

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : YOUNSI Abderahman

Intitulé de la thèse

Proposition d'une théorie de déformation de cisaillement 2D et 3D pour l'étude du comportement mécanique des plaques

Soutenu le :

Composition du jury :

Président	BOURADA Mohamed	MCA	U.D.L SBA
Directeur de thèse	TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Examineur	BENYOUCEF Samir	Pr	U.D.L SBA
Examineur	CHIKH Abdelbaki	MCA	U.de Tiaret
Examineur	HEBALI Habib	MCA	U.de Tiaret
Examineur	AMARA Khaled	Pr	C U de Ain-Temouchent

Année universitaire 2018-2019

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur **TOUNSI Abdelouahed** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utile pour mener à terme de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur **BOURADA Mohamed**, Maître de conférences (A) à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse en tant que Président. Je le suis sincèrement reconnaissant pour toutes les remarques pertinentes et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **BENYOUCEF Samir**, Professeur à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel- Abbès, qui m'a fait un grand honneur en acceptant de juger le travail de cette thèse.

Je remercie Monsieur **CHIKH Abdelbaki** Maître de conférences (A) à l'université de Tiaret et Monsieur **HEBALI Habib** Maître de conférences (A) à l'université de Tiaret, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **AMARA Khaled**, Professeur au Centre Universitaire de Ain-Temouchent, qui m'a fait un grand honneur en acceptant de juger le travail de cette thèse.

Mes sincères remerciements à Mlle **ZAOUI Fatima Zohra** qui m'a toujours aidé et encouragé dans mon travail.

Que tous ceux qui ont contribué à la réalisation de cette thèse, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

Résumé

Dans ce travail, une théorie de déformation de cisaillement bidimensionnelles (2D) et quasi tridimensionnelles (quasi-3D) est proposée pour l'étude de la flexion et de la vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) en utilisant la fonction de forme hyperbolique. Contrairement aux théories d'ordres élevés (HSDT) existantes, cette théorie présente un nouveau champ de déplacement qui comprend des termes d'intégrales indéterminés et contient moins d'inconnues. Les propriétés matérielles de la plaque sont non-homogènes et sont considérées comme variant d'une façon continue dans le sens de l'épaisseur selon trois distributions différentes : loi de la puissance, modèle exponentiel et Mori-Tanaka, en termes de fractions volumiques des constituants. Les équations gouvernantes qui tiennent compte des effets du cisaillement transversal et de l'étirement de l'épaisseur sont déterminées par le principe de Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode de Navier, puis les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres. Les composantes des contraintes axiales ont été déterminées par les équations constitutives des plaques composites. Les composantes des contraintes transversales ont été déterminées en intégrant les équations d'équilibre des contraintes 3D dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM. La précision de la formulation actuelle est démontrée par des comparaisons avec les différentes solutions 2D, 3D et quasi-3D disponibles dans la littérature.

Mots clés : Flexion, vibration, plaques fonctionnellement gradués, théorie de déformation de cisaillement, effet d'étirement.

Abstract

In this work, two dimensional (2D) and quasi three-dimensional (quasi-3D) HSDTs are proposed for bending and free vibration investigation of functionally graded (FG) plates using hyperbolic shape function. Unlike the existing HSDT, the proposed theories have a novel displacement field which include undetermined integral terms and contains fewer unknowns. The material properties of the plate is inhomogeneous and are considered to vary continuously in the thickness direction by three different distributions; power-law, exponential and Mori-Tanaka model, in terms of the volume fractions of the constituents. The governing equations which consider the effects of both transverse shear and thickness stretching are determined through the Hamilton's principle. The closed form solutions are deduced by employing Navier method and then fundamental frequencies are obtained by solving the results of eigenvalue problems. In-plane stress components have been determined by the constitutive equations of composite plates. The transverse stress components have been determined by integrating the 3D stress equilibrium equations in the thickness direction of the FG plate. The accuracy of the present formulation is demonstrated by comparisons with the different 2D, 3D and quasi-3D solutions available in the literature.

Keywords: Bending; vibration; functionally graded plate; shear deformation theory; stretching effect

ملخص

في هذا العمل نقترح نظرية تشوه القص ثنائية الأبعاد و أخرى شبه ثلاثية الأبعاد لدراسة الانحناء والاهتزاز الحر للصفائح المتدرجة وظيفيًا. على عكس نظريات تشوه القص العالي ، تقدم هذه النظرية حقل إزاحة جديد يتضمن مصطلحات تكامل غير محددة ويحتوي على عدد أقل من المجاهيل. خصائص المادة للصفائح غير متجانسة وتعتبر متغيرة باستمرار في اتجاه سمك الصفيحة وفقًا لثلاثة توزيعات مختلفة: دالة أسية، النموذج الأسي و نموذج موري- تاناكا ، من حيث حجم الأجزاء من المكونات . يتم تحديد المعادلات الحاكمة التي تأخذ في الاعتبار آثار القص المستعرض وتمدد السماكة من قبل مبدأ هاملتون. تم الحصول على الحلول باستخدام طريقة نافير، أما في ما يخص الترددات الأساسية فقد تم الحصول عليها من خلال حل نتائج مشكل القيم الذاتية. بالنسبة لتحديد مكونات الضغوط المحورية فقد تم ذلك بواسطة المعادلات المكونة للصفائح المركبة. في حين، تم تحديد مكونات الضغوط العرضية من خلال دمج معادلات توازن الضغوط ثلاثية الأبعاد في اتجاه سمك الصفيحة. من أجل قياس دقة النظرية الحالية قمنا بإجراء مقارنة مع مختلف الحلول ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد وشبه ثلاثي الأبعاد التي تم التطرق لها في أبحاث سابقة.

كلمات مفتاحية: الانحناء ، الاهتزاز ، الصفائح المتدرجة وظيفيا ، نظرية تشوه القص ، تأثير التمدد.

Table des matières

Remerciements	ii
Résumé.....	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Table des matières	vi
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Liste des notations	xiv
Introduction général	1
Chapitre I Généralités sur les matériaux composites et les matériaux avancés	5
I.1 Introduction	5
I.2 Les matériaux composites	6
I.2.1 Constituants des matériaux composites	6
I.2.1.1 La matrice	6
I.2.1.2 Les renforts.....	8
I.2.2 Les matériaux composites structuraux.....	10
I.2.2.1 Les monocouches.....	10
I.2.2.2 Les stratifiées.....	10
I.2.2.3 Les sandwichs.....	11
I.3 Généralité sur les matériaux avancés	11
I.4 Les matériaux piézoélectriques.....	12
I.5 Les nanotubes de carbone	14
I.6 Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM).....	15
I.7 Conclusion	16
Chapitre II Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	17
II.1 Introduction	17
II.2 Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	18
II.3 L’historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués	20
II.4 Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués.....	22
II.4.1 La métallurgie des poudres (Powder metallurgy).....	22

II.4.2	La compaction sèche des poudres	23
II.4.3	Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)	23
II.4.4	Le coulage par barbotine (Slip casting)	24
II.4.5	Le coulage en bande (Tape Casting)	25
II.4.6	Le frittage (Sintering)	26
II.4.7	La projection plasma (Plasma projection)	26
II.5	Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués	27
II.5.1	L'aérospatiale	27
II.5.2	La médecine.....	27
II.5.3	L'électronique.....	28
II.5.4	L'énergie.....	28
II.5.5	L'automobile	28
II.5.6	La défense.....	28
II.5.7	Outils de coupe	28
II.6	Les propriétés matérielles des plaques FGM	28
II.6.1	Loi de mélange en puissance (P-FGM)	30
II.6.2	Loi de mélange exponentielle (E-FGM)	31
II.6.3	Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)	31
II.6.4	Modèle de Mori-Tanaka	32
II.6.5	Modèle auto-cohérent de Hill	33
II.7	Conclusion	35
Chapitre III Différentes théories des plaques		36
III.1	Introduction	36
III.2	Historique des plaques	36
III.3	Définition d'une plaque.....	36
III.4	Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D).....	37
III.5	Les théories de déformations des plaques	38
III.5.1	La théorie classique des plaques (CPT)	38
III.5.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	40
III.5.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé.....	41
III.5.4	La théorie de déformation des plaques quasi-3D	44
III.6	Conclusion	45

Chapitre IV Étude analytique de la flexion et de la vibration libres des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D et 2D	46
IV.1 Introduction	46
IV.2 Formulation théorique.....	46
IV.2.1 Propriétés matérielles des plaques FGM.....	46
IV.2.2 Hypothèses de base	48
IV.3 Cinématique et équations constitutives.....	51
IV.3.1 Champ des déplacements	51
IV.3.2 Champ des déformations.....	51
IV.3.2 Équations constitutives	53
IV.4 Équations d'équilibres.....	54
IV.5 Solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée	58
IV.6 Conclusion	61
Chapitre V Résultats et discussions de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées	62
V.1 Introduction	62
V.2 Résultats numériques et discussions.....	62
V.2.1 Analyse de flexion	62
V.2.1.1 Plaque fonctionnellement graduée (Plaque P-FGM).....	62
V.2.1.2 Plaque exponentiellement graduée (Plaque E-FGM)	69
V.2.2 Analyse de la vibration libre	77
V.3 Conclusion	83
Conclusion générale	84
Références bibliographiques	86

Liste des tableaux

Chapitre II	Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	17
Tableau II.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	19
Chapitre IV	Étude analytique de la flexion et de la vibration libres des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D et 2D	46
Tableau IV.1	Différentes fonctions de forme $f(z)$ des théories des plaques FGM.	49
Chapitre V	Résultats et discussions de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées	62
Tableau V.1	Les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM.....	63
Tableau V.2	Effet de la déformation normale ε_z sur les contraintes et le déplacement non-dimensionnel pour une plaque carrée en FG type Al/Al ₂ O ₃ soumise à une charge uniformément répartie ($a/h=10$).....	64
Tableau V.3	Effet de la déformation normale ε_z sur le déplacement \bar{w} et la contrainte non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque carrée Al/Al ₂ O ₃ FG soumise à une charge sinusoïdale.	65
Tableau V.4	La flèche maximale non-dimensionnelle $\bar{w}(0) = \frac{10h^3 E_0}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h=2$).....	70
Tableau V.5	La contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{a^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h=10$).....	71
Tableau V.6	La contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0) = \frac{h}{a q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h=10$).	72

Tableau V.7	Le déplacement central non-dimensionnel $\bar{w}(0) = G(h)w/h q_0$ et la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x(0) = \sigma_x(0)/q_0$ pour des plaques en EGM soumise à une charge uniformément répartie.....	76
Tableau V.8	Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque isotrope carrée (a/h=10).	77
Tableau V.9	Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al ₂ O ₃	79
Tableau V.10	Comparaison des trois premières fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega a^2/h \sqrt{\rho_c/G_c}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al ₂ O ₃ (a/h=10).....	80
Tableau V.11	Comparaison des fréquences fondamentales $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M/E_M}$ d'une plaque FGM carrée en Al/ ZrO ₂ (Schéma de Mori-Tanaka).	81

Liste des figures

Chapitre I	Généralités sur les matériaux composites et les matériaux avancés.....	5
Figure I.1	Matériau composite (Berthelot, 2005).....	6
Figure I.2	Différentes familles de matrices.....	7
Figure I.3	Les différents types de renfort de base.....	8
Figure I.4	Géométries des renforts.....	9
Figure I.5	Composite monocouches.....	10
Figure I.6	Composite stratifié.....	10
Figure I.7	Composite sandwichs.....	11
Figure I.8	Les matériaux piézoélectriques (Lee, 2014).....	13
Figure I.9	Les nanotubes de carbone (Wong, 1997).....	14
Figure I.10	Schéma d'un matériau FGM continu (Jha, 2013).....	15
Chapitre II	Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	17
Figure II.1	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1996).....	19
Figure II.2	Protection thermique.....	20
Figure II.3	Le coulage centrifuge des poudres mixtes (Xiong, 2005).....	24
Figure II.4	Principe du coulage par barbotine (Moya, 1992).....	25
Figure II.5	Principe du coulage en bande (Lostec, 1997).....	26
Figure II.6	Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma (Steffens, 1990).....	27
Figure II.7	Géométrie d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés.....	29
Figure II.8	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	30
Figure II.9	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	31
Figure II.10	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	32
Figure II.11	Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière (Mori, 1973).....	33
Figure II.12	Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique (Hill, 1995).....	34

Chapitre III	Différentes théories des plaques.....	36
Figure III.1	Géométrie d'une plaque quelconque.....	37
Figure III.2	Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy, 2007).	39
Figure III.3	Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT) (Reddy, 2007).....	41
Figure III.4	Schématisation des déformations des plaques par la théorie (HSDT) (Reddy, 2007).....	42
Chapitre IV	Étude analytique de la flexion et de la vibration libres des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D et 2D	46
Figure IV.1	Géométrie d'une plaque FGM en coordonnées cartésiennes.	48
Figure IV.2	Variation de la fonction de forme $f(z)$ à travers l'épaisseur.	50
Figure IV.3	Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ à travers l'épaisseur. ..	50
Chapitre V	Résultats et discussions de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées	62
Figure V.1	Variation du déplacement axial non-dimensionnel \bar{u} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).	66
Figure V.2	Variation de la flèche non-dimensionnelle \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).	67
Figure V.3	Variation de la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).	67
Figure V.4	Variation de la contrainte tangentielle non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).	68
Figure V.5	Variation de la contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).	68
Figure V.6	Variation du déplacement axial non-dimensionnel \bar{u} à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1	73
Figure V.7	Variation de la flèche non-dimensionnelle \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1	74

-
- Figure V.8** Variation de la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 .74
- Figure V.9** Variation de la contrainte tangentielle non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 75
- Figure V.10** Variation de la contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 75
- Figure V.11** L'effet du rapport largeur/épaisseur a/h et l'indice de la loi de puissance k sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM carrées.82
- Figure V.12** L'effet du rapport b/a et l'indice de la loi de puissance k sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM ($a/h=10$). 83

Liste des Notations

$P(z)$: Propriété matérielle effective comme le module de Young E
E_m	: Module de Young du métal
E_c	: Module de Young de céramique
$G(z)$: Module de cisaillement en fonction de (z)
$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de (z)
ν	: Coefficient de Poisson
$\rho(z)$: La densité du matériau en fonction de (z)
ρ_m	: La densité du métal
ρ_c	: La densité de la céramique
V_C	: Fraction volumique
p	: Exposant de la fraction volumique
k	: Indice de loi de puissance
a, b, h	: Dimension de la plaque (longueur, largeur, épaisseur).
u_0, v_0, w_0	: Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	: Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	: Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	: Les déplacements dans les directions x, y et z
φ_z	: Le déplacement dû à l'effet de la déformation normale
$f(z)$: Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$: Dérivée de la fonction de cisaillement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$: Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Déformation dans la direction x, y et z

$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$: Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$: Champ virtuel de déplacement
δU	: Variation de l'énergie de déformation
δV_p	: Variation de l'énergie potentielle
δK	: Variation de l'énergie cinétique.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$: Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$: Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	: Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	: Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	: Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	: Effort de cisaillement
C_{ij}	: Constante élastique
$\int \theta(x,y) dx, \int \theta(x,y) dy$: Les variables intégrales indéterminées
k_1, k_2	: Les coefficients dépendant de la géométrie des plaques
$q(x,y)$: Charge transversale
(I_i, J_i, K_i)	: Inerties de masse
A_{ij}	: Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	: Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	: Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	: Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	: Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	: Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	: Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux composites avancés sont largement utilisés dans les domaines de l'aérospatiale, de la mécanique, du génie civil, du nucléaire et de l'automobile, en raison de leurs caractéristiques exceptionnelles telles que leur rapport rigidité / résistance élevé, leur résistance au poids et leur faible coût de maintenance. Les matériaux composites stratifiés conventionnels présentent un déséquilibre de propriétés mécaniques à l'interface en raison de la liaison de deux matériaux discrets. Par conséquent, la concentration des contraintes se produit habituellement à l'interface. Cela peut entraîner des dommages sous forme de délaminage, de fissuration de la matrice et de séparation par collage. Des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont donc nés pour surmonter ces problèmes.

Le FGM est un matériau composite avancé composé de deux phases ou plus, avec une variation continue des propriétés du matériau d'une surface à l'autre. Les caractéristiques mécaniques du FGM changent dans le sens de l'épaisseur du matériau en fonction de la fraction volumique des constituants. Grâce à cette caractéristique, les FGM présentent certains avantages, tels que l'élimination de la discontinuité du matériau, l'évitement de la rupture par délamination et diminuant ainsi les niveaux des contraintes et les déformations. La combinaison de ces propriétés attire l'application des FGM dans de nombreux domaines de l'ingénierie telles que la mécanique, l'aérospatiale, le génie civil, le biomédical (Ahmed, 2014; Swaminathan and Naveenkumar, 2014; Hadji et al., 2015 and 2016; Abdelhak et al., 2016; Ahouel et al., 2016; Ghorbanpour Arani et al., 2016ab; Aldousari, 2017; Rahmani et al., 2017).

Ces dernières décennies, les applications des FGM ont connu une augmentation importante. L'augmentation des applications de FGM nécessite des théories précises pour examiner leur réponse (Bessaim et al., 2013; Tounsi et al., 2013; Zemri et al., 2015; Ait Atmane et al., 2015; Attia et al., 2015; Belkorissat et al., 2015; Larbi Chaht et al., 2015; Hamidi et al., 2015; Hebali et al., 2016; Barati and Shahverdi, 2016; Barka et al., 2016; Beldjelili et al., 2016; Meksi et al., 2017; Menasria et al., 2017).

Le comportement en flexion et en vibration des plaques FG a été étudié par de nombreux chercheurs ces dix dernières années. Kashtalyan (2004) a présenté une solution d'élasticité 3D pour une plaque FG simplement appuyée sous la charge transversale. Matsunaga (2009) a développé une théorie 2D d'ordre élevé pour la prédiction du déplacement et des contraintes dans les plaques FG sous charges thermiques et mécaniques.

Le modèle peut prendre en compte l'influence à la fois du cisaillement transversal et des contraintes normales. Zhao et al. (2009) ont analysé la vibration libre des plaques FG en utilisant la méthode kp-Ritz sans élément. Vaghefi et al. (2010) ont proposé une version de la procédure locale Petrov - Galerkin sans maille pour déterminer les solutions statiques 3D pour les plaques FG épaisses. Orakdogan et al. (2010) ont examiné l'influence du couplage de l'extension et de la statique dans la plaque FG sous une charge transversale pour les équations de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love. Gunes et al. (2014) ont présenté une étude expérimentale sur la réponse à l'impact à faible vitesse des plaques circulaires serrées FG.

Ait Amar Meziane et al. (2014) ont présenté une théorie raffinée efficace et simple pour le flambement et la vibration libre de plaques sandwich exponentielle dans diverses conditions aux limites. Ait Yahia et al. (2015) ont analysé la propagation des ondes dans les plaques FG avec des porosités en utilisant différentes théories de plaques de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Zhu et Liew (2011) ont présenté l'analyse de la vibration libre des plaques FG avec la méthode locale sans maillage de Kriging.

Il est clair que des déformations de cisaillement non négligeables se produisent sur les plaques épaisses et modérément épaisses, et la théorie classique des plaques (CPT) donne des résultats imprécis. Ainsi, les déformations transversales du cisaillement doivent être prises en compte dans l'analyse. Il existe de nombreux modèles de plaques qui introduisent des contraintes de cisaillement transversal pour les composites avancés tels que les FGMs.

Benachour et al. (2011) ont développé une théorie des plaques raffinée à quatre variables pour l'étude des vibrations libres des plaques FG à gradient arbitraire. Matsunaga (2008) a étudié les fréquences propres et les contraintes de flambement des plaques FG en prenant en compte les effets du cisaillement transverse et des déformations normales et de l'inertie de rotation. Jha et al. (2013) ont discuté le comportement en vibration libre des plaques FG élastiques, rectangulaires et simplement appuyées, basé sur les théories de déformations de cisaillement d'ordre élevé.

Hebali et al. (2014) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FG. Belabed et al. (2014) ont proposé une théorie efficace et simple du cisaillement d'ordre élevé et de la déformation normale pour les plaques FG. Alijani et Amabili (2014) ont étudié les vibrations forcées non linéaires des plaques rectangulaires FG d'épaisseur modérée en considérant les HSDT qui prennent en compte l'effet de déformation de l'épaisseur.

Akavci et Tanrikulu (2015) ont présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse statique et la vibration libre des plaques FG. Houari et al. (2016) ont présenté une nouvelle théorie simple de déformation de cisaillement sinusoïdale à trois inconnues pour les plaques FG. Baseri et al. (2016) ont présenté une solution analytique pour le flambement des plaques stratifiées encastées basée sur la théorie des plaques de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Bennoun et al. (2016) ont présenté une nouvelle théorie des plaques raffinées à cinq variables pour l'analyse vibratoire des plaques sandwich classées de manière fonctionnelle. Ait Atmane et al. (2017) ont étudié l'effet de l'étirement de l'épaisseur et de la porosité sur la réponse mécanique de poutres en FG reposant sur des fondations élastiques.

Benahmed et al. (2017) ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour les plaques rectangulaires FG épaisses sur fondations élastiques. Benbakhti et al. (2016) ont également développé un nouveau HSDT à cinq inconnus de type quasi 3D pour l'analyse de la flexion thermomécanique de plaques sandwich FGM. Chikh et al. (2017) ont discuté de la réponse au flambement thermique des plaques stratifiées à couches croisées à l'aide d'un HSDT simplifié. Klouche et al. (2017) ont présenté une théorie originale de déformation de cisaillement à une seule variable pour l'analyse du flambement des plaques isotropes épaisses. Draiche et al. (2017) ont proposé une théorie raffinée avec l'effet d'étirement pour l'analyse de la flexion des plaques composites stratifiées. Benchohra et al. (2017) ont présenté une nouvelle théorie quasi-3D de déformation de cisaillement sinusoïdal pour les plaques FG.

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement mécanique des plaques fonctionnellement graduées (FGM) en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D qui prend en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur. Le nombre des inconnues est seulement cinq dans la présente théorie contre six ou plusieurs inconnus utilisés dans les autres théories conventionnelles, ce qui permet de gagner du temps de calcul (Bourada et al., 2016). Pour atteindre cet objectif, notre thèse s'articulera autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre présente un aperçu général sur les matériaux composites et l'évolution des matériaux avancés depuis les premiers alliages apparus à l'âge de bronze aux nouveaux matériaux fonctionnellement gradués récemment présentés passant par les matériaux piézoélectriques et les nanotubes de carbone.

Le deuxième chapitre illustre d'une manière synthétique les matériaux à gradient de propriétés, l'historique de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

Le troisième chapitre présente une revue des différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

Le quatrième chapitre détaille les formulations théoriques du modèle proposé des plaques en FGM. Ce modèle est basé sur une théorie quasi-3D et 2D de déformation de cisaillement pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques en FGM sous un chargement mécanique.

Le dernier chapitre sera consacré à la validation du modèle proposé à travers des études paramétriques connus de la littérature ainsi qu'à la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement mécanique en flexion et en dynamique des plaques FGM tout en les comparants avec les résultats obtenus à l'aide des théories conventionnelles.

Une conclusion générale clôture l'ensemble de ces travaux permettant ainsi de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer les diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés.

Chapitre I
***GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES ET LES
MATÉRIAUX AVANCÉS***

Chapitre I
***GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES
ET LES MATÉRIAUX AVANCÉS***

I.1. Introduction

La récente technologie nécessite d'employer des matériaux innovants, caractérisés par les exigences en termes de performances techniques, de fiabilité, d'économie d'élaboration, de durabilité et d'impact environnemental, les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. Dans ce contexte, la conception des matériaux avancés qui allient d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté est un facteur plus important. Pour atteindre ces objectifs, Les avancées industrielles mènent à l'apparition d'une nouvelle classe des matériaux dits « matériaux composites ». De plus, pour obtenir des matériaux spécifiques propices, les chercheurs et les industriels ont contribué à l'introduction d'une nouvelle génération des matériaux composites appelée « matériaux à gradient de propriétés » qui font l'objet d'importantes recherches. (Belabed, 2015)

Les matériaux composites et les matériaux avancés sont élaborés à partir de plusieurs éléments de façon à en combiner les propriétés. Le matériau obtenu présente donc de nouvelles fonctionnalités (résistances thermique, mécanique ou à la corrosion par exemple). L'utilisation des matériaux composites et les matériaux avancés est devenue indispensable dans des domaines d'activité variés tel que l'industrie automobile, le domaine de réalisation et réhabilitation des constructions, transport routier et plus important dans l'aéronautique et l'aérospatiale.

I.2. Les matériaux composites

Une définition générale des matériaux composites est d'après (Berthelot, 2005) « Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément ».

Un matériau composite est constitué d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase continue est appelée la matrice qui est généralement une matière polymère (résine thermoplastique ou thermodurcissable) qui assure la cohésion de la

structure et la retransmission des efforts vers la phase discontinue qui présente usuellement des propriétés mécaniques (rigidités et résistances) supérieures à celle de la matrice et est notée renfort. Les propriétés des matériaux composites résultent des propriétés des matériaux le constituant, de la distribution géométrique des renforts, du taux volumique de renfort, de la nature des interfaces renforts/matrice, du procédé de fabrication...

I.2.1. Constituants des matériaux composites

Les matériaux composites sont constitués principalement :

- D'une matrice à laquelle sont ajoutés, dans certains composites des charges,
- D'un renfort.

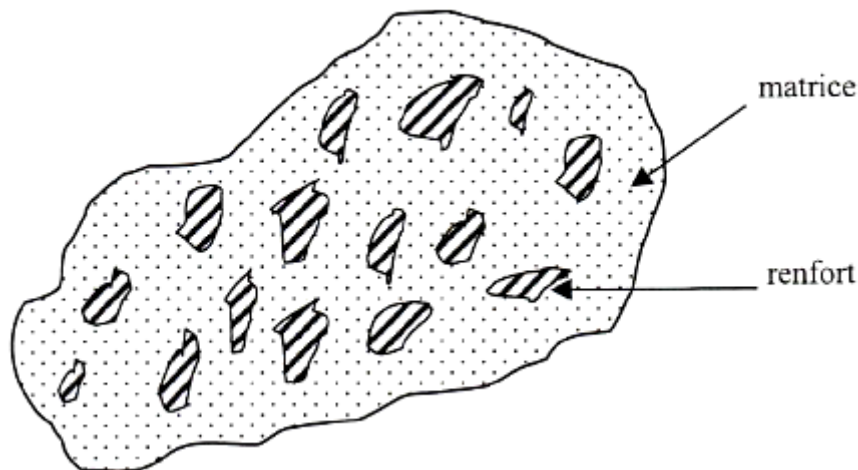


Figure I.1 : Matériau composite (Berthelot, 2005).

I.2.1.1. La matrice

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres. Généralement, c'est un polymère ou une résine organique.

On peut retrouver dans l'organigramme ci-dessous, les différentes familles de matrices :

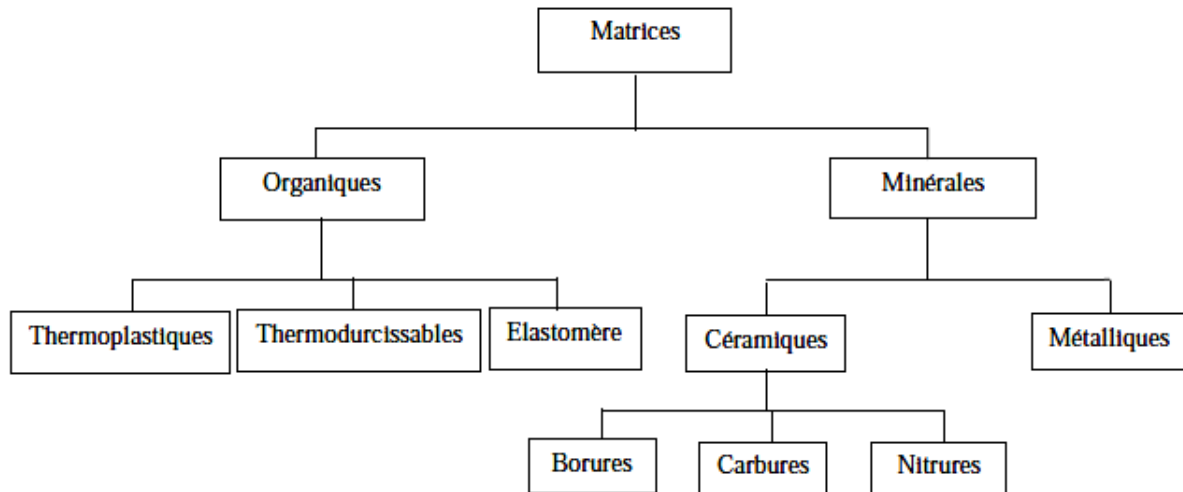


Figure I.2 : Différentes familles de matrices.

Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines thermodurcissables et les résines thermoplastiques.

- **Les résines thermodurcissables**

Les résines thermodurcissables sont des polymères, qui, après un traitement thermique ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur), se transforment en des produits essentiellement infusibles et insolubles. Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois.

- **Les résines thermoplastiques**

Les résines thermoplastiques sont des solides généralement solubles, formés de chaînes distinctes bien compactées, liées entre elles par des seules liaisons secondaires (force de van der Waals, liaisons d'hydrogène) et mis en forme par chauffage et refroidissement.

- **Les matrices naturelles**

Ce sont des matériaux synthétisés par les êtres vivants, animaux et micro-organismes. La famille la plus importante est celle des polysaccharides comme l'amidon, la cellulose la lignine.

- **Résines époxydes**

Le terme époxyde désigne une grande variété de pré-polymères comportant un ou plusieurs motifs époxydiques dont les principales applications concernent les matériaux composites (matrice époxyde avec des renforts en fibre de verre ou de carbone).

- **Phénoplastes ou phénols-formols**

Les phénoplastes sont des matières thermodurcissables obtenues par polycondensation d'un phénol et d'un aldéhyde avec élimination d'eau et formation d'un réseau tridimensionnel.

- **Les résines thermostables**

Elles se distinguent essentiellement des autres résines par leurs performances thermiques. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace.

I.2.1.2. Les renforts

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet de résistance orientée.

Les différents types de renforts sont cités dans l'organigramme ci-dessous.

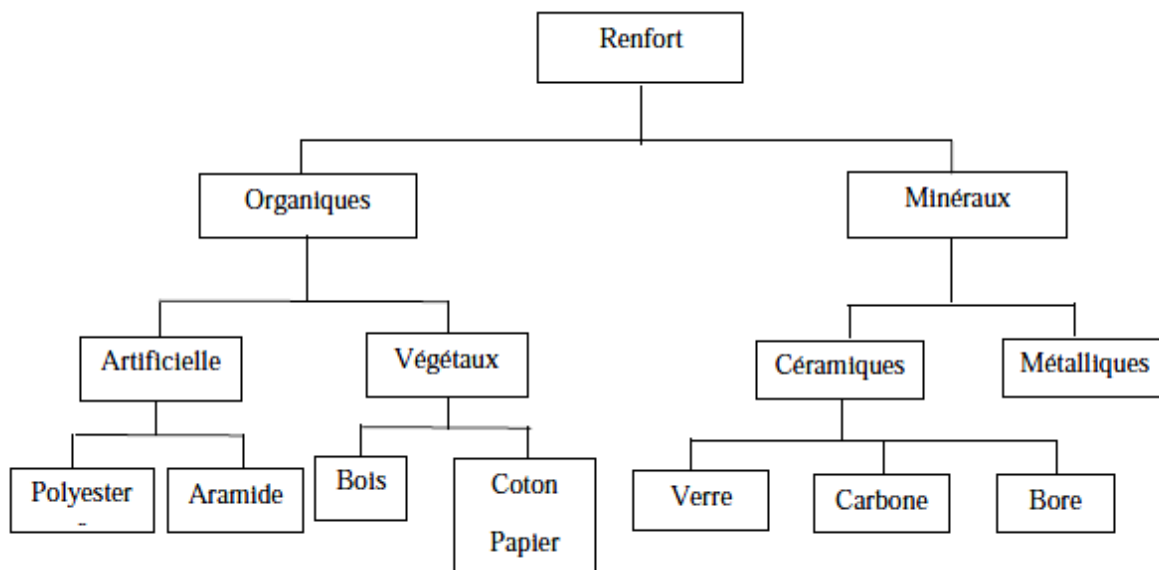


Figure I.3 : Les différents types de renfort de base.

➤ Les fibres

Les fibres utilisées se présentent soit sous forme continues (fibres longues), soit sous forme discontinues (fibres courtes).

- **Les fibres de verre**

Le terme fibres de verre désigne à la fois les fibres utilisées comme isolant thermique et celles utilisées comme renforts associées à des matrices organiques pour donner des composites. La principale application des fibres de verre textile est le renforcement des

plastiques. Cependant leur champ d'applications s'est élargi à d'autres matrices (ciment, plâtre, bitume...) et à d'autres utilisations.

- **Les fibres de carbone**

La fibre de carbone est obtenue à partir de la pyrolyse d'une fibre organique appelée précurseur. Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé. Ces fibres sont utilisées en tant que carbone pour les propriétés de cet élément et en tant que fibre flexible et qui convient à toutes les formes de produits finis.

- **Fibre d'aramide**

La fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- Les fibres haut module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

- **Fibre de bore**

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

- **Fibre de silice**

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

➤ **Architecture des fibres**

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent des performances médiocres en compression et en cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures de renforts :

Les unidirectionnels (1D), Toile ou taffetas, Serge, et Satin

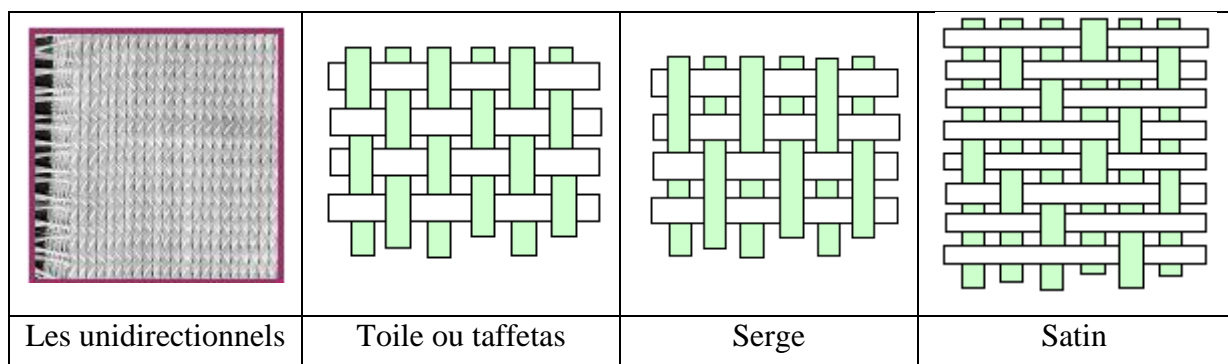


Figure I.4 : Géométries des renforts.

I.2.2. Les matériaux composites structuraux

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories : Les monocouches, Les stratifiés et Les sandwichs. Leur rigidité est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

I.2.2.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes (Figure I.5).

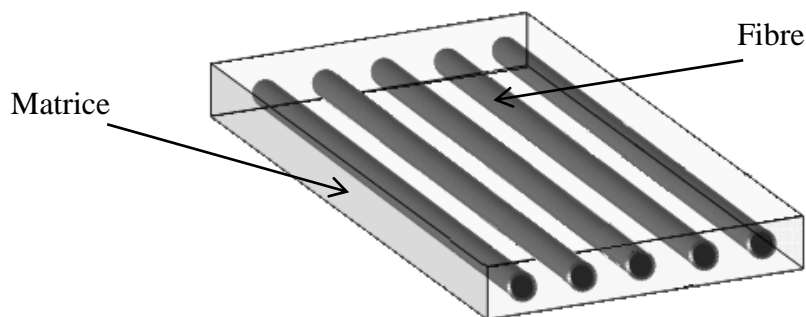


Figure I.5 : Composite monocouches.

I.2.2.2. Les stratifiées

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

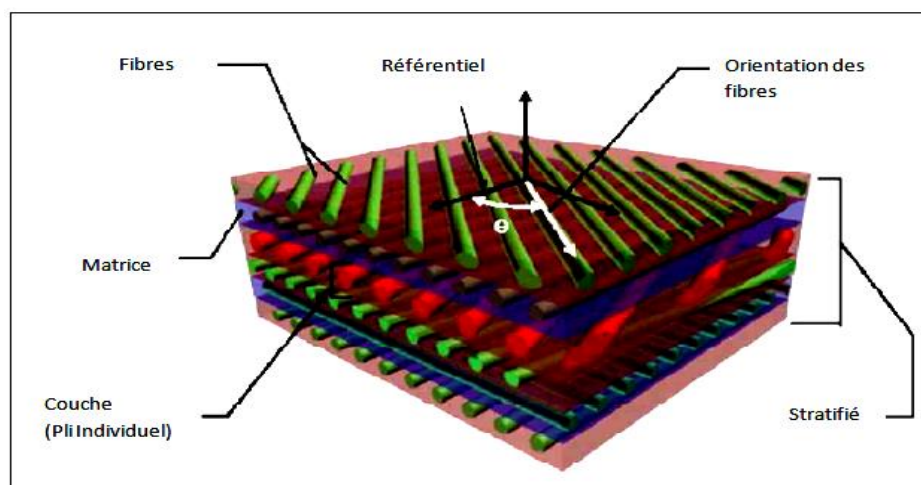


Figure I.6 : Composite stratifié.

I.2.2.3. Les sandwichs

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux composants nommés : peau et noyau.

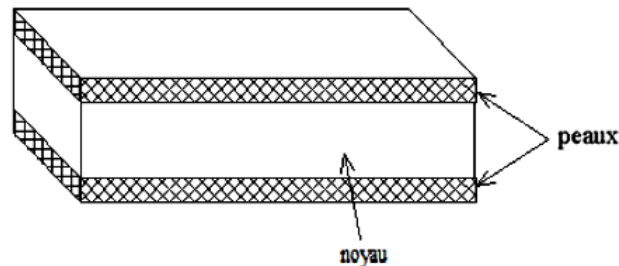


Figure I.7 : Composite sandwichs.

Les propriétés de ce type de matériaux dépendent de celles du noyau et des peaux, de leurs épaisseurs et des caractéristiques de liaison entre elles.

- **Le noyau**

Il existe un grand nombre de matériaux qui peuvent être utilisés comme noyau. Ces matériaux sont divisés en trois classes :

- Matériaux solide à faible densité : balsa et d'autres types de bois.
- Matériaux à haute densité augmentés en forme cellulaire : nid d'abeilles.
- Matériaux à haute densité augmentés sous la forme ondulée : feuilles ondulées.

- **La peau**

Une large variété de matériaux est utilisée comme peau, par exemple : les feuilles de métaux comme l'aluminium, le titane,...etc.

I.3. Généralité sur les matériaux avancés

Généralement dans les domaines aéronautiques et spatial il est utilisé des matériaux homogènes typiques à savoir les alliages d'aluminium et de titane (Pantelakis, 2008) Ils présentent un rapport résistance / poids élevé et d'excellentes propriétés mécaniques.

Avec le développement technologique l'utilisation des matériaux composites est de plus en plus fréquente, où deux ou plusieurs matériaux sont combinés à une échelle macroscopique afin d'obtenir de meilleures propriétés d'ingénierie que les matériaux classiques.

Dans le cas de structures intelligentes, certaines couches sont en matériaux piézoélectriques, ils utilisent l'effet dit « piézo-électrique » qui relie l'électricité et la mécanique des champs. En outre, les nanotubes de carbone (CNT) présentent des propriétés mécaniques supérieures et sont extrêmement prometteurs en raison de leurs caractéristiques de solidité, de légèreté et de ténacité. Notamment, ils peuvent être utilisés comme de très bonnes fibres pour les matériaux nano composites.

Enfin, cette discontinuité des propriétés matérielles à travers l'interface des constituants de ces matériaux composites, provoque des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques ou dans un milieu thermique ultra-chaud, la différence relative du coefficient d'expansion thermique provoque des contraintes résiduelles importantes. A cet effet, le concept du matériau fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials « FGM ») est introduit pour satisfaire la demande dans un environnement ultra chaud et aussi pour éliminer les contraintes singulières.

I.4. Les matériaux piézoélectriques

Les phénomènes de la piézoélectricité sont une particularité de certaines classes de matériaux cristallins. L'effet piézoélectrique est une conversion d'énergie linéaire entre les champs mécaniques et électriques. La conversion linéaire entre les deux champs est dans les deux directions, Définissant un effet piézoélectrique direct ou inversé. L'effet piézo-électrique direct génère une polarisation électrique en appliquant des contraintes mécaniques. Au contraire, l'effet piézoélectrique inverse induit des contraintes mécaniques ou des contraintes en appliquant un champ électrique. Ces deux effets représentent le couplage entre le champ mécanique et le champ électrique, qui est mathématiquement exprimée au moyen de coefficients piézoélectriques.

Les premières applications pour les matériaux piézoélectriques étaient le son et les capteurs à ultrasons. Néanmoins ces dernières années, la piézoélectricité a trouvé un regain d'intérêt, en tant que structures intelligentes actives avec leur auto-surveillance et leur d'auto-adaptation (Rao, 1994). Les exemples d'applications typiques des matériaux piézoélectriques dans le domaine aérospatial sont énumérés ci-dessous.

- **Amortissement des vibrations** : Presque toutes les structures de l'ingénierie aérospatiale vibrent. Dans certains cas, ces charges dynamiques peuvent être plus dangereuses que les charges statiques appliquées. En mettant en œuvre des capteurs et des actionneurs

dans de telles structures, ces vibrations dynamiques peuvent être mesurées puis amorties activement. On peut citer quelques exemples tels que : les problèmes de vibration des ailes du rotor dans les hélicoptères, l'amortissement du son dans le cockpit ou la cabine des avions civils.

- **Adaptation de la forme des surfaces aérodynamiques :** Dans un avion moderne, les surfaces aérodynamiques ne peuvent être optimisées que pour une certaine vitesse et une altitude de vol. Avec des ailes qui seront capables de modifier leur géométrie en fonction des exigences réelles augmenteront ainsi leur efficacité.

- **Contrôle aéroélectrique actif :** Des problèmes typiques d'aéroélasticité comme le flutter ou le buffeting peuvent être réduits par l'utilisation de matériaux adaptatifs.

- **Contrôle de forme des dispositifs optiques et électromagnétiques :** Les structures dans le domaine aérospatial sont soumises à des variations de température rapides et élevées en raison de la lumière du soleil. Les surfaces optiques telles que les antennes électromagnétiques et les réflecteurs sont très sensibles aux déformations thermiques. Un remède à ces problèmes pourrait être l'utilisation de matériaux adaptatifs.

- **Surveillance de la santé :** Dans les structures aérospatiales, les fissures microscopiques sont tolérables jusqu'à certaine limite. Des structures intelligentes pourraient surveiller ces contraintes et avec leur mécanisme de contrôle supplémentaire pour maintenir la sécurité.

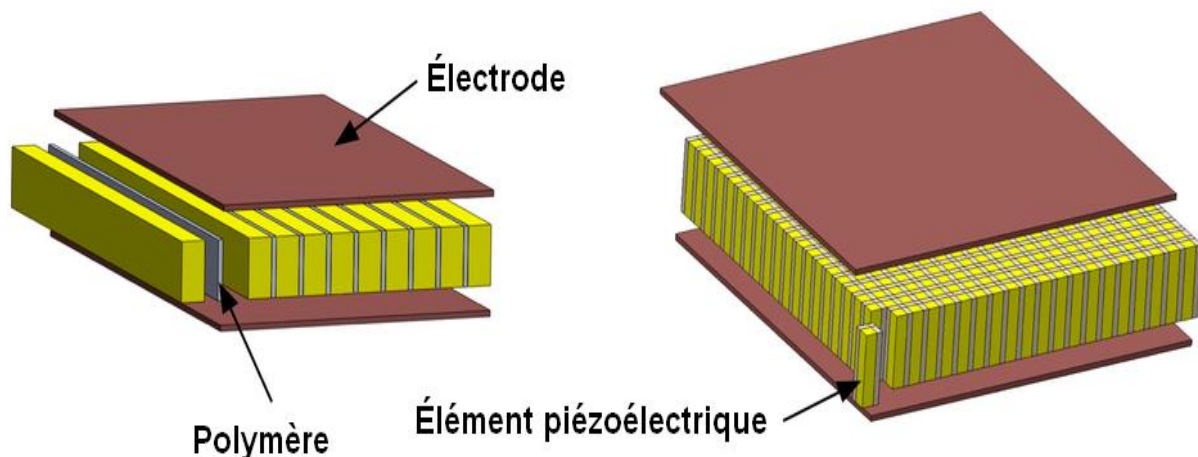


Figure I.8 : Les matériaux piézoélectriques (Lee, 2014).

I.5. Les nanotubes de carbone

Les nanotubes de carbone (CNT) ont des propriétés mécaniques exceptionnelles (module de Young, résistance à la traction, ténacité, etc.), qui sont dus à leur structure moléculaire consistant de feuilles simples ou multiples de graphite enveloppées dans des cylindres creux sans soudure (Ijiam, 1991). En raison de la grande rigidité, de la résistance et du rapport de dimensions élevé des CNT, en les dispersant uniformément dans une matrice polymère, on peut produire des composites avec des propriétés mécaniques efficaces globalement améliorées.

En outre, les CNT ont une densité relativement faible d'environ $1,75 \text{ g / cm}^3$ et, par conséquent, les polymères renforcés par des nanotubes (NRP) excellent en raison de leur rigidité, résistance et ténacité spécifiques extrêmement élevées. Cela a déjà été démontré dans des expériences, tant pour des matrices de polymères thermoplastiques (Sandler, 2002) que pour des matrices de polymères thermodurcissables (Gong, 2000).

L'étude de l'analyse des vibrations et des fréquences des CNT est un sujet d'actualité. Puisque les expériences contrôlées pour mesurer les propriétés de CNT individuelles à l'échelle nanométrique sont extrêmement difficiles, les simulations computationnelles ont été considérées comme un outil puissant. Cependant, les simulations computationnelles pour prédire les propriétés de CNTS se divisent en deux grandes catégories : la dynamique moléculaire et la mécanique du continu. Bien que la simulation de la mécanique moléculaire ait été utilisée avec succès pour simuler les propriétés du matériau avec des microstructures, cette méthode prend du temps et elle est bien redoutable surtout pour les systèmes complexes à grande échelle. Récemment, la mécanique des solides avec des modèles élastiques continus, tels que les modèles des poutres et des plaques, ont été largement utilisées avec succès pour étudier le comportement mécanique des CNT (Wong, 1997), (Wang, 2006). De plus, l'intérêt pour les nanotubes à double paroi (DWNT) augmente en raison des progrès de la synthèse à grande échelle des DWNT (Wang, 2006).

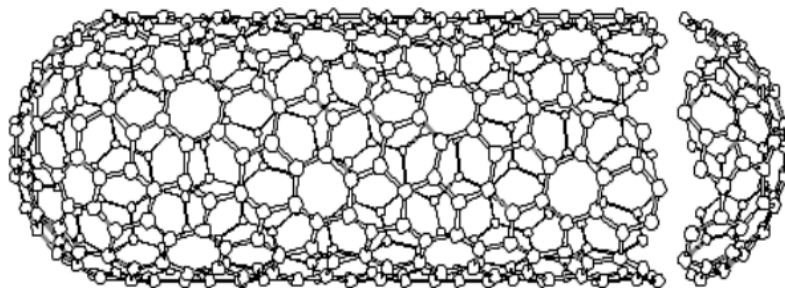


Figure I.9 : Les nanotubes de carbone (Wong, 1997).

I.6. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les fortes charges thermiques impliquées dans de nombreuses applications d'ingénierie, comme les revêtements thermiques, les composants du moteur ou les buses de fusée, nécessitent des matériaux résistant aux hautes températures. Au Japon, à la fin des années 1980, le concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a été proposé comme matériau de barrière thermique. Les FGM sont des matériaux composites avancés dans lesquels la composition de chaque constituant de matière varie progressivement par rapport aux coordonnées spatiales (Suresh, 1998), par conséquent, dans les FGM, les propriétés macroscopiques du matériau varient en continu, en les distinguant des matériaux composites stratifiés dans lesquels le changement brutal des propriétés du matériau à travers les interfaces de couche conduit à de grandes tensions inter laminaires permettant le développement de dommages (Pindera, 1994). Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont une grande variété, non seulement pour fournir de meilleures propriétés thermomécaniques, mais aussi pour obtenir des propriétés piézoélectrique et magnétique appropriées, via la variation spatiale dans leur composition. La particularité des compositions spatiales graduées associées aux FGM donne une grande liberté dans la conception et la fabrication de nouvelles structures ; D'autre part, elle pose également de grands défis dans la modélisation numérique et la simulation des structures des FGM (Birman, 2007).

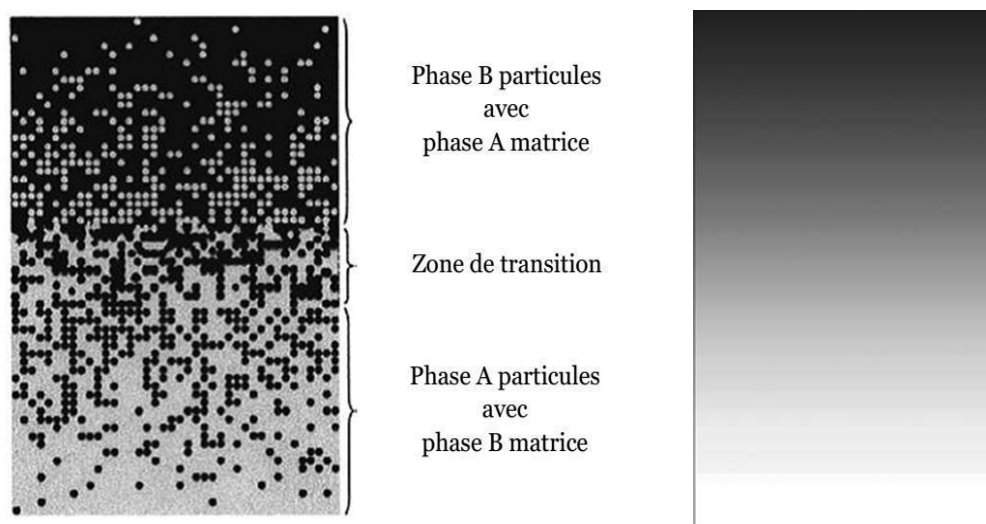


Figure I.10 : Schéma d'un matériau FGM continu (Jha, 2013).

I.7. Conclusion

Maintenant nous remarquons une avancée étonnante de l'emploi de ces matériaux nouveaux. Il ne s'agit pas d'un hasard mais d'un développement étudié judicieusement, vu les besoins dans les divers domaines techniques, économiques et d'ingénieries que ces matériaux révolutionnaires ont apportés par rapport aux matériaux traditionnels. Dans le chapitre suivant, nous présenterons une revue générale sur des matériaux à gradient de propriétés.

Chapitre II

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX A GRADIENT DE PROPRIÉTÉS

Chapitre II
***GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX A GRADIENT
DE PROPRIÉTÉS***

II.1. Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (**F**unctionally **G**raded **M**aterials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites avancés dont la microstructure et la composition varient graduellement et continument avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999, Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner et al. 2008).

Les FGM sont généralement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, les céramiques présentent une résistance à la chaleur et à la corrosion; parallèlement le métal fournit la force et la ténacité, ces types des FGM sont utilisés comme structures de barrière thermique dans des environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

II.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (Koizumi, 1992).

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les «FGM» sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des «FGM» sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau II.1.

Tableau II.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau (FGM) est illustré dans la figure II.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des (FGM). Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch, 1986).

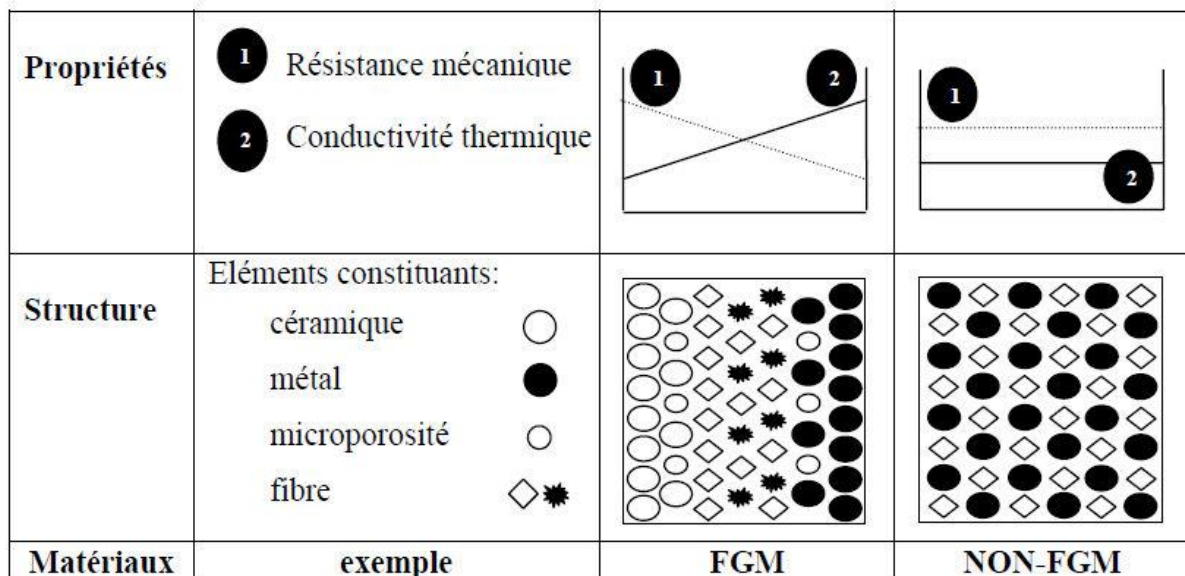


Figure II.1 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1996).

La figure II.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

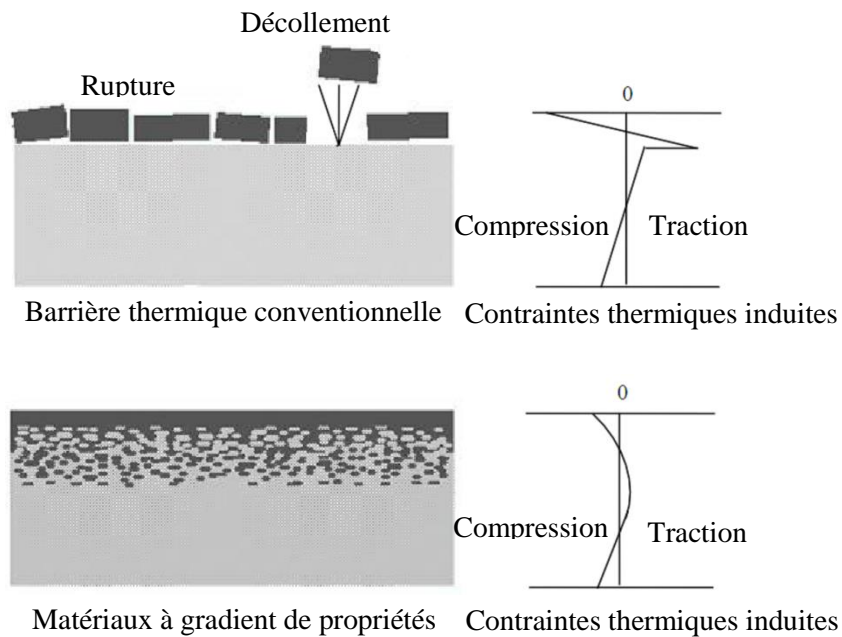


Figure II.2 : Protection thermique.

II.3. L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi, 1992). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (Koizumi, 1997).

Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SiC/C par Le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches.

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques...etc. (Okamura, 1997).

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire (Kieback, 2003).

A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

II.4. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basés sur une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Les procédés qui sont capables de recevoir une étape de gradation comprennent la métallurgie des poudres (Jin, 2009) et les procédés de compaction sèche des poudres. En général, les procédés d'élaboration les plus utilisés incluent le coulage centrifuge (Torii, 2004), le coulage par barbotine, le coulage en bande (Yeo, 1998), le frittage et la projection plasma. Le choix de la méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matière, du type de la loi de mélange requise et de la géométrie de la composante souhaitée.

II.4.1. La métallurgie des poudres (Powder metallurgy)

Cette méthode est l'une des techniques les plus couramment employées en raison de son large contrôle sur la composition et la microstructure et la capacité de formation de forme, la métallurgie des poudres offre plus d'avantages grâce à des coûts moindres, une disponibilité accrue des matières premières, un équipement de traitement plus simple, une consommation d'énergie plus faible et des temps de traitement plus courts. Dans le traitement de la poudre, le gradient est généralement produit en mélangeant différentes poudres en rapports variables et en empilant les mélanges de poudre dans des couches séparées avec des épaisseurs comprises entre 0,2 mm et 1 mm. Plusieurs techniques ont été introduites pour la préparation de poudre, par exemple par réaction chimique, dépôt électrolytique ou broyage. Ces techniques permettent des taux de production en masse de matériaux en poudre et une gamme de tailles contrôlables de la quantité finale de grains. Pour le traitement de la poudre, la considération principale est centrée sur la précision dans les quantités de pesée et la dispersion des poudres mélangées. Ces éléments influenceront les propriétés de la structure et devraient être manipulés de manière très prudente. Dans les procédés ultérieurs, les opérations de formation sont effectuées à température ambiante tandis que le frittage est effectué à la pression atmosphérique car une température élevée peut provoquer une autre réaction qui peut affecter les matériaux. Des études en biomécanique ont constaté que les FGM utilisées dans les prothèses articulaires avec des épaisseurs de couche inférieure à 1,0 mm présentaient une faible résistance à l'usure (Mishina, 2008). Néanmoins des FGM ayant une épaisseur de couche supérieure à 2 mm produits par projection plasma et par frittage et infiltration ont des propriétés mécaniques et tribologiques meilleurs et conviennent mieux pour l'utilisation dans

des prothèses articulaires car ils présentaient un faible niveau de porosité et par conséquent des échantillons entièrement denses (El-wazery, 2014).

II.4.2. La compaction sèche des poudres

Ce procédé est plus utilisé pour la fabrication de pièces de formes complexes car il se base sur le versement successif des poudres dans des moules en acier après chaque fois qu'une poudre soit versée, une faible compression sera exercée, ensuite, on effectue un compactage de l'ensemble des couches, il sera suivi généralement, par une pression isostatique et un déliantage. Finalement on effectue une densification (Bishop, 1993).

II.4.3. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont : les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr / min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification (Xiong, 2005). La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans La figure II.3 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano (Xiong, 2005a).

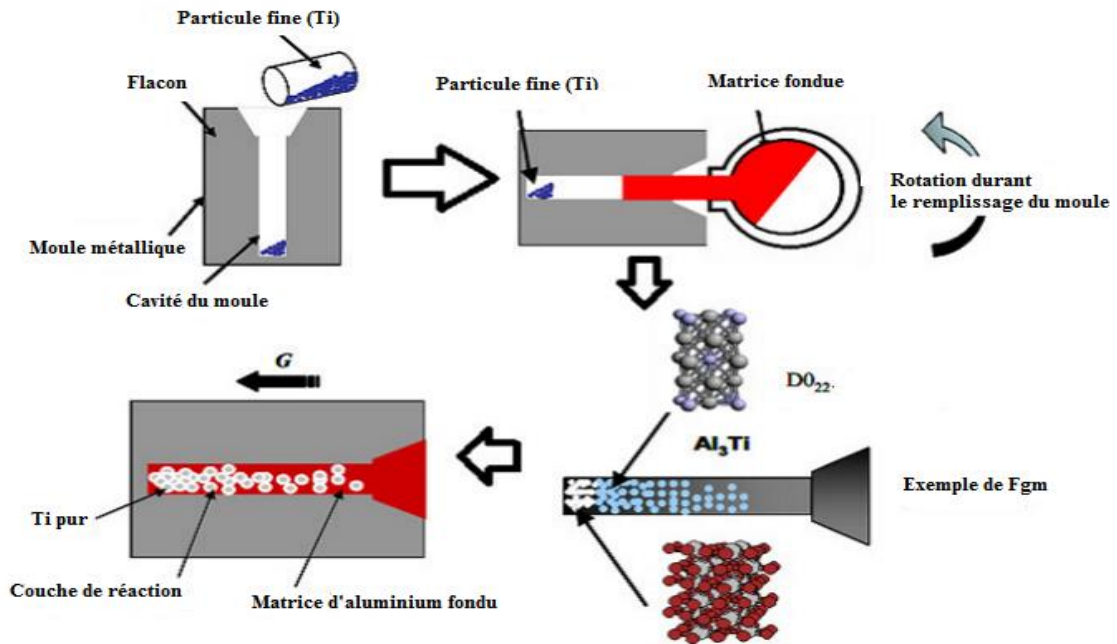


Figure II.3 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes (Xiong, 2005a).

II.4.4. Le coulage par barbotine (Slip casting)

Cette technique consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, elle se décompose en deux étapes essentielles à savoir la prise ou le tesson se forme et le raffermisssement dans cette étape le tesson se consolide. La filtration peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine lors du coulage, cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet du pouvoir de succion du plâtre ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression). Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

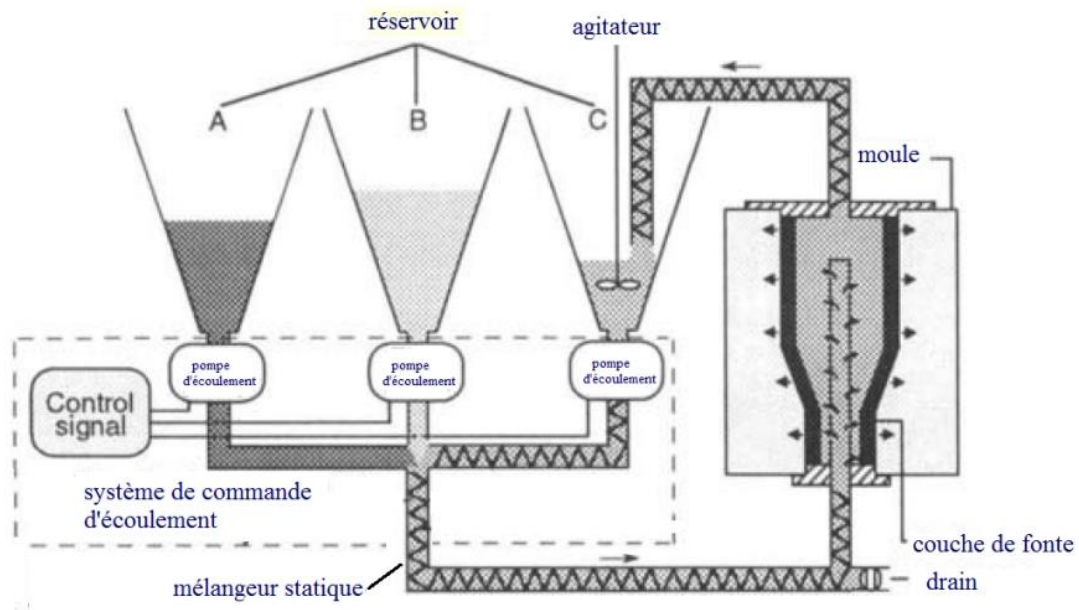


Figure II.4 : Principe du coulage par barbotine (Moya, 1992).

II.4.5. Le coulage en bande (Tape Casting)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support figure II.5, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande (Lostec, 1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

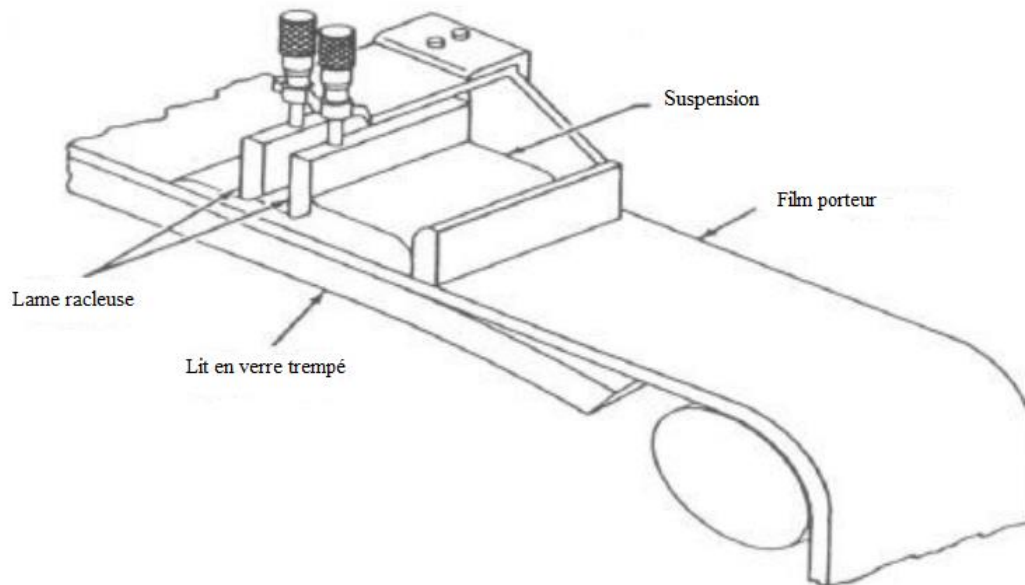


Figure II.5 : Principe du coulage en bande (Lostec, 1997).

II.4.6. Le frittage (Sintering)

Cette méthode est basée sur deux étapes la première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité, la seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi, 1990). Cette technique convient à la fabrication d'un composite fonctionnellement gradué composé de matériaux qui sont chimiquement inertes avec des températures de fusion très différentes.

II.4.7. La projection plasma (Plasma projection)

Cette méthode se consiste à soumettre un gaz à une forte température ce qui le transforme en état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens, 1990).

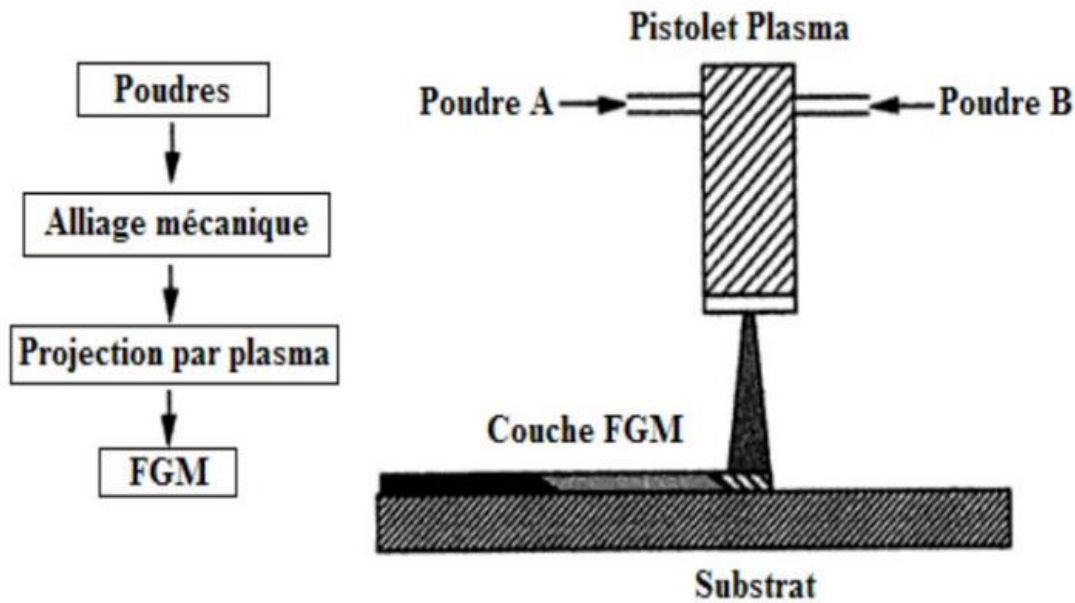


Figure II.6 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma (Steffens, 1990).

II.5. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatial ou aéronautique, électriques comme les diodes électroniques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et même dans les secteurs chimiques et biologiques. En raison du développement du concept de FGM dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée. Grâce à leurs propriétés mécaniques et thermique ces matériaux sont utilisés dans des différents domaines tel que :

II.5.1. L'aérospatiale

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été initialement conçu pour l'industrie aéronautique car les FGM peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend adéquat pour l'usage dans les structures et le corps des navettes spatiales ainsi pour les composants de moteur des fusées (Marin, 2005). Les FGM sont très prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale ;

II.5.2. La médecine

Les matériaux FGM ont trouvés une large gamme d'application dans les chirurgies dentaires et orthopédiques car ces tissus vivants, tels que les os et les dents, sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature (Matsuo, 2001), et pour les

remplacer un matériau compatible est nécessaire d'où l'intérêt pour l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués ;

II.5.3. L'électronique

Les FGM trouvent également leurs utilités dans l'électronique tel que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde, des cartes de circuits imprimés, les téléphones cellulaires et dans des supports de stockage magnétiques de disques audio-vidéo ;

II.5.4. L'énergie

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement de protection sur les pales de la turbine dans le moteur à turbine à gaz (Müller, 2003). Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM (céramique / métal) ;

II.5.5. L'automobile

Les cylindres de moteur de voiture sont faits de FGM. Leurs phase interne est en céramique et la phase externe est métallique ;

II.5.6. La défense

L'une des caractéristiques les plus importantes d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration d'armures des équipements et les gilets pare-balles (Lu, 2001) ;

II.5.7. Outils de coupe

Les FGM sont utilisés dans les outils de coupe car ils améliorent la résistance thermique. La fissure se produit près de l'interface pointe-tige dans le type conventionnel mais avec les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration de contrainte (EL-Wazery, 2005).

II.6. Les propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-

uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient des lois de mélange soit par une fonction de puissance, une fonction exponentielle, ou par une fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

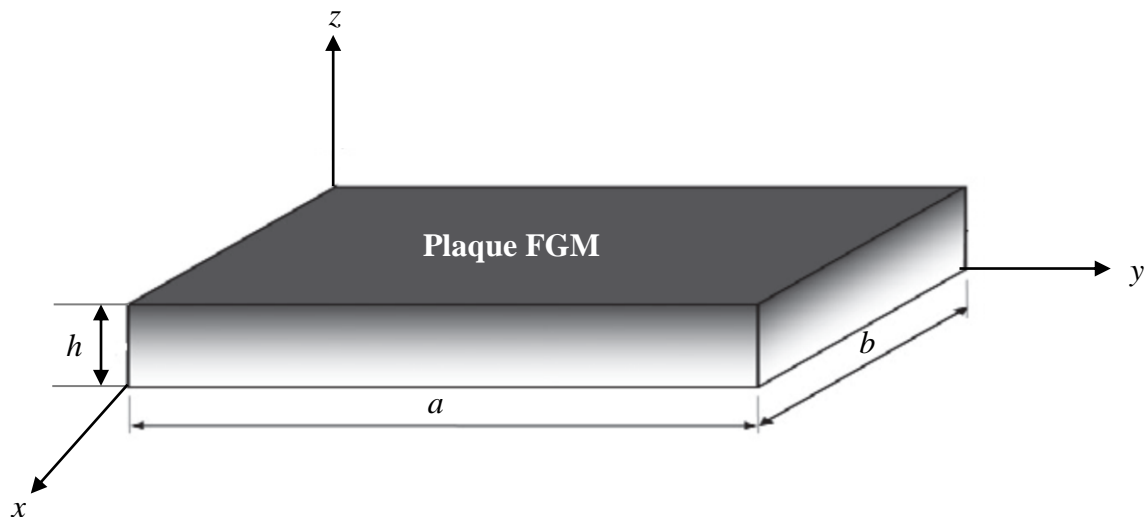


Figure II.7 : Géométrie d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés mécaniques de ces plaques à savoir son module de Young et le coefficient de Poisson sur les deux faces supérieures et inférieures sont différentes mais elles sont déterminées selon les besoins. Néanmoins le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur suivant l'axe z soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur d'une plaque FGM varie en fonction des lois de mélange d'où on peut désigner des plaques P-FGM, E-FGM ou des plaques S-FGM selon les fonctions utilisées.

Ces lois de mélange sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. De ce fait plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales ont été développés on peut citer le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka (Mori, 1973) ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill (self-consistent method) (Hill, 1995).

II.6.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{II.1})$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao, 1995) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{II.2})$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.8, On voit bien que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

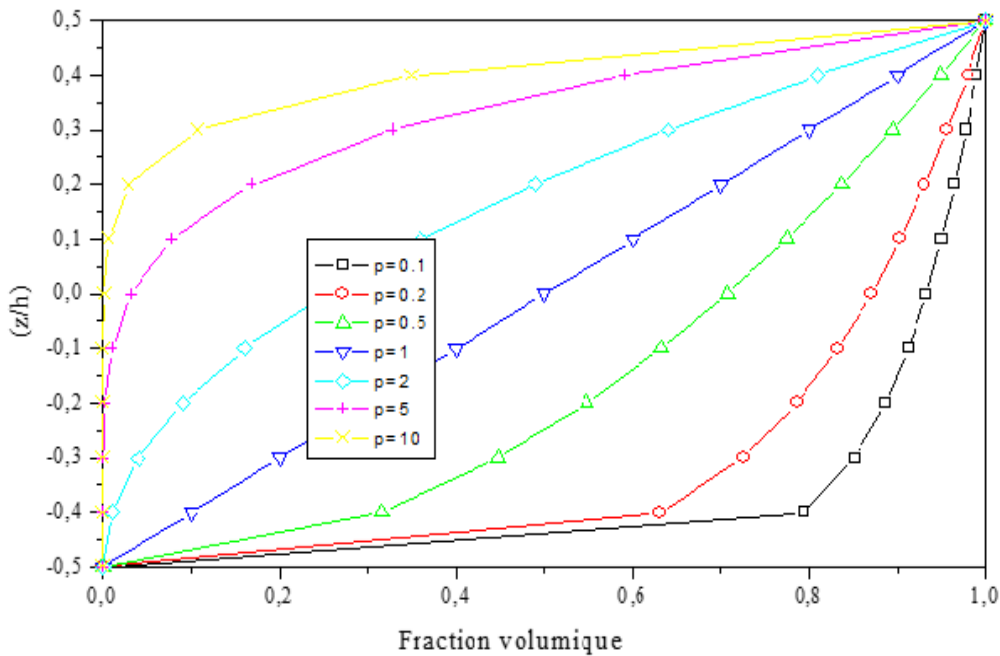


Figure II.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

II.6.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Naghdi, 1957) :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (\text{II.3.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (\text{II.3.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.9.

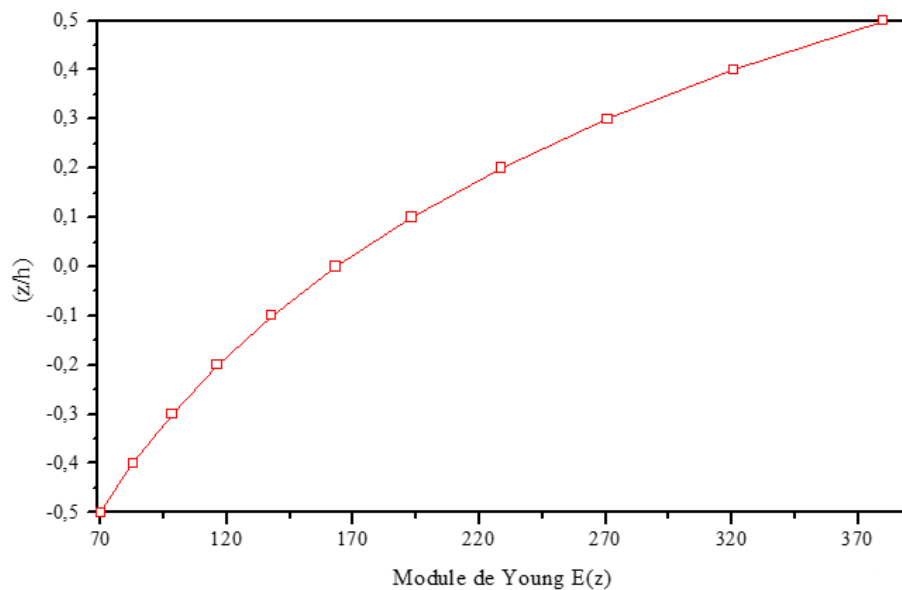


Figure II.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

II.6.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)

Dans le cas où on ajoute une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des

contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.4.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.4.b})$$

En utilisant la loi de mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.5.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.5.b})$$

La figure II.10 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (II.5.a) et (II.5.b) représente les distributions sigmoïdes.

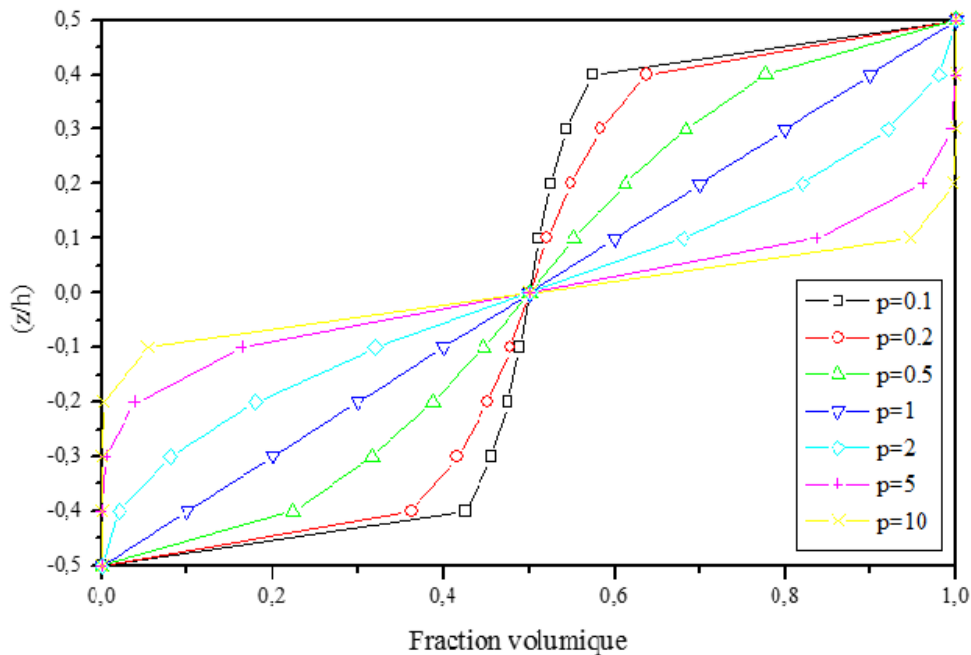


Figure II.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

II.6.4. Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka (1973) qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure II.11. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose

que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulaire dénotée par l'indice 2.

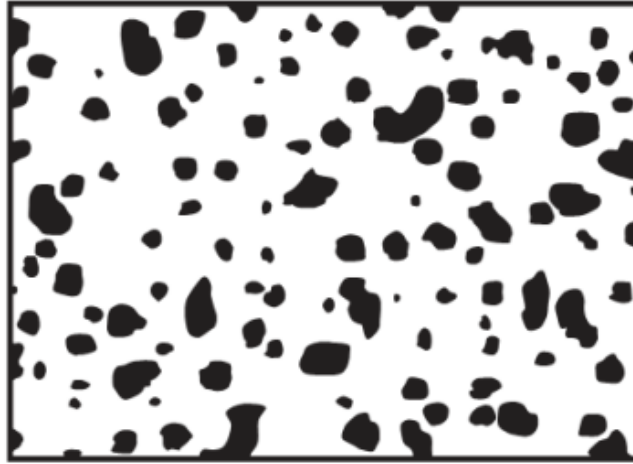


Figure II.11 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire (Mori, 1973).

Si on note par K le module de compressibilité, par G le module de cisaillement, par V la fraction volumique et par α le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka (1973), pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par (Vel et Batra (2004), Shen (2009)) :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + 4/3G_1)} \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (\text{II.8})$$

II.6.5. Modèle auto-cohérent de Hill

Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même

module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue telle que montrée sur la figure II.12.



Figure II.12 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique (Hill, 1995).

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K - K_2)} + \frac{V_2}{(K - K_1)} \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2}{(G - G_1)} \quad (\text{II.10})$$

Où g et η sont définis par :

$$g = \frac{K}{K_1 + (4/3)G} \quad (\text{II.11})$$

$$\eta = 1/5(3 - g) \quad (\text{II.12})$$

A partir des équations (II.9) et (II.10), l'expression du module de compressibilité est obtenue :

$$K = \frac{1}{V_1/(K_1 + (4/3)G) + V_2/(K_2 + (4/3)G)} - 4/3G \quad (\text{II.13})$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{(K_1 + (4/3)G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2 + (4/3)G)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (\text{II.14})$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{(3K + G)} \quad (\text{II.15})$$

$$\nu = \frac{(3K - 2G)}{2(3K + G)} \quad (\text{II.16})$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), l'histoire de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales techniques de fabrication et leurs domaines d'application. Enfin, Nous avons présenté les différents modèles possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

Grace à leur fonctionnalité ces matériaux permettent de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil. Dans le chapitre suivant, nous présenterons les différentes théories des plaques pour l'étude le comportement mécanique des plaques FGM.

Chapitre III

DIFFÉRENTES THÉORIES DES PLAQUES

Chapitre III

DIFFÉRENTES THÉORIES DES PLAQUES

III.1. Introduction

Ce chapitre a pour but de mettre en évidence les points forts et les manques des différentes théories développées jusqu'à présent pour l'étude de la réponse des plaques sous chargement mécanique, afin de choisir la théorie la plus appropriée pour décrire correctement le comportement statique et dynamique des plaques ainsi que la méthode de résolution à appliquer. Dans un premier temps nous rappellerons l'histoire et la définition des plaques qui nous donne une idée sur les théories des plaques. Ensuite nous présentons les différentes théories utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques FGM : Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3D), la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et enfin la théorie HSDT quasi-3D.

III.2. Historique des plaques

C'est en 1888 que Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque (Amal Mahi, 2012).

III.3. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (x,y) et une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions à savoir sa longueur et sa largeur (Figure III.1). On définit :

- **Le plan moyen (plan médian) :** plan situé à équidistance entre les faces.

- **La fibre neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y) , avec $z = 0$.
- **Une fibre normale** : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .
- **L'épaisseur h** : l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

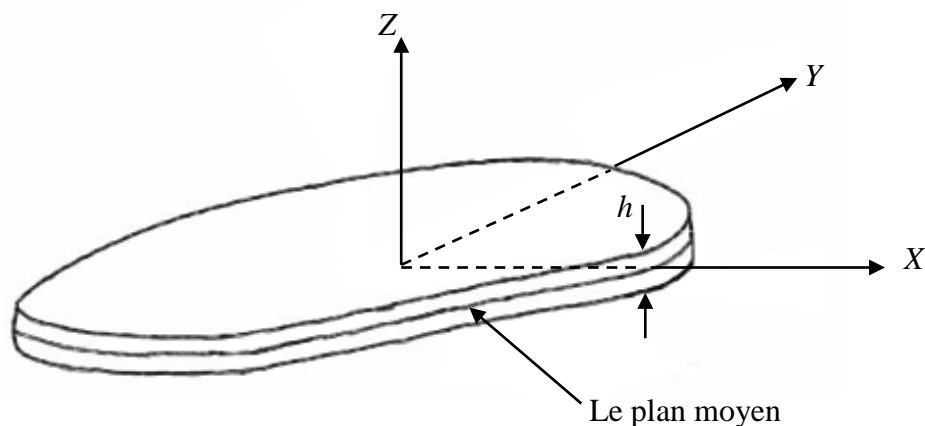


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque quelconque.

III.4. Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3D)

L'étude du comportement des plaques fonctionnellement graduées vis-à-vis des chargements mécanique reste un problème tridimensionnel de ce fait l'utilisation des théories d'élasticité tridimensionnelle (3D) peut s'avérer très utile. Au cours des vingt dernières années beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux théories de l'élasticité 3D pour pouvoir développer des solutions plus exactes des comportements mécaniques des plaques FGM et valider les résultats des différentes modèles analytiques.

En utilisant la méthode de d'état d'espace qu'Alibeigloo (2010) a effectué une analyse de la flexion des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques. Au cours des années qui suivent pas mal de travaux en était enregistré dans le cadre de l'étude statique sous des chargements thermiques et mécaniques des plaques en FGM comme Kashtalyan (2004), Zhong et Shang (2008), Zhang et al. (2014), Woodward et Kashtalyan (2011), Wen et Sladek (2011) Et Abali (2014) en employant des théories de l'élasticité tridimensionnelle (3D).

Des études tridimensionnelles de vibration des plaques FGM ont été initialement développées par Vel et Batra (2004) à l'aide de la méthode de séries de puissances pour des plaques simplement appuyées en FGM. Ensuite Aydogdu et Uymaz (2007) ont présenté des solutions exactes en utilisant les théories 3D pour la vibration libre des plaques FGM avec des différentes conditions aux limites.

Yas et Tahouneh (2012) ont examiné les réponses de vibration libre des plaques annulaires en FGM reposant sur des fondations élastiques. La théorie d'élasticité 3D et la méthode des différences quadratiques ont été utilisées pour obtenir des fréquences propres. D'autres études dynamiques ont été menées pour des plaques fonctionnellement graduées on peut citer Amini et al (2009), Lu et Lim (2009), Tamijani et Kapania (2012), Malekzadeh (2009, 2010) et Reddy et Kant (2014), Zafarmand et Kadkhodayan (2015), Hosseini-Hashemi et al. (2011).

On peut constater que l'avantage des solutions basé sur la théorie d'élasticité tridimensionnelle (3D) est que celle-ci n'a aucune hypothèse restrictive.

III.5. Les théories de déformations des plaques

III.5.1. La théorie classique des plaques (CPT)

La théorie classique des plaques CPT (Classical Plate Theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff. Lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque, donc on parle d'une plaque mince.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'éclatement (L/h). Elle suppose les hypothèses ci-après:

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen.

- Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du plan neutre.

- Les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et normales à celui-ci (Figure III.2), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).

- L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

A partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.1c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

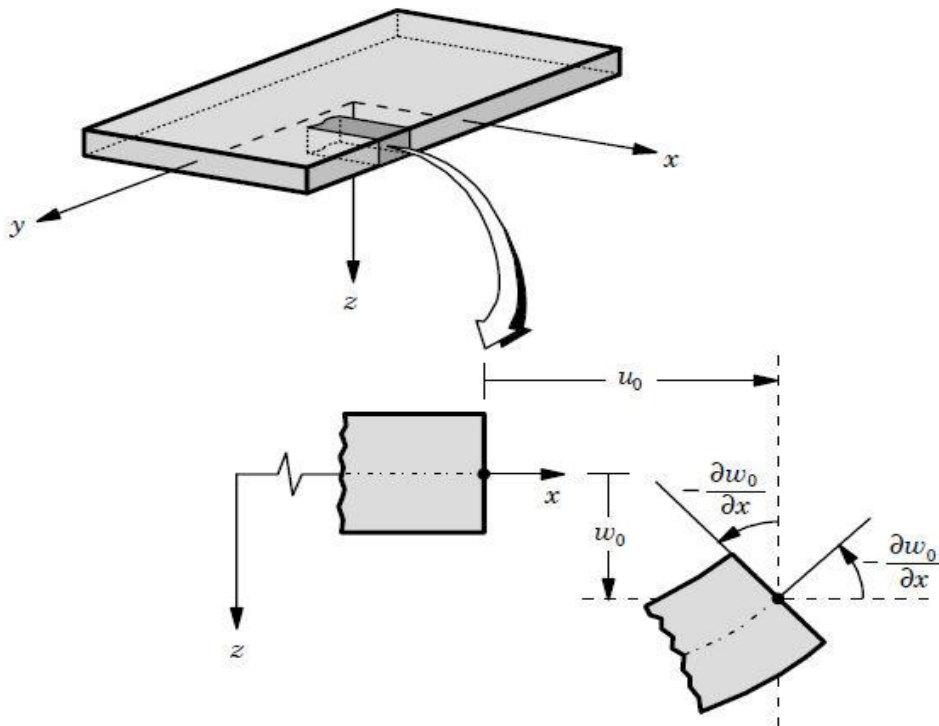


Figure III.2 : Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy, 2007).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, ceci conduit à des résultats imprécis pour des plaques épaisses.

III.5.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de (Reissner, 1945 - Mindlin, 1951), d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée ;
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin (1951) a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement.

Le champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.2c})$$

Avec :

(u_0, v_0, w_0) sont les déplacements en membrane et (ϕ_x, ϕ_y) les rotations autour des axes x et

y , respectivement données par : $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

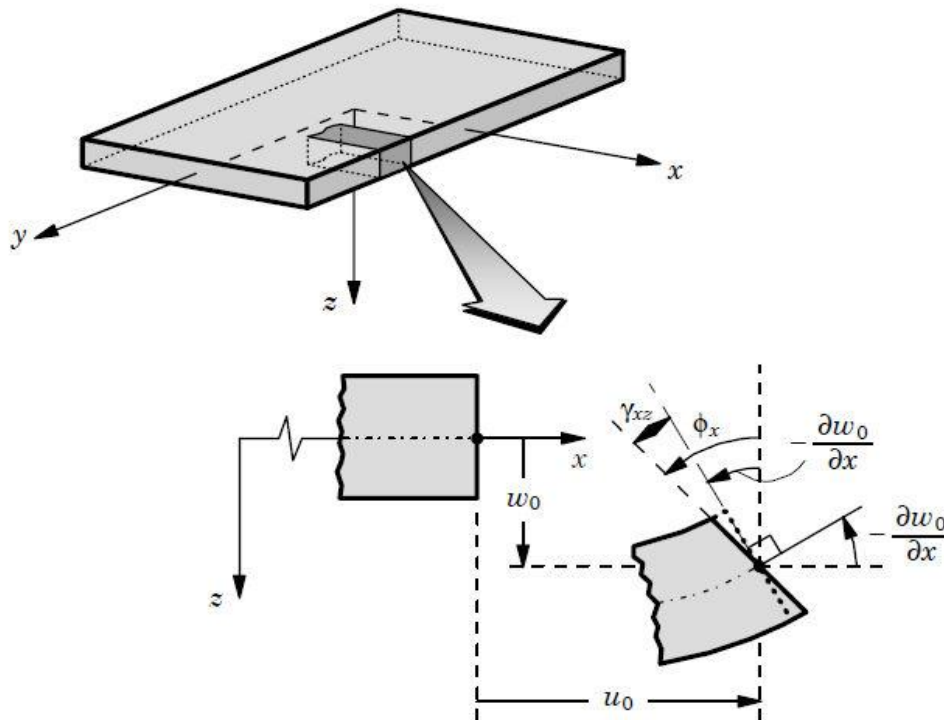


Figure III.3 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT) (Reddy, 2007).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

III.5.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Plusieurs théories ont été proposées dans le contexte d'analyse des plaques épaisses, pour franchir les limites de la théorie classique (CPT) et du premier ordre (FSDT), on utilise la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

Le concept des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé est basé sur une distribution non linéaire de champ de déplacement à travers l'épaisseur (Figure III.4), donc on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Nombreuses auteurs proposent des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on peut citer : (Naghdi P. M., 1957) ; (Reissner E., 1975) ; (Reddy J.N., 1984) ; (Liberscu L., 1967) ; (Whitney J.M., 1973) ; (Touratier M., 1991) ; (Nguyen., 2004) ; (Sheikholeslami et Saidi (2013)).

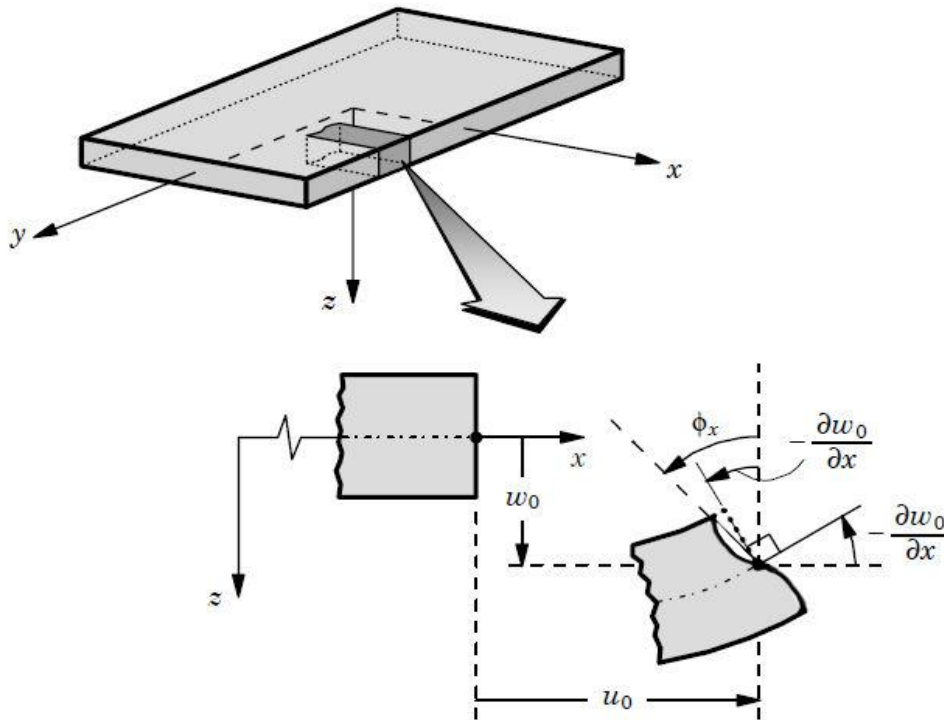


Figure III.4 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie (HSDT) (Reddy, 2007).

Le champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.3c})$$

où (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements en membrane et (φ_x, φ_y) les rotations autour des axes x et y respectivement ;

$$\text{On pose aussi } \varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. On remarque que les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) peut être obtenue en prenant $f(z) = 0$, tandis que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue par une fonction $f(z) = z$.

Nous avons présenté ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

Reddy (1997) avait proposé une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) qui peut être obtenus par :

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \quad (\text{III.4})$$

Dans ce modèle le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. D'où on peut obtenir une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

Touratier (1991) a proposé un modèle SSDT (The sinusoidal shear deformation plate theory) en utilisant une fonction trigonométrique sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur qui utilise des fonctions polynomiales, cette fonction s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèles SSDT prennent une forme Cosinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. Ce modèle est considéré plus précis par rapport à la théorie TSDT de Reddy.

Une version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDT) a été développée par Karama et al. (2003) en prenant la fonction suivante :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{III.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) a été développée par Ait Atmane et al (2010) est obtenue en prenant (Ait Atmane H., 2010) :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{III.7})$$

III.5.4. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque.

Thai et Kim (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. Hebali et al. (2014), Tounsi et al. (2015), Hamidi et al. (2015), Thai (2014), Belabed et al. (2014) et Bennoun et al. (2016) ont proposée à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM (2013), les plaques sandwich (Zenkour, 2013) et des plaques composites stratifiées (Zenkour, 2015). Mantari et Guedes Soares (2014) ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement gradués en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Cette théorie est donnée par le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}, \quad (\text{III.8a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \quad (\text{III.8b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \quad (\text{III.8c})$$

où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque

(w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire φ qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ est la fonction de cisaillement transverse.

III.6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, un aperçu général sur les différentes théories des plaques à savoir les théories qui se basent sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité (solution exacte 3D), la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Ensuite nous avons présenté la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur. A la base de ce qui a été montré dans ce chapitre. Dans le chapitre suivant nous nous attacherons à présenter une nouvelle théorie de déformation de cisaillement 2D et quasi-3D pour l'étude de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM.

Chapitre IV

***ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA FLEXION ET DE LA VIBRATION LIBRES DES
PLAQUES FGM EN UTILISANT UNE NOUVELLE THEORIE QUASI-3D ET 2D***

Chapitre IV

ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA FLEXION ET DE LA VIBRATION LIBRES DES PLAQUES FGM EN UTILISANT UNE NOUVELLE THÉORIE QUASI-3D ET 2D

IV.1. Introduction

Après avoir établi, au chapitre précédent, le bilan des recherches sur quelques théories des plaques FGM, nous allons présenter dans ce chapitre l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM, pour cela nous avons proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D, cette théorie prend en considération l'effet d'étirement (Stretching effect) de l'épaisseur de la plaque FGM. Les termes d'intégrale indéfini sont introduits dans le champ de déplacement proposé, et contrairement aux théories conventionnelles HSDT, la présente théorie ne contient que cinq inconnus.

IV.2. Formulation théorique

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions a et b en plan et une épaisseur uniforme h (Figure IV.1). Le système de coordonnées cartésiennes est utilisé de telle sorte que le plan x - y coïncide avec le plan médian de la plaque. La plaque FGM est soumise à une charge transversale $q(x, y)$. La plaque est composée d'un matériau à gradation de propriété variant dans la direction de l'épaisseur.

IV.2.1. Propriétés matérielles des plaques FGM

Dans ce travail, les compositions et les fractions volumiques des constituants dans les FGM sont supposées changer graduellement à travers l'épaisseur selon: (a) La variation de loi de puissance, (b) La distribution exponentielle, (c) Le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka. L'influence du coefficient de Poisson ν sur la réponse des plaques FG étant très faible. Par conséquent, par souci de simplicité, il est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque (Bouderba et al., 2013 and 2016; Bousahla et al., 2014 and 2016; Meradjah et al., 2015; Mouaici et al., 2016; Chikh et al., 2016; Bourada et al., 2015; Mahi et al., 2015; Boukhari et al., 2016; Zidi et al., 2014 and 2017).

a) Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la plaque P-FGM est considérée comme évoluant continuellement dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la variation de la loi de puissance (Bao and Wang, 1995; Fekrar et al., 2014; Bellifa et al., 2016 and 2017; Benferhat et al., 2016; El-Hassar et al., 2016; Laoufi et al., 2016; Besseghier et al., 2017; Bouafia et al., 2017; El-Haina et al., 2017; Khetir et al., 2017; Mouffoki et al., 2017) comme suit :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (\text{IV.1})$$

b) Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

On considère que la fraction volumique de la plaque E-FGM varie continuellement dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la variation exponentielle (Delale et Erdogan, 1983) comme suit:

$$P(z) = A e^{p(z+h/2)}, \quad A = P_m, \quad p = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_c}{P_m} \right) \quad (\text{IV.2})$$

c) Modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka

Pour le schéma de Mori-Tanaka, la fraction volumique de la plaque de FGM est donnée par (Mori et Tanaka, 1973, Benveniste, 1987, Belabed et al., 2014, Bounouara et al., 2016):

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \frac{V_c}{1 + V_m \left(\frac{P_c}{P_m} - 1 \right) \frac{1 + \nu}{3 - 3\nu}} \quad (\text{IV.3a})$$

avec

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k, \quad V_m + V_c = 1 \quad (\text{IV.3b})$$

où $P(z)$ présente la propriété matérielle effective comme le module de Young E , P_m et P_c dénote la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement, k est l'indice de loi de puissance et p est l'exposant de la fraction volumique.

IV.2.2. Hypothèses de base

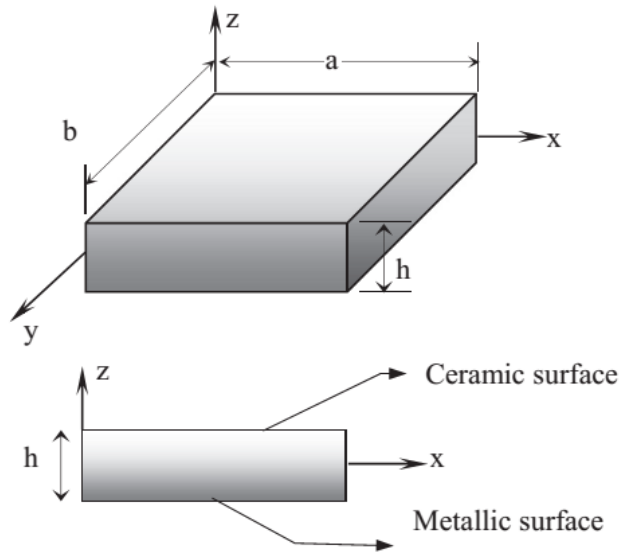


Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque FGM en coordonnées cartésiennes.

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes:

- (i) Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur h de la plaque, par conséquent, les déformations sont infinitésimales.
- (ii) Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements u et v dans les directions x et y respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + u_b(x, y) + u_s(x, y, z) \quad (\text{IV.4})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + v_b(x, y) + v_s(x, y, z) \quad (\text{IV.5})$$

Les premières composantes u_0 et v_0 représentent les déplacements en membrane.

Les deuxièmes composante u_b et v_b , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacement donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes u_b et v_b sont donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad v_b = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{IV.6})$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement u_s et v_s , elles donnent lieu, une variation hyperboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} et γ_{yz} , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles aux facettes (supérieure et inférieure) de la plaque.

Les expressions des composantes u_s et v_s dépendent du terme intégrale qui réduit ainsi le nombre de variables à 5 par rapport aux théories d'ordre élevé conventionnelles, et elles sont donnée comme suit :

$$u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (IV.7)$$

où k_1 et k_2 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque.

Dans cette étude la nouvelle fonction de forme $f(z)$ est présentée sous la forme suivante (tableau IV.1) :

$$f(z) = h \tanh^{-1}\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{z^3}{h^2} \quad (IV.8)$$

Cette fonction satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque (Figures IV.2 et IV.3).

Tableau IV.1 : Différentes fonctions de forme $f(z)$ des théories des plaques FGM.

Théorie	Fonction de forme $f(z)$
HSDT (Zenkour)	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
PSDT (Reddy)	$z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$
ESDT (Karama)	$z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Présente	$h \tanh^{-1}\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{z^3}{h^2}$

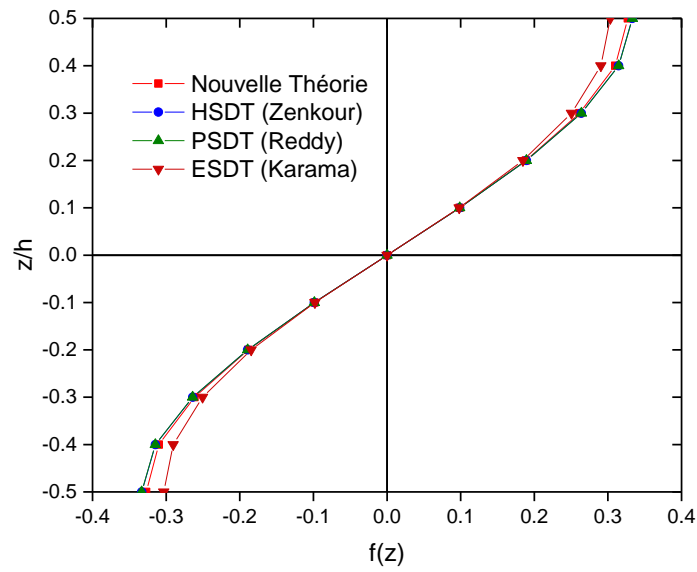


Figure IV.2 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ à travers l'épaisseur.

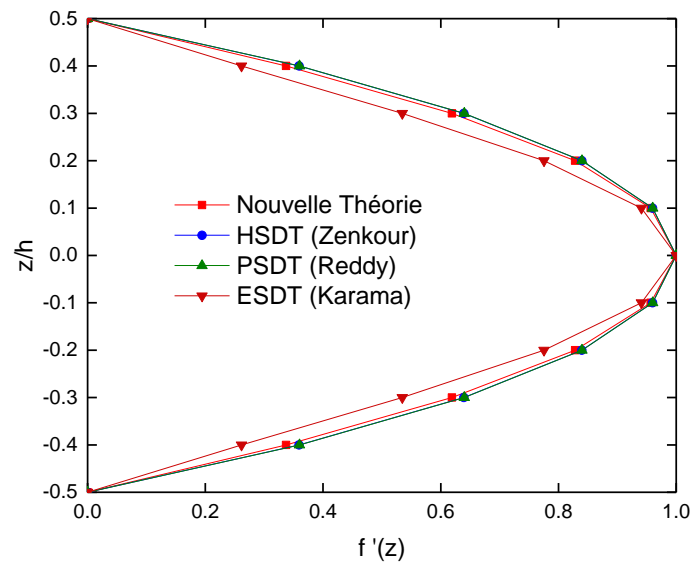


Figure IV.3 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ à travers l'épaisseur.

(iii) La composante du déplacement transversal $w(x, y, z)$ peut être dissociée en deux termes :

Le premier $w_0(x, y)$ représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que le dérivé de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale.

Le deuxième terme $\varphi_z(x, y)$ considère la flèche due à l'effet d'étirement (effet de la déformation normale) de l'épaisseur de la plaque en incluant la fonction $g(z)$ qui est donnée

par l'équation (IV.10). Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées x, y seulement et s'écrivent comme suit :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{IV.9})$$

avec

$$g(z) = \frac{df}{dz} \quad (\text{IV.10})$$

IV.3. Cinématique et équations constitutives

IV.3.1. Champ des déplacements

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ des déplacements peut être obtenu en utilisant les équations (IV.4) - (IV.10):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

IV.3.2. Champ des déformations

Les déformations linéaires associées au champ des déplacements dans l'équation (IV.11) sont écrits comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12b})$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV.12c})$$

où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13b})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13c})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13d})$$

$$\varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad (\text{IV.13e})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.14})$$

où les coefficients A' et B' sont déterminés en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas par la méthode de Navier. Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2} \quad B' = -\frac{1}{\beta^2} \quad k_1 = \alpha^2 \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.15})$$

où α et β sont définis dans l'équation (IV.34).

IV.3.3. Équations constitutives

La relation de comportement élastique linéaire d'une plaque FG peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement.

Le calcul des constantes élastiques C_{ij} dépend des hypothèses dont lesquelles on prend en compte ou non la déformation normale ε_z .

- Si $\varepsilon_z = 0$ donc les constantes élastiques C_{ij} réduit en contraintes planes:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad (\text{IV.17a})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.17b})$$

- Si $\varepsilon_z \neq 0$ (effet d'étirement de l'épaisseur), puis C_{ij} sont des constantes élastiques en 3D, elles sont exprimées comme suit:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (\text{IV.18a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (\text{IV.18b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.18c})$$

Les modules $E(z), G(z)$, ainsi que les coefficients élastiques C_{ij} varient à travers l'épaisseur de la plaque.

IV.4. Équations d'équilibres

En vue d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre et de mouvement, ainsi que les conditions aux limites de la plaque en FGM, le principe d'énergie d'Hamilton est utilisé. Le principe d'Hamilton est donné par sa forme analytique comme suit :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V_p - \delta K) dt \quad (IV.19)$$

Dans cette expression δU , δV_p et δK représentent, respectivement la variation d'énergie de déformation, la variation d'énergie potentielle et la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque FGM est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz} + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}] dA = 0 \end{aligned} \quad (IV.20)$$

où les résultantes des contraintes et des moments N , M , et S sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (IV.21a)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz \quad (IV.21b)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (IV.21c)$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée par :

$$\delta V_p = - \int_A q \delta (w_0 + g(z) \varphi_z) dA \quad (IV.22)$$

où q est la charge transversale distribuée.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA dz \\
 &= \int_A \left\{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + J_0 (\dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z + \dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0) \right. \\
 &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\
 &\quad + J_1 \left(k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\
 &\quad \left. + K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) + K_0 \dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z \right\} dA
 \end{aligned} \tag{IV.23}$$

où $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_2, K_0)$ sont des inerties de masse définis comme suit :

$$(I_0, I_1, I_2, J_1) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z)) \rho(z) dz \tag{IV.24a}$$

$$(J_2, J_0, K_2, K_0) = \int_{-h/2}^{h/2} (z f(z), g(z), f^2(z), g^2(z)) \rho(z) dz \tag{IV.24b}$$

Les contraintes normales et les contraintes de cisaillement $(\sigma_x, \sigma_y$ et $\tau_{xy})$ peuvent être déterminées par la relation constitutive (IV.16) pour les plaques FG. Mais si les contraintes de cisaillement transversales $(\tau_{xz}$ et $\tau_{yz})$ calculées à partir des relations constitutives (IV.16), elles peuvent ne pas satisfaire les conditions aux limites des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Donc, ces contraintes sont déterminées par l'intégration des équations d'équilibre de l'élasticité en trois dimensions 3D par rapport à l'épaisseur de la plaque comme:

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz + C_1(x, y) \tag{IV.25a}$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz + C_2(x, y) \tag{IV.25b}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes et déterminées à l'aide des conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque:

$$\tau_{xz}\Big|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \tau_{yz}\Big|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (\text{IV.26})$$

En substituant les expressions δU , δV_p , et δK des équations (IV.20), (IV.22) et (IV.23) dans le principe d'Hamilton l'équation (IV.19) et faisant l'intégration par parties, et en recueillant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_z$, on obtient les équations d'équilibre et du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q \\ & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ & \quad + J_2 (k_1 \ddot{\theta} + k_2 \ddot{\theta}) + J_0 \ddot{\varphi}_z \\ \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} \\ & = J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 (k_1 \ddot{w}_0 + k_2 \ddot{w}_0) \\ & \quad + K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ \delta \varphi_z : \quad & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Les résultantes des contraintes et des moments peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{23}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (IV.28a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.28b)$$

où les coefficients de rigidité sont donnés par :

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, g^2(z), z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z)) C_{ij} dz \quad (IV.29a)$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) C_{ij} dz \quad (IV.29b)$$

En substituant l'équation (IV.28) dans l'équation (IV.27), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta, \delta \varphi_z)$ comme suit :

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ & + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{12} \theta + X_{13} d_{13} \varphi_z \\ & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 k_1 A' d_1 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (IV.30a)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 \\
 & + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (B_{12}^sk_1 + B_{22}^sk_2)d_{22}\theta + X_{23}d_{22}\varphi_z \\
 & = I_0\ddot{v}_0 - I_2d_2\ddot{w}_0 + J_1k_2B'd_2\ddot{\theta}
 \end{aligned} \tag{IV.30b}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_0 \\
 & - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^sk_1 + D_{12}^sk_2)d_{11}\theta \\
 & + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^sk_1 + D_{22}^sk_2)d_{22}\theta + Y_{13}d_{11}\varphi_z + Y_{23}d_{22}\varphi_z + q \\
 & = I_0\ddot{w}_0 + J_0\ddot{\varphi}_z + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_1\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) + J_2(k_1\ddot{\theta} + k_2\ddot{\theta})
 \end{aligned} \tag{IV.30c}$$

$$\begin{aligned}
 & - (B_{11}^sk_1 + B_{12}^sk_2)d_{11}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}v_0 \\
 & - (B_{12}^sk_1 + B_{22}^sk_2)d_{22}v_0 + (D_{11}^sk_1 + D_{12}^sk_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}w_0 \\
 & + (D_{12}^sk_1 + D_{22}^sk_2)d_{22}w_0 - H_{11}^sk_1^2\theta - H_{22}^sk_2^2\theta - 2H_{12}^sk_1k_2\theta - (H_{66}^s(k_1A' + k_2B')^2)d_{1122}\theta \\
 & + A_{44}^s(k_2B')^2d_{22}\theta + A_{55}^s(k_1A')^2d_{11}\theta + A_{44}^s(k_2B')d_{22}\varphi_z + A_{55}^s(k_1A')d_{11}\varphi_z - Y_{13}^sk_1\varphi_z - Y_{23}^sk_2\varphi_z \\
 & = -J_1(k_1A'd_1\ddot{u}_0 + k_2B'd_1\ddot{v}_0) + J_2(k_1\ddot{w}_0 + k_2\ddot{w}_0) + K_2((k_1A')^2d_{11}\ddot{\theta} + (k_2B')^2d_{22}\ddot{\theta})
 \end{aligned} \tag{IV.30d}$$

$$\begin{aligned}
 & - X_{13}d_{11}u_0 - X_{23}d_{22}v_0 + Y_{13}d_{11}w_0 + Y_{23}d_{22}w_0 + (A_{44}^s - Y_{23}^s)(k_2B')d_{22}\theta \\
 & + (A_{55}^s - Y_{13}^s)(k_1A')d_{11}\theta + A_{44}^sd_{22}\varphi_z + A_{55}^sd_{11}\varphi_z - Z_{33}\varphi_z \\
 & = J_0\ddot{w}_0 + K_0\ddot{\varphi}_z
 \end{aligned} \tag{IV.30e}$$

où d_i , d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad (i, j, l, m = 1, 2) \tag{IV.31}$$

IV.5. Solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé.

Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations (IV.30) pour une plaque simplement appuyée en FGM. Pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre côtés, les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent:

$$v_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \varphi_z = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ pour } x = 0, a \tag{IV.32a}$$

$$u_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \varphi_z = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ pour } x = 0, a \tag{IV.32b}$$

A partir de la solution de Navier, on peut alors être recherchée en écrivant les déplacements u_0 , v_0 , w_0 , θ et φ_z sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites données dans l'équation (IV.32)

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

où U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} et Φ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée par (m, n) mode propre. α et β sont exprimés comme :

$$\alpha = m\pi/a \quad \text{et} \quad \beta = n\pi/b \quad (\text{IV.34})$$

La charge transversale q est également développée en double série de Fourier comme suite :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (\text{IV.35})$$

Les coefficients q_{mn} sont donnés ci-dessous pour certaines charges générales:

- Dans le cas d'une charge uniformément répartie, nous avons

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2}, & m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m, n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

- Dans le cas d'une charge sinusoïdale distribué, nous avons

$$q_{mn} = q_0 \quad (\text{IV.37})$$

où q_0 représente l'intensité de la charge sur la plaque.

Finalement, en introduisant les équations (IV.33) et (IV.35) dans l'équation (IV.30), les solutions analytiques peuvent être obtenues par la relation suivante :

$$\left(\begin{array}{ccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{array} \right) - \omega^2 \left(\begin{array}{ccccc} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & m_{35} & 0 & m_{55} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{IV.38})$$

avec

$$\begin{aligned} S_{11} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 A_{66} \\ S_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ S_{13} &= -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\ S_{14} &= -\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) + \alpha\beta^2 B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \\ S_{15} &= \alpha X_{13} \\ S_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\ S_{23} &= -\beta^3 B_{22} - \alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) \\ (\text{IV.39}) \\ S_{24} &= -\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta(k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \\ S_{25} &= -\beta X_{23} \\ S_{33} &= \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) \\ S_{34} &= \alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \\ S_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23} \\ S_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 A_{55}^s + \beta^2 (k_2 B')^2 A_{44}^s \\ S_{45} &= k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s + \beta^2 k_2 B' A_{44}^s \\ S_{55} &= \alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33} \\ m_{11} &= I_0 \\ m_{13} &= -\alpha I_1 \\ m_{14} &= k_1 A' \alpha J_1 \\ m_{22} &= I_0 \\ m_{23} &= -\beta I_1 \\ m_{24} &= k_2 B' \beta J_1 \\ m_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{34} &= J_2 (k_1 + k_2) \\ m_{35} &= J_0 \\ m_{44} &= K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2) \\ m_{55} &= K_0 \end{aligned}$$

IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement mécanique de la flexion et de la vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D avec une fonction de forme hyperbolique. Le nombre d'inconnus dans la présente théorie est seulement cinq par rapport à plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement à ordre élevé (HSDT).

La théorie considère la déformation du cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont obtenues par l'application de principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant. Elles permettent de comprendre clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats trouvés dans la littérature à savoir les résultats obtenus par les autres théories d'ordre élevé avec ou sans prise en compte de la déformation normale ε_z et celles obtenues par la théorie d'élasticité tridimensionnelle.

Chapitre V

***RÉSULTATS ET DISCUSSIONS DE L'ANALYSE DE LA FLEXION ET DE LA
VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM SIMPLEMENT APPUYÉES***

Chapitre V

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS DE L'ANALYSE DE LA FLEXION ET DE LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM SIMPLEMENT APPUYÉES

V.1. Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D que nous avons développé dans le chapitre précédent.

On suppose que les propriétés matérielles de la plaque FGM varient dans la direction de l'épaisseur selon trois distributions : loi de puissance, modèle exponentiel et schéma de Mori-Tanaka, en fonction de la fraction volumique des constituants.

V.2. Résultats numériques et discussions

Afin de démontrer l'exactitude de la théorie proposée pour l'étude des réponses en flexion et dynamiques des plaques FG simplement appuyées, des exemples numériques sont présentés et comparés aux résultats de différentes théories de déformation de cisaillement 3D, quasi-3D et 2D.

V.2.1. Analyse de flexion

V.2.1.1. Plaque fonctionnellement graduée (Plaque P-FGM)

Dans cette section, les contraintes et les déplacements calculés des plaques FGM qui sont gradués à la surface inférieure à la surface supérieure selon l'équation (IV.1), sont fournis et comparés aux résultats de différentes théories de déformation de cisaillement (HSDT). Les propriétés matérielles des plaques FG sont indiquées dans le tableau V.1.

Tableau V.1: les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM.

Matériel		Propriétés		
		$E(GPa)$	ν	$\rho(kg/m^3)$
Métal	Aluminium (Al)	70	0.3	2702
	Céramique	Alumina (Al_2O_3)	380	0.3
	Zirconium (Al/ZrO_2)	200	0.3	5700

Les tableaux V.2 et V.3 présentent le déplacement et les contraintes non-dimensionnelles d'une plaque FG carrée en Al/ Al_2O_3 sous des charges distribuées uniformément et sinusoïdales pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k . Les composantes non-dimensionnelles de déplacement et des contraintes de ces tableaux sont :

$$\begin{aligned} \bar{w}(z) &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_x(z) = \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_y(z) = \frac{h}{aq_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xy}(z) &= \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}(0,0,z), \quad \bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{yz}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right) \end{aligned} \quad (V.1)$$

Le tableau V.2 contient les résultats de déplacement et des contraintes non-dimensionnelles d'une plaque FG carrée soumise à une charge uniformément répartie. Les résultats obtenus sont comparés avec la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D développée par Akavci et Tanrikulu (2015). A partir de ce tableau, On peut observer que les résultats obtenus par la présente théorie quasi-3D et 2D sont en excellent accord avec ceux obtenus par Akavci et Tanrikulu (2015). Ce tableau montre également que, la flèche maximale \bar{w} et les contraintes axiale $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_y$ augmentent et les contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ et $\bar{\tau}_{xy}$ diminuent avec l'augmentation de valeur du paramètre de matériau k .

Le tableau V.3 présente la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ et la flèche maximale non-dimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée FG soumise à une charge sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h . Les résultats obtenus sont comparés aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT quasi-3D de Carrera et al. (2011), Neves et al. (2012a, b), Hebali et al. (2014) et Akavci et Tanrikulu (2015) qui incluent

à la fois le cisaillement transversal et la déformation normale. Les résultats quasi-3D proposés s'accordent très bien avec ceux fournis par d'autres modèles.

Tableau V.2: Effet de la déformation normale ε_z sur les contraintes et le déplacement non-dimensionnel pour une plaque carrée en FG type Al/Al₂O₃ soumise à une charge uniformément répartie (a/h =10).

k	Théorie	ε_z	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_y\left(\frac{h}{3}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{h}{6}\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(-\frac{h}{3}\right)$
0	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.4665	2.8909	1.9103	0.4988	0.4363	1.2857
	Présente	= 0	0.4665	2.8913	1.9102	0.5043	0.4367	1.2855
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.4635	2.9981	1.8925	0.4782	0.4315	1.2578
	Présente	≠ 0	0.4637	2.9919	1.8932	0.4791	0.4317	1.2585
1	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.9288	4.4707	2.1693	0.4988	0.5364	1.1141
	Présente	= 0	0.9287	4.4713	2.1692	0.5043	0.5370	1.1141
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.8977	4.6110	2.0822	0.4782	0.5119	1.0211
	Présente	≠ 0	0.8980	4.6005	2.0832	0.4791	0.5121	1.0225
2	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	1.1940	5.2248	2.0342	0.4581	0.5643	0.9909
	Présente	= 0	1.1940	5.2256	2.0340	0.4637	0.5657	0.9908
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	1.1376	5.3825	1.9257	0.4524	0.5081	0.8921
	Présente	≠ 0	1.1380	5.3726	1.9281	0.4532	0.5082	0.8926
4	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	1.3888	5.8855	1.7205	0.4090	0.5253	1.0305
	Présente	= 0	1.3890	5.8866	1.7202	0.4151	0.5278	1.0303
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	1.3259	6.0382	1.6062	0.4358	0.4804	0.9274
	Présente	≠ 0	1.3262	6.0301	1.6101	0.4365	0.4806	0.9279
10	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	1.5875	7.3617	1.2828	0.4436	0.4159	1.0705
	Présente	= 0	1.5875	7.3628	1.2825	0.4495	0.4174	1.0703
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	1.5453	7.5123	1.2016	0.4332	0.4561	0.9860
	Présente	≠ 0	1.5454	7.5064	1.2059	0.4339	0.4562	0.9862

Tableau V.3: Effet de la déformation normale ε_z sur le déplacement \bar{w} et la contrainte non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque carrée Al/Al₂O₃ FG soumise à une charge sinusoïdale.

k	Théorie	ε_z	$\bar{\sigma}_x(0)$			$\bar{w}(0)$		
			$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$	$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$
1	Carrera et al. (2011)	$\neq 0$	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Neves et al. (2012a)	$\neq 0$	0.5925	1.4945	14.9690	0.6997	0.5845	0.5624
	Neves et al. (2012b)	$\neq 0$	0.5910	1.4917	14.9440	0.7020	0.5868	0.5648
	Hebali et al. (2014)	$\neq 0$	0.5952	1.4954	14.9630	0.6910	0.5686	0.5452
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.5806	1.4895	14.9670	0.7282	0.5889	0.5625
	Présente	$= 0$	0.5808	1.4896	14.9675	0.7283	0.5889	0.5625
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.5754	1.4322	14.3060	0.6908	0.5691	0.5457
	Présente	$\neq 0$	0.5758	1.4330	14.3135	0.6910	0.5692	0.5459
4	Carrera et al. (2011)	$\neq 0$	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Neves et al. (2012a)	$\neq 0$	0.4404	1.1783	11.9320	1.1178	0.8750	0.8286
	Neves et al. (2012b)	$\neq 0$	0.4340	1.1593	11.7380	1.1095	0.8698	0.8241
	Hebali et al. (2014)	$\neq 0$	0.4507	1.1779	11.8710	1.0964	0.8413	0.7926
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.4431	1.1787	11.9200	1.1613	0.8818	0.8287
	Présente	$= 0$	0.4437	1.1789	11.9209	1.1609	0.8817	0.8287
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.4247	1.1017	11.0880	1.0983	0.8417	0.7925
	Présente	$\neq 0$	0.4260	1.1045	11.1152	1.0982	0.8419	0.7928
10	Carrera et al. (2011)	$\neq 0$	0.3965	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	Neves et al. (2012a)	$\neq 0$	0.3227	1.1783	11.9320	1.3490	0.8750	0.8286
	Neves et al. (2012b)	$\neq 0$	0.3108	0.8467	8.6013	1.3327	0.9886	0.9228
	Hebali et al. (2014)	$\neq 0$	0.3325	0.8889	8.9977	1.3333	0.9791	0.9114
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.3242	0.8778	8.9059	1.3917	1.0089	0.9362
	Présente	$= 0$	0.3248	0.8780	8.9059	1.3915	1.0088	0.9362
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.3095	0.8229	8.3185	1.3352	0.9818	0.9141
	Présente	$\neq 0$	0.3109	0.8259	8.3473	1.3353	0.9819	0.9141

Les figures V.1-V.5 montrent la variation des contraintes et des déplacements non-dimensionnels à travers l'épaisseur de la plaque carrée en Al/Al₂O₃ FG ($a/h=10$) soumise à une charge sinusoïdale. Les grandeurs non-dimensionnelles présentées dans les figures V.1-V.5 sont données dans l'équation (V.2). Les résultats sont comparés avec les théories de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D d'Akavci et Tanrikulu (2015) pour différentes valeurs de l'indice matériel k . Selon les figures V.1-V.5, les résultats sont en excellent accord avec ceux calculés à l'aide des théories de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D d'Akavci et Tanrikulu (2015). Il est important d'indiquer que les variations des contraintes $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur sont linéaires pour les plaques homogènes alors qu'elles sont paraboliques pour les plaques FG.

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \frac{E_C}{hq_0} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), & \bar{w}(z) &= \frac{E_C}{hq_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), & \bar{\sigma}_x(z) &= \frac{1}{q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xy}(z) &= \frac{1}{q_0} \tau_{xy}(0,0,z), & \bar{\tau}_{xz}(z) &= \frac{1}{q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \end{aligned} \quad (V.2)$$

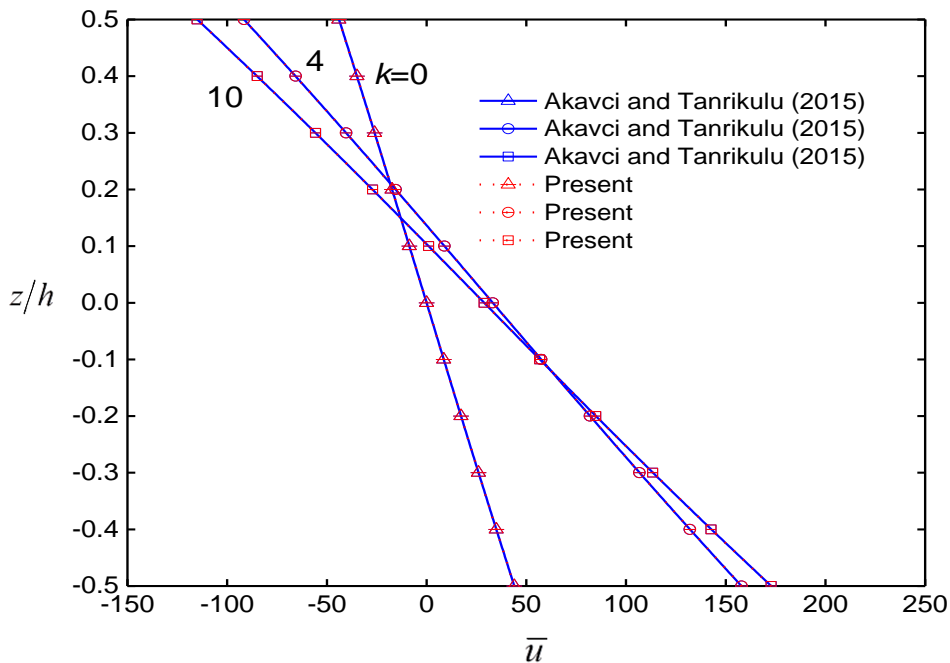


Figure V.1 : Variation du déplacement axial non-dimensionnel \bar{u} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).

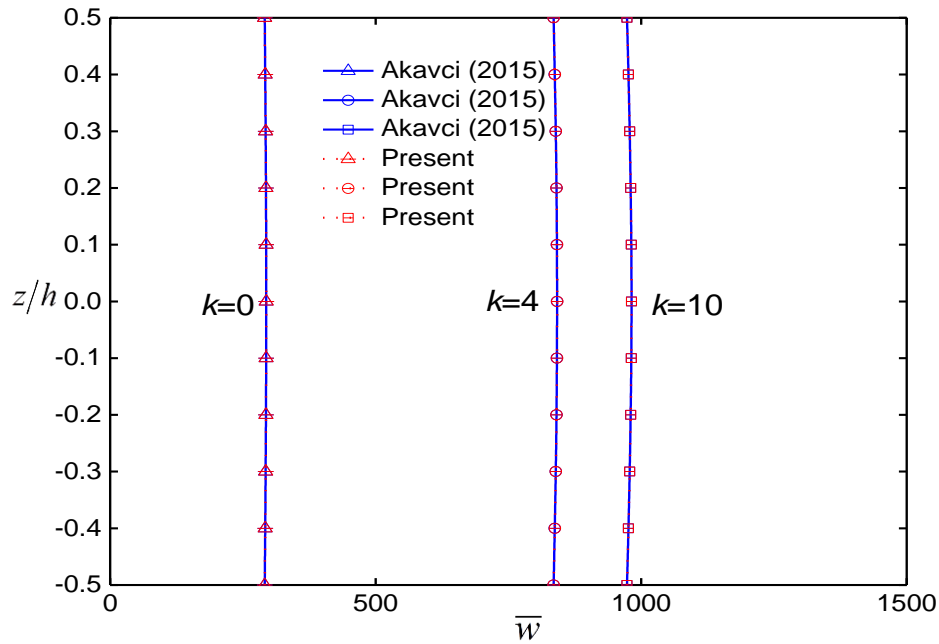


Figure V.2 : Variation de la flèche non-dimensionnelle \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).

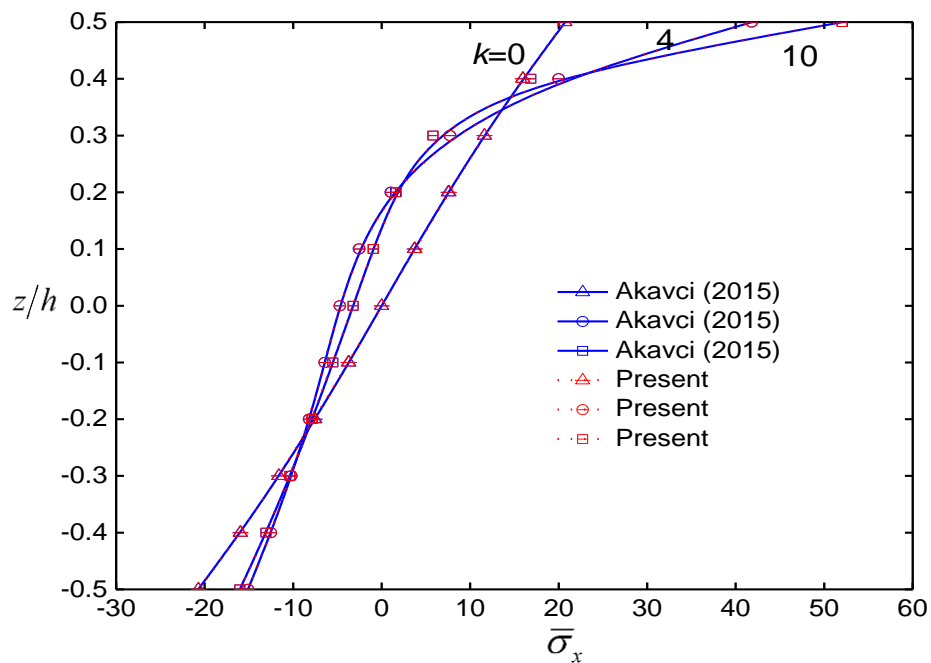


Figure V.3 : Variation de la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).

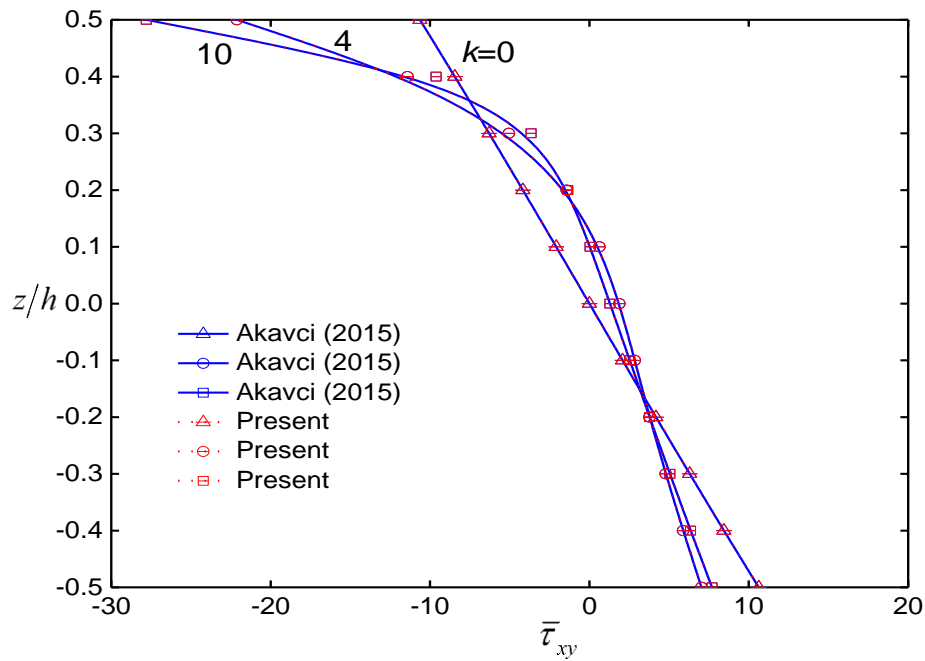


Figure V.4 : Variation de la contrainte tangentielle non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).

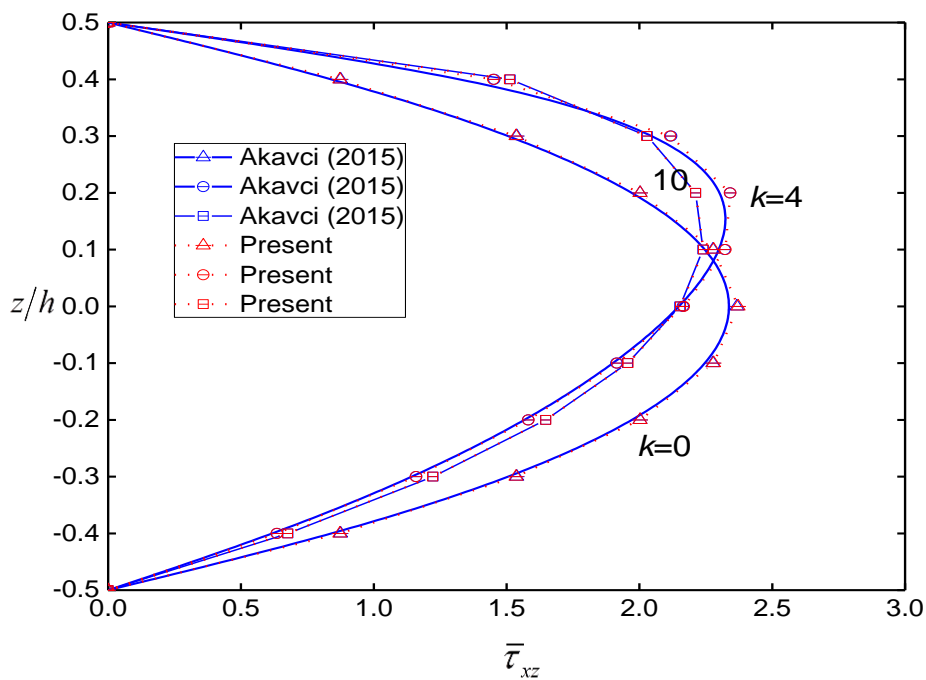


Figure V.5 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h=10$).

V.2.1.2. Plaque exponentiellement graduée (Plaque E-FGM)

Dans cette section, la fonction exponentielle utilisée pour définir les propriétés du matériau de la plaque EGM est donnée dans l'équation (IV.2). Les contraintes et les déplacements non-dimensionnels de la plaque E-FGM sont comparés aux résultats de différentes théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT pour différentes charges.

Les déplacements et les contraintes non-dimensionnels sont donnés dans les tableaux V.4-V.6 pour différentes valeurs du rapport d'aspect b/a , du rapport d'épaisseur a/h et de la valeur exponentielle p .

Le tableau V.4 montre la flèche maximale non-dimensionnelle \bar{w} des plaques E-FGM épaisses. Les résultats calculés sont comparés aux théories sinusoïdale quasi-3D et les solutions de l'élasticité 3D de Zenkour (2007), modèles trigonométriques 2D et quasi-3D de Mantari et Soares (2013) et aux théories de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D d'Akavci et Tanrikulu. (2015). Les modèles présentés et d'autres modèles quasi-3D introduisant l'influence de l'épaisseur, les résultats sont proches les uns des autres. Pendant ce temps, les HSDT 2D qui n'introduisent pas l'influence de l'étirement de l'épaisseur surestiment les résultats. On constate ainsi que la prise en compte de la déformation normale diminue la flèche maximale \bar{w} de la plaque. On peut conclure que l'introduction de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque rend la plaque FGM plus rigide et conduit à une réduction de la flèche totale maximale \bar{w} .

Dans les tableaux V.5 et V.6, les contraintes non-dimensionnelles calculées sont comparées aux théories hyperboliques quasi-3D et 2D d'Akavci et Tanrikulu (2015) et aux théories trigonométriques 2D et quasi-3D de Mantari et Soares (2013). L'examen des tableaux montre clairement que les résultats actuels sont en excellent accord avec les solutions quasi-3D de d'Akavci et Tanrikulu (2015) et Mantari et Soares (2013). Comme cela est démontré dans le cas des flèches non-dimensionnelles, l'introduction de l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque réduit les contraintes axiales et les contraintes de cisaillement transversal non-dimensionnelles.

Tableau V.4: La flèche maximale non-dimensionnelle $\bar{w}(0) = \frac{10h^3 E_0}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h=2$).

b/a	Théorie	ε_z	p					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
1	Zenkour (2007)	$\neq 0$	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3726	0.2890
	Zenkour (2007)	$= 0$	0.5730	0.5180	0.4678	0.4221	0.3611	0.2771
	Mantari et Soares (2013)	$\neq 0$	0.5778	0.5224	0.4717	0.4256	0.3648	0.2793
	Mantari et Soares (2013)	$= 0$	0.6362	0.5751	0.5194	0.4687	0.4017	0.3079
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.6351	0.5741	0.5185	0.4679	0.4004	0.3075
	Présente	$= 0$	0.6355	0.5745	0.5189	0.4683	0.4007	0.3077
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.5750	0.5198	0.4694	0.4236	0.3624	0.2780
	Présente	$\neq 0$	0.5758	0.5205	0.4701	0.4242	0.3629	0.2784
2	Zenkour (2007)	$\neq 0$	1.1944	1.0859	0.9864	0.8952	0.7726	0.6017
	Zenkour (2007)	$= 0$	1.1879	1.0739	0.9700	0.8754	0.7493	0.5757
	Mantari et Soares (2013)	$\neq 0$	1.1940	1.0794	0.9750	0.8799	0.7537	0.5786
	Mantari et Soares (2013)	$= 0$	1.2776	1.1553	1.0441	0.9430	0.8092	0.6237
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	1.2763	1.1541	1.0431	0.9422	0.8079	0.6234
	Présente	$= 0$	1.2768	1.1546	1.0435	0.9426	0.8082	0.6236
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	1.1938	1.0765	0.9723	0.8775	0.7511	0.5771
	Présente	$\neq 0$	1.1917	1.0774	0.9731	0.8782	0.7517	0.5775
3	Zenkour (2007)	$\neq 0$	1.4429	1.3116	1.1912	1.0811	0.9333	0.7275
	Zenkour (2007)	$= 0$	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9056	0.6961
	Mantari et Soares (2013)	$\neq 0$	1.4421	1.3037	1.1776	1.0627	0.9104	0.6992
	Mantari et Soares (2013)	$= 0$	1.5340	1.3873	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	1.5327	1.3861	1.2530	1.1320	0.9712	0.7503
	Présente	$= 0$	1.5332	1.3866	1.2534	1.1324	0.9715	0.7504
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	1.4386	1.3005	1.1748	1.0602	0.9076	0.6976
	Présente	$\neq 0$	1.4396	1.3015	1.1756	1.0610	0.9082	0.6981

Tableau V.5: La contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{a^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h=10$).

b/a	Théorie	ε_z	p								
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5	2	2.5	3
1	Mantari (2013)	$\neq 0$	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460	0.4065	0.4775	0.5603
	Mantari (2013)	$= 0$	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264	0.3835	0.4502	0.5278
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.2063	0.2205	0.2356	0.2516	0.2776	0.3266	0.3838	0.4504	0.5281
	Présente	$= 0$	0.2063	0.2205	0.2355	0.2516	0.2775	0.3265	0.3837	0.4504	0.5279
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.2142	0.2285	0.2438	0.2601	0.2866	0.3370	0.3964	0.4664	0.5485
	Présente	$\neq 0$	0.2137	0.2280	0.2433	0.2595	0.2860	0.3363	0.3957	0.4657	0.5478
2	Mantari (2013)	$\neq 0$	0.4552	0.4867	0.5200	0.5554	0.6126	0.7201	0.8449	0.9898	1.1580
	Mantari (2013)	$= 0$	0.4350	0.4649	0.4966	0.5303	0.5850	0.6881	0.8085	0.9490	1.1125
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.4351	0.4650	0.4968	0.5305	0.5852	0.6884	0.8088	0.9493	1.1129
	Présente	$= 0$	0.4351	0.4650	0.4967	0.5305	0.5851	0.6883	0.8087	0.9492	1.1128
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.4466	0.4773	0.5098	0.5443	0.6002	0.7058	0.8289	0.9725	1.1397
	Présente	$\neq 0$	0.4459	0.4765	0.5090	0.5435	0.5993	0.7048	0.8278	0.9728	1.1388
3	Mantari (2013)	$\neq 0$	0.5514	0.5896	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730	1.0240	1.1990	1.4017
	Mantari (2013)	$= 0$	0.5288	0.5651	0.6037	0.6447	0.7112	0.8365	0.9828	1.1536	1.3523
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.5290	0.5653	0.6039	0.6449	0.7114	0.8368	0.9832	1.1540	1.3528
	Présente	$= 0$	0.5289	0.5652	0.6038	0.6449	0.7113	0.8367	0.9831	1.1538	1.3527
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.5418	0.5791	0.6187	0.6608	0.7289	0.8570	1.0061	1.1797	1.3813
	Présente	$\neq 0$	0.5410	0.5783	0.6179	0.6599	0.7279	0.8559	1.0050	1.1786	1.3803

Tableau V.6: La contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle

$$\bar{\tau}_{xz}(0) = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) \text{ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale } (a/h=10).$$

b/a	Théorie	ε_z	p								
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5	2	2.5	3
1	Mantari (2013)	$\neq 0$	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344	0.2263	0.2162	0.2045
	Mantari (2013)	$= 0$	0.2380	0.2376	0.2368	0.2356	0.2330	0.2268	0.2185	0.2094	0.1985
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.2434	0.2430	0.2422	0.2410	0.2385	0.2324	0.2242	0.2140	0.2023
	Présente	$= 0$	0.2416	0.2412	0.2404	0.2392	0.2366	0.2305	0.2222	0.2121	0.2003
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.2367	0.2364	0.2359	0.2353	0.2338	0.2300	0.2249	0.2182	0.2102
	Présente	$\neq 0$	0.2371	0.2369	0.2364	0.2357	0.2342	0.2304	0.2252	0.2186	0.2105
2	Mantari (2013)	$\neq 0$	0.3927	0.3921	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752	0.3621	0.3460	0.3273
	Mantari (2013)	$= 0$	0.3810	0.3803	0.3790	0.3770	0.3730	0.3630	0.3497	0.3344	0.3165
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.3896	0.3889	0.3877	0.3857	0.3817	0.3719	0.3588	0.3425	0.3237
	Présente	$= 0$	0.3867	0.3860	0.3847	0.3828	0.3787	0.3689	0.3557	0.3394	0.3206
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.3790	0.3787	0.3779	0.3768	0.3744	0.3684	0.3602	0.3496	0.3368
	Présente	$\neq 0$	0.3797	0.3793	0.3786	0.3774	0.3750	0.3691	0.3608	0.3501	0.3373
3	Mantari (2013)	$\neq 0$	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4221	0.4074	0.3893	0.3683
	Mantari (2013)	$= 0$	0.4286	0.4279	0.4264	0.4242	0.4196	0.4084	0.3934	0.3761	0.3558
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.4383	0.4376	0.4361	0.4340	0.4294	0.4185	0.4036	0.3854	0.3642
	Présente	$= 0$	0.4350	0.4343	0.4328	0.4307	0.4261	0.4151	0.4002	0.3819	0.3607
	Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.4265	0.4261	0.4252	0.4239	0.4212	0.4146	0.4053	0.3934	0.3789
	Présente	$\neq 0$	0.4273	0.4268	0.4260	0.4247	0.4220	0.4153	0.4059	0.3940	0.3795

Les tableaux V.4-V.6 montrent également que la flèche maximale \bar{w} et la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ diminuent et la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ augmente avec l'augmentation de l'exposant p .

Les figures V6.-V.10 présentent les variations des déplacements et des contraintes non-dimensionnels d'une plaque EGM soumise à une charge sinusoïdale pour différents rapports E_0/E_1 (où: $E_1 = E(h)$ et $E_0 = E(0)$). On peut voir à partir de ces résultats que les déplacements non-dimensionnels augmentent avec l'augmentation de rapport E_0/E_1 . De plus, on peut en déduire que les rapports E_0/E_1 affectent considérablement les contraintes non-dimensionnelles.

Sur les figures V6.-V.10, les composantes non-dimensionnelles des déplacements et des contraintes sont :

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \frac{G_1}{hq_0} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{w}(z) = \frac{G_1}{hq_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_x(z) = \frac{\sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)}{q_0}, \\ \bar{\tau}_{xy}(z) &= \frac{\tau_{xy}(0,0,z)}{q_0}, \quad \bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{\tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right)}{q_0} \end{aligned} \quad (V.3)$$

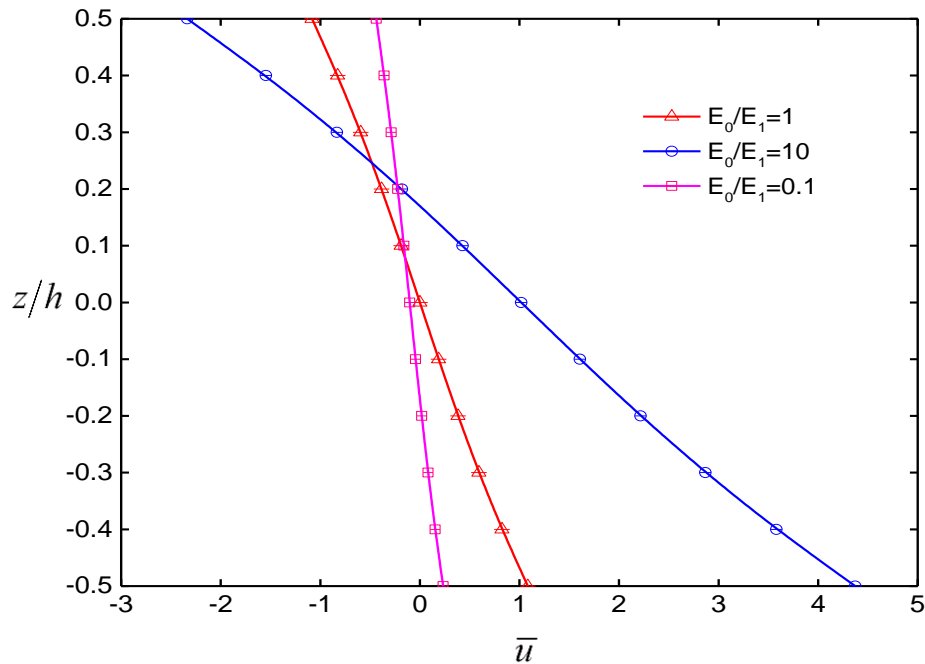


Figure V.6 : Variation du déplacement axial non-dimensionnel \bar{u} à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 .

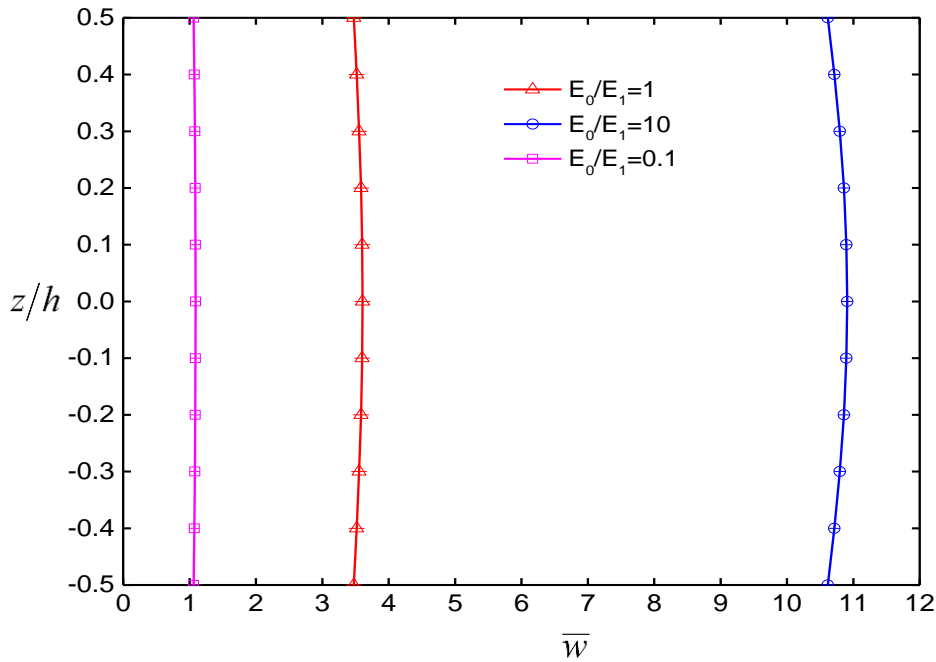


Figure V.7 : Variation de la flèche non-dimensionnelle \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 .

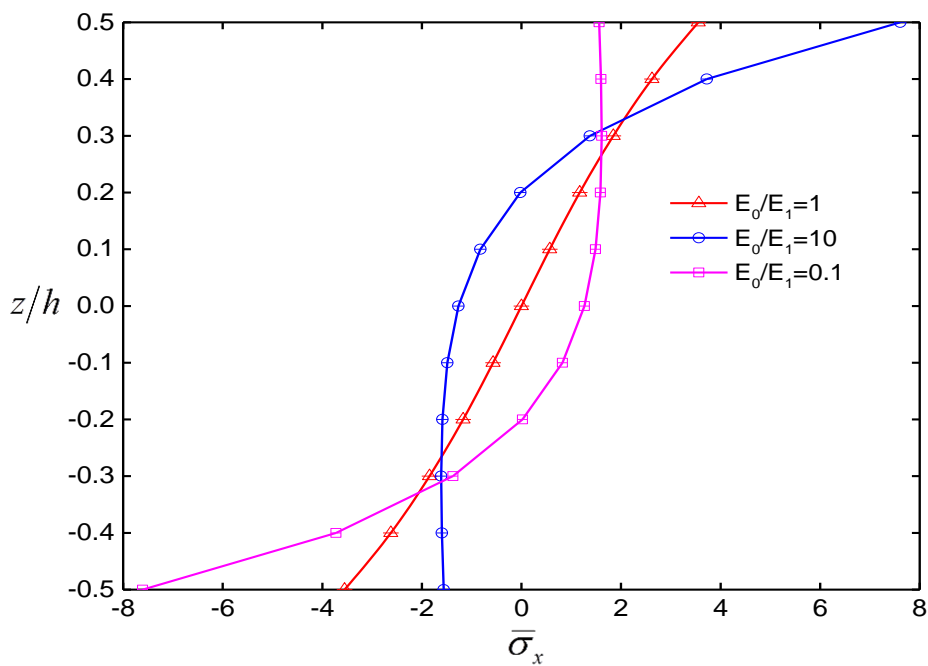


Figure V.8 : Variation de la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 .

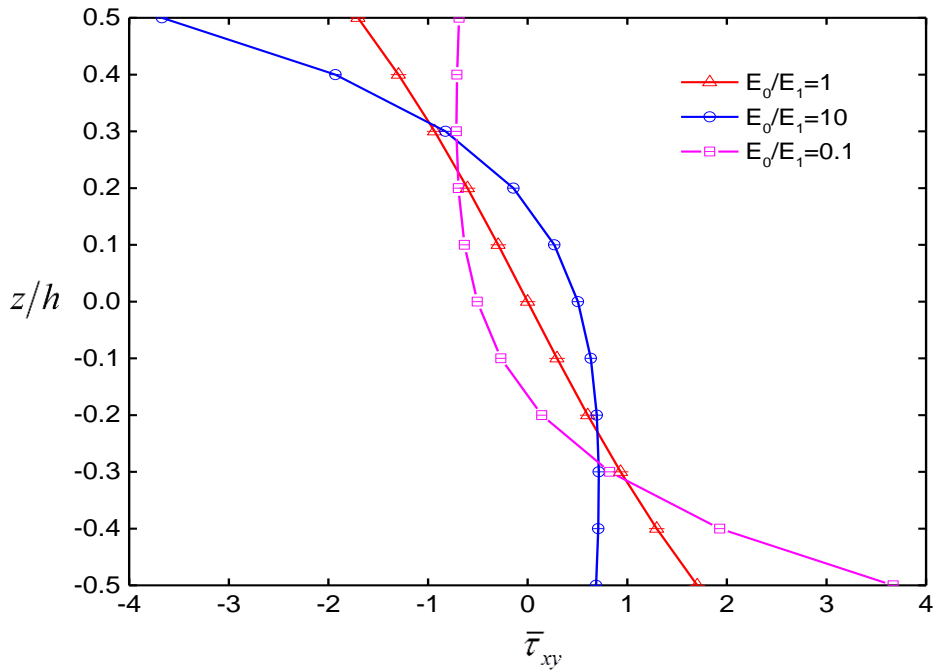


Figure V.9 : Variation de la contrainte tangentielle non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 .

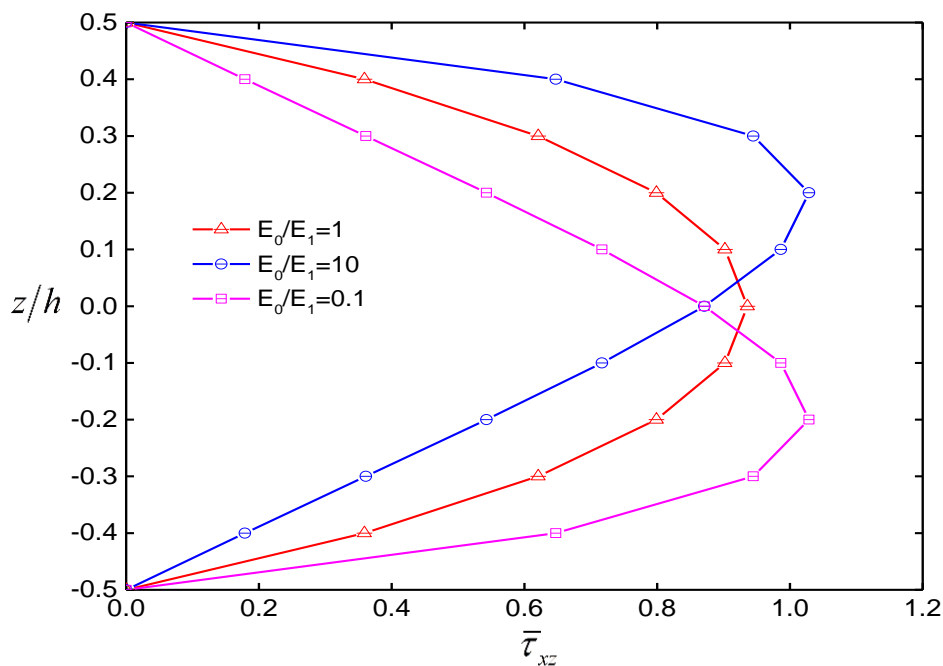


Figure V.10 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque EGM carrée ($a/h=4$) pour différentes valeurs du rapport E_0/E_1 .

Dans le tableau V.7, nous avons présentés les valeurs de la flèche maximale \bar{w} et les contraintes axiales non-dimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ des plaques EGM pour différentes valeurs des rapports E_0/E_1 et le rapport géométrique de la plaque ($h/a = 0.2, 0.3$). Les résultats calculés sont comparés avec la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments limites (BEM) de Vaghefi et al (2010), la théorie exacte de l'élasticité 3D de Zhang et al (2014) et la théorie hyperbolique quasi-3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). On peut voir dans ce tableau que les résultats sont en accord étroit.

Tableau V.7: La flèche maximale non-dimensionnelle $\bar{w}(0) = G(h)w/hq_0$ et la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x(0) = \sigma_x(0)/q_0$ pour des plaques en EGM soumise à une charge uniformément répartie.

h/a	Quantité	Théorie	E_0/E_1				
			0.1	0.5	1	2	10
0.2	\bar{w}	BEM (Vaghefi et al., 2010)	4.0916	8.9751	12.5990	17.6640	39.0600
		FEM (Vaghefi et al., 2010)	4.1215	9.0047	12.6130	17.7110	39.1550
		Akavci et Tanrikulu (2015): $\varepsilon_z \neq 0$	3.8333	8.8724	12.5970	17.7440	38.3330
		Présente: $\varepsilon_z \neq 0$	3.8345	8.8756	12.6025	17.7511	38.3451
	$\bar{\sigma}_x$	BEM (Vaghefi et al., 2010)	-15.356	-9.2902	-7.4462	-5.9410	-3.4665
		FEM (Vaghefi et al., 2010)	-15.403	-9.2995	-7.4588	-5.9591	-3.4805
		Akavci et Tanrikulu (2015): $\varepsilon_z \neq 0$	-16.3220	-9.6545	-7.6944	-6.1109	-3.4530
		Présente: $\varepsilon_z \neq 0$	-16.2898	-9.6313	-7.6770	-6.0994	-3.4504
0.3	\bar{w}	BEM (Vaghefi et al., 2010)	0.9707	2.1378	2.9853	4.1208	8.7134
		FEM (Vaghefi et al., 2010)	0.9732	2.1407	2.9792	4.1333	8.7293
		Zhang et al. (2014)	0.9735	2.1405	2.9795	4.1332	8.7343
		Akavci et Tanrikulu (2015): $\varepsilon_z \neq 0$	0.8923	2.0834	2.9602	4.1669	8.9229
		Présente: $\varepsilon_z \neq 0$	0.8925	2.0843	2.9615	4.1685	8.9253
	$\bar{\sigma}_x$	BEM (Vaghefi et al., 2010)	-7.223	-4.3084	-3.4496	-2.7499	-1.6449
		FEM (Vaghefi et al., 2010)	-7.2639	-4.3378	-3.4681	-2.7673	-1.6499
		Zhang et al. (2014)	-7.1493	-4.3227	-3.4710	-2.7853	-1.6759
		Akavci and Tanrikulu (2015): $\varepsilon_z \neq 0$	-7.6576	-4.5062	-3.5748	-2.8235	-1.5731
		Présente: $\varepsilon_z \neq 0$	-7.6386	-4.4941	-3.5659	-2.8175	-1.5715

V.2.2. Analyse de la vibration libre

Dans cette section, les résultats numériques sont étudiés et discutés afin de vérifier l'exactitude du présent modèle proposé pour prédire les réponses de vibration libre des plaques FG simplement appuyées.

Dans le premier exemple, des plaques carrées isotropes sont examinées pour vérifier l'efficacité de la nouvelle théorie développée. Selon les équations. (IV.1) - (IV.3), lorsque l'indice matériel p s'approche de zéro ou de l'infini, la plaque est isotrope en céramique ou en métal, respectivement.

Dans le tableau V.8, les huit premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\bar{\omega}$ sont calculées et comparées aux résultats donnés par les théories quasi-3D de Jha et al. (2013), Hebali et al. (2014), la solution exacte 3D de Srinivas et al. (1970), les théories de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D par Akavci et Tanrikulu (2015) et la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) de Whitney et Pagano (1970). Le tableau V.8 montre que les résultats calculés par la présente théorie sont en excellent accord avec ceux obtenus par les autres théories quasi-3D de Jha et al. (2013), Hebali et al. (2014) et Akavci et Tanrikulu (2015) pour tous les modes de vibration.

Tableau V.8: Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque isotrope carrée ($a/h=10$).

Théorie	ε_z	Mode (m, n)							
		(1.1)	(1.2)	(2.2)	(1.3)	(2.3)	(3.3)	(2.4)	(1.5)
Jha et al. (2013)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4172	0.5240	0.6892	0.7515	0.9275
Hebali et al. (2014)	$\neq 0$	0.0933	0.2228	0.3422	0.4173	0.5240	0.6890	0.7512	0.9268
Srinivas et al. (1970)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4171	0.5239	0.6889	0.7511	0.9268
Whitney et Pagano (1970)	$= 0$	0.0930	0.2220	0.3406	0.4149	0.5206	0.6834	0.7447	0.9174
Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.0930	0.2219	0.3407	0.4151	0.5209	0.6841	0.7455	0.9189
Présente	$= 0$	0.0930	0.2220	0.3406	0.4151	0.5208	0.6840	0.7455	0.9188
Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.0932	0.2227	0.3424	0.4176	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
Présente	$\neq 0$	0.0932	0.2227	0.3423	0.4175	0.5245	0.6899	0.7522	0.9285

Les deux exemples suivants sont établis pour des plaques FGM carrées en Al/Al₂O₃.

Le tableau V.9 présente les valeurs des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque FG carrée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et le rapport d'épaisseur a/h . Les résultats obtenues par la présente théorie sont comparés avec les résultats de la théorie FSDT de Zhu et Liew (2011), la théorie de la déformation du cisaillement 2D de Benachour et al (2011) et les théories quasi-3D de Hosseini et al (2011), Matsunaga (2008), Sheikholeslami et Saidi (2013), Belabed et al (2014) ainsi que Akavci et Tanrikulu (2015). Encore une fois, on constate que les résultats calculés sont exceptionnellement bien corrélés avec les autres résultats quasi-3D, même pour des plaques très épaisses. Le tableau montre que les fréquences fondamentales augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel k .

Dans le Tableau V.10, pour vérifier les modes de vibration d'ordre supérieur pour les plaques FG, les trois premières fréquences des plaques carrées Al/Al₂O₃ FG sont calculées et comparées aux HSDT 2D de Benachour et al. (2011) et quasi-3D de Matsunaga (2008), Belabed et al (2014) et Akavci et Tanrikulu (2015). Comme le montre le tableau, la théorie proposée est en bon accord avec celles présentées par les autres modèles quasi-3D de Matsunaga (2008), Belabed et al (2014) et Akavci et Tanrikulu (2015), notamment pour les modes de vibration les plus élevés. On observe à partir le tableau que lorsque l'influence de la déformation normale est négligée, les fréquences propres des plaques FG sont plus faibles.

Tableau V.9: Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c} \text{ d'une plaque FGM carrée en Al/Al}_2\text{O}_3.$$

a / h	Théorie	ε_z	k				
			0	0.5	1	4	10
2	Zhu et Liew (2011)	= 0	0.9265	0.8060	0.7331	0.6112	0.5640
	Matsunaga (2008)	≠ 0	0.9400	0.8232	0.7477	0.5997	0.5460
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠ 0	0.9400	0.8223	0.7475	0.5995	0.5461
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.9414	0.8248	0.7516	0.6056	0.5495
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.9303	0.8115	0.7360	0.5921	0.5413
	Présente	= 0	0.9301	0.8144	0.7416	0.5979	0.5436
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.9440	0.8269	0.7536	0.6063	0.5506
	Présente	≠ 0	0.9434	0.8287	0.7574	0.6108	0.5522
5	Zhu et Liew (2011)	= 0	0.2111	0.1804	0.1629	0.1395	0.1323
	Benachour et al. (2011)	= 0	0.2112	0.1806	0.1628	0.1375	0.1300
	Hosseini et al. (2011)	= 0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	Matsunaga (2008)	≠ 0	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠ 0	0.2121	0.1818	0.1640	0.1382	0.1306
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
	Présente	= 0	0.2113	0.1808	0.1632	0.1379	0.1301
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.2124	0.1827	0.1661	0.1410	0.1319
	Présente	≠ 0	0.2123	0.1827	0.1661	0.1411	0.1319
10	Zhu et Liew (2011)	= 0	0.0576	0.0489	0.0441	0.0381	0.0365
	Benachour et al. (2011)	= 0	0.0576	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363
	Hosseini et al. (2011)	= 0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Matsunaga (2008)	≠ 0	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠ 0	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0380	0.0363
	Présente	= 0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	Présente	≠ 0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
20	Benachour et al. (2011)	= 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Hosseini et al. (2011)	= 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠ 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Présente	= 0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	Présente	≠ 0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095

Tableau V.10: Comparaison des trois premières fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / G_c}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ ($a/h=10$).

Mode (m, n)	Théorie	ε_z	k				
			0	0.5	1	4	10
(1, 1)	Benachour et al. (2011)	= 0	5.7690	4.9000	4.4160	3.8040	3.6350
	Matsunaga (2008)	≠ 0	5.7777	4.9170	4.4270	3.8110	3.6420
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	5.7800	4.9400	4.4900	3.8900	3.6800
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	5.7695	4.9015	4.4193	3.8064	3.6365
	Présente	= 0	5.7695	4.9016	4.4195	3.8070	3.6368
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	5.7807	4.9410	4.4907	3.8934	3.6827
	Présente	≠ 0	5.7794	4.9401	4.4900	3.8931	3.6826
(1, 2)	Benachour et al. (2011)	= 0	13.7600	11.7310	10.5760	9.0120	8.5570
	Matsunaga (2008)	≠ 0	13.8100	11.8000	10.6300	9.0450	8.5880
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	13.8000	11.8400	10.7700	9.2300	8.6800
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	13.7650	11.7390	10.5900	9.0224	8.5613
	Présente	= 0	13.7653	11.7407	10.5934	9.0274	8.5637
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	13.8170	11.8510	10.7730	9.2314	8.6768
	Présente	≠ 0	13.8132	11.8496	10.7728	9.2337	8.6778
(2, 2)	Benachour et al. (2011)	= 0	21.1250	18.0550	16.2820	13.7560	12.9950
	Matsunaga (2008)	≠ 0	21.2100	18.1900	16.4000	13.8300	13.0600
	Belabed et al. (2014)	≠ 0	21.2100	18.2500	16.5900	14.0900	13.1800
	Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	21.1270	18.0730	16.3130	13.7770	13.0020
	Présente	= 0	21.1262	18.0784	16.3235	13.7922	13.0096
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	21.2370	18.2680	16.6090	14.0990	13.1860
	Présente	≠ 0	21.2306	18.2676	16.6128	14.1090	13.1898

Le tableau V.11 représente les fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées en Al/ZrO₂. Afin de comparer les résultats, nous utilisons le schéma de Mori-Tanaka pour décrire les propriétés matérielles de la plaque FG qui est donnée dans l'équation (IV.3). Les résultats de la théorie actuelle sont comparés aux résultats de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé 2D de Benachour et al. (2011) et les théories de déformation de cisaillement quasi-3D de Neves et al. (2012), Belabed et al. (2014), Alijani et Amabili (2014), Akavci et Tanrikulu (2015), et la solution exacte tridimensionnelle 3D de Vel et Batra (2004). Le tableau V.11 montre que les résultats de la théorie quasi-3D et 2D actuelle sont en bon accord avec ceux d'autres théories quasi-3D. La petite différence entre les résultats actuels de la théorie de la déformation de cisaillement 2D et quasi-3D est due à la négligence de l'effet d'étirement de l'épaisseur.

Tableau V.11: Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles

$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M / E_M}$ d'une plaque FGM carrée en Al/ ZrO₂ (Schéma de Mori-Tanaka).

Théorie	ε_z	$k = 0$		$k = 1$			$a/h = 5$		
		$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
Benachour et al. (2011)	= 0	0.4622	0.0576	0.2270	0.0618	0.0158	0.2249	0.2255	0.2266
Neves et al. (2012)	≠ 0			0.2193	0.0596	0.0153	0.2198	0.2212	0.2225
Belabed et al. (2014)	≠ 0	0.4659	0.0578	0.2192	0.0597	0.0153	0.2201	0.2214	0.2225
Alijani et al. (2014)	≠ 0	0.4661	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Vel et al. (2004)	≠ 0	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Akavci et Tanrikulu (2015)	= 0	0.4624	0.0577	0.2169	0.0591	0.0152	0.2177	0.2192	0.2206
Présente	= 0	0.4623	0.0577	0.2172	0.0592	0.0152	0.2181	0.2195	0.2208
Akavci et Tanrikulu (2015)	≠ 0	0.4667	0.0578	0.2193	0.0597	0.0153	0.2203	0.2216	0.2226
Présente	≠ 0	0.4665	0.0578	0.2195	0.0597	0.0153	0.2204	0.2217	0.2227

La variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport a/h et le rapport d'aspect b/a pour différentes valeurs de l'indice k de la plaque FGM simplement appuyée est représentée dans les figures V.11 et V.12. La composante non-dimensionnelle de la fréquence fondamentale pour les figures V.11 et V.12 est :

$$\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

La figure V.11 présente la variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM carrées en fonction du rapport d'épaisseur a/h pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance k . On remarque que la fréquence non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM carrées augmente avec l'augmentation du rapport a/h et diminue avec l'augmentation de l'indice matériel k .

La figure V.12 montre la variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM ($a/h=10$) par rapport au rapport d'aspect b/a pour différentes valeurs de l'indice k . On peut observer que la fréquence naturelle fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM diminue avec l'augmentation du rapport b/a et augmente avec la diminution des valeurs de l'indice de la loi de puissance k .

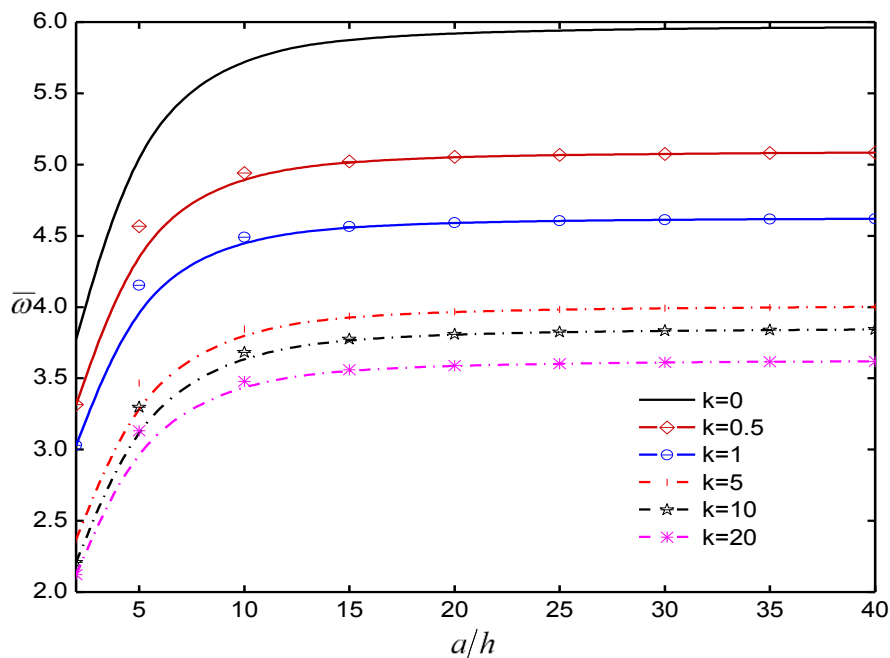


Figure V.11: L'effet du rapport largeur/épaisseur a/h et l'indice de la loi de puissance k sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM carrées.

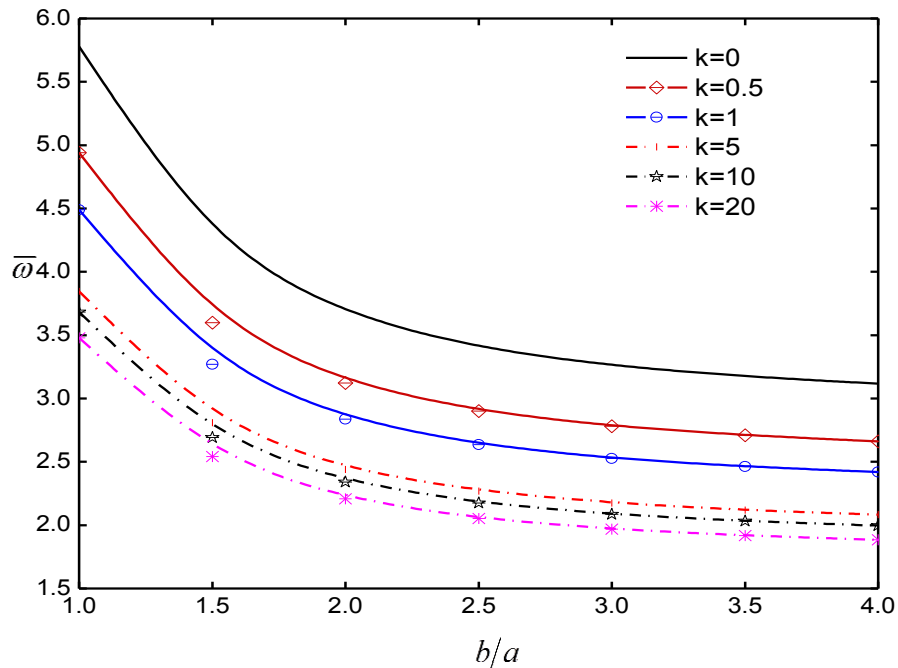


Figure V.12: L'effet du rapport b/a et l'indice de la loi de puissance k sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques FGM ($a/h=10$).

V.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée quasi-3D et 2D. Trois types de plaques FG sont considérés selon leurs distributions à travers l'épaisseur: Loi de puissance (P-FGM), modèle exponentiel (E-FGM) et Mori-Tanaka.

Des solutions analytiques sont obtenues pour des plaques FG afin d'étudier les déplacements, les contraintes et les fréquences propres pour différentes valeurs de l'indice matériel k , le rapport d'aspect géométrique b/a et le rapport largeur/épaisseur a/h . L'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque est également analysé et discuté.

La présente théorie donne une forte similitude avec les autres théories de déformation de cisaillement 3D, quasi-3D et 2D.

On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour prédire le comportement mécanique des plaques FGM.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail de cette thèse présente l'étude de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D. La cinématique est développée en considérant d'autres hypothèses simplificatrices pour les HSDT existants, avec l'utilisation d'un terme intégral indéterminé conduisant à seulement cinq inconnues. Les équations du mouvement ont été déterminées par le principe d'Hamilton. Des séries doubles de Fourier ont été employées pour résoudre les équations aux dérivées partielles. La précision de la théorie proposée a été démontrée par les résultats calculés par le modèle actuel par rapport aux résultats des autres théories.

Les résultats déterminés par la théorie proposée peuvent être résumés comme suit:

- ✓ A travers toutes les études comparatives, on peut dire que la théorie proposée montre une bonne concordance avec celle des résultats d'autres théories de déformation de cisaillement 2D et quasi-3D (HSDT). De plus, les résultats prévus par la théorie proposée sont en excellent accord avec les solutions d'élasticité 3D, même dans le cas de plaques très épaisses.
- ✓ Les résultats montrent que les théories de déformation de cisaillement 2D et quasi-3D ont des résultats presque identiques pour les plaques minces. Pour les plaques épaisses et modérément épaisses, cependant, il a été observé à partir des études comparatives que les théories quasi-3D qui tiennent compte des effets d'étirement, peuvent prédire le comportement en flexion et en dynamique avec plus de précision que les autres théories HSDT. Il est donc approprié de conclure que l'influence de l'étirement de l'épaisseur sur le comportement statique et dynamique des plaques FG est tout aussi considérable que l'influence des contraintes de cisaillement transversal et doit être prise en compte.
- ✓ La HSDT quasi-3D proposée contient cinq inconnues, mais donne des résultats comparables à ceux prévus par les théories quasi-3D existantes qui comportent un plus grand nombre d'inconnues (p. ex. les théories quasi-3D de Neves et al (2012ab) avec neuf inconnues et Akavci et Tanrikulu (2015) avec six inconnues).

- ✓ Bien que les composantes des contraintes transversales puissent être calculées à partir des équations constitutives, ces contraintes peuvent ne pas satisfaire aux conditions limites de contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Ainsi, les composantes des contraintes transversales peuvent être déterminées en utilisant des équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité 3D pour satisfaire les conditions aux limites de contrainte.
- ✓ Les fréquences fondamentales de la plaque diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel. Bien que l'augmentation de la valeur de l'indice matière entraîne une diminution de la fréquence naturelle, l'influence de la valeur de l'indice matière supérieure à 5 est négligeable.
- ✓ La petite différence entre les résultats 2D et quasi-3D HSDT proposés est due à la négligence de l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Si les effets des déformations normales sont négligés, les fréquences fondamentales des plaques FG sont plus faibles.
- ✓ L'influence de l'étirement de l'épaisseur est plus prononcée pour les plaques épaisses et doit être prise en compte dans la modélisation.

Finalement, la recherche dans le domaine du développement théorique des plaques en FGM est vaste et nous avons fait qu'effloré une partie de ces aspects dans cette thèse, et puisque la porte de la recherche est grande ouverte sur le développement des théories des plaques ou des poutres.

En perspective, nous pouvons compléter cette étude en apportant plus d'informations sur l'étude de comportement des plaques FGM :

- Etudier différents comportements des plaques en matériaux à gradient de propriété, tel que le flambement thermique et mécanique et la vibration forcée.
- Instabilité des structures fonctionnellement graduées avec des différentes géométries.
- Prendre en considération l'influence de la variation de la température sur les propriétés du matériau et leur comportement.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane,(1993) “A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process”, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18.
- Abali BE, Völlmecke C, Woodward B, Kashtalyan M, Guz I, Müller WH.(2014) “Threedimensional elastic deformation of functionally graded isotropic plates under point loading”. *Compos Struct*; 118:367–76.
- Abdelhak, Z., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E.A. (2016), "Thermal buckling response of functionally graded sandwich plates with clamped boundary conditions", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(2), 267-291.
- Ahmed, A. (2014), “Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory”, *Int. J. Civil, Struct. Envir.*, 4(2), 59-64.
- Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2016) “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel and Composite Structures*, 20(5), 963-981.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1), 71 - 84.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel and Composite Structures*, 19(2), 369-384.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1143 – 1165.
- Akavci, S.S., Tanrikulu, A.H. (2015), “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories“, *Composites Part B*, 83, 203 – 215.
- Aldousari, S.M. (2017), “Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam”, *Applied Physics A: Materials Science and Processing*, 123(4), 296.
- Alibeigloo A. (2010)“Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates”. *Compos Struct* 2010;92(1):113–21.
- Alijani, F, Amabili, M. (2014), “Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates”, *Compos Struct*, 113, 89 – 107.
- Amale MAHI, (2012)“Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres”. *Thèse de Doctorat, Université de Blida, Algérie.*
- Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. (2009)“Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation”. *Smart Mater Struct*; 18(8):085015.

- Arani, A.J., Kolahchi, R. (2016), "Buckling analysis of embedded concrete columns armed with carbon nanotubes", *Computers and Concrete*, 17(5), 567-578.
- Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel and Composite Structures*, 18(1), 187-212.
- B. Craig ,(1989), "Limitations of Alloying to Improve the threshold for Hydrogen Stress Cracking of Steels Hydrogen Effects on Material Behavior," Moran, Wyoming, USA, pp. 955-963.
- Bao, G, Wang, L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int J Solids Struct*, 32(19), 2853 – 2871 .
- Barati, M.R., Shahverdi, H. (2016), "A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions", *Structural Engineering and Mechanics*, 60(4), 707-727.
- Barka, M., Benrahou, K.H., Bakora, A., Tounsi, A. (2016), "Thermal post-buckling behavior of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on Pasternak elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, 22(1), 91-112.
- Baseri, V., Jafari, GRS, Kolahchi, R. (2016), "Analytical solution for buckling of embedded laminated plates based on higher order shear deformation plate theory", *Steel and Composite Structures.*, 21(4), 883-919.
- Belabed Zakaria (2015), "Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes". *Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie.*,
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos.: Part B*, 60, 274-283.
- Beldjelili, Y., Tounsi, A., & Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Structures and Systems*, 18(4), 755-786.
- Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel and Composite Structures*, 18(4), 1063-1081.
- Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams", *Structural Engineering and Mechanics*, 62(6), 695 - 702.
- Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38(1), 265-275.
- Benachour, A., Daouadji Tahar, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B*, 42, 1386 – 1394.
- Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K., Tounsi, A. (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, 12(1), 9-34.

- Benbakhti, A., Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N., Tounsi, A. (2016), "A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermomechanical bending analysis of FGM sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 22(5), 975 – 999.
- Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Struct. Eng. Mech.*, (Accepted).
- Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L., Said Mansour, M. (2016), "Static analysis of the FGM plate with porosities", *Steel and Composite Structures*, 21(1), 123 – 136.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- Benveniste, Y. (1987), "A new approach to the application of Mori – Tanaka's theory in composite materials", *Mech Mater*, 6(2), 147 – 157.
- Berthelot, J. (2005). "Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures", 4ème Edition. Editions TEC et DOC.
- Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013), "A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 15, 671-703.
- Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory", *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 19(6), 601 - 614.
- Bilouei, B.S., Kolahchi, R., Bidgoli, M.R. (2016), "Buckling of concrete columns retrofitted with Nano-Fiber Reinforced Polymer (NFRP)", *Computers and Concrete*, 18(5), 1053-1063.
- Birman, V., Byrd, L.W.,(2007) "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures", *Applied Mechanics Reviews*, 60(5), 195-216.
- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A., Tounsi, A. (2017), "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams", *Smart Structures and Systems*, 19(2), 115-126.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech.*, 58(3), 397-422.
- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates", *Struct. Eng. Mech.*, 57(5), 837-859.
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, 20(2), 227 - 249.
- Bourada, F., Amara, K., Tounsi, A. (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory", *Steel and Composite Structures*, 21(6), 1287-1306.

- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409-423.
- Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2016), "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", *Structural Engineering and Mechanics*, 60(2), 313-335.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Comput. Meth.*, 11(6), 1350082.
- Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., Soave, M. (2011), "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Compos Part B*, 42(2), 123 – 133.
- Chen, A., Davalos, J.F. (2005), "A solution including skin effect for stiffness and stress field of sandwich honeycombe core", *International Journal of Solids and Structures*, 42(9-10), 2711-2739.
- Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling,(2003) "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2016), " Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 57(4), 617-639.
- Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Structures Systems*, 19(3), 289-297.
- D. Hon, and Shiraishi (2001), *Wood and cellulose chemistry*, 2nd ed. New York: Marcel Dekker.
- D.K. Jha, Tarun Kant, R.K. Singh, (2013) "A critical review of recent research on functionally graded plates" , *Compos. Struct.* 96 833–849.
- Delale, F, Erdogan, F. (1983), "The crack problem for a nonhomogeneous plane", *ASME J Appl Mech*, 50, 609 – 614.
- Draiche, K., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", *Geomechanics and Engineering*, 11(5), 671-690.
- E. Müller, C. Drašar, J. Schilz, and W.A. Kaysser,(2003) "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30.
- El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates", *Struct. Eng. Mech.*, 63(5), 585-595.
- El-Hassar, S.M., Benyoucef, S., Heireche, H., Tounsi, A. (2016), "Thermal stability analysis of solar functionally graded plates on elastic foundation using an efficient hyperbolic shear deformation theory", *Geomechanics and Engineering*, 10(3), 357-386.
- El-wazery M., El-Desouky A., J Appl.(2014) "Fabrication and Characteristics of 8YSZ/Ni Functionally Graded Materials by Applying Spark Plasma Sintering Procedure" *Sci. & Eng.* 12 313.
- Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H.,Chikh, A., AddaBedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2017), "A four variable refined n th-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomechanics and Engineering*, 13(3), 385-410.

- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, 49, 795-810.
- G. Bao., L. Wang,(1995) “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- Ghorbanpour Arani, A., Cheraghabak, A. and Kolahchi, R. (2016b), “Dynamic buckling of FGM viscoelastic nano-plates resting on orthotropic elastic medium based on sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics.*, 60(3), 489-505.
- Ghorbanpour Arani, A., Kolahchi, R., Esmailpour, M. (2016a), “Nonlinear vibration analysis of piezoelectric plates reinforced with carbon nanotubes using DQM”, *Smart Structures and Systems*, 18(4), 787-800.
- Gibson, R.F.(1994), “Principle of Composite Material Mechanics”, *McGraw-Hill*, New York (USA) .,
- Gong, X., Liu, J., Baskran, S., Voise, R.D., Young, J.S. (2000), “Surfactantassisted processing of carbon nanotube/polymer composite”, *Chemistry of Materials*, 12, 1049-1052,.
- Gunes, R, Aydin, M, Apalak, MK, Reddy, JN. (2014), “Experimental and numerical investigations of low velocity impact on functionally graded circular plates”, *Compos Part B*, 59, 21 – 32.
- H. J. Lee, S. Zhang, Y. Bar-Cohen and S. Sherrit, (2014) —“ Sensors” , 14(8), 14526.
- H. Okamura,(1991) “State of the arte of material design projects for severe service applications”, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9.
- H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel,(1990) “Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications ”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan*; 139-43.
- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Adda Bedia, E. (2015), “A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities”, *Geomechanics and Engineering*, 9(3), 361 - 372.
- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(2), 315-325.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A., Kaci, A. (2016), "A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates", *Steel and Composite Structures*, 22(3), 473-495.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J. Eng. Mech., ASCE*, 140(2), 374- 383.
- Henri Godfroid (1950), “Métallurgie pour mécaniciens: Propriétés générales des alliages, leur traitement thermique”, Paris, La Chapelle-Montligeon, Impr. de Montligeon, coll. « *Société de publications mécaniques* ».

- Hill, R.,(1995) “A self-consistent mechanics of composite materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 213-222.
- Hosseini-Hashemi, SH, Fadaee, M, Atashipour, SR. (2011), “Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed form procedure”, *Compos Struct*, 93(2), 722 – 735.
- Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three -unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, 22(2), 257-276.
- Ijiam, S.(1991), “Helical microtubules of graphitic carbon”, *Nature*, 354, 56-58,.
- J.N. Reddy, (1997), “Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis”. *CRC Press*, Boca Raton.
- J.N. Reddy,(2007) “Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells”. *CRC Press*.
- J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, (1992), “Functionally gradient ceramics by sequential slip casting”, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35.
- Jha, DK, Kant, T, Singh, RK. (2013), “Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects”, *Compos Struct*, 96, 799 – 823.
- Jones, R.M. (1999), “Mechanics of Composite Materials”, Second Edition, *Taylor & Francis*,.
- K. Kokini., Y. Takeuchi,(1990) “Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads”. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31- 36.
- Kashtalyan, M. (2004), “Three-dimensional solution for bending of functionally graded rectangular plates”, *Eur J Mech A/Solids*, 23, 853 – 864.
- Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), “A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates”, *Struct. Eng. Mech.*, (In press).
- Kieback B., Neubrand A., Riedel H.(2003) “Processing techniques for functionally graded materials”. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106.
- Kirchhoff, G.R., 1850, "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*,.
- Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), “An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 63(4), 439-446.
- Koiter, W.T. 1959, “A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells”, *Proceedings of 1st Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells*, Amsterdam, North-Holland..
- Koizumi. M,(1997) “FGM activities in Japan”, Department of Materials Chemistry. *Ryukoku University, Ohtsu 520- 21. Japan*.
- Kolahchi, R., Hosseini, H., Esmailpour, M. (2016a), "Differential cubature and quadrature-Bolotin methods for dynamic stability of embedded piezoelectric nanoplates based on visco-nonlocal-piezoelasticity theories", *Composite Structures*, 157, 174–186.

- Kolahchi, R., Moniri Bidgoli, A.M. (2016), "Size-dependent sinusoidal beam model for dynamic instability of single-walled carbon nanotubes", *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 37(2), 265–274.
- Kolahchi, R., Safari, M., Esmailpour, M. (2016b), "Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium", *Composite Structures*, 150, 255–265.
- Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H., Oskouei, A.N. (2017), "Visco-nonlocal-refined Zigzag theories for dynamic buckling of laminated nanoplates using differential cubature-Bolotin methods", *Thin-Walled Structures*, 113, 162–169.
- L. Lostec, (1997) "Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L", *Thèse de l'université de Limoges*.
- L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin and G. Villain, (2011) "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, NDT & E International, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177, March .
- L. Marin, (2005) "Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351.
- Laoufi, I., Ameer, M., Zidi, M., Adda Bedia, E.A., Bousahla, A.A. (2016), "Mechanical and hygrothermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, 20(4), 889-911.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect" *Steel and Composite Structures*, 18(2), 425 – 442.
- Liberscu L. (1967) "On the theory of anisotropic elastic shell and plates". *Int J Solids Structures*. 1967, Vol. 3, pp. 53-68.
- Lu CF, Lim CW, Chen WQ.(2009) "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations". *Mech Adv Mater Struct*; 16(8):576–84.
- M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546,.
- M. Koizumi, (1992), "Recent Progress of functionally graded materials in Japan". *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347.
- M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky,(2015) "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal MaterialsMater". *Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508.
- M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya,(1990) "Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34.
- M. Touratier, (1991), "An efficient standard plate theory", *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.
- Madani, H., Hosseini, H., Shokravi, M. (2016), "Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions", *Steel and Composite Structures*, 22(4), 889-913.

- Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Modelling*, 39(9), 2489-2508.
- Malekzadeh P, Shahpari S, Ziaee H.(2010) "Three-dimensional free vibration of thick functionally graded annular plates in thermal environment". *J Sound Vib*; 329(4):425–42.
- Malekzadeh P.(2009) "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations". *Compos Struct*; 89(3):367–73.
- Mantari JL, Soares CG.(2014) "A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates". *Acta Mech*.
- Mantari, JL, Soares, CG. (2013), "A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates", *Compos Part B*, 45(1), 268 – 281.
- Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, 82, 499 – 512.
- Matsunaga, H. (2009), "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", *Compos Struct*, 87, 344 – 357.
- Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, SR. (2017), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, (In press).
- Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 25(2), 157-175.
- Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*,18(3), 793-809.
- Mindlin RD. (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates". *J Appl Mech* ,18(1):31–8,.
- Mishina H., Inumaru Y., Kaitoku K.,(2008) "Fabrication of ZrO₂/AISI316L functionally graded materials for joint prostheses Mat". *Sci. & Eng. A* 475 141.
- Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". *Processing and Applications*.
- Mori, T, Tanaka, K. (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta Metall*, 21(5), 571 – 574.
- Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind and Structures*, 22(4), 429-454.
- Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Structures Systems*, 20(3), 369-383.
- Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, et al. (2012b), "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Struct*, 94(5), 1814 – 1825.

- Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, et al. (2012a), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Part B*, 43, 711 – 725.
- Nguyen., Viet.Tung. (2004) "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques". *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées. ParisTech, France, 2004.*
- Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", *WILEY-VCH*, 398-417.
- Orakdogan, E, Kucukarslan, S, Sofiyev, A, Omurtag, MH. (2010), "Finite element analysis of functionally graded plates for coupling effect of extension and bending", *Meccanica*, 45, 63 – 72.
- P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain,(1986) "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites", *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192.
- P.M. Naghdi,(1957) "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.
- Pantelakis, SP.G., Alexopoulos, N.D. (2008), "Assessment of the ability if conventional and advanced wrought aluminum alloys for mechanical performance in light-weight applications", *Materials & Design*, 29(1), 80-91.
- Pindera, M.-J., Arnold, S.M., Aboudi, J., Hui, D., (1994), "Use of composites in functionally graded materials", *Composites Engineering*, 4(1), 1-145.,
- R. K. Rajput,(2008), "Manufacturing technology: (manufacturing processes)", *Laxmi publications (P) limited, New Delhi, India.*
- Rahmani, O., Refaeinejad, V., Hosseini, S.A.H. (2017), "Assessment of various nonlocal higher order theories for the bending and buckling behavior of functionally graded nanobeams", *Steel Compos. Struct.*, 23(3), 339-350.
- Rao, S.S., Sunar, M.(1994), " Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and controll of flexible structures: a survey", *Applied Mechanics Reviews*, 47(4), 113-123.,
- Rayleigh, L.,(1945) "Theory of sound": *Dover Pub.*
- Reddy JN.(1984) "A simple higher-order theory for laminated composite plates". *J Appl Mech*; 51:745–52.
- Reddy K, Kant T.(2014) "Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates". *J Eng Mech*; 140(7):04014047.
- Reddy, J.N. (2004), "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis", *CRC Press , New York (USA).*
- Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001), "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Euro. J. Mech. A Solids*, 20(5), 841-855.
- Reissner, E., (1945),"The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, 69–77.,
- S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata,(2001) "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root," *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274.

- Sandler, J., Werner, P., Shaffer, M.S.P., Demchuk, V., Altstadt, V., Windele, A.H.,(2002) “Carbon-nanofibre reinforced polyether ether ketone) composites”, *Composites Part A*, 33(8), 1033-1039.
- Sheikholeslami, SA, Saidi, AR. (2013), “Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory”, *Comp Struct*, 106, 350 – 361.
- Shen, H.-S.,(2009) “Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells”, *New York: CRC Press, Taylor & Francis Group*.
- Srinivas, S, Joga Rao, CV, Rao, AK. (1970), “An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates”, *J Sound Vib*, 12(2), 187 – 199.
- Suresh, S., Mortensen, A. ,(1998), “Fundamentals of Functionally Graded Materials, Processing and Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal- Ceramic Composites”, *IOM Communications Ltd*, , London (UK),.
- Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T. (2014), “Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions”, *Eur. J. Mech. A/Solid.*, 47, 349-361.
- Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2015), "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 17(2), 99 - 129.
- Tamijani, AY, Kapania, RK. (2012), “Vibration analysis of curvilinearly-stiffened functionally graded plate using element free Galerkin method”, *Mech Adv Mat Struct*, 19(1), 100 – 108.
- Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK.(2014) “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates”. *Acta Mech*; 225(3):951–64.
- Timoshenko, S.,(1921) “On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars”, *Philosophical Magazine*, Vol. 41 (series 46).
- Torii S., Tanaka S., Yano, T., Watanabe, Y., J Trans.(2004) “Phenomena”, 6 189.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A, (2016)“A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech.*, Int. J., 60(4), 547-565.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Touratier M. (1990) “An efficient standard plate theory”. *Int. J. Eng. Sc.* 1991, Vol. 29, (8), pp. 901-916.
- Uflyand, Y.S.,(1948) “The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates”, 12, 287–300.
- Uymaz B, Aydogdu M.(2007) “Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions”. *J Reinf Plast Compos* ;26(18):1847–63.
- Vaghefi, R, Baradaran, GH, Koohkan, H. (2010), “Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrov – Galerkin (MLPG) method”, *Eng Anal Bound Elem*, 34, 564 – 573.

- Vel, S.S. et Batra, R.C.,(2004) “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 703-730.
- Wang, Q., Wuek, S., Varadan, V., (2007), “Torsional buckling of carbon nanotubes”, *Physics Letters A*, 367, 135-139,
- Wang, X., Cai, H. , (2006), “Effects of initial stress on non-coaxial resonance of multi-wallcarbon nanotubes”, *Acta Materialia*, 54, 2067-2074.
- Wen PH, Sladek J, Sladek V.(2011) “Three-dimensional analysis of functionally graded plates”. *Int J Numer Methods Eng*; 87(10):923–42.
- Whitney J.M. (1973) “Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads”. *J. Applied Mechanics*. 1973, Vol. 40, pp. 302-304.
- Wong, E.W., Sheehan, P.E., Lieber, C.M., (1997), “Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes”, *Science*, 277, 1971-1975.
- Woodward B, Kashtalyan M. (2011)“Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates”. *Eur J Mech A Solids* ; 30(5):705–18.
- X. Jin, L. Wu, L. Guo, H. Yu, and Y. Sun,(2009) “Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO₂/NiCr functionally graded materials,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76(12), pp.1800-1810.
- Xiang, S., Wang, K., Ai, Y., Sha, Y. and Shi, H. (2009), “Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories”, *Compos. Struct.*, 91(1), 31-37..
- Xiong H., Kawasaki A., Kang Y., Watanabe R (2005a) . “Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs”, *Surf & Coat. Technol.* 194 203.
- Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., and Watanabe, R.,(2005), “Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature,” *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.
- Xu Y, Zhou D.(2009) “Three-dimensional elasticity solution of functionally graded rectangular plates with variable thickness”. *Compos Struct*; 91(1):56–65.
- Yas MH, Tahouneh V. (2012)“3-D Free vibration analysis of thick functionally graded annular plates on Pasternak elastic foundation via differential quadrature method (DQM) ”. *Acta Mech*; 223(1):43–62.
- Yeo J, Jung Y., Choi S.,(1998) “Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting” *J Europ. Ceram. Soci.* 18 1281.
- Zafarmand, H, Kadkhodayan, M. (2015), “Three dimensional elasticity solution for static and dynamic analysis of multi-directional functionally graded thick sector plates with general boundary conditions”, *Compos Part B*, 69, 592 – 602.
- Zamanian, M., Kolahchi, R., Bidgoli, M.R. (2017), "Agglomeration effects on the buckling behaviour of embedded concrete columns reinforced with SiO₂ nano-particles", *Wind and Structures*, 24(1), 43-57.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), “A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 54(4), 693-710.

- Zenkour, AM. (2007), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”, *Arch Appl Mech*, 77(4), 197 – 214.
- Zhang, H, Jiang, J-K, Zhang, Z-C. (2014), “Three-dimensional elasticity solutions for bending of generally supported thick functionally graded plates”, *Appl Math Mech*, 35(11), 1467 – 1478.
- Zhao, X, Lee, YY, Liew, KM. (2009), “Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”, *J Sound Vib*, 319, 918 – 939.
- Zhong Z, Shang E. (2008)“Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates”. *Mech Adv Mater Struct*; 15(5):355–63.
- Zhu, P, Liew, KM. (2011), “Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method”, *Compos Struct*, 93(11), 2925 – 2944.
- Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017), “A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, (In press).
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.