

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
& TRAVAUX PUBLICS
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



THESE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & matériaux**

Soutenue par

Mme. BOUAFIA KHADIDJA

Sujet de thèse :

**INVESTIGATION SUR LE COMPORTEMENT FLEXIONNEL ET
VIBRATOIRE DES PLAQUES COMPOSITES SUR FONDATION
ELASTIQUE**

Soutenu le : 06 / 06 / 2022, devant le Jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Professeur UDL SBA	Président
BOURADA Mohamed	Professeur UDL SBA	Directeur de la thèse
BENYOUCEF Samir	Professeur UDL SBA	Examinateur
ATTIA Amina	MCA U d'Ain Temouchent	Examinatrice
BELABED Zakaria	MCA C U de Naama	Examinateur
ABDELBARI Salima	MCA U d'Ain Temouchent	Examinatrice

Année universitaire : 2021-2022

A decorative border with a repeating floral motif surrounds the text. The border is composed of small, stylized flowers and leaves arranged in a continuous line.

Dédicace

A ma mère mon amour sacré

A ma fille mon étoile de repère

A Bekri Amina

Au Dr Khetib Mounia

Remerciement :

Je n'ai jamais pensé que juste une simple appelle téléphonique en un jour très normal entre deux personnes, dont la première est une amie et la seconde, je ne pensais pas qu'il se souvenait encore de moi, et qu'elle sera une raison pour mon retour et l'achèvement de mes études supérieures (Doctorat).

Ma vieille amie, que je garde toujours une belle relation avec elle jusqu'à présent, Bakri Amina.

Il m'a aidé et soutenu avec tout respect et compétence. Il ma empêcher indirectement pour ne pas abandonner.

Il avait l'habitude de dire, OK, je suis là pour vous aider. Merci. Merci. Et encore un grand merci Pr. BOURADAA MOHAMED ; des mots qui ne peuvent pas être justifiés votre générosité et votre patience.

Merci à ma fille, que je la considère mon présent et mon avenir, pour qui j'ai voulu surmonter les difficultés et être son modèle, j'espère qu'elle soit fière de moi fière sa maman.

Merci, ma chère mère, qui ne peut être décrite avec des mots.

Je me remercie !!! oui pourquoi pas ; Merci Khadidja.

Résumé :

Dans cette étude, un nouveau modèle analytique basé sur une formulation quasi-3D d'ordre supérieur combinée (cubique, sinusoïdale et exponentielle) est développé pour examiner la réponse vibrationnelle en flexion et libre sur les différentes plaques FG reposant sur une fondation élastique. Le modèle présenté est simple et contient un nombre de variables inférieur aux autres théories quasi-tridimensionnelles. Les propriétés effectives de la structure sont calculées en utilisant des formulations linéaires, cubiques, quadratiques et quadratiques inverses qui représentent la fraction volumique de la céramique. La fondation élastique est structurée par le paramètre constant de Winkler qui représente la réaction des ressorts élastiques et de Pasternak sous la forme d'une couche de cisaillement du sol de fondation. La solution analytique du problème est obtenue sur la base du principe de Hamilton et de la technique de Navier. L'exactitude de la HSDT quasi-3D combinée actuelle qui prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur est vérifiée et comparée à d'autres modèles analytiques existants. Des études paramétriques sont effectuées pour montrer les effets de la distribution des matériaux, de l'indice d'inhomogénéité, des paramètres de fondation élastiques, de la géométrie et des rapports dimensionnels sur les déplacements, les contraintes et les fréquences naturelles des plaques FG simplement supportées.

Mots-clés : analyse de flexion ; analyse vibratoire, plaque graduée fonctionnellement, Quasi 3D HSDT.

Abstract :

In this investigation, a novel analytical model based on combined (cubic, sinusoidal and exponential) higher order quasi-3D formulation is developed to examine flexural and free vibrational response on the various FG-plate resting on elastic foundation. The presented model is simple and contains a variable number less than others quasi-three dimensional theories. The effective properties of the structure are computed using linear, cubic, quadratic and inverse quadratic formulations which represent the volume fraction of the ceramic. The elastic foundation is structured by the constant parameter of Winkler which represents the reaction of the elastic springs and Pasternak one's in the form of a shear layer of sub-grade. The analytical solution of the problem is obtained on the basis of the both Hamilton's principle and Navier's technique. The exactness of the current combined quasi-3D HSDT which takes into account the thickness stretching effect are checked and compared with others existing analytical models. Parametric studies are performed to shows the effects of the material distribution, in homogeneity index, elastic foundation parameters, and geometry dimension ratios on displacements, stresses and natural frequencies of the simply supported FG-plates.

Keywords: flexural analysis; vibrational analysis, functionally graded plate, Quasi 3D HSDT

المخلص:

في هذا الاستقصاء ، تم تطوير نموذج تحليلي جديد يعتمد على تركيبة شبه ثلاثية الأبعاد مدمجة (مكعبة ، جيبية وأسية) أعلى مرتبة لفحص استجابة الانحناء والاهتزازات الحرة على لوحة FG المختلفة المستندة على أساس مرن. النموذج المقدم بسيط ويحتوي على عدد متغير أقل من نظريات أخرى شبه ثلاثية الأبعاد.

يتم حساب الخصائص الفعالة للهيكل باستخدام صيغ تربيعية خطية ومكعبية وتربيعية ومعكوسة تمثل الجزء الحجمي للسيراميك. يتم تنظيم الأساس المرن بواسطة المعلمة الثابتة لـ Winkler والتي تمثل تفاعل الينابيع المرنة و Pasternak في شكل طبقة القص من الطبقة السفلية. يتم الحصول على الحل التحليلي للمشكلة على أساس كل من مبدأ هاملتون وتقنية نافير. يتم فحص دقة نموذج HSĐT شبه ثلاثي الأبعاد المشترك الحالي والذي يأخذ في الاعتبار تأثير تمدد السماكة ومقارنتها بالنماذج التحليلية الأخرى الموجودة.

يتم إجراء الدراسات البارامترية لإظهار تأثيرات توزيع المواد ، ومؤشر عدم التجانس ، ومعايير الأساس المرنة ، والهندسة ، ونسب الأبعاد على عمليات الإزاحة ، والضغوط ، والترددات الطبيعية للوحات FG المدعومة ببساطة.

الكلمات المفتاحية: تحليل الانحناء. تحليل اهتزازي ، لوح متدرج وظيفيًا ، شبه ثلاثي

الأبعاد HSĐT

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1 : Les différents types de composites.....	9
Figure I.2 : Constituants d'un matériau composite	10
Figure I.3 : Les différentes familles de matrice	11
Figure I.4 : Pli à Renforcement unidirectionnel	21
Figure I.5 : Matériau composite stratifié	22
Figure I.6 : Matériau composite sandwich	23

CHAPITRE II

Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire	31
Figure II.2 : Cinématique de Love-Kirchhoff	33
Figure II.3 : Cinématique de Reissner-Mindlin	34
Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé	36

CHAPITRE III

Figure III.1 : Géométrie de la plaque FG posée sur fondation élastique Winkler-Pasternak.....	41
--	----

CHAPITRE IV

Figure IV.1 : Fondamental (\mathcal{R}) des plaques FG avec et sans fondation élastique par rapport au rapport géométrique (\mathcal{R}) avec tous les profils de position.....	55
Figure IV.2 : Plaques FG fondamentales (\mathcal{R}) avec et sans fondation élastique par rapport au rapport géométrique (ζ) avec tous les profils de composition et ($\mathcal{R} = 10$).....	56
Figure IV.3 : L'effet du rapport de module sur le fondamental non dimensionnel (\mathcal{R}) d'une plaque FG avec et sans fondation élastique.....	56
Figure IV.4 : Variation de la flèche centrale \bar{w} des plaques FG sous charge sinusoïdale avec et sans fondation élastique en fonction du rapport d'aspect (ζ)	60
Figure IV.5 : Variation de la flèche centrale \bar{w} des plaques FG sous charge sinusoïdale avec et sans fondation élastique en fonction du rapport de la géométrie (\mathcal{R})	60
Figure IV.6 : L'effet du rapport de module sur la flèche maximale non dimensionnelle de la plaque FG sous charge sinusoïdale avec et sans fondation élastique.....	61

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1 : Caractéristiques des matrices thermodurcissables	13
Tableau I.2 : Caractéristiques des matrices thermoplastiques	14
Tableau I.3 : Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort	18
Tableau I.4 : Caractéristiques mécaniques des fibres de bore.	18
Tableau I.5 : Liaisons interatomiques	20

CHAPITRE IV

Tableau IV.1 : Propriétés métalliques et céramiques des plaques FG	50
Tableau IV.2 : Fréquences propres ω pour une plaque isotrope avec ($a/b=1, a/h=10$).....	51
Tableau IV.3 : Comparaison des quatre premières fréquences naturelles ω_n pour Al/Al ₂ O ₃ une plaque carrée ($a/h=10$).....	52
Tableau IV.4 : Fréquences fondamentales ω^* de la plaque carrée Al/Al ₂ O ₃	53
Tableau IV.5 : Comparaison des fréquences fondamentales $\hat{\omega}$ pour la plaque carrée Al/ZrO ₂ ($m=n=1$) (Modèle Mori-Tanaka).....	54
Tableau IV.6: Le déplacement sans dimension et les contraintes d'une plaque carrée Al/Al ₂ O ₃ FGM sous une charge uniformément répartie ($a/h=10$).....	58
Tableau IV.7: Flèche centrale (\bar{w}) et contraintes ($\bar{\sigma}_x$) de Al/Al ₂ O ₃ la plaque carrée FGM sous charge répartie sinusoïdale.....	59
Tableau IV.8: La flèche \bar{w} de la plaque E-FG sous une charge répartie sinusoïdale ($a/h=2$).....	62
Tableau IV.9: La contrainte dans le plan ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque E-FG sous une charge répartie sinusoïdale ($a/h=10$).....	63
Tableau IV.10: la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{\tau}_{xz}$) de la plaque E-FG sous charge répartie sinusoïdale ($a/h=10$).....	64
Tableau IV.11: La flèche (\hat{w}) et la contrainte normale ($\hat{\sigma}_x$) dans le plan de la plaque E-FG sous une charge uniformément répartie.....	65

LISTE DES NOTATIONS

FGM	Les matériaux à gradient de propriétés où bien fonctionnellement gradués.
FEM	La méthode des éléments finis .
EBT	Théorie d'Euler Bernouli
TBT	La théorie de Timoshenko
P-FG	Graduation en loi de puissance
E-FG	Graduation exponentielle
GDQT	La technique de quadrature différentielle généralisée
MDQT	La méthode de quadrature différentielle généralisée
CLPT	Classical Plate Theory
FSDT	First Shear Deformation Theory
HSDT	High Shear Deformation Theory
CMO	Composite à matrice organique
CMM	Composite à matrice métallique
CMC	Composite à matrice céramique
2 D	Bidimensionnelle
3 D	Tridimensionnelle
HM	Haute module
HR	Haute résistance
ZrO2	Zirconia.
Al2O3	Alumine ou oxyde d'aluminium
Al	Aluminium
a	Longueur de la plaque suivant la direction de x.
b	Largeur de la plaque suivant la direction de y.
h	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)

E	Module de Young suivant x
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x,y,z.
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
w_{st}	La composante de déplacement due à l'effet d'étirement
$f(x), \Phi(x)$	Fonction de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque.
(z)	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
U	L'énergie de déformation de la plaque
K	L'énergie cinétique de la plaque
i et j	Sont des nombres naturels.
w	La flèche de la plaque
(I_i, J_i, K_i)	Inerties de masse
(m,n)	ième mode propre
$q(x,y)$	Charge transversale
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du céramique
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

TABLE DES MATIERES

Dédicace

Remerciement

Résumé

Abstract

الملخص

Liste des figures

Liste des Tableaux

Liste des Notations

Introduction générale1

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

I.1-Introduction	6
I.2-Classification des matériaux composites	8
I.2.1-Composites à renforts de particules.....	8
I.2.2-Composites à renforts de fibres	8
I.2.3-Composites à renforts de paillettes.....	9
I.2.4-Composites stratifiés.....	9
I.3- Les constituants de base d'un matériau composite.....	10
I.3.1- La matrice.....	11
I.3.1.1- Matrices organiques ou résineuses.....	12
I.3.1.2- Matrices thermodurcissables.....	12
I.3.1.3- Matrices thermoplastiques.....	13
I.3.1.4.Matrices métalliques.....	14
I.3.1.5.Matrices céramiques.....	14
I.3.2- Les renforts.....	15
I.3.2.1- Les fibres de verre.....	15
I.3.2.2- Les fibres de carbone.....	16
I.3.2.3- Les fibres d'aramides (Kevlar).....	17

I.3.2.4- Les fibres de bore.....	18
I.3.3- Charges et additifs.....	18
I.3.4- L'interface fibre-matrice.....	19
I.4- Les matériaux composites structuraux.....	21
I.4.1- Les monocouches.....	21
I.4.2- Les stratifiés.....	22
I.4.3- Les sandwichs.....	23
I.5- Domaines d'Application des matériaux composites.....	24
I.5.1- Produits aéronautiques.....	24
I.5.2- Produits militaires.....	25
I.5.3- Produits spatiaux (satellites).....	25
I.5.4- Construction navale.....	25
I.5.5- Construction civile.....	26
I.6- Qualités générales des matériaux composites.....	27
I.7-Conclusion.....	28

CHAPITRE II : Les théories des plaques

II.1-Introduction.....	30
II.2- Définition d'une plaque.....	31
II.3- Les modèles analytiques des plaques.....	32
II.3.1- Théorie classique des plaques (CPT).....	32
II.3.2- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	33
II.3.3- Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	34
II.3.4- Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques (RPT).....	36
II.3.4.1- Hypothèses de base (RPT).....	37
II.3.4.2- Modèles de théories raffinées.....	38
II.4- Conclusion.....	38

**CHAPITRE III : Etude analytique des systèmes vibrationnels
et de flexion des plaques FG sur fondation élastique**

III.1-Introduction.....	40
III.2- Modélisation mathématique.....	41
III.2.1- Propriétés fonctionnellement classées.....	41
III.2.2- Champ de déplacement généralisé.....	42
III.2.3- Équations directrices.....	45
III.2.4- La procédure de Navier.....	46
III.3- Conclusion.....	48

CHAPITRE IV : Résultats et discussions

IV.1-Introduction.....	50
IV.2- Résultats et discussions.....	50
IV.2.1- Analyse dynamique.....	51
IV.2.2-Analyse de pliage.....	57
IV.2.2.1. Plaques FG en loi de puissance.....	57
IV.2.2.2. Plaque E-FG.....	61
IV.3- Conclusion.....	66
- Conclusion générale	68
-Références bibliographiques.....	71

INTRODUCTION GENERALE

Le développement de matériaux utilisés dans les domaines de l'ingénierie est un axe de recherche important qui s'améliore d'année en année. L'objectif principal de cette amélioration est d'augmenter les performances et les propriétés de ces matériaux. À ce jour, les matériaux composites à grades fonctionnels ou avancés sont les plus étudiés en raison de leurs avantages. Un large éventail d'applications peut être trouvé dans différentes industries de haute technologie, y compris le génie civil, le nucléaire, l'aérospatiale et l'automobile.

Plusieurs directions de recherche de la plaque en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) peuvent être trouvées dans la littérature ouverte, telles que l'analyse et l'optimisation stochastiques (Karsh et al. 2018 et 2019, Vaishali 2020). En outre, les comportements mécaniques de différent type des structures en FGM sont examinés et discutés par plusieurs chercheurs scientifiques à l'aide de diverses théories classiques et raffinées. Par exemple, Daouadji et Hadji (2015) ont proposé une solution analytique pour analyser la flexion cylindrique des plaques uniformes P-FG (gradation en loi de puissance) et E-FG (gradation exponentielle). Basé sur EBT (théorie d'Euler Bernoulli), FEM (méthode des éléments finis) et l'équation de Lagrange. Akbaş (2015) a analysé la propagation des ondes d'une poutre en porte-à-faux FG de type Kelvin-Voigt soumise à une charge thermique. L'analyse statique (flexion et flambement) et dynamique de la poutre P-FG est examinée par Attia (2017) en utilisant à la fois le modèle EBT et l'élasticité non locale. Basé sur le gradient de déformations modifiées (MSG) et les théories classiques des poutres, Akgöz et Civalek (2013) ont examiné la stabilité des FG avec différentes conditions aux limites. Méhar et al. (2017) ont étudié le comportement vibrationnel thermique d'un panneau sandwich FG-CNT à âme homogène en utilisant une cinématique HSDT simple et des solutions d'éléments finis (FE). Demir et Civalek (2017) ont amélioré le modèle différentiel d'Eringen en ajoutant des paramètres supplémentaires pour étendre l'utilisation du modèle aux structures avec diverses conditions aux limites. Sur la base de la technique d'optimisation des essaims de particules, Shabana et al. (2017) ont étudié la minimisation des contraintes dans un cylindre FG constitué de couches isotropes.

L'analyse post-flambement des imparfaites des poutres FG (S-FG et P-FG) est étudiée par Ahmed et al. (2019) en incluant les effets de taille. En utilisant la technique de séparation des variables, la théorie classique des poutres et la FSDT, Avcar (2019) a étudié

la réponse vibrationnelle libre des poutres FG. Jalaei et Civalek (2019) ont étudié l'instabilité vibrationnelle des P-FG imparfaits noyés dans un milieu viscoélastique en utilisant la théorie de Timoshenko (TBT) en conjonction avec la loi différentielle d'Eringen. Madenci (2019) a examiné la réponse statique de la poutre FG en utilisant une formulation mixte raffinée (HSDT-FEM). Akgün et Kurtaran (2019) ont étudié la réponse vibrationnelle à grand déplacement des coques super-elliptiques FG sur la base de la technique de quadrature différentielle généralisée (GDQT). De plus, Selmi (2020) a présenté une formulation exacte pour l'analyse vibrationnelle non linéaire de la structure FG unidimensionnelle à l'aide de la méthode Galerkin. La réponse dynamique de divers panneaux de coque (FGM, FG-sandwich et stratifié) est étudiée par Shahmohammadi et al. (2020) basé sur l'interpolation lagrangienne et la méthode isogéométrique à bande finie B-spline. Sur la base de la théorie de la déformation par cisaillement (FSDT), de la méthode des éléments finis et du principe d'Hamilton, Shokouhifard et al. (2020) ont étudié le comportement vibrationnel d'une poutre FG inclinée à loi de puissance soumise à des accélérations centrifuges et à une masse en mouvement. Yuan et al. (2020) ont examiné la réponse dynamique de nanotiges FG à loi de puissance non uniforme avec support élastique en utilisant les théories de Gurtin-Murdoch et Eringen et la méthode de Galerkin. Les vibrations de torsion d'un nano-cône non linéaire à gradient radial et axial sont examinées par Noroozi et al. (2020) utilisant l'équation de Navier, le principe d'Hamilton et G-DQM (méthode différentielle généralisée en quadrature). Dehshahri et al. (2020) ont utilisé la théorie modifiée du gradient de déformation et le principe d'Hamilton pour examiner l'analyse vibrationnelle de nanoplaque FG tridirectionnelle avec diverses conditions aux limites. Les équations gouvernantes obtenues sont résolues à l'aide de G-DQM. Sur la base des théories du troisième ordre et des plaques classiques, Abdelrahman (2020) a étudié l'effet de la loi de puissance transversale, de la distribution sigmoïde et exponentielle des matériaux sur la charge critique de flambement dans le plan de plaques FG simplement supportées.

Pour la première fois, Asiri et al. (2020) ont étudié la réponse vibrationnelle d'une poutre P-FG épaisse bidimensionnelle (2D) soumise à une charge sinusoïdale d'impulsion dynamique, la solution dynamique amortie est déterminée sur la base de la méthode des éléments finis (FEM) avec un plan 2D à douze nœuds élément et les équations de Lagrange. Ils ont constaté que le nombre d'ondes est en relation de corrélation directe avec le paramètre d'inhomogénéité. Pham et al. (2020) ont proposé une nouvelle technique basée sur la

combinaison de FEM en conjonction avec la théorie FSDT et l'interpolation mixte de la technique des composants tensoriels pour améliorer l'exactitude du MITC d'origine pour l'analyse des coques et l'étendre à l'analyse géométriquement non linéaire des coques FG. Akbaş et al. (2020) ont présenté un modèle mathématique basé sur la méthode des éléments finis pour analyser la réponse dynamique d'une poutre P-FG viscoélastique poreuse épaisse soumise à une charge d'impulsion sinusoïdale dynamique en incluant l'effet d'amortissement via le modèle Kelvin-Voigt. Une solution non linéaire pour l'analyse de la flexion statique des microplaques FG imparfaites est établie par Thanh et al. (2020) en utilisant les théories de la non-linéarité géométrique de Von-Kármán, des contraintes de couple modifiées (MCS) et des plaques d'ordre supérieur de Reddy (HSDT). L'effet de la porosité et de l'effet de taille sur la vibration thermique du FG en loi de puissance est étudié par Fenjan et al. (2020a) en utilisant une formulation analytique basée sur la théorie des poutres raffinée et le principe d'Hamilton. Ils ont trouvé les solutions de l'équation du mouvement en utilisant la méthode quadratique de la quadrature différentielle (DQ). Sur la base de FEM et HSDT, Vinyas (2020) a analysé la vibration magnéto-électro-élastique comportement des plaques annulaires et circulaires poreuses FG. Hadji (2020) a étudié l'effet des distributions de porosité à travers l'épaisseur sur la réponse en flexion statique de la poutre FG en proposant une nouvelle formulation HSDT. Eldeeb et al. (2020a) ont examiné la réponse thermo-élastoplastique de disques sandwich FG multicouches en utilisant la théorie de Von Mises et la méthode des différences finies. De plus, les comportements thermo-élastoplastiques des disques sandwichs FG annulaires non uniformes sont analysés par Eldeeb et al. (2020b) basé sur le critère d'élasticité de Von Mises, le modèle modifié de Tamura-Tomota-Ozawa et la méthode numérique des différences finies. Saadatfar et Zarandi (2020) ont analysé la réponse mécanique de l'EGPM (matériau piézoélectrique à gradation exponentielle) en utilisant la séparation des méthodes variables, de tir et de Runge-Kutta. Cuong-Le et al. (2020) ont développé une solution 3D pour examiner la stabilité et les réponses dynamiques d'un cylindre poreux, d'une coque FG conique, cylindrique et d'une plaque annulaire sur la base de l'analyse iso-géométrique (IGA). A l'aide de l'élasticité non locale d'Eringen, de la théorie raffinée et de la règle d'Hamilton, Thanh et al. (2020) ont étudié les réponses statiques d'une microplaque P-FG imparfaite simplement supportée et serrée en se basant sur les hypothèses de Von-Kármán, le modèle de plaque d'ordre supérieur Reddy et la théorie modifiée des contraintes de couple. Sur la base de divers modèles de poutres en conjonction

avec la théorie des contraintes de couple, Civalek et al. (2021) ont examiné la réponse dynamique de micropoutres composites renforcées de FG-CNT.

De nombreux chercheurs ont étudié l'effet de la présence de fondations élastiques sur la réponse mécanique des structures FG. Abdulrazzaq et al. (2020) ont analysé le flambement thermo-élastique de plaques E-FG serrées sur une fondation élastique et soumises à divers chargements thermiques (uniformes, linéaires et non linéaires). L'analyse de flambement de nano plaques annulaires/circulaires imparfaites en loi de puissance avec diverses conditions aux limites (BC) reposant sur une fondation élastique Kerr est étudiée analytiquement par Sadoughifar et al. (2020) en utilisant à la fois la théorie des plaques raffinée (RPT) avec seulement deux variables, la méthode de quadrature différentielle généralisée et la formulation de contrainte de couple modifiée (MCS). D'autres travaux sont réalisés pour montrer l'impact des fondations élastiques sur le comportement des structures FG en considérant la déformation transversale normale (effet d'étirement en épaisseur) en proposant une nouvelle forme de théories Quasi-3D HSDT. Parmi ces travaux, une simple HSDT quasi-3D est présentée par Rachedi et al. (2020) pour étudier le comportement thermomécanique statique de divers modèles de plaques FG avec une dépendance à la température en incluant l'effet de la réaction de fondation élastique. Merzoug et al. (2020) ont développé une nouvelle formulation cinématique 2D et quasi-3D pour l'analyse statique de la poutre FG sur une fondation élastique à deux couches (ressorts Winkler et couche de cisaillement).

L'impact du chargement thermodynamique sur les caractéristiques mécaniques des poutres à gradient exponentiel sur les fondations élastiques est présenté par Boudjra et al. (2020) en proposant une nouvelle formulation analytique avec seulement trois variables qui prennent en considération à la fois la déformation de cisaillement transversale et normale.

L'objectif principal du travail actuel est d'examiner les comportements flexionnels et la vibration libre de plaques rectangulaires simplement supportées en matériaux fonctionnellement gradués Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ soumises à des charges mécaniques uniformes et sinusoïdales et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. La structure étudiée est modélisée en utilisant une formulation HSDT quasi-3D combinée (cubique, sinusoïdale et exponentielle) avec seulement cinq variables inconnues de déplacement. Les différentielles régissant les équations des systèmes vibrationnels et de flexion des plaques FG sur fondation élastique sont déduites via un modèle analytique du

principe de l'énergie potentielle. Les solutions analytiques sont obtenues en appliquant la solution de Navier. L'efficacité et la précision des formulations développées sont vérifiées en comparant les résultats avec ceux donnés par les modèles existants. Diverses études paramétriques sont présentées et discutées pour montrer clairement l'influence de différents paramètres tels que la composition du matériau, la réaction de la fondation, la géométrie et le rapport d'aspect, le paramètre du matériau et le rapport de module sur les caractéristiques de flexion et de vibration libre des plaques simplement supportées.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux composites, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de théories des plaques utilisés pour l'étude de comportement flexionnel et vibratoire des structures en « FGM ».

Le troisième chapitre est consacré à des applications numériques réalisées sur des plaques en FGM avec une variation arbitraire des propriétés matérielles (Module de Young et coefficient de dilatation thermique). Afin d'étudier Nous présentons en détail une nouvelle théorie simple d'ordre élevé de la déformation par cisaillement pour la réponse vibrationnel et flexionnel d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak fonctionnellement soumises à des charges mécaniques uniformes et sinusoïdales qui se déduites via un modèle analytique du principe de l'énergie potentielle et en appliquant la procédure de Navier .

Dans le quatrième chapitre seront présentés les résultats obtenus par l'exécution des différents codes de calculs développés dans le cadre de cette recherche. Ces résultats seront confrontés à ceux de travaux publiés permettant ainsi la validation de nos résultats de calculs. Des interprétations seront présentées au fur et à mesure.

Enfin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

CHAPITRE I :

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

I.1. Introduction

Afin de répondre aux exigences de l'industrie, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs) ont développé des matériaux modernes sous terme matériaux composites pour faire la mise en œuvre d'une nouvelle génération des matériaux. Comme depuis l'histoire de la civilisation humaine a évolué à partir des outils de pierre à l'ère de l'acier et à l'ère spatiale, l'innovation de certains matériaux à chaque époque a été faite pour soutenir le développement de la technologie. Les Rails et les chaudières en acier de la révolution industrielle ont été utilisés pendant l'époque d'acier. À l'ère spatiale, les matériaux composites ont été introduits pour la fabrication de structures intelligentes qui étaient robustes et légères.

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes.

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leurs constituants, de leur distribution et de leur répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique.

Une simple approche avec les matériaux classiques, les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit. Le produit est réalisé en même temps que le matériau. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des singularités fondamentale des composites. Il est possible de contrôler les propriétés souhaitées par un arrangement des renforts lors de la conception de la pièce. Comparaison

Les matériaux composites sont généralement scindés en deux catégories :

- les composites à Grande Diffusion (GD) allient des coûts faibles à des caractéristiques moyennes et s'emploient principalement pour des applications de grandes séries . Ils possèdent des caractéristiques mécaniques spécifiques souvent inférieures à celles des matériaux de référence telle que l'acier. Ils conviennent aux grandes séries et sont généralement à base de fibres de verre. Ils sont employés essentiellement dans les applications non travaillantes pour l'industrie des transports ou pour les biens d'équipement.
- les composites à Hautes Performances (HP) dont les propriétés de la structure autorisent leur emploi dans des structures travaillantes. Ils se caractérisent par des propriétés mécaniques plus élevées que celles des composites GD en contrepartie d'un coût global plus important en raison du prix des matériaux utilisés et des moyens de fabrication associés (autoclave, RTM).

En fait les nouvelles technologies nécessitent des matériaux nouveaux à hautes performances, capables de remplacer les matériaux classique , les matériaux composites permettent de concevoir et de réaliser des structures améliorées possédant de bonnes propriétés mécaniques alliées à un poids minimal. L'usage des matériaux composites à matrice organique, en particulier les stratifiés, ne cesse de croître dans les domaines les plus variés. Les bonnes propriétés mécaniques spécifiques de ces matériaux permettent en effet un allègement des structures qui est très recherché dans les constructions mécaniques des moyens de transport. Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans divers domaines tels que l'aérospatial, naval, automobile... La nature de ces matériaux fait qu'ils ont une très grande adaptabilité à chaque domaine et il est possible de choisir pour chaque structure le meilleur compromis coût – poids - tenue mécanique.

Ces matériaux ont suscité un intérêt particulier dans de nombreux secteurs tel que, l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, etc....En développant les matériaux composites, les atouts visés sont :

- la légèreté,
- l'amélioration de propriétés mécaniques,
- une mise en œuvre plus simple et des finitions simplifiées par rapport aux matériaux métalliques (fonderie, chaudronnerie et usinage lourd),
- les gains de coût de production, même si pour le moment cela constitue le principal frein,
- l'intégration d'insert pour augmenter la fonctionnalité

I.2. Classification des matériaux composites

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts . Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (figure I.1) :

- composites à renforts de particules,
- composites à renforts de fibres,
- composites à renforts de paillettes,
- composites stratifiés.

I.2.1. Composites à renforts de particules

Les matériaux composites de particules consistent à mettre des particules d'un ou plusieurs matériaux en suspension dans une matrice. En fait, le meilleur exemple est sûrement le béton. Le béton est composé de particules de sable et de gravier et elles sont liées ensemble par la réaction chimique du ciment et de l'eau qui donne la pâte (matrice). Le béton est donc un composite de particules très complexes puisqu'une multitude de paramètres influence ses propriétés. Plusieurs ouvrages de référence traitent de ces paramètres.

I.2.2. Composites à renforts de fibres

Les composites de fibres sont des matériaux composés d'une matrice dans laquelle divers types de fibres sont ajoutés. Le comportement des composites de fibres est beaucoup influencé par le type de fibres et leur nature. Il existe deux grands types de fibres ; les macros-fibres et les microfibres.

Les macros-fibres (≈ 10 mm de longueur et plus) qui sont ajoutées à la structure afin d'augmenter sa ténacité et les microfibrilles (≈ 10 μ m de longueur et moins) qui sont ajoutées afin d'améliorer principalement la résistance à la traction. La longueur qui caractérise les fibres comme microfibrilles ou macro-fibres peut varier en fonction de la composition de la matrice.

Le rôle des fibres dans la structure est le même que celui des armatures, c'est-à-dire reprendre les efforts de traction. Les composites à renforts de fibres limitent la formation, la propagation et la coalescence des microfissures au sein de la matrice. Les fibres cousent à la fois les fissures existantes en empêchant leur développement et, limitent la formation d'autres fissures en renforçant la matrice d'acier .

I.2.3. Composites à renforts de paillettes

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

I.2.4. Composites stratifiés

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

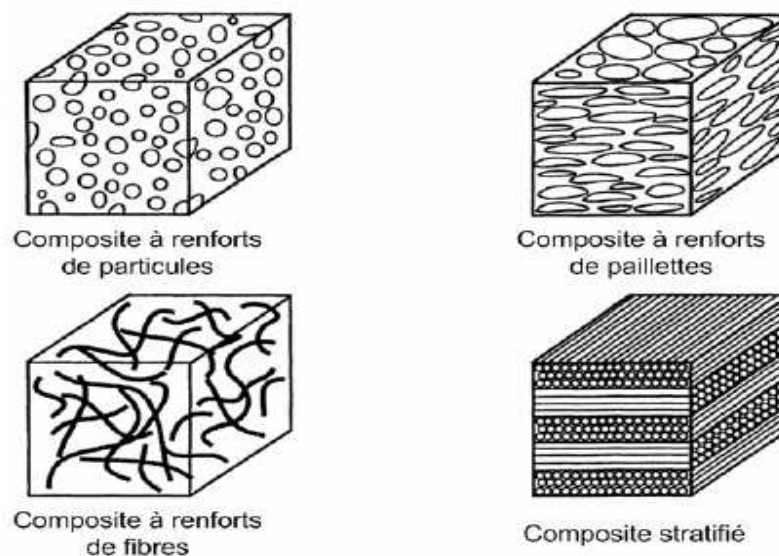


Figure I.1 : Les différents types de composites.

I.3. Les constituants de base d'un matériau composite

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont : la matrice, le renfort et l'interface (figure I.2). Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

Le renfort est une sorte de squelette ou armature, qui assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité), souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). La matrice est composée d'une résine thermodurcissable ou thermoplastique, qui lie les renforts, les protège contre les agressions extérieures et donne la forme au produit réalisé. L'interface assure la compatibilité renfort-matrice, transfère les efforts de la matrice au renfort et doit être adaptée aux propriétés visées à l'aide d'un ensimage.

Les « charges » qui sont des ajouts appropriés servent à diminuer les coûts, elles confèrent aussi aux matériaux des propriétés particulières ou complémentaires. Les additifs spécifiques peuvent être soit catalyseur, soit accélérateur de polymérisation, soit colorant ou encore agent de décollage.

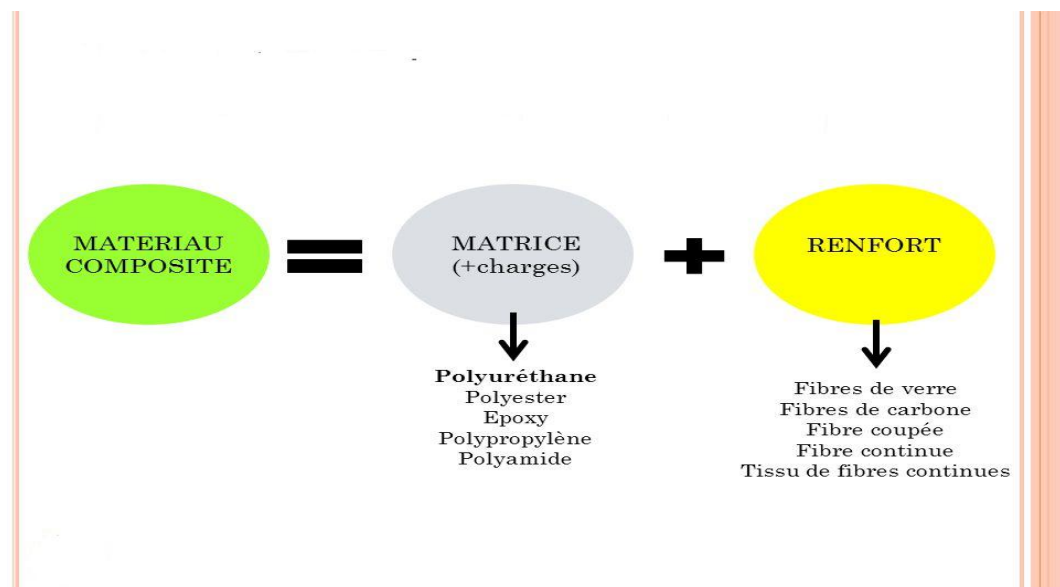


Figure I.2 : Constituants d'un matériau composite.

I.3.1. La matrice

La matrice maintient les fibres entre elles en jouant le rôle de liant dans le composite. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final. Pour obtenir des caractéristiques d'imprégnation plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la viscosité de la résine est diminuée avec un apport thermique.

En fonction de leur nature, les matériaux composites sont classés en trois grandes classes : les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être utilisés à des températures supérieures à 300°C, les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilisés jusqu'à 600°C, et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de 1000°C. Dans le cadre de ce chapitre nous intéressons à la caractérisation d'un matériau composite à matrice organique dont les caractéristiques structurelles et mécanique seront détaillées.

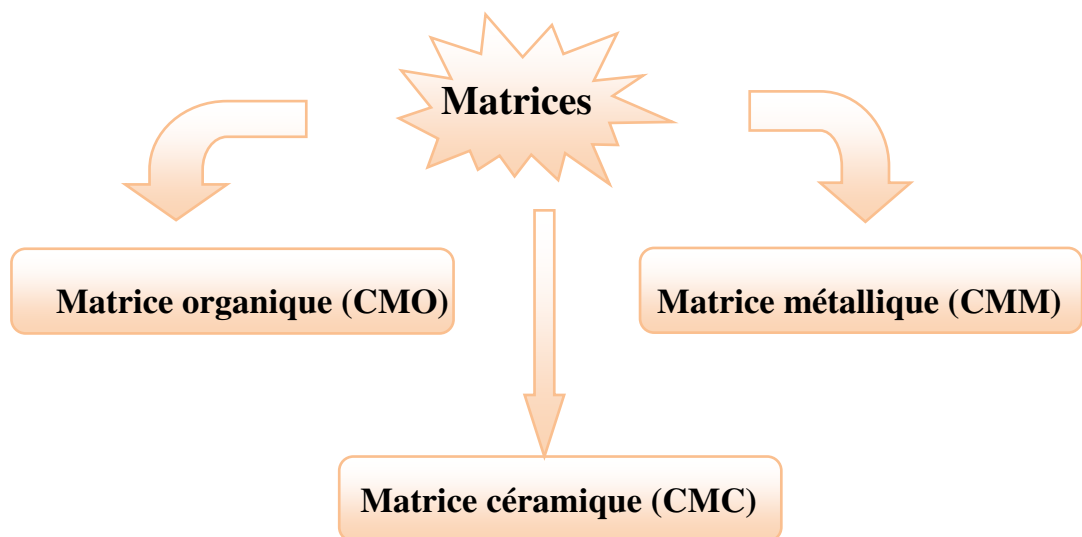


Figure I.3. Les différentes familles de matrice.

I.3.1.1. Matrices organiques ou résineuses

La conception et la réalisation de pièces composites à matrice organique (CMO), en particulier de pièces structurales ou de grandes dimensions, sont un enjeu majeur dans de nombreux secteurs industriels : transports, génie civil, bâtiment, aéronautique, construction navale, etc. Les gains potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc. Or, ils doivent également répondre à des critères de durabilité sur du long terme et leur utilisation optimale, dans des conditions extrêmes d'environnement (température, humidité, pollutions éventuelles) et de sollicitations (chargements statique et dynamique), nécessite de se doter d'une méthodologie validée de caractérisation et de prévision des comportements en utilisation. Le comportement à long terme des CMO dépend de leur composition (matrice, renfort), des additifs (stabilisants, anti-UV, charges minérales), de la pureté, de la masse moléculaire des monomères ainsi que de la nature des renforts et de l'orientation des fibres. La fabrication des CMO emploie deux types de matrices: les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des CMO actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées, mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclabilité (réutilisation après broyage).

I.3.1.2. Matrices thermodurcissables

Ce sont les polymères les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux". Ces résines, sous forme liquide à l'état initial, subissent une transformation irréversible (elles ont la particularité de n'être mises en forme qu'une seule fois) en passant à l'état solide après polymérisation. Leurs caractéristiques thermomécaniques élevées font qu'elles sont les plus employées actuellement. On distingue trois familles de résines thermodurcissables principalement utilisées :

- Les résines phénoliques (résines de condensation) sont utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue au feu imposées par les normes dans les transports civils. Elles présentent l'inconvénient d'être peu résistantes aux sollicitations.
- Les résines polyimides présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température par contre elles sont très sensibles aux chocs. Afin de remédier à cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant à des résines thermoplastiques avant polymérisation.

- Les résines époxydes possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Elles sont généralement renforcées par des fibres de carbone ou de verre (longerons, dérives, nacelles, voilure, bateaux et automobiles de compétition, etc.).

Le tableau I.1 ci-dessous regroupe quelques caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.

Matrice TD	Masse volumique Kg/cm ³	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
Polyester	1,2	50-65	3000	2,5%
Epoxyde	1,1-1,4	50-90	3000	2%
Polyimide	1,3-1,4	30-40	4000	1%
Phénolique	1,2	40-50	3000	2,5%
Vinylester	1,15	70-80	3500	4%
Polyuréthane	1,1-1,5	20-50	1000	100%
Silicone	1,1	35	2200	/

Tableau I.1 : Caractéristiques des matrices thermodurcissables .

I.3.1.3. Matrices thermoplastiques

Les matrices thermoplastiques sont constituées de polymères à chaîne linéaire ou ramifiées, c'est-à-dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. A l'inverse des thermodurcissables, c'est la matière première déjà polymérisée qui subit un échauffement, la pièce conservant sa forme après refroidissement. Cette transformation est réversible. Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Les principales résines thermoplastiques sont à base de polyamide, polyéthylène, polycarbonate et polychlorure de vinyle (PVC). Les caractéristiques mécaniques de quelques résines thermoplastiques sont présentées dans le tableau I.2.

Matrice TP	Masse volumique Kg/cm ³	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
PP	0,9	30	1200	20-400%
PPS	1,3	65	4000	100%
PA	1,1	70	2000	200%
PES	1,35	85	3000	60%
PEI	1,15	105	3300	60%
PEEK	1,3	90	4000	50%

Tableau I.2 : Caractéristiques des matrices thermoplastiques .

I.3.1.4. Matrices métalliques

Les matériaux composites à matrice métallique ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

I.3.1.5. Matrices céramiques

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composites à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

I.3.2. Les renforts

Les renforts (fibres) présentent une configuration particulièrement intéressante pour profiter au mieux des propriétés mécaniques des matériaux. Sous cette forme, le module et surtout la contrainte de rupture peuvent être très supérieurs à ceux des matériaux massifs.

Pour les renforts, sont employés des bobines de fils de longueurs variées (longs, broyés ou courts) ou encore des structures de fibres comme des tissus (taffetas, satins, serges), des nappes de fibres unidirectionnelles (en abrégé UD) ou encore des tresses, des tricots ou enfin des tissus 3D. En résumé, le domaine des renforts s'appuie sur les productions de l'industrie textile. Par définition, les fibres se distinguent des fils par leur aspect discontinu.

Les fibres de renforts les plus courantes :

- Les fibres de Verre ;
- Les fibres de Carbone ;
- Les fibres d'aramides « Kevlar » ;
- Les Fibre de Bore ;
- Les Fibre de silice (ou de quartz) ;
- Les Fibre de polyéthylène de haut module.

I.3.2.1. Les fibres de verre

Les fibres de verre sont fabriquées à partir d'un mélange à base de silice. En faisant varier la composition de ce mélange, différents types de verre peuvent être obtenus : le verre E, les verres S ou R pour des applications mécaniques plus sévères, le verre C pour des applications chimiques et le verre D pour des applications diélectriques. Rappelons que les fibres de verre E constituent le principal renfort des produits composites de grande diffusion et sont utilisés dans plus de 95 % des matériaux composites.

Le mélange est porté à fusion à 1200°C puis est transféré dans un four filière à 1000°C. En sortie de filière, le verre est étiré à grande vitesse pour former des fibres continues dont le diamètre varie de 10 à 50 µm. Les fibres ainsi produites ne peuvent pas être utilisées sous cette forme en raison de plusieurs points faibles: manque de cohésion inter-filamentaire, forte sensibilité à l'abrasion, présence de charges électrostatiques et mauvaise compatibilité avec la résine (imprégnation, adhérence verre/résine). Pour toutes

ces raisons et dans le but d'être tissées, les fibres sont ensuite ensimées. Il existe trois principaux types d'ensimages :

- L'ensimage textile pour permettre le tissage. Il fait intervenir des agents collants, lubrifiants, adoucissants ou encore antistatiques.
- L'ensimage plastique ou « finish » qui consiste à déposer un agent de pontage rendant possible la liaison fibre/résine.
- L'ensimage textilo-plastique qui confère aux fibres les propriétés nécessaires au tissage et à la liaison fibre/résine en une seule étape.

Les fibres de verre offrent plus particulièrement pour les produits de grande diffusion les qualités suivantes:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

I.3.2.2. Les fibres de carbone

La fibre de carbone est un matériau se composant de fibres extrêmement fines, entre cinq et quinze microns de diamètres et composé principalement d'atomes de carbone. Les atomes de carbone sont agglomérés dans des cristaux microscopiques qui sont alignés plus au moins parallèlement à l'axe long de la fibre. L'alignement des cristaux rend la fibre incroyablement résistante pour sa taille. Plusieurs milliers de fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil qui peut être employé tel que ou être tissé.

Les fibres de carbone sont traditionnellement considérées comme les renforts « phares » de composites « High-tech » couramment employés dans l'aéronautique et la voile de compétition. Ces fibres restent chères par rapport aux fibres de verre E mais sont très attractives pour produire des structures dont la rigidité est le principal critère de choix. Si on considère le coût spécifique (coût/densité) des fibres de carbone, il tombe à sept fois celui des fibres de verre. La rigidité d'une fibre peut aussi être rapportée à son coût spécifique. Dans ce cas, le rapport entre fibre de verre et fibre de carbone n'est plus que de deux. Cela veut dire que, si le prix du carbone continue de baisser, son utilisation risque de pénétrer des marchés de grande diffusion occupés à l'heure actuelle par les fibres de verre.

Il existe deux grandes sortes de fibres de carbone : les fibres HR (Haute Résistance) qui sont les plus utilisées et les fibres HM (Haut Module). Les fibres HM ont des modules d'Young très élevés qui peuvent être jusqu'à deux fois supérieur à ceux des fibres HR. Mais, elles comportent un allongement à rupture en traction 2 fois moins élevé ce qui a tendance à rendre les composites plus « fragiles ». Par ailleurs, les fibres de carbone sont anisotropes et peuvent présenter des structures très différentes suivant la nature du précurseur utilisé pour leur fabrication. Les fibres de carbones possèdent les qualités générales suivantes :

- très forte raideur axiale,
- très bonne résistance aux attaques chimiques (corrosion sous contrainte),
- meilleure durée de vie en fatigue que les fibres de verre,
- Bonne conductibilité électrique et thermique.

I.3.2.3. Les fibres d'aramides (Kevlar)

Ces fibres sont des polyamides aromatisés obtenus par synthèse à basse température (environ -10°C). Ils sont ensuite filés et étirés pour obtenir un module d'élasticité élevé. Ces fibres sont produites et commercialisée par la société Dupont de Nemours sous la marque Kevlar. En comparaison avec les fibres de verre, le prix des fibres d'aramide est élevé ce qui a été un frein pour leur développement. Néanmoins, le Kevlar possède une résistance spécifique en traction (résistance/densité) très importante et supérieure à la plupart des autres fibres pour ce type de sollicitation. Notons que le Kevlar 49 est essentiellement utilisé pour des applications en matériaux composites. Les principales limites d'utilisation de ces fibres sont :

- La reprise d'humidité. La structure des fibres d'aramides renferme des microporosités qui ont tendance à retenir l'eau en présence d'humidité. Les tissus de Kevlar doivent être séchés avant leur imprégnation par la résine.
- La sensibilité aux rayonnements ultra-violet.
- La faible tenue en compression par rapport à la traction. La contrainte de compression d'une fibre d'aramide est cinq fois inférieure à sa contrainte de traction. C'est une limitation importante pour l'utilisation de composites sollicités en flexion (combinaison traction/compression) qui seront dimensionnés avec la condition la plus défavorable à savoir la résistance en compression.

Les caractéristiques mécaniques des trois types de fibres les plus répandus dans le domaine des composites hautes performances sont synthétisées dans le (tableau I.3). Ces caractéristiques varient d'un fabricant à l'autre.

Caractéristiques Mécaniques	Fibre de carbone				Fibre de verre		Aramide
	HR		HM		E	R	
Résistance à la rupture (GPa)	3,5	4,5	2,5	4,2	2,5	3,2	3,6
Module de Young (GPa)	240	250	500	500	74	86	125
Allongement à la rupture (%)	1,5	1,8	0,5	0,5	3,5	4	2,9
Masse volumique (g/cm ³)	1,4	1,8	1,95	1,95	2,6	2,5	1,44

Tableau I.3 : Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort .

I.3.2.4. Les fibres de bore

Ce sont des filaments de tungstène avec un diamètre de 12 µm, sert de catalyseur à la réaction de chlorure de bore et d'hydrogène 1200 °C. Les fibres de bore obtenues ont un diamètre d'environ 100 µm (la vitesse de croissance est de 1 micron par seconde).

Caractéristiques mécaniques	Bore
Résistance à la rupture (GPa)	3,5
Module de Young (GPa)	400
Allongement à la rupture (%)	0,8
Masse volumique (g/cm ³)	2,63

Tableau I.4 : Caractéristiques mécaniques des fibres de bore.

I.3.3. Charges et additifs

Les additifs permettent de modifier l'aspect, les caractéristiques du matériau, l'adhérence entre les renforts et la matrice, la coloration, les propriétés anti-UV, les charges ignifugeantes, ou les agents améliorant l'isolation thermique ou acoustique. Ce sont des éléments ajoutés aux matières plastiques au cours de leur élaboration ou de leur transformation et qui visent à leur conférer des caractéristiques particulières utiles lors de latransformation ou des fonctionnalités pour leur usage final.

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leurs constituants, de leur distribution et répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique. A la différence des matériaux classiques, les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit. Le produit est réalisé en même temps que le matériau. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des singularités fondamentale des composites. Il est possible de contrôler les propriétés souhaitées par un arrangement des renforts lors de la conception de la pièce.

I.3.4. L'interface fibre-matrice

Il est naturel de penser que les performances des matériaux composites sont fonction des propriétés des constituants de base rentrant dans leur composition. Cependant, ceux-ci n'existeraient pas si les fibres et la matrice ne pouvaient s'associer. L'interface est le siège de cette association et constitue une véritable région stratégique capable d'assurer notamment le transfert des charges de la matrice aux renforts. Les caractéristiques de l'interface dépendent quant à elles de la qualité de la liaison fibre-matrice ce qui fait appel à la notion d'adhésion.

Pour comprendre les phénomènes d'adhésion il faut tout d'abord s'intéresser à la notion de surface. Une surface peut être définie comme un lieu de discontinuité d'au moins une propriété physique (discontinuité d'ordre, d'indice de réfraction, de composition chimique) et constitue une séparation entre deux milieux. Une surface est aussi un lieu thermodynamiquement instable privilégié pour des contacts et des réactions chimiques. Notons que les solides ne peuvent réagir qu'au travers de leur surface. En simplifiant, l'adhésion entre deux matériaux, ou l'affinité entre deux surfaces, peut résulter de différents facteurs :

- L'ancrage mécanique; une rugosité ou une porosité importante sont des éléments favorables à l'adhésion car ils permettent d'accroître la surface de contact entre deux matériaux.
- L'interdiffusion dans le cas de deux polymères.
- La création de liaisons physico-chimiques à l'interface; il existe des liaisons interatomiques de faible et de forte énergie (tableau I.5).

Type de liaison	Energie de liaison (KJ/mol)	Distance interatomique (Å)
Ionique	600-1000	5
Covalente	130-820	4
Métallique	100-150	5
Van der Waals /	4-20	3-5
Hydrogène		

Tableau I.5 : Liaisons interatomiques

Lors de la fabrication du composite. L'adhésion de la phase polymère sur le renfort résulte d'un phénomène de mouillage de la fibre par la résine liquide. Dans ce cas on décrira le phénomène d'adhésion par l'équation thermodynamique suivant le principe de l'énergie d'adhésion de Dupré définie par la relation suivante:

$$W_{adh} = \gamma_s + \gamma_l - \gamma_{sl} \quad (I.1)$$

Où γ_s et γ_l sont respectivement les enthalpies libres de surface de la fibre, de la résine polymère et l'énergie nécessaire pour créer une interface entre la fibre et la résine liquide. En utilisant l'angle de mouillage (θ) des fibres par la matrice, l'énergie d'adhésion s'exprime aussi par la relation d'Young-Dupré :

$$W_{adh} = \gamma_l (1 + \cos \theta) \quad (I.2)$$

Cette relation illustre le fait qu'un bon mouillage se caractérise par des angles de contacts fibre-matrice faibles et permet d'accroître l'énergie d'adhésion. Par exemple, la mouillabilité peut être améliorée à l'aide de traitements de surface des fibres (agents de couplage, ensimage).

I.4. Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwichs.

I.4.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite (figure I.3), et sont formées d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). Les divers types de monocouches sont définis par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement), à fibres tissées, ou à fibres courtes. La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir une structure composite stratifiée.

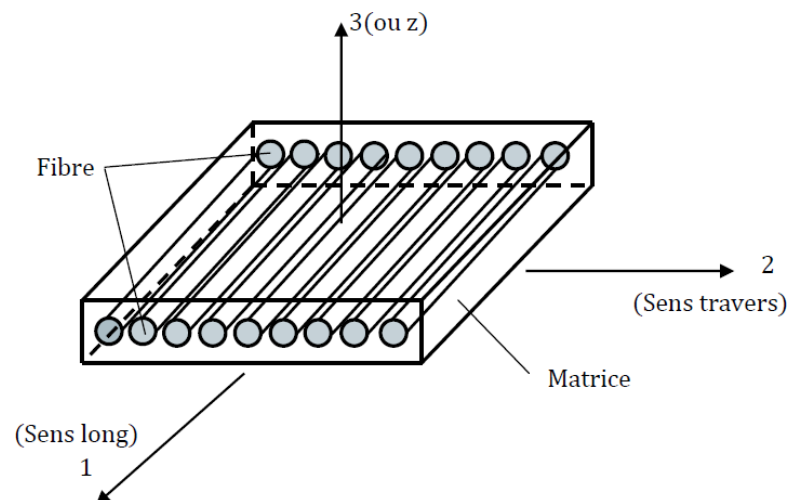


Figure I.4 : Pli à Renforcement unidirectionnel.

I.4.2. Les stratifiés

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines (figure I.4). Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques.

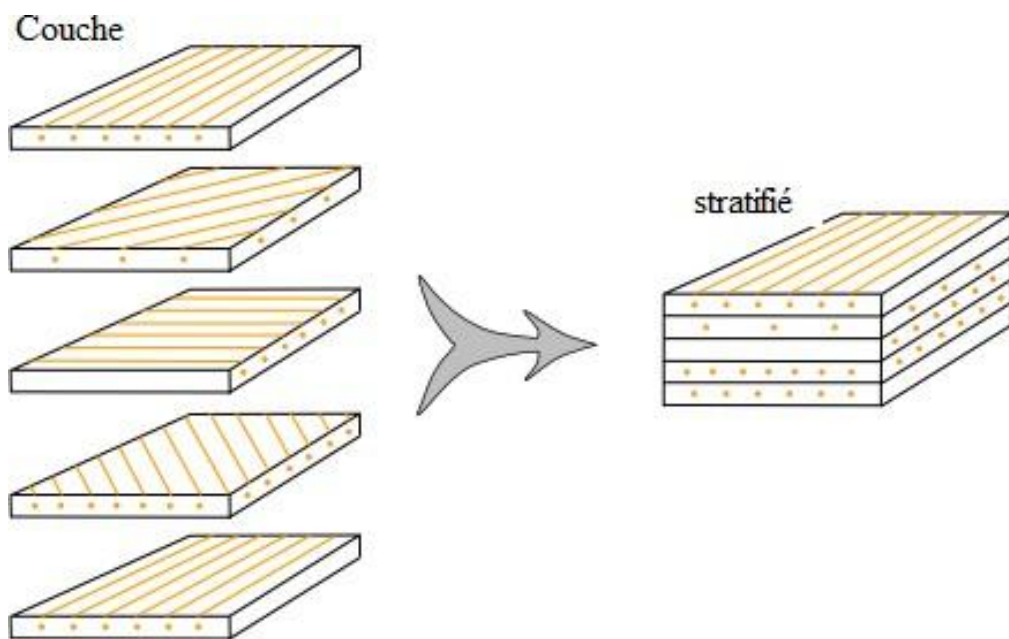


Figure I.5 : Matériau composite stratifié.

I.4.3. Les sandwichs

Un matériau composite à structure sandwich ou plus simplement un matériau sandwich ou structure sandwich est une classe spéciale de matériaux composites qui est fabriquée en assemblant deux peaux externes minces mais rigides à une âme interne légère mais épaisse. Le matériau constituant l'âme est normalement un matériau à faible résistance mécanique, mais son épaisseur plus élevée confère au matériau sandwich une rigidité à la flexion élevée et une masse volumique globale faible (figure I.5). Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau en forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées collées ensemble. Ces feuilles sont fabriquées en imprégnant des fibres d'aramide dans une résine phénolique ayant des propriétés ignifuges. Lors de la mise en forme de ce type de panneaux sandwichs, il est souvent nécessaire d'utiliser plusieurs morceaux de noyau afin de fabriquer de grandes pièces. La jonction entre deux noyaux pose un problème de discontinuité qui est réglé dans l'industrie en injectant une mousse dans l'interstice. L'injection de cette mousse ajoute une étape à la fabrication de grandes pièces et constitue un ajout de masse à la structure.

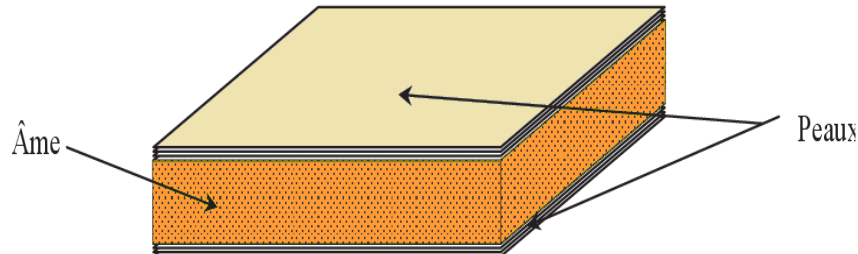


Figure I.5 Matériau composite sandwich

Les panneaux sandwichs intégrés dans les structures aéronautiques sont légers et rigides ce qui en fait d'excellents transmetteurs de vibration mécaniques et sonores. Ces vibrations vont à l'encontre du confort des passagers et peuvent même causer des bris mécaniques si elles ne sont pas amorties. Généralement les matériaux composites ont un amortissement plus élevé que les métaux, mais celui-ci demeure insuffisant et il est nécessaire de trouver des solutions pour l'améliorer. L'amortissement peut être assuré par des systèmes dit « actifs », c'est-à-dire des systèmes nécessitant une boucle d'asservissement permettant d'obtenir un bon amortissement en réponse à une vibration donnée.

Cependant, un tel système est consommateur d'énergie et ajoute une masse non négligeable à la structure. C'est pourquoi l'industrie aéronautique s'est tournée vers des systèmes « passifs » permettant d'amortir les vibrations pour un ajout de masse plus faible.

I.5. Domaines d'Application des matériaux composites

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques élevées associés à un faible poids (besoins de l'industrie aérospatiale). Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (aéronautique, automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...etc.), ces performances remarquables sont à l'origine des solutions technologiques innovantes.

I.5.1. Produits aéronautiques

Dans la construction aéronautique, la compétition est rude entre les matériaux classiques, l'aluminium principalement et les matériaux composites à haute performance, essentiellement ceux à base de fibres de carbone. Les premiers disposent d'une avance considérable en termes d'expérience et d'industrialisation; les seconds ont longtemps été confinés à des pièces de structure secondaire peu sollicitées (aérofreins, volets, aménagements de cabine,...etc.), du fait de leur coût élevé par rapport à l'aluminium, mais aussi de leur médiocre résistance aux chocs et de leur difficulté d'assemblage.

Toutefois, les composites ne cessent de gagner du terrain, car ils offrent de nombreux avantages. Ils facilitent et réduisent la maintenance des appareils grâce à leur résistance à la corrosion, ainsi qu'à leur excellente tenue à la fatigue. Ils allègent la structure d'un avion et améliorent ainsi sa rentabilité : un gain de 450 kg permet d'embarquer 6 passagers supplémentaires. Ils résistent bien au feu et limitent les émissions toxiques. Ils permettent aussi de réaliser des pièces multifonctions, ce qui évite la pose d'une multitude de rivets constituant autant de points faibles.

Tous ces avantages font que l'utilisation des composites s'étend progressivement des pièces de structures secondaires vers des fonctions aux fortes exigences mécaniques.

I.5.2. Produits militaires

Pour les missiles, le principal avantage pour le constructeur d'utiliser des matériaux composites est de pouvoir proposer à ces clients des produits associant performance et légèreté. Par contre l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage des missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale. A cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de l'air sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle, ce qui entraîne une perte de précision du tir. L'utilisation de matériaux composites sur les ailettes de part leur faible conductivité thermique fait qu'en fin de mission, les ailettes conservent une certaine intégrité de forme, ce qui permet de maintenir la trajectoire du missile sans perte de précision.

I.5.3. Produits spatiaux (satellites)

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions à la température pouvant varier entre -180°C lorsque le satellite est dans l'ombre et $+160^{\circ}\text{C}$ lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique, de part la valeur négative du coefficient de dilatation thermique des fibres de carbone et d'autre part la valeur positive du coefficient de dilatation thermique de la matrice, peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure. La stabilité géométrique de la structure est apportée par sa raideur globale. L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement.

I.5.4. Construction navale

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY (la marine de guerre des États-Unis) réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications navales. A partir de 1955, l'apparition des tissés

de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement ...etc.

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l'eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification .

I.5.5. Construction civile

Depuis une dizaine d'année, une alternative est proposée : il s'agit de renforcer ou de réparer les ouvrages en béton par des matériaux composites à matrice organique collés extérieurement sur des structures dégradées. Les matériaux composites, en particulier à base de fibres de carbone, de part leur rigidité spécifique, présentent un grand intérêt pour la réparation. De plus, malgré leur prix élevé, ils présentent un avantage économique car ils peuvent être mis en œuvre directement sur les structures par moulage au contact, procédé appelé aussi polymérisation in-situ ou stratification directe. Ceci permet de réduire considérablement les coûts liés à la manipulation des matériaux ainsi que les problèmes liés aux interruptions des activités des ouvrages réparés.

Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites sont utilisés pour le renforcement et la réhabilitation d'éléments structuraux en béton armé, tels que les poutres, les dalles, les colonnes et les murs. Les premières recherches sur l'application de ce nouveau matériau destinées aux ouvrages de génie civil datent de 1980, bien que ce soit plutôt vers 1990 que le matériau est utilisé, d'abord sur une base expérimentale, puis progressivement sur une base commerciale. Le confinement des colonnes en béton se réalise à l'aide d'enveloppes en matériaux composites à base de fibres de verre, de carbone ou d'aramide. Ces enveloppes appliquées aux colonnes améliorent le confinement du béton, ainsi que sa ductilité et sa résistance en compression. Les différents composites offrent des modules d'élasticité et des rigidités variés pouvant modifier le comportement axial et radial du béton confiné.

I.6. Qualités générales des matériaux composites

Les qualités principales les plus cités des matériaux composites sont :

- moins volumineux : La masse est plus compacte et on obtient ainsi un produit moins volumineux pour à propriétés équivalentes.
- plus fort : Le matériau est très résistant aux charges, aux chocs grâce au renfort
- plus résistant : Le matériau est également résistant aux intempéries et aux agressions chimiques grâce à la matrice qui protège
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Meilleure durée de vie : La tenue du matériau à travers le temps est très bonne, on observe une absence de corrosion;
- Liberté de forme : La matière est plus malléable et il est plus facile de créer des formes particulières;
- La matière est également plus étanche, plus isolante, etc.
- Légèreté (gain de masse) ;
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,...) ;
- Amélioration de la tenue au feu ;
- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.

Ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs).

I.7. Conclusion

Pour beaucoup d'applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion saline, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique. Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Nous avons aussi discuté sur les matériaux composites structuraux et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux pour le renforcement des structures à hautes performances.

Chapitre II

Les théories des plaques .

CHAPITRE II

LES THEORIES DES PLAQUES .

II.1 Introduction

Puisque les matériaux composites se composent de deux matériaux ou plus, ils posent beaucoup de problèmes au niveau des interfaces notamment le délaminage et la propagation des fissures entre les couches. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs caractéristiques structurales telles que les déplacements, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur, les fréquences naturelles, la force de flambement et l'effet des états de frontière et de chargements externes. Du fait de l'importance de l'aspect sécuritaire dans la conception et le développement en général, nous avons besoin d'une théorie ou plusieurs soit efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales des plaques. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques .

La théorie classique des plaques est celle basée sur la plus ancienne hypothèse de Kirchhoff qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de part l'hypothèse (des sections droites restent droites) à un vecteur des contraintes de cisaillement transversal constant dans l'épaisseur, ce qui oblige l'introduction des facteurs de corrections. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transversal, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluation dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres.

D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

II.2 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Figure II.1). On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, x, y) d'équation $z = 0$;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

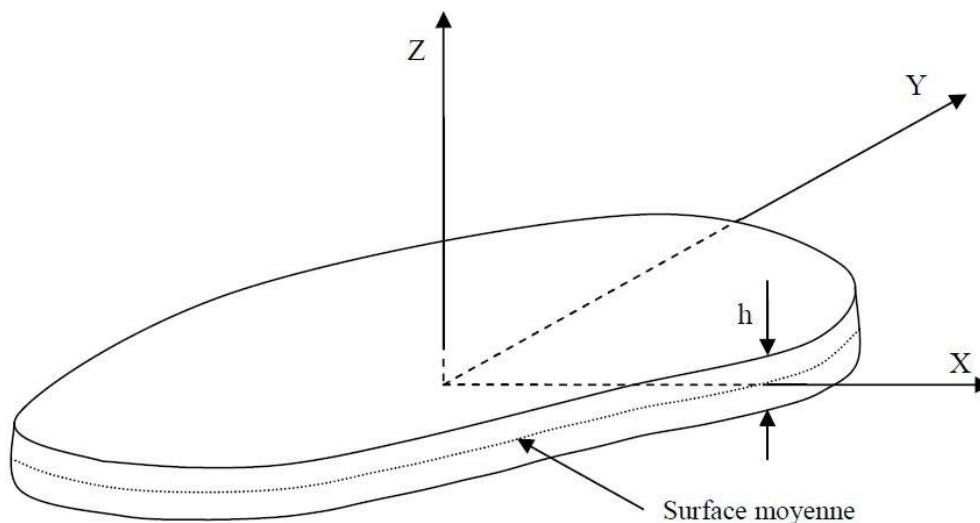


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

II.3-Les modèles analytiques des plaques

II.3.1-Théorie classique des plaques (CPT)

La théorie CPT, la théorie classique des plaques, se présente comme la plus simple des approches ESL. Cette théorie se base sur les hypothèses de Kirchhoff-Love, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation et gardera la même longueur (figure II.2), Elle suppose les hypothèses ci-après:

1. La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.

2. Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).

On admet dans ce cas que **la déformation due à l'effort tranchant est nulle** et ne participe pas à la rigidité.

3. le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du plan neutre ;

4. l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$);

.Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où (u, v, w) représente le vecteur des déplacements, d'un point matériel de coordonnées nominales (x, y, z) , de même (u_0, v_0, w_0) ce sont les déplacements du feuillet moyen. Le plan principal de la plaque est le plan x - y et l'épaisseur h de cette dernière est orientée selon l'axe z (avec $z \in [-h/2, h/2]$).

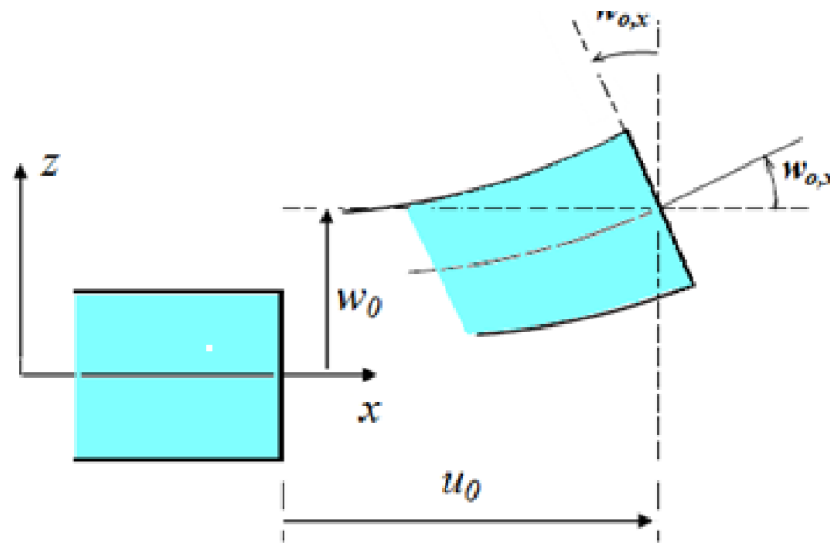


Figure II.2: Cinématique de Love-Kirchhoff

II.3.2- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la section précédente, nous avons montré que la théorie élémentaire permettait uniquement d'analyser la dispersion des ondes à basses fréquences. Nous devons donc employer une autre théorie si l'on veut pouvoir caractériser les ondes principales et secondaires à des fréquences plus élevées. On peut donc utiliser la théorie FSDT proposée par Whitney et al. qui est une extension de la théorie du premier ordre proposée dans Mindlin pour étudier les ondes transversales et qui revoit l'hypothèse (La section droite de la plaque reste perpendiculaire au feuillet moyen) de la théorie élémentaire de Kirchhoff-Love en tenant compte des déformations liées au cisaillement transverse, ainsi que des inerties de rotation de section. Pour chacune de ces théories approchées, le matériau composite stratifié est homogénéisé complètement ; c'est pourquoi elles sont souvent désignées par le terme de couche unique équivalente. Du fait de ces nouvelles hypothèses, le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Avec : ϕ_x , ϕ_y représentent les angles de rotations totales de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement (figure II.8), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + w_{0,x} \quad , \quad \phi_y = \gamma_{yz}^0 + w_{0,y}$$

Où γ_{xz}^0 , γ_{yz}^0 les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

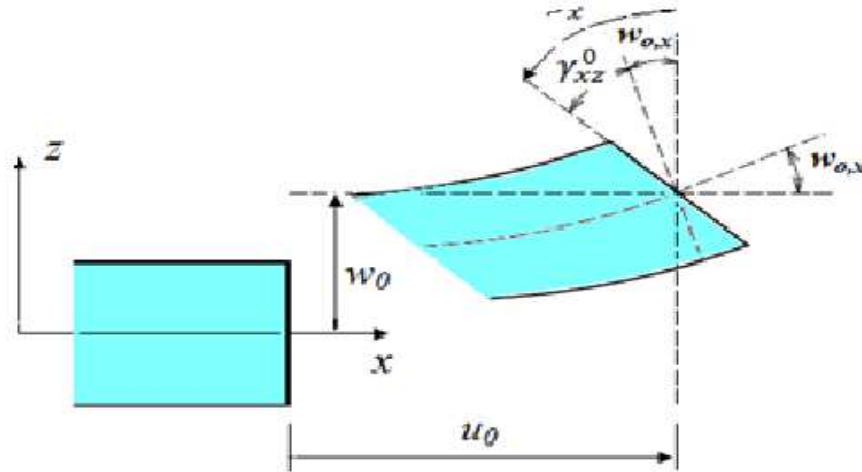


Figure II.3 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

II.3.3- Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou coques épaisses, où la déformation en cisaillement transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des déformations en cisaillement transverse quadratiques dans l'épaisseur. Le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Où les variables ϕ_x , ϕ_y représentent les rotations des sections déformées autour des axes x et y respectivement (termes du premier ordre), tandis que θ_x , θ_y symbolisent les termes du second ordre (courbure) et ψ_x , ψ_y les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la plaque ou la coque est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les peaux du stratifié (figure II.9).

La première hypothèse entraîne alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique à celui du terme linéaire, ce qui réduit finalement le problème à un même niveau de complexité que le modèle FSDT (seulement cinq inconnues u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x , ϕ_y). La précision des rigidités de stratifié ainsi obtenues avec les méthodes HSDT est nettement supérieure à celle trouvée à l'aide des théories d'ordre inférieur et le recours au facteur de correction de cisaillement n'est généralement pas nécessaire. Par contre, comme toutes les théories ESLM basées sur une approximation du déplacement uniquement, les contraintes inter-laminaires ne sont toujours pas continues à l'interface entre les stratifiés, même si ces dernières se rapprochent des contraintes réelles.

Si d'un point de vue de la précision en fonction de l'effort de calcul, les théories du troisième ordre simplifiées semblent optimales, des modèles HSDT d'ordre plus élevé restent bien plus précis dans le cas de coques épaisses fortement orthotropes. Le développement de l'équation (II.4) est utilisé avec l'annulation des termes du second ordre (θ_x , θ_y), l'expression du champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0x}(x, y) + f(z)\gamma_{xz}^0(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0y}(x, y) + f(z)\gamma_{yx}^0(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

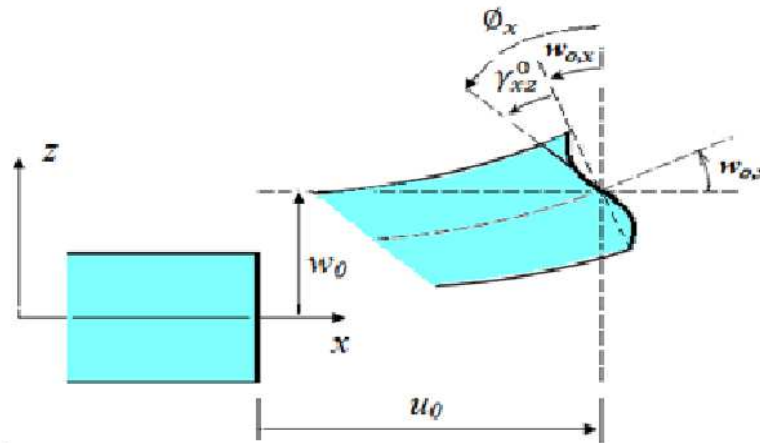


Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérise l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque stratifié, Il faut également noter que l'expression de cette fonction est variable selon les différentes théories existantes dans la littérature.

A savoir que $f(z)=0$ pour le cas de la théorie classique des plaques stratifiées, par contre $f(z)=z$ au titre de la théorie du premier ordre en cisaillement transverse.

II.3.4. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002 un modèle raffiné pour les plaques isotropes qu'on a nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory). Cette méthode propose des caractéristiques très intéressantes tel que la non nécessité d'un coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments.

II.3.4.1. Hypothèses de base (RPT)

Les hypothèses de la théorie raffinée des plaques de Shimpi (2002) sont :

- Le déplacement est petit par rapport à l'épaisseur de la plaque,
- La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y ,
- Le déplacement $w(x, y)$ normal au plan médian de la plaque est la somme des deux composantes de la flexion $w_b(x, y)$ et de cisaillement $w_s(x, y)$,
- Les déplacements aux plans $u(x, y)$ et $v(x, y)$ suivant les axes x et y sont constitués de deux composantes de flexion et de cisaillement $u_0(x, y)$ et $v_0(x, y)$ dues aux forces normales au plan.
- Les composantes de flexion $u_b(x, y)$ et $v_b(x, y)$ sont considérées comme semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques :

$$u_b(x, y) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (II.5)$$

$$v_b(x, y) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}$$

- Les composantes de cisaillement $u_s(x, y)$ et $v_s(x, y)$ sont liées à la composante de déplacement de cisaillement w_s .

Après le développement de la théorie RPT par Shimpi (2002), La fiabilité de cette méthode a été démontrée par plusieurs chercheurs. Kim et Thaï.(2009), en (2011) des chercheurs ont adapté la RPT avec succès au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement. Thaï et Uy (2013) ont reformulé la RPT basée sur la surface neutre et ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG type Levy. Des solutions analytiques pour la déflexion, la charge de flambement et la fréquence naturelle ont été obtenues pour les plaques dans des conditions limites arbitraires en utilisant la méthode des solutions de Sobhy (2013). En effet Thaï et Choi (2014) ont amélioré la RPT en introduisant l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques basant sur une fonction tangentielle inverse.

II.3.4.2. Modèles de théories raffinées

Senthilnathan et al. (1987 et 1988) ont développé une théorie de déformation par cisaillement simplifiée, Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refine Plate Théorie). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji *et al.* (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu brièvement les différentes théories classiques des plaques pour les matériaux composites et leurs domaines d'applications. La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), permet de décrire avec une bonne précision les champs de contrainte et déformation dans le cas où la plaque mince ou modérément épaisse. Pour les plaques épaisses la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), devient assez bien adaptée à la description du comportement mécanique .

Chapitre III

Etude analytique des systèmes vibrationnels et flexionnels des plaques FG sur fondation élastique

CHAPITRE III

ETUDE ANALYTIQUE DES SYSTEMES VIBRATIONNELS ET FLEXIONNELS DES PLAQUES FG SUR FONDATION ELASTIQUE

III.1 Introduction

Le comportement en flexion des plaques engendre des contraintes de cisaillement, les effets de déformation de cisaillement sont plus prononcés dans les plaques épaisses et moyennement épaisses lorsqu'elles sont soumises à des charges transversales que dans les plaques minces soumises à une charge similaire. Afin de décrire le comportement en flexion des plaques FGM correctement, y compris les effets de déformation de cisaillement et le gauchissement transversal associé, des théories de déformation de cisaillement sont nécessaires.

Dans ce chapitre, Nous présentons en détail une nouvelle théorie simple d'ordre élevé de la déformation par cisaillement pour la réponse vibrationnel et flexionnel d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak fonctionnellement soumises à des charges mécaniques qui se déduites via un modèle analytique du principe de l'énergie potentielle et en appliquant la procédure de Navier .

La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte les différents paramètres avec seulement cinq variables inconnus.

III.2. Modélisation mathématique

III.2.1. Propriétés fonctionnellement classées

Dans ce travail, Considérons une plaque rectangulaire de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h en matériau graduellement fonctionnelle posée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak uniformes comme présenté dans la figure III. 1.

Les propriétés du matériau de la plaque graduellement fonctionnelle, telles que le module de Young E , sont supposées être fonction de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Contrairement aux théories mentionnées précédemment, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la présente théorie est seulement cinq variables.

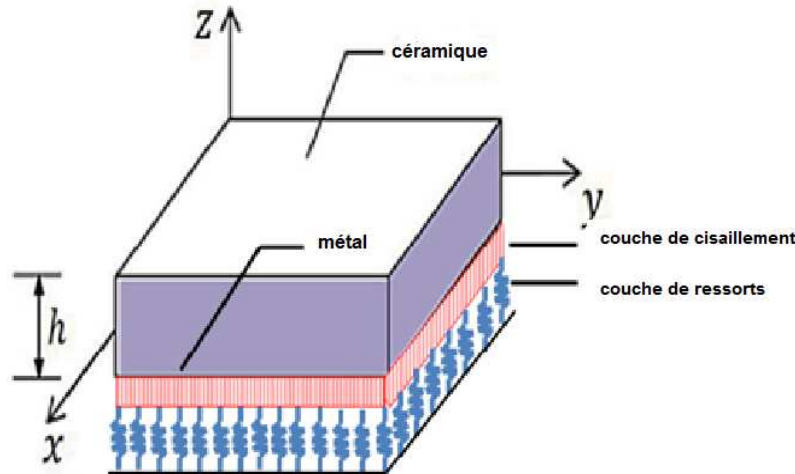


Figure. III.1: Géométrie de la plaque FG posée sur fondation élastique Winkler-Pasternak

Les propriétés effectives du matériau sont calculées via diverses lois de mélange dans lesquelles les propriétés varient progressivement et continuellement dans la direction de l'épaisseur selon la fonction linéaire, cubique, quadratique et quadratique inverse des fractions volumiques de céramique. Les matériaux dominants dans les surfaces supérieure et inférieure sont respectivement la céramique et le métal. Ainsi, les propriétés effectives en tant que (module de Young $E(z)$ et densité de masse $\rho(z)$) de divers types de plaques FG sont calculées via la formule de loi-mélange suivante :

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m, \quad \text{avec} \quad V_c + V_m = 1 \quad (1)$$

où les propriétés P_c et P_m correspondent aux matériaux céramiques et métalliques et les fractions volumiques de céramique (V_c) et de métal (V_m) selon la fonction linéaire, quadratique, cubique et quadratique inverse (Sofiyev et al. 2006) sont exprimées par :

- Plaque FG type I (linéaire)

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (2a)$$

- Plaque FG type II (Cubique)

$$V_c(z) = \left[3 \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^3 \right] \quad (2b)$$

- Plaque FG type III (Quadratique)

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2c)$$

- Plaque FG type IV (Inverse Quadratique)

$$V_c(z) = \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \quad (2d)$$

III .2.2. Champ de déplacement généralisé

Contrairement à la théorie des plaques minces CPT qui néglige l'effet de cisaillement transverse et la FSDT qui suppose des contraintes de cisaillement constantes à travers les épaisseurs et les théories HSDT qui donnent une variation parabolique des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur et assurent leur nullité sur les surfaces supérieure et inférieure. Le modèle développé prend en compte les mêmes hypothèses des théories HSDT et considérant la déformation normale transverse, le champ de déplacement généralisé du courant quasi 3D HSDT s'exprime sous forme intégrale comme :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \xi_1 f(z) \int \varphi(x, y, t) dx \quad (3a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \xi_2 f(z) \int \varphi(x, y, t) dy$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + w_{st}(x, y, z, t)$$

La composante de déplacement w_{st} due à la déformation normale transversale (étirement en épaisseur) peut être donnée par :

(3b)

$$w_{st} = g(z)\theta_z(x, y, t)$$

La fonction de forme de déformation de cisaillement choisie $f(z)$ donne une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales sur les surfaces libres (supérieure et inférieure) de la plaque FG simplement supportée sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. La fonction de déformation est combinée à partir de fonctions cubiques, trigonométriques et exponentielles comme (Karami et Janghorban 2019)

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z\pi}{h} \right) + ze^{-2(z/h)^2} \quad (4a)$$

Avec :

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} = 1 - \frac{4z^2}{h^2} - \cos \left(\frac{z\pi}{h} \right) + \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) e^{-2(z/h)^2} \quad (4b)$$

Les déformations non nulles du présent modèle sont calculées à partir du champ de déplacements de l'Equation (3), les formulations des souches sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_1 \varphi \\ k_2 \varphi \\ \xi_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi dx + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \varphi dy \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} k_2 \int \varphi dy + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \\ k_1 \int \varphi dx + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \varepsilon_z = g'(z) \theta_z \quad (5b)$$

Sur la base de la procédure de Navier de condition aux limites simplement appuyée, les termes d'intégrale apparaissent dans l'équation ci-dessus des déformations et des déplacements sont obtenus comme (Rachedi et al. 2020):

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \varphi dx = \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \varphi dy = \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \int \varphi dx = \eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \int \varphi dy = \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (6)$$

Avec :

$$\eta_1 = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{\mu^2}, \quad \xi_1 = \lambda^2, \quad \xi_2 = \mu^2 \quad (7)$$

Où les paramètres ξ_1 , ξ_2 , η_1 , et η_2 dépendant de la géométrie et de la condition aux limites λ et μ , sont définis dans l'équation (15).

Pour un modèle quasi-3D avec $\varepsilon_z \neq 0$, la relation constitutive linéaire contraintes-déformations dans le repère global (x, y, z) peut être exprimée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Où $\{\sigma_{ij}\}$ et $\{\varepsilon_{ij}\}$ sont les vecteurs de contraintes et de déformations. (Q_{ij}) sont des coefficients de rigidité et peuvent être exprimés en suivant la formulation mathématique

$$Q_{11} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad Q_{22} = Q_{33} = Q_{11} \quad (9a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad Q_{13} = Q_{23} = Q_{12} \quad (9b)$$

$$Q_{44} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad Q_{55} = Q_{66} = Q_{44} \quad (9c)$$

III .2.3. Équations directrices

Pour l'analyse statique et dynamique de la plaque FG simplement supportée, les équations gouvernantes sont dérivées via le principe de Hamilton. En utilisant le champ de déplacements des Equations (3) et relations constitutives (Equation 8) et en appliquant la réaction de Winkler Pasternak, les équations gouvernantes sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} &= 0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial t^2} &= 0 \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + q - q_F - I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_7 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} - I_2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_3 \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_5 \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2 \partial t^2} \right) &= 0 \\
 \delta \varphi : -\xi_1 M_x^s - \xi_2 M_y^s + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} - I_4 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \right) & \\
 + I_5 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_6 \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2 \partial t^2} \right) & \\
 \delta \theta_z : \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} - N_z = I_7 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_8 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} &
 \end{aligned} \tag{10}$$

où les moments N, M^b, M^s et contraintes Q^s résultants et apparaissant dans les équations ci-dessus sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \tag{11a}$$

$$(Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \tag{11b}$$

Dans cette étude, le type de fondation élastique Winkler Pasternak est utilisé. Le modèle contient deux paramètres élastiques (Winkler et Pasternak). La réaction de la fondation est définie comme (Shahsavari et al. 2018),

$$q_{Pasternak} = K_w w_0 - G_p \nabla^2 w_0 \tag{12a}$$

Où G_p est la rigidité de cisaillement et ∇^2 représente les coordonnées cartésiennes rectangulaires, l'opérateur différentiel de Laplace est défini comme :

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad (12b)$$

La charge externe q agissant sur la surface supérieure de la plaque FG est présentée sous la forme suivante :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (13)$$

Où $Q_{mn} = q_0$ pour la charge distribuée de manière sinusoïdale et $Q_{mn} = (16q_0 / mn\pi)$ quand la charge externe est uniformément distribuée.

III.2.4. La procédure de Navier

Dans cette étude, la plaque est supposée simplement appuyée sur les quatre bords. A cet effet, la solution analytique des équations gouvernantes est obtenue en appliquant la procédure de Navier. Les cinq déplacements inconnus sont présentés sous forme de séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\beta \mu) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\beta \mu) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\beta \mu) \\ \Phi_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\beta \mu) \\ \Theta_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\beta \mu) \end{Bmatrix} \times e^{i\omega t} \quad (14)$$

Avec :

$$\lambda = m\pi / a \quad \text{et} \quad \mu = n\pi / b \quad (15)$$

Où m et n sont le numéro du mode et ω est la fréquence propre du système vibrationnel libre et $\sqrt{i} = -1$.

En substituant les composantes de rigidité et les inerties suivantes des Equations (16) et (17) dans l'équation (8) et les résultats dans l'équation (10) et en appliquant la procédure de Navier, l'équation du mouvement peut être obtenue en fonction des cinq variables inconnues de la HSDT quasi-3D actuelle, les inerties (I_i) et les composants de rigidité sont définis comme :

$$\begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \\ B_{ij}^s \\ D_{ij}^s \\ H_{ij}^s \\ A_{ij}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ z f(z) \\ f^2(z) \\ g^2(z) \end{pmatrix} Q_{ij} dz ; \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ z f(z) \\ f^2(z) \\ g(z) \\ g^2(z) \end{pmatrix} \rho(z) dz \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Y_{ij}^s \\ Z_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \end{pmatrix} g'(z) Q_{ij} dz \quad (17)$$

Les solutions analytiques de flexion et de vibration libre de la plaque FG peuvent être obtenues sous la forme matricielle suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} & \mathcal{K}_{13} & \mathcal{K}_{14} & \mathcal{K}_{15} \\ \mathcal{K}_{12} & \mathcal{K}_{22} & \mathcal{K}_{23} & \mathcal{K}_{24} & \mathcal{K}_{25} \\ \mathcal{K}_{13} & \mathcal{K}_{23} & \mathcal{K}_{33} & \mathcal{K}_{34} & \mathcal{K}_{35} \\ \mathcal{K}_{14} & \mathcal{K}_{24} & \mathcal{K}_{34} & \mathcal{K}_{44} & \mathcal{K}_{45} \\ \mathcal{K}_{15} & \mathcal{K}_{25} & \mathcal{K}_{35} & \mathcal{K}_{45} & \mathcal{K}_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & M_{45} \\ M_{15} & M_{25} & M_{35} & M_{45} & M_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \\ \Theta_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

L'élément de matrice de rigidité (\mathcal{K}_{ij}) et la matrice de masse (M_{ij}) sont définis en annexe.

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement en flexion et en vibration des plaques en matériaux à gradient de propriétés «céramique et métal» en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé à cinq inconnus.

La théorie présentée permet d'examiner les comportements en flexion et vibration libre de plaque rectangulaires simplement supportées . Les résultats présentés dans le chapitre suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette nouvelle théorie en tenant compte l'influence de différents paramètres tels que la composition du matériau, la réaction de la fondation, la géométrie et le rapport d'aspect, le paramètre du matériau et le rapport de module sur les caractéristiques de flexion et de vibration libre.

Chapitre IV

Résultats et discussions

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1. Introduction

L'intérêt principal de ce chapitre est de présenter l'évaluation et la validation de la théorie développée pour l'analyse du comportement en flexion et en vibration des plaque FG reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak soumises à des charges mécaniques uniformes et sinusoïdales, cette théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à cinq inconnus seulement

IV.2. Résultats et discussions

Dans cette section, divers résultats obtenus en utilisant les formulations actuelles sont présentées et comparés avec divers modèles existants dans la littérature pour montrer la précision et l'efficacité de la théorie quasi-3D HSDT de cinq variables.

Les propriétés des composants de la plaque FG sont résumées dans le tableau IV.1.

Tableau IV. 1 : Propriétés métalliques et céramiques des plaques FG.

Propriétés	Aluminum (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)	Zircon (ZrO ₂)
module de Young (GPa)	70	380	200
densité de masse (kg/m ³)	2702	3800	5700
Coefficient de Poisson	0.3		

Pour plus de simplicité et en raison du faible effet du coefficient de Poisson sur la réponse de la plaque FG. Le taux de poisons est supposé constant à travers l'épaisseur de tous les types de plaques FG étudiés (Akavci et Tanrikulu 2015).

IV.2.1. Analyse dynamique

Cette première partie des résultats est réservée pour l'analyse dynamique de plaques FG simplement supportées avec et sans fondation élastique. Les valeurs des fréquences sont calculées sous la forme sans dimension comme:

$$\varpi = \omega h \sqrt{\rho / G} ; \hat{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c} ; \hat{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m} ; \omega^* = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c} \tag{19}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{a}{h} ; \zeta = \frac{a}{b} ; K_w = \frac{k_w D}{a^4} ; G_p = \frac{k_s D}{a^2} ; D = (E_m h^3) / (12(1 - \nu_m^2)).$$

Dans le tableau IV.2, la plaque isotrope est obtenue lorsque l'indice de loi de puissance p tend vers zéro « plaque entièrement céramique » ou l'infini « plaque métallique » (Akavci et Tanrikulu 2015). Pour $p=0$, la plaque a les propriétés $E_c = 380\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ and $\rho_c = 3800\text{kg/m}^3$ Le tableau IV.2 présente une comparaison des fréquences naturelles $\varpi = \omega h \sqrt{\rho / G}$ d'une plaque isotrope carrée simplement supportée. Les résultats tabulés montrent que la formulation actuelle donne d'excellents résultats des fréquences ϖ . Pour toutes les valeurs du nombre de mode (m,n) , les résultats obtenus sont en bon accord avec d'autres modèles quasi-3D développés par (Shahsavari et al., 2018b, Farzam-Rad et al., 2017 et Akavci et Tanrikulu 2015 et Jha et al., 2013) et une solution exacte basée sur l'élasticité tridimensionnelle (Srinivas et al. 1970).

Tableau IV. 2 : Fréquences propres ϖ pour une plaque isotrope avec $(a/b=1, a/h=10)$.

Théorie	ε_z	Vibrationnel Mode (m, n)							
		(1.1)	(1.2)	(2.2)	(1.3)	(2.3)	(3.3)	(2.4)	(1.5)
Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.0932	0.2228	0.3424	0.4176	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.0932	0.2227	0.3423	-	0.5243	0.6896	0.7520	0.9284
Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	-	0.5240	0.6892	0.7514	0.9274
Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4172	0.5240	0.6892	0.7515	0.9275
Quasi-3D HSDT ^(d)	$\neq 0$	0.0932	0.2227	0.3424	0.4176	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
3D solution ^(e)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4171	0.5239	0.6889	0.7511	0.9268

- (a) Farzam-Rad et al., (2017)
- (b) Shahsavari et al., (2018)
- (c) Jha et al. (2013)
- (d) Akavci and Tanrikulu (2015)
- (e) Srinivas et al. (1970)

Le tableau IV.3 présente une comparaison des fréquences naturelles non dimensionnelles ω_c d'une plaque PFG carrée simplement supportée en aluminium en tant que matériau métallique et en alumine en tant que matériau céramique. Les résultats sont calculés pour différents indices d'inhomogénéité ($p=0 ; 0,5 ; 1 ; 4$ et 10). On peut observer que pour toutes les valeurs de (p), le présent modèle donne des résultats proches de ceux obtenus via d'autres HSDT quasi-3D. De la comparaison entre la théorie HSDT et le modèle actuel, on peut noter que la fréquence naturelle du modèle HSDT est plus petite par rapport à celles de la théorie quasi-3D et cela est dû à l'effet de la déformation normale transversal $\varepsilon_z \neq 0$.

Tableau IV .3 : Comparaison des quatre premières fréquences naturelles ω_c pour Al/Al₂O₃ une plaque carrée ($a/h=10$).

Mode	Théorie	ε_z	Paramètre d'inhomogénéité				
			0	0.5	1	4	10
premier mode	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	5.7808	4.9410	4.4907	3.8934	3.6827
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	5.7777	4.9170	4.4270	3.8110	3.6420
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	5.7807	4.9410	4.4907	3.8934	3.6827
	2D HSDT ^(b)	0	5.7695	4.9015	4.4193	3.8064	3.6365
Deuxième mode	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	13.817	11.851	10.773	9.2314	8.6768
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	13.810	11.800	10.630	9.0450	8.5880
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	13.817	11.851	10.773	9.2314	8.6768
	2D HSDT ^(b)	0	13.765	11.739	10.590	9.0224	8.5613
Troisième mode	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	21.237	18.269	16.609	14.099	13.186
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	21.210	18.190	16.400	13.830	13.060
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	21.237	18.268	16.609	14.099	13.186
	2D HSDT ^(b)	0	21.127	18.073	16.313	13.777	13.002

(a) Matsunaga (2008)

(b) Akavci and Tanrikulu (2015)

Le tableau IV.4 donne les valeurs des fréquences ω^* de la plaque FG à loi de puissance simplement supportée en fonction du paramètre d'inhomogénéité et du rapport de géométrie \mathfrak{R} . D'après les comparaisons, il est clair que le modèle actuel donne presque les mêmes valeurs de fréquences fondamentales ω^* que celles obtenues via des HSDT quasi 3D (Matsunaga 2008, Sheikholeslami et Saidi 2013 et Akavci et Tanrikulu 2015). Les plus grandes valeurs de la fréquence sont obtenues pour ($\mathfrak{R} = 2$) car la plaque est épaisse. La plaque en céramique donne les valeurs les plus élevées de ω^* . On voit aussi que l'omission de l'effet d'étirement conduit à réduire les valeurs des fréquences.

Tableau IV. 4 : Fréquences fondamentales ω^* de la plaque carrée Al/Al2O3.

\mathfrak{R}	Théorie	ε_z	Paramètre d'inhomogénéité				
			0	0.5	1	4	10
2	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.9440	0.8269	0.7536	0.6063	0.5506
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.9400	0.8232	0.7477	0.5997	0.5460
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.9400	0.8223	0.7475	0.5995	0.5461
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.9440	0.8269	0.7536	0.6063	0.5506
	2D HSDT ^(c)	0	0.9303	0.8115	0.7360	0.5921	0.5413
	FSDT ^(d)	0	0.9265	0.8060	0.7331	0.6112	0.5640
5	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.2123	0.1827	0.1661	0.141	0.1319
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.2121	0.1818	0.1640	0.1382	0.1306
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.2124	0.1827	0.1661	0.1410	0.1319
	2D HSDT ^(c)	0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
	2D TSDT ^(e)	0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	FSDT ^(d)	0	0.2111	0.1804	0.1629	0.1395	0.1323
10	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	2D HSDT ^(c)	0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0380	0.0363
	2D TSDT ^(e)	0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	FSDT ^(d)	0	0.0576	0.0489	0.0441	0.0381	0.0365
20	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.0113	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	2D HSDT ^(c)	0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	2D TSDT ^(e)	0	0.0113	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

- (a) Matsunaga (2008)
- (b) Sheikholeslami and Saidi (2013)
- (c) Akavci and Tanrikulu (2015)
- (d) Zhu and Liew (2011)
- (e) Hosseini-Hashemi et al. (2011)

Les fréquences fondamentales $\hat{\omega}$ de la plaque FG simplement supportée en fonction du rapport longueur-épaisseur \mathfrak{R} et des paramètres d'inhomogénéité (p) sont présentées dans le tableau IV.5 La plaque FG est faite d'aluminium et de zircon. On peut à nouveau conclure que le modèle actuel est en bon accord avec diverses élasticités quasi-3D et 3D existantes dans la littérature. on peut observer que la plaque FG épaisse donne les valeurs les plus faibles de la fréquence fondamentale $\hat{\omega}$. On peut conclure aussi que l'augmentation des valeurs du paramètre d'inhomogénéité conduit à augmenter la fréquence de la plaque.

Tableau IV .5 : Comparaison des fréquences fondamentales $\hat{\omega}$ pour la plaque carrée Al/ZrO2 ($m=n=1$) (Modèle Mori-Tanaka).

Théorie	ε_z	plaque Céramique		$p = 1$			$\mathfrak{R} = 5$		
		$\mathfrak{R} = \sqrt{10}$	$\mathfrak{R} = 10$	$\mathfrak{R} = 5$	$\mathfrak{R} = 10$	$\mathfrak{R} = 20$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	4.6672	5.7807	5.4854	5.9724	6.1215	5.5069	5.5394	5.5659
Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	4.6606	5.7769	5.4796	5.9578	6.1040	5.4919	5.5279	5.5633
Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	4.6672	5.7807	5.4829	5.9676	6.1160	5.5064	5.5388	5.5644
Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	-	-	5.4825	5.9600	6.1200	5.4950	5.5300	5.5625
Quasi-3D HSDT ^(d)	$\neq 0$	4.6582	5.7769	5.7123	6.1932	6.3390	5.6599	5.6757	5.7020
3D solution ^(e)	$\neq 0$	4.6582	5.7769	5.4806	5.9609	6.1076	5.4923	5.5285	5.5632

(a) Tiré d'Alijani et Amabili (2014)

(b) Tiré de Akavci et Tanrikulu (2015)

(c) Tiré de Neves et al. (2012a)

(d) Tiré de Matsunaga (2008)

(e) Tiré de Vel et Batra (2004)

Les effets des paramètres de fondation élastique (k_w, k_s) , du type FGM, de la géométrie et des rapports d'aspect sur les fréquences fondamentales $(\hat{\omega})$ de la plaque FG isotrope et à loi de puissance simplement supportée sont présentés dans les Figures. IV.1 et IV.2. On peut observer que la répartition du matériau dans le corps de la plaque a un rôle important dans la réponse vibratoire de la structure. D'après les graphiques tracés, il est remarquable que la plus petite valeur de la fréquence fondamentale $(\hat{\omega})$ est obtenue pour la plaque en aluminium et cette augmentation de fréquence pour la plaque FG et au maximum dans le cas de la plaque en céramique, nous pouvons conclure que pour la plaque FG la fréquence la plus élevée est obtenu pour une distribution quadratique inverse du matériau à travers l'épaisseur de la plaque. La fréquence fondamentale $(\hat{\omega})$ est en relation de corrélation directe avec la géométrie (\mathfrak{R}) et les rapports d'aspect (ζ) .

On peut observer aussi que la plaque sur fondation élastique Winkler-Pasternak avec $(k_w = 100, k_s = 10)$ donne les plus grandes valeurs de la fréquence (ω) car la présence de la fondation (Winkler-Pasternak) augmente la rigidité de la plaque.

La figure IV.3 présente la variation de la fréquence fondamentale (ω) d'une plaque isotrope et FG avec et sans fondation élastique en fonction du rapport de module (E_m / E_c) et du type de distribution de fraction volumique. A partir de la courbe obtenue, nous pouvons voir que la fréquence fondamentale (ω) augmente avec l'augmentation du rapport (E_m / E_c) . On confirme à nouveau que la fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ est en relation de corrélation directe avec les paramètres de fondation élastique car la présence de cette dernière rend la plaque plus rigide.

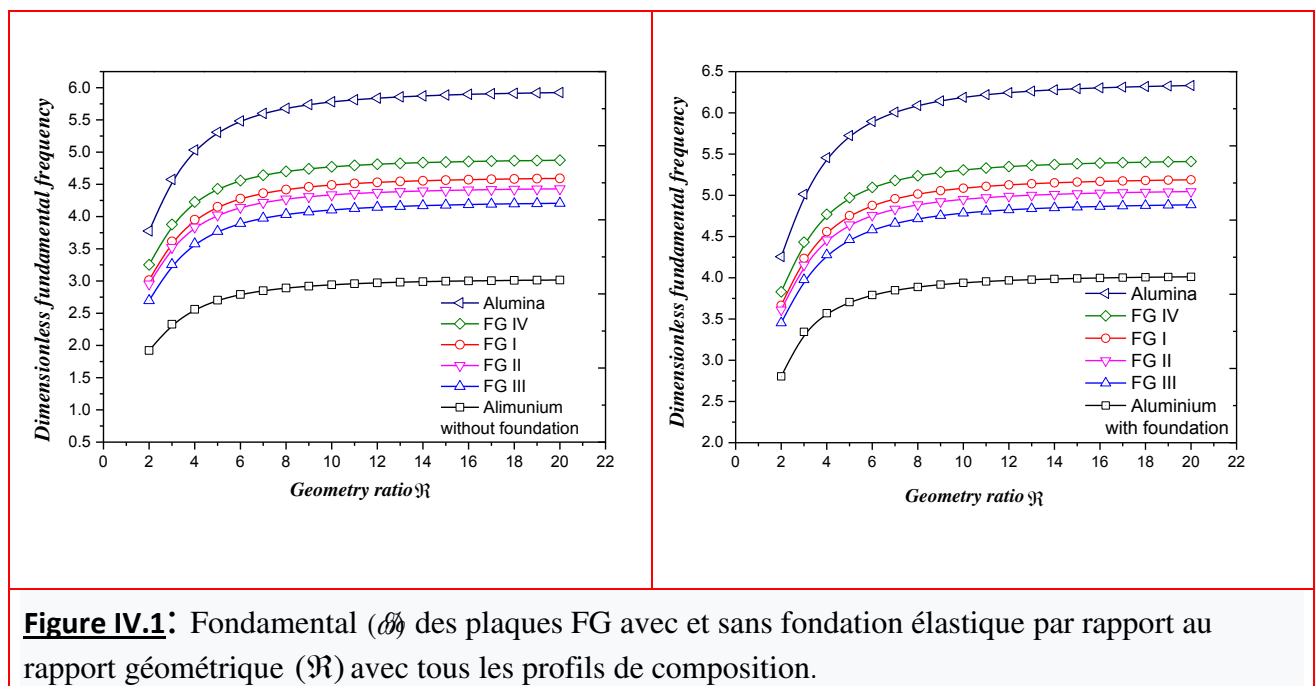


Figure IV.1: Fondamental (ω) des plaques FG avec et sans fondation élastique par rapport au rapport géométrique (\mathfrak{R}) avec tous les profils de composition.

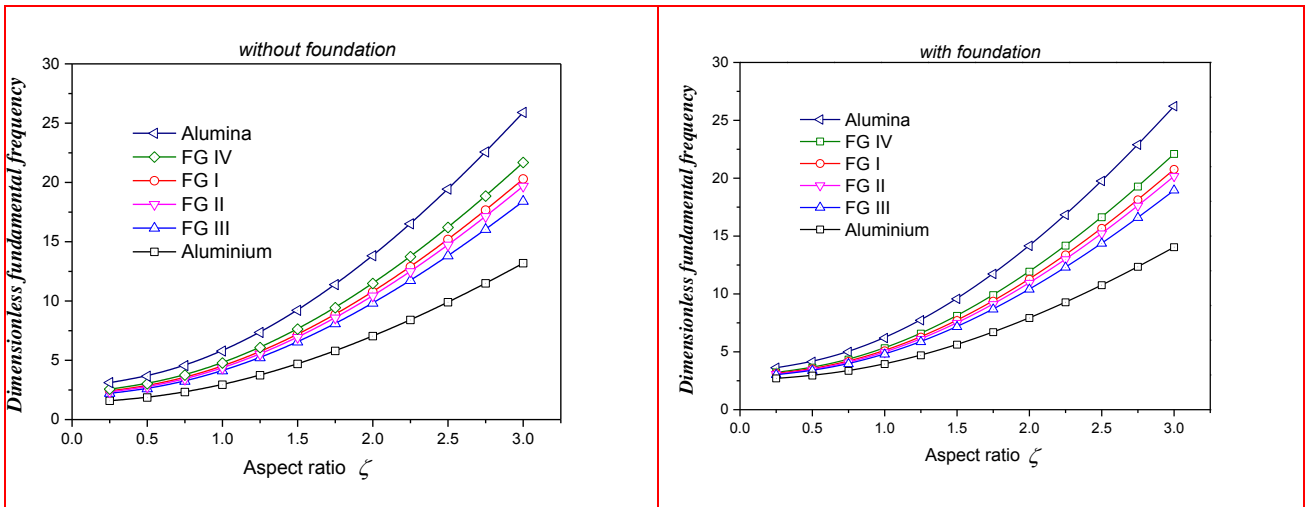


Figure IV.2: Plaques FG fondamentales (ω) avec et sans fondation élastique par rapport au rapport géométrique (ζ) avec tous les profils de composition et ($\mathfrak{R} = 10$).

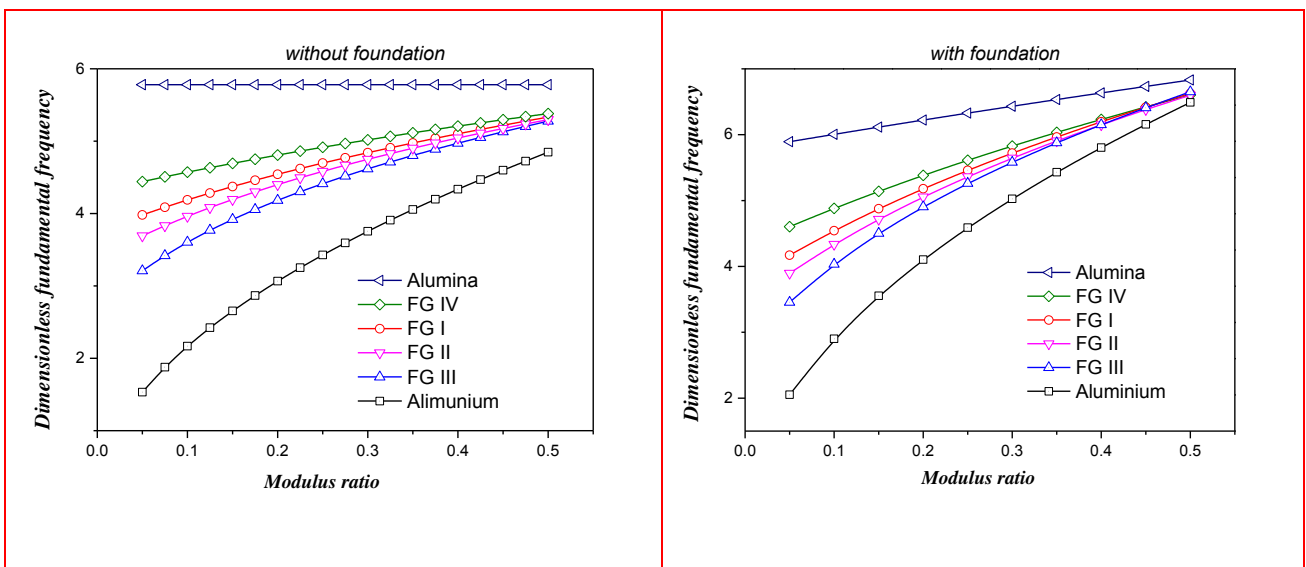


Figure IV.3: L'effet du rapport de module sur le fondamental non dimensionnel (ω) d'une plaque FG avec et sans fondation élastique..

IV.2.2. Analyse de pliage

IV.2.2.1. Plaques FG en loi de puissance

La première partie de l'analyse de flexion est réservée à la réponse statique d'une plaque FG à loi de puissance simplement appuyée avec et sans fondation élastique soumise à une charge mécanique transversale uniforme et sinusoïdale. Les résultats des contraintes et des déplacements sont calculés à l'aide des formulations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_x(z) = \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_y(z) = \frac{h}{aq_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}(0, 0, z), \\ \bar{\tau}_{xz}(z) &= \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{yz}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Le tableau IV.6 donne les valeurs du déplacement transversal (\bar{w}), des contraintes normales ($\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$), de la contrainte de cisaillement plane ($\bar{\tau}_{xy}$) et des contraintes de cisaillement transverse ($\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$) de la plaque de puissance loi-FG sous une charge transversale mécanique uniforme. Les résultats sont calculés pour divers paramètres d'inhomogénéité ($p=1,2,3,4$ et 10). A partir des comparaisons effectuées dans le tableau avec les théories 2D et quasi-3D (Akavci et Tanrikulu 2015), nous pouvons conclure que le modèle actuel donne un excellent résultat pour l'analyse de flexion.

On peut également observer que la flèche centrale (\bar{w}) et les contraintes dans le plan σ_x et σ_y sont en relation directe avec l'indice d'inhomogénéité p . Mais ceci est inversé dans le cas des contraintes de cisaillement τ_{xz} et de cisaillement τ_{xy} . On voit que les valeurs de flèche les plus faibles sont obtenues pour un gradient d'indice $p=0$ car la plaque est plus rigide (entièrement céramique).

Tableau IV. 6 : Le déplacement sans dimension et les contraintes d'une plaque carrée Al/Al₂O₃ FGM sous une charge uniformément répartie ($a/h=10$).

Inhomogénéité indice (p)	Théorie	ε_z	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(h/6)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$
0	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.4635	2.9980	1.8925	0.4781	0.4315	1.2578
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.4635	2.9981	1.8925	0.4782	0.4315	1.2578
	2D HSDT ^(a)	0	0.4665	2.8909	1.9103	0.4988	0.4363	1.2857
1	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.8977	4.6110	2.0822	0.4782	0.5120	1.0221
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.8977	4.6110	2.0822	0.4782	0.5119	1.0211
	2D HSDT ^(a)	0	0.9288	4.4705	2.1693	0.4988	0.5364	1.1141
2	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	1.1376	5.3825	1.9257	0.4524	0.5081	0.8921
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	1.1376	5.3825	1.9257	0.4524	0.5081	0.8921
	2D HSDT ^(a)	0	1.1940	5.2248	2.0342	0.4581	0.5643	0.9909
4	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	1.3259	6.0382	1.6062	0.4358	0.4804	0.9274
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	1.3259	6.0382	1.6062	0.4358	0.4804	0.9274
	2D HSDT ^(a)	0	1.3888	5.8855	1.7205	0.4090	0.5253	1.0305
10	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	1.5453	7.5123	1.2016	0.4332	0.4561	0.9860
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	1.5453	7.5123	1.2016	0.4332	0.4561	0.9860
	2D HSDT ^(a)	0	1.5875	7.3617	1.2828	0.4436	0.4159	1.0705

(a) Akavci and Tanrikulu (2015)

Le tableau IV.7 affiche le déplacement central transversal (\bar{w}), contraintes normales ($\bar{\sigma}_x$), de la loi de puissance-plaque FG sous charge mécanique transversale sinusoïdale. A partir des comparaisons effectuées. Nous pouvons confirmer que le modèle actuel donne presque les mêmes résultats que le HSDT quasi-3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). Aussi il est remarquable que la prise en compte de la déformation transversale (ε_x) conduit à réduire les valeurs de la flèche centrale transversale (\bar{w}). Il est clair dans le tableau que le modèle actuel avec seulement cinq variables inconnues donne de bons résultats de déplacement et de contraintes non dimensionnels. On peut conclure aussi que la flèche centrale est en relation inverse avec la valeur du rapport géométrique car la plaque devient mince lorsque a/h est augmentée.

Tableau IV. 7 : Flèche centrale (\bar{w}) et contraintes ($\bar{\sigma}_x$) de Al/Al₂O₃ la plaque carrée FGM sous charge répartie sinusoïdale.

Inhomogénéité indice (p)	Théorie	ε_z	$\bar{\sigma}_x(h/3)$			$\bar{w}(0)$		
			a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
1	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.5754	1.4322	14.306	0.6908	0.5691	0.5457
	Quasi-3D HSDT (a)	$\neq 0$	0.5754	1.4322	14.306	0.6908	0.5691	0.5457
	Quasi-3D HSDT (b)	$\neq 0$	0.6221	1.5064	14.969	0.7171	0.5875	0.5625
	2D HSDT (a)	0	0.5806	1.4895	14.967	0.7282	0.5889	0.5625
4	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.4246	1.1017	11.088	1.0983	0.8417	0.7925
	Quasi-3D HSDT (a)	$\neq 0$	0.4431	1.1779	11.920	1.1613	0.8818	0.8287
	Quasi-3D HSDT (b)	$\neq 0$	0.4877	1.1971	11.923	1.1585	0.8821	0.8286
	2D HSDT (a)	0	0.4247	1.1017	11.088	1.0983	0.8417	0.7925
10	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.3094	0.8229	8.3185	1.3351	0.9818	0.9140
	Quasi-3D HSDT (a)	$\neq 0$	0.3242	0.8778	8.9059	1.3917	1.0089	0.9362
	Quasi-3D HSDT (b)	$\neq 0$	0.3965	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	2D HSDT (a)	0	0.3095	0.8229	8.3185	1.3352	0.9818	0.9141

(a) Akavci and Tanrikulu (2015)

(b) Carrera et al. (2011)

Figures IV.4-6 illustrent l'effet de l'aspect (ζ), de la géométrie (\mathfrak{R}) et du rapport de module (E_m/E_c) sur la flèche centrale (\bar{w}) d'une plaque isotrope et FG simplement supportée soumise à une charge mécanique transversale et posée sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. A partir des graphiques tracés, nous pouvons observer que la flèche centrale (\bar{w}) est en relation inverse avec les paramètres (ζ), (\mathfrak{R}) et (E_m/E_c).

On peut également conclure que la présence de fondation élastique Winkler-Pasternak ($k_w = 100, k_s = 10$) conduit à réduire les valeurs de la flèche centrale (\bar{w}) car la plaque devient plus rigide. Les valeurs les plus élevées de déviation sans dimension sont obtenues pour une plaque entièrement en céramique.

Pour la plaque FG, les plus petites valeurs (\bar{w}) sont obtenues pour la plaque avec une distribution quadratique inverse des matériaux dans l'épaisseur.

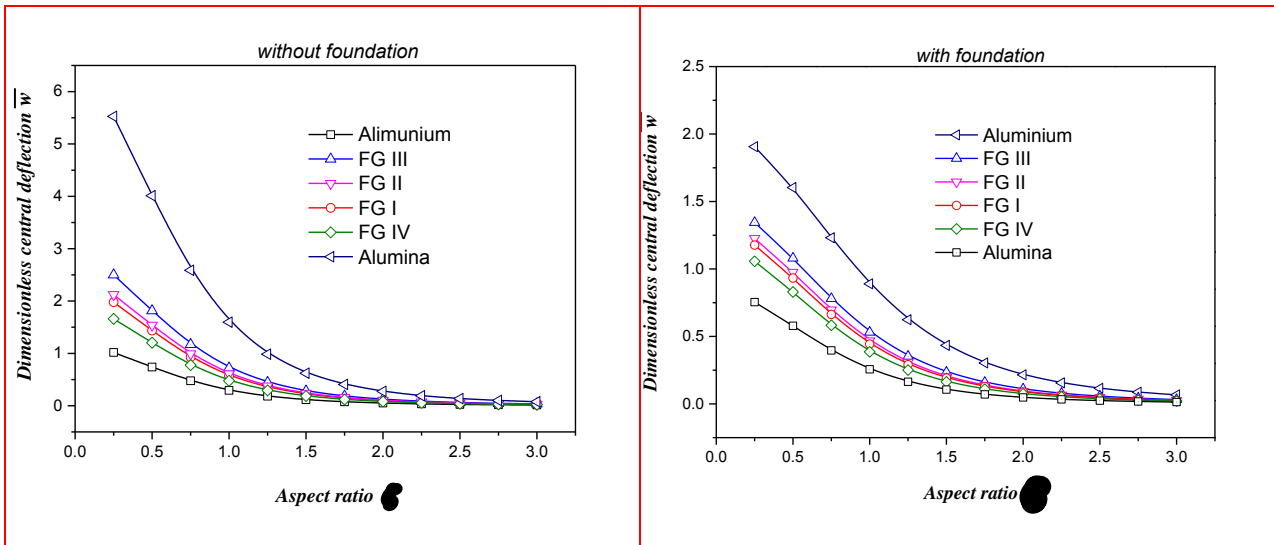


Figure IV.4: Variation de la flèche centrale (\bar{w}) des plaques FG sous charge sinusoïdale avec et sans fondation élastique en fonction du rapport d'aspect (ζ).

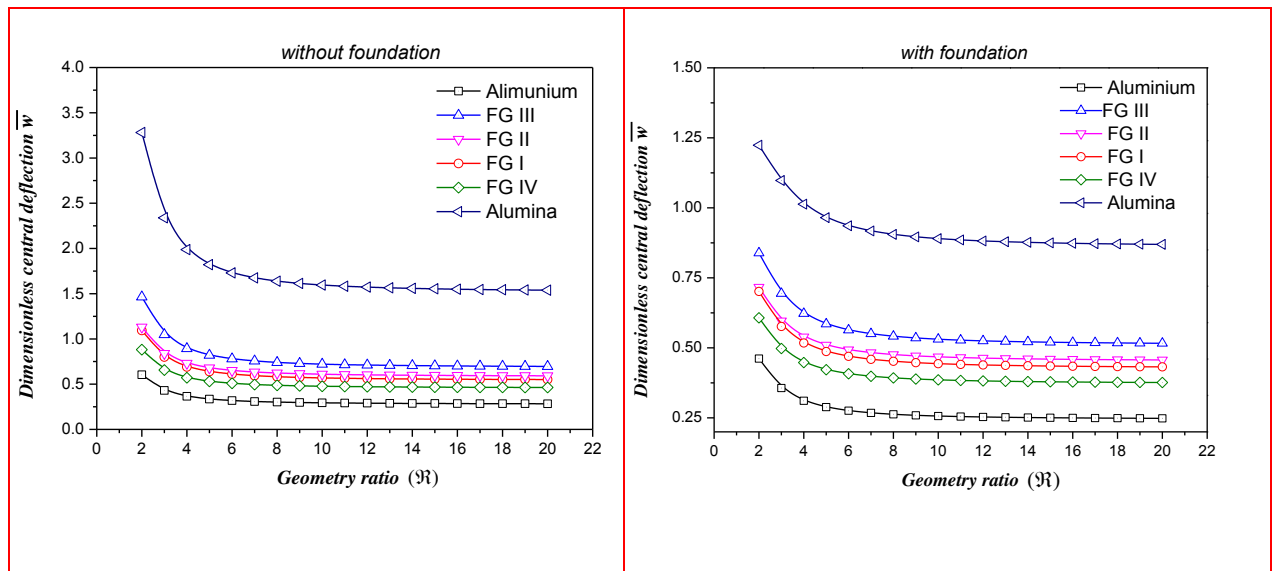


Figure IV.5: Variation de la flèche centrale \bar{w} des plaques FG sous charge sinusoïdale avec et sans fondation élastique en fonction du rapport de la géométrie (\mathcal{R}).

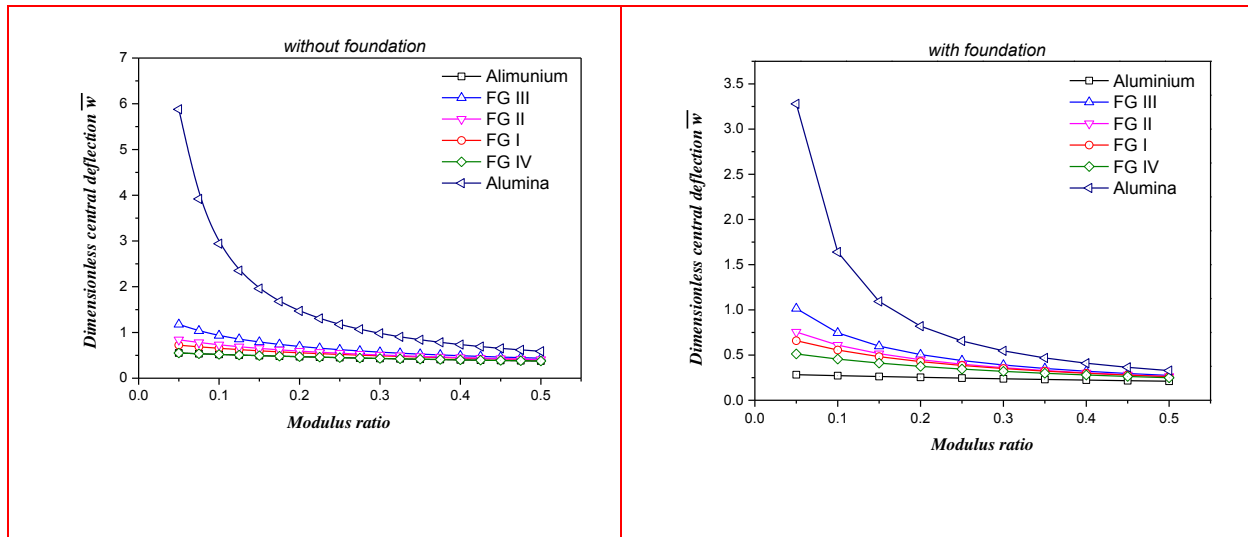


Figure IV.6: L'effet du rapport de module sur la flèche maximale non dimensionnelle de la plaque FG sous charge sinusoïdale avec et sans fondation élastique.

IV.2.2.2. Plaque E-FG

La deuxième partie de l'analyse statique est réservée à la réponse statique de la plaque FG à loi de puissance simplement appuyée avec et sans fondation élastique

La réponse en flexion d'une plaque de qualité exponentielle sous des charges mécaniques transversales uniformes et sinusoïdales appliquées sur le dessus de la plaque est présentée dans cette deuxième section de l'analyse statique.

La forme adimensionnelle des contraintes et du déplacement est exprimée sous la forme :

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_0}{a^4 q_0} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) \bar{\sigma}_x(h/2) = h^2 \sigma_x(a/2, b/2, h/2) / a^2 q_0 \quad (21)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(0) = h \tau_{xz}(0, b/2, 0) / a q_0 \quad \hat{w}(0) = G(h)w / h q_0 \quad \hat{\sigma}_x(0) = \sigma_x(0) / q_0$$

le tableau IV.8 présentent la déflexion centrale (\bar{w}) d'une plaque E-FG simplement supportée soumise à des charges sinusoïdales en fonction du rapport d'aspect (ζ) et du paramètre d'inhomogénéité (p). Les résultats obtenus sont comparés aux solutions 2D et quasi-3D et à l'élasticité 3D. D'après les résultats tabulés, il est clair que le modèle actuel est en excellent accord avec le modèle quasi-3D (Akavci et Tanrikulu 2015) et la solution exacte (Zenkour 2007). Il est remarquable que le modèle HSDT surestime la déviation centrale (\bar{w}) en raison de leur omission de l'effet d'étirement de l'épaisseur. On peut noter que les augmentations des valeurs du rapport hauteur/largeur (ζ) augmentent les valeurs de la déviation centrale (\bar{w}) et ceci s'inverse avec le paramètre d'inhomogénéité (p).

Tableau IV. 8 : La flèche \bar{w} de la plaque E-FG sous une charge répartie sinusoïdale ($a/h=2$).

ζ	Théorie	ε_z	indice d'inhomogénéité p					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
1	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.5749	0.5198	0.4694	0.4236	0.3624	0.2780
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.5750	0.5198	0.4694	0.4236	0.3624	0.2780
	3D solution ^(b)	$\neq 0$	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3726	0.2890
	2D TSDT ^(b)	0	0.5730	0.5180	0.4678	0.4221	0.3611	0.2771
	2D HSDT ^(a)	0	0.6351	0.5741	0.5185	0.4679	0.4004	0.3075
2	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	1.1907	1.0765	0.9723	0.8775	0.7511	0.5771
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	1.1907	1.0765	0.9723	0.8775	0.7511	0.5771
	3D solution ^(b)	$\neq 0$	1.1944	1.0859	0.9864	0.8952	0.7726	0.6017
	2D TSDT ^(b)	0	1.1879	1.0739	0.9700	0.8754	0.7493	0.5757
	2D HSDT ^(a)	0	1.2763	1.1541	1.0431	0.9422	0.8079	0.6234
3	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	1.4386	1.3005	1.1748	1.0602	0.9076	0.6976
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	1.4386	1.3005	1.1748	1.0602	0.9076	0.6976
	3D solution ^(b)	$\neq 0$	1.4429	1.3116	1.1912	1.0811	0.9333	0.7275
	2D TSDT ^(b)	0	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9056	0.6961
	2D HSDT ^(a)	0	1.5327	1.3861	1.2530	1.1320	0.9712	0.7503

(a) Taken from Akavci and Tanrikulu (2015)

(b) Taken from Zenkour (2007)

Les contraintes de cisaillement dans le plan ($\overline{\sigma_x}$) et transversal ($\overline{\tau_{xz}}$) d'une plaque E-FG simplement supportée sous une charge distribuée sinusoïdale sont présentées dans les tableaux IV.9 et 10, respectivement. Il est à nouveau confirmé que le modèle actuel est en bon accord avec d'autres HSDT quasi-3D trouvées dans la littérature (Mantari et Soares 2013, Thai et Kim 2013, Akavci et Tanrikulu 2015). A partir des résultats calculés, nous pouvons conclure que l'augmentation des valeurs du rapport d'aspect (ζ) conduit à augmenter les contraintes dans le plan et de cisaillement ($\overline{\sigma_x}$) et ($\overline{\tau_{xz}}$) car la plaque E-FG devient flexible. On peut également observer que la contrainte ($\overline{\sigma_x}$) augmente avec le paramètre d'inhomogénéité (p) mais pour la contrainte de cisaillement transverse ($\overline{\tau_{xz}}$) c'est le cas inverse.

Tableau IV. 9 : La contrainte dans le plan ($\overline{\sigma_x}$) de la plaque E-FG sous une charge répartie sinusoïdale ($a/h=10$).

ζ	Théorie	ε_z	paramètre d'inhomogénéité p								
			0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.2142	0.2285	0.2438	0.2601	0.2866	0.3369	0.3964	0.4664	0.5485
	Quasi-3D HSDT (a)	$\neq 0$	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460	-	-	-
	Quasi-3D HSDT (b)	$\neq 0$	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460	0.4065	0.4775	0.5603
	Quasi-3D HSDT (c)	$\neq 0$	0.2142	0.2285	0.2438	0.2601	0.2866	0.3370	0.3964	0.4664	0.5485
	2D HSDT (b)	0	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264	0.3835	0.4502	0.5278
	2D HSDT (c)	0	0.2063	0.2205	0.2356	0.2516	0.2776	0.3266	0.3838	0.4504	0.5281
2	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.4466	0.4773	0.5098	0.5443	0.6003	0.7058	0.8289	0.9725	1.1397
	Quasi-3D HSDT (a)	$\neq 0$	0.4552	0.4867	0.5201	0.5555	0.6126	0.7201	-	-	-
	Quasi-3D HSDT (b)	$\neq 0$	0.4552	0.4867	0.5200	0.5554	0.6126	0.7201	0.8449	0.9898	1.1580
	Quasi-3D HSDT (c)	$\neq 0$	0.4466	0.4773	0.5098	0.5443	0.6002	0.7058	0.8289	0.9725	1.1397
	2D HSDT (b)	0	0.4350	0.4649	0.4966	0.5303	0.5850	0.6881	0.8085	0.9490	1.1125
	2D HSDT (c)	0	0.4351	0.4650	0.4968	0.5305	0.5852	0.6884	0.8088	0.9493	1.1129
3	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.5418	0.5791	0.6187	0.6608	0.7289	0.8570	1.0061	1.1796	1.3813
	Quasi-3D HSDT (a)	$\neq 0$	0.5514	0.5897	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730	-	-	-
	Quasi-3D HSDT (b)	$\neq 0$	0.5514	0.5896	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730	1.0240	1.1990	1.4017
	Quasi-3D HSDT (c)	$\neq 0$	0.5418	0.5791	0.6187	0.6608	0.7289	0.8570	1.0061	1.1797	1.3813
	2D HSDT (b)	0	0.5288	0.5651	0.6037	0.6447	0.7112	0.8365	0.9828	1.1536	1.3523
	2D HSDT (c)	0	0.5290	0.5653	0.6039	0.6449	0.7114	0.8368	0.9832	1.1540	1.3528

(a) Thai and Kim (2013)

(b) Mantari and Soares (2013)

(c) Akavci and Tanrikulu (2015)

Tableau IV. 10 : la contrainte de cisaillement transverse (τ_{xz}) de la plaque E-FG sous charge répartie sinusoïdale ($a/h=10$)

ζ	Théorie	ε_z	paramètre d'inhomogénéité p								
			0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.2367	0.2364	0.2359	0.2353	0.2338	0.2300	0.2249	0.2182	0.2102
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344			
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344	0.2263	0.2162	0.2045
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.2367	0.2364	0.2359	0.2353	0.2338	0.2300	0.2249	0.2182	0.2102
	2D HSDT ^(b)	0	0.2380	0.2376	0.2368	0.2356	0.2330	0.2268	0.2185	0.2094	0.1985
	2D HSDT ^(c)	0	0.2434	0.2430	0.2422	0.2410	0.2385	0.2324	0.2242	0.2140	0.2023
2	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.37903	0.37866	0.37790	0.37676	0.37435	0.36844	0.36018	0.34960	0.33680
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.3927	0.3920	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752			
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.3927	0.3921	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752	0.3621	0.3460	0.3273
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.3790	0.3787	0.3779	0.3768	0.3744	0.3684	0.3602	0.3496	0.3368
	2D HSDT ^(b)	0	0.3810	0.3803	0.3790	0.3770	0.3730	0.3630	0.3497	0.3344	0.3165
	2D HSDT ^(c)	0	0.3896	0.3889	0.3877	0.3857	0.3817	0.3719	0.3588	0.3425	0.3237
3	Quasi-3D HSDT (Present)	$\neq 0$	0.4265	0.4261	0.4252	0.4239	0.4212	0.4146	0.4053	0.3934	0.3789
	Quasi-3D HSDT ^(a)	$\neq 0$	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4222			
	Quasi-3D HSDT ^(b)	$\neq 0$	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4221	0.4074	0.3893	0.3683
	Quasi-3D HSDT ^(c)	$\neq 0$	0.4265	0.4261	0.4252	0.4239	0.4212	0.4146	0.4053	0.3934	0.3789
	2D HSDT ^(b)	0	0.4286	0.4279	0.4264	0.4242	0.4196	0.4084	0.3934	0.3761	0.3558
	2D HSDT ^(c)	0	0.4383	0.4376	0.4361	0.4340	0.4294	0.4185	0.4036	0.3854	0.3642

- a) Taken from Thai and Kim (2013)
- (b) Taken from Mantari and Soares (2013)
- (c) Taken from Akavci and Tanrikulu (2015)

Le tableau IV.11 présente les valeurs de déflexion (\hat{w}) et de contrainte ($\hat{\sigma}_x$) dans le plan d'une plaque E-FG simplement supportée sous une charge transversale uniforme. Les résultats obtenus sont calculés pour différentes valeurs et rapports de modules. A partir des comparaisons faites entre le modèle actuel et quasi-3D HSDT , BEM (méthode des éléments limites) , FEM (méthode des éléments finis) et l'élasticité 3D trouvée dans la littérature, nous pouvons conclure que le modèle actuel est précis et donne d'excellents résultats de flexion analyse de la plaque E-FG. Il peut être noté à partir des résultats tabulés que le module et les rapports ont un rôle important sur la variation de la déflexion (\hat{w}) et de la contrainte normale ($\hat{\sigma}_x$) dans le plan

Tableau IV .11 : La flèche (\hat{w}) et la contrainte normale ($\hat{\sigma}_x$) dans le plan de la plaque E-FG sous une charge uniformément répartie.

h/a	Théorie		E_0 / E_h				
			0.1	0.5	1	2	10
0.2	\bar{w}	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.8333	8.8724	12.597	17.744	38.333
		Quasi-3D HSDT ^(a) ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.8333	8.8724	12.597	17.744	38.333
		BEM ^(b)	4.0916	8.9751	12.599	17.664	39.060
		FEM ^(b)	4.1215	9.0047	12.613	17.711	39.155
	$\bar{\sigma}_x$	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	-16.322	-9.6545	-7.6944	-6.1109	-3.4530
		Quasi-3D HSDT ^(a) ($\varepsilon_z \neq 0$)	-16.322	-9.6545	-7.6944	-6.1109	-3.4530
		BEM ^(b)	-15.356	-9.2902	-7.4462	-5.9410	-3.4665
		FEM ^(b)	-15.403	-9.2995	-7.4588	-5.9591	-3.4805
0.3	\bar{w}	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.8923	2.0834	2.9602	4.1669	8.9229
		Quasi-3D HSDT ^(a) ($\varepsilon_z \neq 0$)	0.8923	2.0834	2.9602	4.1669	8.9229
		3D solution ^(c)	0.9735	2.1405	2.9795	4.1332	8.7343
		BEM ^(b)	0.9707	2.1378	2.9853	4.1208	8.7134
		FEM ^(b)	0.9732	2.1407	2.9792	4.1333	8.7293
	$\bar{\sigma}_x$	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	-7.6576	-4.5062	-3.5748	-2.8235	-1.5731
		Quasi-3D HSDT ^(a) ($\varepsilon_z \neq 0$)	-7.6576	-4.5062	-3.5748	-2.8235	-1.5731
		3D solution ^(c)	-7.1493	-4.3227	-3.4710	-2.7853	-1.6759
		BEM ^(b)	-7.2230	-4.3084	-3.4496	-2.7499	-1.6449
		FEM ^(b)	-7.2639	-4.3378	-3.4681	-2.7673	-1.6499

(a) Akavci and Tanrikulu (2015)

(b) Vaghefi et al. (2010)

(c) Zhang et al. (2014)

IV.3. Conclusion :

Dans l'enquête actuelle, l'analyse en flexion et dynamique d'une plaque graduée fonctionnellement supportée est étudiée dans laquelle les différentes formes (linéaire, quadratique, cubique et quadratique inverse) de la distribution du matériau à travers l'épaisseur sont utilisées pour estimer les propriétés des matériaux efficaces. La plaque est supposée reposer sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. La formulation présentée (théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur combinée quasi-3D) prend en compte la déformation de cisaillement normale et transversale sans utiliser de facteur de correction de cisaillement et ne contient que cinq variables inconnues de déplacement. Les solutions analytiques de l'analyse statique et dynamique sont obtenues via le principe de Hamilton et la procédure de Navier. Les résultats actuels de flexion et de vibration libre sont vérifiés avec des comparaisons faites avec d'autres solutions existantes. Une amélioration de la formulation quasi-3D actuelle sera étendue dans les travaux futurs pour considérer d'autres types de structures et de matériaux .

CONCLUSION GENERALE

L'utilisation des plaques stratifiées comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure: mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse dynamique et du comportement vibratoire des plaques.

Il est bien connu que les théories classiques des plaques stratifiées basées sur les hypothèses de Kirchhoff, négligeant les cisaillements transverses ne sont adéquates que pour l'analyse des plaques composite minces. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevé ; par contre la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à Reissner-Mindlin pour le cas des plaques épaisses, mène à une déformation de cisaillement transversale constante dans la direction de l'épaisseur et nécessite de ce fait l'utilisation de ces facteurs correctifs de cisaillement.

Nous avons, dans le cadre de ce travail, essayé de faire une investigation sur le comportement flexionnel et vibratoire des plaques composites (métal / céramique) sur fondation élastique ont développant une méthode basés sur des théories d'ordre élevés seulement avec cinq variable .

Le premier chapitre de ce thèse a permis d'identifier le concept des matériaux composites à gradient de propriétés fonctionnelles avec un bref historique, déterminer les types de FGM avec un résumé sur les méthodes de fabrication pour terminer par les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

Le deuxième chapitre a permis de détailler les différents modèles analytiques pour l'étude du comportement des plaques et leurs évolutions, jusqu'au besoin de raffiné les théories d'ordre élevé (HSDT) et les pas franchir dans ce sens.

Le troisième chapitre a permis de présenter l'étude analytique des systèmes vibrationnels et de flexion des plaques FG sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak.

Le quatrième chapitre est une présentation des résultats du comportement en flexion de la plaque FGM, et une validation de ces résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

En ce qui concerne la théorie des plaques présentée ici ; Il est important de noter que cette théorie et avec cinq inconnus ne nécessite pas un facteur de correction contrairement à celle de la théorie de Mindlin (FSDT) bien connue comme théorie de la plaque de déformation par cisaillement du premier ordre, donc un effort de calcul beaucoup plus tolérable est atteint.

La validation de l'exactitude de la présente théorie est déterminée par des comparaisons avec les solutions existantes des différentes théories proposées dans la littérature et donne un excellent accord pour tous les cas étudiés.

En fin, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés.

•

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

Abdelrahman, W. G. (2020), “Effect of material transverse distribution profile on buckling of thick functionally graded material plates according to TSDT”, *Structural Engineering and Mechanics*, 74(1), 83–90.

Abdulrazzaq, M.A. Fenjan, R.M Ahmed, R.A. and Faleh, N.M. (2020), “Thermal buckling of nonlocal clamped exponentially graded plate according to a secant function based refined theory”, *Steel and Composite Structures*, 35(1), 147-157.

Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., Faleh, N.M. (2019), “Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections”, *Geomechanics and Engineering*, 17(2), 175-180

Ahmed, R.A., Moustafa, N.M., Faleh, N.M. and Fenjan, R.M. (2020), “Nonlocal nonlinear stability of higher-order porous beams via Chebyshev-Ritz method”, *Structural Engineering and Mechanics*, 76(3), 413-420.

Akavci, S.S ,Tanrikulu, A.H. (2015), “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories”, *Composites Part B*, 83, 203-215.

Akbas, S. D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures*, 19(6), 1421–1447.

Akbaş, Ş.D. Fageehi, Y.A., Assie, A.E., Eltaher, M.A. (2020), “Dynamic analysis of viscoelastic functionally graded porous thick beams under pulse load”, *Engineering with Computers.*

Akgöz, B., & Civalek, Ö. (2013), "Buckling analysis of functionally graded microbeams based on the strain gradient theory", *Acta Mechanica*, 224(9), 2185–2201.

Akgün, G., & Kurtaran, H. (2019), "Large displacement transient analysis of FGM super-elliptic shells using GDQ method", *Thin-Walled Structures*, 141, 133–152.

Alijani, F, Amabili, M. (2014), "Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates", *Compos Struct*, 113, 89-107.

Asiri, S. A., Akbaş, Ş. D., & Eltahir, M. A. (2020), "Damped dynamic responses of a layered functionally graded thick beam under a pulse load", *Structural Engineering and Mechanics*, 75(6), 713–722.

Attia, M.A. (2017), "On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity", *International Journal of Engineering Science*. 115,73-101

Avcar, M. (2019), "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603–615.

Ait Atmane., H., Tounsi, A., Mechab, I., E.A Adda Bedia,(2010) "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121,.

Ait Atmane, H.,Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R.(2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *SteelCompos.Struct.*,19(2),369-384.

AitYahia,S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.(2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct.Eng.Mech.*,53(6),1143-1165.

B

Bharath, H. S., Waddar, S., Bekinal, S. I., Jeyaraj, P. and Doddamani, M. (2020), “Effect of axial compression on dynamic response of concurrently printed sandwich”, *Composite Structures*, 113223.

Bouazza, M., Antar, K., Amara, K., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2019), “Influence of temperature on the beams behavior strengthened by bonded composite plates”, *Geomechanics and Engineering*, 18(5), 555–566.

Bouiadjra, R. B., Bachiri, A., Benyoucef, S., Fahsi, B., & Bernard, F. (2020), “An investigation of the thermodynamic effect on the response of FG beam on elastic foundation”, *Structural Engineering and Mechanics*, 76(1), 115–127.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Compos. Part B*, 60, 274–283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst.*, 18(4), 755–786.

Benchohra, M., Dris, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Struct. Eng. Mech.* (Accepted)

Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423–431.

Bouderba B, Houari M S A, Tounsi A.(2013)"Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations". *Steel and Composite Structures*;14:85–104.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A.(2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*,14,5-33.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A.and Tounsi, A.(2015),“A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct.*, 18 (2) , 409 - 423.

C

Carrera, E, Brischetto, S, Cinefra, M, Soave, M. (2011), "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Compos Part B*, 42(2), 123-133.

Civalek, Ö., Dastjerdi, S., Akbaş, Ş.D., Akgöz, B. (2021), “Vibration analysis of carbon nanotube-reinforced composite microbeams”,*Mathematical Methods in the Applied Sciences*.

Cuong-Le, T., Nguyen, K. D., Nguyen-Trong, N., Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., & Abdel-Wahab, M. (2020), “A three-dimensional solution for free vibration and buckling of annular plate, conical, cylinder and cylindrical shell of FG porous-cellular materials using IGA”, *Composite Structures*, 113216.

Castellazzi, G., Krysl, P., Bartoli, I. (2013), "A displacement-based finite element formulation for the analysis of laminated composite plates", *Composite Structures.*, 95, 518-527.

D

Daouadji, T.H. and Hadji, L. (2015), “Analytical solution of nonlinear cylindrical bending for functionally graded plates”, *Geomechanics and Engineering*, 9(5), 631–644.

Dehshahri, K., Nejad, M. Z., Ziaee, S., Niknejad, A., & Hadi, A. (2020), “Free vibrations analysis of arbitrary three-dimensionally FGM nanoplates”, *Advances in Nano Research*, 8(2), 115–134.

Demir, Ç., & Civalek, Ö. (2017), “On the analysis of microbeams”, *International Journal of Engineering Science*, 121, 14–33.

Daouadji T., Tounsi A, Hadji L, Abdelaziz HH, Adda bedia EA (2012) "A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates". *Mater Phys Mech J.* 14.

Darilmaz, K. (2015), "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel and Composite Structures.*, 18(2), 395-408.

E

Eldeeb, A. M., Shabana, Y. M., & Elsawaf, A. (2020a), “Influences of Angular Deceleration on the Thermoelastoplastic Behaviors of Nonuniform Thickness Multilayer FGM Discs”, *Composite Structures*, 113092.

Eldeeb, A., Shabana, Y., & Elsawaf, A. (2020b), “Thermo-elastoplastic behavior of a rotating sandwich disc made of temperature-dependent functionally graded materials”, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 109963622090497.

Ellali, M., Amara, K., Bouazza, M. and Bourada, F. (2018), “The buckling of piezoelectric plates on Pasternak elastic foundation using higher-order shear deformation plate theories”, *Smart Structures and Systems*, 21(1), 113

EL-Wazery, M. S. , EL-Desouky , A. R. , (2015), "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials". *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376

F

Farzam-Rad, S.A., Hassani, B. and Karamodin, A. (2017), "Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface", *Composites, Part B, Eng.*, 108,174–189.

Fenjan, R.M., Faleh, N.M. and Ahmed, R.A. (2020b), "Geometrical imperfection and thermal effects on nonlinear stability of microbeams made of graphene-reinforced nano-composites", *Advances in Nano Research*, 9(3). 147-156.

Fenjan, R.M., Faleh, N.M., and Ahmed R.A. (2020c), "Strain gradient based static stability analysis of composite crystalline shell structures having porosities", *Steel and Composite Structures*, 36(6), 631-642.

Fenjan, R.M., Moustafa, N.M. and Faleh, N.M. (2020a), "Scale- dependent thermal vibration analysis of FG beams having porosities based on DQM", *Advances in Nano Research*, 8(4), 283-292.

Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R.(2017), "A four variable refined n th-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomech.Eng.*,13(3),385-410.

H

Hadji, L., (2020), "Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model", *Smart Structures and Systems*, 26(2), 253-262.

Hosseini-Hashemi, SH, Fadaee, M, Atashipour, SR. (2011), "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed form procedure", *Compos Struct*, 93(2), 722-735.

Hanna N.F., Leissa A.W.(1994): "A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates", *J. Sound Vib.*, 170(4): 545-555.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 235-253.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *J. Eng. Mech.*, ASCE, 140, 374-383.

Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S. R. (2016), "A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Steel and Composite Structures.*, 22(2), 257-276.

J

Jalaei, M. H., & Civalek, Ö. (2019), "On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam", *International Journal of Engineering Science*, 143, 14–32.

Jha, DK, Kant, T, Singh, RK. (2013), "Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects", *Compos Struct*, 96, 799-823.

Jamaludin, S. N. S., Mustapha, F., Nuruzzman, D. M., & Shah Nor Basri. (2013). A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites. *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828–840.

K

Karami, Behrouz; Janghorban, Maziar (2019), "A new size-dependent shear deformation theory for free vibration analysis of functionally graded/anisotropic nanobeams", *Thin-Walled Structures*, 143, 106227.

Karsh, P. K., Mukhopadhyay, T., & Dey, S. (2018), "Stochastic dynamic analysis of twisted functionally graded plates", *Composites Part B: Engineering*, 147, 259–278.

Karsh, P. K., Mukhopadhyay, T., Chakraborty, S., Naskar, S., & Dey, S. (2019), "A hybrid stochastic sensitivity analysis for low-frequency vibration and low-velocity impact of functionally graded plates", *Composites Part B: Engineering*, 107221.

Khalaf, B.K., Fenjan, R.M., and Faleh, N.M. (2019), “Analyzing nonlinear mechanical-thermal buckling of imperfect micro-scale beam made of graded graphene reinforced composites”, *Advances in Materials Research*, 8(3). 219-235.

Kiani, Y. (2019), “NURBS-based thermal buckling analysis of graphene platelet reinforced composite laminated skew plates”, *Journal of Thermal Stresses*, 1–19.

Kirchhoff, G.R., (1850) "Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein", *J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.

L

Liu, W., Liu, S., Fan, M., Tian, W., Wang, J., & Tahouneh, V. (2020), “Influence of internal pores and graphene platelets on vibration of non-uniform functionally graded columns”, *Steel and Composite Structures*, 35(2), 295–303.

M

Madenci, E. (2019), “A refined functional and mixed formulation to static analyses of fgm beams”, *Structural Engineering and Mechanics*, 69(4), 427-437.

Mantari, J.L, Soares, C.G. (2013), "A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates", *Compos Part B*, 45(1), 268-281.

Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, 82, 499-512.

Mehar, K. and Panda, S. K. (2019), “Multiscale modeling approach for thermal buckling analysis of nanocomposite curved structure”, *Advances in Nano Research*, 7(3), 181–190.

Mehar, K., Panda, S. K. and Mahapatra, T. R. (2017), “Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 65, 384–396.

Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Ali Chaibdra, A., Belmokhtar, C., Benyoucef, S. and Benachour, A. (2020), "2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models", *Geomechanics and Engineering.*, 22(4), 361-374.

Mindlin, R.D.(1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38,.

N

Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, et al. (2012), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Part B*, 43, 711-725.

Noroozi, R., Barati, A., Kazemi, A., Norouzi, S., & Hadi, A. (2020), "Torsional vibration analysis of bi-directional FG nano-cone with arbitrary cross-section based on nonlocal strain gradient elasticity", *Advances in Nano Research*, 8(1), 13–24.

P

Pasternak P. L. (1954), "On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants," *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow*.

Peng, L., Ni, Z., & Huang, X. (2013), "Review on the Fire Safety of Exterior Wall Claddings in High-rise Buildings in China", *Procedia Engineering*, 62, 663–670.

Pham, Q.H., Pham, D.T., · Trinh, Q.V · Phan, D.H. (2020), "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells using an edge-based smoothed MITC3 (ES-MITC3) finite elements", *Engineering with Computers.*, 36,1069–1082.

R

Rachedi, M.A., Benyoucef, S., Bouhadra, A., Bachir Bouiadjra, R., Sekkal, M., Benachour, A. (2020), "Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, 22(1), 65-80.

Reddy J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752,.

Reddy J.N., Phan N.D.(1985): "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory", *J. Sound Vib.*, , 98(2): 157-170.

Reissner E.(1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77,.

S

Saadatfar, M., & Zarandi, M.H. (2020), "Effect of angular acceleration on the mechanical behavior of an exponentially graded piezoelectric rotating annular plate with variable thickness", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1751198.

Sadoughifar, A., Farhatnia, F., Izadinia, M., & Talaetaba, S. B. (2020), "Size-dependent buckling behaviour of FG annular/circular thick nanoplates with porosities resting on Kerr foundation based on new hyperbolic shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 73(3), 225–238.

Selmi, A. (2019), "Effectiveness of SWNT in reducing the crack effect on the dynamic behavior of aluminium alloy", *Advances in Nano Research*, 7(5), 365-377.

Selmi, A. (2020), "Exact solution for nonlinear vibration of clamped-clamped functionally graded buckled beam". *Smart Structures and Systems.*, 26(3), 361–371.

Shabana, Y. M., Elsawaf, A., Khalaf, H., & Khalil, Y. (2017), "Stresses minimization in functionally graded cylinders using particle swarm optimization technique", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 154, 1–10.

Shahmohammadi, M. A., Azhari, M., & Saadatpour, M. M. (2020), "Free vibration analysis of sandwich FGM shells using isogeometric B-spline finite strip method", *Steel and Composite Structures*, 34(3), 361–376.

Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018b), "A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Aerospace Science and Technology*, 72, 134–149.

Sheikholeslami, SA, Saidi, AR. (2013), "Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory", *Comp Struct*, 106, 350-361.

Shokouhifard, V., Mohebpour, S., Malekzadeh, P., & Alighanbari, H. (2020), "An inclined FGM beam under a moving mass considering Coriolis and centrifugal accelerations", *Steel and Composite Structures*, 35(1), 61–76.

Sofiyev, A.H., Deniz, A., Akçay, I.H., Yusufoglu, E. (2006), "The vibration and stability of a three-layered conical shell containing an FGM layer subjected to axial compressive load", *ActaMechanica*, 183, 129–144.

Srinivas, S, JogaRao, CV, Rao, AK.(1970), "An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates", *J Sound Vib*, 12(2), 187-199.

Said, A., Ameer, M., Bousahla, A. A., Tounsi, A. (2014), "A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *International Journal of Computational Methods.*, 11(06), 1350098.

T

Thai, HT, Kim, SE. (2013), "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos Struct*, 99, 172-180.

Thanh, C. L., Nguyen, T. N., Vu, T. H., Khatir, S., & Abdel Wahab, M. (2020), "A geometrically nonlinear size-dependent hypothesis for porous functionally graded micro-plate", *Engineering with Computers*.

Timesli, A. (2020), "Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation", *Computers and Concrete.*, 26(1), 53–62.

Timoshenko. S.P., S.Woinowsky-Krieger,(1959), "Theory of Plates and Shells". *McGraw-Hill, New York*,.

V

Vaghefi, R, Baradaran, GH, Koohkan, H. (2010), "Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrove-Galerkin (MLPG) method", *Eng Anal Bound Elem*,34, 564-573.

Vaishali, Mukhopadhyay, T., Karsh, P. K., Basu, B., & Dey, S. (2020), "Machine learning based stochastic dynamic analysis of functionally graded shells", *Composite Structures*, 111870.

Vel, SS, Batra, RC. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J Sound Vib*, 272, 703-730.

Vinyas, M. (2020), "On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT", *Composite Structures*, 240, 112044.

Y

Yaylaci, M. and Avcar, M. (2020), "Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes", *Computers and Concrete*, 26(2), 107–114.

Yuan, Y., Zhao, K., Zhao, Y., & Kiani, K. (2020), "Nonlocal-integro-vibro analysis of vertically aligned monolayered nonuniform FGM nanorods", *Steel and Composite Structures*, 37(5), 551–569.

Z

Zenkour, AM. (2007), "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", *Arch ApplMech*, 77(4), 197-214.

Zhang, H, Jiang, J-K, Zhang, Z-C.(2014), "Three-dimensional elasticity solutions for bending of generally supported thick functionally graded plates", *Appl Math Mech*, 35(11), 1467-1478.

Zhu, P, Liew, KM. (2011), "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Krigingmeshless method", *Compos Struct*, 93(11), 2925-2944.