

1 REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABESSIDI BEL ABBES
FACULTE DES TECHNOLOGIES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
& TRAVAUX PUBLICS

THESE

Présentée en vue de l'obtention du
DOCTORAT 3^{eme} Cycle LMD
Spécialité : **Génie Civil**
Option : **Structure**

Soutenu par
AMERI Anfel

Sujet de thèse :

Proposition d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement dans une formulation pour l'analyse hygro-thermo-mécanique des plaques composites

Soutenu le : 20 / 06 / 2022

Devant le jury composé de :

Mr BOUSEHLA Abdelmoumen Anis

MCA U.D.L SBA

Président

Mr FEKRAR Abdelkader

Pr U.D.L SBA

Directeur de thèse

Mr BELLIFA Hicham

MCA U.D.L SBA

Examineur

Mr ZIANE Noureddine

Pr U.D.L SBA

Examineur

Mr BELABED Zakaria

MCA C.U.NAAMA

Examineur

Mme ABDELBARI Salima

MCA C.U.TEMOCHENT

Examinatrice

Année universitaire : 2021-2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Sommaire

Remerciements.....	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Liste des figures	vi
Liste des tableaux.....	viii
Liste des notations et symboles.....	x
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites	5
I.1. Introduction.....	6
I.2. Les composants du matériau composite	6
I.2.1 Les composites grandes diffusions (GD)	6
I.2.2 Les composites hautes performances (HP).....	6
I.2.3 La matrice	7
I.2.4 Le renfort	9
I.3. Les matériaux composites structuraux.....	11
I.3.1 Les monocouches	12
I.3.2 Les stratifiées.....	12
I.3.3 Les sandwiches	14
I.4. Effet hygrothermique	14
I.5. Conclusion	16
ChapitreII : Les théories des plaques composites	18
II.1. Introduction	19
II.2. Les théories de déformation des plaques :.....	19
II.2.1. La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT).....	19

II.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	21
II.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	22
II.2.4. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	25
II.2.5. La théorie de déformation des plaques quasi-3D	25
II.3. Conclusion.....	26
ChapitreIII : Analyse de flexion hygro-thermomécanique des plaques composites stratifiées	27
III.1. Introduction	28
III.2. Formulation mathématique	28
III.3. Equations du mouvement.....	32
III.4. Méthodologie de solution pour les plaques stratifiées à couches croisées.....	35
III.5. Conclusion	38
ChapitreIV : Résultats et discussion	39
IV.1. Introduction.....	40
IV.2. Résultats numériques et discussions	40
IV.2.1 Réponse statique des plaques stratifiées	41
IV.2.1 Réponse thermo-mécanique des plaques stratifiées	45
IV.2.3 Réponse hygro-thermomécanique des plaques stratifiées	49
IV.3. Conclusion	51
Conclusion générale	52
Références bibliographie.....	54

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux & Hydrologie (département de génie civil et travaux publics) de la faculté de technologie de l'université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.

Je voudrais remercier tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès pour l'environnement fraternel et scientifique qu'ils ont toujours su imposer.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral.

Enfin, je remercie cordialement tous ceux qui m'ont assisté de près ou de loin dans l'élaboration de cette oeuvre par une bonne parole un intime conseil ou une pieuse prière.

Dédicace

C'est avec profonde gratitude et sincères mots que je dédie ce modeste et humble travail de thèse à :

❖ A ma très chère mère : affable, honorable, aimable, l'exemple de l'amour maternel, Tu es présente pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse, l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi, puisses-tu trouver le modeste témoignage de mon profond amour et ma gratitude pour tous les sacrifices que tu t'es imposés.

❖ A mon cher père : l'épaule solide, l'œil attentif, compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect, ta passion du travail a été toujours une leçon pour moi. Je te dédie ce modeste travail en témoignage de tous les sacrifices dont tu avais toujours su me combler, que Dieu te préserve et te procure santé et longue vie.

❖ A mon mari : tes sacrifices, ton soutien moral, ta gentillesse sans égale, ton aide et ton profond attachement m'ont permis de réussir mes études.

❖ A mes sœurs Israa et Baraa et mes frères Oussama, Abdellah et Tabarake abdelmouin : les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous .

❖ A tous les membres de mes familles, veuillez trouver dans cet humble travail l'expression de mon affection.

❖ A ma belle-famille ; en témoignage de l'amour et l'affection que je porte pour vous, je vous dédie ce travail.

❖ A tous mes enseignants avec mes remerciements.

❖ A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Les matériaux composites jouent un rôle de plus en plus important dans notre société et dans de très nombreux domaines (aéronautique, naval, génie civil...), grâce à leurs avantages en terme de légèreté, d'inaltérabilité et de rigidité. Cependant, ils présentent des faiblesses qui peuvent poser des problèmes au niveau de leur utilisation pour les ouvrages de génie civil. Ces faiblesses concernent notamment leur durabilité. A cause des phénomènes viscoélastiques, les propriétés mécaniques des structures en composites évoluent dans le temps. Le fluage et/ou la relaxation sont des facteurs importants qui peuvent considérablement affecter l'application des composites aux structures. Dans ce travail de doctorat, on effectue une analyse hygro-thermomécanique de plaques composites antisymétriques simplement appuyées en utilisant une théorie originale de calcul fonction hyperbolique tangente inverse quasi-3D à quatre inconnues. Les formulations développées prennent en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur et contiennent des variables intégrales indéterminées pour réduire le nombre d'inconnues. Le modèle actuel assure la nullité des contraintes de cisaillement transversales aux surfaces supérieure et inférieure sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont déterminées à l'aide du principe des travaux virtuels. La solution analytique de l'analyse hygro-thermomécanique est dérivée de la solution de Navier. La précision et l'efficacité du modèle actuel sont vérifiées en comparant les résultats avec d'autres modèles trouvés dans la littérature. Plusieurs résultats numériques sont présentés sous forme de graphiques pour montrer les effets de l'aspect, de la géométrie et le déplacement transversal des plaques composites antisymétriques simplement appuyées.

Mots clés : plaque composite, principe de travail virtuel, analyse hygro-thermomécanique, quasi-3D HSDT.

Abstract

Composite materials play an increasingly important role in our society and in many fields (aeronautics, naval, civil engineering...), thanks to their advantages in terms of lightness, inalterability and rigidity. However, they have weaknesses that can cause problems in their use for civil engineering works. These weaknesses concern in particular their durability. Due to viscoelastic phenomena, the mechanical properties of composite structures change over time. Creep and/or relaxation are important factors that can considerably affect the application of composites to structures. In this doctoral work, an hygro-thermo-mechanical analysis of simply supported anti-symmetric composite plates by using an original computational four unknown's quasi-3D inverse tangent hyperbolic theory. The developed formulations take into account the thickness stretching effect and contain indeterminate integral variables to reduce the number of unknowns. The present model ensures the transverse shear stresses nullity at the top and the bottom surfaces without using any shear correction factor. The governing equations are determined with the help of virtual works principle. The analytical solution of the hygro-thermo-mechanical analysis is derived via Navier's procedure. The accuracy and efficiency of current model is checked by comparing the results with others models found in the literature. Several numerical results are presented in graphs form to show the effects of the aspect, geometry and modulus ratio on the stress and transverse displacement of the simply supported anti-symmetric composite plates.

Keywords: composite plate, virtual work principle, hygro-thermo-mechanical analysis, quasi-3D HSDT.

ملخص

تلعب المواد المركبة دورًا متزايد الأهمية في مجتمعنا وفي العديد من المجالات (الطيران والبحرية والهندسة المدنية ...) ، وذلك بفضل مزاياها من حيث الخفة وعدم التغيير والصلابة. ومع ذلك ، لديهم نقاط ضعف يمكن أن تسبب مشاكل في استخدامها لأعمال الهندسة المدنية. نقاط الضعف هذه تتعلق بشكل خاص بمتانتها. بسبب ظاهرة اللزوجة المرنة ، تتغير الخصائص الميكانيكية للهياكل المركبة بمرور الوقت. يعد الزحف و / أو الاسترخاء من العوامل المهمة التي يمكن أن تؤثر بشكل كبير على تطبيق المواد المركبة على الهياكل. في عمل الدكتوراه هذا ، تم إجراء التحليل الميكانيكي الحراري الرطب للألواح المركبة غير المتماثلة المدعومة ببساطة باستخدام نظرية أصلية لحساب التفاضل الزائدي المماس المعكوس ثلاثي الأبعاد مع أربعة مجاهيل. تأخذ الصيغ المطورة في الاعتبار تأثير تمدد السماكة وتحتوي على متغيرات متكاملة غير محددة لتقليل عدد المجهول. يضمن النموذج الحالي بطلان ضغوط القص المستعرضة في الأسطح العلوية والسفلية دون استخدام عامل تصحيح القص. يتم تحديد المعادلات الإرشادية باستخدام مبدأ العمل الافتراضي. يتم اشتقاق الحل التحليلي للتحليل الميكانيكي الحراري الرطب من خلال إجراء نافيي. يتم التحقق من دقة وكفاءة النموذج الحالي من خلال مقارنة النتائج مع النماذج الأخرى الموجودة في الأدبيات. يتم تقديم العديد من النتائج العددية في شكل رسوم بيانية لإظهار تأثيرات المظهر والهندسة ونسبة المعامل على الإجهاد والإزاحة العرضية للوحات المركبة غير المتماثلة المدعومة ببساطة.

الكلمات المفتاحية: اللوح المركب ، مبدأ العمل الافتراضي ، التحليل الميكانيكي الحراري الرطب ، شبه ثلاثي الأبعاد.HSDT

Liste des figures

Figure I. 1: <i>Matériau composite en général</i>	7
Figure I. 2 : <i>Les différents types de matrice (Bahlouli 1993).</i>	7
Figure I. 3: <i>Les différents types de renfort (Jao Jules 2001)</i>	9
Figure I. 4: <i>Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression (Mezari 2014)</i>	11
Figure I. 5: <i>Composite monocouches (Younsi 2018)</i>	12
Figure I. 6: <i>Exemple d'empilement symétrique [90/45/0]_s (Slimani 2015)</i>	13
Figure I. 7: <i>Schema d'un sandwich (Daikh 2018)</i>	14
Figure II. 1: <i>La CPT, Théorie classique de Kirchhoff (Reddy et al2001)</i>	20
Figure II. 2: <i>La FSDT, Cinématique de Reissner-Mindlin(Hachemi 2018)</i>	21
Figure II. 3 : <i>Comparaison de la théorie d'ordre élevé HSDT avec CLPT et FSDT (Reddy et al. 2001)</i>	24
Figure III. 1 <i>Géométrie et système de coordonnées de la plaque stratifiée.</i>	28
Figure IV. 1 : <i>Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\overline{\tau_{xz}}$ ($x = a / 2, y = 0$) le long de l'épaisseur d'une plaque à deux couches 0° / 90° antisymétriques à plis croisés.</i>	43
Figure IV. 2 : <i>Variation de la flèche adimensionnelle \overline{w} d'une plaque à deux couches 0° / 90° antisymétriques à plis croisés soumise à une charge uniformément répartie en fonction du rapport dimension latérale sur épaisseur et de géométrie.</i>	44
Figure IV. 3: <i>Eff ect de l'anisotropie du matériau E_1 / E_2 sur la flèche adimensionnelle \overline{w} de plaques à deux 0° / 90° et six couches (0° / 90°)₃ à plis croisés antisymétriques soumises à un chargement transversal sinusoïdal.</i>	45
Figure IV. 4: <i>Variation de la flèche adimensionnelle $\overline{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \overline{T_1 a^2})$ en fonction de la portée de l'épaisseur et des rapports dimension latérale sur épaisseur d'une plaque à quatre couches 0° / 90° / 0° / 90° croisées antisymétriques soumise à un champ thermique</i>	47
Figure IV. 5 : <i>Eff ect du rapport de coefficient thermique $\alpha_{yy} / \alpha_{xx}$ sur la flèche adimensionnelle $\overline{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \overline{T_1 a^2})$ de plaques à deux et quatre et six couches croisées antisymétriques soumises à un champ thermique sinusoïdal.</i>	47

Figure IV. 6 : Variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ en fonction de la portée de l'épaisseur et des rapports dimension latérale sur épaisseur d'une plaque à quatre couches croisées $(0^\circ / 90^\circ)_2$ antisymétriques soumise à un champ hygrothermique. 50

Figure IV. 7: Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction de la portée de l'épaisseur et des rapports dimension latérale sur épaisseur de la plaque antisymétrique à quatre couches $(0^\circ / 90^\circ)_2$ soumise à une charge hygro-thermique et mécanique combinée. 51

Liste des tableaux

Tableau I. 1 : Les thermodurcissables.....	8
Tableau IV. 1 : La flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque antisymétrique à deux couches soumise à un chargement transversal sinusoïdal q .	42
Tableau IV. 2 : contraintes adimensionnelle $\bar{\sigma}$ and $\bar{\tau}$ pour une plaque antisymétrique à deux couches soumise à une charge transversale sinusoïdale q .	43
Tableau IV. 3 : La flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à une charge thermique sinusoïdale $\bar{T}_1 = 100, q_0 = 0, \bar{C}_1 = 0$.	46
Tableau IV. 4 : La flèche adimensionnelle \hat{w} pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à un chargement thermique et transversal sinusoïdal combiné.	48
Tableau IV. 5 : La flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à un chargement hygrothermique sinusoïdal.	49

Liste des notations et symboles

Liste des notations et symboles

θ_k	Angles des couches
$c(x, y, z)$	champ de la concentration d'humidité
$T(x, y, z)$	champ de température
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
Q	charge mécanique externe
$T_0, T_1, \Delta T$	charge thermique
ν_{ij}	Coefficient de Poisson
$\beta_{xx}, \beta_{yy}, \beta_{zz}, \beta_{xy}$	coefficients de dilatation de l'humidité
$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}, \alpha_{xy}$	coefficients de dilatation thermique
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$C_0, C_1, \Delta C$	concentration d'humidité
Q_{ij}	Constantes de la matrice de rigidité réduite
\overline{Q}_{ij}	Constantes de rigidités en fonction de l'orientation des fibres
$N^T, M^T \text{ et } P^T$	contrainte et moment, dues à la charge thermique
$N^C, M^C \text{ et } P^C$	contrainte et moment, dues à la concentration d'humidité
S, S_g	contraintes de cisaillement
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
$\overline{\sigma}, \overline{\tau}$	contraintes non dimension
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations de distorsion
ε_{ii}	Déformations normales dans les directions x, y et z
ρ	Densité du matériau
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y et z
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
δ	Dérivée partielle
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
H_k	Epaisseur de la $k^{\text{ème}}$ couche
H	Epaisseur de la plaque
\overline{w}	flèche adimensionnelle

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
B	Largeur de la plaque
A	Longueur de la plaque
$[\]$	Matrice
$[R_{ij}]$	Matrice de rigidité
E	Module d'élasticité longitudinal
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
M_x, M_y, M_{xy}	Moments dus à la charge appliquée
P_x, P_y, P_{xy}	
N	Nombre de couche
i, j	Nombres naturels
A	surface supérieure de la plaque
D_{ij}	Termes de la matrice flexion
E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}	Termes de rigidité de la matrice
$G^A_{ij}, G^B_{ij}, G^C_{ij}, G^D_{33}$	
$A_{ij} \quad L_{ij} \quad X_{ij}$	
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage membrane/ flexion
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$U \delta$	Variation de l'énergie de déformation
$V \delta$	Variation du travail effectué par des charges externes
$\{ \}$	Vecteur colonne
$\{ F \}$	vecteur force

Introduction générale

Introduction générale

Les composites, avec leurs performances mécaniques élevées et leur légèreté, font partie des matériaux innovants de ces dernières décennies. L'utilisation et l'application de ces matériaux se retrouvent dans différents secteurs de l'ingénierie (structures civiles, construction mécanique, structures aérospatiales, centrales nucléaires, industrie marine et automobile, etc.) En raison de leurs avantages et de leurs vastes champs d'application, plusieurs travaux de recherche ont été menés pour examiner les réponses statiques et dynamiques de cette classe de matériaux, comme (Reddy et Robbins 1994, Kant et Khare 1997, Ghugal et Shimpi 2002, Wu et al. 2002, Karama et al. 2003, Li 2008, Sofiyev et al. 2008, Sayyad et al. 2015, Yaylaci 2016, Kiani et Mirzaei 2018, Mehar et Panda 2019, Shahsavari et al. 2019ab, Abbas et al. 2020, Akbaş 2020, Gomes et al. 2020, Mercan et al. 2020, Moayedi et al. 2020, Safaei et al. 2020, Wang et al. 2020, Hashim et Sadiq 2021, Tanzadeh et Amoushahi 2021).

Pour examiner correctement le comportement des structures, un grand nombre de théories analytiques et numériques sont proposées. Karama et al. (2009) ont développé un modèle analytique basé sur la théorie de la déformation exponentielle en cisaillement pour analyser la réponse mécanique d'une plaque composite multicouche sous diverses charges externes axiales et transversales. Sayyad et Ghugal (2014) ont développé des formulations quasi-3D de déformation normale et de cisaillement sinusoïdal avec six inconnues pour l'analyse de flexion d'une plaque sandwich rectangulaire isotrope et composite sous une charge transversale uniforme et sinusoïdale. Sur la base de la formulation FEM isogéométrique, de l'énergie potentielle totale et de la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), Kiani (2019) ont étudié la stabilité thermique de plaques laminées composites renforcées simplement supportées et serrées. Mehar et Panda (2019) ont étudié le flambage thermique d'une coque CNT-RC graduée sous deux champs thermiques différents en employant une FEM linéaire isopérimétrique et une formulation d'ordre supérieur. Naik et Sayyad (2019) ont examiné l'analyse thermique des plaques composites stratifiées et des plaques-sandwichs en utilisant un modèle de déformation en cisaillement quasi-3D à neuf inconnues. Madenci (2019) a développé de nouvelles formulations raffinées pour analyser la réponse statique d'une structure composite avancée unidimensionnelle. Avcar (2019) a étudié les caractéristiques de vibration libre des poutres poreuses en utilisant les théories de déformation en cisaillement classique (FSDT). AlSaid-Alwan et Avcar (2020) ont examiné la réponse dynamique de la poutre FG en utilisant les théories des poutres d'Euler-Bernoulli, de Rayleigh et de Timoshenko. Abdul Kareem Abed et Ibraheem Majeed (2020) ont examiné l'influence des conditions aux limites (BC) sur la réponse dynamique transversale des plaques laminées en utilisant un modèle modifié de Fourier-Ritz et une formulation CPT. Hadji (2020) a discuté de

l'impact de la distribution de la porosité sur les caractéristiques de flexion de la poutre composite avancée (FG-beam) en employant une HSDT original. En se basant sur la FEM et la théorie de la déformation d'ordre supérieur transformée en coordonnées polaires, Vinyas (2020) a analysé la réponse dynamique de différentes formes de plaques poreuses. Une nouvelle HSDT généralisée et un modèle quasi 3D sont proposés par Merzoug et al. (2020) pour examiner l'effet micromécanique sur le comportement en flexion d'une structure composite avancée unidimensionnelle reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. Yaylaci et al. (2021a) ont présenté une étude comparative entre la méthode analytique et le MLP (perceptron multicouche) pour examiner un problème de contact reculé sans frottement de milieux à couches FG. En se basant sur l'élasticité non locale et la HSDT hyperbolique, Hadji et Avcar (2021) ont étudié le comportement vibratoire libre d'une nanopoutre P-FG imparfaite. En utilisant une FEM et une méthode analytique, Yaylaci et al. (2021b) ont examiné le problème de contact entre des couches de matériau P-FG non homogène pressées par une charge externe. Benhamed et Abouelregal (2020) ont examiné la réponse vibratoire des micro-poutres en nickel en se basant sur la thermoélasticité généralisée et la théorie modifiée des contraintes de couple. Shariati et al. (2020) ont analysé analytiquement et numériquement une réponse vibratoire dépendante de la taille d'une nanopoutre viscoélastique P-FG axiale en utilisant le schéma de discrétisation de Galerkin et la transformation de Laplace. D'autres travaux concernant le comportement thermoélastique sont étudiés (Abouelregal et al. 2020, Jena et al. 2020a, Abouelregal et al. 2021).

De même, une nouvelle formulation théorique basée sur la HSDT quasi-3D est présentée par Rachedi et al. (2020) pour examiner la réponse statique d'une plaque FG soumise à un chargement thermomécanique et assise sur une fondation élastique variable. Ces dernières années, l'effet du chargement hygro-thermique sur le comportement des structures 1D et 2D devient un axe de recherche d'actualité et très important, Ebrahimi et Barati (2018) ont étudié les comportements dynamiques de la feuille de graphène soumise à un environnement hygro-thermique en utilisant les théories de gradient de déformation et de plaque raffinée. Akbas (2019) a présenté un modèle numérique basé sur la MEF pour examiner la réponse post-buckling hygro-thermique de la poutre P-FG. Ghumare et Sayyad (2019) ont proposé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement quasi-3D d'ordre 5 pour examiner l'analyse statique non linéaire hygro-thermo-mécanique d'une plaque composite avancée sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak.

Le but du présent travail est de traiter les effets de la déformation normale et de l'environnement hygro-thermique sur la réponse statique en flexion des plaques composites simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement quasi-3D avec seulement quatre variables inconnues. Le présent modèle tient compte de l'effet de la déformation normale (effet d'étirement).

Plusieurs résultats numériques sont présentés par la suite pour examiner la précision du modèle développé.

Ce travail, s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux composites, leurs propriétés, et une revue bibliographique sur les travaux effectués sur les effets hygrothermique et hygro-thermo-mécanique sur le comportement des plaques composites.

Le deuxième chapitre se focalise sur les différentes théories des plaques.

Le troisième chapitre est consacré à un modèle analytique pour le calcul de flexion hygro-thermomécanique des plaques composites stratifiées.

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons les résultats obtenus par l'exécution des différents codes de calculs développés dans le cadre de cette recherche.

En fin, les points essentiels de la présente thèse sont mis en exergue dans une conclusion générale.

Chapitre I : Généralités
sur les matériaux
composites

I.1. Introduction

La science des matériaux composites continue de progresser grâce à leurs excellentes propriétés et caractéristiques telles que la légèreté et les hautes performances mécaniques. Les structures composites multicouches sont de plus en plus utilisées dans plusieurs domaines de l'ingénierie tels que le génie civil, la mécanique et l'aéronautique. En raison de l'exposition des plaques composites stratifiées à des environnements à haute température et à forte humidité, leurs performances sont fortement affectées. Par conséquent, la prédiction de leur comportement mécanique hygrothermique doit être basée sur des considérations tridimensionnelles plutôt que bidimensionnelles comme c'est généralement le cas.

I.2. Les composants du matériau composite

Un matériau composite peut être défini comme un assemblage de plusieurs matériaux de natures différentes. Il est généralement constitué d'une matrice dans laquelle sont insérés des renforts. La matrice assure le maintien de l'assemblage et les transferts de charge entre les renforts qui assurent la tenue mécanique du composite grâce à leurs caractéristiques mécaniques élevées (module et limite d'élasticité, résistance mécanique,...) Gay (1991)

Entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée *interface*. Cette zone assure la compatibilité renfort- matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Suivant les caractéristiques de la matrice et des renforts, on distingue généralement deux grandes familles

I.2.1 Les composites grandes diffusions (GD)

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines therm durcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

I.2.2 Les composites hautes performances (HP)

Principalement utilisés dans l'aéronautique, médical, sports et loisirs, sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD.

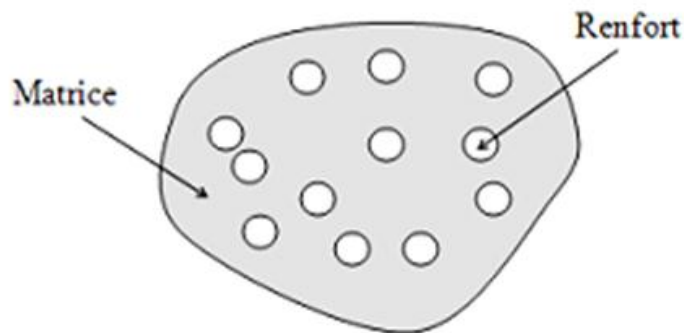


Figure I. 1: Matériau composite en général

I.2.3 La matrice

Le rôle de la matrice; est de lier les fibres du renfort entre eux, les incorporer et leur donner une adhérence suffisante pour que la transmission des efforts et la répartition des contraintes soient assurées Gornet (2008).

Les différentes familles de matrice sont présentées par l'organigramme suivant:

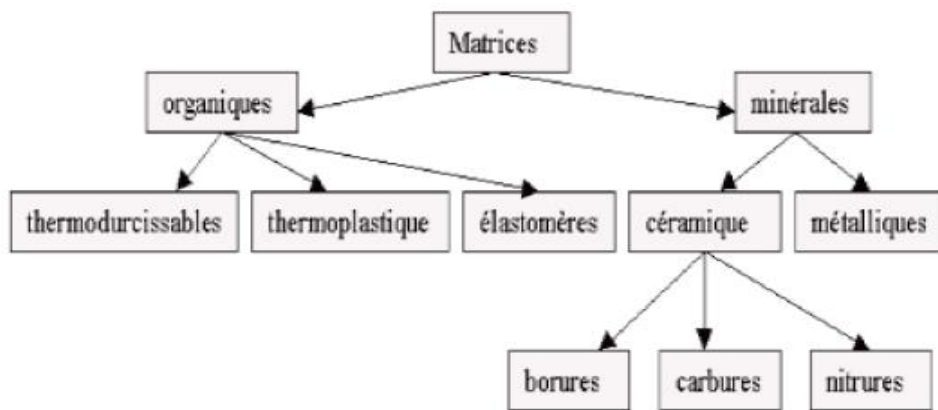


Figure I. 2 : Les différents types de matrice (Bahlouli 1993).

I.2.3.1 Les résines thermodurcissables (TD)

Les résines thermodurcissables, qui se présentent sous forme d'un liquide visqueux ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines durcissent après un cycle de chauffage appelé cycle de polymérisation . Les résines thermodurcissables les plus répandues sont les polyesters, les époxydes, les polyamides et les phénoliques. Les thermodurcissables sont des polymères qui ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois mais possèdent des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées par rapport aux thermoplastiques.

Tableau I. 1. Les thermodurcissables

Matrices TD	Avantages	Inconvénients
Polyesters insaturés	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne accroche sur fibres de verre - Translucidité - Bonne résistance chimique - Mise en oeuvre facile - Tenue en température (> 150 °C) - Prix réduit 	<ul style="list-style-type: none"> - Inflammabilité (sauf résines chlorées) - Tenue à la vapeur et à l'eau bouillante - Retrait important (6 à 15 %) - Durée de conservation en pot limitée - Emission de styrène
Les époxydes	<ul style="list-style-type: none"> - Tenue mécanique, thermique et chimique - Faible retrait (1 à 2 %) - Excellente adhérence sur les fibres - Mise en œuvre facile 	<ul style="list-style-type: none"> - Prix élevé - Sensibilité à l'humidité - Vieillessement sous température - Sensibilité aux chocs - Temps de polymérisation
Les phénoliques	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne tenue au feu - Prix souvent très bas - Dureté élevée - Structure très condensée 	<ul style="list-style-type: none"> - Fragiles, sensibles à l'humidité - Se dégradent rapidement - Toxicité en cours de fabrication - Difficiles à mettre en œuvre
Polyimides	<ul style="list-style-type: none"> - bonne stabilité sous hautes températures (> 250 °C). 	<ul style="list-style-type: none"> - Difficiles à mettre en œuvre.

1.2.3.2 Les résines thermoplastiques (TP)

Les résines thermoplastiques sont des chaînes polymères reliées entre elles par de faibles liaisons. A l'inverse des thermodurcissables, ces résines sont recyclables. La mise en œuvre des thermoplastiques est réalisation soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extrusion pour obtenir (des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc.). Les pièces obtenues conservent leur forme après refroidissement. Grâce à leur facilité de mise en œuvre et de leur faible coût, les TP représentent le plus grand tonnage en termes de production. Cependant, leurs propriétés mécaniques et thermomécaniques sont faibles. Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle (PVC), les polyéthylènes (PEBD, PEHD), le polypropylène (PP), le polystyrène (PS), le polyamide (PA) et le polycarbonate (PC).

1.2.3.3 Les matrices métalliques

Pour les applications à très hautes températures, on fait appel aux composites à matrice métallique (C.M.M.) jusqu'à 600 °C. Les métaux ou alliages métalliques, utilisées dans la fabrication des (C.M.M.), sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé ainsi, l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utiliser, les (C.M.M.) présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en températures et au chocs thermiques.

1.2.3.4 Les matrices céramiques

Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommages à très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

1.2.4 Le renfort

Le renfort contribue à améliorer la tenue mécanique (résistance et rigidité) du matériau composite. Les fibres se présentent sous forme linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus.

Les fibres de carbone, de verre et d'aramide sont les plus courantes. Les fibres naturelles d'origine animale ou végétale sont également utilisées dans certains produits.

La figure I.3 montre les différents types de renforts selon leurs origines :

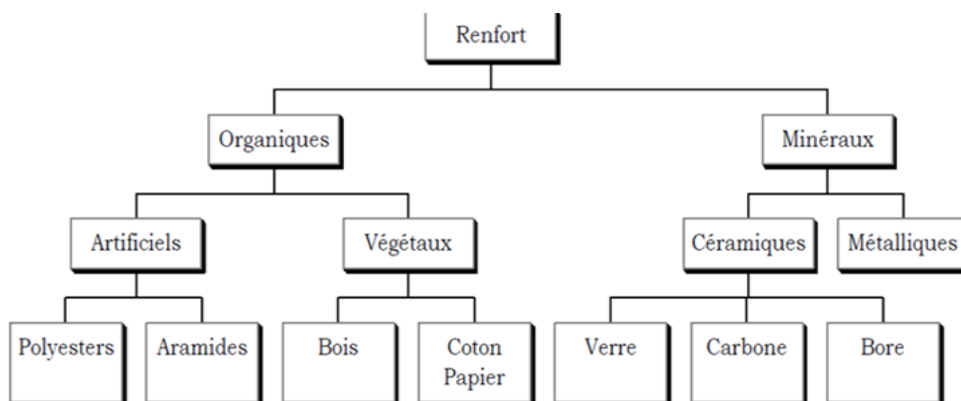


Figure I. 3: Les différents types de renfort (Jao Jules 2001)

1.2.4.1 Les fibres de verre

Les fibres de verre, appelées aussi fibres de verre textile, sont des filaments obtenus à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore, fluor, oxyde de sodium, oxyde de potassium, oxyde de zirconium, oxyde de fer, oxyde de titane) (Berthereau et Dallies 2008) . Actuellement, c'est de loin le renfort le plus utilisé dans les matériaux composites en raison du rapport performance mécanique/prix.

Les fibres de verre offrent, pour un prix raisonnable :

- Une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- De bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- Des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par :

Une **rigidité** insuffisante pour certaines applications (pièces de structure primaire en aéronautique),

Un **vieillessement** accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées (Issad 2018).

1.2.4.2 Les fibres de carbone

Les fibres de carbone sont des fibres synthétiques, de la famille des fibres minérales artificielles (FMA) non siliceuses. Elles sont produites à très haute température (1200°C) par trois types de procédés : carbonisation de rayonne (cellulose régénérée), de brai (goudron de houille ou résidu de pétrole) ou, le plus souvent, de polyacrylonitrile (PAN).

Les fibres de carbone se différencient par leur taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité (Afsset 2010).

Les fibres de carbone commercialisées peuvent être classées selon leurs propriétés d'extrusion. On distingue :

- ✓ Les fibres d'usage général ou d'application thermique (UG) : $E < 200$ GPa ;
- ✓ Les fibres haute résistance (HR) : $200 \text{ GPa} < E < 250$ GPa ;
- ✓ Les fibres à module intermédiaires (IM) : $250 \text{ GPa} < E < 350$ GPa ;

- ✓ Les fibres haut module (HM) : $350 \text{ GPa} < E < 550 \text{ GPa}$;
- ✓ Les fibres de très haut module (THM) : $E > 550 \text{ GPa}$ (Nguyen 2015).

1.2.4.3 Les fibres métalliques

Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100 °C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15 mm de diamètre.

Le diamètre résultant est de 100 à 200 μm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC).

1.2.4.4 Les Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression. Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement (Brek 2012).

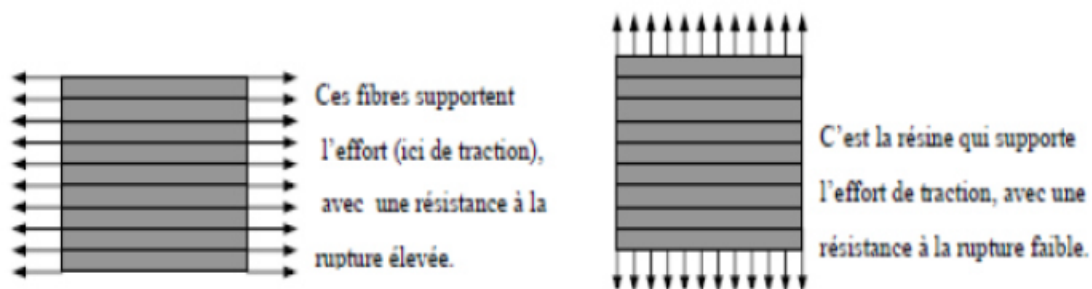


Figure I. 4: Orientation des fibres à 90° . Essai de traction-compression (Mezari 2014)

I.3. Les matériaux composites structuraux

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types principaux :

- ✓ Les monocouches ;
- ✓ Les stratifiées ;
- ✓ Les sandwiches.

I.3.1 Les monocouches

Les monocouches ou plis représentent l'élément de base de la structure composite où les fibres sont agencées en couche fine (quelques dixièmes de millimètre). Il existe plusieurs types de monocouches : à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement), à fibres courtes, à fibres tissées. (Bourega Remaoun 2014).

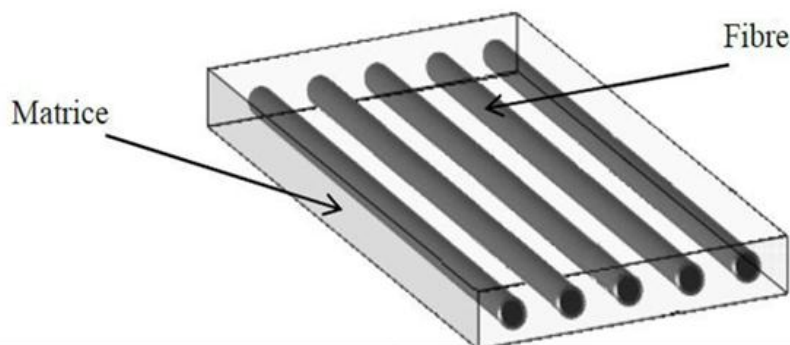


Figure I. 5: Composite monocouches (Younsi 2018)

I.3.2 Les stratifiées

Les stratifiés sont des structures légères de hautes performances mécaniques fréquemment rencontrés dans les composites. Un stratifié est l'empilement de monocouches les unes sur les autres ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches qui est désigné comme le référentiel du stratifié. La fibre peut être longue ou courte, uni- ou bidirectionnelles, mats ou tissus. L'empilement des couches, la nature et l'orientation de la fibre permettront d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées.

Les stratifiés sont généralement moins coûteux que les tissus 3D, mais les couches peuvent se décoller les unes des autres. Un stratifié possédant l'empilement (0, +45, 90, -45) est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0°, +45°, 90° et -45° ; l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du 26 repère principal du composite. La stratification n'est pas spécifique aux composites, le contreplaqué par exemple possède une structure stratifiée.

L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure (Bakhti 2017).

1.3.2.1 Nomenclature des stratifiés

On désigne les stratifiés par l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à un repère global arbitraire (x, y, z) , l'axe x (correspondant le plus souvent à la direction du chargement).

Un pli orienté à 0° présente des fibres dirigées selon l'axe x et un pli orienté à 90° des fibres selon y . Un stratifié quelconque de N plis est ainsi désigné par le N-uplet des orientations des plis dans le sens des z croissants. Pour condenser l'écriture, on note sous forme d'indice le nombre de plis adjacents de même orientation ainsi que le nombre de répétitions d'une même séquence de plis. L'indice s , correspond à un stratifié symétrique pour lequel on ne renseigne que la moitié de l'empilement, de la surface au plan de symétrie miroir.

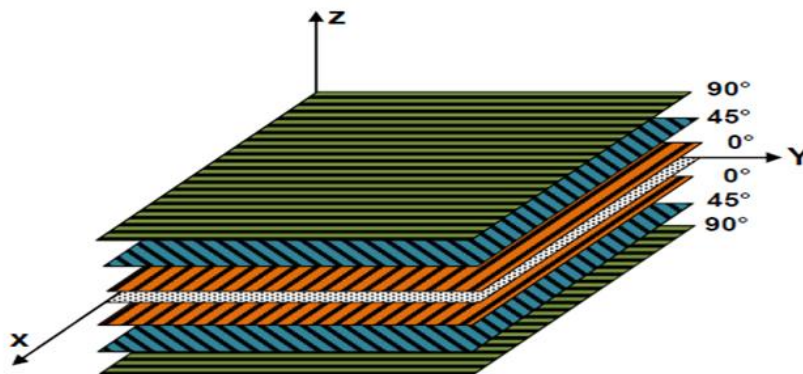


Figure I. 6: Exemple d'empilement symétrique $[90/45/0]_s$ (Slimani 2015)

1.3.2.2 Différents types de stratifiés

Les stratifiés peuvent être de quatre principaux types :

Stratifié Unidirectionnel : l'orientation des fibres est la même dans tous les plis.

Exemple : un stratifié unidirectionnel à 0° , $\theta=0^\circ$ dans les différents plis.

Stratifié à plis orientés $\pm\theta$ (équilibré) : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $(+\theta/-\theta)$, avec θ différent de 0° ou de 90° .

Stratifié à plis croisés (cross ply) : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre,

$0/90^\circ/0/90^\circ$.

Stratifié symétrique : l'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié, c.à.d. pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian, $\theta(z)=\theta(-z)$ (Ben Henni 2019).

I.3.3 Les sandwichs

Les structures sandwichs ont une très bonne rigidité en flexion et en torsion contrairement aux stratifiés. Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux peaux (généralement stratifiées) et d'une âme possédant de bonnes caractéristiques en compression et l'assemblage est réalisé par collage. Plus épaisse que les peaux, l'âme peut être une couche légère pleine (bois, mousse, balsa...etc.) ou creuse (alliages métalliques léger, structure en nid d'abeille, papier...etc.). Les peaux possédant de bonnes caractéristiques en traction, sont fréquemment des stratifiés à fibres de verre, de carbone, de Kevlar, naturelles ou hybrides ; ou des feuilles d'alliages légers.

L'ensemble âme-peaux se complètent pour avoir une structure rigide et légère, lorsque le sandwich est sollicité en torsion ou en flexion, les peaux travaillent essentiellement en membrane, tandis que l'âme travaille essentiellement en cisaillement hors plan (et à des niveaux de contrainte bien plus faibles) (Ben Henni 2019).

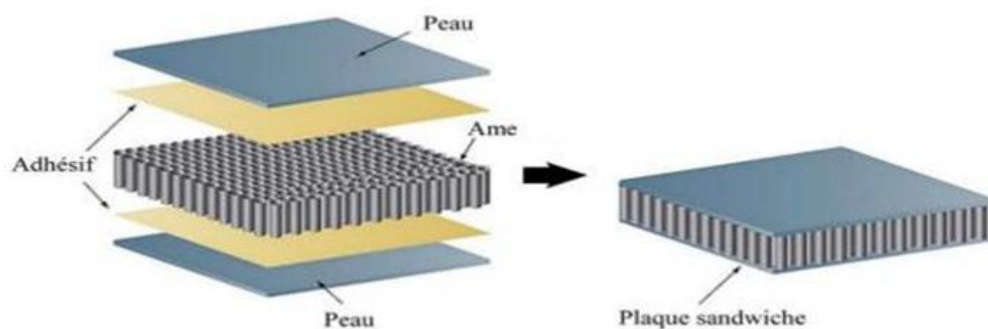


Figure I. 7: *Schema d'un sandwich (Daikh 2018)*

I.4. Effet hygrothermique

Les matériaux composites sont largement utilisés dans tous les domaines et sous différentes conditions. Ils sont soumis la plupart du temps à des variations de température et d'humidité ou les deux à la fois (hygrothermique). Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures, l'augmentation de la température et la dilatation thermique sous certaines

conditions aux limites peuvent provoquer un flambement thermique car la structure ne peut se dilater librement. Les plaques en matériaux composites peuvent également être soumises à des charges hygrothermo-mécaniques, une combinaison de chargement mécanique et hygrothermique. L'humidité et la température peuvent aussi avoir un effet significatif sur le comportement en vibration libre des structures composites stratifiées. L'étude du chargement hygrothermique permet une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement des plaques composites stratifiées lorsqu'elles sont soumises à des charges combinées.

Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont réalisé des travaux sur les effets hygrothermique et hygro-thermo-mécanique sur le comportement de plaques composites. Les premiers travaux sur le comportement au flambement thermique des plaques ont été réalisés par Gossard et al. (1952) et Heldenfels et Roberts (1952). Ils ont étudié le comportement d'une plaque simplement appuyée soumise à une distribution de température. Whitney et al. (1971) ont étudié l'effet de chargements thermiques et mécaniques ou une combinaison des deux sur le comportement en flexion et en vibration de plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis. Sai Ram et Sinha (1991) ont étudié les effets hygrothermiques sur les propriétés de flexion des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie de déformation du premier ordre qui tient compte du cisaillement transverse et en utilisant la méthode des éléments finis.

Patel et al. (2002) ont étudié les effets hygrothermiques sur le comportement de stratifiés en matériau composites épais en utilisant la théorie d'ordre supérieur pour le flambement, les vibrations et la réponse en flexion. Carrera (1998) a étudié l'influence de la température sur la réponse thermomécanique de plaques multicouches anisotropes épaisses et minces. Reddy et Hsu (1980) ont présenté des études sur des plaques composites stratifiées soumises à un chargement thermique et mécanique. Tungikar et Rao (1994) ont présenté une solution exacte 3D pour la répartition de la température et les contraintes thermiques dans des plaques composites stratifiées simplement appuyées. Hamidi et al. (2015) ont proposé une théorie des plaques sinusoïdales pour l'analyse thermomécanique de la flexion de plaques sandwich FGM. Boudarba et al. (2016) ont utilisé une théorie simple du premier ordre pour étudier la réponse au flambement thermique de plaques sandwich FGM sous diverses conditions aux limites. Zenkour et al. (2014) ont étudié l'influence de la température et de l'humidité sur le comportement de plaques stratifiées à couches croisées reposant sur des fondations élastiques. Panduro et al. (2017) ont présenté l'approche (LW) pour analyser le comportement hygrothermomécanique de plaques composites à trois couches. Pan et al. (2016) ont étudié le comportement en compression longitudinale de

câbles de fibres de basalte tressées 3D dans une plage de vitesses de déformation comprise entre 1 200 et 2 400 s⁻¹ et dans une plage de températures de 23 à 210 °C en utilisant une analyse expérimentale et la méthode des éléments finis. Ils ont utilisé une résine époxyde dont les propriétés mécaniques varient avec la température.

Tlidji et al. (2014) ont étudié l'effet thermomécanique sur des plaques sandwichs FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Une analyse vibratoire de plaques composites stratifiées soumises à des changements de température a été réalisée par Liu et Huang (1996). Une méthode par éléments finis a été proposée par Swamy Naidu et al. (2007) pour l'analyse non linéaire des vibrations libres de coques composites stratifiées dans des conditions hygrothermiques variables. Les résultats obtenus ont montré que les fréquences fondamentales diminuent avec l'augmentation de l'humidité et de la température et que les plaques minces sont sensibles aux conditions environnementales. Hossein et al. (2015) ont montré que les fréquences naturelles et le taux d'amortissement du système diminuent de manière linéaire avec l'augmentation de température. Tounsi et al. (2005) ont analysé le décalage au cisaillement, prenant en compte l'effet hygrothermique sur les propriétés matérielles du stratifié et évalué l'effet des fissures transversales sur la réduction de la rigidité des composites stratifiés à couches croisées sous conditions hygrothermiques. Ameer et al. (2009) ont montré la réduction de la rigidité due au vieillissement hygrothermique en considérant que les propriétés des matériaux des plaques sont dépendantes de la température et de l'humidité. Bouakaz.K et al. (2014) ont utilisé la méthode des éléments finis et une approche analytique basée sur un modèle élastique pour calculer les contraintes d'interfaces d'une poutre en I renforcée par des plaques en CFRP sous chargement hygrothermique. Les propriétés matérielles de la plaque sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité.

I.5. Conclusion

Les composites offrent des solutions technologiques innovantes qui permettent d'améliorer la qualité des matériaux (légèreté, rigidité...etc.). Toutefois, le prix, la non-homogénéité de ces matériaux sont souvent un frein à leur utilisation dans différents secteurs industriels. Dans ce premier chapitre, on a fait un aperçu général et appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques.

Nous avons également présenté dans ce chapitre quelques études sur les effets hygrothermiques qui peuvent dégrader les propriétés et la rigidité des structures.

***Chapitre II : Les théories des
plaques composites***

II.1. Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des plaques stratifiées en matériaux composites, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

À travers ce chapitre, nous allons faire une représentation des différents modèles sur les théories des plaques composites dans le cadre de l'analyse et de la modélisation des plaques composites dans un but de décrire les réponses statiques de ces plaques sous différents chargement que soit mécanique , thermiques et/ou hygrothermique ainsi que le bon choix de la méthode de détermination à appliquer. Nous allons ci-dessous faire une rétrospective sur les théories de déformation des plaques , la théorie classique des plaques (CPT) qui est dédiée aux plaques minces, la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) qui est dédiée aux plaques semi-épaisses ensuite vient les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDT) qui est dédiée aux plaques épaisses et enfin la théorie de déformation des plaques quasi-3D.

II.2. Les théories de déformation des plaques :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques composites stratifiées dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement mécanique, thermiques et hygrothermique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

II.2.1. La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie classique des plaques minces (CPT) est celle dans laquelle le champ de déplacement se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff (Figure II.1):

- Les sections perpendiculaires au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation en négligeant les effets de déformation de cisaillement transverse.

- L'épaisseur de la plaque est faible, par conséquent les contraintes dans le sens de cette dernière sont supposées nulles. Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont non extensibles).

L'hypothèse de love-Kirchhoff implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) et les déformations/ contraintes normales ($\epsilon_z = \sigma_z = 0$).

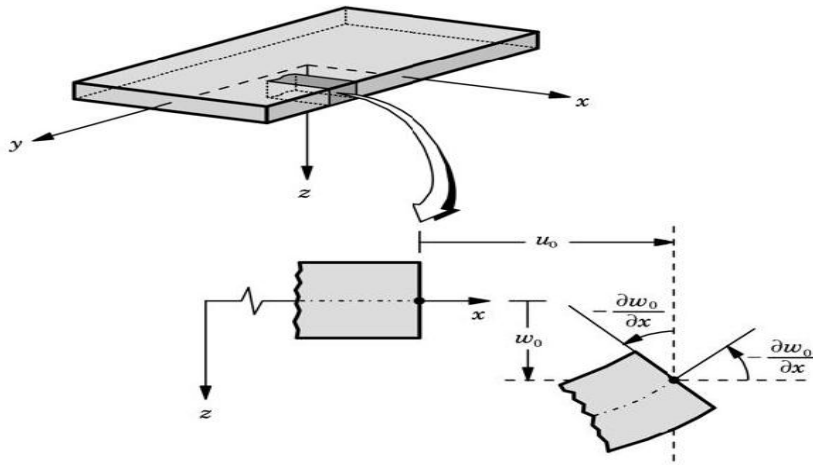


Figure II. 1: La CPT, Théorie classique de Kirchhoff (Reddy et al2001)

Une description détaillée de modèle actuel peut être trouvée dans (Timoshenko et Woinowsky-Kreiger 1959), (Reddy 1997, 1999)

La cinématique de cette théorie peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec :

u_0, v_0 : sont les déplacements de membrane dans les directions x et y , w_0 : la flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$: sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les directions x, y .

Le plan principal de la plaque est le plan (O, x, y) et l'épaisseur est orienté selon l'axe $z \in [-h/2; h/2]$.

Puisque l'effet de cisaillement transverse ne tient pas en compte dans ce modèle, la précision de la théorie CPT n'est adéquate que dans l'étude des plaques minces. En plus, la théorie classique des plaques sous-estime la flèche et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses (Belabed2015).

II.2.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation du premier ordre est issue de la théorie classique mais qui tient en compte l'effet de cisaillement transverse. Toutefois, il est nécessaire d'ajouter un facteur de correction de cisaillement car les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. (Reissner 1945) et (Mindlin 1951) ont été développés la théorie du premier ordre de déformations de cisaillement FSDT. Elle est basée sur l'hypothèse cinématique de Mindlin suivante : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée à cause de l'effet du cisaillement transverse.

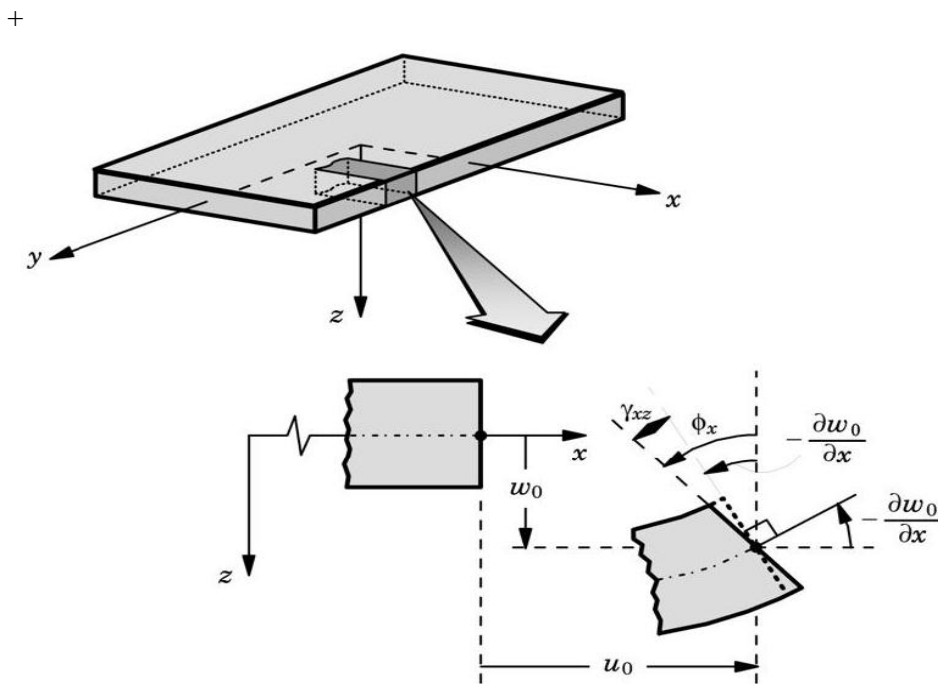


Figure II. 2: La FSDT, Cinématique de Reissner-Mindlin (Hachemi 2018)

La FSDT est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

u_0, v_0 et w_o : sont les déplacements de membrane

ϕ_x et ϕ_y : Les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement

II.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Le champ de déplacement est généralement écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec

(u_0, v_0, w_o) et (ϕ_x, ϕ_y) : sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement.

$f(z)$: est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

La théorie de déformation en cisaillement d'ordre trois de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997), (Reddy, 1999) sont obtenus par:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

(Touratier, 1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory **ESDPT**) développée par (Karama et al, 2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory **HSDPT**) développée par (Ait Atmane et al, 2010) est obtenue en prenant:

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]^z} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh(\pi/2) - 1} \quad (\text{II.7})$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

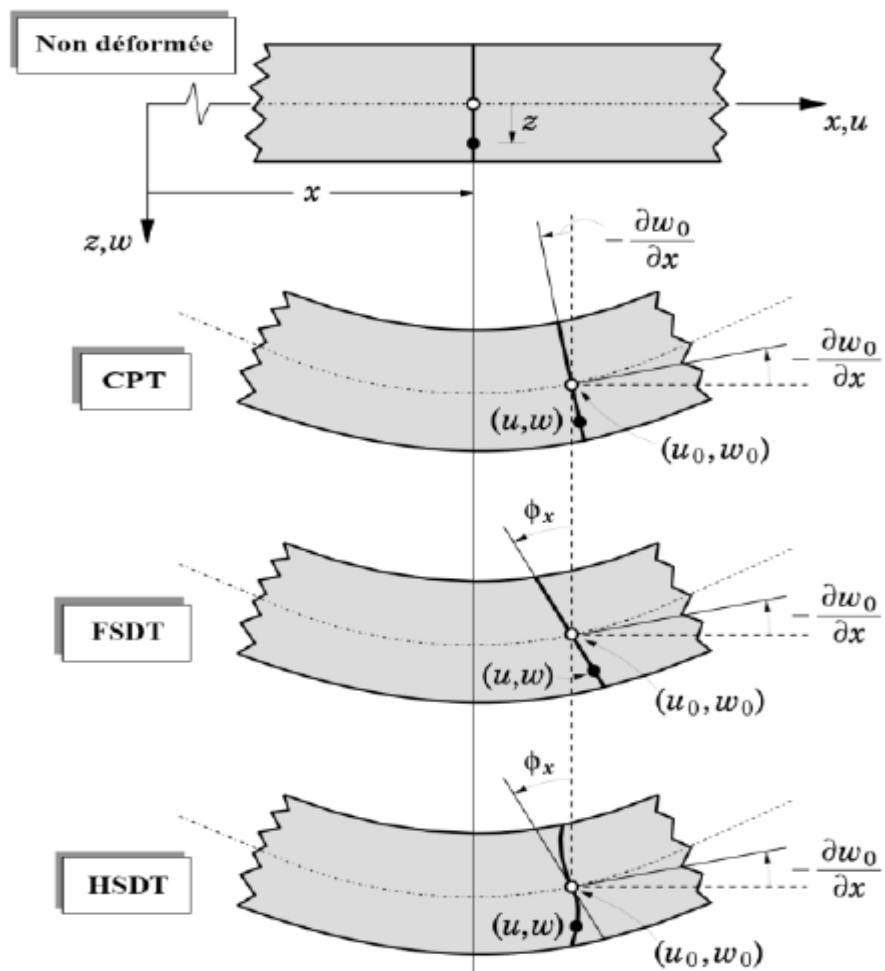


Figure II. 3 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé HSDT avec CLPT et FSDT (Reddy et al. 2001)

II.2.4. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre des inconnues est seulement quatre, par contre, égale à cinq ou plus pour les autres théories d'ordre élevé (H. Ait Atmane., et al, 2010), (J.N. Reddy, 1984), (M. Touratier, 1991), (M. Karama., et al. 2003).

De ce fait, Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

Où w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement.

II.2.5. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en $g(z)$, alors la cinématique devient (Belabed 2015):

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.9}$$

Où

u_0 et v_0 : sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

w_b et w_s : sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire, qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse

Avec :

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{II.10})$$

II.3. Conclusion

Ce chapitre était dédié à la lecture de la littérature des différentes théories des plaques composites stratifiées à savoir : la théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT) et une nouvelle théorie qui permet de réduire le nombre d'inconnus ce qui implique l'optimisation du temps de calcul, c'est la théorie de la déformation des plaques quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque.

A la base de ce qui a été montré dans ce chapitre, le chapitre trois sera consacré à la présentation d'une simple théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur HSDT pour l'analyse de flexion hygro-thermo-mécanique des plaques composites stratifiées.

Chapitre III : Analyse de flexion hygro-thermomécanique des plaques composites stratifiées

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, Nous avons développé deux nouvelles formulations analytiques pour étudier la réponse des plaques composites stratifiées en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement quasi-3D (HSDT quasi-3D), cette théorie ne possède que quatre variables, contrairement aux autres théories qui possèdent cinq variables ou plus, grâce à la formulation par l'intégrale indéterminée par la solution de Navier introduit dans le champ du déplacement.

Cette théorie sera exploitée pour l'analyse de la flexion des plaques composites stratifiées antisymétriques sous chargements mécaniques, thermomécanique et hygro-thermomécanique.

Les équations du mouvement sont dérivées selon le principe des travaux virtuels, et l'approche de Navier est adoptée pour dériver des solutions analytiques.

III.2. Formulation mathématique

On considère une plaque rectangulaire uniforme de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h , comportant un nombre n de couches orthotropes orientées selon les angles $(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n)$. Le système de coordonnées cartésiennes de la plaque composite stratifiée (x,y,z) avec les coordonnées x et y selon les directions dans le plan et z dans la direction de l'épaisseur, coïncidant avec la surface médiane de la plaque (Joshani et al. 2017).

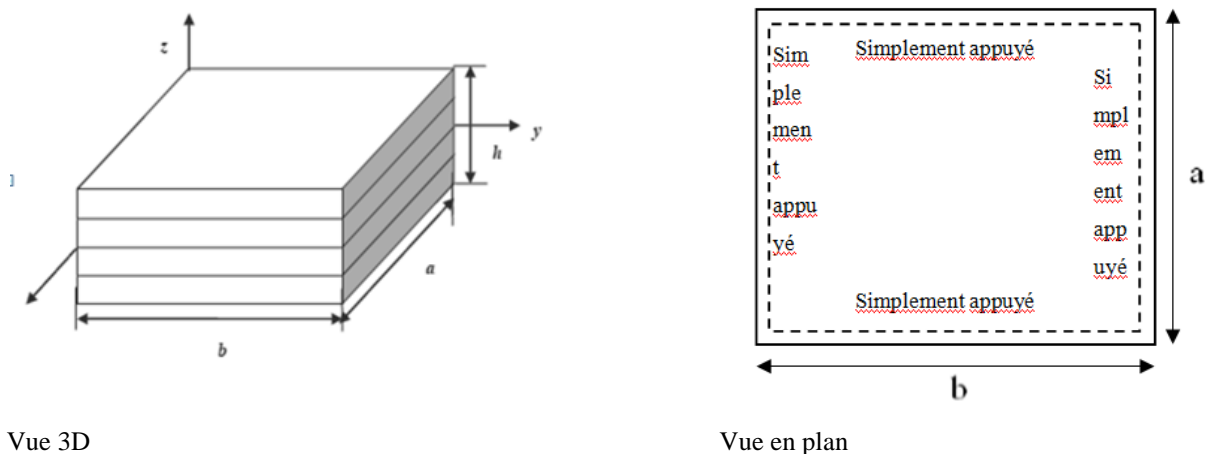


Figure III. 1 Géométrie et système de coordonnées de la plaque stratifiée.

Sur la base des hypothèses des théories HSDTs (Kim et al. 2009, Daouadji et al. 2015, Ahmed et al. 2019, Madenci 2019, Hadji 2020, Vinyas 2020), en modifiant et en simplifiant les formulations

Chapitre II I : Analyse de flexion hygro-thermomécanique des plaques composites stratifiées

mathématiques et en incluant l'effet de déformation normale (étirement de l'épaisseur), la cinématique actuelle prend une forme plus simple avec seulement quatre inconnues, à savoir:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial x} + C_1 f(z) \int \varphi(x, y) dx \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial y} + C_2 f(z) \int \varphi(x, y) dy \\
 w(x, y, z) &= w_o(x, y) + g(z) \varphi(x, y)
 \end{aligned} \tag{I II.1}$$

Où $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_o(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ représentent les quatre fonctions de déplacement de la surface médiane de la plaque. Les constantes C_1 et C_2 dépendent de la géométrie (voir l'équation I II.21).

La fonction de déformation est prise sous la forme de tangente hyperbolique inverse qui assure la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres (supérieure et inférieure) de la plaque composite laminée (Joshani et al. 2017). La fonction de forme est donnée comme suit

$$f(z) = \left\{ \tanh^{-1} \left(\frac{rz}{h} \right) - z \frac{r/h}{1 - (r^2/4)} \right\}, \quad g(z) = \frac{df(z)}{28 dz} \tag{I II.2}$$

Le paramètre r est pris égal à 0,088 qui est obtenu en post-traitement (Joshani et al. 2017).

Sur la base du champ de déplacement de l'équation, Les déformations linéaires non nulles sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + f(z) C_1 \varphi \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + f(z) C_2 \varphi \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \varphi(x, y) \frac{\partial}{\partial z} g(z) \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{C_1 \partial \int \varphi dx}{\partial y} + \frac{C_2 \partial \int \varphi dy}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) C_1 \int \varphi dx + g(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = f'(z) C_2 \int \varphi dy + g(z) \frac{\partial \varphi}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{I II.3}$$

Où ε_{ii} , γ_{xy} et γ_{iz} sont les déformations normales, dans le plan et en cisaillement transversal, respectivement.

Contrairement aux théories HSDTs qui négligent l'effet d'étirement de l'épaisseur ($\varepsilon_{zz} = 0$). Le présent modèle tient compte de la déformation transversale (étirement de l'épaisseur), avec $\varepsilon_{zz} = \varphi(x, y) \times \partial g(z) / \partial z$.

Les intégrales apparaissant dans les formulations ci-dessus sont résolues par la procédure de Navier et sont exprimées comme suit (Joshani et al. 2017) :

$$\begin{aligned}
 \int \varphi dx &= Y \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \int \varphi dy = Z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
 \frac{\partial \int \varphi dx}{\partial y} &= Y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial \int \varphi dy}{\partial x} = Z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{I II.4}$$

Où les coefficients Y et Z sont donnés dans l'équation (I II.21).

Les relations contrainte (σ) -déformation (ε) de la k^{ème} couche en incluant le champ hygro-thermique sont obtenues comme (Ghumare et Sayyad 2019) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}^k = \left[\begin{array}{cccccc} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{66}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} - \alpha_{xx} \Delta T - \beta_{xx} \Delta c \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_{yy} \Delta T - \beta_{yy} \Delta c \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_{zz} \Delta T - \beta_{zz} \Delta c \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T - \beta_{xy} \Delta c \end{array} \right\}^k \quad (\text{I II.5})$$

$$\text{et } \{\sigma\}_{6 \times 1} = \left[\overline{Q_{ij}} \right] \{\varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^H\}_{6 \times 1}$$

Où $(\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}, \alpha_{xy})$ et $(\beta_{xx}, \beta_{yy}, \beta_{zz}, \beta_{xy})$ sont les coefficients de dilatation thermique et de dilatation de l'humidité, respectivement. ΔT est les paramètres de changement de température et Δc est la concentration d'humidité, respectivement. Les formulations généralisées du champ de température $T(x, y, z)$ et de la concentration d'humidité $c(x, y, z)$ à travers l'épaisseur de la plaque composite laminée peuvent être écrites comme suit (Joshani et al. 2017) :

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T_o(x, y) + \frac{z}{h} T_1(x, y) \\ c(x, y, z) &= c_o(x, y) + \frac{z}{h} c_1(x, y) \end{aligned} \quad (\text{I II.6})$$

Où T_o, c_o sont la température et la concentration d'humidité constantes et T_1, c_1 des variables linéaires.

Les coefficients de rigidité $\left[\overline{Q_{ij}} \right]^{(k)}$ de chaque couche de la plaque composite stratifiée sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}
 \overline{Q}_{11}^k &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\
 \overline{Q}_{12}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\
 \overline{Q}_{13}^k &= Q_{13} \cos^2 \theta_k + Q_{23} \sin^2 \theta_k \\
 \overline{Q}_{22}^k &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k \\
 \overline{Q}_{23}^k &= Q_{13} \sin^2 \theta_k + Q_{23} \cos^2 \theta_k \\
 \overline{Q}_{33}^k &= Q_{33} \\
 \overline{Q}_{44}^k &= Q_{44} \cos^2 \theta_k + Q_{55} \sin^2 \theta_k \\
 \overline{Q}_{55}^k &= Q_{55} \cos^2 \theta_k + Q_{44} \sin^2 \theta_k \\
 \overline{Q}_{66}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k)
 \end{aligned} \tag{I II.7}$$

Où $[Q_{ij}]$ et θ représentent la matrice de rigidité réduite et l'angle d'orientation des fibres de la $k^{\text{ième}}$ couche, respectivement. La rigidité $[Q_{ij}]$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}, \quad Q_{12} = \frac{E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta}, \quad Q_{13} = \frac{E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta}, \quad Q_{23} = \frac{E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta}, \quad Q_{33} = \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} \\
 Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}, \\
 \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}
 \end{aligned} \tag{I II.8}$$

Où E , G et ν sont respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

III.3. Equations du mouvement

Le principe du travail virtuel est utilisé ici pour dériver les équations de gouvernance ; le principe peut être exprimé par la formulation suivante (Joshani et al. 2017, Ghumare et Sayyad 2019) :

$$\int_0^r (\delta U - \delta w) = 0 \tag{I II.9}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation donnée par :

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right] dz \right\} dx dy \tag{I II.10}$$

Et δw est le travail virtuel effectué par la charge externe transversale q , avec

$$\delta w = \int_{\Omega_0} q \delta w_0 dx dy \quad (I II.11)$$

Où la quantité q représente l'intensité de la charge externe.

En substituant le travail virtuel externe de l'équation (I II.11) et la variation de l'énergie de déformation de l'équation (I II.10) dans la formule du principe du travail virtuel équation (I II.9), en intégrant l'équation par parties et en recueillant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \varphi$. Les équations différentielles gouvernantes sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0 \\ -C_1 P_{xx} - C_2 P_{yy} - (C_1 Y + C_2 Z) \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + C_1 Y \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + C_2 Z \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S g_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S g_{yz}}{\partial y} - N_z &= 0 \end{aligned} \quad (I II.12)$$

Où N , M et P représentent les composantes de base des résultantes des contraintes et des moments dus à la charge appliquée. Les quantités S et Sg sont la résultante des contraintes de cisaillement. Les paramètres sont définis comme suit (Joshua et al. 2017) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{xx} & M_{xx} & P_{xx} \\ N_{yy} & M_{yy} & P_{yy} \\ N_{xy} & M_{xy} & P_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} [1 \quad z \quad f(z)] dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \\ \begin{bmatrix} S_{yz} & Sg_{yz} \\ S_{xz} & Sg_{xz} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} [f'(z) \quad g(z)] dz \end{aligned} \quad (I II.13)$$

En remplaçant les équations (I II.13) par l'équation (I II.12), les équations différentielles gouvernantes peuvent être obtenues en fonction des coefficients de déplacement u_0 , v_0 , w_0 et φ comme suit

$$\begin{aligned}
 & A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 + C_1YE_{11}d_{111}\varphi \\
 & + ((C_1Y + C_2Z)E_{66} + C_2ZE_{12})d_{122}\varphi + G^A_{13}d_1\varphi = d_1N^T_{xx} + d_2N^T_{xy} + d_1N^C_{xx} + d_2N^C_{xy} \\
 & (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 - B_{22}d_{222}w_0 \\
 & + ((C_1Y + C_2Z)E_{66} + C_1YE_{12})d_{112}\varphi + C_2ZE_{22}d_{222}\varphi + G^A_{23}d_1\varphi = d_2N^T_{yy} \\
 & + d_1N^T_{xy} + d_2N^C_{yy} + d_1N^C_{xy} \\
 & B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + B_{22}d_{111}v_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 \\
 & - D_{11}d_{1111}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (2F_{66} + F_{12})(C_1Y + C_2Z)d_{1122}\varphi + C_1YF_{11}d_{1111}\varphi \\
 & + C_2ZF_{22}d_{2222}\varphi + G^B_{13}d_{11}\varphi + G^B_{23}d_{22}\varphi + q = d_{11}M^T_{xx} + d_{22}M^T_{yy} + d_{12}M^T_{xy} \\
 & + d_{11}M^C_{xx} + d_{22}M^C_{yy} + d_{12}M^C_{xy} \tag{ I II.14} \\
 & - (C_1E_{11} + C_2E_{12})d_1u_0 - G^A_{13}d_1u_0 - (C_1E_{12} + C_2E_{22})d_2v_0 - G^A_{23}d_2v_0 \\
 & - (C_1Y + C_2Z)E_{66}(d_{122}u_0 + d_{112}v_0) + (C_1F_{11} + C_2F_{12} + G^B_{13})d_{11}w_0 \\
 & + 2(C_1Y + C_2Z)F_{66}d_{1122}w_0 + (C_1F_{12} + C_2F_{22} + G^B_{23})d_{22}w_0 \\
 & - (C_1G^C_{13} + C_2G^C_{23} + G^D_{33})\varphi - (C_1Y(C_1H_{11} + C_2H_{12} + G^C_{13} + C_1YA_{55} + 2X_{55}) + L_{55})d_{11}\varphi \\
 & - (C_2Z(C_1H_{12} + C_2H_{22} + G^C_{23} + C_2ZA_{44} + 2X_{44}) + L_{44})d_{22}\varphi \\
 & - (C_1Y + C_2Z)^2H_{66}d_{1122}\varphi = -C_1P^T_{xx} - C_2P^T_{yy} - (C_1Y + C_2Z)d_{12}P^T_{xy} - N^T_{zz} \\
 & - C_1P^C_{xx} - C_2P^C_{yy} - (C_1Y + C_2Z)d_{12}P^C_{xy} - N^C_{zz}
 \end{aligned}$$

Où d_i , d_{ij} , d_{ijk} et d_{ijkl} désignent les opérateurs différentiels :

$$\begin{aligned}
 d_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijk} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \\
 d_{ijkl} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}, \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad x_1 = x, x_2 = y. \tag{ I II.15}
 \end{aligned}$$

Les coefficients de rigidité (A, B, D, \dots) employés dans les équations précédentes sont définis comme :

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \\
 (G_{ij}^A, G_{ij}^B, G_{ij}^C) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} g'(z) (1, z, f(z)) dz, \quad i = 1, 2 \quad j = 3 \\
 G_{33}^D &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{33}^{(k)} [g'(z)]^2 dz \\
 [A_{ij} \quad L_{ij} \quad X_{ij}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{ij}^{(k)}]_{2 \times 2} \begin{bmatrix} (f'(z))^2 & (g(z))^2 & g(z) f'(z) \end{bmatrix} dz, \quad i, j = 4, 5
 \end{aligned} \tag{II.16}$$

Les résultantes de la contrainte et du moment, dues à la charge thermique N^T, M^T et P^T et à la concentration d'humidité N^C, M^C et P^C sont exprimées comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_{xx}^T & M_{xx}^T & P_{xx}^T & 0 \\ N_{yy}^T & M_{yy}^T & P_{yy}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{zz}^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T & P_{xy}^T & 0 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q]_{6 \times 6}^k \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} [1 \quad z \quad f(z) \quad g'(z)] T dz \tag{II.17}$$

$$\begin{bmatrix} N_{xx}^C & M_{xx}^C & P_{xx}^C & 0 \\ N_{yy}^C & M_{yy}^C & P_{yy}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{zz}^C \\ N_{xy}^C & M_{xy}^C & P_{xy}^C & 0 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q]_{6 \times 6}^k \begin{Bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} [1 \quad z \quad f(z) \quad g'(z)] C dz \tag{II.18}$$

III.4. Méthodologie de solution pour les plaques stratifiées à couches croisées

La solution analytique des équations différentielles partielles ci-dessus dans l'équation (II.14) peut être trouvée par la méthode de Navier pour l'analyse de la flexion d'une plaque composite stratifiée simplement supportée (Kim et al. 2009, Joshan et al. 2017), les coefficients de déplacement peuvent être donnés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u_o &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 v_o &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
 w_o &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)
 \end{aligned} \tag{ I II.19}$$

En outre, la charge mécanique externe q , la charge thermique T_o , T_1 et la concentration d'humidité c_o , c_1 sont prises en termes de solution de Navier comme (Joshani et al. 2017) :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_o \\ T_1 \\ c_o \\ c_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ T_o \\ T_1 \\ c_o \\ c_1 \end{Bmatrix} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \tag{ I II.20}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b} \\
 C_1 &= -\alpha^2, C_2 = -\beta^2 \\
 Y &= -1/\alpha^2, Z = -1/\beta^2
 \end{aligned} \tag{ I II.21}$$

Où U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et X_{mn} sont des coefficients à déterminer, q_{mn} est fonction de la charge q_o pour une charge sinusoïdale et $16q_o\pi^2/mn$ pour une charge uniformément répartie). Les conditions aux limites en appui simple pour les plaques stratifiées à plis croisés antisymétriques sont données par :

Chapitre II I : Analyse de flexion hygro-thermomécanique des plaques composites stratifiées

$$\begin{aligned} u_o = w_o = \varphi = N_{yy} = M_{yy} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, b \\ v_o = w_o = \varphi = N_{xx} = M_{xx} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, a \end{aligned} \quad (\text{ I II.22})$$

En substituant les équations (II I.20) et (I II.19) dans l'équation (II I.14), nous obtenons la solution analytique de l'analyse de la flexion sous forme de matrice comme suit :

$$R_{\{4 \times 4\}} \{U_{mn} \quad V_{mn} \quad W_{mn} \quad X_{mn}\}^t = F_{\{4 \times 1\}} \quad (\text{ I II.23})$$

Où R est la matrice de rigidité symétrique et carrée, et $F = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4\}^t$ sont les composantes du vecteur force généralisé, avec :

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha (A_1^T \bar{T}_0 + B_1^T \bar{T}_1 + A_1^C \bar{C}_0 + B_1^C \bar{C}_1) \\ F_2 &= \beta (A_2^T \bar{T}_0 + B_2^T \bar{T}_1 + A_2^C \bar{C}_0 + B_2^C \bar{C}_1) \\ F_3 &= -q - \alpha^2 (B_1^T \bar{T}_0 + D_1^T \bar{T}_1 + B_1^C \bar{C}_0 + D_1^C \bar{C}_1) - \beta^2 (B_2^T \bar{T}_0 + D_2^T \bar{T}_1 + B_2^C \bar{C}_0 + D_2^C \bar{C}_1) \\ F_4 &= -C_1 (E_1^T \bar{T}_0 + F_1^T \bar{T}_1 + E_1^C \bar{C}_0 + F_1^C \bar{C}_1) - C_2 (E_2^T \bar{T}_0 + F_2^T \bar{T}_1 + E_2^C \bar{C}_0 + F_2^C \bar{C}_1) \\ &\quad - G_3^{AT} \bar{T}_0 - G_3^{BT} \bar{T}_1 \end{aligned} \quad (\text{ I II.24})$$

Où

$$\begin{aligned} & \left[A_i^T \quad B_i^T \quad D_i^T \quad E_i^T \quad F_i^T \quad G_i^{AT} \quad G_i^{BT} \right] = \\ & \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\bar{Q} \right]^k \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \left[1 \quad z \quad z^2 \quad f(z) \quad zf(z) \quad g'(z) \quad zg'(z) \right] T dz \end{aligned} \quad (\text{ I II.25})$$

$$\begin{bmatrix} A_i^C & B_i^C & D_i^C & E_i^C & F_i^C & G_i^{AC} & G_i^{BC} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\overline{Q} \right]^k \begin{Bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & f(z) & zf(z) & g'(z) & zg'(z) \end{bmatrix} C dz \tag{II.26}$$

III.5. Conclusion

Pour l'analyse mécanique des plaques composites stratifiées antisymétriques, une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D à quatre variables a été utilisée et développé dans ce chapitre,

Le principal avantage de la théorie considérée réside dans la prise en compte de l'effet de la déformation de cisaillement transverse. Employant un champ de déplacement de variable intégrale indéterminé à travers l'épaisseur de la plaque, l'addition du terme d'intégrale dans le champ de déplacement mène à une réduction des nombres d'inconnus en quatre, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels et résolues en utilisant la solution de Navier. Des solutions analytiques sont déduites pour déterminer les fréquences propres des plaques simplement appuyées.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

ChapitreIV : Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Dans le présent chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques des études analytiques présentées dans le chapitre précédent.

Des interprétations seront présentées et discutées. Ce chapitre contient également une étude paramétrique permettant de mettre l'accent sur quelques paramètres influant sur le comportement statique, thermique et hygrothermique des plaques stratifiées en matériaux composites, tels que le rapport dimension latérale sur épaisseur (a/b) et géométrique (a/h) de la plaque, du rapport modulaire (E_1/E_2), du rapport de coefficient thermique " $\alpha_{yy} / \alpha_{xx}$ ", du nombre et de l'angle d'orientation des couches.

Nous avons choisi de présenter les résultats en trois parties : la première partie est une étude de la réponse statique des plaques stratifiées. La deuxième partie est une étude la réponse thermo-mécanique des plaques stratifiées. La dernière partie est réservée à l'analyse hygro-thermique et hygro-thermomécanique des plaques stratifiées.

IV.2. Résultats numériques et discussions

Dans cette section, les résultats numériques de l'analyse de flexion des plaques composites stratifiées antisymétriques en appui simple sous différents types de chargement sont présentés et discutés en détail. Les propriétés des matériaux de la plaque stratifiée considérée dans la présente étude sont (Joshani et al. 2017)

$$\begin{aligned} E_1 / E_2 &= 25, G_{12} / E_2 = 0.5, G_{13} / E_2 = 0.5, G_{23} / E_2 = 0.2, E_3 = E_2, \\ \nu_{12} &= 0.25, \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{12}, \nu_{21} = \frac{E_2 \nu_{12}}{E_1}, \nu_{31} = \frac{E_3 \nu_{13}}{E_1}, \nu_{32} = \frac{E_3 \nu_{23}}{E_2}, \\ \alpha_{xx} / \alpha_{yy} &= 1/3, \alpha_{xx} / \alpha_{zz} = 1/3, \beta_{xx} = 0, \beta_{yy} = \beta_{zz} = 0.44 \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Dans le but de vérifier l'exactitude du modèle actuel, les résultats présentés de la réponse en flexion sont présentés sous forme adimensionnelle et sont divisés en trois parties

IV.2.1 Réponse statique des plaques stratifiées

Tout d'abord, la plaque composite stratifiée antisymétrique simplement soutenue est supposée soumise à un chargement mécanique transversal uniquement. La flèche et les contraintes non dimensionnelles sont données par (Reddy 1984, Kim et al. 2009, Joshan et al. 2017) :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{100 E_z h^3}{q_0 a^4} w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \\ \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\sigma}_{zz} & \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h^2 \\ q_0 b^2 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{zx} & \bar{\tau}_{yz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tau_{zx} & \tau_{yz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q_0 b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Le tableau IV.1 montre la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à un chargement transversal sinusoïdal uniquement q . Les résultats obtenus du déplacement transversal \bar{w} calculé en tenant compte de l'effet d'étirement $\varepsilon_z \neq 0$ sont comparés à diverses théories trouvées dans la littérature (Pagano 1970, Mindlin 1951, Reddy 1984, Kim et al. 2009, Joshan et al. 2017). De la comparaison effectuée, il est clair que le modèle actuel est en bon accord avec les HSDT de Reddy (1984), Kim et al. (2009) et Joshan et al. (2017) dans le cas d'une plaque modérément épaisse, nous pouvons voir que le résultat actuel est légèrement réduit dans le cas de $a/h = 2$ en raison de l'effet d'étirement de l'épaisseur. On peut également noter que la flèche adimensionnelle \bar{w} est en relation inverse avec le rapport portée/épaisseur a/h car la plaque devient une structure mince.

Tableau IV. 1 : La flèche adimensionnelle \bar{w} pour une plaque antisymétrique à deux couches soumise à un chargement transversal sinusoïdal q .

a/h	Présent	Joshan et al. (2017)	Pagano (1970)	Mindlin (1951)	Reddy (1984)	Kim et al. (2009)
	Quasi-3D $\varepsilon_z \neq 0$	HSDT $\varepsilon_z = 0$	Elasticité 3D	FSDT $\varepsilon_z = 0$	HSD $\varepsilon_z = 0$	RPT $\varepsilon_z = 0$
2	4.3401	4.5629	4.9362	5.4103	4.5619	4.5619
5	1.6264	1.6671	1.7287	1.7627	1.6670	1.6670
10	1.2057	1.2161	1.2318	1.2416	1.2161	1.2161
20	1.0991	1.1018	1.1060	1.1113	1.1018	1.1018
100	1.0649	1.0651	1.0742	1.0653	1.0651	1.0651

Le tableau IV.2 prédit les contraintes dimensionnelles dans le plan $\overline{\sigma_{xx}}, \overline{\sigma_{yy}}$, normales $\overline{\sigma_{zz}}$ et tangentielles $\overline{\tau_{xy}}, \overline{\tau_{xz}}$ and $\overline{\tau_{yz}}$ d'une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ sous une charge transversale sinusoïdale uniquement q en fonction du rapport géométrique a/h . Les contraintes calculées sont comparées à celles données par Reddy (1984) et Joshan et al. (2017) en utilisant les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), Mindlin (1951) basé sur la première théorie de déformation en cisaillement (FSDT) et Pagano (1970) en utilisant l'élasticité tridimensionnelle (3D). On peut observer dans ce tableau que les résultats actuels sont en bon accord avec ceux donnés par le modèle HSDTs (Reddy 1984 et Joshan et al. 2017). On peut également noter que la contrainte normale adimensionnelle $\overline{\sigma_{zz}}$ diminue avec l'augmentation du rapport portée/épaisseur a/h .

Tableau IV. 2 : contraintes adimensionnelle $\bar{\sigma}$ and $\bar{\tau}$ pour une plaque antisymétrique à deux couches soumise à une charge transversale sinusoïdale q .

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{zz}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$
5	Présent	Quasi-3D $\varepsilon_z \neq 0$	0.8949	0.0899	0.0048	0.0573	0.3022	0.3022
	Joshan et al. (2017)	HSDT $\varepsilon_z = 0$	0.9060	0.0891	–	0.0577	0.3128	0.3128
	Reddy (1984)	HSDT $\varepsilon_z = 0$	0.9060	0.0891	–	0.0577	0.3128	0.3128
	Mindlin (1951)	FSDT $\varepsilon_z = 0$	0.7157	0.0843	–	0.0525	–	–
	Pagano (1970)	Elasticité 3D	0.8410	0.1090	–	0.0591	0.3210	0.3130
10	Présent	Quasi-3D $\varepsilon_z \neq 0$	0.7450	0.0854	0.0017	0.0532	0.3083	0.3083
	Joshan et al. (2017)	HSDT $\varepsilon_z = 0$	0.7468	0.0851	–	0.0533	0.3190	0.3190
	Reddy (1984)	HSDT $\varepsilon_z = 0$	8 0.746	1 0.085	–	533 0.0	90 0.31	0 0.319
	Mindlin (1951)	FSDT $\varepsilon_z = 0$	7 0.715	3 0.084	–	525 0.0	–	–
	Pagano (1970)	Elasticité 3D	2 0.730	6 0.088	–	535 0.0	10 0.33	0 0.331

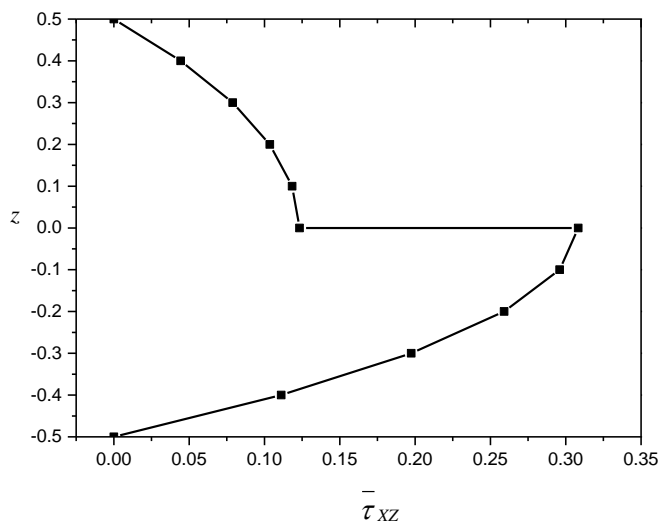
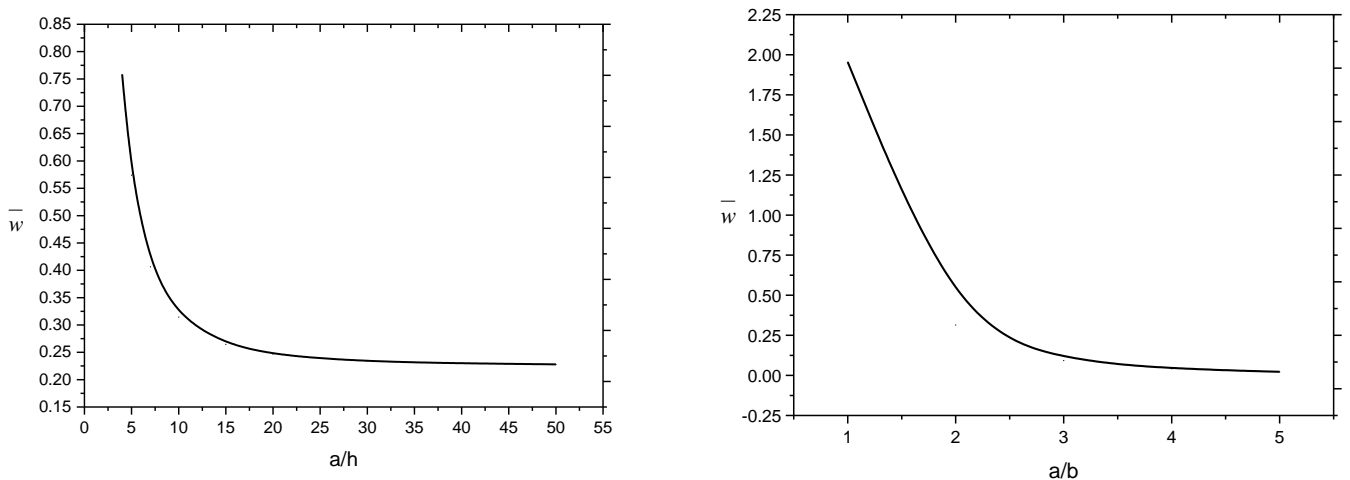


Figure IV. 1 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ ($x = a / 2, y = 0$) le long de l'épaisseur d'une plaque à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ antisymétriques à plis croisés.

La figure IV.1 montre la variation de la contrainte de cisaillement transversale $\overline{\tau}_{xz}(x = a/2, y = 0)$ à travers l'épaisseur de la plaque carrée laminée antisymétrique à deux couches $0^\circ/90^\circ$ avec $a/h = 10$. Les résultats sont calculés en tenant compte de l'étirement de l'épaisseur ($\varepsilon_z \neq 0$). Nous pouvons conclure du graphique obtenu que le modèle actuel assure une contrainte de cisaillement nulle dans les surfaces libres (haut et bas) sans l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement. Les sauts de la contrainte de cisaillement transversale $\overline{\tau}_{xz}$ dans le plan médian $\overline{z} = 0$ sont dus à la différence de rigidité entre les deux couches $0^\circ/90^\circ$ composant la plaque laminée.



(a) plaque rectangulaire ($a/b = 2$)

(b) ($a/h = 10$)

Figure IV. 2 : Variation de la flèche adimensionnelle \overline{w} d'une plaque à deux couches $0^\circ/90^\circ$ antisymétriques à plis croisés soumise à une charge uniformément répartie en fonction du rapport dimension latérale sur épaisseur et de géométrie.

La figure IV.2 montre le déplacement transversal adimensionnelle \overline{w} en fonction des rapports de géométrie a/h et de la dimension latérale sur épaisseur a/b d'une plaque composite laminée antisymétrique à deux couches $0^\circ/90^\circ$ sous une charge mécanique uniformément distribuée. A partir des résultats obtenus sur la Figure IV.2 a, nous pouvons voir que la déviation centrale adimensionnelle \overline{w} de la plaque composite laminée rectangulaire avec $a/b = 2$ est proportionnellement inverse avec le rapport a/h car la plaque devient mince. De même, nous observons que l'augmentation de la valeur du rapport a/b entraîne une diminution de la flèche adimensionnelle \overline{w} .

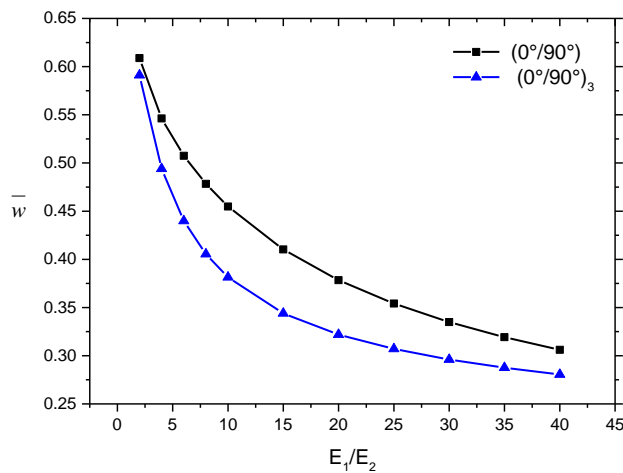


Figure IV. 3: Effect de l'anisotropie du matériau E_1 / E_2 sur la flèche adimensionnelle \bar{w} de plaques à deux $0^\circ / 90^\circ$ et six couches $(0^\circ / 90^\circ)_3$ à plis croisés antisymétriques soumises à un chargement transversal sinusoïdal.

L'effet du module d'anisotropie E_1 / E_2 d'une plaque rectangulaire stratifiée antisymétrique à deux $0^\circ / 90^\circ$ et six couches $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ avec $a / b = 2$ et $a / h = 5$ sur la déviation centrale adimensionnelle est présenté dans la figure IV.4. La plaque composite est soumise à une charge transversale sinusoïdale q uniquement. D'après les résultats calculés, il est clair que le module d'anisotropie E_1 / E_2 a un rôle significatif sur les valeurs de la flèche \bar{w} . Nous concluons également que la plaque à six couches $(0^\circ / 90^\circ)_3$ donne les plus petites valeurs de déplacement transversal \bar{w} et ceci est dû à l'augmentation de la rigidité.

IV.2.1 Réponse thermo-mécanique des plaques stratifiées

Ensuite, la plaque composite stratifiée antisymétrique à deux et quatre couches ($0^\circ / 90^\circ$ et $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$) est soumise à une charge thermomécanique.

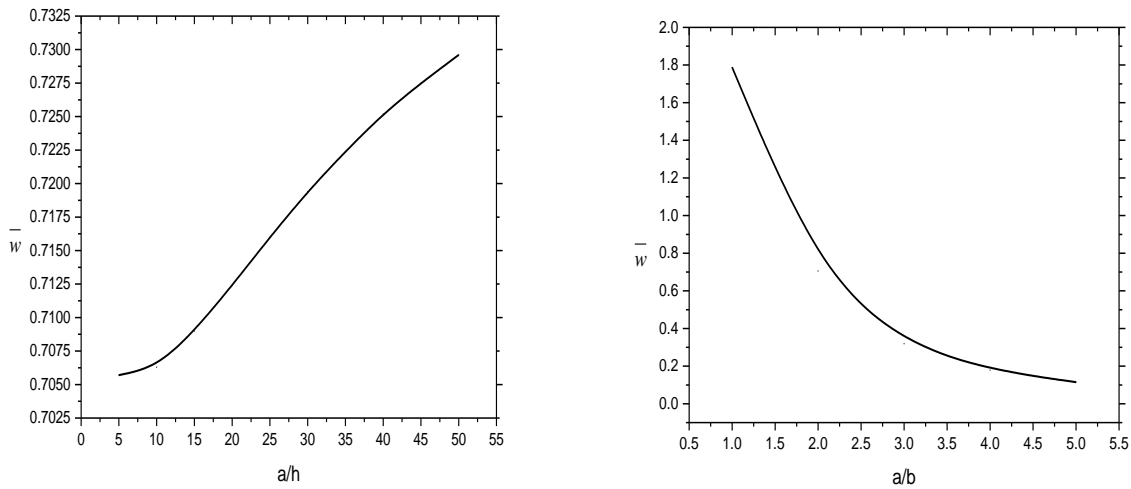
Le tableau IV.3 présente les valeurs de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ de la plaque composite laminée antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ en fonction du rapport portée/épaisseur a / h . La plaque composite est soumise à une charge thermique pure uniquement $\bar{T}_1 = 100, q_0 = 0, C_1 = 0$. Les résultats calculés à l'aide de la méthode HSDT quasi-3D actuelle sont comparés au modèle de déformation par cisaillement d'ordre supérieur de Joshan et al. (2017) et à la

méthode des éléments finis basée sur la FSDT développée par Reddy et Hsu (1980). D'après la comparaison faite dans le tableau IV. 3 Un bon accord est confirmé entre les résultats actuels et ceux calculés via le modèle HSDT. Il est remarquable que pour la plaque mince $a / h = 100$, tous les résultats sont les mêmes car l'effet de déformation en cisaillement est négligé.

Tableau IV. 3 : La flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à une charge thermique sinusoïdale $\bar{T}_1 = 100, q_0 = 0, \bar{C}_1 = 0$.

a/h	Présent	Joshan et al. (2017)	Reddy et Hsu (1980)
	Quasi-3D $\varepsilon_z \neq 0$	HSDT $\varepsilon_z = 0$	FSDT/FEM $\varepsilon_z = 0$
5	1.6877	1.6894	1.6765
6,25	1.6843	1.6848	1.6765
10	1.6806	1.6798	1.6765
12,5	1.6796	1.6786	1.6765
20	1.6783	1.6773	1.6765
25	1.6778	1.6770	1.6765
50	1.6789	1.6767	1.6765
100	1.6766	1.6766	1.6765

La figure IV.4 représente la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ d'une plaque stratifiée antisymétrique à quatre couches $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ soumise à une charge thermique pure $\bar{T}_1 = 100, q_0 = 0, \bar{C}_1 = 0$ en fonction des rapports côté/épaisseur a / h et dimension a / b . Nous pouvons à nouveau conclure que l'augmentation des paramètres a / h et a / b conduit à une diminution des valeurs de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$.



(a) plaque rectangulaire ($a / b = 2$)

(b) ($a / h = 10$)

Figure IV. 4: Variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ en fonction de la portée de l'épaisseur et des rapports dimension latérale sur épaisseur d'une plaque à quatre couches $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ croisées antisymétriques soumise à un champ thermique.

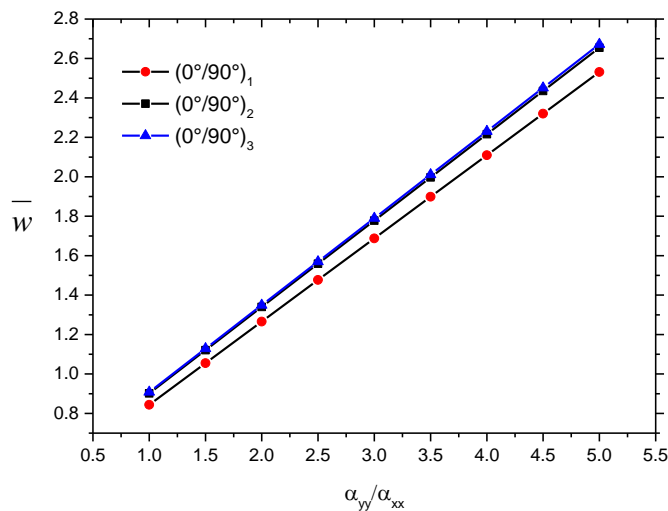


Figure IV. 5 : Effect du rapport de coefficient thermique $\alpha_{yy} / \alpha_{xx}$ sur la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ de plaques à deux et quatre et six couches croisées antisymétriques soumise à un champ thermique sinusoïdal.

La variation de la flèche $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ de différentes plaques composites stratifiées avec $a/h = 5$ en fonction du coefficient thermique $\alpha_{yy} / \alpha_{xx}$ est présentée dans la Fig.6. Les plaques composites sont soumises à une charge thermique sinusoïdale $q_0 = 0, \bar{T}_1 = 100, \bar{C}_1 = 0$. D'après les résultats obtenus, nous pouvons voir que la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ augmente linéairement avec le coefficient de dilatation thermique $\alpha_{yy} / \alpha_{xx}$. Les valeurs les plus élevées de la flèche w sont obtenues pour la plaque composite à six couches $(0^\circ / 90^\circ)_3$.

La variation de la flèche adimensionnelle \hat{w} d'une plaque stratifiée carrée antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ sous des charges thermiques et mécaniques combinées $q_0 = 100, \bar{T}_1 = 100, \bar{C}_1 = 0$ est présentée dans le tableau 4. Le paramètre de flèche non dimensionnelle utilisé dans cette section est donné par (Reddy et Hsu 1980, Joshan et al. 2017) :

$$\hat{w} = w \left(\left(\frac{qa^4}{h^3 \lambda} \right) + \left(\frac{\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^4}{10h} \right) \right)^{-1} \quad \text{with} \quad \lambda = \left(\frac{\pi^4}{12} \right) \left(4G_{12} + \frac{E_1 + (1 + \nu_{12})E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) \quad (IV.3)$$

Dans le tableau IV.4, les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par d'autres modèles tels que HSDT de Joshan et al. (2017) et la méthode des éléments finis basée sur FSDT proposée par Reddy et Hsu (1980) avec $\varepsilon_z = 0$. Il est clairement observé que les résultats actuels sont légèrement réduits par rapport à HSDT et cela est dû à l'introduction de la déformation normale $\varepsilon_z \neq 0$ dans les calculs. Une fois encore, nous pouvons conclure que la flèche adimensionnelle \hat{w} diminue avec l'augmentation du rapport côté/épaisseur a/h .

Tableau IV. 4 : La flèche adimensionnelle \hat{w} pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à un chargement thermique et transversal sinusoïdal combiné.

a/h	Présent	Joshan et al. (2017)	Reddy et Hsu (1980)
	Quasi-3D $\varepsilon_z \neq 0$	HSDT $\varepsilon_z = 0$	FSDT/FEM $\varepsilon_z = 0$
5	3.7384	3.8302	4.0415
6,25	3.2768	3.3362	3.4666
10	2.7714	2.795	2.8438
12,5	2.6540	2.6692	2.7001
20	2.5264	2.5325	2.5443
25	2.4969	2.5009	2.5083
50	2.4576	2.4587	2.4597
100	2.4477	2.4482	2.4541

IV.2.3 Réponse hygro-thermomécanique des plaques stratifiées

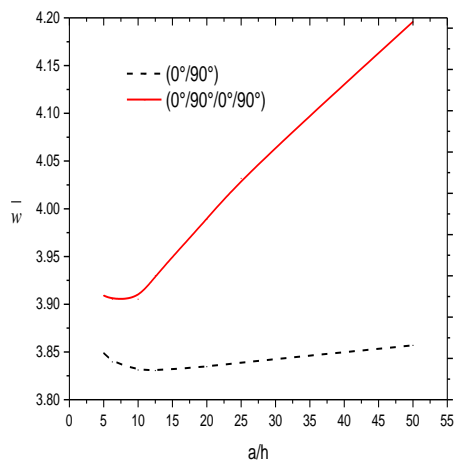
Cette dernière partie est réservée à l'analyse hygro-thermique et hygro-thermomécanique des plaques composites sur appuis simples.

Le tableau IV.5 présente les valeurs de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ d'une plaque laminée carrée antisymétrique $a = b$ à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ sous un chargement hygro-thermique sinusoïdal $q_0 = 0, \bar{T}_1 = 300, \bar{C}_1 = 0.01$ en fonction du rapport côté/épaisseur a / h . Une comparaison est faite entre les résultats actuels et ceux donnés par le modèle de déformation par cisaillement à quatre variables de Joshan et al. (2017). D'après le tableau, on peut noter que l'effet de l'étirement de l'épaisseur est significatif dans le cas d'une plaque épaisse. Tous les modèles ont presque les mêmes résultats lorsque le rapport géométrique est plus grand a / h .

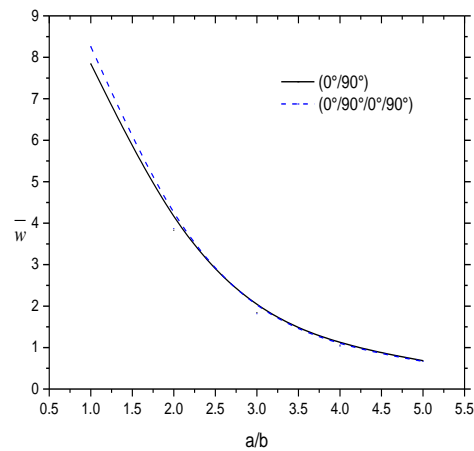
Tableau IV. 5 : La flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ pour une plaque antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ soumise à un chargement hygrothermique sinusoïdal.

a/h	Présent	Joshan et al. (2017)
	Quasi-3D $\varepsilon_z \neq 0$	HSDT $\varepsilon_z = 0$
5	7.8749	7.8840
6,25	7.8605	7.8625
10	7.8440	7.8390
12,5	7.8396	7.8335
20	7.8333	7.8276
25	7.8310	7.8262
50	7.8264	7.8244
100	7.8245	7.8239

La figure IV.6 montre les variations de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ en fonction des rapports a / h et a / b pour une plaque stratifiée antisymétrique à deux $0^\circ / 90^\circ$ et quatre couches $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ soumise à une charge hygro-thermique sinusoïdale $q_0 = 0, \bar{T}_1 = 300, \bar{C}_1 = 0.01$. Dans ce cas, nous voyons que la flèche adimensionnelle \bar{w} est en corrélation directe avec le rapport géométrique a / h , d'autre part, les valeurs de \bar{w} diminuent avec l'augmentation du rapport dimension latérale sur épaisseur a / b .



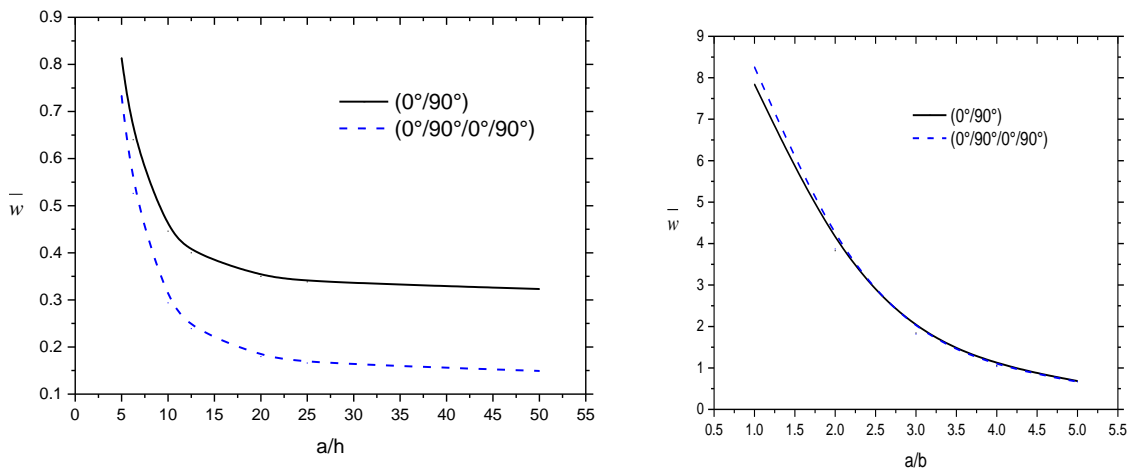
(a) plaque rectangulaire ($a / b = 2$)



(b) ($a / h = 10$)

Figure IV. 6 : Variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ en fonction de la portée de l'épaisseur et des rapports dimension latérale sur épaisseur d'une plaque à quatre couches croisées $(0^\circ / 90^\circ)_2$ antisymétriques soumise à un champ hygrothermique.

La figure IV.7 présente l'effet de la géométrie a / b et des rapports dimension latérale sur épaisseur a / h sur les variations de la flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w} = (10wh) / (\alpha_{xx} \bar{T}_1 a^2)$ d'une plaque stratifiée antisymétrique à deux couches $0^\circ / 90^\circ$ et à quatre couches $(0^\circ / 90^\circ)_2$ soumise à une charge hygro-thermomécanique combinée $q_0 = 100, \bar{T}_1 = 300, \bar{C}_1 = 0.01$. A partir des graphiques tracés, il est clairement remarquable que l'augmentation des rapports a / b et a / h conduit à réduire les valeurs de la flèche adimensionnelle \bar{w} et ceci est confirmé pour les plaques stratifiées antisymétriques à deux $0^\circ / 90^\circ$ et quatre couches $(0^\circ / 90^\circ)_2$.



(a) plaque rectangulaire ($a/b = 2$)

(b) ($a/h = 10$)

Figure IV. 7: Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} en fonction de la portée de l'épaisseur et des rapports dimension latérale sur épaisseur de la plaque antisymétrique à quatre couches $(0^\circ/90^\circ)_2$ soumise à une charge hygro-thermique et mécanique combinée.

IV.3. Conclusion

Dans ce travail, des résultats numériques et leurs interprétations sont présentés à partir de l'analyse de flexion des plaques stratifiée antisymétrique à couches croisées soumise à des charges mécanique, thermique, hygro-thermique et hygro-thermomécanique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, l'analyse statique des plaques composites stratifiées antisymétriques soumises à une charge hygro-thermomécanique est présentée en utilisant la théorie de la déformation en cisaillement quasi-3D à quatre variables. L'effet de la déformation normale (étirement de l'épaisseur) est pris en compte dans les formulations. Les solutions analytiques de l'analyse de flexion sont obtenues par le principe des travaux virtuels et la solution de Navier. Une variété de résultats numériques est présentée pour vérifier la validité des modèles utilisés et déterminer les différents paramètres ayant une influence sur la flexion médiane et les contraintes normales et tangentielles . A partir des résultats obtenus, on peut dire que:

- La contrainte normale adimensionnelle diminue avec l'augmentation du rapport portée/épaisseur.
- L'augmentation de la valeur du rapport géométrique entraîne une diminution de la flèche adimensionnelle.
- Le module d'anisotropie a un rôle significatif sur les valeurs de la flèche adimensionnelle.
- La flèche adimensionnelle augmente linéairement avec le rapport de dilatation thermique .

Enfin, nous pouvons conclure que la température et l'humidité ont une influence considérable sur la réponse en flexion de la plaque composite stratifiée. Une amélioration des formulations développées peut être employée dans les futurs travaux en considérant un autre type de structures et de matériaux.

Références bibliographique

Abbas, S., Benguediab, S., Draiche, K., Bakora, A., & Benguediab, M. (2020), “An efficient shear deformation theory with stretching effect for bending stress analysis of laminated composite plates”, *Structural Engineering and Mechanics*, **74**(3), 365–380. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.74.3.365>.

Abdul Kareem Abed, Z. and Ibraheem Majeed, W. (2020), “[Effect of boundary conditions on harmonic response of laminated plates](#)”, *Composite Materials and Engineering*, **2**(2), 125-140. [DOI:10.12989/cme.2020.2.2.125](https://doi.org/10.12989/cme.2020.2.2.125).

Abouelregal, A. E. (2020), “On Green and Naghdi thermoelasticity model without energy dissipation with higher order time differential and phase-lags”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **6**(3), 445–456. <https://doi.org/10.22055/JACM.2019.29960.1649>.

Abouelregal, A. E., Mohammed, W. W. and Mohammad-Sedighi, H. (2021), “Vibration analysis of functionally graded microbeam under initial stress via a generalized thermoelastic model with dual-phase lags”, *Archive of Applied Mechanics*, **91**(5), 2127–2142. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01873-2>.

Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., Faleh, N.M. (2019), “Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections”, *Geomech. Eng.*, **17**(2), 175–180. <https://doi.org/10.12989/gae.2019.17.2.175>.

Akbaş, Ş. D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”. *Steel and Composite Structures*, **19**(6), 1421-1447. <https://doi.org/10.12989/SCS.2015.19.6.1421>.

Akbaş, Ş. D. (2020), “Dynamic responses of laminated beams under a moving load in thermal environment”, *Steel and Composite Structures*, **35**(6), 729–737. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.35.6.729>.

Akbas, S.D., (2019), “Hygro-thermal post-buckling analysis of a functionally graded beam”, *Coupled Systems Mechanics.*, **8**(5), 459-471. <https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.5.459>.

AlSaid-Alwan, H. H. S. and Avcar, M. (2020), “Analytical solution of free vibration of FG beam utilizing different types of beam theories: A comparative study”, *Computers and Concrete*, **26**(3), 285–292. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.3.285>.

Ameur, M., Tounsi, A., Benyoucef, S., Bouiadjra, M. B., & Bedia, E. A. (2009). Stress analysis of steel beams strengthened with a bonded hygrothermal aged composite plate. *International Journal of*

Attia, M.A. (2017), “On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity”, *International Journal of Engineering Science*. **115**, 73-101. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.03.011>.

Avcar, M. (2019), “Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **30**(6), 603–615. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.30.6.603>.

Berthelot, J. (1999). Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures. Tec & Doc, 3^{ème} édition.

Benferhat, R., Daouadji, T.H. and Rabahi, A. (2021), “[Effect of air bubbles in concrete on the mechanical behavior of RC beams strengthened in flexion by externally bonded FRP plates under uniformly distributed loading](#)”, *Composite Materials and Engineering*, **3**(1), 41-55. DOI: [10.12989/cme.2021.3.1.041](https://doi.org/10.12989/cme.2021.3.1.041).

Benhamed, M. M. and Abouelregal, A. E. (2020), “Influence of temperature pulse on a nickel microbeams under couple stress theory”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **6**(4), 777–787. <https://doi.org/10.22055/JACM.2019.30918.1789>.

Bharath, H. S., Waddar, S., Bekinal, S. I., Jeyaraj, P. and Doddamani, M. (2020), “Effect of axial compression on dynamic response of concurrently printed sandwich”, *Composite Structures*, **113**223. doi:10.1016/j.compstruct.2020.113223.

Bouakaz, K., Daouadji, T. H., Meftah, S. A., Ameur, M., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2014). A numerical analysis of steel beams strengthened with composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, **50**(4), 491-500.

Bouderba, B., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2016). Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, **58**(3), 397-422.

Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H., & Adda Bedia, E. A. (2020), “Buckling of carbon nanotube reinforced composite plates supported by Kerr

foundation using Hamilton's energy principle”, *Structural Engineering and Mechanics*, **73**(2), 209-223. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2020.73.2.209>.

Carrera, E. (1998). Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis. *AIAA journal*, **36**(5), 830-839.

Civalek, Ö., & Avcar, M. (2020), “Free vibration and buckling analyses of CNT reinforced laminated non-rectangular plates by discrete singular convolution method”, *Engineering with Computers*. doi:10.1007/s00366-020-01168-8.

Daouadji, T. H. and Hadji, L. (2015), “Analytical solution of nonlinear cylindrical bending for functionally graded plates”, *Geomechanics and Engineering*, **9**(5), 631–644. <https://doi.org/10.12989/GAE.2015.9.5.631>.

Ebrahimi, F. and Barati, M. R. (2018), “Hygro-thermal vibration analysis of bilayer graphene sheet system via nonlocal strain gradient plate theory”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.*, 40(9). doi:10.1007/s40430-018-1350-y.

Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M., & Bensattalah, T. (2020), “Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle”, *Advances in nano research*, **8**(1), 37-47. DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.037>.

Gbeminiyi, M. S. (2021), “Perturbation Methods to Analysis of Thermal, Fluid Flow and Dynamics Behaviors of Engineering Systems”, *A Collection of Papers on Chaos Theory and Its Applications.*, DOI: [10.5772/intechopen.96059](https://doi.org/10.5772/intechopen.96059).

Ghorbanpour Arani, A., Hashemian, M., Loghman, A., & Mohammadimehr, M. (2011), “Study of dynamic stability of the double-walled carbon nanotube under axial loading embedded in an elastic medium by the energy method”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **52**(5), 815–824. Doi:10.1134/s0021894411050178.

Ghugal, Y. M. and Shimpi, R. P. (2002), “A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **21**(9), 775–813. doi:10.1177/073168402128988481.

Ghumare, S.M. and Sayyad, A.S. (2019), “Nonlinear hygro-thermo-mechanical analysis of functionally graded plates using a fifth-order plate theory”, *Arab. J. Sci. Eng.*, **44**, 8727-8745. <https://doi.org/10.1007/s13369-019-03894-8>.

Gomes, G. F., de Almeida, F. A., Ancelotti, A. C., & da Cunha, S. S. (2020), “Inverse structural damage identification problem in CFRP laminated plates using SFO algorithm based on strain fields”, *Engineering with Computers*. doi:10.1007/s00366-020-01027-6.

Gossard, M. L., Seide, P., et Roberts, W. M. (1952) *Thermal buckling of plates*.

Hadji, L. and Avcar, M. (2021), “Nonlocal free vibration analysis of porous FG nanobeams using hyperbolic shear deformation beam theory”, *Advances in Nano Research*, **10**(3), 281–293. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.10.3.281>.

Hadji, L., (2020), “Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model”, *Smart Structures and Systems*, **26**(2), 253-262. <https://doi.org/10.12989/sss.2020.26.2.253>.

Hamidi, A., Houari, M. S. A., Mahmoud, S. R., & Tounsi, A. (2015). A sinusoidal plate theory with 5- unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 235-253.

Hami, B. (2018). « Elaboration et caractérisation physico-mécanique d’une structure sandwich multicouches ». Thèse de doctorat, Université M’hamed Bougara, Boumerdes, Algérie.

Hashim, H.A. and Sadiq, I.A. (2021), “A five-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of composite plates”, *Composite Materials and Engineering*, **3**(2), 135-155. <http://dx.doi.org/10.12989/cme.2021.3.2.135>.

Heldenfels, R. R., & Roberts, W. M. (1952). Experimental and theoretical determination of thermal stresses in a flat plate.

Jena, S. K., Chakraverty, S., Malikan, M. and Mohammad-Sedighi, H. (2020a), “Hygro-Magnetic Vibration of the Single-Walled Carbon Nanotube with Nonlinear Temperature Distribution Based on a Modified Beam Theory and Nonlocal Strain Gradient Model”, *International Journal of Applied Mechanics*, **12**(5). <https://doi.org/10.1142/S1758825120500544>.

Jena, S. K., Chakraverty, S., Malikan, M. and Mohammad-Sedighi, H. (2020b), “Implementation of hermite-ritz method and navier’s technique for vibration of functionally graded porous nanobeam embedded in winkler-pasternak elastic foundation using bi-

helmholtz nonlocal elasticity”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **15**(3), 405–434. <https://doi.org/10.2140/jomms.2020.15.405>.

Joshan, Y. S., Grover, N. and Singh, B. N. (2017), “ new non-polynomial four variable shear deformation theory in axiomatic formulation for hygro-thermo-mechanical analysis of laminated composite plates”, *Composite Structures*, **182**, 685–693. [doi:10.1016/j.compstruct.2017.09.029](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.029).

Kant, T. and Khare R.K. (1997), “A higher-order facet quadrilateral composite shell element”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **40**, 4477-4499. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)10970207\(19971230\)40:24<4477::AIDNME229>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)10970207(19971230)40:24<4477::AIDNME229>3.0.CO;2-3).

Karama, M., Afaq, K. S. and Mistou, S. (2003), “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *International Journal of Solids and Structures*, **40**(6), 1525–1546. [doi:10.1016/s0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(02)00647-9).

Karama, M., Afaq, K.S. and Mistou, S. (2009), “A new theory for laminated composite plates”, *Proc. IMechE Part L: J. Mater. Des. Appl.*, **223**, 53-62. <https://doi.org/10.1243/14644207JMDA189>.

Karami, B., Karami, S. (2019), “Buckling analysis of nanoplate-type temperature-dependent heterogeneous materials”, *Advances in Nano Research*, **7**(1), 51-61. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/anr.2019.7.1.051>

Kiani, Y. (2019), “NURBS-based thermal buckling analysis of graphene platelet reinforced composite laminated skew plates”, *Journal of Thermal Stresses*, **1–19**. [doi:10.1080/01495739.2019.1673687](https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1673687).

Kiani, Y., & Mirzaei, M. (2018), “Enhancement of non-linear thermal stability of temperature dependent laminated beams with graphene reinforcements”. *Composite Structures*, **186**, 114–122. [doi:10.1016/j.compstruct.2017.11.086](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.086).

Kim, S.-E., Thai, H.-T. and Lee, J. (2009), “A two variable refined plate theory for laminated composite plates”, *Composite Structures*, **89**(2), 197–205. [doi:10.1016/j.compstruct.2008.07.017](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.017).

Kumar, R., & Patil, H. S. (2013). Hygrothermally Induced Nonlinear Free Vibration Response of Nonlinear Elastically Supported Laminated Composite Plates with Random System Properties: Stochastic Finite Element Micromechanical Model. *Frontiers in Aerospace Engineering*, 2(2), 143- 156.

Kumar, R., Patil, H. S., & Lal, A. (2013). Hygrothermoelastic free vibration response of laminated composite plates resting on elastic foundations with random system properties: Micromechanical

Li, X.-F. (2008), “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams”, *Journal of Sound and Vibration*, **318**(4-5), 1210–1229. [doi:10.1016/j.jsv.2008.04.056](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.056).

Liu, C. F., & Huang, C. H. (1996). Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes. *Computers & structures*, 60(1), 95-101.

Lyashenko, I. A., Borysiuk, V. N. and Popov, V. L. (2020), “Dynamical model of the asymmetric actuator of directional motion based on power-law graded materials”, *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, **18**(2), 245–254. <https://doi.org/10.22190/FUME200129020L>.

Madenci, E. (2019), “A refined functional and mixed formulation to static analyses of fgm beams”, *Structural Engineering and Mechanics*, **69**(4), 427-437. [DOI: 10.12989/sem.2019.69.4.427](https://doi.org/10.12989/sem.2019.69.4.427).

Mechanics and Materials in Design, 5(2), 143-156. Wu, X., Zheng, H., Liu, Y., & Leng, J. (2010). Thermomechanical Property of Epoxy Shape Memory Polymers. *International Journal of Modern Physics B*, 24(15n16), 2386-2391.

Gay, D. (1991). Matériaux composites. Hermes.

Mehar, K. and Panda, S. K. (2019), “Multiscale modeling approach for thermal buckling analysis of nanocomposite curved structure”, *Advances in Nano Research*, **7**(3), 181–190. <https://doi.org/10.12989/ANR.2019.7.3.181>.

Mehar, K., Panda, S. K. and Mahapatra, T. R. (2017), “Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **65**, 384–396. [doi:10.1016/j.euromechsol.2017.05.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.05.005).

Merazi.M. (2014). «Analyse mécanique des structures composites :Etude comparative entre les différentes théories des plaques ». Thèse de doctorat, Université DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, Algérie.

Mercan, K., Ebrahimi, F., & Civalek, Ö. (2020), “Vibration of angle-ply laminated composite circular and annular plates”, *Steel and Composite Structures*, **34**(1), 141–154. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.34.1.141>.

Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Ali Chaibdra, A., Belmokhtar, C., Benyoucef, S. and Benachour, A. (2020), “2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models”, *Geomechanics and Engineering.*, **22**(4), 361-374. [DOI: https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.4.361](https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.4.361)

Mindlin, R.D. (1951),” Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, *Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme*, **18**, 31-38. [DOI:10.1007/978-1-4613-8865-4_29](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4_29).

Moayedi, H., Ebrahimi, F., Habibi, M., Safarpour, H., & Foong, L. K. (2020), “Application of nonlocal strain–stress gradient theory and GDQEM for thermo-vibration responses of a laminated composite nanoshell”, *Engineering with Computers*. [doi:10.1007/s00366-020-01002-1](https://doi.org/10.1007/s00366-020-01002-1).

model. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **26**(5), 573-604.

Naidu, N. S., & Sinha, P. K. (2007). Nonlinear free vibration analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments. *Composite Structures*, **77**(4), 475-483.

Naik, N. S., & Sayyad, A. S. (2019), “An accurate computational model for thermal analysis of laminated composite and sandwich plates”, *Journal of Thermal Stresses*, 1–21. [doi:10.1080/01495739.2018.1522986](https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1522986).

Öner, E., Yaylaci, M. and Birinci, A. (2015), “Analytical solution of a contact problem and comparison with the results from FEM”, *Structural Engineering and Mechanics*, **54**(4), 607–622. <https://doi.org/10.12989/sem.2015.54.4.607>.

Pagano, N.J. (1970), “Exact solutions for bidirectional composites and sandwich plates”, *J. Compos. Mater.*, **4**, 20-34.

Pan, Z., Gu, B., & Sun, B. (2016). Thermo-mechanical behaviors of 3-D braided composite material subject to high strain rate compressions under different temperatures. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 385-401.

Panduro, R. M. R., & Mantari, J. L. (2017). Hygro-thermo-mechanical behavior of classical composites using a new trigonometrical shear strain shape function and a compact layer wise approach. *Composite Structures*, 160, 378-391.

Parhi, P. K., Bhattacharyya, S. A., & Sinha, P. K. (2001). Hygrothermal effects on the dynamic behavior of multiple delaminated composite plates and shells. *Journal of Sound and Vibration*, 248(2), 195-214.

Patel, B. P., Ganapathi, M., & Makhecha, D. P. (2002). Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory. *Composite Structures*, 56(1), 25-34.

Pourmoayed, A., Fard, K.M. and Rousta, B. (2021), "Free vibration analysis of sandwich structures reinforced by functionally graded carbon nanotubes", *Composite Materials and Engineering.*, 3(1), 1-23. <http://dx.doi.org/10.12989/cme.2021.3.1.001>.

Rachedi, M.A., Benyoucef, S., Bouhadra, A., Bachir Bouiadjra, R., Sekkal, M., Benachour, A. (2020), "Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, 22(1), 65-80. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.1.065>.

Ram, K. S., & Sinha, P. K. (1991). Hygrothermal effects on the bending characteristics of laminated composite plates. *Computers & Structures*, 40(4), 1009-1015.

Reddy, J. N. (1984), "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, 51(4), 745. [doi:10.1115/1.3167719](https://doi.org/10.1115/1.3167719).

Reddy, J. N. and Hsu, Y. S. (1980), "Effects Of Shear Deformation And Anisotropy On The Thermal Bending Of Layered Composite Plates", *Journal of Thermal Stresses*, 3(4), 475–493. [doi:10.1080/01495738008926984](https://doi.org/10.1080/01495738008926984).

Reddy, J. N., & Hsu, Y. S. (1980). Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates. *Journal of Thermal Stresses*, 3(4), 475-493.

Reddy, J. N., & Robbins, D. H. (1994), “Theories and Computational Models for Composite Laminates”, *Applied Mechanics Reviews*, **47**(6), 147-169. doi:10.1115/1.3111076.

Safaei, B. (2020), “The effect of embedding a porous core on the free vibration behavior of laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures*, **35**(5), 659–670. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.35.5.659>.

Safaeifar, H., & Karimi, A. (2015). The Effect of Temperature on the Natural Frequency. *Teknologi Tanaman*, **12**(2), 520-528.

Sayyad, A. S. and Ghugal, Y. M. (2014), “A new shear and normal deformation theory for isotropic, transversely isotropic, laminated composite and sandwich plates”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **10**(3), 247–267. doi:10.1007/s10999-014-9244-3.

Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. and Mhaske, B. A. (2015), “A Four-Variable Plate Theory for Thermoelastic Bending Analysis of Laminated Composite Plates”, *Journal of Thermal Stresses*, **38**(8), 904–925. doi:10.1080/01495739.2015.1040310

Selmi, A. (2020), “Exact solution for nonlinear vibration of clamped-clamped functionally graded buckled beam”. *Smart Structures and Systems*, **26**(3), 361–371. <https://doi.org/10.12989/SSS.2020.26.3.361>.

Shahmohammadi, M. A., Azhari, M., & Saadatpour, M. M. (2020), “Free vibration analysis of sandwich FGM shells using isogeometric B-spline finite strip method”, *Steel and Composite Structures*, **34**(3), 361–376. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.34.3.361>.

Shahsavari, D., Karami, B., Janghorban, M. (2019a), “On buckling analysis of laminated composite plates using a nonlocal refined four-variable model”, *steel and composite structures*, **32**(2), 173-187. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2019.32.2.173>

Shahsavari, D., Karami, B., Janghorban, M. (2019b), “Size-dependent vibration analysis of laminated composite plates”, *steel and composite structures*, **7**(5), 337-349. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/anr.2019.7.5.337>

Shariati, A., Jung, D. W., Mohammad-Sedighi, H., Zur, K. K., Habibi, M. and Safa, M. (2020), “On the vibrations and stability of moving viscoelastic axially functionally graded nanobeams”, *Materials*, **13**(7). <https://doi.org/10.3390/ma13071707>.

Sofiyev, A., Aksogan, O., Schnack, E. and Avcar, M. (2008). "The Stability of a Three-Layered Composite Conical Shell Containing a FGM Layer Subjected to External Pressure", *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, 15(6-7), 461–466. [doi:10.1080/15376490802138492](https://doi.org/10.1080/15376490802138492).

[Soltani](#), D., [Khorshidi](#), M.A., [Sedighi](#), H.M. (2021), "Higher order and scale-dependent micro-inertia effect on the longitudinal dispersion based on the modified couple stress theory", *Journal of Computational Design and Engineering*, 8(1), 189–194. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa070>.

Tanzadeh, H., & Amoushahi, H. (2021), "Analysis of laminated composite plates based on different shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, **75**(2), 247–269. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.75.2.247>.

Tayeb, T. S., Zidour, M., Bensattalah, T., Heireche, H., Benahmed, A., & Bedia, E. A. (2020), "Mechanical buckling of FG-CNTs reinforced composite plate with parabolic distribution using Hamilton's energy principle", *Advances in nano research*, **8**(2), 135-148. DOI : <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.2.135>.

Timesli, A. (2020), "Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation", *Computers and Concrete.*, **26**(1), 53–62. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.1.053>.

Tlidji, Y., Daouadji, T. H., Hadji, L., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2014). Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading. *Journal of Thermal Stresses*, **37**(7), 852-869.

Tounsi, A., & Amara, K. (2005). Stiffness degradation in hygrothermal aged cross-ply laminate with transverse cracks. *AIAA journal*, **43**(8), 1836-1843.

Tungikar, V. B., & Rao, K. M. (1994). Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminate. *Composite structures*, **27**(4), 419-430.

Vinyas, M. (2020), "On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT", *Composite Structures*, **240**, 112044. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112044>.

Wang, H., Yan, W., & Li, C. (2020), “Response of angle-ply laminated cylindrical shells with surface-bonded piezoelectric layers”, *Structural Engineering and Mechanics*, **76**(5), 599–611. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.76.5.599>.

Whitney, J. M., & Ashton, J. E. (1971). Effect of environment on the elastic response of layered composite plates. *AIAA Journal*, **9**(9), 1708-1713.

Wu, Z. P., Liu, G. R., & Han, X. (2002), “An Inverse Procedure for Crack Detection in Anisotropic Laminated Plates Using Elastic Waves”, *Engineering with Computers*, **18**(2), 116–123. [doi:10.1007/s003660200010](https://doi.org/10.1007/s003660200010).

Yaylaci, E. U., Yaylaci, M., Ölmez, H. and Birinci, A. (2020a), “Artificial neural network calculations for a receding contact problem”, *Computers and Concrete*, **25**(6), 551–563. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.6.551>.

Yaylaci, M. (2016), “The investigation crack problem through numerical analysis”, *Structural Engineering and Mechanics*, **57**(6), 1143–1156. <https://doi.org/10.12989/sem.2016.57.6.1143>.

Yaylaci, M. and Avcar, M. (2020), “Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes”, *Computers and Concrete*, **26**(2), 107–114. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.2.107>.

Yaylaci, M. and Birinci, A. (2013), “The receding contact problem of two elastic layers supported by two elastic quarter planes”, *Structural Engineering and Mechanics*, **48**(2), 241–255. <https://doi.org/10.12989/sem.2013.48.2.241>.

Yaylaci, M., Adıyaman, G., Öner, E. and Birinci, A. (2020b), “Examination of analytical and finite element solutions regarding contact of a functionally graded layer”, *Structural Engineering and Mechanics*, **76**(3), 325–336. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.76.3.325>.

Yaylaci, M., Adıyaman, G., Öner, E. and Birinci, A. (2021b), “Investigation of continuous and discontinuous contact cases in the contact mechanics of graded materials using analytical method and FEM”, *Computers and Concrete*, **27**(3), 199–210. <https://doi.org/10.12989/cac.2021.27.3.199>.

Yaylaci, M., Eyüboğlu, A., Adıyaman, G., Yaylacı, E. U., Öner, E. and Birinci, A. (2021a), “Assessment of different solution methods for receding contact problems in functionally graded layered mediums”, *Mechanics of Materials*, **154**. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103730>.

Yaylaci, M., Terzi, C. and Avcar, M. (2019), “Numerical analysis of the receding contact problem of two bonded layers resting on an elastic half plane”, *Structural Engineering and Mechanics*, **72**(6), 775–783. <https://doi.org/10.12989/sem.2019.72.6.775>

Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., & Radwan, A. F. (2014). Effects of hygrothermal conditions on cross-ply laminated plates resting on elastic foundations. *Archives of civil and mechanical engineering*, **14**(1), 144-159.