mathématiques	67
VI.4	Élément poutre	68
VI.4.1	Analyse statique	68
VI.4.2	Analyse dynamique	75
VI.5	Élément plaque	78
VI.5.1	Analyse statique	78
VI.6	Conclusion	85
Conclusion générale et perspectives		86
Références bibliographiques		88

Liste des figures

Figure I.1 :	Schéma général d'un pont	3
Figure I.2 :	Les équipements d'un pont	4
Figure I.3 :	Mesure de la profondeur de carbonatation à l'aide du test de phénolphthaléine	6
Figure I.4 :	Fissurations importantes d'un échantillon de béton soumis au test de résistance aux sulfates (le bâtonnet blanc indique la longueur initiale de l'échantillon)	7
Figure I.5 :	Chlorures dans la microstructure d'un béton : (a) liés et (b) libres (NaCl)	8
Figure I.6 :	Effet du gel-dégel sur le béton : écaillage du béton d'enrobage et corrosion des armatures	9
Figure I.7 :	Section transversale type d'un pont courant en béton armé	10
Figure I.8 :	Fissures dues à une insuffisance de résistance à la flexion localisées au milieu de la poutre du tablier d'un pont	11
Figure I.9 :	Zone d'apparition des fissures dues à l'insuffisance de résistance à l'effort tranchant	12
Figure II.1 :	Béton renforcé par des armatures d'acier	15
Figure II.2 :	Courbes contrainte-déformation (Fibres - acier)	17
Figure II.3 :	Différence de section polie de BFUHP et de béton classique	18
Figure II.4 :	La poudre nano-silice	21
Figure II.5 :	Méthode Sol-Gel pour fabrication de nano-silice	22
Figure II.6 :	Effet de la nano-silice sur le béton	23
Figure II.7 :	Réparation des ponts par béton projeté	24
Figure II.8 :	Réparation par précontrainte additionnelle	25
Figure II.9 :	Renforcement par collage de plats métalliques	26
Figure II.10 :	Renforcement par collage de plats composites	27
Figure II.11 :	Constituants d'un matériau composite	27
Figure II.12 :	Exemple d'un matériau composite	28
Figure III.1 :	Définition géométrique d'une poutre	30
Figure III.2 :	Cinématique de Navier-Bernoulli	32
Figure III.3 :	Cinématique d'Euler-Bernoulli	32
Figure III.4 :	Cinématique de Timoshenko	33
Figure III.5 :	Cinématique de la théorie d'ordre-élevé	34
Figure III.6 :	Approximation de la contrainte de cisaillement : constante (théorie de premier ordre) et quadratique (ordre-élevé)	35
Figure III.7 :	Distribution de la contrainte de cisaillement τ_{xz} selon trois théories	35
Figure III.8 :	Poutre sous différentes théories (CPT, FSDT, TSDT)	35
Figure III.9 :	Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff	37
Figure III.10 :	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin	38
Figure III.11 :	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques	39
Figure IV.1 :	Principe d'homogénéisation	41
Figure IV.2 :	Modèle des sphères concentriques d'Hashin	44
Figure IV.3 :	Modèle prenant en compte l'étendue granulaire limitée du béton	45
Figure IV.4 :	Schématisation du modèle d'Approximation Diluée	46

Figure IV.5 :	Élément volumétrique sélectionné de nano-composite	47
Figure V.1 :	Géométrie d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice (a) sous chargement sinusoïdal (b) sous chargement uniforme	57
Figure V.2 :	Géométrie d'une plaque en béton armé renforcé par de la nano-silice	63
Figure VI.1 :	(a) Géométrie d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice (b) Coupe transversale de la poutre	66
Figure VI.2 :	Effet d'agglomération de nano-silice sur le module d'élasticité du béton ($\xi=1$)	66
Figure VI.3 :	Effet d'agglomération de nano-silice sur le module d'élasticité du béton ($\xi=0.5$)	68
Figure VI.4 :	Effet d'agglomération sur le déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous chargement sinusoïdal ($L/h=10$, $\beta_w=\beta_s=0$, $\zeta=0.5$)	68
Figure VI.5 :	Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous chargement sinusoïdal pour diverses concentrations de nano-SiO ₂ ($L/h=10$, $\beta_w=\beta_s=0$)	69
Figure VI.6 :	Déplacement axial adimensionnel de la poutre en béton armé sous chargement sinusoïdal ($L/h=10$, $\beta_w=\beta_s=0$)	70
Figure VI.7 :	Effets du rapport épaisseur / longueur sur le déplacement transversal adimensionnel à mi-portée d'une poutre en béton armé sous un chargement sinusoïdal ($\beta_w=\beta_s=0$)	70
Figure VI.8 :	Contrainte normale adimensionnelle sous différents types de chargements ($\beta_w=\beta_s=0$, $L/h=10$, $Cr=0.05$)	71
Figure VI.9 :	Contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une poutre en béton armé sous des charges sinusoïdales ($\beta_w=\beta_s=0$, $L/h=10$, $Cr=0.05$)	72
Figure VI.10 :	Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous une charge uniforme avec variation des constantes de fondations ($L/h=10$, $Cr=0.10$)	72
Figure VI.11 :	Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé posée sur fondation élastique sous chargement uniforme ($L/h=10$, $Cr=0.10$)	73
Figure VI.12 :	Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous des charges uniformes ($\beta_w=0.05$, $\beta_s=0.02$, $Cr=0.05$, X_s : Facteur de correction de cisaillement)	74
Figure VI.13 :	Effet d'agglomération sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice ($L/h=5$, $\beta_w=\beta_s=0$, $\zeta=0.5$)	75
Figure VI.14 :	Effet d'agglomération sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice ($L/h=5$, $\beta_w=\beta_s=0$)	75
Figure VI.15 :	Fréquences naturelles adimensionnelles des poutres en béton armé pour différentes concentrations de nano-SiO ₂ ($\zeta=\xi=0.5$, $\beta_w=\beta_s=0$)	76
Figure VI.16 :	Fréquences adimensionnelles des poutres en béton armé renforcé par de la nano-silice sous différentes théories ($\beta_w=\beta_s=0$, $Cr=0.10$, Mode 2)	76
Figure VI.17 :	Fréquences adimensionnelles d'une poutre en béton armé avec variation des facteurs de la fondation ($L/h=5$, $Cr=0.10$, Mode 2)	77
Figure VI.18 :	Figure VI.18 : Géométrie d'une plaque en béton renforcé par des nano-SiO ₂	78

Figure VI.19	Effet d'agglomération sur la flexion adimensionnelle des plaques carrées avec différentes concentrations de nano-SiO ₂ sous charge sinusoïdale ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=1$)	78
Figure VI.20	Effets du rapport épaisseur / longueur sur la flexion adimensionnelle à mi-portée des plaques carrées sous charge sinusoïdale ($k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)	79
Figure VI.21	Flexion adimensionnelle des plaques carrées sous chargement sinusoïdal pour diverses concentrations de nano-SiO ₂ ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)	79
Figure VI.22	Flexion adimensionnelle des plaques carrées sous différent type de chargement pour diverses concentrations de nano-SiO ₂ ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)	80
Figure VI.23	Déplacement axial adimensionnel des plaques carrées en béton armé sous différent type de chargement pour diverses concentrations de nano-SiO ₂ ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)	80
Figure VI.24	Contrainte de cisaillement adimensionnelle des plaques carrées sous chargement sinusoïdal avec variation des facteurs de la fondation élastique ($L/h=4$, $\zeta=\xi=0.5$)	82
Figure VI.25	Variations des contraintes adimensionnelles des plaques carrées sous chargement sinusoïdal ($L/h=4$, $K_W=K_S=10$, $\zeta=\xi=0.5$)	83
Figure VI.26	Déplacement transversal adimensionnel des plaques carrées sous chargement uniforme avec variation des facteurs de la fondation élastique ($L/h=4$, $Cr=0.10$, $\zeta=\xi=0.5$)	84
Figure VI.27	Déplacement transversal adimensionnel des plaques carrées sous chargement uniforme pour diverses concentrations de nano-SiO ₂ avec variation des facteurs de la fondation élastique ($L/h=4$, $\zeta=\xi=0.5$)	84

Liste des tableaux

Tableau I.1	Mesure de la carbonatation du béton en fonction de sa résistance	6
Tableau II.1:	Les caractéristiques des fibres	16
Tableau II.2 :	Propriétés typiques des composites	17
Tableau II.3 :	Fiche technique de nano-silice (AEROSIL 200)	21
Tableau III.1 :	Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des poutres	40
Tableau VI.1 :	Validation de la théorie actuelle des poutres contre celles de la littérature	67
Tableau VI.2 :	Validation de la théorie actuelle des plaques contre celles de la littérature	67
Tableau VI.3 :	Déplacements et contraintes adimensionnels des plaques rectangulaires en béton armé sous charges sinusoïdales ($\beta_w = \beta_s = 0$, $\zeta = \xi = 0.5$)	81

Liste des notations

L	Longueur de la poutre/plaque
h	Hauteur de la poutre/plaque
b	Largeur de la plaque
V	Volume total du composite
V_m	Volume de la matrice dans le composite
$V_r^{inclusion}$	Volume des nanoparticules dispersées dans les inclusions
$V_{inclusion}$	Volume des inclusions des sphères dans le V.E.R
V_r^m	Volume des nanoparticules dispersées dans la matrice
V_r	Volume du renfort dans le composite
C_r	Concentrations des nanoparticules
ζ	Fraction volumique des nano-SiO ₂ dans les inclusions par rapport au volume total de nanoparticules
ζ	Fraction volumique des inclusions par rapport au volume total du composite
E_{out}	Module effectif environnant
E_{in}	Module effectif des inclusions
E_m	Module de Young de la matrice
E_r	Module de Young du renfort
E_{hom}	Module de Young homogène
μ, ν	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement
K	Module de masse
u_0, w_0	Composantes du champ de déplacement dans le plan moyen
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y et z
σ_x	Contrainte normale
τ_{xy}, τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_z$	Déformations dans la direction x et z
γ_{xz}	Distorsion
δ_u, δ_w	Composantes du champ virtuel de déplacement
$\delta u_0, \delta \psi_x, \delta w_0$	Équations de mouvement
δU_b	Variation de l'énergie de la poutre
δU_f	Variation de l'énergie de la fondation
δK	Variation de l'énergie cinétique
δV	Variation du travail des forces extérieures
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}$	Champ de déformation transversal virtuel
∂	Dérivée partielle
Q_{ij}	Constantes élastiques
$N_x, M_x, P_x, Q_{xz}, R_{xz}$	Efforts normaux, de flexion et de cisaillement
A, B, D, E, F, H	Termes de rigidité de la poutre

I_0, I_1, I_2, I_3, I_5	Termes de l'énergie massique
$[\quad]$	Matrice
$\{ \quad \}$	Vecteur colonne
K_w	Paramètre de la fondation de Winkler
K_s	Paramètre de la fondation de Pasternak
ρ_m, ρ_r	Masse volumique de la matrice et du renfort
$U_{mn}, V_{mn}, \psi_{mn}, W_{mn}$	Paramètres arbitraires
X_s	Facteur de correction de cisaillement
I	Nombre imaginaire
P	Nombre définissant la loi de puissance
$f(z)$	Fonction de cisaillement
q	Charge
$\bar{w}$	Déplacement transversal adimensionnel (Flexion adimensionnelle)
$\bar{U}$	Déplacement axial adimensionnel
ω	Fréquence naturelle
$\hat{\omega}$	Fréquence naturelle adimensionnelle

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

Récemment, les nanotechnologies sont devenues un sujet brûlant en science et en ingénierie, et les chercheurs ont montré un grand intérêt pour le remplacement des matériaux qui ont longtemps été utilisés dans les structures en béton par un nouveau matériau pour obtenir des bétons plus durables. Il est bien documenté en chimie, physique et mécanique que cette production de bétons avec des matériaux bien conçus et développés donne un béton beaucoup plus dur et moins cher. L'un des nouveaux matériaux pouvant améliorer les propriétés mécaniques et physiques du béton est le nanomatériau, ce dernier peut changer le monde des bétons grâce à ses propriétés au niveau ultra fin.

À titre d'exemple de ces nanomatériaux, les nanoparticules de silice s'avèrent être d'excellents matériaux de renforcement, en effet, l'ajout de nano-SiO₂ au béton entraîne une compression plus élevée, une meilleure résistance à la traction et à la flexion; et en raison de leurs tailles allant de 1 à 500 nm, ils génèrent un temps de prise et une perméabilité à l'eau plus courts ainsi qu'une grande résistance aux attaques chimiques, c'est pour cette raison qu'ils peuvent faire partie de nombreuses structures en béton que nous voyons ces jours-ci. Bien que le coût élevé des nanoparticules puisse empêcher leur utilisation généralisée, elles sont plus avantageuses que d'autres adjuvants, en outre, il a été admis par des expériences que la nano-silice est non seulement respectueuse de l'environnement, mais pourrait également conduire à de meilleurs résultats par rapport au micro-SiO₂. La nano-silice peut améliorer les propriétés du béton et confère aux bétons une durabilité plus élevée. De plus, cela permet d'économiser du ciment et de réduire le coût final des travaux et la contamination environnementale. Au cours des deux dernières décennies, les études expérimentales sur l'effet du nano-SiO₂ en tant que matériau de renforcement pour les structures en béton ont fortement augmenté. Yu et al. [1] ont étudié, en ajoutant de la nano-silice, l'amélioration du mortier de ciment à cendres volantes à fort volume renforcé de fibres, les caractérisations de la minéralogie et de la microstructure ont montré que les NS condensaient l'interface fibre / matrice, et génèrent de meilleures propriétés mécaniques et de fracture. Behzadian et Shahrajabian [2] ont étudié les propriétés mécaniques des composites de béton contenant des déchets de PET (polyéthylène téréphtalate) et de nano-silice pour produire du béton plus léger, plus flexible et à haute résistance. Rupasinghe et al. [3] ont prédit en développant un modèle d'éléments finis multi-échelles basé sur la quantification de l'analyse d'image microstructurale, l'effet des particules de nano-silice sur la résistance à la compression des systèmes nanostructurés de ciment. Haruehansapong et al. [4] ont analysé l'effet de la taille des particules du nano-SiO₂ sur la résistance à la compression et le contenu de remplacement optimal du mortier de ciment, les résultats testés ont montré que les particules de NS présentaient une activité pouzzolanique élevée et pouvaient remplir les pores, résultant en des microstructures homogènes, denses et compactes. Qing et al.[5] ont étudié l'influence de l'ajout de nano-SiO₂ sur les propriétés de la pâte de ciment durcie par rapport à la fumée de silice. Alavi et Mirzadeh [6] ont modélisé les effets de la nano-silice, du rapport eau / liant, du rapport sable / liant et du temps de vieillissement (durcissement) sur la résistance à la compression des mortiers de ciment au moyen d'un réseau neuronal artificiel (RNA). Abd El Aleem et ses collègues [7] ont étudié l'effet de la nano-silice (NS) sur les caractéristiques d'hydratation, la dilatation thermique et la microstructure des pâtes et mortiers de ciment.

Introduction générale

Théoriquement, il y a un grand manque dans la littérature traitant l'effet de la nano-silice comme matériau de renfort dans les structures en béton. Zamanian et al. [8] ont étudié les colonnes en béton armé de nanoparticules de dioxyde de silicium (SiO_2) sous flambage non linéaire. Azmi et ses collègues [9] ont étudié les réponses dynamiques de colonnes en béton armé de nanoparticules de silice soumises à une charge explosive. Amnieh et al. [10] ont comparé expérimentalement et théoriquement en utilisant la théorie des plaques de Mindlin, l'analyse dynamique de blocs de béton mélangés par des nanoparticules de SiO_2 soumises à une charge explosive. Shokravi [11] a étudié la vibration non linéaire de poteaux en béton armé de nano-silice sur la base du modèle de poutre de Timoshenko. Alijani et Bidgoli [12] ont effectué une analyse vibratoire d'une fondation en béton renforcé avec des nanoparticules de SiO_2 reposant sur une fondation élastique; ils ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre-élevé et, au moyen de solutions analytiques, ont calculé la fréquence du système.

De nombreux auteurs cherchaient des moyens de développer des théories de déformation par cisaillement d'ordre-élevé (HSDT), afin d'éviter d'utiliser les facteurs de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieures et inférieures des structures poutres/plaques (Reddy [13], [14], Touratier [15], Soldatos [16], Mantari et al. [17]) et restent à ce jour très efficaces, mais surtout, pour leur précision dans la prédiction des réponses des structures épaisses. Dans un certain nombre d'articles récents, une nouvelle théorie raffinée et robuste pour la réponse en flexion et la vibration d'une structure simplement supportée avec seulement quatre fonctions inconnues a été développée par Tounsi et ses co-auteurs [Bourada et al. [18], Bachir Bouiadjra et al. [19] et Kettaf et al. [20], Ait Amar Meziane et al. [21], Ait Yahia et al. [22]]

L'idée de cette étude n'était pas de glorifier l'utilisation des nano- SiO_2 , car comme on le sait, ces additifs n'ont pas une méga influence sur les bétons. Nous avons commencé sur la base de la récupération et de la valorisation des déchets industriels des métaux de silicium et des alliages Ferro-Silicium qui polluent l'environnement, en procédant leur composition chimique, et en l'utilisant sous une autre forme dans le mélange de béton pour gagner en résistance aux propriétés mécaniques.

Au meilleur de notre connaissance, et motivé par le fait que l'analyse statique des poutres renforcées par des nanoparticules de silicium n'a pas été étudié, nous visons à présenter un modèle mathématique pour la simulation des systèmes équivalents. Les effets d'agglomération sont considérés sur la base de l'approche de Voigt. Ici, les poutres sont modélisées avec un modèle de théorie de la déformation par cisaillement d'ordre-élevé. Les équations de mouvement sont obtenues sur la base du principe du travail virtuel. En utilisant les solutions analytiques, les effets de différents paramètres tels que le pourcentage en volume des nanoparticules, le type de chargement, les paramètres géométriques et la fondation élastique, sur l'analyse des contraintes et des déplacements ainsi que des fréquences des poutres en béton armé renforcé par des nanoparticules de silicium, sont calculés et affichés. En utilisant la théorie des plaques, une analyse statique d'un tablier en béton armé renforcé par de la nano- SiO_2 sera effectuée comme un plus dans cette thèse, et des résultats seront présentés.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES PATHOLOGIES DES PONTS

I.1 Définition

Un pont est un ouvrage permettant de franchir un obstacle naturel ou artificiel (cours d'eau, canal, une route, ou une voie ferrée) en passant par-dessus, il fait partie de la famille des ouvrages d'art, et sa construction relève du génie civil. On désigne par pont route, un ouvrage dont le franchissement permet le passage d'humains et de véhicules et on appelle écoduc ou écopont, des passages construits ou « réservés » dans un milieu aménagé, pour permettre aux espèces animales, végétales, fongiques, etc. de traverser des obstacles construits par l'être humain ou résultant de ses activités.

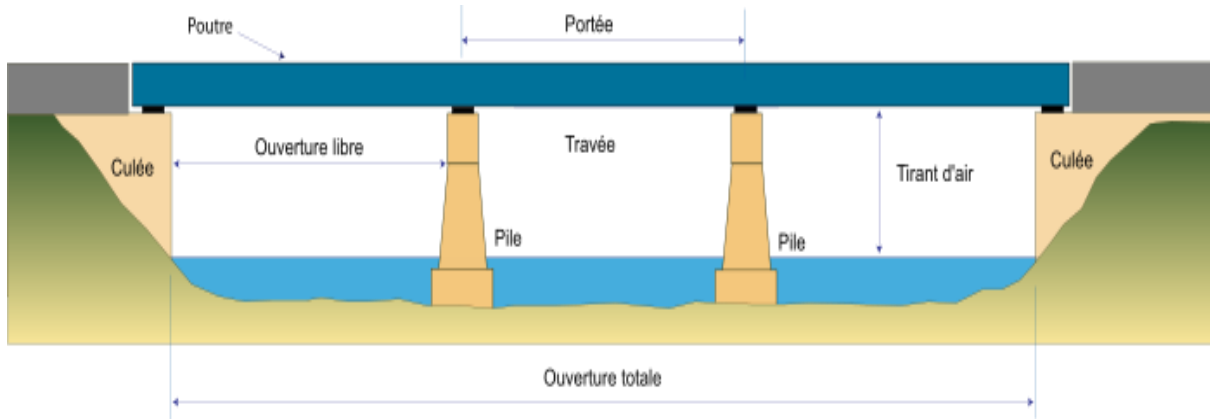


Figure I.1 : Schéma général d'un pont

I.2 Éléments constitutifs d'un pont

Outre que les fondations et les équipements, le pont est constitué essentiellement de deux parties principales :

Le tablier : C'est un élément résistant, reposant sur les appuis (piles ou culées), portant la voie, qui supporte directement les charges roulantes sur cette dernière. C'est la partie quasi horizontale située sous la voie portée, il comprend les éléments porteurs dans le cas des ponts à poutre où est supportée par eux dans le cas des ponts en arc ou des ponts à câbles. La couverture ou platelage est la partie supérieure du tablier destinée à supporter les efforts dus à la circulation (dalle en béton, dalle orthotrope etc.). Le tablier comporte aussi des équipements nécessaires à son utilisation : les garde corps, les dispositifs.

Les appuis : C'est la partie permettant de transmettre les charges du tablier vers les fondations. On distingue les appuis intermédiaires qui sont les piles et les appuis de rive qui sont les culées qui assurent la liaison avec le sol et le remblai. Les piles travaillent principalement en compression, mais aussi en flexion sous l'action dynamique du vent sur le tablier et les autres éléments de superstructures du pont, particulièrement pour les ponts de grande hauteur. Après les piles de ponts en maçonnerie des ponts voûtés et les piles métalliques des ouvrages du XIX^e siècle, les piles modernes sont en général en béton armé. Certaines d'entre elles peuvent être précontraintes verticalement sur une section ou sur la totalité de leur hauteur, précisément pour lutter contre ces efforts de flexion.

Le dimensionnement consiste donc à définir, en fonction de charges appliquées, la section de la pile ainsi que la nature et les dispositions des armatures d'acier.

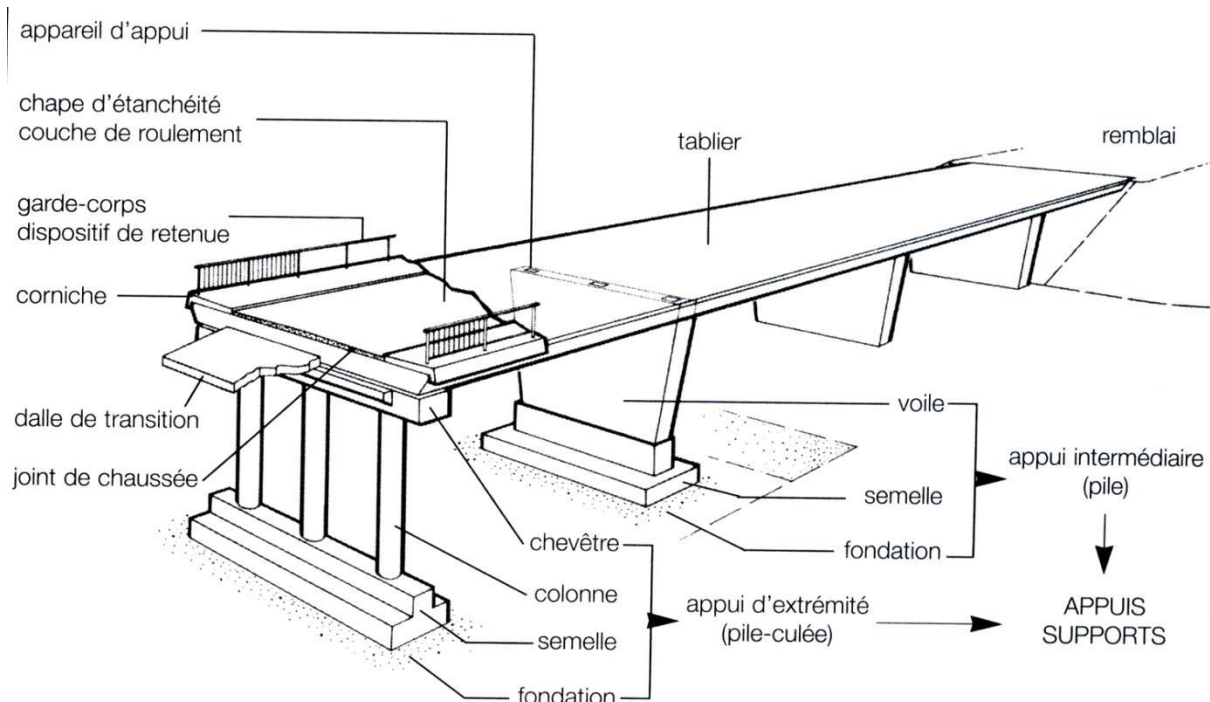


Figure I.2 : Les équipements d'un pont

I.3 Modes d'altération des ponts en béton armé

La durée de vie d'un pont est l'une des préoccupations principales de l'ingénieur. Pour assurer la tenue de l'ouvrage, il doit prendre en compte les critères suivants :

- Le type du matériau.
- Les différentes actions physiques et chimiques sur l'ouvrage.
- La forme des éléments structuraux et les dispositions constructives.
- La maintenance pendant la durée de vie de l'ouvrage.

Dans le cas des ponts en béton armé ou en béton précontraint, la durée de vie se mesure par le temps nécessaire à l'amorçage de la corrosion de leurs aciers. Cette durée varie normalement entre 80 et 120 ans. Cette corrosion a deux causes principales : La fissuration du béton et sa porosité.

I.3.1 La carbonatation

L'agissement du gaz carbonique sur le béton est un enchainement qui commence par l'infiltration du premier (gaz carbonique) dans la matrice du béton à travers les pores de ce dernier. Une fois pénétré, le CO_2 se dissout dans l'eau et rentre en réaction avec l'hydroxyde de calcium ($\text{Ca}(\text{OH})_2$) contenu dans la pâte de ciment. Il en résulte un acide dont la composition chimique est le H_2CO_3 , et qui réagit avec les hydrates du ciment dans une réaction appelée la Carbonatation. L'écriture chimique de cette réaction est donnée par l'équation (I.1) :



La formation de nouvelles particules d'eau est parmi les conséquences de cette réaction, ce qui permet la continuation du processus d'hydratation du ciment non encore hydraté d'où de nouveaux hydrates sont obtenus et la compacité du béton est augmentée. La carbonatation est donc une réaction chimique avantageuse au béton, puisque elle permet le colmatage des vides et donc d'arrêter, ou du moins diminuer, la pénétration des agents offensifs extérieurs. Elle permet également d'augmenter la résistance du béton et sa durabilité. Cette réaction sera amplement propice pour les bétons non armés. Cependant, il n'en est pas de même pour les aciers, pour lesquels cette réaction est très calamiteuse. Inévitablement, la carbonatation du béton déclenche la chute du pH d'une valeur comprise entre 12,6 et 13,5 à une valeur d'environ 9 et le phénomène de corrosion s'initie. Dès que le front de carbonatation atteint la zone de l'armature, celle-ci peut commencer à s'oxyder. La formation de rouille étant toujours accompagnée d'une augmentation de volume, il en résulte généralement un éclatement du béton d'enrobage [23].

I.3.1.A Paramètres influençant la carbonatation du béton

L'accélération de la cinétique de la carbonatation du béton est dominée par un nombre de paramètres. Ces derniers sont la porosité du béton, la quantité de chaux contenue dans le ciment, la concentration du CO_2 dans l'atmosphère et l'humidité de l'environnement. Il est à remarquer que, l'eau étant le vecteur de déplacement des agents agressifs, le gaz carbonique ne peut se diffuser à travers le béton que si ce dernier n'est pas totalement saturé et non parfaitement sec en même temps. Un autre facteur augmentant la perméabilité du béton est la quantité de calcaire ajoutée au ciment lors de sa fabrication à l'usine. Cette perméabilité permet la diffusion du CO_2 ou d'autres agents agressifs dans le béton. L'ajout de calcaire au ciment doit donc être utilisé avec précaution.

I.3.1.B Mesure de la profondeur de carbonatation

Théoriquement, par l'emploi de formules empiriques, la profondeur de pénétration de la carbonatation peut être obtenue. Au laboratoire, des techniques de mesures telles que, l'analyse chimique, la diffraction des rayons X, la spectroscopie infrarouge ou l'analyse thermogravimétrie permettent d'obtenir la profondeur réelle de carbonatation dans un échantillon de béton prélevé sur un élément de la structure.

Ces techniques de mesure étant toutes relativement chères, on fait presque toujours recourt à une analyse simple qui consiste en le traitement de la surface du béton par une solution de phénolphthaléine diluée dans de l'alcool. Après un court moment de l'application, le béton sein ($\text{pH} > 9$) se colorie en rose foncé alors que celui carbonaté garde sa couleur grise initiale (Figure I.3). Un instrument de mesure simple est alors utilisé pour la mesure de la profondeur. La vitesse de carbonatation du béton est proportionnelle à sa porosité, donc à sa résistance aussi (Tableau I.1), mais son évolution est en générale estimée à 2 mm/an.

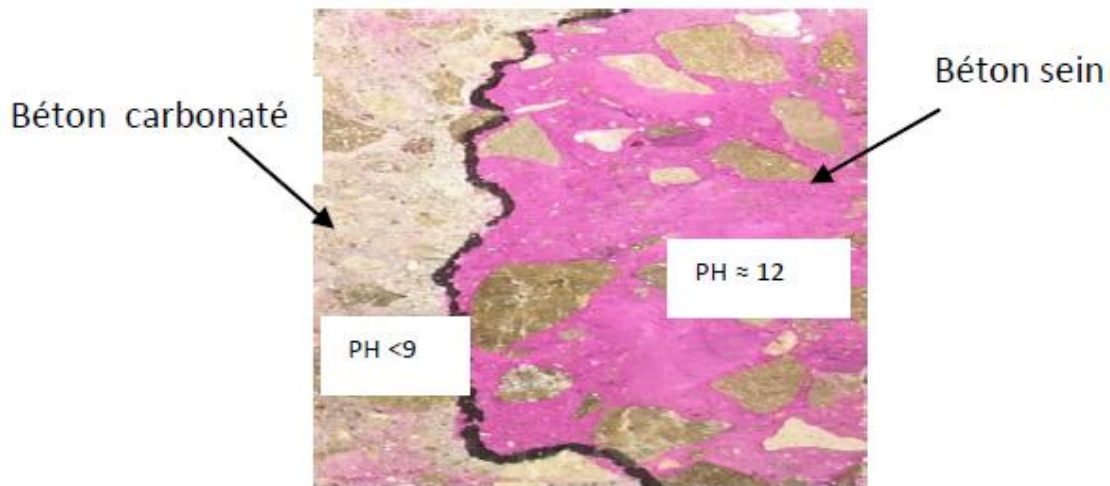


Figure I.3 : Mesure de la profondeur de carbonatation à l'aide du test de phénolphthaléine

Tableau I.1 : Profondeur de la carbonatation du béton en fonction de sa résistance [23]

Conditions d'exposition du béton	Profondeur de carbonatation après 50 ans (mm)	
	Béton de 25 MPa	Béton de 50 MPa
Abrité	60 à 70	20 à 30
Exposé à la pluie	10 à 20	1 à 2

I.3.2 L'attaque des sulfates

Parmi les plus graves pathologies du béton, celles engendrées par la réaction sulfurique interne (RSI) ou externe (RSE). Dans la RSI, la réaction est provoquée par la forte chaleur d'hydratation du ciment dans les pièces massives (semelle, raidisseur de pile, chevêtre,...), accélérée par un bétonnage par temps chaud ($T > 35^{\circ}\text{C}$). Dans la RSE, les sulfates provenant de sources externes au béton, telles que les eaux de mer et eaux séléniteuses, entrent en réaction chimique avec les autres composants du béton et forment l'anhydrite; produit qui s'hydrate en gypse secondaire et réagit avec les aluminates de calcium pour former l'ettringite dont, la cristallisation accroît des pressions considérables pouvant conduire à la dégradation du béton. Ces pressions engendrent la fissuration du béton ce qui permet à d'autres agents agressifs d'y pénétrer. La figure I.4 montre l'importance des fissures développées par un échantillon de pâte de ciment soumis à un test de résistance aux sulfates.



Figure I.4 : Fissurations importantes d'un échantillon de béton soumis au test de résistance aux sulfates (le bâtonnet blanc indique la longueur initiale de l'échantillon) [24]

Il est à souligner que des analyses chimiques de l'eau contenue dans le sol d'implantation de l'ouvrage soit entreprise au stade de l'étude afin d'éviter la réaction chimique entre les sulfates provenant du sol et les composants du ciment. Dans le cas où une présence des sulfates dépassant le taux fixé par les normes est confirmée, un ciment résistant aux sulfates doit être utilisé. Cependant, afin d'éviter la RSE, le bétonnage des pièces massives par temps chaud est à proscrire et l'utilisation d'un ciment à faible taux d'aluminate tricalcique ($C_3A < 10\%$) est fortement recommandée.

I.3.3 L'attaque des ions-chlorures

Les chlorures pénètrent dans le béton par diffusion, qui augmente avec l'augmentation du rapport E/C, et réagissent avec les aluminates de calcium pour former les chloro-aluminates, dits chlorures liés (Figure I.5a). Ces derniers sont un produit non nocif pour le béton. Cependant, une partie des ions chlorures se trouve sous forme ionique, dite chlorures libres (Figure I.5b), dans la solution interstitielle du béton et lorsque leur concentration au niveau des armatures atteint une valeur suffisante, la destruction du film protecteur survient ; c'est-à-dire que l'acier est dépassivé et la corrosion est initiée.

Deux sources sont les origines des chlorures : la première est interne au béton, il s'agit des adjuvants et qui doivent donc être utilisés de façon rationnelle. La seconde source est externe au béton: eau de mer, eaux souterraines, eaux usées et sels anti verglas [24].

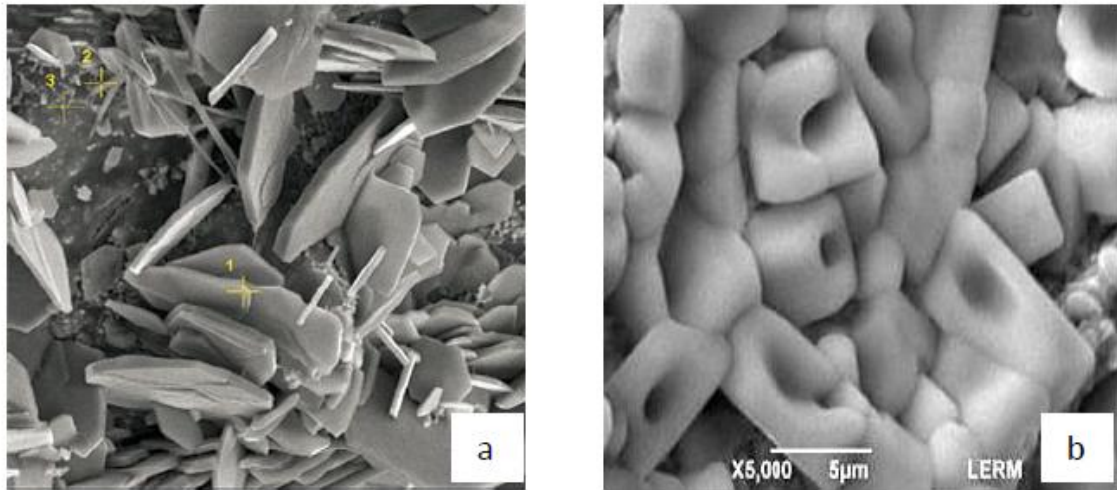


Figure I.5 : Chlorures dans la microstructure d'un béton : (a) liés et (b) libres (NaCl)

L'action de l'eau de mer est complexe, mais moins nocive que certaines eaux fortement salées ou séléniteuses, et cela grâce à la carbonatation de la surface du béton faisant obstacle à la pénétration des sulfates. Cependant, le sulfate de magnésium qui est un sel acide présent dans cette eau, réagit avec l'hydroxyde de calcium pour former du sulfate de calcium et de l'hydroxyde de magnésium. Le premier conduit à la formation de l'ettringite secondaire. Le chlorure de magnésium est un sel acide qui forme avec l'hydroxyde de calcium le chlorure de calcium qui réagit avec les aluminates de calcium. Et en présence des sulfates, de l'ettringite expansive se forme, engendrant des fissurations du béton.

I.3.4 L'alcali-réaction

La réaction alcali-silice est une réaction chimique à évolution lente entre certains granulats potentiellement réactifs et les alcalins solubles (ions sodium Na^+ et potassium K^+) normalement présents dans les constituants du béton (le ciment pour la plus grande part, soit environ 80 %), ou provenant du milieu environnant tels que les eaux souterraines, sels de déverglaçage et eau de mer. L'alcali-réaction ou cancer du béton, a été identifiée pour la première fois comme cause de désordres d'un ouvrage en béton armé en 1940 en Californie aux USA. Les pathologies liées à l'alcali-réaction dont, aucun remède n'existe jusqu'à ce jour, ont une période d'incubation longue (2 à 40 ans).

En présence d'une humidité élevée ($\text{HR} > 80\%$), la silice réactive contenue dans les granulats réagit avec la pâte de ciment et conduit à la formation de gel gonflant contenant des silicates alcalins entraînant la fissuration du béton.

Les principaux symptômes d'une alcali-réaction sont une fissuration en forme d'un faïençage des parois de béton avec des contours polygonaux, une fissuration orientée dans le sens des contraintes pour les parties d'ouvrage pré ou post contraintes, ou fortement armées et la formation de cratère et de gel blanchâtre durcissant à l'air libre. Cependant, pour confirmer la présence de la pathologie, des analyses au microscope à balayage électronique (MEB) sont à réaliser.

I.3.5 Le gel-dégel

L'origine de certaines dégradations du béton est due aux cycles de gel et de dégel. Car, sous la baisse de température au-dessous du degré de congélation, l'eau contenue dans les granulats ou dans les capillaires de la pâte de ciment se transforme en glace, d'où une augmentation du volume du béton se traduisant par une expansion engendrant des pressions internes importantes, dépassant la capacité de résistance à la traction du béton. La répétition fréquente des cycles de gel - dégel fait apparaître un réseau dense de microfissures à la surface du béton. Ce réseau évolue plus ou moins rapidement vers un feuilletage ou un écaillage de la surface. Les désordres du béton sont d'autant plus graves que les cycles de gel et de dégel sont rapides et fréquents. Notons que les parois de béton verticales sont moins exposées à ce genre de dégâts comparées à celles horizontales. La figure I.6 montre un exemple d'une paroi de béton écaillée sous l'effet combiné du cycle gel-dégel et de l'utilisation des sels de déverglaçage.



Figure I.6 : Effet du gel-dégel sur le béton : écaillage du béton d'enrobage et corrosion des armatures

I.4 Pathologie des ponts en béton armé

Dans les ponts en béton armé ou précontraint, l'enrobage du béton constitue une barrière contre tous types d'agression externe. Malgré cela, l'épreuve du temps, le manque d'entretien et l'effet des actions agissant sur un pont, altèrent les matériaux et peuvent même diminuer la capacité portante de la structure.

I.4.1 Pathologie des ponts courants en béton armé

Si on traite du cas des ponts courants en béton armé, et lorsqu'ils sont conçus en respectant les règles de l'art, ces derniers ne connaissent pas de pathologies spécifiques, sauf problème particulier de fondation. Il est cependant utile d'insister sur les points suivants afin d'éviter l'apparition de désordres [25]:

- Le ferrailage des angles aigus dans les ponts dalles biais doit être prévu avec la densité et l'orientation appropriées, le cas échéant des fissures apparaissent au niveau de ces angles.
- Les actions thermiques dans les ponts dalles de grande largeur provoquent une flexion transversale pouvant entraîner une fissuration longitudinale de l'intrados. Toutefois, si ces fissures sont correctement pontées, la durabilité de l'ouvrage n'est pas mise en cause.
- Si leur ferrailage longitudinal n'est pas suffisamment dense, les encorbellements latéraux larges des ponts dalles ou des ponts poutres sous chaussées continues (Figure I.7), peuvent être le siège de fissurations dans les zones voisines des appuis intermédiaires.
- La traverse et les pieds droits des ponts cadres et portiques peuvent se fissurer à cause du retrait différentiel entre des bétons coulés à des époques différentes ou d'éventuels tassements différentiels si le ferrailage n'a pas la densité appropriée.

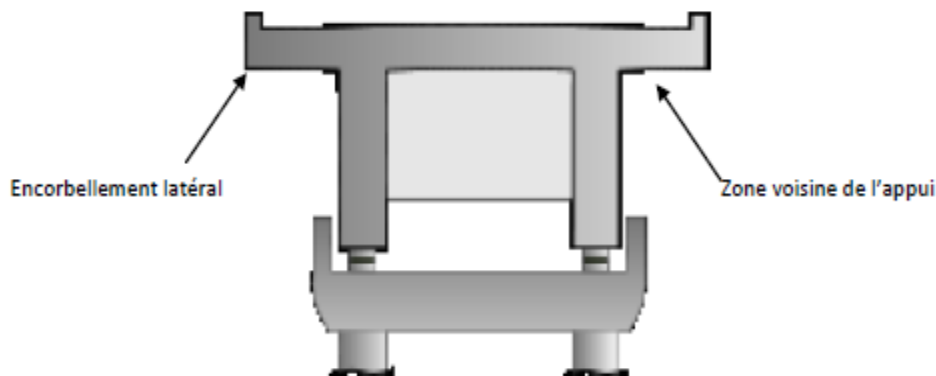


Figure I.7 : Section transversale type d'un pont courant en béton armé

I.4.2 Pathologies issues de défauts de conception

L'intervention d'un ingénieur spécialisé est exigée pour la conception d'un pont, car c'est une tâche très délicate. Il s'agit, de contempler tous les critères du projet et tous les éléments ayant trait à la bonne tenue de l'ouvrage durant sa période de vie. En cas de séisme, ces erreurs peuvent entraîner des conséquences catastrophiques, car la négligence ou la mauvaise prise en compte du phénomène sismique dans le calcul des charges peut donner lieu à des pathologies graves.

Il est donc clair que la négligence, ou bien l'oubli d'une charge ou d'une action durant la phase de conception du projet, peut affecter la résistance de la structure et engendrer de

lourdes conséquences. Ces erreurs de conception peuvent conduire à deux types d'insuffisance de la résistance : celle à la flexion et/ou celle à l'effort tranchant.

I.4.2.A Conséquence sur la résistance à la flexion

L'insuffisance de résistance à la flexion fut, durant le début de l'ère de réalisation des ponts en béton armé puis précontraint, la cause principale des désordres plus ou moins graves. Les causes les plus courantes de cette insuffisance étaient la non considération ou l'oubli des actions thermiques dans les calculs des charges. Les effets des déformations différées gênées dans les ouvrages construits par phases (redistribution des efforts par fluage), encore méconnus dans le passé, et une évaluation optimiste de l'effort de précontrainte ou des effets de dénivellation d'appuis [25]. La figure I.8 montre l'emplacement classique des fissures dues à une insuffisance de résistance à la flexion.

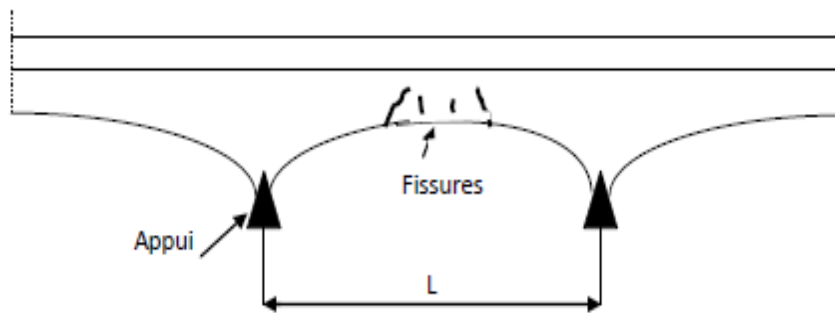


Figure I.8 : Fissures dues à une insuffisance de résistance à la flexion localisées au milieu de la poutre du tablier d'un pont

I.4.2.B Conséquences sur la résistance à l'effort tranchant

Les erreurs de conception entraînant des défauts de résistance en flexion engendrent également des défauts de résistance à l'effort tranchant. Cette insuffisance se traduit par une allure particulière de la fissuration dans les ouvrages victimes de ces erreurs (Figure I.9). L'origine de ces erreurs est due à une évaluation erronée des contraintes tangentielles, conduisant à une épaisseur insuffisante des âmes des poutres, ou des réductions d'effort tranchant par la précontrainte. Cependant, il faut garder à l'esprit qu'une fissure n'est pas toujours un signe pathologique, même dans le cas d'un béton précontraint. Les contraintes de traction dans le béton sont à l'origine de fissures de faible épaisseur, ne présentant aucun préjudice pour la résistance de l'ouvrage.

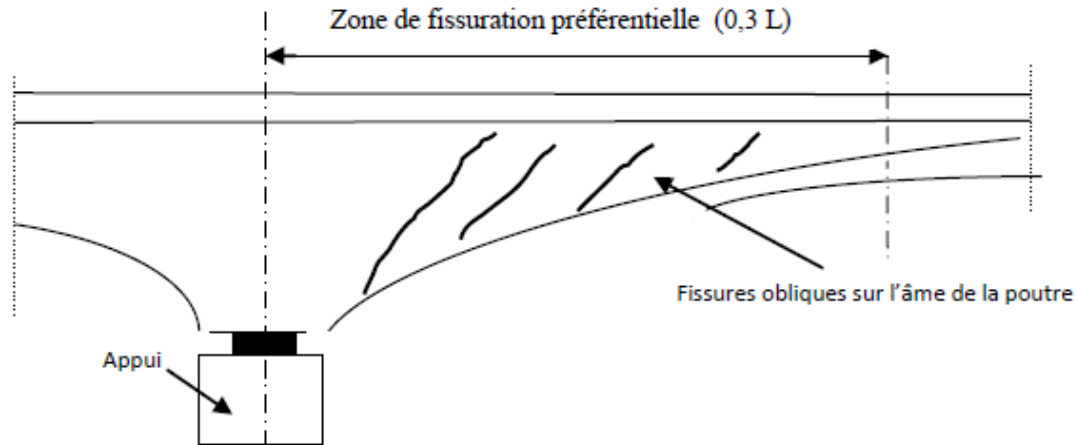


Figure I.9 : Zone d'apparition des fissures dues à l'insuffisance de résistance à l'effort tranchant

Les défauts de conception peuvent être à l'origine d'autres types de désordres dans les ponts. Ces désordres se traduisent le plus souvent par :

- éclatement du béton dans les nœuds très sollicités, en raison d'un manque en des armatures transversales
- importante fissuration à défaut d'absence ou d'insuffisance d'armatures de peau.
- éclatements du béton par poussées au vide des barres tendues ou comprimées.
- aspect dégradé de l'ouvrage ou de certains éléments affectant la durabilité de l'ouvrage, dû à la corrosion totale des armatures en raison d'un enrobage insuffisant.

I.4.2.C Pathologies résultant d'une insuffisance du modèle d'étude

Un modèle plus ou moins simplifié est utilisé afin d'étudier les ponts, qui sont des structures tridimensionnelles. Dans de nombreux cas, le modèle employé pour étudier la résistance d'ensemble est constitué par un réseau de barres reliant des nœuds, chaque barre représentant un élément assimilé à une poutre dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont évaluées à l'aide des méthodes de la résistance des matériaux usuelles. De nos jours, des modèles numériques complexes (modèles aux différences finies ou aux éléments finis) et des outils sophistiqués (SAP2000, ROBOT,...etc.) sont utilisés pour analyser ces ouvrages.

Mais, il faut garder à l'esprit que chaque fois que l'on représente une structure réelle par un modèle numérique, on introduit une erreur systématique due à l'insuffisance du modèle. Théoriquement les effets de cette insuffisance sont couverts par des coefficients appropriés exigés par les codes de calcul aux états limites. Cependant, ces coefficients de sécurité ne sauraient couvrir des erreurs découlant de simplifications exagérées ou de calcul erronés.

I.5 Conclusion

Les ponts sont des infrastructures d'une grande importance dans le système routier d'un pays, dans ce chapitre, on a défini l'ouvrage 'pont' d'une façon générale en donnant un aperçu sur son développement ainsi que les différents éléments qui le constituent. Durant leur vie, ces ouvrages d'art sont sollicités par des actions de différents types (permanentes, dynamiques, accidentelles, naturelles,...) ce qui détériore leur qualité structurale initiale.

D'autre part, l'environnement où l'ouvrage est implanté influence fortement l'état des matériaux constituant ce dernier. En effet, les sols ou les eaux contenant des agents agressifs tels que les chlorures et les sulfates ainsi que le gaz CO_2 contenu dans l'atmosphère, sont à l'origine des pathologies du béton et des aciers.

Puisque la fissuration du béton est inévitable même sous des charges normales, les règlements tels que le BAEL et l'Eurocode 2 tendent à minimiser la taille de ces fissures, et ce en limitant les contraintes de traction en service de l'acier selon le taux de gravité de la fissure ; peu, normalement ou très préjudiciable.

Pour réduire la porosité du béton, sont employées les solutions suivantes :

- Assurer un bon enrobage des granulats.
- L'emploi de fluidifiant pour minimiser la quantité d'eau supplémentaire (eau libre).
- Augmenter la compacité du béton.

CHAPITRE II

MÉTHODES ET PRINCIPES DE RENFORCEMENT DES BÉTONS

II.1 Définition du béton

C'est un matériau composite artificiel à matrice minérale, constitué par de matériaux granulaires (sables, graviers) enrobés par un liant hydraulique comme le ciment, la chaux ou liants hydrocarbonés comme le bitume. Il se fabrique donc à partir d'éléments chimiquement actifs (ciments, additifs, adjuvants, eau) et d'éléments mécaniques (sables, gravillons, air). La finalité du sable est de combler les vides entre les graviers. Le ciment est composé de calcaire, d'argile et de gypse. Quand l'eau s'évapore, le béton initialement pâteux se solidifie. Le ciment assure sa cohésion.

II.1.1 Propriétés mécaniques du béton

Le béton, tout d'abord, a une propriété magique qui est que, quelques heures après avoir mélangé les matières premières, on voit le mélange durcir tout seul : le ciment fait prise. C'est un matériau fragile avec un liant de pâte de ciment ayant une structure poreuse qui contient des micros ($< 2\text{nm}$ de diamètre) et une fine méso porosité (2-50 nm). Selon ses constituants, il peut être très résistant à la compression ($>200\text{ MPa}$ résistance ultime).

Ces différences sont dues autant à la structure interne des pores du béton qu'au matériau lui-même. En outre, la réaction d'hydratation entre les matériaux cimentaires et l'eau ne produit pas une croissance, mais forme une structure complexe qui devient plus dense au fil du temps. Cette structure est généralement moins dense quand elle entre en contact avec les granulats, cela réduit l'adhérence entre la matrice de ciment fournissant une voie pour la propagation de fissures.

Dans le béton traditionnel, la faiblesse dans la traction et la flexion est vaincue par la conception pour minimiser les effets de ces formes de chargement et par l'ajout d'acier et d'armature pour fournir une résistance suffisante lorsque les charges ont effectivement lieu. Les tiges d'armature en acier servent à accueillir les contraintes de traction dans les membranes de flexion. Les aciers de précontraintes mis sous tension maintiennent le béton environnant sous compression pour éviter les fissures dues au chargement.

II.1.2 Durabilité et durée de service des ouvrages en béton

La prise en compte de la durabilité des matériaux, lors de la conception d'un ouvrage est indispensable pour garantir sa durée de service et optimiser son coût global. Elle est désormais facilitée avec l'arrivée de nouvelles normes, guides et recommandations spécifiques à la durabilité.

En effet, les connaissances actuelles sur les ciments et les bétons permettent d'adapter encore mieux la composition et la formulation des bétons aux contraintes environnementales auxquelles ils seront soumis, tout en respectant les critères de performances mécaniques.

La durabilité d'un ouvrage caractérise sa capacité à conserver les fonctions d'usage pour lesquelles il a été conçu (fonctionnement structurel, sécurité, confort des usagers) et à maintenir son niveau de fiabilité et son aspect, dans son environnement, avec des frais de maintenance et d'entretien aussi réduits que possible.

Le béton est un matériau durable, car il est toujours possible d'adapter sa composition et sa formulation aux contraintes environnementales.

Un ouvrage doit résister aux charges auxquelles il est soumis, ainsi qu'aux actions diverses telles que le vent, la pluie, le froid, la chaleur, le milieu ambiant... tout en conservant son esthétisme. Il doit satisfaire les besoins des utilisateurs au cours du temps.

II.2 Les différents types de béton

II.2.1 Béton armé

Le béton armé est un matériau composite utilisé pour des ouvrages demandant une résistance élevée à la traction, et qui allie les propriétés mécaniques du béton et celles de l'acier (alliage de fer et carbone en faible pourcentage). Ces aciers sont appelés des armatures métalliques, judicieusement disposées, reprennent les efforts de traction (barre, treillis soudés, etc.). On distingue les armatures longitudinales disposées suivant l'axe longitudinal de la pièce, des armatures transversales disposées dans des plans perpendiculaires à l'axe de la pièce.

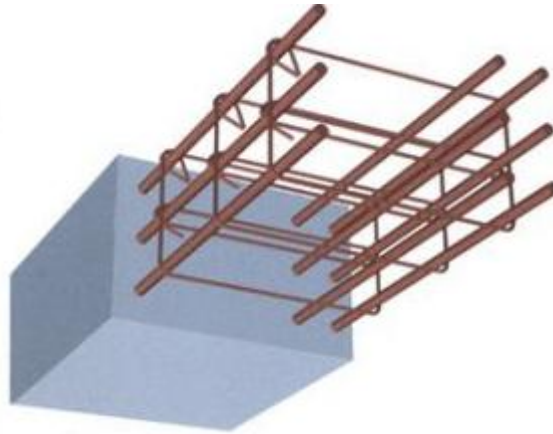


Figure II.1 : Béton renforcé par des armatures d'acier

Aujourd'hui, le béton armé est en pleine mutation; les moyens et les techniques de renforcement évoluent tout comme la plasticité et la nature des adjuvants. Les innovations permettent d'effectuer des coulées plus contiguës et donc de créer de nouvelles surfaces continues, des formes plus élastiques.

Pour les ouvrages où le béton devra être résistant à la traction, les aciers sont placés dans la zone inférieure (de traction). Même l'acier doit être pourvu d'aspérités à sa surface afin d'obtenir une réelle adhérence entre les deux matériaux. Solide et durable dans le temps, le béton armé est facile à manipuler et à mettre en place, et surtout résistant au feu.

II.2.2 Béton précontraint

Le béton précontraint est un matériau composite de construction figurant parmi les différents types de béton (aux côtés des bétons agglomérés, armés, de ciment, etc.) dans lequel on introduit, avant sa mise en service, des tensions opposées à celles qu'il devra subir.

Le béton résistant mieux en compression qu'en traction, le but du précontraint est d'obtenir des pièces qui ne travailleront qu'à la compression.

La précontrainte peut être appliquée au béton :

Soit par pré-tension (mise en tension des aciers avant coulage du béton) : Technique de précontrainte d'éléments préfabriqués, nommée également "par fils adhérents", consistant à mettre en tension les armatures de précontrainte avant la prise et le coulage du béton.

Soit par post-tension (mise en tension de câbles après durcissement du béton) : Technique relativement complexe, est généralement réservée aux grands ouvrages (comme les ponts), consistant à mettre en tension les armatures de précontrainte qui sont constituées de câbles d'acier à haute limite d'élasticité, Après la prise du béton (son durcissement), les câbles sont tendus par actionnement progressif de vérins de manière à comprimer l'ouvrage au repos.

II.2.3 Béton fibré

La composition du béton fibré est très proche de celle du béton traditionnel. Au mélange habituel de ciment, de sable, de gravier et d'eau sont ajoutées des fibres de natures différentes. Elles peuvent ainsi être métalliques, organiques ou céramiques, pour garantir la fluidité du mélange, on ajoute souvent des adjuvants.

De différentes tailles (de 5 à 60 mm de long), les fibres sont dosées entre 0,5 et 2 % du volume total, soit environ entre 5 et 150 kilos par mètre carré de béton. Chaque type de fibres possède ses propres caractéristiques et atouts.

II.2.3.A Classification des fibres

Les fibres utilisées dans la fabrication des bétons peuvent être classées en trois grandes familles qui seront montrées dans le tableau suivant (Tableau II.1) :

Tableau II.1 : Les caractéristiques des fibres

Les types	Matériaux	Caractéristiques
Fibres métalliques	Acier, Fonte, Inox	Bonne résistance à la flexion, à la traction et à la rupture. Réduction de la dimension des fissures.
Fibres organiques	Acrylique, Aramide, Carbone, Kevlar, Polyamide Polypropylène/Polyéthylène, Polypropylène	Fibres souples, ce qui améliore leur ouvrabilité. Peu résistantes aux températures élevées (140-170°C maximum).
Fibres minérales	Basalte, Mica, Verre, Wollastonite	Excellente tenue au feu (800°C maximum). Bonne isolation thermique. Permet la fabrication de parois très minces.

Tableau II.2 : Propriétés typiques des composites [26]

Composite unidirectionnel	Contenu de fibre (% en poids)	Densité (Kg/m ³)	Module d'élasticité (GPa)	Resistance à la traction (MPa)
Fibre de verre /polyester	50-80	1600-2000	20-55	400-1800
Fibre de carbone /époxyde	65-75	1600-1900	120-250	1200-2250
Fibre d'Aramide/époxyde	60-70	1050-1250	40-125	1000-1800

Indépendamment du type des fibres, on a la même courbe contrainte-déformation pour ces matériaux qui est : élastique linéaire jusqu'à la rupture qui est fragile en traction. Les courbes contrainte-déformation présentées dans la figure II.2 pour les fibres (verre, carbone, aramide) et pour l'acier standard, montrent clairement le comportement ductile de l'acier et fragile des matériaux composites.

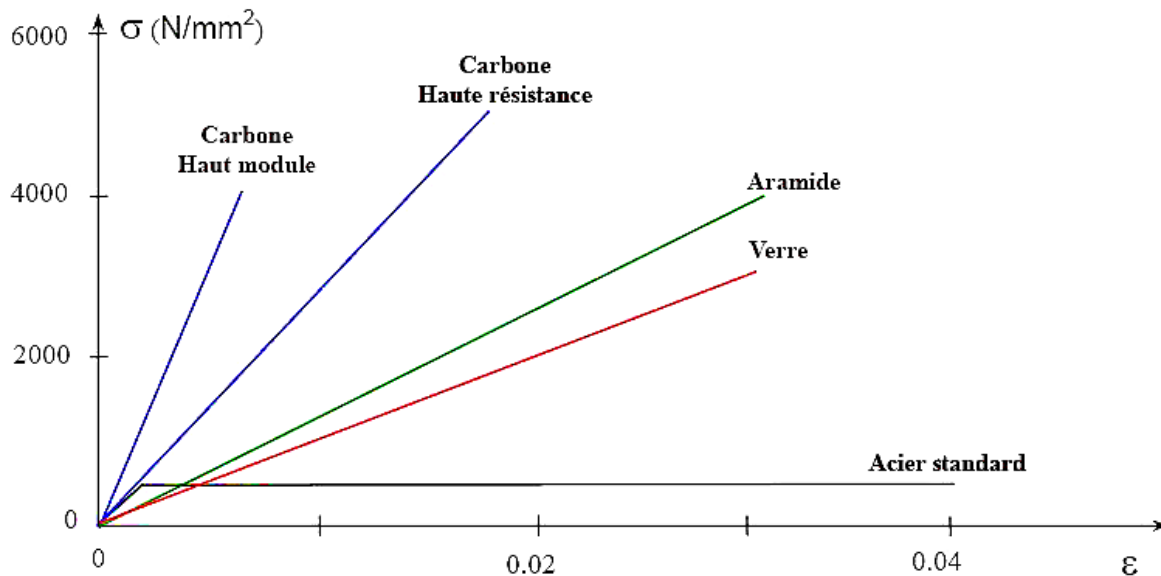


Figure II.2 : Courbes contrainte-déformation (Fibres - acier)

II.2.4 Béton à hautes performances (BHP)

Leurs histoires commencent au Japon dans les années 1980. Les BHP sont des bétons dits de hautes performances car ils possèdent de meilleures caractéristiques que les bétons normaux tels que :

- Une résistance à la compression à 28 jours supérieure à 50 MPa sur cylindre.
- Un rapport Eau efficace / liant équivalent inférieur à 0,4.

Ces bétons possèdent de multiples performances : des propriétés exceptionnelles à l'état frais, des performances aux jeunes âges et des résistances mécaniques importantes à long terme.

II.2.5 Béton à très hautes performances (BTHP)

Le béton dont la composition (en présence de micro-silice) et la sélection des constituants permet d'atteindre des performances supérieures aux bétons ordinaires sont nommés des bétons à très hautes performances (BTHP). Leurs résistances caractéristiques à la compression sont comprises entre 100 et 150 MPa donc supérieure à 100 MPa. L'utilisation de ce type de béton se limite à quelques ouvrages exceptionnels. Par définition, les performances des BTHP se situent entre celles des Bétons à Hautes Performances (BHP) et celles des BFUHP.

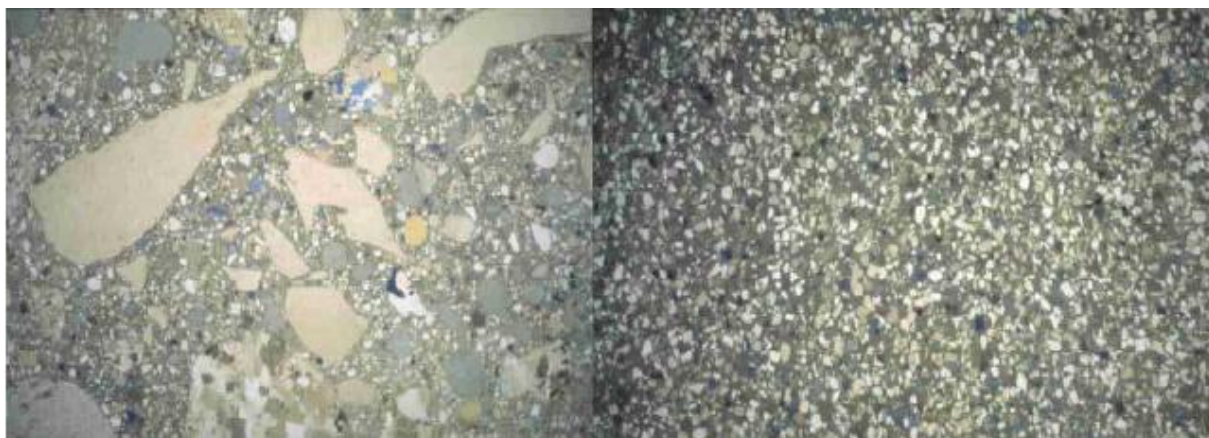
Les particules ultrafines utilisées sont la plupart du temps des fumées de silice, contenant plus de 90 % d'oxyde de silicium, sous-produit de l'industrie du Ferro-Silicium. Ces fumées de silice ont une double action, outre le fait de réduire les vides, elles jouent aussi un rôle de catalyseur avec la chaux vive, lié à leur caractère pouzzolanique.

II.2.6 Béton fibré à ultra hautes performances (BFUHP)

Les bétons fibrés à ultra hautes performances, derniers nés de cette génération de bétons, sont des matériaux à matrice cimentaire renforcée par des fibres présentant des performances exceptionnelles, offrant des résistances en compression dépassent les 150 MPa, et comprises entre 150 et 250 MPa. Leurs formulations font appel à des adjuvants superplastifiants spécifiques, des granulats spécifiques, des particules ultra fines et des fibres (fibres métalliques ou fibres organiques).

La formulation des bétons fibrés à ultra hautes performances repose sur deux principes essentiels : la réduction de la teneur en eau contenue, afin de diminuer la porosité du béton grâce à l'ajout de superplastifiants et une composition granulaire optimisée. En effet, la taille et le type de grains sont minutieusement étudiés en amont afin de limiter les vides d'air pouvant fragiliser le béton. Le béton fibré à ultra hautes performances se constitue de grains de tailles différentes. Les grains de petite taille sont privilégiés en vue de l'obtention d'un béton plus compact (Diamètre varie de 1 à 7 mm).

Les fibres métalliques ajoutées sont de l'ordre de 2 à 3 % du volume (160 à 240 kg/m³) et ont un diamètre n'excédant pas 0,3 mm. La présence de fibres et les performances en traction et leur comportement ductile permettent de ne pas avoir besoin d'armatures passives. Ils se distinguent clairement des bétons à hautes performances, dont la résistance à la compression ne dépasse guère les 100 MPa.



Béton ordinaire

BFUHP

Figure II.3 : Différence de section polie de BFUHP et de béton classique

II.2.7 Béton renforcé par nanoparticules

Le béton peut être nano-conçu en incorporant des blocs de construction ou des objets de taille nanométrique tels que des renforts en nanoparticules ou des nanotubes. Récemment, le développement de la technologie de béton, se développe très rapidement en présence des nanotechnologies, qui a attiré un intérêt scientifique considérable en raison des nouvelles utilisations potentielles des nanomatériaux, qui peuvent améliorer considérablement les propriétés des bétons. Li et al. [27] ont étudié expérimentalement les propriétés mécaniques des mortiers de ciment renforcés par de la nano- Fe_2O_3 et de la nano- SiO_2 et ont constaté que la résistance à 7 et 28 jours était beaucoup plus élevée que pour le béton ordinaire. L'analyse de la microstructure montre que les nanoparticules remplissent les pores et la quantité réduite de $\text{Ca}(\text{OH})_2$ en raison de la réaction pouzzolanique. Tao Ji [28] a étudié expérimentalement l'effet de nano- SiO_2 sur la perméabilité à l'eau et la microstructure du béton. Les résultats montrent que l'incorporation de nano- SiO_2 peut améliorer la résistance à l'eau du béton et la microstructure devient plus uniforme et compacte par rapport au béton normal. Jo et al. [29] ont étudié expérimentalement les caractéristiques du mortier de ciment incorporé avec des particules de nano- SiO_2 et ont observé une résistance plus élevée de ces mortiers mélangés pendant 7 et 28 jours. L'analyse de la microstructure a montré que la SiO_2 se comporte non seulement comme une charge pour améliorer la microstructure, mais également comme un activateur de la réaction pouzzolanique. Nilli et ses collègues [30] ont étudié l'effet combiné de la micro-silice et de la nano-silice colloïdale sur les propriétés du béton et ont constaté que le béton atteindra une résistance à la compression maximale lorsqu'il contient 6% de micro-silice et 1,5% de nano-silice. La résistivité électrique la plus élevée du béton a été observée à 7,5% de micro et nano-silice. Le taux d'absorption capillaire est le plus bas pour la combinaison de 3% de micro-silice et 1,5% de nano-silice. Ali Nazari et al. [31], [32], [33] ont étudié l'effet combiné des particules nano- SiO_2 et des laitiers de haut fourneau sur les propriétés du béton. Ils ont utilisé de la nano-silice avec 3% de remplacement du poids et 45% de remplacement de ciment par des laitiers de haut fourneau. Le résultat montre une résistance à la traction améliorée. Une amélioration de la structure des pores des bétons autoplacants avec des particules de silice a été observée. En dehors de cela, ils ont étudié l'effet des nanoparticules de ZnO_2 sur le béton autoplacant avec un rapport E/C constant de 0,4. Les résultats ont montré qu'en augmentant la teneur en superplastifiants, la résistance à la flexion diminue. Jusqu'à 4% de la teneur en ZnO_2 , une augmentation de la résistance à la flexion des bétons autoplacant a été enregistrée. Dans une autre expérience, les mêmes auteurs ont étudié l'effet des nanoparticules d' Al_2O_3 sur les propriétés du béton. Les résultats ont montré que le ciment pouvait être remplacé jusqu'à 2% pour améliorer les propriétés mécaniques du béton, mais les nanoparticules Al_2O_3 ont diminué le pourcentage d'absorption d'eau du béton. L'analyse DRX de l'échantillon a montré qu'il y a une formation plus rapide de produit hydraté. Morsy et al. [34] ont étudié l'effet des nano-argiles sur les propriétés mécaniques et la microstructure du mortier de ciment Portland et ont observé que la résistance à la traction et à la compression augmentait respectivement de 49% et 7% à 8% de nano-métakaolin (NMK). Sekari et Razzaghi [35] ont étudié l'effet d'une teneur constante en nano ZrO_2 , Fe_2O_3 , TiO_2 et Al_2O_3 sur les propriétés du béton. Les résultats ont montré que toutes les nanoparticules ont une influence notable sur l'amélioration des propriétés de durabilité des bétons, mais la

contribution du nano- Al_2O_3 à l'amélioration des propriétés mécaniques des bétons à hautes performances est plus importante que les autres nanoparticules. Said et al. [36] ont étudié l'effet de la nano-silice colloïdale sur le béton en le mélangeant avec des cendres volantes de classe F et ont observé que les performances du béton avec ou sans cendres volantes étaient significativement améliorées avec l'ajout de quantités variables de nano-silice. Le mélange contenant 30% de cendres volantes et 6% de nano-silice colloïdale fournit une augmentation considérable de la résistance. La porosité et le diamètre du seuil de pore étaient significativement inférieurs pour le mélange contenant de la nano-silice. Le test de perméabilité aux ions chlorures montre que le passage des charges et la profondeur de pénétration physique se sont considérablement améliorés. Dhinakaran et al. [37] ont analysé la microstructure et les propriétés de résistance du béton avec de la nano- SiO_2 . La silice a été broyée dans le broyeur planétaire à boulets jusqu'à ce que la taille nanométrique soit atteinte et elle a été mélangée dans du béton avec un remplacement de 5%, 10% et 15% du poids de ciment. Les résultats expérimentaux ont montré un gain de résistance à la compression avec une résistance maximale pour 10% de remplacement.

II.2.7.A Les familles des nanomatériaux

Les nanomatériaux se distinguent sous deux grandes familles :

1) **Les nano-objets** : On parle de nano-objets pour désigner « une portion discrète de matériau dont une, deux ou les trois dimensions externes sont à l'échelle nanométrique ». C'est-à-dire approximativement entre 1 et 100 nm. Parmi les nano-objets, il est possible de distinguer trois catégories :

- **Les nanoparticules** qui désignent des nano-objets dont les trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique : nanoparticules de latex, d'oxyde de zinc, de fer et de cérium, d'alumine, de dioxyde de titane, de carbonate de calcium...etc.;
- **Les nano-fibres, nanotubes, nano-filaments ou nano-bâtonnets** qui se rapportent à des nano-objets dont deux dimensions externes sont à l'échelle nanométrique et la troisième dimension significativement supérieure (nanotubes de carbone, nano-fibres de polyester, nanotubes de bore, etc.). Ces termes désignent des nano-objets longilignes de section comprise entre 1 et quelques dizaines de nm et de longueur comprise entre 500 et 10 000 nm ;
- **Les nano-feuillets, nano-plats ou nano-plaquettes** qui définissent des nano-objets dont une dimension externe se situe à l'échelle nanométrique et les deux autres dimensions sont significativement supérieures (nano-feuillets d'argile, nano-plaquettes de sélénure de cadmium, etc.).

2) **Les matériaux nano-structurés** : Qui possèdent une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique. Parmi les matériaux nano-structurés, il est possible de distinguer plusieurs familles parmi lesquelles :

- Les agrégats et agglomérats de nano-objets.
- Les nano-composites.
- Les matériaux nano-poreux.

II.2.7.B Nanoparticules de Silicium SiO₂

La silice est le nom commun des matériaux composés de dioxyde de silicium (SiO₂) et est présente sous forme cristalline et amorphe. “L’American Concrete Institute”[38] définit la nano-silice comme "de la silice très fine et non cristalline". Il s'agit d'une poudre blanche ultrafine, composée de particules sphériques de très petite taille, avec une grande surface spécifique.



Figure II.4 : La poudre nano-silice

Tableau II.3 : Fiche technique de Nano-silice (AEROSIL 200)

Propriété	unité	Valeur indicatives
Surface spécifique(BET)	m ² /g	200 ± 25
Teneur en humidité	% en masse	≤ 1.5
pH	-	3.7 –4.7
Teneur en SiO ₂	% en masse	99.8
Densité après tassement	g/l	Env. 50

De nos jours, il existe différentes méthodes pour produire des produits NS. Une méthode de production est basée sur un processus sol-gel à température ambiante. Dans ce procédé, les matières premières, principalement du Na₂SiO₄ et des organométalliques comme le TMOS/TEOS, sont ajoutées à un solvant et le pH de la solution est modifié, ce qui permet d'obtenir la précipitation du gel de silice. Le gel produit est vieilli et filtré pour devenir un xérogel. Ce dernier est séché et brûlé ou dispersé à nouveau avec des agents stabilisants (Na, K, NH₃, etc.) pour produire une dispersion concentrée (20 à 40% de matière solide), adaptée à l'utilisation dans l'industrie du béton.

Une autre méthode de production est basée sur la vaporisation de la silice entre 1500 et 2000 °C par réduction du quartz (SiO₂) dans un four à arc électrique. En outre, la NS est produite comme sous-produit des métaux du Silicium et des alliages Ferro-Silicium, où elle est recueillie par condensation ultérieure de fines particules dans un cyclone. La NS produite par cette méthode est une poudre très fine composée de particules sphériques ou de microsphères d'un diamètre moyen de 150 nm avec une surface spécifique élevée (15 à 35 m²/ g). La nano-silice est en cours de développement via une autre voie de production. Il s'agit

essentiellement de combiner l'olivine et l'acide sulfurique, ce qui permet de synthétiser la silice amorphe précipitée, d'une grande finesse et pureté, sous une forme agglomérée (particules de taille nanométrique comprise entre 6 et 30 nm). Cette méthode de production est encore plus écologique (moins de CO₂) que les productions contemporaines de nano-silice.

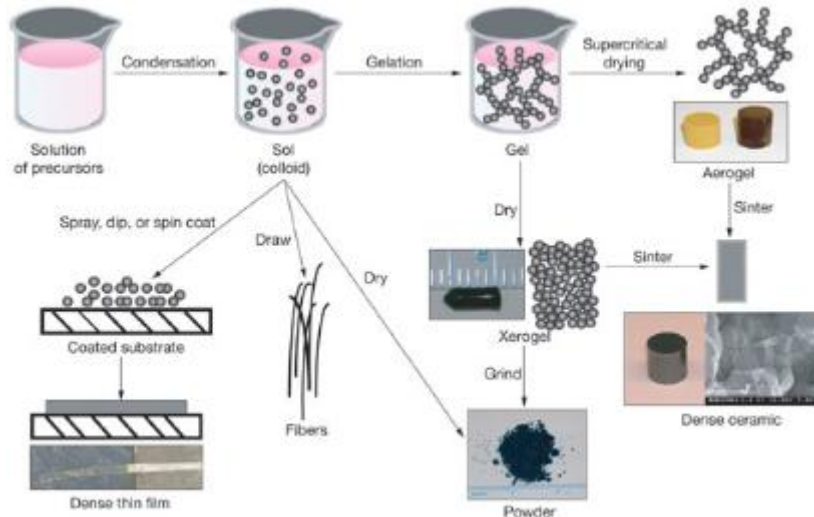


Figure II.5 : Méthode Sol-Gel pour fabrication de nano-silice

II.2.7.C Les avantages et les bénéfices des nano-silices dans le béton

Aujourd'hui, L'impact des nanotechnologies sur les matériaux de construction, en particulier le matériau-roi du génie civil – le béton – et sur les grands ouvrages d'art comme les ponts et les réseaux routiers, offre la possibilité de grandes avancées.

De nombreux avantages de la nanotechnologie dépendent du fait qu'il est possible d'adapter les structures des matériaux à des échelles extrêmement petites pour obtenir des propriétés spécifiques.

Grâce aux nanomatériaux, les matériaux peuvent être rendus plus résistants, plus légers, plus durables, plus réactifs, qui reposent sur des matériaux et des procédés à l'échelle nanométrique.

L'utilisation de nanomatériaux, en particulier de nano-silice en tant que matériau de ciment supplémentaire, dans la fabrication de pâte, de mortier et de béton offre le potentiel de produire des matériaux aux propriétés nouvelles et intéressantes, telles que des propriétés de résistance et de durabilité améliorées. Tout comme la fumée de silice, dans le béton, la NS agit selon un double mode d'action : physique (effet de remplissage ou granulaire) et chimique (effet pouzzolanique) :

- Effet de remplissage : En ajoutant la NS dans un matériau cimentaire, ses fines particules lisses et sphériques, pénètrent et s'empilent dans les espaces interstitiels restés vides entre les grains de ciment. Dans ce cas, le mélange sera suffisamment "imprégné" de fines particules et cet ajout entraînera une augmentation de la surface spécifique interne d'environ un ordre de grandeur.
- Effet pouzzolanique : Le premier jour de la prise, la silice est considérée comme inerte et joue plutôt un rôle physique, mais à mesure que l'hydratation progresse, après 1 à 2 jours, la silice, réagit rapidement avec l'hydroxyde de calcium pour produire du C-S-H sous ce que nous appelons un effet pouzzolanique.

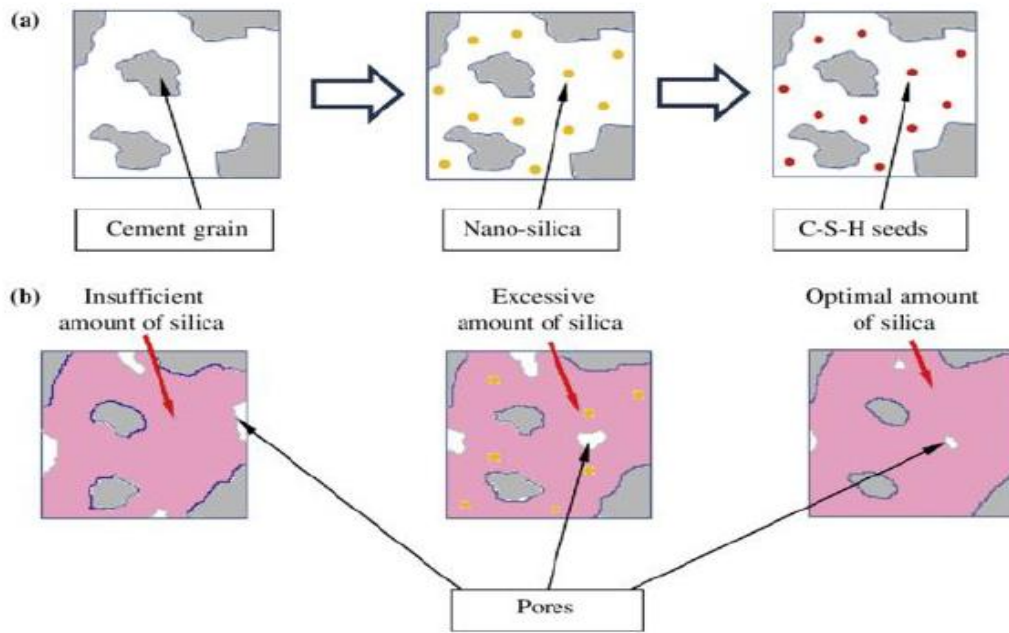


Figure II.6 : Effet de la nano-silice sur le béton

II.3 Généralités sur les méthodes et principes généraux de renforcement

Les experts donnent à un ouvrage en béton armé, et selon sa composition et sa fonction, une durée d'exploitation comprise entre 50 et 120 ans. Cela sans compter les imprévus pathologiques liés aux utilisations ou à l'environnement qui sont susceptibles d'intervenir. Dans ce cas, les réparations et/ou renforcements structuraux des ouvrages en béton armé peuvent être effectués soit par ajout de forces comme le cas de la précontrainte additionnelle, soit par ajout de matières, cas des bétons projetés et renfort collés.

II.3.1 Les méthodes de réparation structurale

II.3.1.A Réparation par béton projeté

Cette technique de réparation était très couramment employée car particulièrement bien adaptée à la réfection des voûtes et tunnels ou des murs en béton armé. Elle permet de réaliser aussi bien des réparations superficielles, comme la réfection d'un parement en béton présentant de légères épaufrures, que des réparations ou des renforcements de structures, en posant de nouvelles armatures à la structure. Dans ce cas, le béton reconstitue non seulement la géométrie de la construction mais aussi, il joue le rôle confié au béton dans l'association acier / béton. Les étapes importantes avant la projection du béton sont la mise en état du support (sablage, brossage des armatures...), la mise en disposition et l'ancrage des armatures ajoutées et enfin la mise en place des coffrages.

- **Rapidité et qualité d'exécution**

On favorise le béton projeté pour travailler ou réparer de vastes surfaces ou dans des lieux difficiles d'accès car c'est plus rapide de projeter du béton que de le couler. De plus, ce procédé permet de maximiser l'association du béton à la structure.

- **Durabilité du produit**

Qui dit résistance, dit nécessairement une prolongation de la durée de vie du produit final.

- **Imperméabilité supérieure**

Etant plus dense, le béton offre une résistance accrue, et ce, dès l'application du béton projeté, par conséquent, l'imperméabilisation du béton projeté est supérieure au béton en coulée.



Figure II.7 : Réparation des ponts par béton projeté

II.3.1.B Réparation par précontrainte additionnelle

Quand la résistance des poutres à la flexion ou à l'effort tranchant est insuffisante, on a recours à l'emploi d'étriers actifs, cette technique est appelée renfort par précontrainte additionnelle. Cette méthode bien qu'elle soit très efficace, elle présente des difficultés de mise en œuvre, En effet, elle nécessite tout d'abord de dimensionner soigneusement des ancrages et de déterminer le chemin approprié des câbles. Ainsi, des forages à travers certaines parties de la structure existante sont nécessaires. Ces forages doivent être exécutés sans toucher aux différentes armatures existantes. Enfin, il faut prendre toutes les dispositions pour contrôler que la précontrainte additionnelle se répartisse dans la structure et surtout dans les zones fissurées.

Ce procédé, très souple d'emploi, permet dans de très nombreux cas l'ajout des forces dont la structure a besoin en état pathologique. Il est donc souvent privilégié. Cependant, il y a lieu de rappeler que cet ajout peut aussi être obtenu par des déformations imposées (dénivellation d'appui d'un tablier à plusieurs travées, réglage de la poussée d'un pont à béquille...), lesquelles peuvent être associées ou non à une précontrainte additionnelle.



Figure II.8 : Réparation par précontrainte additionnelle

II.3.1.C Renforcement par collage de plats métalliques

L'apparition des colles de type résine époxyde possédant des caractéristiques d'adhésion sur le marché a bouleversé le monde du renforcement des structures. La technique du collage acier-béton s'est développée dans les années soixante, c'est dès 1962 que Lerchental a proposé de mettre des plaques d'acier collées en sous face pour remplacer les armatures conventionnelles. Mais le premier cas d'utilisation de cette technique fut à Durban (Afrique du sud) en 1964, suite à l'omission accidentelle des aciers des poutres répertoriées. Hermite (1967) et Bresson (1971) ont étudié cette technique afin de traiter le renforcement et la réparation des structures en béton armé présentant des insuffisances à la flexion, Ils ont étudié le phénomène parallèlement en laboratoire et in situ. Le renforcement par collage de plats métalliques a connu un succès en France entre 1970 et 1976, en effet, plusieurs ouvrages en béton armé et béton précontraint furent alors renforcés.



Figure II.9 : Renforcement par collage de plats métalliques

II.3.1.D Renforcement par collage de plats composites

Lors de ces dernières années, le renforcement par tôles d'acier a été remplacé par le renforcement par matériaux composites. La plupart des renforts composites utilisés dans le génie civil sont des composites carbone-époxyde ou verre-époxyde. Leurs performances mécaniques spécifiques sont en effet supérieures à celles de l'acier, principalement la résistance à la traction et à la compression (Garden et al, 1997 [39]). Ces matériaux ont beaucoup d'avantage, on peut citer leur grande résistance à la fatigue, leurs orientations (Saadatmanesh et al, 1991 [40]). Dès lors, les études pour comprendre les problèmes posées sur cette technique se sont multipliées (Assih (1998) [41], Ferrier (1999) [42], Avril (2002) [43] et Sierra Ruiz (2002) [44]).



Figure II.10 : Renforcement par collage de plats composites

II.3.2 Les matériaux de renforcement

II.3.2.A Composite

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : maintenance réduite, liberté de formes, et grâce à leur résistance mécanique et chimique, ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipement. Ils ont une meilleure tenue aux chocs et au feu, ainsi qu'une bonne isolation phonique et thermique, même pour le cas de certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Tout au plus, une possibilité d'offre de plusieurs formes complexes, qui les rend aptes à remplir plusieurs fonctions telles que la légèreté des structures.

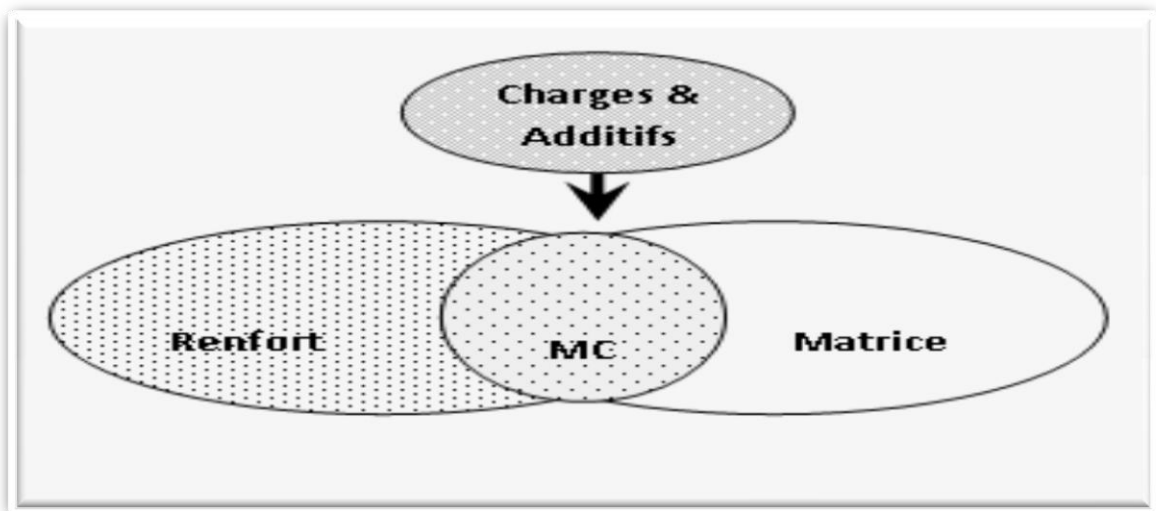


Figure II.11 : Constituants d'un matériau composite

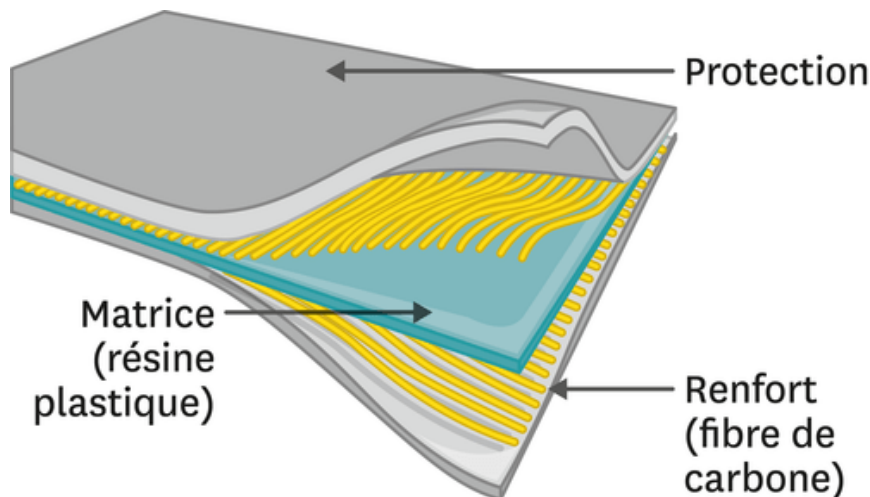


Figure II.12 : Exemple d'un matériau composite

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des matériaux composites ne sont réellement connues qu'après fabrication. Le renfort et la matrice doivent avoir une liaison parfaite, il ne serait autorisé ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, leur rôle est d'assurer une résistance mécanique aux efforts, quant à la matrice, son rôle est la cohésion entre les renforts de manière à ce qu'on puisse avoir une répartition parfaite des sollicitations mécaniques. L'orientation des fibres ainsi que leur arrangement permettent aussi un renforcement pour les propriétés mécaniques de la structure.

Les composites sont donc intrinsèquement des matériaux hétérogènes, le terme « composite » recouvre pratiquement l'ensemble des matériaux. Ainsi les matériaux métalliques eux-mêmes sont des alliages, composés de plusieurs phases de microstructure et/ou de composition distincte : il suffit de changer d'échelle pour passer de l'image d'un milieu homogène à celle d'un matériau hétérogène. Le type d'approche à utiliser décidera d'une part en fonction du rapport entre les dimensions de la structure à modéliser et une dimension caractéristique du milieu à représenter, d'autre part en fonction du but poursuivi.

Ceci conduit à utiliser plutôt le terme de structure composite lorsqu'il est naturel de modéliser séparément chaque matériau dans la pièce à traiter, par exemple :

- Le béton armé, ou encore le béton pré/post contraint, pour lesquels le béton et acier sont pris en compte chacun de leur côté, avec en première approximation un modèle où le béton apporte une résistance à la compression, et l'acier une résistance à la traction.
- Les plaques sandwichs : matériaux composés de deux semelles (peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (le cœur) d'une grande épaisseur mais d'une faible résistance.

- Les pneumatiques, qui sont calculés comme de véritables structures, assemblage de caoutchouc et de câbles métalliques en acier à très forte limite d'élasticité.

Donc on peut dire qu'en général, les matériaux composites sont constitués de deux phases :

- **Le renfort** : son rôle est d'assurer la fonction mécanique. Il est généralement sous forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elle doit supporter
- **La matrice** : qui a comme fonction de liaison entre les renforts, leurs protections vis à vis des agents agressifs et la prévention contre une rupture catastrophique.

II.3.2.B Colles et résines époxydes

Les résines époxydes sont des polymères, elles présentent des propriétés mécaniques et thermiques variées. Un durcisseur mélangé à la résine provoque la polymérisation, ce processus est irréversible et sa vitesse dépend de la température, plus la température est élevée, plus le processus est rapide.

Les colles et résines époxydes existent sous deux formes :

- La résine mono-composante durcit à des températures élevées.
- La résine bi-composante durcit à température ambiante

Ce type de colle offre une réelle alternative aux procédés d'assemblages classiques tels que le rivetage, le soudage, elles possèdent aussi un retrait négligeable et une excellente adhésion avec divers supports tels que le bois ou le béton, d'autant plus que sa résistance aux agressions chimiques et globalement satisfaisante.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a commencé par définir le matériau béton et ses propriétés mécaniques ainsi que la durée de vie des structures en béton. Par la suite on a introduit les différentes variétés de béton en passant par les bétons armés jusqu'aux bétons fibrés à ultra hautes performances, qui ensuite sont renforcés par les nanoparticules améliorant considérablement leurs maniabilités ainsi que leurs performances mécaniques. Enfin on a donné quelques exemples sur les méthodes et principes de renforcement des structures en béton.

CHAPITRE III

THÉORIES DES POUTRES ET DES PLAQUES

III.1 Introduction

Pour une meilleure solution des problèmes concernant les structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques composites dans le domaine élastique, il est indispensable d'adopter une meilleure théorie décrivant convenablement le comportement mécanique de la structure ainsi que la méthode de solutions à mettre en application. Les éléments structuraux se basant sur des fondations élastiques ont été choisis par de nombreux chercheurs dans le but de résoudre plusieurs problèmes d'ingénierie durant les dernières années. Nous citerons à titre d'exemples dans ce chapitre quelques modèles sur les théories développées dans la littérature et ce, dans le but d'améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des matériaux.

III.2 Les poutres

III.2.1 Définition

Faut-il rappeler ce qu'est une poutre. En effet, une poutre se définit comme un solide caractérisé par une surface plane « S » qui est déplacée dans l'espace de façon à ce, durant son mouvement, le centre de gravité « G » de la section « S » parcourt une ligne donnée « L » et que cette surface se tienne normalement à une autre (figure III – 1). S'ajoute à cela la section qui peut subir des changements lors de ce parcours de façon continue évitant ainsi des discontinuités. La ligne « L » porte le nom de fibre moyenne de la poutre. Cette dernière est dite :

- gauche si la ligne « L » suit une courbe gauche,
- plane si la ligne « L » suit une courbe plane,
- droite si la ligne « L » suit une droite.

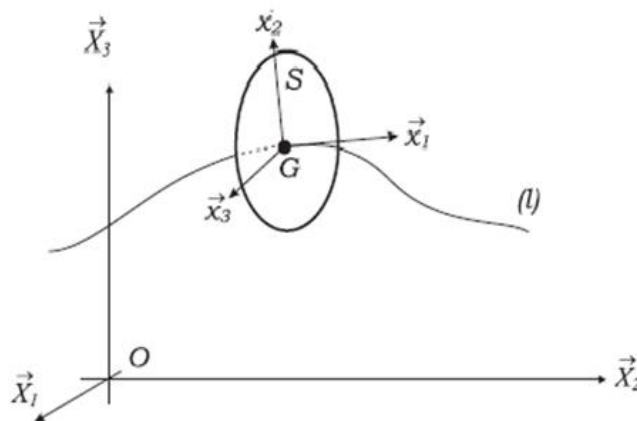


Figure III.1 : Définition géométrique d'une poutre
(MDS ET Approximations Numériques [45])

III.2.2 Hypothèses de calcul

Il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ($\varepsilon_z = 0$), les éléments poutres les plus courants possèdent une géométrie de référence très simple, à savoir un segment de droite de longueur unitaire muni d'un nœud à chaque extrémité et, parfois, d'un troisième nœud au milieu. Chaque nœud possède généralement six degrés de liberté, correspondant aux six déplacements généralisés de la théorie des poutres (i.e. trois translations et trois rotations) ; certains éléments sont limités à une cinématique plane et ne possèdent donc que deux translations et une rotation par nœud. Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée.

Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

- 1) Les théories classiques.
- 2) Les théories de premier ordre.
- 3) Les théories de cisaillement d'ordre-élevé.

III.2.2.A Principe de Saint Venant

Le principe de Saint Venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin du point d'application des charges.

III.2.2.B Principe de Navier-Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier-Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul. Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre 'S' très aplaties. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétriques, prend sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial. Le principe de Navier-Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

- Le principe de Navier-Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre.

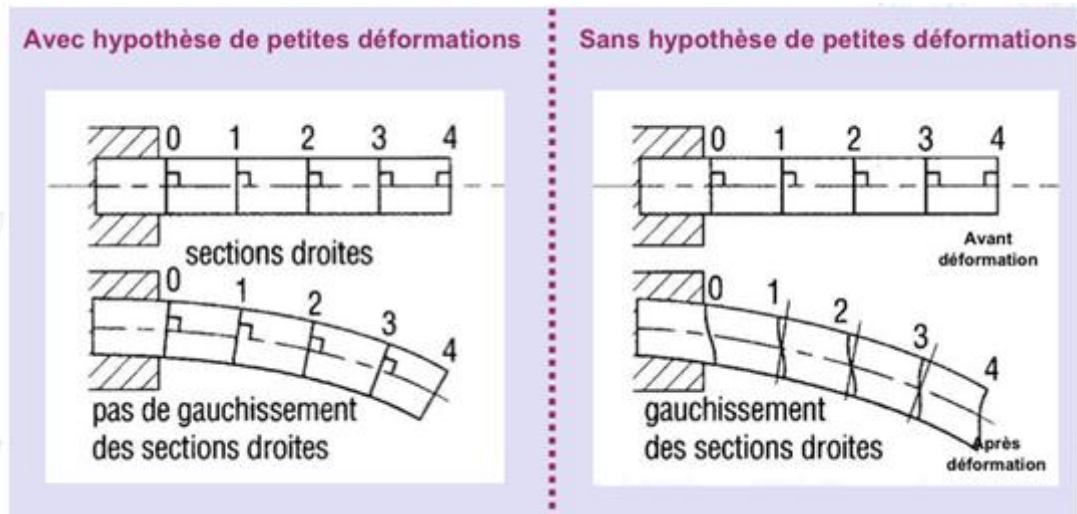


Figure III.2 : Cinématique de Navier-Bernoulli

III.2.2.C Principe de la théorie classique des poutres (CBT)

La théorie classique se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la poutre reste perpendiculaire après déformation (Figure III.3), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [46].

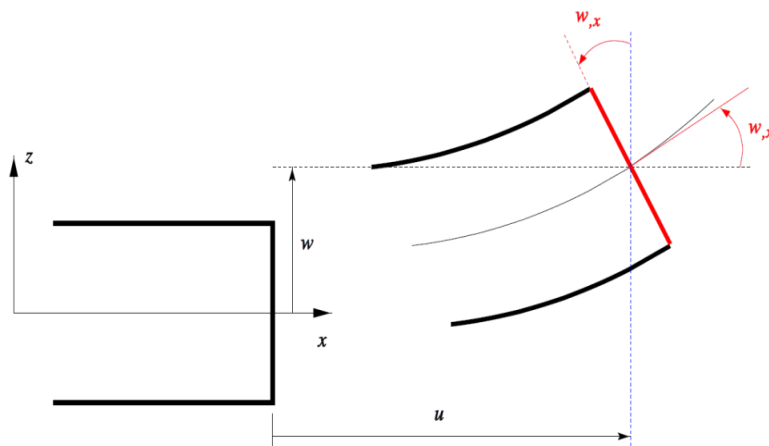


Figure III.3 : Cinématique d'Euler-Bernoulli [47].

Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_3) &= u_1^0(x_1) - z \frac{dw_{,1}}{dx} \\ U_3(x_1, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Avec : u_1^0 : Le déplacement de membrane dans la direction (x)

w : La flèche

$w_{,1}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement)

Le plan principal est le plan x_1, x_2 , et l'épaisseur h est orienté selon l'axe $x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

III.2.2.D Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

Le principe de la FSDT, est de relaxer l'hypothèse de normalité des sections après déformation de la théorie classique (CBT). On introduit alors les hypothèses de la poutre de Timoshenko [48], l'approximation des déplacements dans l'épaisseur prenant ainsi en compte la rotation de la section déformée par un développement au premier ordre du champ de déplacement dans l'épaisseur. Cette hypothèse se traduit par une déformation en cisaillement transverse constante suivant l'épaisseur. Cependant, du fait que les contraintes ainsi calculées ne s'annulent pas sur les surfaces externes, cette théorie nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

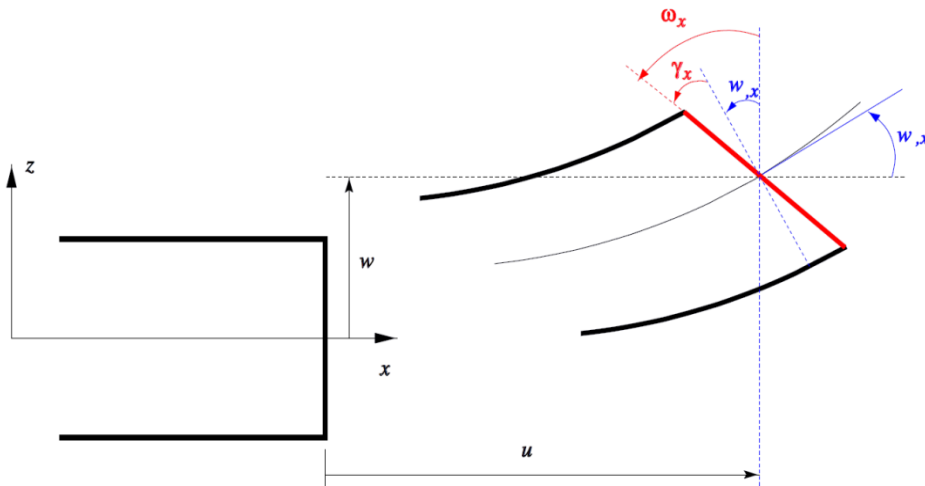


Figure III.4 : Cinématique de Timoshenko [47] .

Le champ de déplacement s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z\varphi(x) \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (III.2)$$

φ : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_1 .

$\gamma_{13}^0 = (w_{,1} + \varphi)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes de facteur de correction qui dépend de l'énergie de déformation du stratifié et donc à la fois du type de stratification et des matériaux.

III.2.2.E Déformation en cisaillement d'ordre-élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines à pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [49], le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + x_3 \cdot \phi_i(x_1, x_2) + x_3^2 \cdot \Theta_i(x_1, x_2) + x_3^3 \cdot \psi_i(x_1, x_2) \quad (\text{III.3})$$

Avec $i \in \{1, 2, 3\}$.

Les variables ϕ_i représentent les rotations des sections déformées autour des axes x_1 et x_2 , respectivement (terme du premier ordre), tandis que Θ_i symbolisent les termes du second ordre (courbure) et ψ_i les termes du troisième ordre (gauchissement des sections). Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{o(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Timoshenko est obtenue en posant : $\phi_j^{o(i)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{o(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{o(2)}(x_1, x_2) + \dots + z^4\phi_i^{o(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.4})$$

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées.

Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la contrainte de cisaillement s'annule sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre dans la direction transverse [46].

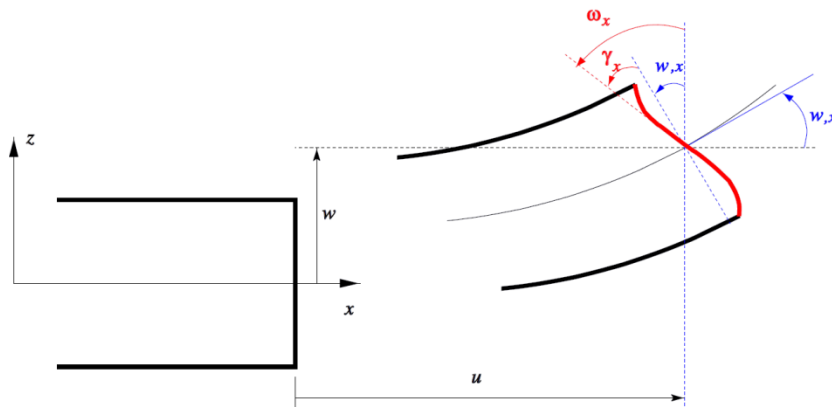


Figure III.5 : Cinématique de la théorie d'ordre-élevé [47].

Une synthèse sur l'aspect « éléments finis » et le lien avec les théories du premier ordre et d'ordre-élevé est développée dans la section suivante.

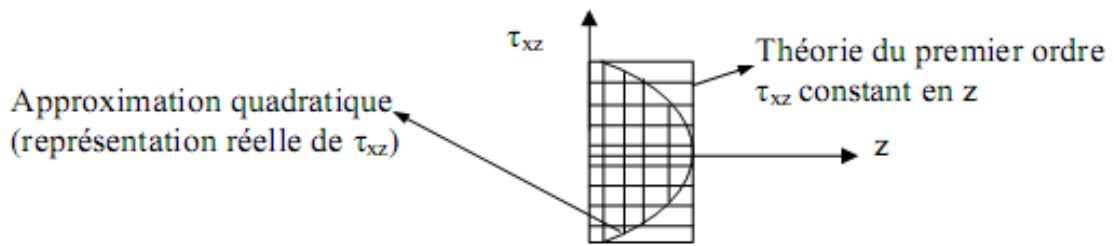


Figure III.6 : Approximations de la contrainte du cisaillement : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre-élevé) [50].

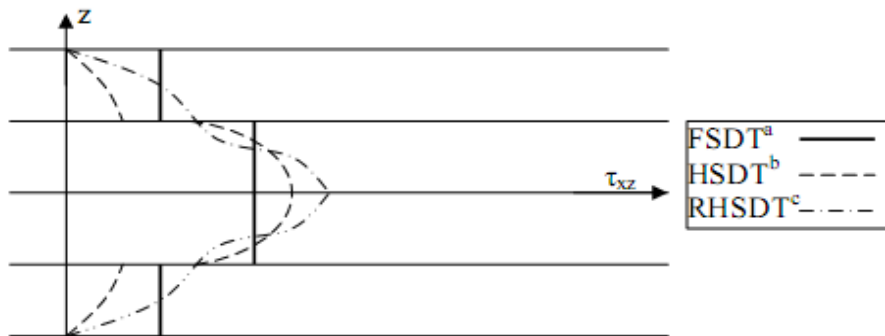


Figure III.7 : Distribution de la contrainte de cisaillement τ_{xz} selon trois théories [50]

a :FSDT (First-order shear deformation theory) ;

b :HSDT (High-order shear deformation theory) ;

c :RHSDT (Refined high order shear deformation theory) ;

On peut voir la comparaison entre les différentes théories de poutres sur la figure III.8

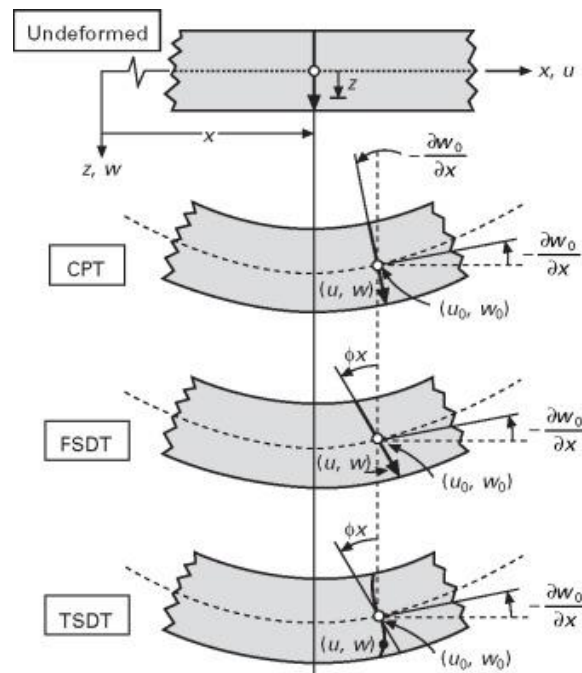


Figure III.8 : Poutre sous différentes théories (CPT, FSDT, TSDT)

III.3 Théorie des plaques

III.3.1 Définition

Une plaque est un milieu continu ou un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan x, y) et par une petite épaisseur (notée h) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane.

Ces structures de plaque peuvent être trouvées dans différents types d'application industrielle tels que les radiers, les réservoirs de stockage et les piscines. La théorie classique des plaques (CPT), ou théorie de Love-Kirchhoff [51],[52], qui néglige l'effet de cisaillement transverse est valable pour l'étude des plaques minces. Cependant, la CPT sous-estime la flèche et surestime les fréquences pour les plaques modérément épaisses. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances de la CPT.

Les théories de déformation de premier ordre (FSDT) ont été consolidées par Mindlin [53] à partir des travaux de Rayleigh, Timoshenko et Woinowsky-Krieger[54], Reissner et Uflyand, et ont été intensivement utilisées dans l'analyse de la flexion des plaques et des coques. Mais l'application de la théorie de premier ordre (FSDT) sur les plaques composites présente une difficulté pour évaluer exactement le facteur de correction présentant l'imperfection des théories de premier ordre (FSDT). Pour franchir les limites de la CPT et de la FSDT, de nombreuses théories de cisaillement d'ordre-élevé (HSDT) ont été proposées pour l'analyse des plaques développée par Reddy et Touratier.

III.3.2 Modèles analytiques des plaques

III.3.2.A Les modèles classiques Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement $\left(\frac{a}{h} \gg 10\right)$. La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff :

- La section plane avant déformation reste plane après déformation et perpendiculaire au plan médian.
- Les normales ne changent pas de longueur après déformation. Ce qui néglige les effets de déformations transversales $\varepsilon_z = 0$.

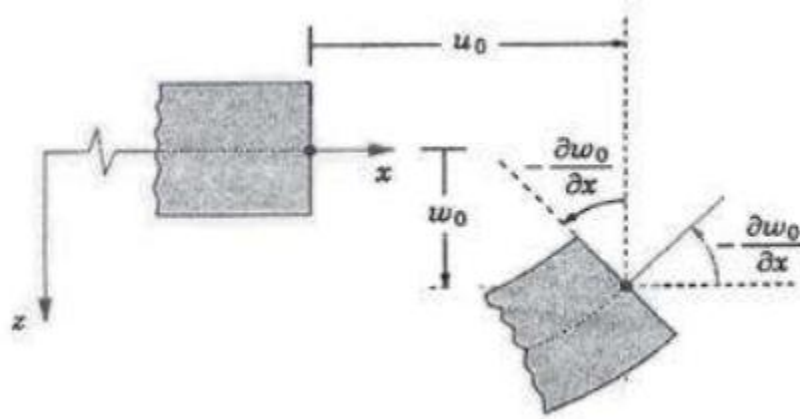


Figure III.9 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacement est donné par :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{III.5.a})$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.5.b})$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y) \quad (\text{III.5.c})$$

U_0, V_0, W_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$). Puisque le modèle ne tient pas en compte l'effet du cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

III.3.2.B Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie dépend des caractéristiques géométriques $5 < \frac{a}{h} < 10$.

Elle est adoptée sur les hypothèses de Reissner et Mindlin :

- La section plane avant déformation reste plane après déformation mais non perpendiculaire à la section plane.
- Les normales ne changent pas de longueur après déformation.

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, (constante par rapport à z), donc on a une contrainte tangentielle dans les faces supérieures et inférieures de la plaque ($z = \pm \frac{h}{2}$), ce qui est en contradiction avec la RDM car on a pas de chargement dans ces faces.

Pour corriger ces problèmes Timoshenko, et Mindlin-Reissner ont introduit des coefficients de correction de cisaillement, $X_s = \frac{5}{6}$ pour une section rectangulaire ; $X_s = \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$ pour une section circulaire.

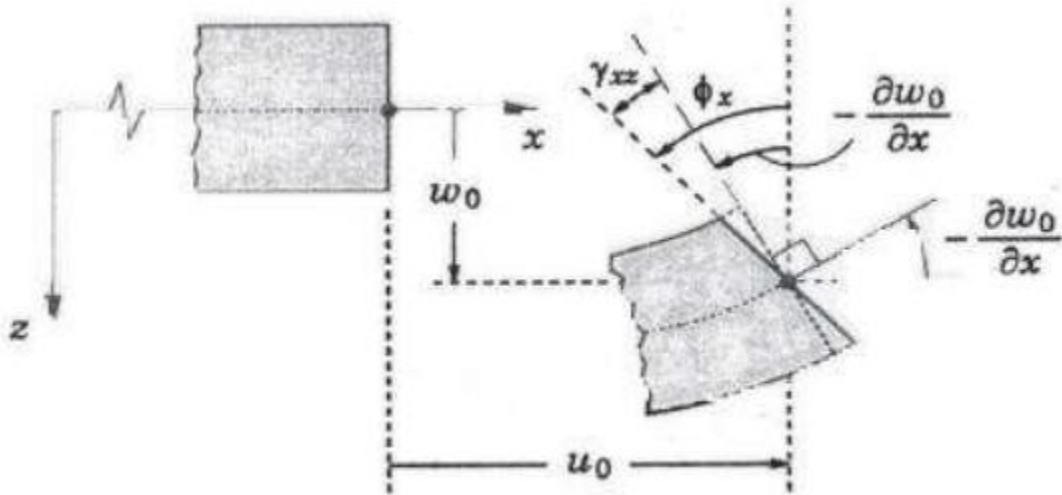


Figure III.10 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacement :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \psi_x(x, y) \quad (\text{III.6.a})$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \psi_y(x, y) \quad (\text{III.6.b})$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y) \quad (\text{III.6.c})$$

U_0, V_0, W_0 et (ψ_x, ψ_y) sont les déplacements de membrane et les rotations autour des axes x, y respectivement.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre-élevé ont été développées.

III.3.2.C Déformation en cisaillement d'ordre-élevé

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre-élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas de facteurs de correction, et sont basés sur deux hypothèses :

- Les sections planes avant déformation ne restent plus planes après déformation (la section gauchisse)
- Les normales ne changent pas de longueur après déformation.

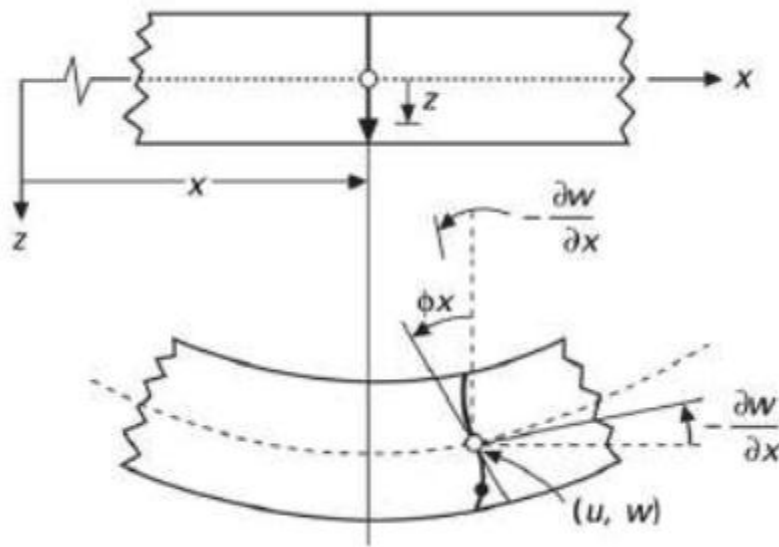


Figure III.11 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$U(x, y, z) = U_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \psi_x(x, y) \quad (\text{III.7.a})$$

$$V(x, y, z) = V_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \psi_y(x, y) \quad (\text{III.7.b})$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y) \quad (\text{III.7.c})$$

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

III.4 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre-élevé

Pour franchir les limites des théories classiques et celles de premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre-élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée.

Le tableau suivant montrera quelques modèles de fonctions de gauchissement.

Tableau III.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des poutres

Théorie	Intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de γ_{xy} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement
CBT	Théorie classique des poutres	0		
FSDT, Timoshenko	Théorie de Déformation du 1er ordre	z	Constant	Requis
Reissner	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$	Parabolique	Non Requis
TSDPT, Touratier	Théorie de déformation trigonométrique	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Parabolique	Non Requis
ESDPT, Karama et al.	Théorie de déformation exponentielle	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$	Parabolique	Non Requis
Reddy TSDT	Théorie de déformation parabolique	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$	Parabolique	Non Requis
Tounsi et al.	Théorie Raffinée	$\frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{hz}{\pi}\right) - z}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)}$	Parabolique	Non Requis

III.5 Conclusion

Dans un premier temps et en guise d'introduction du chapitre, nous avons proposé des définitions des poutres en mentionnant leur domaine d'utilisation ainsi que leurs trois aspects de la théorie en soulignant également le choix de cette dernière. Différentes théories constituent la base de ces études à savoir la théorie classique d'Euler-Bernoulli (CBT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre-élevé (HSDT). Dans un second temps, nous avons pu passer en revue différentes théories des éléments plaques, passant par la CPT de Love-Kirchhoff qui néglige l'effet de cisaillement, suivie de la théorie de Mindlin où le cisaillement transverse est introduit d'une façon uniforme, finissant par les théories récentes à ordre-élevé qui introduisent le cisaillement d'une façon hyperbolique.

CHAPITRE IV

MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION

IV.1 Généralités sur l'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation ou « méthode de changement d'échelle » a pour objectif d'entrevoir le comportement à l'échelle macroscopique d'un matériau hétérogène à partir d'une description de ses propriétés constitutives et ce, sur une échelle plus fine. Les approches par changement d'échelle visent à faire le lien entre le comportement macroscopique des matériaux ainsi qu'à leur état microstructural. L'objectif serait donc la détermination d'un « comportement effectif » macroscopique d'un « milieu homogène équivalent » pour le matériau hétérogène réel. Ainsi, le matériau hétérogène réel est remplacé par « un milieu homogène équivalent ».

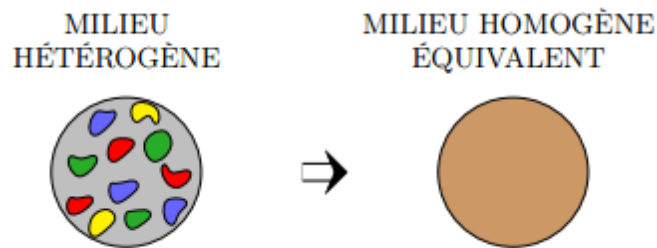


Figure IV.1 : Principe d'homogénéisation[55]

Les matériaux à base de ciment sont caractérisés par une hétérogénéité assez complexe et une microstructure aléatoire à différentes échelles de longueurs allant de l'échelle nanométrique à l'échelle macroscopique. Nous différencions deux types d'homogénéisation qui se distinguent par la représentation de la microstructure. En effet, ces matériaux sont décrits par la théorie des milieux effectifs [56]. Cette méthode des champs moyens est distinguée par la mise en application d'un déplacement (déformation) ou d'une force (contrainte) à la limite du volume élémentaire représentatif (V.E.R) développé.

Pour ce qui est des matériaux cimentaires, il existe deux approches pour la détermination de la réponse de ce matériau composite :

- Les méthodes d'homogénéisation analytiques ([57], [58], [59], [60]) caractérisées par trois grandes étapes : une étape de représentation, une étape de localisation et une dernière étape d'homogénéisation. Le tenseur de localisation rattache les quantités locales (déformation) au sein du V.E.R. au champ homogène (déformation) imposé à la limite du V.E.R., et est évalué au moyen de la solution des inclusions ellipsoïdales d'Eshelby [61].
- Les techniques d'homogénéisation numériques utilisant la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments frontières ([62], [63], [64], [65]).

IV.2 Étapes d'homogénéisation analytique :

IV.2.1 Étape de représentation :

Cette étape est la plus importante. Elle consiste à décrire géométriquement le matériau hétérogène considéré. Ceci passe par l'identification des différentes phases et de leur morphologie dans le volume élémentaire représentatif (V.E.R.) du matériau hétérogène.

Cette étape nécessite que l'on puisse distinguer deux échelles d'espace nettement différentes. Dans la majeure partie des cas, il ne sera pas possible de fournir une description complète et exacte du matériau. Il faudra donc introduire des hypothèses simplificatrices. Le V.E.R. consiste à définir les caractéristiques des différentes phases supposées homogènes, notamment leur forme, leur répartition spatiale et leurs propriétés mécaniques. La taille du V.E.R. doit être suffisamment grande à l'échelle microscopique pour contenir un nombre représentatif de phases constitutives et décrire ainsi les hétérogénéités ; mais aussi suffisamment petite à l'échelle macroscopique pour que les propriétés mécaniques calculées avec le modèle macroscopique soient très peu variables dans le V.E.R.

IV.2.2 Étape de localisation :

Une fois la définition du problème d'homogénéisation à résoudre établie, on doit pouvoir obtenir un lien entre les relations liant respectivement les contraintes et les déformations (σ, ε) à l'échelle microscopique (locales) et celles (Σ, E) à l'échelle macroscopique (globales). On considère que les champs locaux régnant dans le V.E.R. découlent des sollicitations qui lui sont imposées sous forme de champs globaux, qui eux-mêmes résultent des sollicitations imposées à la structure sous forme de force ou déplacement. À l'issue de cet étape, on dispose du tenseur de localisation en déformation et du tenseur de localisation en contrainte.

Supposons qu'un corps soit soumis à une contrainte homogène sur son contour, alors :

$$\langle \sigma \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \sigma(x) dV = \Sigma \quad (IV.1)$$

Si un corps est soumis à une déformation homogène sur son contour, alors :

$$\langle \varepsilon \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(x) dV = E \quad (IV.2)$$

Cette étape vise principalement à définir le tenseur de localisation des déformations ($\mathbf{A}(\mathbf{x})$) et le tenseur de localisation des contraintes ($\mathbf{B}(\mathbf{x})$) tels que :

$$\varepsilon(x) = A(x) : E \quad (IV.3)$$

$$\sigma(x) = B(x) : \Sigma \quad (IV.4)$$

IV.2.3 Étape d'homogénéisation

L'étape d'homogénéisation peut être définie comme la dernière étape du processus d'homogénéisation. Elle consiste à déterminer entièrement le comportement homogène équivalent, à partir de trois informations importantes :

- Les relations de moyennes.
- Les relations obtenues à partir de l'étape de localisation.
- Les lois de comportements microscopiques attribuées à chacun des constituants lors de l'étape de représentation.

L'homogénéisation est basée sur la moyenne volumique sur le V.E.R. des relations constitutives définies à l'échelle des phases. L'homogénéisation fournit les propriétés

macroscopiques du V.E.R. en fonction des propriétés des phases microscopiques, de leurs fractions volumiques et de leurs morphologies spécifiques.

A l'issu de cette étape, on obtient les lois de comportement homogénéisées du matériau homogène équivalent. Deux approches existent : approche en déformation (déformation imposée) et approche en contrainte (contrainte imposée).

IV.3 Modèles analytiques d'homogénéisation

L'approche analytique a pour objectif de déterminer la solution des champs dans le V.E.R. Elle se réduit et se limite aux propriétés moyennes de matériaux composites avec une microstructure simple. La mise en application de l'approche analytique est limitée aux matériaux composites à deux phases avec une géométrie d'inclusion simple comme le cercle ou l'ellipse.

IV.3.1 Modèle de Voigt et de Reuss

Les premiers modèles d'homogénéisation sont ceux de Voigt [66] (connu sous le nom de la loi des mélanges) et de Reuss [67]. Dans le modèle de Voigt, il est prétendu que la déformation de chaque phase est similaire à la déformation macroscopique appliquée E . Dans le modèle de Reuss, il est supposé que le champ imposé est homogène dans le V.E.R. et égal à la contrainte macroscopique imposée Σ . S'ajoute à cela le fait que nous ne pouvons démontrer que le modèle de Voigt donne une limite supérieure alors que le modèle de Reuss fournit une limite inférieure du comportement du matériau étudié. Ces deux modèles restent valables pour des matériaux supposés faiblement hétérogènes.

IV.3.2 Modèle de Hashin et Shtrikman

L'approche d'homogénéisation proposée par Hashin et Shtrikman ([68], [69], [70]) est une approche énergétique qui fournit des bornes supérieures et inférieures optimales du comportement d'un matériau composite élastique à deux phases (matrice (1), inclusion (2)). Les bornes de Hashin et Shtrikman sont plus limitatives que les bornes de Voigt et Reuss, car elles font apparaître en plus des fractions volumiques f_i , l'anisotropie du matériau. Les inclusions sont supposées sphériques, l'aspect morphologique est cette fois pris en compte dans cette approche énergétique du comportement équivalent. Les bornes de Hashin et Shtrikman (HS) sont construites à partir des théorèmes de l'énergie et des champs admissibles de déplacements et de contraintes pour le problème cellulaire.

Alors, $K^{(1)} > K^{(2)}$ et $\mu^{(1)} > \mu^{(2)}$ les encadrements proposés pour le module de compression équivalent K_{HS}^* et le module de cisaillement équivalent μ_{HS}^* sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 K_{HS}^{\max} &> K_{HS}^* > K_{HS}^{\min} & \mu_{HS}^{\max} &> \mu_{HS}^* > \mu_{HS}^{\min} \\
 K_{\max}^* &= K^{(1)} + \frac{C_2}{\frac{1}{K^{(2)} - K^{(1)}} + \frac{3(1-C_2)}{3K^{(1)} + 4\mu^{(1)}}} \\
 K_{\min}^* &= K^{(2)} + \frac{1-C_2}{\frac{1}{K^{(1)} - K^{(2)}} + \frac{3C_2}{3K^{(2)} + 4\mu^{(2)}}} \\
 \mu_{\max}^* &= \mu^{(1)} + \frac{C_2}{\frac{1}{\mu^{(2)} - \mu^{(1)}} + \frac{6(K^{(1)} + 2\mu^{(1)})(1-C_2)}{5\mu^{(1)}(3K^{(1)} + 4\mu^{(1)})}} \\
 \mu_{\min}^* &= \mu^{(2)} + \frac{1-C_2}{\frac{1}{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}} + \frac{6(K^{(2)} + 2\mu^{(2)})C_2}{5\mu^{(2)}(3K^{(2)} + 4\mu^{(2)})}}
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

IV.3.3 Modèle de De Lallard et Le Roy

À partir du modèle des sphères concentriques de Hashin, De Lallard et Le Roy ont proposé un modèle, désigné par DLR [71], s'intéressant à prendre en considération la distribution granulométrique du squelette granulaire des bétons. Le modèle de Hashin considère qu'un composite à inclusions sphériques et de tailles dispersées doit être noyé dans une matrice également sphérique. (Fig. IV.2). De telles sphères, de tailles supposées variables, peuvent remplir tout l'espace.

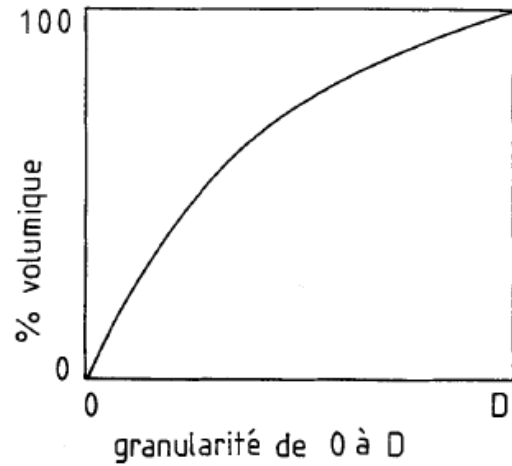
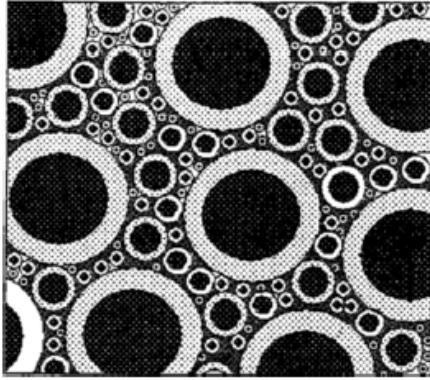


Figure IV.2 : Modèle des sphères concentriques d'Hashin.

Cela veut dire que l'étendue granulaire du squelette est infinie voire illimitée vers les petites tailles ce qui n'est pas le cas pour les bétons réels. Pour surmonter et dépasser cette incompatibilité, De Lallard et Le Roy ont introduit la compacité C_2^* de l'empilement à sec des squelettes granulaires :

$$C_2^* = 1 - 0.47(d/D)^{0.2} \tag{IV.6}$$

Où d et D sont respectivement les tailles minimales et maximales des granulats, afin de réserver un espace $(1-C_2^*)$ à remplir par la pâte de ciment (ou matrice). L'étendue granulométrique est ainsi limitée entre d et D (Fig. IV.3).

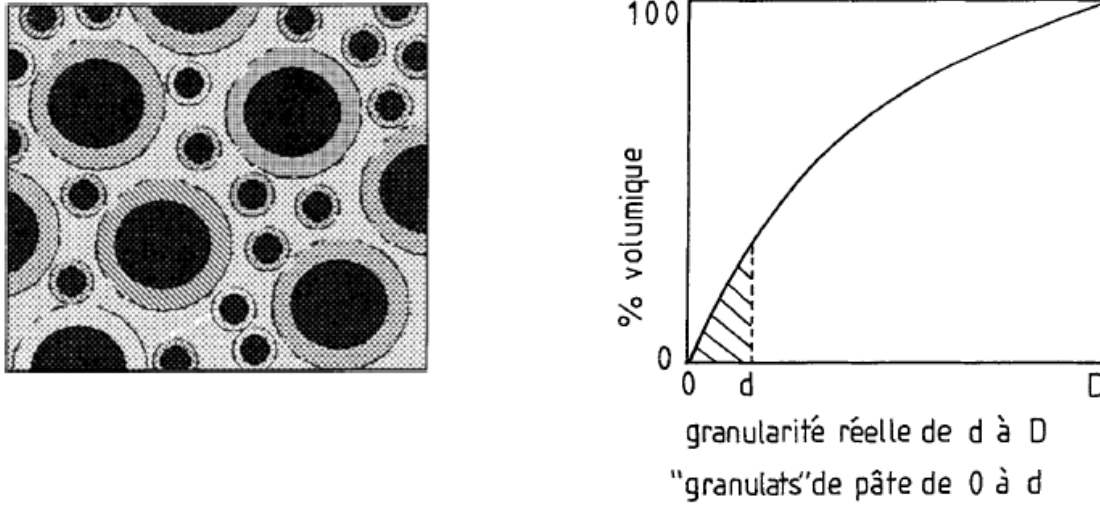


Figure IV.3 : Modèle prenant en compte l'étendue granulaire limitée du béton.

En supposant le coefficient de Poisson égal à 0.2 pour la matrice (1) et les inclusions (2), l'expression du module de Young équivalent du béton est alors donnée par la relation suivante:

$$E_{DLR}^* = (1 + 2C_2 \frac{(E^{(2)})^2 - (E^{(1)})^2}{(C_2^* - C_2)(E^{(2)})^2 + 2(2 - C_2^*)E^{(1)}E^{(2)} + (C_2^* + C_2)(E^{(1)})^2})E^{(1)} \quad (IV.7)$$

IV.3.4 Approximation diluée

Dans cette approche [72], le volume V est composé d'une inclusion (phase 2) sphérique isotrope de rayon « a » noyée dans une matrice (phase 1) isotrope supposée infinie (Fig. IV.4). Cette représentation du matériau suppose un matériau composé d'inclusions sphériques suffisamment éloignées les unes des autres dans la phase continue, de façon à ce que toute interaction éventuelle entre-elles est négligée. Par conséquent, cette approche ne donne des modules effectifs fiables que pour les faibles fractions volumiques d'inclusions.

Comme nous l'avons précisé précédemment, les phases étant réparties aléatoirement, le comportement équivalent est isotrope, et deux cas de chargement élémentaires suffisent à déterminer les modules de compressibilité K_{ADD}^* et de cisaillement μ_{ADD}^* équivalents.

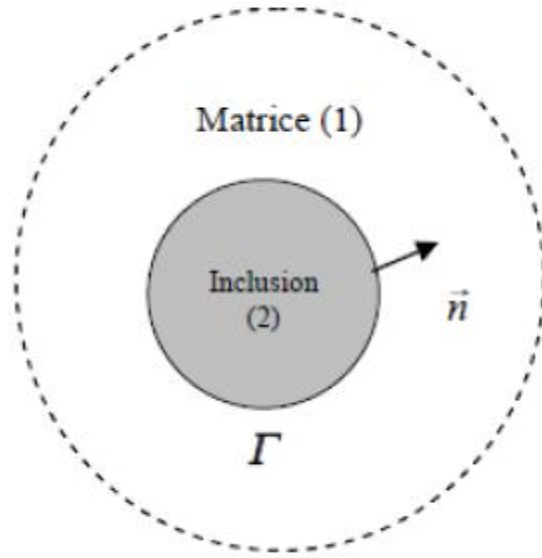


Figure IV.4 : Schématisation du modèle d'Approximation Diluée.

En supposant que le chargement macroscopique est un tenseur de déformation hydrostatique, on obtient l'expression suivante du module de rigidité équivalent K_{ADD}^* par l'approche diluée :

$$K_{ADD}^* = K^{(1)} + C_2(K^{(2)} - K^{(1)}) \frac{3K^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{3K^{(2)} + 4\mu^{(1)}} \quad (IV.8)$$

En supposant un chargement macroscopique de cisaillement, on obtient l'expression suivante du module de cisaillement équivalent μ_{ADD}^* pour l'approximation diluée en déformations :

$$\mu_{ADD}^* = \mu^{(1)} + C_2(\mu^{(2)} - \mu^{(1)}) \frac{15(1-\nu^{(1)})\mu^{(1)}}{(7-5\nu^{(1)})\mu^{(1)} + 2(4-5\nu^{(1)})\mu^{(2)}} \quad (IV.9)$$

Ces deux modules équivalents K_{ADD}^* et μ_{ADD}^* permettent ensuite de déduire le module de Young E^* et le coefficient de Poisson ν^* équivalents par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E^* &= 9K^* \frac{\mu^*}{\mu^* + 3K^*} \\ \nu^* &= \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*} \end{aligned} \quad (IV.10)$$

De manière analogue, nous pouvons déchiffrer et résoudre analytiquement le problème cellulaire lié à une approche en contraintes, en considérant alternativement un chargement macroscopique de contrainte hydrostatique puis de cisaillement simple. Avec l'application du chargement hydrostatique, on obtient l'expression suivante du module de rigidité équivalent K_{ADC}^* pour l'approximation diluée en contraintes :

$$\frac{1}{K_{ADC}^*} = \frac{1}{K^{(1)}} + C_2 \left(\frac{1}{K^{(2)}} - \frac{1}{K^{(1)}} \right) \frac{K^{(2)}3K^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{K^{(1)}3K^{(2)} + 4\mu^{(1)}} \quad (IV.11)$$

Le chargement de cisaillement simple permet d'obtenir l'expression du module de cisaillement équivalent μ_{ADC}^* pour l'approximation diluée en contraintes :

$$\frac{1}{\mu_{ADC}^*} = \frac{1}{\mu^{(1)}} + C_2 \left(\frac{1}{\mu^{(2)}} - \frac{1}{\mu^{(1)}} \right) \frac{15\mu^{(2)}(1-\nu^{(1)})\mu^{(1)}}{\mu^{(1)}(7-5\nu^{(1)})\mu^{(1)} + 2(4-5\nu^{(1)})\mu^{(2)}} \quad (IV.12)$$

IV.3.5 Modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka [73] permet de calculer le module d'une matrice contenant des inclusions. Ce modèle est utilisé dans le cas du mortier (la pâte étant considérée comme la matrice et le sable comme inclusion) et du béton (le mortier étant la matrice et les granulats les inclusions).

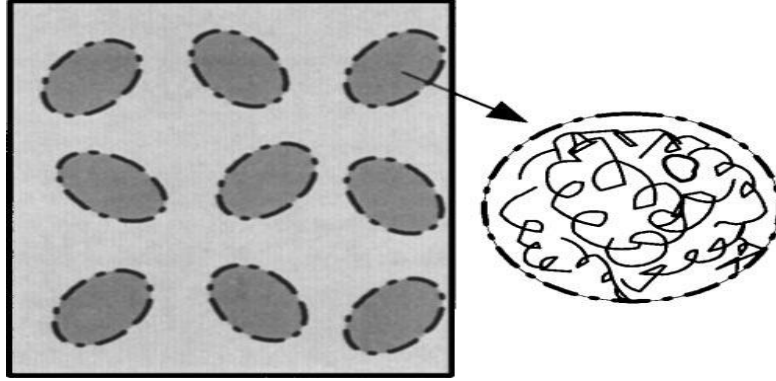


Figure IV.5 : Éléments volumétriques sélectionnés de nano-composite

Il est indispensable de connaître la fraction volumique (donnée par la composition du matériau), les propriétés mécaniques des granulats et les propriétés mécaniques de la matrice.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k+m & l & k-m & 0 & 0 & 0 \\ l & n & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & l & k+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (IV.13)$$

Où $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, k, m, n, l, p$ sont les composantes du tenseur contrainte-déformation. Selon la méthode Mori-Tanaka, les coefficients de rigidité sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{E_m \{ E_m c_m + 2k_r (1 + 2\nu_m) [1 + c_r (1 - 2\nu_m)] \}}{2(1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + 2c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]} \\
 l &= \frac{E_m \{ c_m \nu_m [E_m + 2k_r (1 + \nu_m)] + 2c_r l_r (1 - \nu_m^2) \}}{(1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + 2c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]} \\
 n &= \frac{E_m^2 c_m (1 + c_r - c_m \nu_m) + 2c_m c_r (k_r n_r - l_r^2) (1 + \nu_m)^2 (1 - 2\nu_m)}{(1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + 2c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]} \\
 &+ \frac{E_m [2c_m^2 k_r (1 - \nu_m) + c_r n_r (1 + c_r - 2\nu_m) - 4c_m l_r \nu_m]}{E_m (1 + c_r - 2\nu_m) + 2c_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)} \\
 p &= \frac{E_m [E_m c_m + 2p_r (1 + \nu_m) (1 + c_r)]}{2(1 + \nu_m) [E_m (1 + c_r) + 2c_m p_r (1 + \nu_m)]} \\
 m &= \frac{E_m [E_m c_m + 2m_r (1 + \nu_m) (3 + c_r - 4\nu_m)]}{2(1 + \nu_m) \{ E_m [c_m + 4c_r (1 - \nu_m)] + 2c_m m_r (3 - \nu_m - 4\nu_m^2) \}}
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Où les indices m et r représentent respectivement 'matrice' et 'renfort'. C_m et C_r sont les fractions volumiques de la matrice et des nanoparticules respectivement. k_r, l_r, n_r, p_r, m_r sont les modules d'élasticité de Hills pour les nanoparticules.

Les résultats expérimentaux montrent que l'hypothèse d'une dispersion uniforme des nanoparticules dans la matrice n'est pas correcte et que la majeure partie des nanoparticules est pliée et centralisée dans une zone de la matrice. Ces régions sont supposées avoir des formes sphériques et sont considérées comme des «inclusions» avec différentes propriétés élastiques du matériau environnant. Le volume total des nanoparticules V_r dans l'élément de volume représentatif V peut être divisé en deux parties :

$$V_r = V_r^{inclusion} + V_r^m \tag{IV.15}$$

Où $V_r^{inclusion}$ et V_r^m désignent les volumes des nanoparticules dispersées respectivement dans les inclusions et dans la matrice. La fraction volumique moyenne des nanoparticules C_r dans le composite est:

$$C_r = \frac{V_r}{V} \tag{IV.16}$$

Les deux paramètres utilisés pour décrire l'agglomération sont :

$$\xi = \frac{V^{inclusion}}{V} \quad \zeta = \frac{V_r^{inclusion}}{V_r} \tag{IV.17}$$

Supposons que toutes les orientations des nanoparticules sont complètement aléatoires. Par conséquent, le module d'élasticité isostatique (K) et le module de cisaillement (G) peuvent être écrits comme :

$$K = K_{out} \left[1 + \frac{\xi \left(\frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)}{1 + \alpha (1 - \xi) \left(\frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)} \right] \quad (IV.18)$$

$$G = G_{out} \left[1 + \frac{\xi \left(\frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)}{1 + \beta (1 - \xi) \left(\frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)} \right] \quad (IV.19)$$

$$K_{in} = K_m + \frac{(\delta_r - 3K_m \chi_r) c_r \zeta}{3(\xi - c_r \zeta + c_r \zeta \chi_r)} \quad (IV.20)$$

$$K_{out} = K_m + \frac{c_r (\delta_r - 3K_m \chi_r) (1 - \zeta)}{3[1 - \xi - c_r (1 - \zeta) + c_r \chi_r (1 - \zeta)]} \quad (IV.21)$$

$$G_{in} = G_m + \frac{(\eta_r - 3G_m \beta_r) c_r \zeta}{2(\xi - c_r \zeta + c_r \zeta \beta_r)} \quad (IV.22)$$

$$G_{out} = G_m + \frac{c_r (\eta_r - 3G_m \beta_r) (1 - \zeta)}{2[1 - \xi - c_r (1 - \zeta) + c_r \beta_r (1 - \zeta)]} \quad (IV.23)$$

Où :

$$\chi_r = \frac{3(K_m + G_m) + k_r - l_r}{3(k_r + G_m)} \quad (IV.24)$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left\{ \frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(k_r + G_m)} + \frac{4G_m}{(p_r + G_m)} + \frac{2[G_m(3K_m + G_m) + G_m(3K_m + 7G_m)]}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right\} \quad (IV.25)$$

$$\delta_r = \frac{1}{3} \left[n_r + 2l_r + \frac{(2k_r - l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{k_r + G_m} \right] \quad (IV.26)$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left\{ \frac{2}{3} (n_r - l_r) + \frac{4G_m p_r}{(p_r + G_m)} + \frac{8G_m m_r (3K_m + 4G_m)}{3K_m(m_r + G_m) + G_m(7m_r + G_m)} + \frac{2(k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(k_r + G_m)} \right\} \quad (IV.27)$$

Où K_m et G_m sont les modules d'encombrement et de cisaillement de la matrice qui peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad (IV.28)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + 2\nu_m)} \quad (IV.29)$$

Plus encore, α, β peuvent être obtenus :

$$\alpha = \frac{(1 + \nu_{out})}{3(1 - \nu_{out})} \quad (IV.30)$$

$$\beta = \frac{2(4 - 5\nu_{out})}{15(1 - \nu_{out})} \quad (IV.31)$$

$$\nu_{out} = \frac{3K_{out} - 2G_{out}}{6K_{out} + 2G_{out}} \quad (IV.32)$$

Finalement, Le module d'Young (E) et le coefficient de Poisson (ν) peuvent être exprimés ainsi :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (IV.33)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (IV.34)$$

IV.3.6 Modèle auto-cohérent

En parlant des différentes méthodes d'homogénéisation, le modèle auto-cohérent reste le plus utilisé dans l'évaluation des propriétés des matériaux polycristallins, où se trouve un agencement de grains collés les uns aux autres. L'application de ce modèle nécessite l'utilisation de deux importantes hypothèses à savoir : l'isotropie du milieu de référence et de la phase locale et les inclusions sphériques.

Ce modèle a été introduit par Hershey [74] et repris par Hill [75] concernant les matériaux contenant des inclusions ellipsoïdales. Quelques auteurs ont fait appel à d'autres formes d'inclusions pour montrer leur impact sur le seuil de percolation sur une pâte de ciment [60]. Le modèle auto-cohérent nécessite la résolution d'un système de deux équations (IV.35) et (IV.36). Cette résolution est obtenue à chaque pas d'hydratation par une méthode numérique de type Newton-Raphson.

$$K_{hom}^{est} = \frac{\sum_{r=1}^n f_r K_r \left(1 + \alpha_0^{est} \left(\frac{K_r}{K_{hom}^{est}} - 1 \right) \right)^{-1}}{\sum_{r=1}^n f_r \left(1 + \alpha_0^{est} \left(\frac{K_r}{K_{hom}^{est}} - 1 \right) \right)^{-1}} \quad (IV.35)$$

$$\mu_{hom}^{est} = \frac{\sum_{r=1}^n f_r \mu_r \left(1 + \beta_0^{est} \left(\frac{\mu_r}{\mu_{hom}^{est}} - 1 \right) \right)^{-1}}{\sum_{r=1}^n f_r \left(1 + \beta_0^{est} \left(\frac{\mu_r}{\mu_{hom}^{est}} - 1 \right) \right)^{-1}} \quad (IV.36)$$

Avec :

$$\alpha_0^{est} = \frac{3K_{hom}^{est}}{3K_{hom}^{est} + 4\mu_{hom}^{est}} \quad (IV.37)$$

$$\beta_0^{est} = \frac{6(K_{hom}^{est} + 2\mu_{hom}^{est})}{5(3K_{hom}^{est} + 4\mu_{hom}^{est})}$$

Où n est le nombre de phases, $K_r, \mu_r, K_{hom}^{est}, \mu_{hom}^{est}$ sont les modules de compressibilité et de cisaillement pour les phases r et le milieu de référence respectivement. $f_r = V_r/V$ représente les fractions volumiques.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu quelques modèles d'homogénéisation ainsi que leurs domaines d'utilisation. À cet effet, le modèle d'homogénéisation choisi sera traité dans le chapitre suivant afin de calculer le module de Young effectif du béton renforcé par les nanoparticules de Silicium et l'appliquer par la suite sur plusieurs modèles de poutres et de plaques dans le but d'obtenir des résultats en termes d'analyse statique et dynamique.

Chapitre V

MODÈLE THÉORIQUE POUR L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES ÉLÉMENTS STRUCTURAUX EN BÉTON ARMÉ RENFORCÉ PAR DES NANOPARTICULES DE SILICIUM

V.1 Introduction

Ce chapitre présente le modèle mathématique des réponses mécaniques d'une poutre et d'un tablier d'un pont en béton renforcé par des nanoparticules de dioxyde de silicium (SiO_2) en utilisant la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique. Les propriétés matérielles effectives des structures sont obtenues par le modèle de Voigt en considérant l'agglomération des nanoparticules. Les équations de mouvement sont dérivées en se basant sur le principe d'Hamilton et les solutions analytiques sont déterminées à l'aide de la technique de Navier.

V.2 Modèle de Voigt

L'approche analytique vise à déterminer la solution des champs dans le V.E.R de manière analytique. Elle est limitée aux propriétés moyennes des matériaux composites à microstructure simple. L'application de l'approche analytique est strictement limitée aux matériaux composites à deux phases avec une géométrie d'inclusion simple comme le cercle ou l'ellipse.

Les expériences menées en 2019 par El-feky [76] ont montré que le problème majeur des bétons renforcés par des nanoparticules est qu'une grande quantité de ces dernières est concentrée dans des agglomérats. Ce sont les forces d'attraction de Van Der Waals entre elles qui les amènent à s'agglomérer en paquets. Dans cette section, un modèle micromécanique d'agglomération à deux paramètres est utilisé pour déterminer l'effet de l'agglomération des nanoparticules de SiO_2 sur les propriétés élastiques. Les régions où sont concentrées les nanoparticules sont supposées être de forme sphérique et sont considérées comme des inclusions ayant des propriétés élastiques différentes de celles du matériau environnant. Le volume total des nanoparticules V_r dans l'élément de volume représentatif V peut être divisé en deux parties (Shi 2004 [77]) :

$$V_r = V_r^{inclusion} + V_r^m \quad (\text{V.1})$$

Où $V_r^{inclusion}$ et V_r^m désignent les volumes de nano-silice dispersés respectivement dans les inclusions et dans la matrice. La fraction volumique moyenne des nanoparticules C_r dans le composite est:

$$C_r = \frac{V_r}{V} \quad (\text{V.2})$$

Les deux paramètres utilisés pour décrire l'agglomération sont:

$$\xi = \frac{V^{inclusion}}{V} \quad \zeta = \frac{V_r^{inclusion}}{V_r} \quad (\text{V.3})$$

Où $V^{inclusion}$ est le volume des inclusions des sphères dans le V.E.R. ξ désigne la fraction volumique des inclusions par rapport au volume total du composite V , et ζ désigne la fraction volumique de nano- SiO_2 dans les inclusions par rapport au volume total de nanoparticules. Lorsque $\xi = 1$, les nanoparticules sont uniformément dispersées dans la matrice. Lorsque $\zeta = 1$, toutes les nanoparticules sont concentrées dans les inclusions avec la concentration de nanoparticules dans les inclusions décroissant avec la diminution de ζ . Lorsque $\zeta = \xi$, les nanoparticules sont uniformément réparties.

Les fractions volumiques des nanoparticules dans les inclusions et dans la matrice sont respectivement exprimées en:

$$\frac{V_r^{inclusion}}{V_{inclusion}} = \frac{C_r \zeta}{\xi} \quad (V. 4)$$

$$\frac{V_r^m}{V - V_{inclusion}} = \frac{C_r(1-\zeta)}{1-\xi} \quad (V. 5)$$

Il est à noter que les fractions volumiques de particules dans les inclusions et dans la matrice doivent être inférieures à l'unité.

Les modules d'élasticité effectifs du composite sont calculés à l'aide de différentes méthodes micromécaniques. Comme mentionné ci-dessus, le modèle de Voigt est utilisé dans cette étude où l'anisotropie des nanoparticules est négligée et elles sont considérées comme isotropes.

Ce modèle fournit le module effectif des inclusions E_{in} et de leur E_{out} environnant tel que défini par (Jones 1999 [78]):

$$E_{out} = \frac{3}{8} \left\{ \frac{C_r(1-\zeta)}{1-\xi} E_r + \left[1 - \frac{C_r(1-\zeta)}{1-\xi} \right] E_m \right\} + \frac{5}{8} \left\{ \frac{(1-\xi)E_r E_m}{[(1-\xi) - C_r(1-\zeta)]E_r + C_r(1-\zeta)E_m} \right\} \quad (V. 6)$$

$$E_{in} = \frac{3}{8\xi} [C_r \zeta E_r + (\xi - C_r \zeta) E_m] + \frac{5}{8} \left[\frac{\xi E_m E_r}{(\xi - C_r \zeta) E_r + C_r \zeta E_m} \right] \quad (V. 7)$$

$$E_{hom} = E_{out} \left[\frac{E_{out} + (E_{in} - E_{out}) \xi^{2/3}}{E_{out} + (E_{in} - E_{out}) \xi^{2/3} (1 - \xi^{1/3})} \right] \quad (V. 8)$$

Où la matrice (le béton) et la phase de renforcement (nano-SiO₂) sont considérées avec les modules de Young E_m et E_r , respectivement.

V.3 Le modèle 'Poutre'

V.3.1 Cinématique

Le champ de déplacement généralisé est choisi en se basant sur les hypothèses que les contraintes de cisaillement transversales varient d'une façon non-linéaire à travers l'épaisseur de la poutre et s'annulent au niveau de ses surfaces. Par conséquent, il n'y a pas de nécessité d'utiliser un facteur de correction de cisaillement comme le cas de la FSDT [48]. En se basant sur cette hypothèse, le champ de déplacement suivant est proposé :

$$u(x, z, t) = u_0 + z \left[\psi_x(x) - \frac{4z^2}{3h^2} \left(\psi_x(x) + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \right) \right] \quad (V. 9.a)$$

$$v(x, z, t) = 0 \quad (V. 9.b)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x) \quad (V. 9.c)$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement dans les équations (V.9) est :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \varepsilon_x^0 + z(\kappa_x^0 + z^2 \kappa_x^2) \quad (V.10.a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \gamma_{xz}^0 + z^2 \kappa_{xz}^2 \quad (V.10.b)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^0 = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad k_x^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (\text{V.11.a})$$

$$\gamma_{xz}^0 = \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad k_{xz}^2 = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (\text{V.11.b})$$

Les relations constitutives linéaires de la poutre données par la loi de Hooke peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{V. 12})$$

Où Q_{ij} sont les constantes élastiques qui peuvent être obtenues par le modèle de Voigt.

V.3.2 Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé pour déterminer les équations de mouvement de la HSDT pour les poutres posées sur une fondation élastique. Le principe peut s'exprimer sous forme analytique comme :

$$\int_0^t (\delta U_b + \delta U_f + \delta K + \delta V) dt = 0 \quad (\text{V. 13})$$

δU_b et δU_f sont respectivement les variations de l'énergie de déformation de la poutre et de la fondation, δK est la variation de l'énergie cinétique et δV est la variation du travail des forces extérieures.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est calculée par :

$$\delta U_b = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (\text{V. 14})$$

En soumettant les équations (V.10) dans l'équation (V.14), l'énergie potentielle devient :

$$\delta U_b = \int_0^L \left\{ \begin{aligned} & N_x \delta u_{0,x} - M_x \frac{d \delta \psi_x}{dx} + P_x \left[-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{d \delta \psi_x}{dx} + \partial w_{0,x,x} \right) \right] \\ & + Q_{xz} (\delta \psi_x + w_{0,x}) + R_{xz} \left[-\frac{4}{h^2} \left(\frac{d \delta \psi_x}{dx} + \delta w_{0,x} \right) \right] \end{aligned} \right\} dx \quad (\text{V. 15})$$

Où N, M, P, Q, R sont les résultantes des efforts définies par :

$$N_x = \int_A \sigma_x dA \quad (\text{V.16.a})$$

$$M_x = \int_A z \sigma_x dA \quad (\text{V.16.b})$$

$$P_x = \int_A z^3 \sigma_x dA \quad (\text{V.16.c})$$

$$Q_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA \quad (\text{V.16.d})$$

$$R_{xz} = \int_A z^2 \tau_{xz} dA \quad (V.16.e)$$

En substituant les équations (V.10) dans l'équation (V.12) et en remplaçant le résultat trouvé dans les équations (V.16), les résultats des efforts peuvent être écrits en terme de déplacement généralisé par :

$$N_x = A \frac{du_0}{dx} + B \frac{d\delta\psi_x}{dx} + E \left(\frac{d\delta\psi_x}{dx} + \frac{d^2\delta w_0}{dx^2} \right) \quad (V.17.a)$$

$$M_x = B \frac{du_0}{dx} + D \frac{d\delta\psi_x}{dx} + F \left(\frac{d\delta\psi_x}{dx} + \frac{d^2\delta w_0}{dx^2} \right) \quad (V.17.b)$$

$$P_x = E \frac{du_0}{dx} + F \frac{d\delta\psi_x}{dx} + H \left(\frac{d\delta\psi_x}{dx} + \frac{d^2\delta w_0}{dx^2} \right) \quad (V.17.c)$$

$$Q_{xz} = A_{55} \left(\psi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) + D_{55} \left(\psi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (V.17.d)$$

$$R_{xz} = D_{55} \left(\psi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) + F_{55} \left(\psi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (V.17.e)$$

Où (A, B, D, E, F, H) sont les coefficients de rigidité définis par :

$$[A, B, D, E, F, H] = \int_A Q_{11} [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dA \quad (V.18.a)$$

$$[A_{55}, D_{55}, F_{55}] = \int_A Q_{55} [1, z, z^4] dA \quad (V.18.b)$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation de Pasternak est définie par :

$$\delta U_f = \int_0^L (K_w w_0 \delta w_0 + K_s \nabla^2 w_0 \delta w_0) dx \quad (V. 19)$$

Où K_w et K_s sont respectivement les constantes des ressorts de Winkler et de cisaillement (Pasternak) qui peuvent être obtenues à partir de $K_w = \frac{\beta_w A_{110}}{L^2}$ et $K_s = \beta_s A_{110}$, où β_w et β_s sont les constantes de ressort correspondantes, A_{110} est la rigidité d'extension d'une poutre homogène en matériau à matrice pure.

Le travail virtuel effectué par chargements externes est:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx \quad (V. 20)$$

La variation de l'énergie cinétique de la poutre est calculée par :

$$\begin{aligned}\delta K &= \rho_{\text{hom}} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (u' \delta u'' + w' \delta w'') dx dz \\ &= \rho_{\text{hom}} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^2}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) \right] \right) \left(\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} + z \left[\frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^2}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} \right) \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial t^2} \right) \right] dx dz\end{aligned}\quad (\text{V. 21})$$

$$\begin{aligned}\delta K &= \rho_{\text{hom}} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} \right. \\ &\quad + z \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + z^2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} \\ &\quad - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{16z^5}{9h^4} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{16z^5}{9h^4} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} \\ &\quad \left. - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{16z^5}{9h^4} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{16z^5}{9h^4} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial t^2} \right] dx dz\end{aligned}\quad (\text{V. 22})$$

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_5) = \rho_{\text{hom}} \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^5) dz \quad (\text{V. 23})$$

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial t^2} \right) + I_1 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} \right) + I_2 \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} \right) - \frac{4I_3}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial t^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) + \frac{16I_5}{9h^4} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial t^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial t^2} \right) \right] dx\end{aligned}\quad (\text{V. 24})$$

En substituant les expressions de $\delta U_b, \delta U_f, \delta V, \delta K$ à partir des équations (V.15), (V.19), (V.20), (V.21) dans l'équation (V.13), en intégrant par partie et en rassemblant les coefficients de $\delta u_0, \delta w_0, \delta \psi_x$, les équations de mouvement suivantes sont obtenues :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4I_3}{3h^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{V.25.a})$$

$$\begin{aligned}\delta w_0 : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - q + \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} \right) + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} \right) + K_w w_0 - K_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial t^2} \\ &\quad - \frac{4I_3}{3h^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{16I_5}{9h^4} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right)\end{aligned}\quad (\text{V.25.b})$$

$$\delta\psi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} - \partial Q_{xz} + \frac{4}{h^2} R_{xz} - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} \right) = I_1 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \frac{4I_3}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + \frac{16I_5}{9h^4} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) \quad (V.25.c)$$

V.3.3 Solutions analytiques pour poutres simplement appuyées :

En se basant sur l'approche de Navier, les expressions des déplacements suivantes sont utilisées :

$$u_0(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \quad (V.26.a)$$

$$w_0(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \quad (V.26.b)$$

$$\psi_x(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \quad (V.26.c)$$

Avec $\alpha = m\pi/L$, et $i = \sqrt{-1}$, ω est la fréquence de la vibration libre. La charge transversale « q » est aussi exprimée en série de Fourier sinusoïdale comme suit :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin \alpha x \quad (V.27)$$

La magnitude Q_m peut être exprimée comme suit:

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx = \begin{cases} q_0 \text{ (m=1)} & : \text{pour charges sinusoïdales} \\ \frac{4q_0}{m\pi} \text{ (m=1,3,5..)} & : \text{pour charges uniformes} \end{cases} \quad (V.28)$$

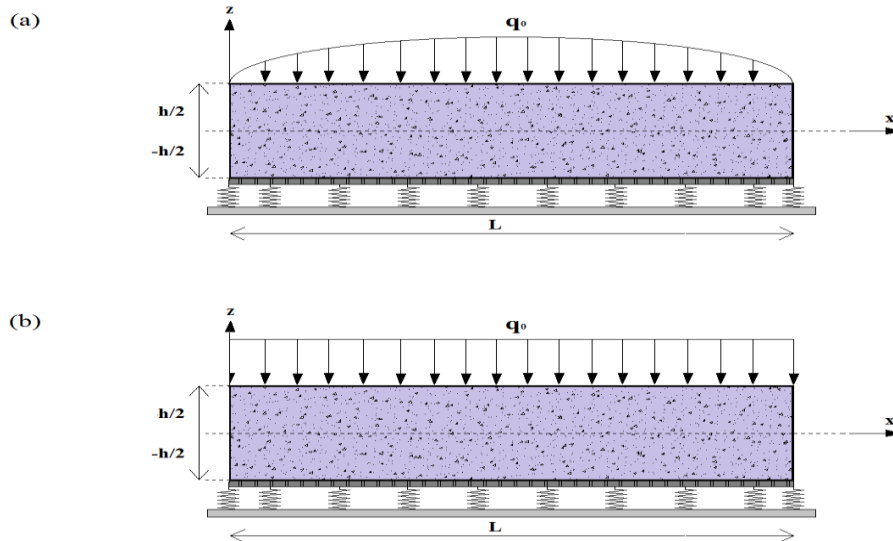


Figure V.1 : Géométrie d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice
(a) Sous chargement sinusoïdal (b) Sous chargement uniforme

Enfin, afin d'obtenir les solutions analytiques. Les résultats de la substitution peuvent être organisés sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ W_{mn} \\ \psi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (V. 29)$$

Avec :

$$\begin{aligned} S_{11} &= -A\alpha^2 & S_{12} &= \frac{4\alpha^3 E}{3h^2} & S_{13} &= -B\alpha^2 + \frac{4\alpha^2 E}{3h^2} \\ S_{21} &= S_{12} & S_{22} &= \frac{8\alpha D_{55}}{h^2} - A_{55}\alpha^2 - \frac{16\alpha^2 F_{55}}{h^4} - \frac{16\alpha^4 H}{9h^4} - K_w - K_s\alpha^2 \\ S_{23} &= -A_{55}\alpha^2 + \frac{8\alpha D_{55}}{h^2} - \frac{16\alpha F_{55}}{h^4} + \frac{4\alpha^3 F}{3h^2} - \frac{16\alpha^3 H}{9h^4} \\ S_{31} &= S_{13} & S_{32} &= S_{23} \\ S_{33} &= -A_{55} - D_{55}\alpha^2 + \frac{8\alpha^2 F}{3h^2} - \frac{16F_{55}}{h^2} + \frac{8D_{55}}{h^2} - \frac{16\alpha^2 H}{9h^4} \\ m_{11} &= -I_0 & m_{12} &= \frac{4\alpha}{3h^2} I_3 & m_{13} &= -I_2 \\ m_{21} &= m_{12} & m_{22} &= -I_0 + \frac{16\alpha^2 I_5}{9h^4} & m_{23} &= I_0\alpha + \frac{16\alpha I_5}{9h^4} \\ m_{31} &= m_{13} & m_{32} &= m_{23} & m_{33} &= -I_1 - I_2 + \frac{16I_5}{9h^4} \end{aligned} \quad (V. 30)$$

V.4 Le modèle 'Plaque'

V.4.1 Cinématique

Ici, le tablier d'un pont est modélisé comme une plaque en béton. À la différence de la CPT et de la FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre-élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur, par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement. Le champ de déplacement suivant est proposé :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \psi_x(x, y) \quad (V.31.a)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) + z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \psi_y(x, y) \quad (V.31.b)$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (V.31.c)$$

Où (U, V, W) désignent les composantes de déplacement en un point arbitraire (x, y) ; (u_0, v_0, w_0) sont le déplacement d'un point matériel en (x, y) sur le plan médian de la plaque le long des directions x et y . ψ_x et ψ_y sont les rotations, $f(z)$ est la fonction de forme sinusoïdale qui représente la répartition des déformations et des déplacements transversaux de cisaillement le long de l'épaisseur.

La théorie de Reddy [13] est choisie sur la base de l'hypothèse que les contraintes de cisaillement transversales varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque et disparaissent sur les surfaces de la plaque, et par conséquent, il n'est pas nécessaire d'utiliser un facteur de correction de cisaillement. Le champ de déplacement devient:

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z \left[\psi_x(x, y) - \frac{4z^2}{3h^2} \left(\psi_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right) \right] \quad (V.32.a)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) + z \left[\psi_y(x, y) - \frac{4z^2}{3h^2} \left(\psi_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] \quad (V.32.b)$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (V.32.c)$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement est :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z(\kappa_x^0 + z^2 \kappa_x^2) \quad (V.33.a)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z(\kappa_y^0 + z^2 \kappa_y^2) \quad (V.33.b)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (V.33.c)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 + z^2 \kappa_{yz}^2 \quad (V.33.d)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 + z^2 \kappa_{xz}^2 \quad (V.33.e)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z(\kappa_{xy}^0 + z^2 \kappa_{xy}^2) \quad (V.33.f)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x}, \quad \kappa_x^0 = \frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial x}, \quad \kappa_x^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (V.34.a)$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y}, \quad \kappa_y^0 = \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial y}, \quad \kappa_y^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (V.34.b)$$

$$\gamma_{yz}^0 = \psi_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}, \quad \kappa_{yz}^2 = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right) \quad (V.34.c)$$

$$\gamma_{xz}^0 = \psi_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \quad \kappa_{xz}^2 = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right) \quad (V.34.d)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x}, \quad \kappa_{xy}^0 = \frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial x} \quad (V.34.e)$$

$$\kappa_{xy}^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y} \right)$$

Les relations constitutives linéaires de la plaque peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (V.35)$$

V.4.2 Équation de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé pour déterminer les équations de mouvement pour les plaques posées sur une fondation élastique. Le principe peut s'exprimer sous forme analytique comme :

$$0 = \int_0^T (\delta U_p + \delta U_F + \delta V) dt \quad (V.36)$$

Où δU_p et δU_F sont respectivement les variations de l'énergie de déformation de la plaque et de la fondation, δV est la variation du travail des forces extérieures.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée par :

$$\delta U_p = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \quad (V.37)$$

En substituant les équations (V.33) dans l'équation (V.37) on peut trouver :

$$\delta U_p = \int_A \left\{ \begin{aligned} &N_x \delta u_{0,x} - M_x \frac{d\delta \psi_x}{dx} + P_x \left[-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{d\delta \psi_x}{dx} + \delta w_{0,x,x} \right) \right] + N_y \delta u_{0,y} - M_y \frac{d\delta \psi_y}{dy} \\ &+ P_y \left[-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{d\delta \psi_y}{dy} + \delta w_{0,y,y} \right) \right] + N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) + M_{xy} \left(\frac{d\delta \psi_x}{dy} + \frac{d\delta \psi_y}{dx} \right) \\ &+ P_{xy} \left[-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{d\delta \psi_x}{dy} + \frac{d\delta \psi_y}{dx} + 2\delta w_{0,x,x} \right) \right] + Q_{xz} (\delta \psi_x + w_{0,x}) \\ &+ Q_{yz} (\delta \psi_y + w_{0,y}) + R_{xz} \left[-\frac{4}{h^2} \left(\frac{d\delta \psi_x}{dx} + \delta w_{0,x} \right) \right] + R_{yz} \left[-\frac{4}{h^2} \left(\frac{d\delta \psi_y}{dy} + \delta w_{0,y} \right) \right] \end{aligned} \right\} dA \quad (V.38)$$

Où N, M, P, Q et R sont les résultantes des efforts définies par :

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \quad (V.39.a)$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \quad (V.39.b)$$

$$(P_x, P_y, P_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} z^3 (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \quad (V.39.c)$$

$$(Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (V.39.d)$$

$$(R_{xz}, R_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (V.39.e)$$

En substituant l'équation (V.33) dans l'équation (V.35) et en remplaçant le résultat trouvé dans les équations (V.39), les résultats des efforts peuvent être écrites en terme de déplacement généralisé par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (V.40.a)$$

$$+ \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + \delta w_{0,x,x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \delta w_{0,y,y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} + 2\delta w_{0,x,y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (V.40.b)$$

$$+ \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + \delta w_{0,x,x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \delta w_{0,y,y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} + 2\delta w_{0,x,y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (V.40.c)$$

$$+ \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + \delta w_{0,x,x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \delta w_{0,y,y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} + 2\delta w_{0,x,y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y & w_{0,y} \\ \psi_x & w_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y & w_{0,y} \\ \psi_x & w_{0,x} \end{Bmatrix} \quad (V.40.d)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{yz} \\ R_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y & w_{0,y} \\ \psi_x & w_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y & w_{0,y} \\ \psi_x & w_{0,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.40.e})$$

Où $(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij})$ sont les coefficients de rigidité définis par :

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{V.41.a})$$

$$[A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} [1, z^2, z^4] dz \quad i, j = 4, 5 \quad (\text{V.41.b})$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation de Pasternak est définie par :

$$\delta U_f = \int_0^L (K_w w_0 \delta w_0 - K_s \nabla^2 w_0 \delta w_0) dx \quad (\text{V.42})$$

Où K_w et K_s sont respectivement les modèles de Pasternak et de Winkler.

La variation du travail des forces extérieures est calculée par :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx \quad (\text{V.43})$$

En substituant les expressions de δU_p , δU_f , δV à partir des équations (V.38), (V.42), (V.43), dans l'équation (V.36), et en intégrant par partie et en rassemblant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \psi_x$, $\delta \psi_y$, les équations de mouvement suivantes sont obtenues :

$$\delta u_0 = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.44.a})$$

$$\delta v_0 = \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.44.b})$$

$$\delta w_0 = \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - q + \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) - K_w w_0 - K_s \nabla^2 w_0 = 0 \quad (\text{V.44.c})$$

$$\delta \psi_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \partial Q_{xz} + \frac{4}{h^2} R_{xz} - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{V.44.d})$$

$$\delta \psi_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \partial Q_{yz} + \frac{4}{h^2} R_{yz} - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{V.44.e})$$

V.4.3 Solutions analytiques pour plaques simplement appuyées

Une plaque en béton renforcé par des nanoparticules de silice, de longueur L , largeur b , et d'épaisseur h est considérée et représentée sur la figure V.2.

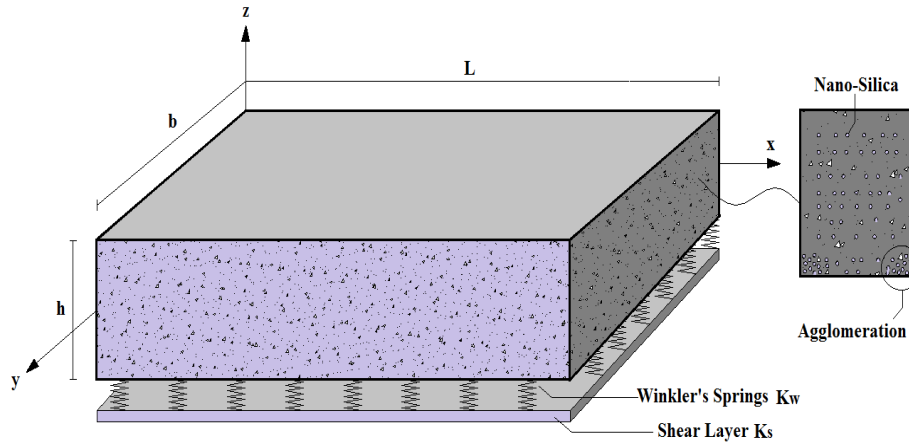


Figure V.2 : Géométrie d'une plaque en béton armé renforcé par de la nano-silice

En se basant sur l'approche de Navier, les expressions des déplacements suivantes sont utilisées :

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{V.45.a})$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{V.45.b})$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{V.45.c})$$

$$\psi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{V.45.d})$$

$$\psi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{V.45.e})$$

Avec $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn})$ sont des coefficients arbitraires. La charge transversale « q » est aussi exprimée en série de double-Fourier sinusoïdale comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{V.46})$$

Où :

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy = \begin{cases} q_0 & \text{pour charge sinusoïdale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour charge uniforme} \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

Les solutions analytiques peuvent être obtenues par :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.48})$$

V.5 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté deux modèles analytiques basés sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre-élevé pour l'étude mécanique d'une poutre et d'un tablier de pont en béton armé renforcé par des nanoparticules de silice. Les équations de mouvement ont été déterminées à partir du principe d'Hamilton, puis résolues analytiquement par les équations de Navier.

Une série de résultats sur les réponses statiques et dynamiques en termes de déplacements, contraintes ainsi que de fréquences naturelles sera présentée sous forme de graphes et de tableaux dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VI

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION

VI.1 Introduction

Dans ce chapitre, pour les résultats numériques, un programme est codé sur le logiciel Maple [79]. Plusieurs exemples sont présentés et discutés pour vérifier la précision des théories proposées pour la prédiction des réponses mécaniques des poutres et des plaques (simplement appuyées et appuyées sur des fondations de type Winkler-Pasternak) en béton renforcé par des nanoparticules de Silicium.

Des structures en béton avec un module de Young $E_m = 20\text{GPa}$ et une masse volumique $\rho_m = 2500\text{kg/m}^3$, renforcé par des nanoparticules de Silicium avec un module de Young $E_r = 70\text{GPa}$ et une masse volumique $\rho_r = 2334\text{kg/m}^3$ sont considérées. Le coefficient de Poisson est supposé constant à travers l'épaisseur et est égal à **0.3**. Pour ce qui suit on a utilisé les quantités adimensionnelles pour la présentation des résultats numériques sous formes graphiques et en tableaux comme suit :

Pour l'élément poutre :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{10E_m h^3}{q_0 L^4} w\left(\frac{L}{2}, 0\right) & \bar{U} &= \frac{10E_m h^3}{q_0 L^4} u\left(0, -\frac{h}{2}\right) \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 L} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right) & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0, 0) \\ K_w &= \frac{\beta_w A_{110}}{L^2} & K_s &= \beta_s A_{110} & \hat{\omega} &= \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}\end{aligned}\quad (\text{VI. 1})$$

Pour l'élément plaque :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x(z) &= -\frac{h}{q_0 L} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{b}{2}, z\right) & \bar{\tau}_{xy}(z) &= \frac{h}{q_0 L} \tau_{xy}(0, 0, z) \\ \bar{\tau}_{xz}(z) &= \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \\ K_w &= \frac{\beta_w D_m}{L^4} & K_s &= \frac{\beta_s D_m}{L^2} & D_m &= \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \\ \bar{w} &= \frac{10E_m h^3}{q_0 L^4} w\left(\frac{L}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) & \bar{U} &= \frac{10E_m h^3}{q_0 L^4} w\left(0, \frac{b}{2}, z\right)\end{aligned}\quad (\text{VI. 2})$$

Pour des fins de comparaison, nous avons choisi la théorie raffinée des quatre variables et la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT), où leur champ de déplacement peut être exprimé comme suit :

Pour la théorie raffinée :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{dw_0(x, t)}{dx} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (\text{VI. 3.a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{VI. 3.b})$$

Pour la FSDT :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\varphi(x, t) \quad (\text{VI. 4.a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{VI. 4.b})$$

VI.2 Effet d'agglomération des nanoparticules sur le module de Young

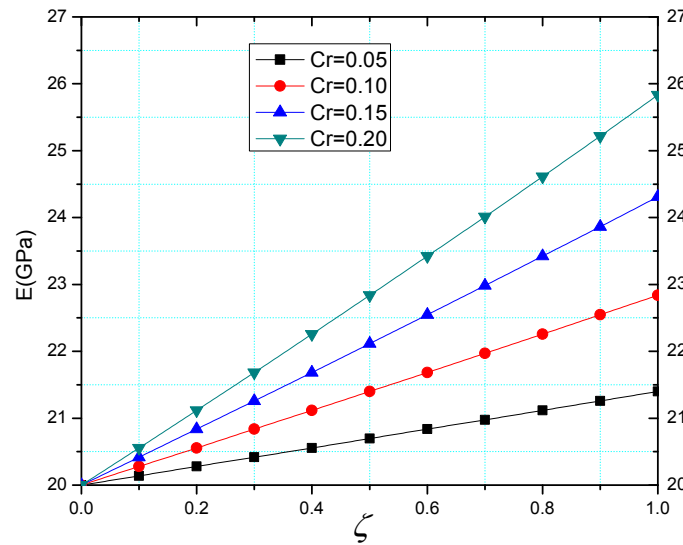


Figure VI.1 : Effet d'agglomération de nano-silice sur le module d'élasticité du béton ($\xi=1$)

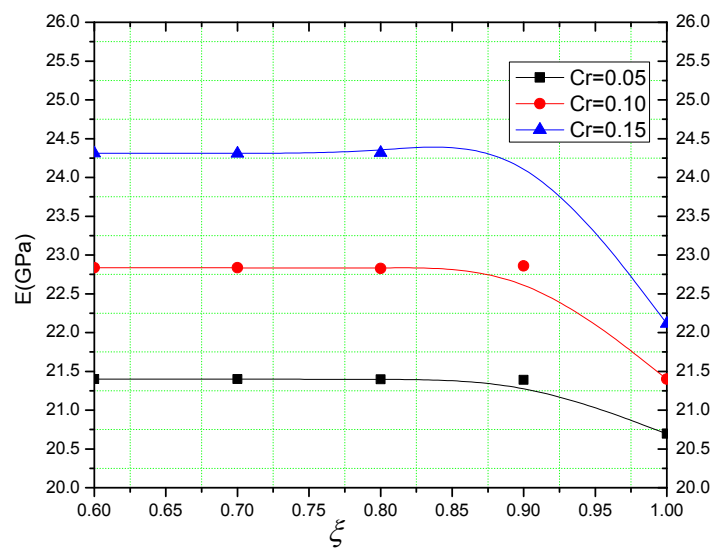


Figure VI.2 : Effet d'agglomération de nano-silice sur le module d'élasticité du béton ($\zeta=0.5$)

L'effet d'agglomération des deux paramètres ζ et ξ en fonction de la concentration des particules de nano-silice sur le module de Young effectif est représenté sur les figures VI.1-2. Le premier cas est celui où les particules sont supposées être uniformément dispersées $\xi = 1$, donc le modèle d'agglomération ci-dessus n'aura qu'un seul paramètre d'agglomération (ζ). Nous pouvons voir que lorsque les deux paramètres d'agglomération sont égaux ($\zeta = \xi = 1$) le module de Young est à ses valeurs maximales. Avec la diminution du paramètre

d'agglomération ζ à partir de l'unité, la rigidité effective diminue très rapidement, et lorsque $\zeta < 0.4$, l'ajout de nano-SiO₂ ne produit pas d'effet de rigidification évident.

Le deuxième cas est un cas plus général, c'est où les deux paramètres ζ et ξ sont nécessaires pour décrire l'agglomération des SiO₂. On constate que l'agglomération des nanoparticules de silice exerce un effet d'affaiblissement prononcé sur la propriété élastique effective du béton renforcé.

VI.3 Validation des modèles mathématiques

Il est important de vérifier d'abord l'exactitude du modèle mathématique actuel, puisque les résultats numériques pour l'analyse de flexion des structures en béton renforcé avec des nanoparticules de silice ne sont pas disponibles dans la littérature.

Compte tenu du matériau et des paramètres géométriques similaires à Thai et Vo [80], les résultats en termes de déplacements transversaux ainsi que de contrainte normale des poutres FG avec le paramètre ($P=0$) sont adoptés pour comparer avec les résultats actuels comme indiqué dans le tableau VI.1.

Tableau VI.1 : Validation de la théorie actuelle des poutres contre celles de la littérature

P	Méthodes	$L/h = 20$		
		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	TBT (Présente) [13]	2.8962	15.0131	0.7402
	SBT [15]	2.8962	15.0138	0.7686
	EBT [47]	2.8961	15.0145	0.7920
	CBT	2.8783	15.0000	-

Pour l'élément plaque, on prend en compte un matériau et des paramètres géométriques similaires à Thai et Choi [81], et en éliminant l'effet des particules de nano-silice et de la fondation Winkler-Pasternak, les résultats en termes de déplacement transversal ainsi que de contrainte normale des plaques FG avec fixation du paramètre ($P=1$) sont adoptés pour comparer avec la théorie actuelle comme indiqué dans le tableau VI.2.

Tableau VI.2 : Validation de la théorie actuelle des plaques contre celles de la littérature

P	Méthodes	$\bar{\sigma}_x(h/3)$		$\bar{w}$	
		$L/h = 4$	$L/h = 100$	$L/h = 4$	$L/h = 100$
1	CPT[82]	0.8060	20.1500	0.5623	0.5623
	FSDT [82]	0.8060	20.1500	0.7291	0.5625
	Thai and Choi[81]	0.5812	14.9676	0.7284	0.5625
	Présente	0.5813	14.9677	0.7286	0.5625

Comme observé, les résultats sont en bon accord. L'utilisation de différentes théories de déformation de cisaillement donne des résultats similaires de déplacements et de contraintes normales, cependant, les théories de déformation de cisaillement d'ordre-élevé prédisent des résultats précis que la FSDT et la théorie classique des poutres et des plaques.

VI.4 Élément poutre

Notre étude consiste à analyser le comportement statique et dynamique des poutres en béton renforcé par de la nano-silice en tenant compte des effets d'agglomération, reposant sur différents types de fondations. Pour cela la configuration suivante est utilisée.

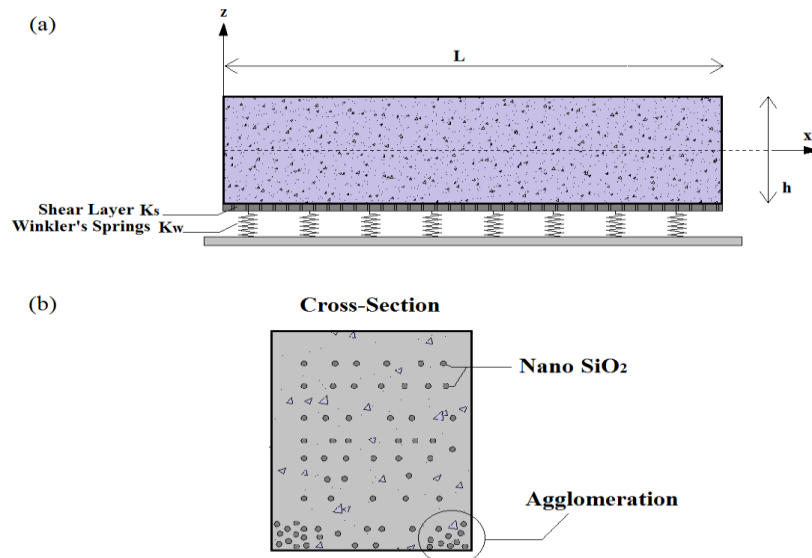


Figure VI.3 : (a) Géométrie d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice
(b) Coupe transversale de la poutre

VI.4.1 Analyse statique

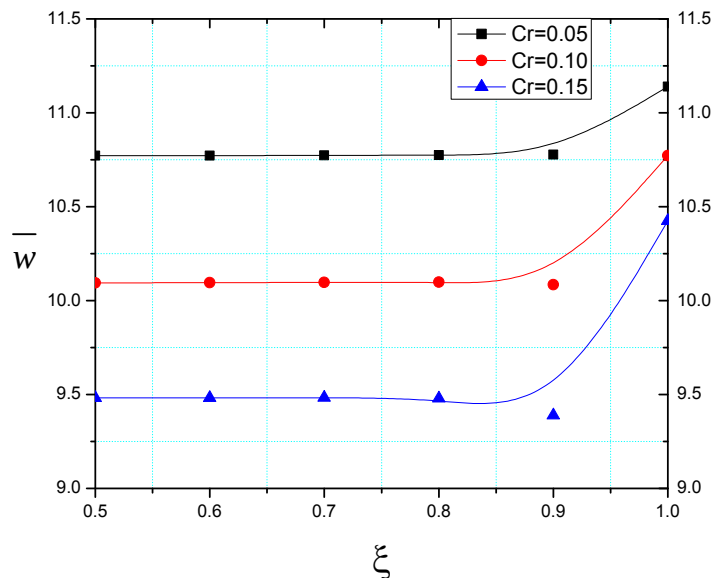


Figure VI. 4 : Effet d'agglomération sur le déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous chargement sinusoïdal ($L/h=10$, $\beta_w = \beta_s = 0$, $\zeta=0.5$)

La figure VI.4 représente l'effet d'agglomération sur les déplacements transversaux de la poutre pour diverses concentrations de nano-silice. Dans ce cas plus général, les deux

paramètres ζ et ξ sont nécessaires pour décrire l'agglomération des particules de SiO_2 . On constate que l'agglomération affaiblit considérablement le module d'élasticité de la poutre en béton et augmente finalement son déplacement transversal.

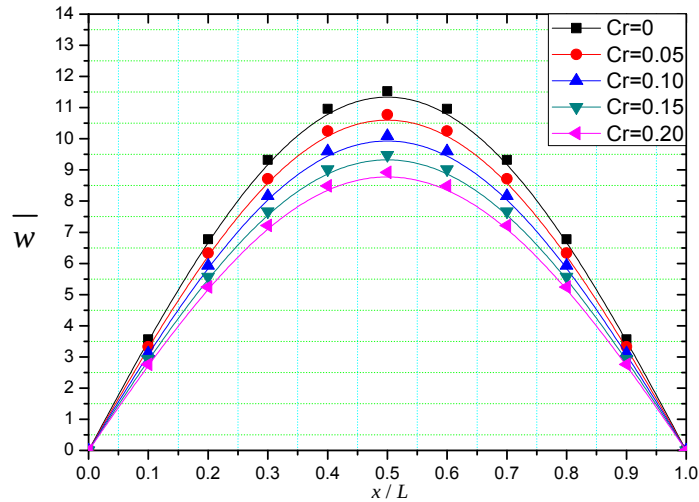


Figure VI.5 : Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous chargement sinusoïdal pour diverses concentrations de nano-SiO₂ ($L/h=10$, $\beta_w = \beta_s = 0$)

La figure VI.5 illustre l'effet de différentes concentrations de nano-SiO₂ sur le déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous charge sinusoïdale. Clairement, les déplacements maximaux sont au milieu de chaque poutre avec $x/L = 0.5$. Les déplacements transversaux pour les modes $Cr = 0$ et $Cr = 0.2$ sont respectivement de 11,52 et 8,92. Ils diminuent d'environ 29% lors de l'augmentation des concentrations de nano-silice, cela est dû à l'effet de renfort qu'amène cette dernière sur les poutres en béton.

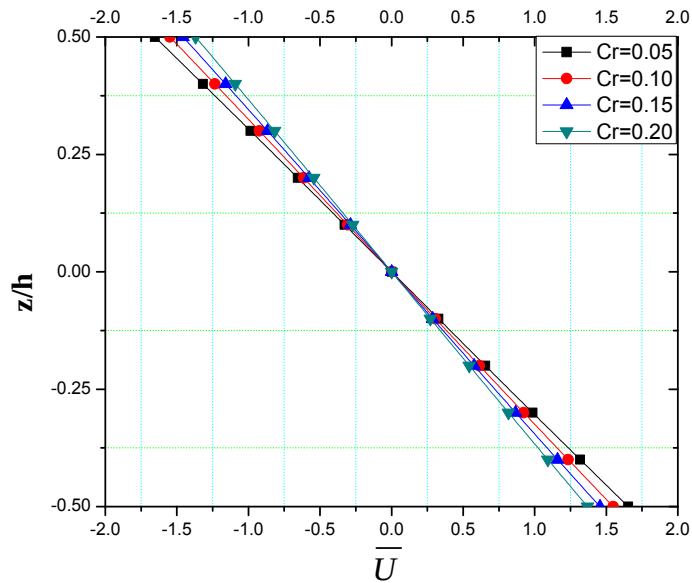


Figure VI.6 : Déplacement axial adimensionnel de la poutre en béton armé sous chargement sinusoïdal ($L/h=10$, $\beta_w = \beta_s = 0$)

La figure VI.6 montre le déplacement axial adimensionnel d'une poutre en béton armé sous différentes concentrations de nano-SiO₂. On constate que les déplacements axiaux sont symétriques et ont la valeur 0 au plan médian ($z=0$), cela du fait de la distribution des nanoparticules de silice, et du fait de l'homogénéité des poutres de béton. On peut également voir la différence en ce sens que c'est la concentration de nano-silice qui joue un rôle de renfort pour réduire les déplacements axiaux.

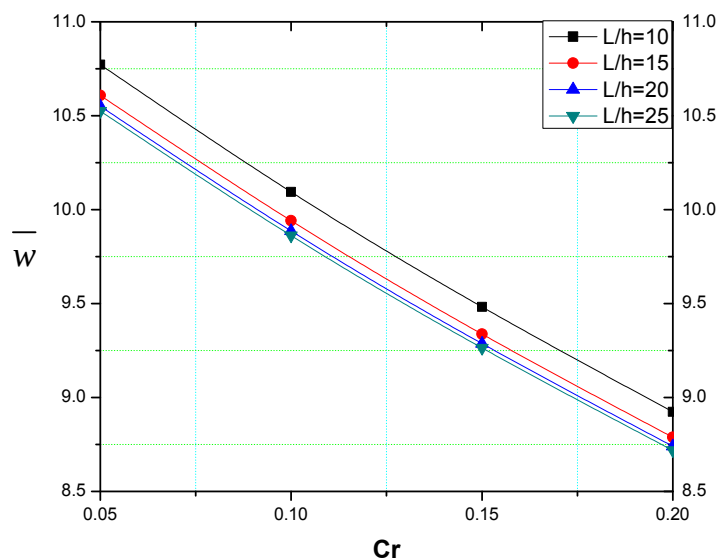


Figure VI.7 : Effets du rapport épaisseur / longueur sur le déplacement transversal adimensionnel à mi-portée d'une poutre en béton armé sous un chargement sinusoïdal ($\beta_w = \beta_s = 0$)

L'effet du rapport épaisseur / longueur des poutres en béton armé sur le déplacement transversal adimensionnel par rapport aux fractions volumiques de SiO_2 est illustré sur la figure VI.7. Comme on peut le voir, avec l'augmentation du rapport épaisseur / longueur de la poutre de béton, le déplacement transversal diminue car la rigidité de la structure est améliorée.

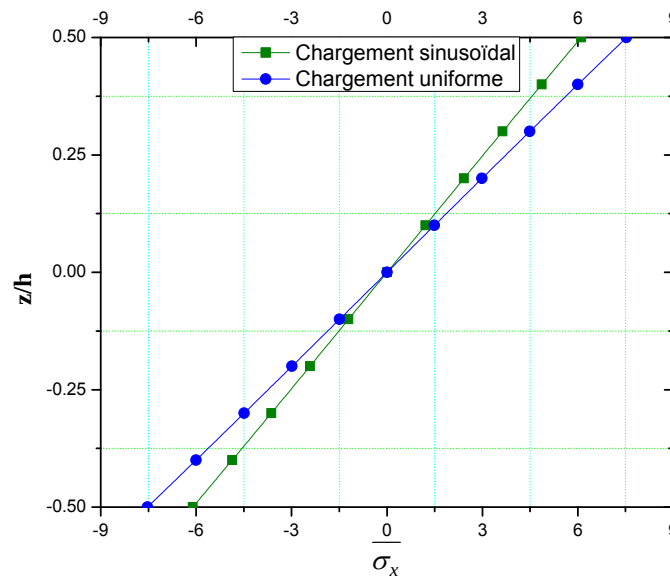


Figure VI.8 : Contrainte normale adimensionnelle sous différents types de chargements ($\beta_w = \beta_s = 0$, $L/h = 10$, $Cr = 0.05$)

Sur la figure VI.8, nous comparons la différence entre l'utilisation de deux types de charges et leurs conséquences pour les contraintes normales. Logiquement, les résultats montrent que les charges uniformes donnent une contrainte plus importante, c'est dû à leur forme rectangulaire d'impact sur la poutre.

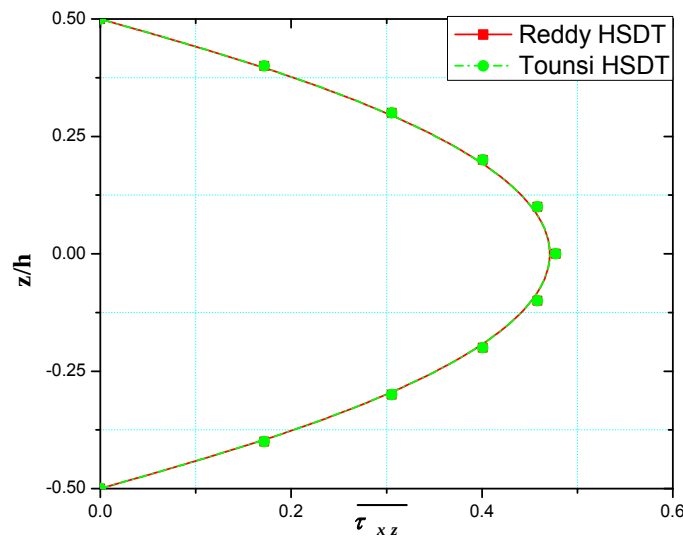


Figure VI.9 : Contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une poutre en béton armé sous des charges sinusoïdales ($\beta_w = \beta_s = 0, L/h=10, Cr=0.05$)

La figure VI.9 présente l'utilisation de deux théories différentes pour calculer la contrainte de cisaillement transversale de la poutre en béton armé. On peut dire que différentes théories de cisaillement d'ordre-élevé prédisent les mêmes résultats, et qu'en raison de l'homogénéité de la poutre en béton, la valeur maximale est dans le plan médian et a une distribution parabolique et symétrique.

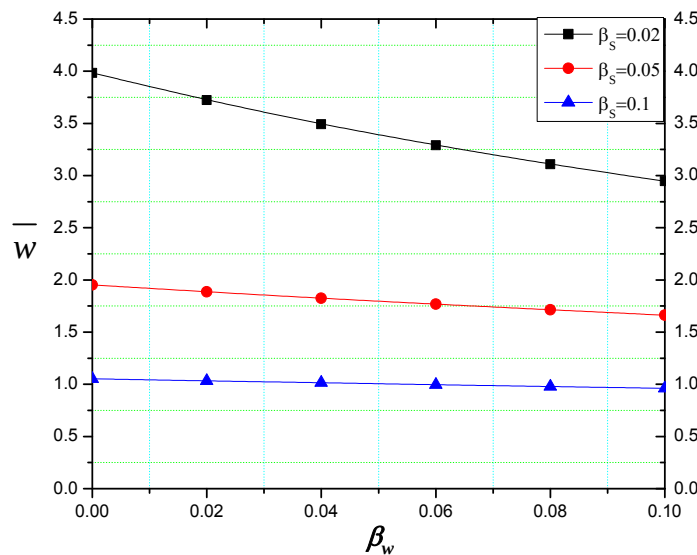


Figure VI.10 : Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous une charge uniforme avec variation des constantes de fondations ($L/h=10, Cr=0.10$)

La TSDT est utilisée pour déterminer le déplacement transversal maximal de la poutre en béton armé associé aux changements des constantes de la fondation comme illustré à la figure

VI.10. Évidemment, la fondation a un effet significatif sur la réduction des déplacements transversaux, car elle est presque linéaire à mesure que les facteurs de la fondation augmentent.

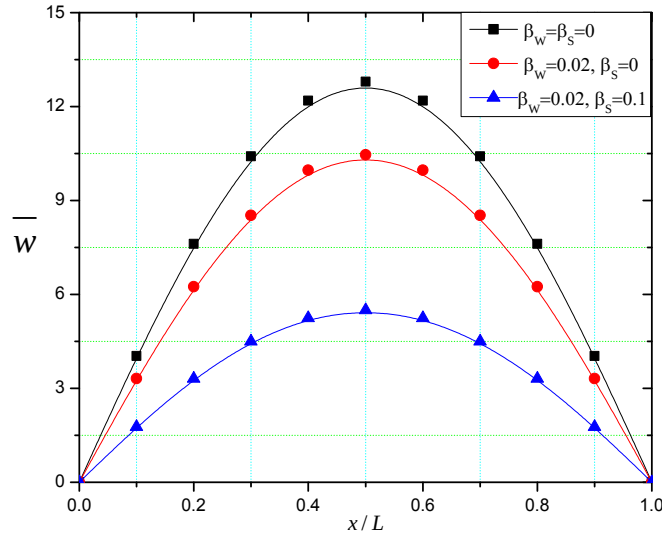


Figure VI.11 : Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé posée sur fondation élastique sous chargement uniforme ($L/h=10$, $Cr=0.10$)

Dans un autre sens, on trace la figure VI.11 pour montrer l'effet de la fondation élastique sur le déplacement transversal de la poutre. On peut dire que les paramètres de la fondation jouent un grand rôle dans la diminution de la déflexion des poutres de béton reposant sur des fondations élastiques.

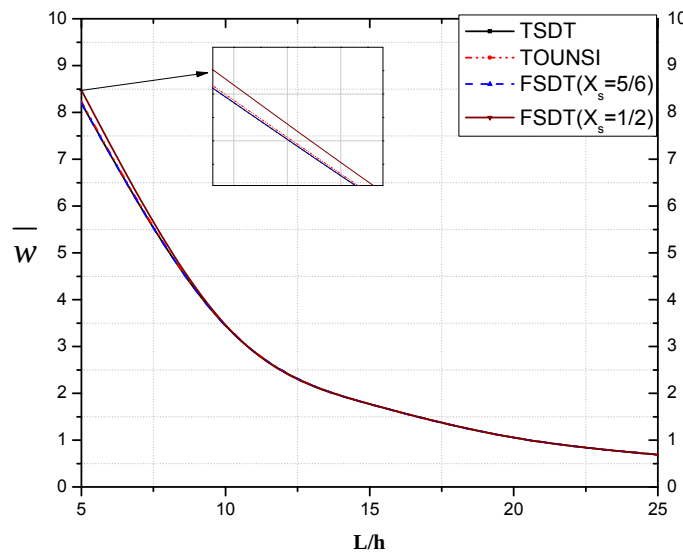


Figure VI.12 : Déplacement transversal adimensionnel d'une poutre en béton armé sous des charges uniformes ($\beta_w=0.05$, $\beta_s=0.02$, $Cr=0.05$, X_s : Facteur de correction de cisaillement)

À titre de comparaison, la figure VI.12 représente l'effet de l'utilisation de différentes théories sur la génération des déplacements transversaux d'une poutre en béton reposant sur une fondation élastique sous un chargement uniforme. La théorie raffinée de Tounsi [19] et la théorie actuelle prédisent les mêmes résultats puisqu'elles sont toutes les deux des théories de cisaillement d'ordre-élevé, contrairement à la théorie de Timochenko [48], qui nécessite l'utilisation de facteurs de correction pour être plus précise. Notez que l'utilisation du facteur de correction de $X_s=5/6$ dans la théorie du premier ordre donne de très bons résultats en termes d'accord avec les autres théories, mais en utilisant un facteur de correction de $X_s=1/2$ ça surestime les déplacements transversaux.

VI.4.2 Analyse dynamique

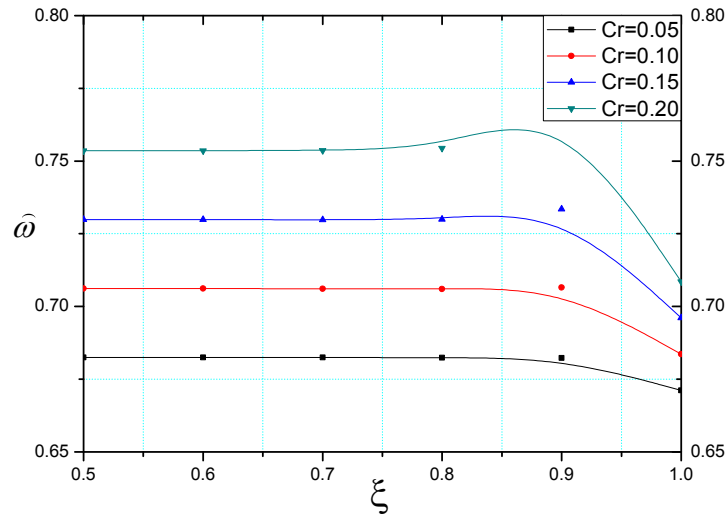


Figure VI.13 : Effet d'agglomération sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice ($L/h=5$, $\beta_w = \beta_s = 0$, $\zeta=0.5$)

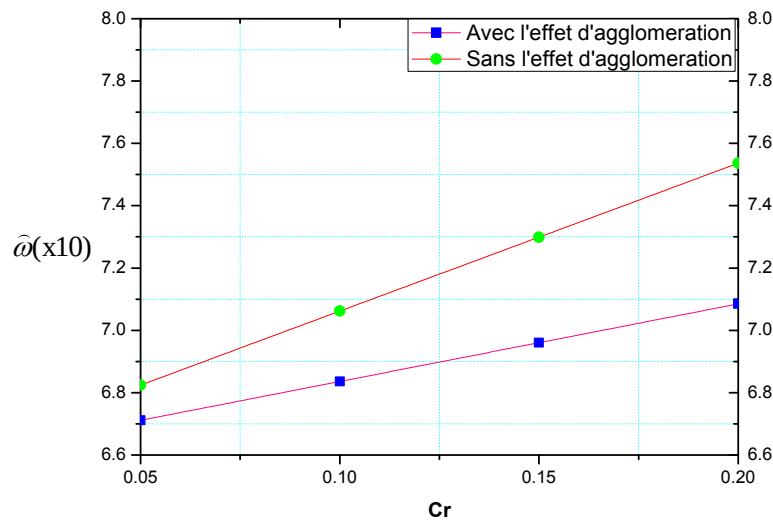


Figure VI.14 : Effet d'agglomération sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre en béton armé renforcé par de la nano-silice ($L/h=5$, $\beta_w = \beta_s = 0$)

L'effet de l'agglomération sur la fréquence des structures par rapport au pourcentage de volume des nanoparticules SiO_2 est démontré sur les figures VI.13-14. On constate que la prise en compte de l'effet d'agglomération conduit à une fréquence plus basse, cela est dû au fait que la prise en compte de l'effet d'agglomération conduit à diminuer la rigidité de la structure. De plus, avec l'augmentation de Cr , la fréquence est augmentée pour les deux modèles.

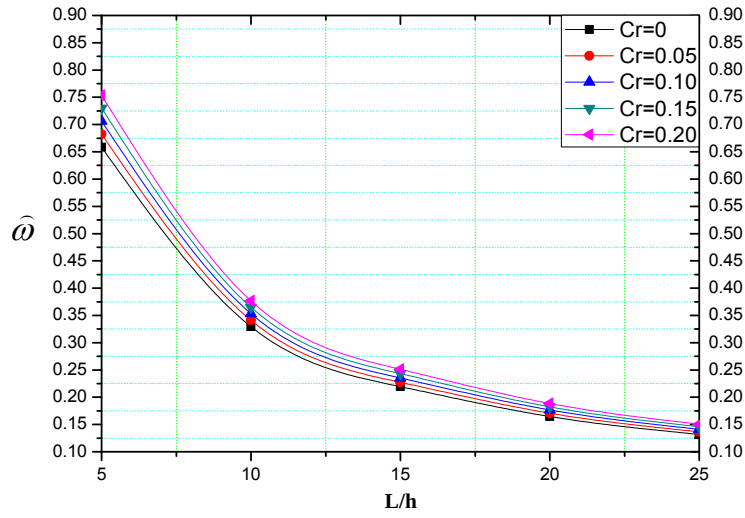


Figure VI.15 : Fréquences naturelles adimensionnelles des poutres en béton armé pour différentes concentrations de nano-SiO₂ ($\zeta=\xi=0.5$, $\beta_w=\beta_s=0$)

Les influences des fractions volumiques de SiO₂ et des rapports d'épaisseur sur les résultats de fréquence de la poutre sont considérés dans la Figure VI.15. Les poutres avec plus de fractions volumiques ont des valeurs de fréquences plus élevées. Similaire au cas de flexion, l'augmentation des rapports d'épaisseur entraîne la diminution de fréquences, en particulier dans la gamme $L/h = 5-15$.

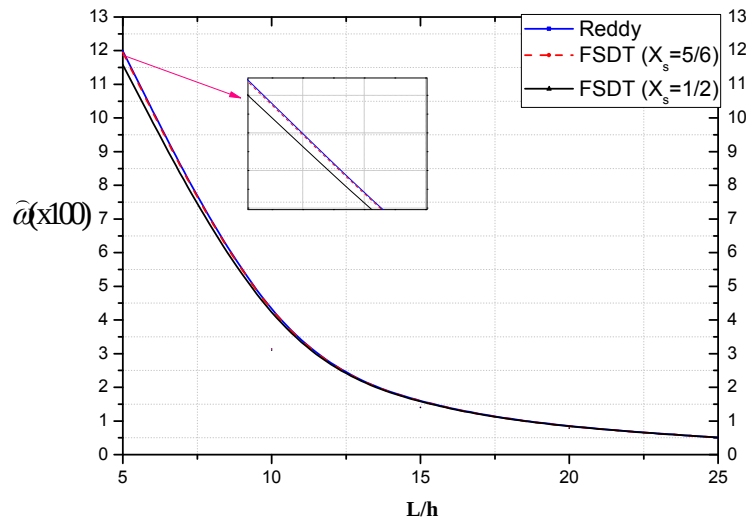


Figure VI.16 : Fréquences adimensionnelles des poutres en béton armé renforcé par de la nano-silice sous différentes théories ($\beta_w=\beta_s=0$, $Cr=0.10$, Mode 2)

La figure VI.16 présente les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction des rapports épaisseur/longueur (L/h) d'une poutre de pont en béton renforcé par des nanoparticules de silicium.

On peut observer à partir des graphes tracés que la théorie FSDT sous estime les valeurs de la fréquence adimensionnelle pour des rapports d'élancement petits. Ces résultats deviennent presque identiques avec la TSDT quand ce rapport devient plus important. On peut confirmer une autre fois que l'utilisation du facteur de correction sur la FSDT donne presque les mêmes valeurs de la fréquence adimensionnelle quelles que soient les valeurs du rapport d'élancement (L/h).

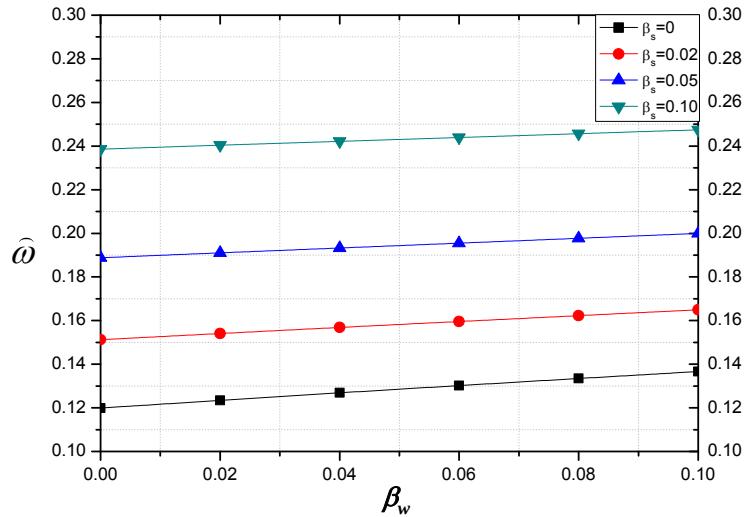


Figure VI.17 : Fréquences adimensionnelles d'une poutre en béton armé avec variation des facteurs de la fondation ($L/h=5$, $Cr=0.10$, Mode2)

Les effets des paramètres de fondations sur les fréquences sont indiqués dans la Figure VI.17. On voit que les fréquences croient linéairement à mesure que les facteurs des constantes de fondation augmentent. En outre, on en déduit que le paramètre de fondation de Pasternak (β_s) a un effet dominant sur l'augmentation de la fréquence par rapport au paramètre de Winkler (β_w).

VI.5 Élément plaque

Pour cette partie d'étude, nous prendrons la configuration suivante (Figure VI.18) :

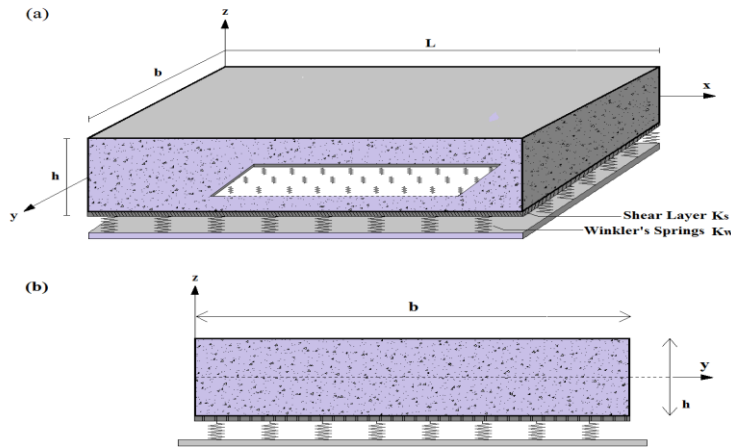


Figure VI.18 : Géométrie d'une plaque en béton renforcé par des nano-SiO₂

VI.5.1 Analyse statique

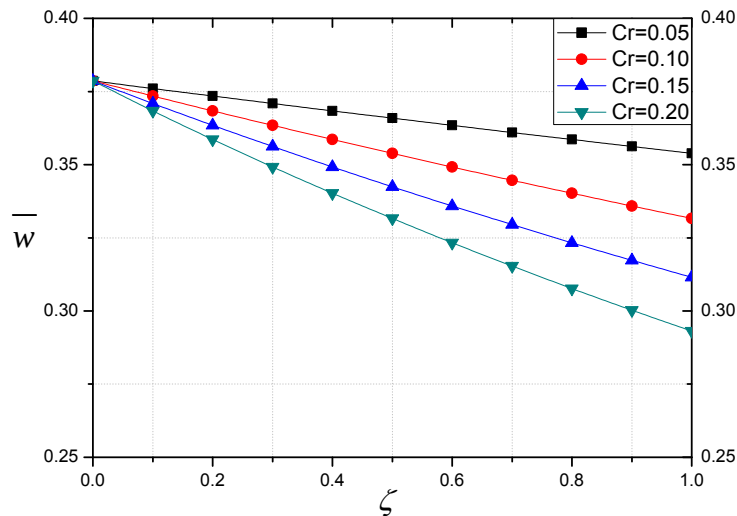


Figure VI.19 : Effet d'agglomération sur la flexion adimensionnelle des plaques carrées avec différentes concentrations de nano-SiO₂ sous charge sinusoïdale ($L/h=4$, $k_w=k_s=0$, $\xi=1$)

La figure VI.19 montre l'effet de l'agglomération sur la flexion des plaques carrées en fonction des concentrations de nanoparticules de silice. Comme on peut le voir, compte tenu de la négligence de l'effet d'agglomération, en plus avec l'augmentation du Cr , conduit à un déplacement plus faible, il est dû au renforcement de la structure.

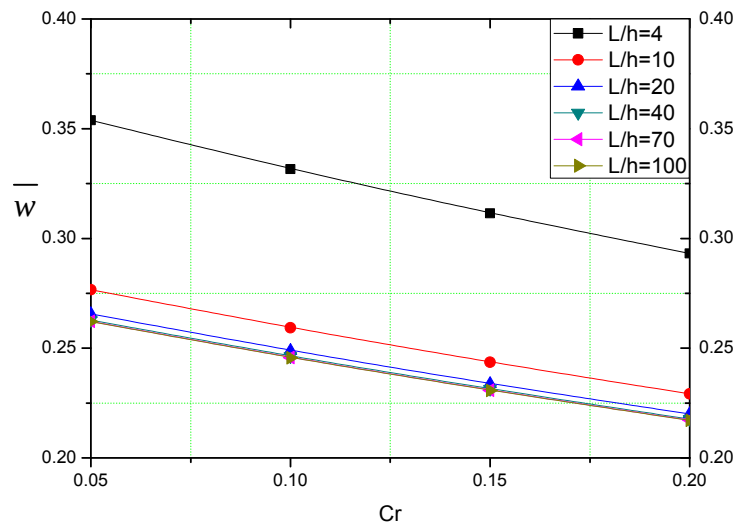


Figure VI.20 : Effets du rapport épaisseur / longueur sur la flexion adimensionnelle à mi-portée des plaques carrées sous charge sinusoïdale ($k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)

L'effet du rapport d'épaisseur des plaques carrées sur la flexion adimensionnelle en variant les fractions volumiques des SiO_2 est représenté sur la figure VI.20. visiblement, l'élargissement du rapport d'épaisseur de la plaque de béton, établit une diminution dans le déplacement transversal car la rigidité de la structure est enrichie.

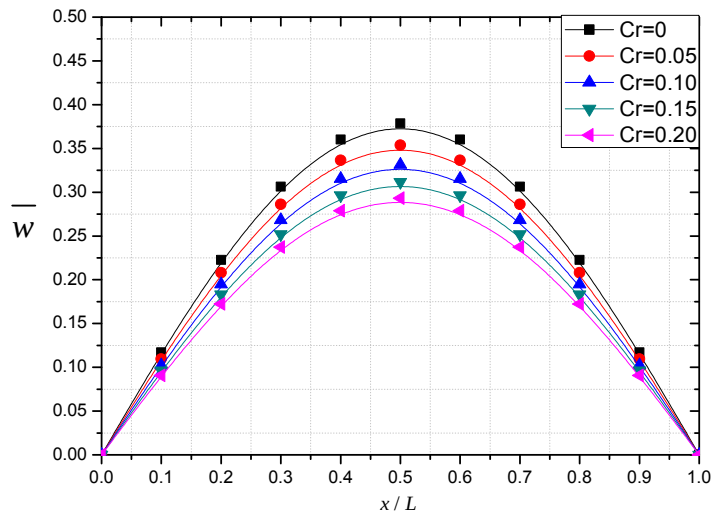
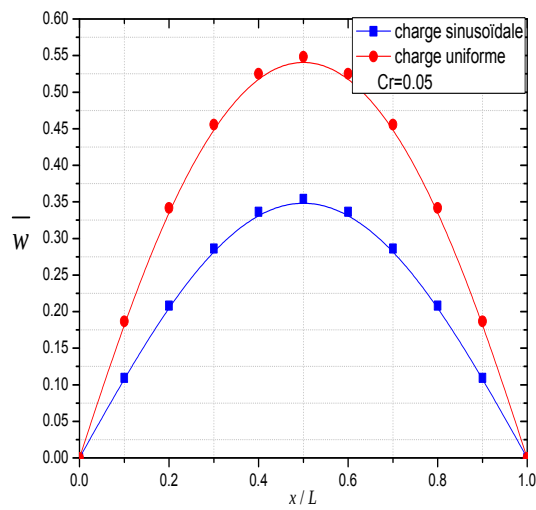
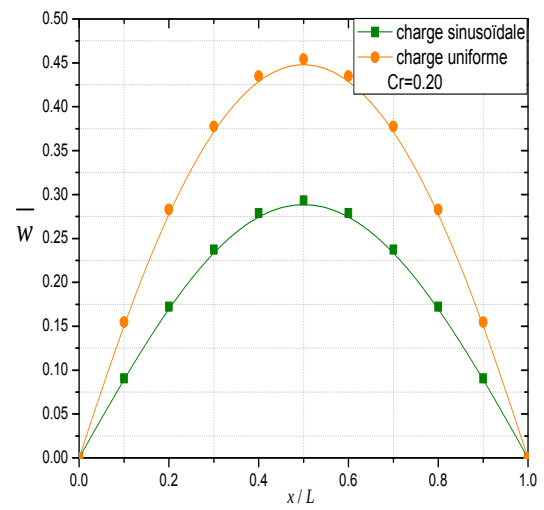


Figure VI.21 : Flexion adimensionnelle des plaques carrées sous chargement sinusoïdal pour diverses concentrations de nano- SiO_2 ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)

La figure VI.21 illustre l'effet d'une variation de concentrations de nano- SiO_2 sur la flexion adimensionnelle d'une plaque carrée sous chargement sinusoïdal. Notoirement, les déplacements maximaux sont au milieu de chaque plaque avec $x/L = 0,5$. Les déplacements transversaux sont en diminution, cela est dû à l'effet de renforcement qu'amène la nano-silice sur les plaques de béton.



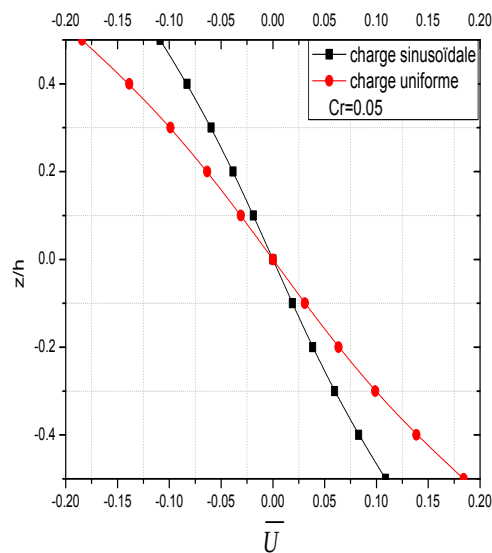
(a) $Cr=0.05$



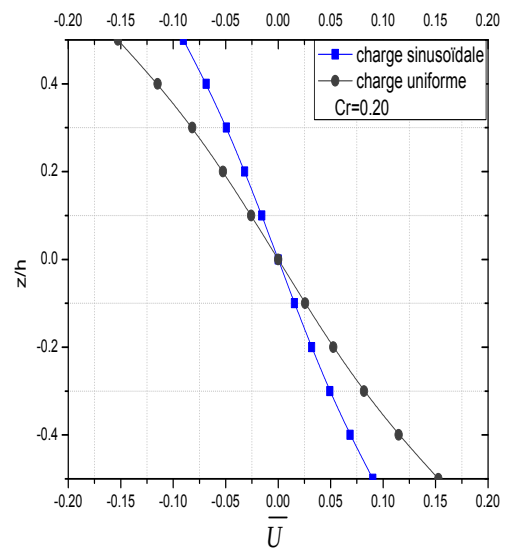
(b) $Cr=0.20$

Figure VI.22 : Flexion adimensionnelle des plaques carrées sous différent type de chargement pour diverses concentrations de nano-SiO₂ ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)

Afin d'étudier les déplacements transversaux de la plaque de béton sous différents types de chargements et pour différentes concentrations de nano-silice, nous traçons les deux figures (Fig.VI.22 (a) - (b)). On voit clairement que la charge uniforme agissant sur la plaque donne plus de déformation et qu'en ajoutant des nanoparticules de SiO₂, la déflexion diminue.



(a) $Cr=0.05$



(b) $Cr=0.20$

Figure VI.23 : Déplacement axial adimensionnel des plaques carrées en béton armé sous différent type de chargement pour diverses concentrations de nano-SiO₂ ($L/h=4$, $k_W=k_S=0$, $\zeta=\xi=0.5$)

Les figures VI.23 (a) - (b) montrent le déplacement axial adimensionnel d'une plaque carrée en béton armé sous différents types de chargements. On constate que les déplacements axiaux sont symétriques et ont la valeur 0 au plan médian ($z = 0$), cela du fait de la répartition des nanoparticules de silice, et du fait de l'homogénéité des plaques de béton. Nous pouvons également voir la différence entre la figure VI.23 (a) et la figure VI.23 (b) dans le sens que c'est la concentration de nano-silice qui joue un rôle de renforcement pour réduire les déplacements axiaux.

Tableau VI.3 : Déplacements et contraintes adimensionnels des plaques rectangulaires en béton armé sous charges sinusoïdales ($\beta_w = \beta_s = 0$, $\zeta = \xi = 0.5$)

b/L	L/h	Variables	Theorie présente	Théorie en cisaillement de premier-ordre (FSDT)			
				$X_s^1 = X_s^2 = 1$	$X_s^1 = X_s^2 = 5/6$	$X_s^1 = X_s^2 = 3/4$	$X_s^1 = X_s^2 = 1/2$
0.5	4	$\bar{w}$	0.0784	0.0726	0.07883	0.0829	0.1034
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	0.2450	0.2663	0.2768	0.2838	0.3187
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	0.1559	0.1695	0.1761	0.1806	0.2028
	10	$\bar{w}$	0.0478	0.0468	0.0478	0.0484	0.0517
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	0.5475	0.5559	0.5601	0.5629	0.5768
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	0.3484	0.3537	0.3564	0.3582	0.3671
	100	$\bar{w}$	0.0419	0.0419	0.0419	0.0419	0.0420
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	5.3510	5.3518	5.3522	5.3525	5.3539
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	3.4051	3.4057	3.4059	3.4061	3.4070
1	4	$\bar{w}$	0.3538	0.3388	0.3542	0.3645	0.4157
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	0.8365	0.8676	0.8831	0.8934	0.9450
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	0.4504	0.4672	0.4755	0.4811	0.5088
	10	$\bar{w}$	0.2766	0.2742	0.2766	0.2783	0.2865
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	1.9943	2.0067	2.0129	2.0170	2.0376
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	1.0738	1.0805	1.0838	1.0860	1.0972
	100	$\bar{w}$	0.2620	0.2620	0.2620	0.2620	0.2621
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	19.7594	19.7607	19.7613	19.7617	19.7638
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	10.6397	10.6403	10.6407	10.6409	10.6420
2	4	$\bar{w}$	0.8178	0.7936	0.8182	0.8346	0.9167
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	1.7342	1.7753	1.7958	1.8095	1.8777
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	0.5646	0.5780	0.5847	0.5891	0.6113
	10	$\bar{w}$	0.6941	0.6902	0.6941	0.6967	0.7099
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	4.2070	4.2234	4.2316	4.2371	4.2644
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	1.3697	1.3750	1.3777	1.3795	1.3884
	100	$\bar{w}$	0.6707	0.6707	0.6707	0.6707	0.6709
		$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	41.8278	41.8293	41.8302	41.8308	41.8335
		$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	13.6183	13.6188	13.6191	13.6193	13.6202

Le tableau VI. 3 est établi pour donner exemple sur l'utilisation de plusieurs théories sur la génération des déplacements et des contraintes adimensionnels pour les plaques rectangulaires. On remarque que l'utilisation de la FSDT sur les plaques épaisses surestime et ne donne pas de résultats précis par rapport à l'utilisation de la HSDT. Mais en y allant vers les plaques modérément épaisses et plaque minces, on remarque que toutes les théories prédisent le même résultat, c'est dû au fait de la prise en compte du cisaillement dans les théories d'ordre-élevé.

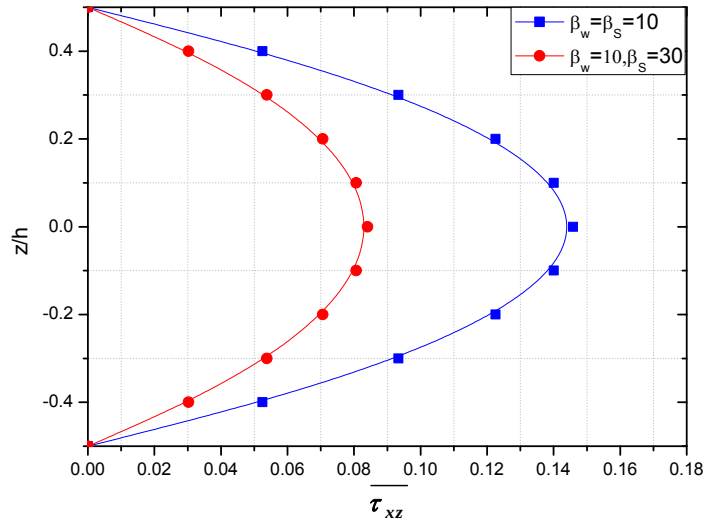
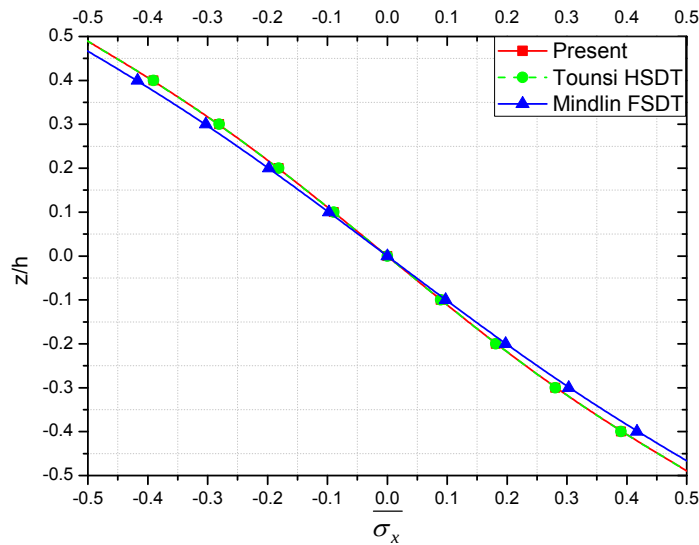


Figure VI.24 : Contrainte de cisaillement adimensionnelle des plaques carrées sous chargement sinusoïdal avec variation des facteurs de la fondation élastique ($L/h=4$, $\zeta=\xi=0.5$)

La figure VI.24 illustre l'effet des facteurs de la fondation sur la contrainte de cisaillement transversale. On observe qu'en augmentant les paramètres élastiques de la fondation, la contrainte de cisaillement diminue. On voit aussi que la valeur maximale apparaît au plan médian de la plaque, elle est due à l'homogénéité de la plaque.



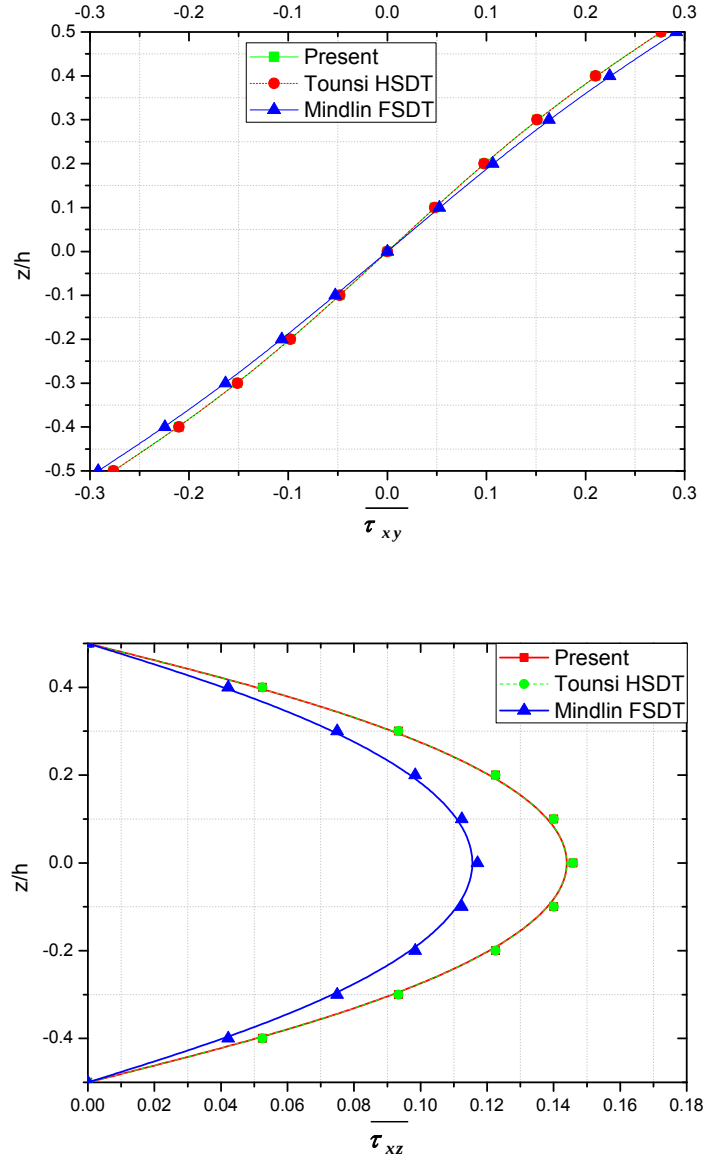


Figure VI.25 : Variations des contraintes adimensionnelles des plaques carrées sous chargement sinusoïdal ($L/h=4$, $K_W=K_S=10$, $\zeta=\xi=0.5$)

En utilisant différentes théories de déformation par cisaillement, les contraintes de cisaillement normales et transversales de plaques carrées reposant sur une fondation élastique sous chargement sinusoïdal sont présentées sur la figure VI.25. On observe que différentes théories prédisent différentes valeurs de contraintes maximales normales et de cisaillement. On peut conclure que la théorie de Reddy [13] et celle de Tounsi [83] prédisent les mêmes résultats puisqu'elles sont toutes les deux des théories de déformation par cisaillement d'ordre-élevé, contrairement à la théorie de Mindlin (FSDT) qui a besoin de facteurs de correction. On voit également que toutes les variations de contraintes sur l'épaisseur des plaques ont la même répartition parabolique et symétrique, comme dans le cas du déplacement axial (Fig.VI.23 (a) -(b)), elle est due à l'homogénéité de la plaque de béton.

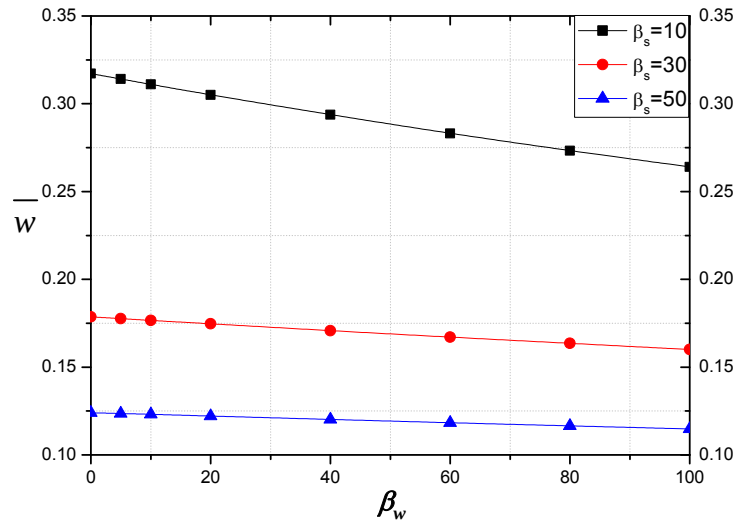
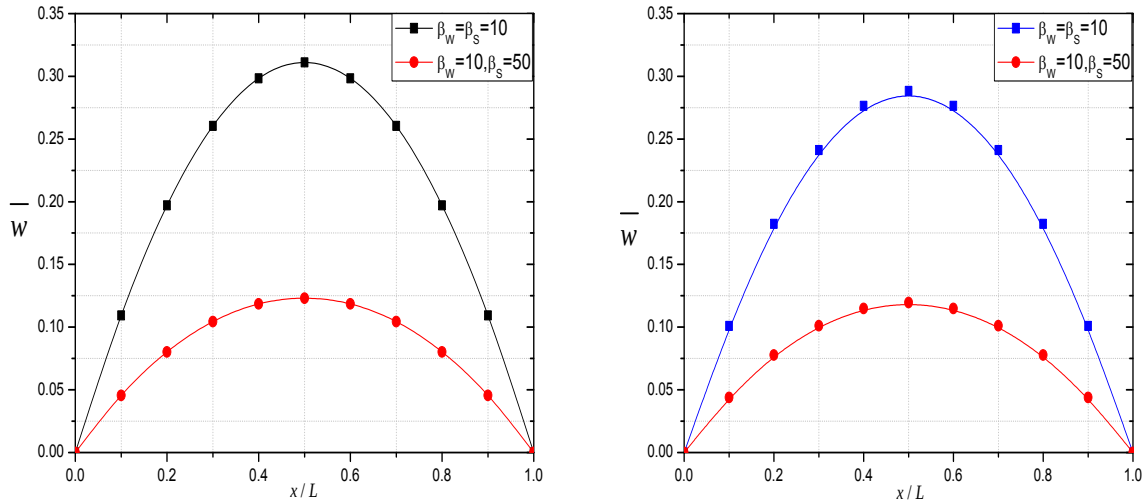


Figure VI.26 : Déplacement transversal adimensionnel des plaques carrées sous chargement uniforme avec variation des facteurs de la fondation élastique ($L/h=4$, $Cr=0.10$, $\zeta=\xi=0.5$)

La figure VI.26 est illustrée afin d'étudier l'effet de la variation des constantes de la fondation élastique sur la génération des déplacements transversaux. Evidemment, la fondation a un effet incontestable sur la réduction des déplacements transversaux.



(a) $Cr=0.10$

(b) $Cr=0.20$

Figure VI.27 : Déplacement transversal adimensionnel des plaques carrées sous chargement uniforme pour diverses concentrations de nano-SiO₂ avec variation des facteurs de la fondation élastique ($L/h=4$, $\zeta=\xi=0.5$)

Nous représentons les deux figures (VI.27 (a) - (b)) pour montrer l'effet de la fondation élastique ainsi que des concentrations des nanoparticules de SiO₂ sur le déplacement transversal de la plaque. On peut dire que les paramètres de la fondation et les concentrations

de nano-silice ont une grande utilité dans la diminution de la flexion des plaques de béton reposant sur des fondations élastiques.

VI.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse mécanique des éléments structuraux en béton armé renforcé par des nanoparticules de Silicium a été présentée. Les propriétés mécaniques des deux éléments structuraux ont été calculées à partir du modèle de Voigt. Une théorie efficace a été utilisée pour déterminer les équations de base de la poutre ainsi que de la plaque posées sur une fondation élastique. L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation présentes dans la littérature où un excellent accord a été observé. En outre, l'influence de certains paramètres comme la géométrie, la concentration de nano-SiO₂, les types de chargement et les coefficients de rigidité de la fondation élastique, sur l'étude flexionnelle et vibrationnelle des structures en béton armé a été minutieusement étudiée.

CONCLUSION GÉNÉRALE & PERSPECTIVES

Conclusion générale

La nanotechnologie, ou l'art de l'infiniment petit, fait chaque jour parler de lui un peu plus. L'une de ses principales applications concerne, entre autres, le béton. Ce dernier qui est un matériau complexe à cause de sa microstructure et de sa nature multi-échelle. Cette manipulation nano technologique des structures a pour but de renforcer la résistance et la durabilité de ce matériau qui a su faire ses preuves dans le secteur de la construction.

Beaucoup d'études ont été menées pour prédire l'effet de la micro-silice (Fumée de silice) sur le béton, c'est même devenu un des éléments courants dans sa composition. C'est maintenant au tour de la nano-silice de faire son apparition comme renfort, car elle intervient pour obstruer les pores habituellement présents, à l'origine des fissures, et permet de réduire de façon conséquente les dégradations dans tous les ouvrages. Cependant, l'utilisation de ces nouveaux éléments pourrait aussi connaître certaines limites, la première d'entre elles est financière, avec un coût très élevé.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons pu développer un modèle analytique pour prédire le comportement du matériau béton, renforcé par des nanoparticules de silicium. Il a fallu homogénéiser les deux phases en considérant la nano-silice comme inclusion, et par le modèle de Voigt, on a pu aboutir à une loi de mélange en tenant compte de l'effet d'agglomération des nano-SiO₂ et de leurs fractions volumiques pour calculer le module de Young effectif du composite.

Pour franchir les limitations de la théorie classique, on a utilisé une théorie d'ordre-élevé (TSDT) pour la modélisation de nos éléments structuraux. Le présent modèle n'exige pas l'introduction de facteurs de correction de cisaillement car il permet de donner une description correcte des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, néanmoins, il satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la poutre et de la plaque. En se basant sur le principe d'Hamilton et la méthode des travaux virtuels, les équations d'énergie ont été obtenues. Une fondation type Winkler-Pasternak a été introduite pour rigidifier la structure. Enfin, l'application de la technique de Navier des éléments structuraux simplement appuyés a été utilisée pour obtenir les solutions en termes de flexions et de vibrations, tout ça en tenant compte de plusieurs paramètres tel que la géométrie, les fractions volumiques de la nano-SiO₂, les rapports d'élancement et les effets de la fondation élastique.

À partir des résultats, on a pu conclure que l'utilisation des nanotechnologies a un rôle très important pour augmenter les performances des structures en béton. Les résultats montrent aussi que l'utilisation des nanoparticules de Silicium a un effet bénéfique sur la réduction de la flèche et des contraintes, mais aussi sur la fréquence, car cette dernière augmente en présence de nano-SiO₂. L'utilisation d'une fondation élastique peut s'avérer aussi avantageuse sur l'analyse statique et dynamique des structures en béton renforcé par de la nano-silice.

Conclusion générale & perspectives

Les résultats déduits dans ces travaux de recherche peuvent être développés et enrichis. Nous pouvons donner quelques perspectives :

- Développer des modèles d'homogénéisation types éléments-finis ou numériques, et les comparer avec les modèles analytiques déjà présents dans la littérature.
- Appliquer le présent modèle sur différentes études (Flambement, Hygrothermique, piézoélectrique...).
- Valider ces résultats théoriques par des études expérimentales.
- Développer d'autres modèles pour différent type de nano matériaux, nano-TiO₂ ou nano-ZnO par exemple, et l'appliquer comme renfort sur les structures en béton.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1] J. Yu , M. Zhang, G. Li, J. Meng and C. K. Y. Leung, «Using nano-silica to improve mechanical and fracture properties of fiber-reinforced high-volume fly ash cement mortar», *Construction and Building Materials*, vol. 239, 2020.
- [2] R. Behzadian, H. Shahrajabian, «Experimental study of the effect of nano-silica on the mechanical properties of Concrete / PET composites», *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 23, n°8, pp. 3660–3668, 2019.
- [3] M. Rupasinghe, P. Mendis, T.Ngo, T. N. Nguyen, M. Sofi, «Compressive strength prediction of nano-silica incorporated cement systems based on a multiscale approach», *Materials and Design*, vol. 115, pp. 379–392, 2017.
- [4] S. Haruehansapong, T.Pulngern, S. Chucheeepsakul, «Effect of the particle size of nanosilica on the compressive strength and the optimum replacement content of cement mortar containing nano-SiO₂», *Construction and Building Materials*, vol. 50, pp.471-477, 2014.
- [5] Y. Qing, Z. Zenan, K. Deyu , C. Rongshen, «Influence of nano-SiO₂ addition on properties of hardened cement paste as compared with silica fume», *Construction and Building Materials*, vol. 21, n°3, pp. 539–545, 2007.
- [6] A. Reza et M. Hamed, (2012), «Modeling the compressive strength of cement mortar nano-composites», *Computers & Concrete*, vol. 10, n°1, pp. 49–57, 2012.
- [7] S. Abd.El.Aleem, M. Heikal , W. M. Morsi, «Hydration characteristic, thermal expansion and microstructure of cement containing nano-silica», *Construction and Building Materials*, vol. 59, pp. 151–160, 2014.
- [8] M. Zamanian, R. Kolahchi, M. R. Bidgoli, «Agglomeration effects on the buckling behaviour of embedded concrete columns reinforced with SiO₂ nano-particles», *Wind and Structures*, vol. 24, n°1, pp. 43–57, 2017.
- [9] M. Azmi, R. Kolahchi, M.R. Bidgoli, «Dynamic analysis of concrete column reinforced with SiO₂ nanoparticles subjected to blast load», *Advances in Concrete Construction*, vol. 7, n°1, pp. 51–63, 2019.
- [10] H. B. Amnieh, M. S. Zamzam, R. Kolahchi, «Dynamic analysis of non-homogeneous concrete blocks mixed by SiO₂ nanoparticles subjected to blast load experimentally and theoretically», *Construction and Building Materials*, vol. 174, pp. 633–644, 2018.
- [11] M. Shokravi, «Vibration analysis of silica nanoparticles-reinforced concrete beams considering agglomeration effects», *Computers and Concrete*, vol. 19, n°3, pp. 333–338, 2017.
- [12] M. Alijani, M.R. Bidgoli, «Agglomerated SiO₂ nanoparticles reinforced-concrete foundations based on higher order shear deformation theory: Vibration analysis», *Advances in Concrete Construction*, vol. 6, pp. 585–610, 2018.
- [13] J. N. Reddy, «A simple higher-order theory for laminated composite plates», *Journal of Applied Mechanics ASME*, vol. 51, n°4, pp. 745–752, 1984.
- [14] J. N. Reddy, «Analysis of functionally graded plates», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n°1–3, pp. 663–684, 2000.

Références bibliographiques

- [15] M. Touratier, «An efficient standard plate theory», *International Journal of Engineering Science*, vol. 29, n°8, pp. 901–916, 1991.
- [16] K.P. Soldatos, «A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates», *Acta Mechanica*, vol. 94, n°3–4, pp. 195–220, 1992.
- [17] J. L. Mantari, A. S Oktem, C. Guedes Soares, «A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, n°1, pp. 43–53, 2012.
- [18] F. Bourada, K. Amara, A. Tounsi, «Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory», *Steel and Composite Structures*, vol. 21, n°6, pp. 1287–1307, 2016.
- [19] M. Bachir Bouiadjra, M. S. A. Houari, A. Tounsi, «Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory», *Journal of Thermal Stresses*, vol. 35, n°8, pp. 677–694, 2012.
- [20] F. Z. Kettaf, M. S. A. Houari, M. Benguediab, A. Tounsi, «Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model», *Steel and Composite Structures*, vol. 15, n°4, pp. 399–423, 2013.
- [21] M. A. A Meziane, H. H. Abdelaziz, A. Tounsi, «An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions», *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 16, n°3, pp. 293–318, 2014.
- [22] S. Ait Yahia, H. Ait Atmane, M. S. A. Houari, A. Tounsi, «Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories», *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 53, n°6, pp. 1143–1165, 2015.
- [23] A. M. Neville, «Propriétés des bétons», Centre de recherche interuniversitaire sur le béton Sherbrooke-Laval. Édition Eyrolles, pp. 755, 2000.
- [24] Guide Holcim, S.A. *Materials & Applications Center Holcim Western Europe*. 1ère édition, pp. 97, 2007.
- [25] J. A. Calgaro et R. Lacroix, «Maintenance et réparation des ponts», *Presse de l'école des ponts et chaussées*, pp. 666, 1997.
- [26] S. C. Teng, Y.L. Tsai, H. W. Cheng, C. Epstein, H.L. Chen, J.J. Lin, «Induction of global stress response in *Saccharomyces cerevisiae* cells lacking telomerase», *Biochemomechanical and Biophysical Research Communications*, vol. 291, n°3, pp. 714–721, 2002.
- [27] H. Li, H. G. Xiao, J. Yuan. and J. Ou, «Microstructure of cement mortar with nanoparticles», *Composites Part B: Engineering*, vol. 35, n°2, pp. 185–189, 2004.
- [28] T. Ji, «Preliminary study on the water permeability and microstructure of concrete incorporating nano-SiO₂», *Cement and Concrete Research*, vol. 35, n°10, pp. 1943–1947, 2005.

Références bibliographiques

- [29] B. W. Jo, C. H. Kim, G.H. Tae et J.B. Park, «Characteristics of cement mortar with nano-SiO₂ particles», *Construction and Building Materials*, vol. 21, n°6, pp. 1351–1355, 2007.
- [30] M. Nilli, A. Ehsani et K. Shabani, «Influence of nano SiO₂ and micro silica on concrete performance», *second international conference on sustainable construction materials and technologies*, 2010.
- [31] A. Nazari, S. Riahi, S. Riahi, S. F. Shamekhi et A. Khademno, «Improvement of the mechanical properties of the cementitious composites by using TiO₂ nanoparticles», *Journal of American Science*, vol. 6, n°4, pp. 98–101, 2010.
- [32] A. Nazari, S. Riahi, S. F. Shamekhi et A. Khademno, «Embedded ZrO₂ nanoparticles mechanical properties monitoring in cementitious composites», *Journal of American Science*, vol. 6, n°4, pp. 86-89, 2010.
- [33] A. Nazari, S. Riahi, S. F. Shamekhi et A. Khademno, «Mechanical properties of cement mortar with Al₂O₃ nanoparticles», *Journal of American Science*, vol. 6, n°4, pp. 94-97, 2010.
- [34] M.S. Morsy, S.H. Alsayed. and M. Aqel, «Effect of nano clay on mechanical properties and microstructure of Ordinary Portland Cement mortar», *International Journal of Civil & Environmental Engineering*, vol. 10, n°1, 2010.
- [35] A. H. Shekari et M. S. Razzaghi, «Influence of nanoparticles on durability and mechanical properties of high performance concrete», *Procedia Engineering*, vol.14, pp. 3036-3041, 2011.
- [36] A.M. Said, M.S. Zeidan, M. T. Bassuoni. and Y. Tian, «Properties of concrete incorporating nano-silica», *Construction and Building Materials*, vol. 36, pp. 838–844, 2012.
- [37] G. Dhinakaran, A.Rajasekharareddy, B. Kartikeyan, K. Sumanth. and G. Harshavardhan, «Microstructure analysis and strength properties of concrete with nano SiO₂», *International Journal of ChemTech Research*, vol. 6, n°5, pp. 3004–3013, 2014.
- [38] American Concrete Institute. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary. ACI 2008.
- [39] H. N.Garden, L. C. Hollaway, A. M.Thorne, «A preliminary evaluation of carbon fibre reinforced polymer plates for strengthening reinforced concrete members», *Proceedings of the Institution of Civil Engineers -Structures and Buildings*, vol.122, n°2, pp. 127–142, 1997.
- [40] H. Saadatmanesh, M. R. Ehsani, «RC Beams Strengthened with GFRP Plates. I: Experimental Study», *Journal of Structural Engineering*, vol. 117, n°11, pp. 3417–3433, 1991.
- [41] T. K. J. ASSIH, «Contribution a l'étude du renforcement de poutres en beton arme par collage de plaques composites en fibres de carbone», *Thèse de l'université de Reims*, 1998.

Références bibliographiques

- [42] E. Ferrier, H. Nasser, P. Hamelin, «Fatigue behavior of composite reinforcement for concrete structures», *Fourth international symposium on fiber reinforced polymer reinforcement for reinforced concrete structures*, Baltimore, MD, 1999.
- [43] S. Avril, A. Vautrin, P. Hamelin, «Mechanical behavior of cracked beams strengthened with composites: application of a full-field measurement method», *Materials and Structures*, vol. 36, pp. 379-385, 2003.
- [44] V. Sierra-Ruiz, J. F. Destrebecq, M. Grédiac, «The transfer length in concrete structures repaired with composite materials: A survey of some analytical models and simplified approaches», *Composite Structures*, vol. 55, n°4, pp. 445-454, 2002.
- [45] S. Drapier, *Mécanique des Structures et Approximations Numériques*, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2019.
- [46] J. Cugnoni, T. Gmür, A. Schorderet, «Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements», *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 35, n°7-8, pp. 977-987, 2004.
- [47] M. Karama, K. S. Afaq, S. Mistou, «Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, n°6, pp. 1525-1546, 2003.
- [48] J. R. Hutchinson, «Shear coefficients for timoshenko beam theory», *Journal of Applied Mechanics ASME*, vol. 68, n°1, pp. 87-92, 2001.
- [49] V.T. Nguyen, «Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque», *Thèse de doctorat, École des ponts ParisTech*, Paris, 2010.
- [50] A. Tafla, «Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches», *Thèse de doctorat, Université de Reims*, 2007.
- [51] V.G. Kirchhoff, «Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51-88, 1850.
- [52] V.G. Kirchhoff, «Über die schwingungen einer kriesformigen elastischen scheibe», *Poggendorffs Ann.*, *Annalen Der Physik*, vol. 157, n° 10, pp. 258-264, 1850.
- [53] R.D. Mindlin, «Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- [54] S. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, New York, McGraw-Hill, 1959.
- [55] V. Preault, «Méthode d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique des matériaux composite», *Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Paris*, 2013.
- [56] C. Pichler et R. Lackner, «A multiscale creep model as basis for simulation of early-age concrete behavior», *Computers and Concrete*, vol. 5, n°4, pp. 295-328, 2008.

Références bibliographiques

- [57] P. Suquet, *Continuum micromechanics*, Vienna: Springer, 1997.
- [58] O. Bernard, F. J. Ulm et E. Lemarchand, «A multiscale micromechanics hydration model for the early-age elastic properties of cement based materials», *Cement and Concrete Research*, vol. 33, n°9, pp. 1293-1309, 2003.
- [59] E. Stora, Q. C. He et B. Bary, «Influence of inclusion shapes on the effective linear elastic properties of hardened cement pastes», *Cement and Concrete Research*, vol. 36, n°7, pp. 1330-1344, 2006.
- [60] J. Sanahuja, L. Dormieux et G. Chanvillard, «Modelling elasticity of a hardening cement paste», *Cement and Concrete Research*, vol. 37, pp. 1427-1439, 2007.
- [61] J. Eshelby, «The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems», *Proceeding of The Royal Society A*, pp. 376-396, 1957.
- [62] G. Cusatic et L. Cedolin, «Two-scale study of concrete fracturing behavior», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 74, n°1-2, pp. 3-17, 2007.
- [63] F. Grondin, H. Dumontet, A. Ben Hamida, G. Mounajed et H. Boussa, «Multiscales modelling for the behaviour of damaged concrete», *Cement and Concrete Research*, vol.10, n°37, pp. 1453-1462, 2007.
- [64] T. Zohdi, *Homogenization methods and multiscale modeling*, Encyclopedia of Computational Mechanics, Wiley, Chichester, 2004.
- [65] J. Füssl, R. Lackner, J. Eberhardsteiner et H. Mang, «Failure modes and effective strength of two-phase materials determined by means of numerical limit analysis», *Acta Mecanica*, vol. 195, pp. 185-202, 2008.
- [66] W. Voigt, «Über die beziehung zwischen den beiden elasticitat constanten isotroper korper», *Annalen der physic*, vol. 274, n°12, pp. 537- 587, 1889.
- [67] A. Reuss, «Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of monocrystals», *Zeitschrift fur anagecuandt Mathematik und mechanic*, vol. 9, pp. 49-58, 1929.
- [68] Z. Hashin, «The elastic moduli of heterogeneous materials,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, pp. 143-150, 1962.
- [69] S. Shtrikman et Z. Hashin, «A variationnal approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials», *Journal of Applied Physics*, vol. 33, n°10, pp. 3125-3131, 1962.
- [70] S. Shtrikman et Z. Hashin, «A variationnal approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, n°2, pp. 127- 144, 1963.
- [71] F. De Larrard et R. Le Roy, «Relation entre formulation et quelque propriétés mécaniques des bétons à hautes performances», *Journal of Materials and structures*, vol. 25, pp. 464-475, 1992.

Références bibliographiques

- [72] K. Yang, «Caractérisation du comportement mécanique des bétons de granulats légers : expérience et modélisation», *Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise*, 2008.
- [73] T. Tanaka et K. Mori, «Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions», *Acta Metallurgica*, vol. 21, n°5, pp. 571-574, 1973.
- [74] A. V. Hershey, «The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals», *Journal of Applied Mechanics.*, vol. 21, pp. 226-240, 1954.
- [75] R. Hill, «A self-consistent mechanics of composite materials», *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, pp. 213-22, 1965.
- [76] M. S. El-Feky, P. Youssef, A. El-Tair, M. Serag, «Indirect sonication effect on the dispersion, reactivity, and microstructure of ordinary portland cement matrix», *AIMS Materials Science*, vol. 6, n° 5, 2019.
- [77] D. L. Shi, X. Q. Feng, Y. Y. Huang, K. C. Hwang, H. Gao, «The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites», *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 126, n°2, pp. 250-257, 2004.
- [78] R. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [79] L. Bernardin, P. Chin, P. DeMarco, K. Geddes, *Maple programming guide*, 2011.
- [80] H. T. Thai, T.P. Vo, «Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 62, n°1, pp. 57–66, 2012.
- [81] H. T. Thai, D. H. Choi, «Zeroth-order shear deformation theory for functionally graded plates resting on elastic foundation», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 78, pp. 35–43, 2014.
- [82] E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo, «Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates», *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 46, n°1, pp. 194–203, 2008.
- [83] A. Tounsi, S. A. M. Houari, S. Benyoucef, E. A. Adda Bedia, «A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates», *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, n°1, pp. 209–220, 2013