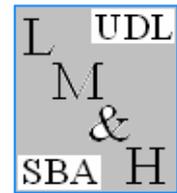


RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT 3^{ème} CYCLE

Spécialité : Génie Civil

Option : structure & matériaux

Présentée par

ATTIA Amina

Sujet de thèse

**Contribution à l'étude de la vibration libre des
plaques FGM dans un champ thermique**

Soutenu le devant le Jury composé de :

Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Président
Mr. ADDA BEDIA El Abbas	Professeur	UDL-SBA	Directeur de la thèse
Mr. HOUARI Mohammed Sid ahmed	MC A	U. MASCARA	Examineur
Mr. BENYOUCEF Samir	MC A	UDL-SBA	Examineur
Mr. BENACHOUR Abdelkader	MC A	UDL-SBA	Examineur
Mr. YEGHNEM Redha	MC A	U. SAIDA	Examineur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université l'université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbes.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Mr le professeur **ADDA BEDIA EL ABASS** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique. Leurs encouragements constants m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à M^r **Abdelouahed TOUNSI** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien les difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **HOUARI Mohammed Sid ahmed**, **BENYOUCEF Samir**, **BENACHOUR Abdelkader** et **YEGHNEM Redha** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je remercie de tout mon cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études. Merci à tous mes amis pour la motivation que leurs amitiés m'ont apportée. Et je n'oublierai pas mon mari qui m'apporte toujours leur soutien sans faille.

DEDICACES

À mon très cher père.

À ma mère,

À mon frère et ma sœur,

À mon mari,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, plusieurs théories raffinées à quatre variables sont présentées pour analyser la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées avec des propriétés matérielles dépendantes de la température. En décomposant le déplacement transversal en une composante de flexion et une composante de cisaillement, le nombre de variables et d'équations d'équilibre pour les présents modèles est réduit, ce qui facilite l'analyse structurale. Ces théories considèrent des distributions parabolique, sinusoïdale, hyperbolique et exponentielle des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur tout en respectant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque sans introduire des facteurs de correction. Les propriétés matérielles sont supposées variées à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance. Les conditions thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdale sont imposées aux surfaces supérieure et inférieure des plaques FG qui est simplement appuyée. Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse de la vibration libre des plaques en se basant sur les séries de Fourier qui satisfont les conditions d'appuis (la méthode de Navier). Les investigations numériques sont présentées pour montrer l'effet de la composition matérielle, la géométrie de la plaque, et les champs thermiques sur les caractéristiques vibratoires. On peut conclure que les présentes théories sont non seulement précises mais aussi simples pour la prédiction des réponses vibratoires des plaques FG dont les propriétés matérielles dépendent de la température.

Mots clé : plaques fonctionnellement graduées, théories raffinées à quatre variables, propriétés matérielles dépendantes de la température, vibration.

ABSTRACT

In this paper, various four variable refined plate theories are presented to analyze vibration of temperature-dependent functionally graded (FG) plates. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations for the present model is reduced, significantly facilitating engineering analysis. These theories account for parabolic, sinusoidal, hyperbolic, and exponential distributions of the transverse shear strains and satisfy the zero traction boundary conditions on the surfaces of the plate without using shear correction factors. Power law material properties and linear steady-state thermal loads are assumed to be graded along the thickness. Uniform, linear, nonlinear and sinusoidal thermal conditions are imposed at the upper and lower surface for simply supported FG plates. Equations of motion are derived from Hamilton's principle. Analytical solutions for the free vibration analysis are obtained based on Fourier series that satisfy the boundary conditions (Navier's method). Non-dimensional results are compared for temperature-dependent and temperature-independent FG plates and validated with known results in the literature. Numerical investigation is conducted to show the effect of material composition, plate geometry, and temperature fields on the vibration characteristics. It can be concluded that the present theories are not only accurate but also simple in predicting the free vibration responses of temperature-dependent FG plates.

Keywords: Functionally graded plate; Higher-order plate theory; Vibration; Temperature-dependent properties

ملخص

في هذا العمل، تقدم عدة نظريات محسنة تحتوي على أربع مجاهيل من أجل تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المتدرجة وظيفيا ذات خصائص مادية تعتمد على الحرارة. بتجزئة التحرك العرضي إلى جزأين واحد متعلق بالانحناء و آخر متعلق بالقص، عدد المتغيرات و معادلات الحركة يقل بالنسبة للنموذج الحالي، وهذا يسهل التحليل البنيوي. هذه النظريات تستند على إدخال التوزيعات، الخطية، المكافئة، القطعية، الآسية و الجيبية للإجهادات القص العرضي من خلال السمك بينما تحقق الشروط على إجهادات القص العرضي والتي تنعدم على حواف العلوية و السفلية للصفحة و ذلك بدون استعمال معامل تصحيح القص. الخصائص المادية تعتبر متغيرة وفق قانون أسي عبر السمك. الظروف الحرارية المنتظمة، الخطية، الغير خطية و الجيبية مطبقة على الصفحة التي هي بدورها مدعومة. بتطبيق مبدأ هاملتون نحصل على معادلات الحركة. لتحليل الإهتزاز الحر للصفحة يجب الاعتماد على سلسلة فورييه التي بدورها تحترم شروط الدعم (طريقة نافيه). يتم عرض التحقيقات العددية لإظهار تأثير تركيب المواد، هندسة الصفحة، و الحقل الحراري على خصائص الاهتزاز. يمكن أن نستنتج أن هذه النظرية ليست صحيحة فحسب بل أيضا من السهل التنبؤ بردود ذبذبات الصفائح المتدرجة وظيفيا التي خصائصها المادية تعتمد على الحرارة.

الكلمات الرئيسية: الصفائح المتدرجة وظيفيا ، نظريات محسنة تحتوي على أربع مجاهيل ، خصائص مادية تعتمد على الحرارة ، الاهتزاز الحر.

SOMMAIRE

Liste des notations

Liste des Tableaux

Liste des Figures

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1 Introduction.....	4
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés	4
I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés	7
I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	9
I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	9
I.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	10
I.4.3. Compaction sèche des Poudres	11
I.4.4. Projection plasma	11
I.4.5. Frittage et Infiltration	11
I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	12
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	13
I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	14
I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	16
I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	17
I.7. Les modèles analytiques des plaques FGM	18
I.7.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	18
I.7.2 Modèles Reissner-Mindlin (Théorie de Déformation de Cisaillement du Premier Ordre FSDT)	19
I.7.3 Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur	20
I.8. Conclusion :	25

Chapitre II
Revue de quelques recherches sur les structures FGM

II.1. Introduction	26
II.2. architecture des matériaux à gradient de propriétés.....	26
II.3. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés	31
II.4. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous différents types de chargement.....	31
II.5. Conclusion :	35

Chapitre III
analyse de la vibration libre des plaques FGM

III.1. Introduction	37
III.2. développement théorique	37
III.2.1. géométrie de la plaque :	37
III.2.2. Propriétés des matériaux	38
III.3. Différentes théories d'ordre supérieur :	39
III.4. théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables	40
III.4.1. champ de déplacement et de déformation.....	40
III.4.2. contraintes	41
III.4.3. Equations d'équilibre.....	42
III.4.4. solutions analytiques	44
III.5. champ de température.....	46
III.5.1. température uniforme.....	46
III.5.2. température linéaire.....	46
III.5.3. température non linéaire.....	46
III.5.4. température sinusoïdale:	47
III.6. Conclusion	48

CHAPITRE IV

Etude comparative avec les différentes théories d'ordre élevé

IV.1.Introduction.....	49
IV.2. Validation analytique des modèles proposés.....	49
IV.3. Conclusion.....	57

Chapitre V

effet de la température sur la vibration libre des plaques FG

V.1.Introduction	58
V.2. Effet des conditions thermiques sur les propriétés matérielles:.....	58
V.3. Etude paramétrique:.....	62
V.4.Conclusion	80
Conclusion générale.....	81
Références bibliographiques	

LISTE DES NOTATIONS

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice
Γ	propriété matérielle
$V(z)$	Fraction volumique locale.
$\Delta T(z)$	variation de la température
$k(z)$	conductivité thermique
$\Psi(z)$	fonction de forme
$f(z)$	fonction de forme
w_b	Déplacement transversal dû à la flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
$w_{,x}^b$	Rotation due à la flexion suivant x
$w_{,x}^s$	Rotation due au cisaillement suivant x
$E(z,T)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur et la température
$\nu(z,T)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur et la température
$\rho(z,T)$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur et la température
$\alpha(z,T)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de l'épaisseur et la température
U_p	énergie de déformation mécanique
U_T	énergie de déformation thermique
ε^0	Champ des déformations en membrane
k^b	Champ des déformations en flexion
k^s	Champ des déformations en cisaillement
K	L'énergie cinétique
d_{ij} et d_{ijm}	opérateurs différentielles
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s,$ D_{ij}^s, H_{ij}^s	les composantes de rigidité
u^0	Déplacement de membrane ou du plan médium suivant l'axe x,
v^0	Le déplacement du plan médium suivant l'axe Y,
w	Déplacement transversal ou la flèche,

$g(z)$	Fonction de cisaillement,
i,j	Nombre naturelle
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
p	paramètre matériel pour détecter la variation du matériau suivant l'épaisseur de la plaque,
$[a]$	Matrice de rigidité
$[m]$	Matrice de masse
ω	fréquence
T_b	Température au niveau de la surface inférieure de la plaque
T_t	Température au niveau de la surface supérieure de la plaque

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	5
--------------------	---	---

CHAPITRE IV

Tableau IV.1	les fonctions de forme	49
Tableau IV.2	les coefficients des propriétés matérielles qui dépendent de la température pour $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$	50
Tableau IV.3	les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée soumise à un champ thermique non linéaire.....	52
Tableau IV.4	les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée soumise à un champ thermique non linéaire.....	53
Tableau IV.5	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée dans un champ de température non linéaire ($p=2$).....	54
Tableau IV.6	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée dans un champ de température non linéaire ($p=2$).....	55
Tableau IV.7	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matérielle p dans un champ de température non linéaire Mode (1, 1).	56

CHAPITRE V

Tableau V.1	les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.	63
Tableau V.2	les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.	64
Tableau V.3	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) dont	

	les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans un champ de température non linéaire Mode (1, 1).	65
Tableau V.4	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans différents champ de température.($a/h=10$, $b=a=0.2$)	66
Tableau V.5	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans différents champ de température.($a/h=10$, $b=a=0.2$)	67
Tableau V.6	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température soumise à un champ de température uniforme($T_b = 300 (K)$, $T_t = 400 (K)$)	68
Tableau V.7	les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température soumise à un champ de température linéaire($T_b = 300 (K)$, $T_t = 400 (K)$)	69

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1	Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	6
Figure I.2	Protection thermique.....	7
Figure I.3	Principe de la méthode coulage en bande.....	10
Figure I.4	Les principaux domaines d'application des FGM.....	12
Figure I.5	Géométrie d'une plaque en FGM.....	13
Figure I.6	Dimensions de la plaque FGM.....	14
Figure I.7	Variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	15
Figure I.8	Variation du module de Young dans une plaque S-FGM.....	17
Figure I.9	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	17
Figure I.10	Cinématique de Love-Kirchhoff	18
Figure I.11	Cinématique de Reissner-Mindlin	19
Figure I.12	Variation de la fonction de gauchissement $\Psi(z) = z$ et $\Psi'(z)$ suivant l'épaisseur.	20
Figure I.13	Cinématique des Théories d'Ordre Supérieur.....	21
Figure I.14	Variation de la Fonction de Forme $\Psi(z)$ des Différents Modèles en Fonction de l'Épaisseur.....	24
Figure I.15	Variation de la Dérivée de la Fonction de Forme $\Psi'(z)$ des Différents Modèles Suivant l'Épaisseur.	24

CHAPITRE II

Figure II.1	Variation de la fraction volumique des matériaux constituants dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés.....	27
Figure II.2	Une microstructure de squelette d'un matériau FGM.....	27
Figure II.3	Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin le modèle de Mori-Tanaka.....	30
Figure II.4	Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumises à un chargement transverse.....	33

Figure II.5	Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique.....	34
Figure II.6	Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS}_3\text{O}_4$).....	35

CHAPITRE III

Figure III.1	géométrie d'une plaque FG rectangulaire	38
---------------------	---	----

CHAPITRE V

Figure V.1	Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG soumise à un chargement thermique uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel p	59
Figure V.2	Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p	60
Figure V.3	Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique non linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p	60
Figure V.4	Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique sinusoïdale pour différentes valeurs de l'indice matériel p .	61
Figure V.5	Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans des champs thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel p	61
Figure V.6	Variation du champ thermique non linéaire en fonction de z/h d'une plaque FG pour différentes valeurs de l'indice matériel p	70
Figure V.7	Variation du champ thermique linéaire, non linéaire et sinusoïdal en fonction de z/h d'une plaque FG pour différentes valeurs de l'indice matériel p	70
Figure V.8	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution uniforme de la température d'une plaque FG ($\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$)	

	simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$	71
Figure V.9	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution linéaire de la température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$	72
Figure V.10	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution non linéaire de la température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$	72
Figure V.11	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution sinusoïdale de température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$	73
Figure V.12	les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$	74
Figure V.13	les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$	74
Figure V.14	les fréquences non dimensionnelle en fonction d'un champ de température sinusoïdal pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$	75
Figure V.15	les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdal pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$	75
Figure V.16	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$	76
Figure V.17	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$	77
Figure V.18	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température non linéaire d'une plaque FG ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$	78
Figure V.19	les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un	

champ de température sinusoïdal d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$)
simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$ 79

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe des composites qui possède des propriétés matérielles variantes d'une surface à une autre de façon à éliminer la concentration des contraintes trouvée dans les composites stratifiés. Le concept des FGM a été largement exploré dans plusieurs applications industrielles telles que la mécanique, l'industrie aérospatiale, nucléaire, et génie civil. L'évolution des applications des FGM exige des modèles précis pour prédire leurs réponses. Puisque la déformation de cisaillement a des effets significatifs sur les réponses des plaques FGM, des théories de déformation de cisaillement sont utilisées ainsi pour capturer ces effets. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre [Mindlin, 1951; Reissner, 1945] prend en considération l'effet de déformation de cisaillement, mais elle ne satisfait pas la condition de nullité des contraintes de cisaillement aux bords libres de la plaque, par conséquent, un facteur de correction est exigé [Yaghoobi, 2013 a b]. Les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT [Reddy, 1984; Reddy, 2000; Ren, 1986; Touratier, 1991; Soldatos, 1992; Xiang, 2009; Akavci, 2010; Grover, 2013; Karama, 2003; Pradyumna et Bandyopadhyay, 2008; Ait Atmane, 2010; Shahrjerdi, 2011; Mantari, 2012] prennent en considération une variation non linéaire d'ordre supérieur dans les déplacements axiaux à travers l'épaisseur de la plaque et satisfont les conditions d'équilibre aux bords libres de la plaque sans introduire les facteurs de correction de cisaillement. Certaines théories d'ordre élevé citées ci-dessus exigent un temps de calcul important car pour chaque degré (puissance) supplémentaire de la coordonnée de l'épaisseur, un inconnu additionnel est introduit dans ces théories. Bien que certaines théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (par exemple : La théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Reddy, 1984 et 2000], La théorie de déformation de cisaillement sinusoidale [Touratier, 1991], La théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Xiang, 2009 ; Akavci, 2010; Grover, 2013], la théorie de déformation de cisaillement exponentielle [Karama, 2003], la théorie de déformation de cisaillement de seconde ordre [Shahrjerdi, 2011], et la théorie trigonométrique [Mantari, 2012]) ont le même nombre d'inconnus comme la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, leurs équations de mouvement sont plus compliquées que celles de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Récemment, des nouvelles théories raffinées de plaque sont développées pour la réponse en flexion, flambement, et en vibration libre des

Introduction générale

plaques FG avec quatre inconnus seulement [Bourada, 2012; Fekrar, 2012; Boudarba, 2013; Kettaf, 2013; Ait Amar Meziane, 2014]. Cependant, la plupart des travaux cités ci-dessus traite les plaques FG ayant des propriétés matérielles indépendantes de la température en utilisant des théories de déformation de cisaillement. Les plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température dans le cas d'un champ de température uniforme et variable à travers la direction de l'épaisseur sont considérées dans d'autres travaux en utilisant des théories de déformation de cisaillement du premier ordre et d'ordre élevé. Et par conséquent le développement d'une théorie simple de déformation de cisaillement pour les plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température est intéressant et nécessaire comme axe de recherche.

Le but de ce travail est de développer des théories simples de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la vibration libre des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température. Ces théories proposées possèdent moins d'inconnus et moins d'équations d'équilibre comparativement à la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. De plus, ces nouvelles théories satisfont la condition de nullité de la contrainte de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans introduire les coefficients de correction de cisaillement. Le champ de déplacement des théories proposées est choisi en se basant sur une variation cubique, sinusoidale, hyperbolique et exponentielle des déplacements axiaux à travers l'épaisseur. La décomposition du déplacement transversal en deux composantes: flexion et cisaillement nous a menés à réduire le nombre d'inconnus, et par conséquent, les présentes théories deviennent beaucoup plus favorables aux formulations mathématiques. La température est supposée constante dans le plan de la plaque. Par contre, elle est variable à travers l'épaisseur de la plaque. Les plaques FG simplement appuyées sont considérées avec des propriétés matérielles dépendantes et indépendantes de la température avec une distribution de puissance en termes des fractions volumiques des constituants. La plaque FG est soumise aussi à des variations uniforme, linéaire, non linéaire, et sinusoidale de la température. Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe d'Hamilton. Des études paramétriques sont présentées et discutées en détail. Cette étude est pertinente pour les aéro-structures.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines

Introduction générale

d'application. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement thermomécanique des structures en « FGM ».

Le deuxième chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM sont aussi présentés.

Le troisième chapitre détaille la mise en œuvre des modèles proposés de plaques épaisses basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse de la vibration libre des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation des modèles proposés à travers les résultats connus de la littérature.

Le cinquième et le dernier chapitre est consacré à présenter des résultats numériques Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement vibratoire des plaques FG tout en étudiant l'effet de la géométrie de la plaque, l'indice matériel et les composantes des matériaux

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revoir les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement vibratoire des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS

I.1. Introduction :

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques aux différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau à haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème d'interface.

Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (functionally graded material).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [Zhong, 2007]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [Baron, 2008].

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi, 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

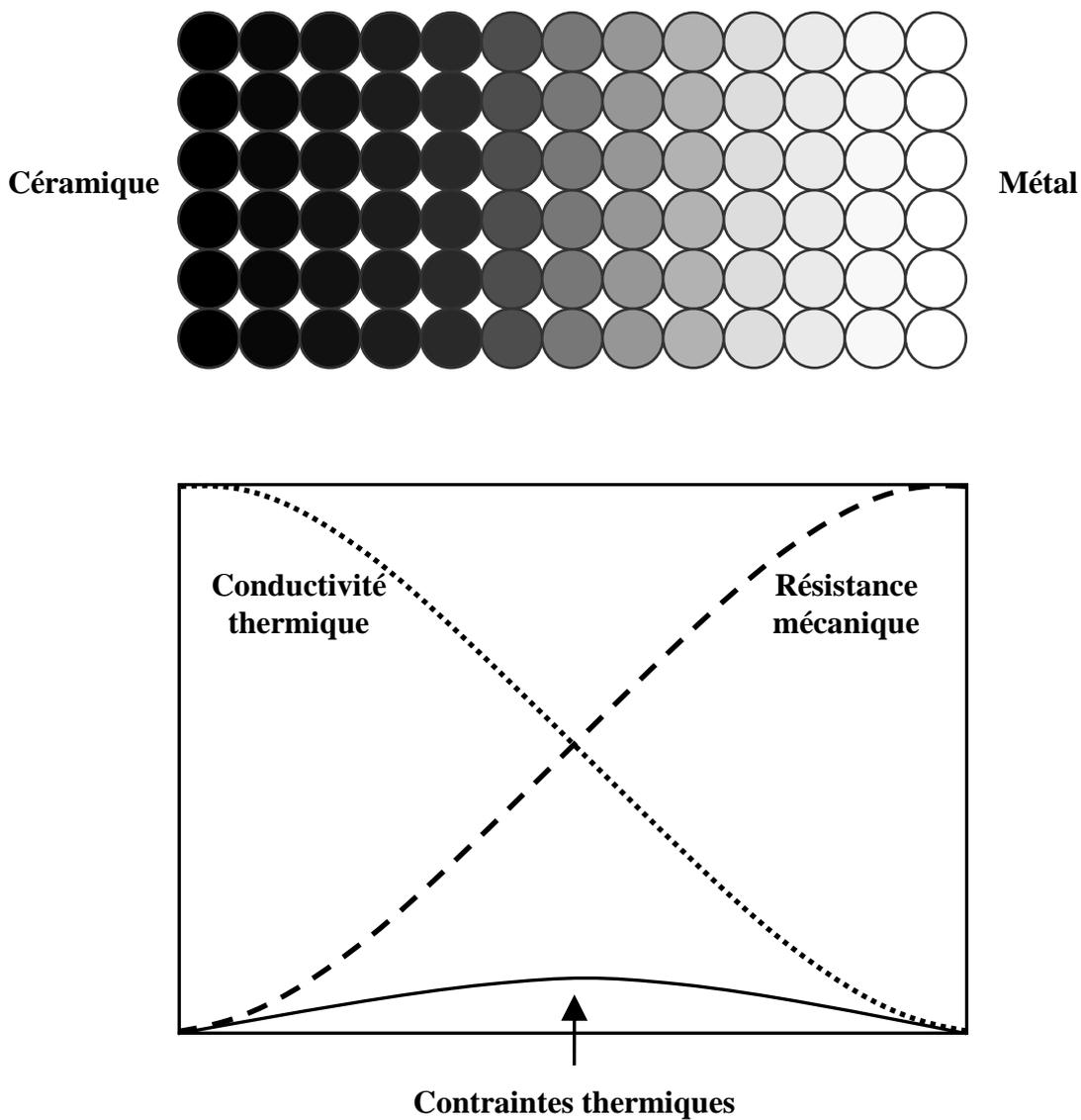


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en

changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

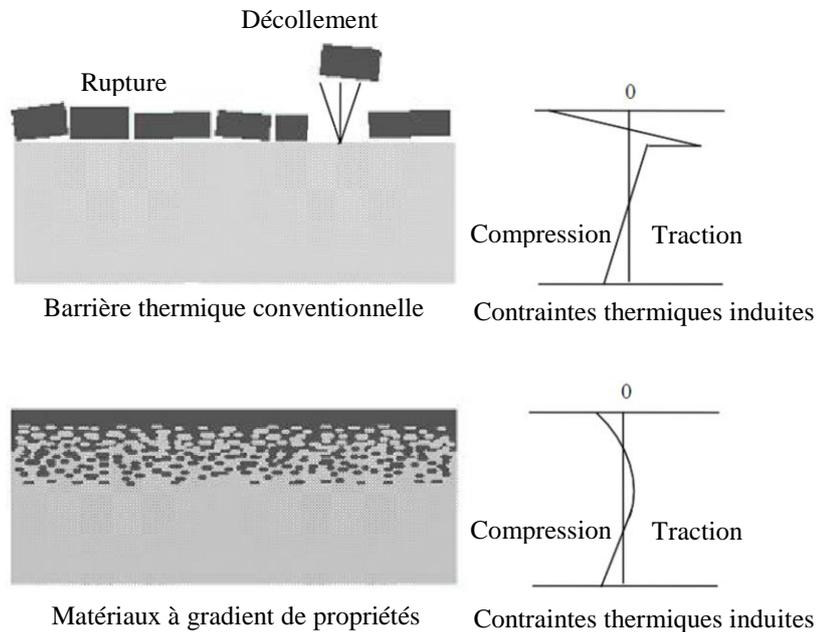


Figure I.2 : Protection thermique.

I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi, 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi, 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [Nguyen, 2007].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes

aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koizumi, 1997].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi, 1992].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura, 1991].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [Okamura, 1991].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec, 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

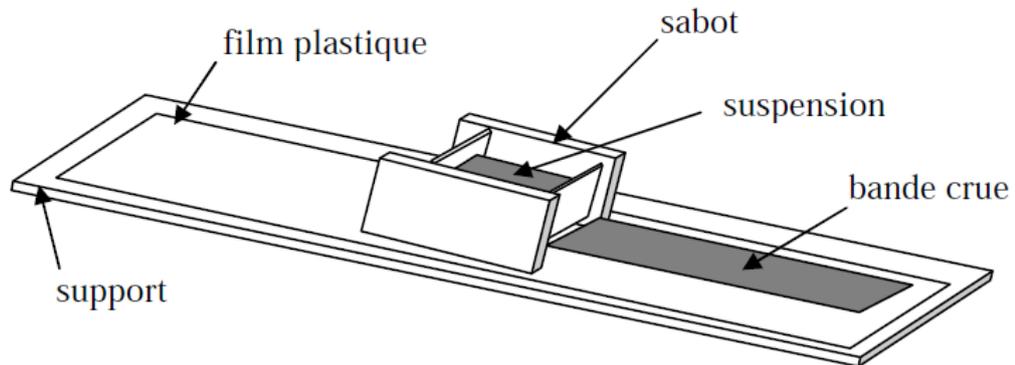


Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec, 1997].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch, 1986].

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya, 1992]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop, 1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens, 1990].

I.4.5. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

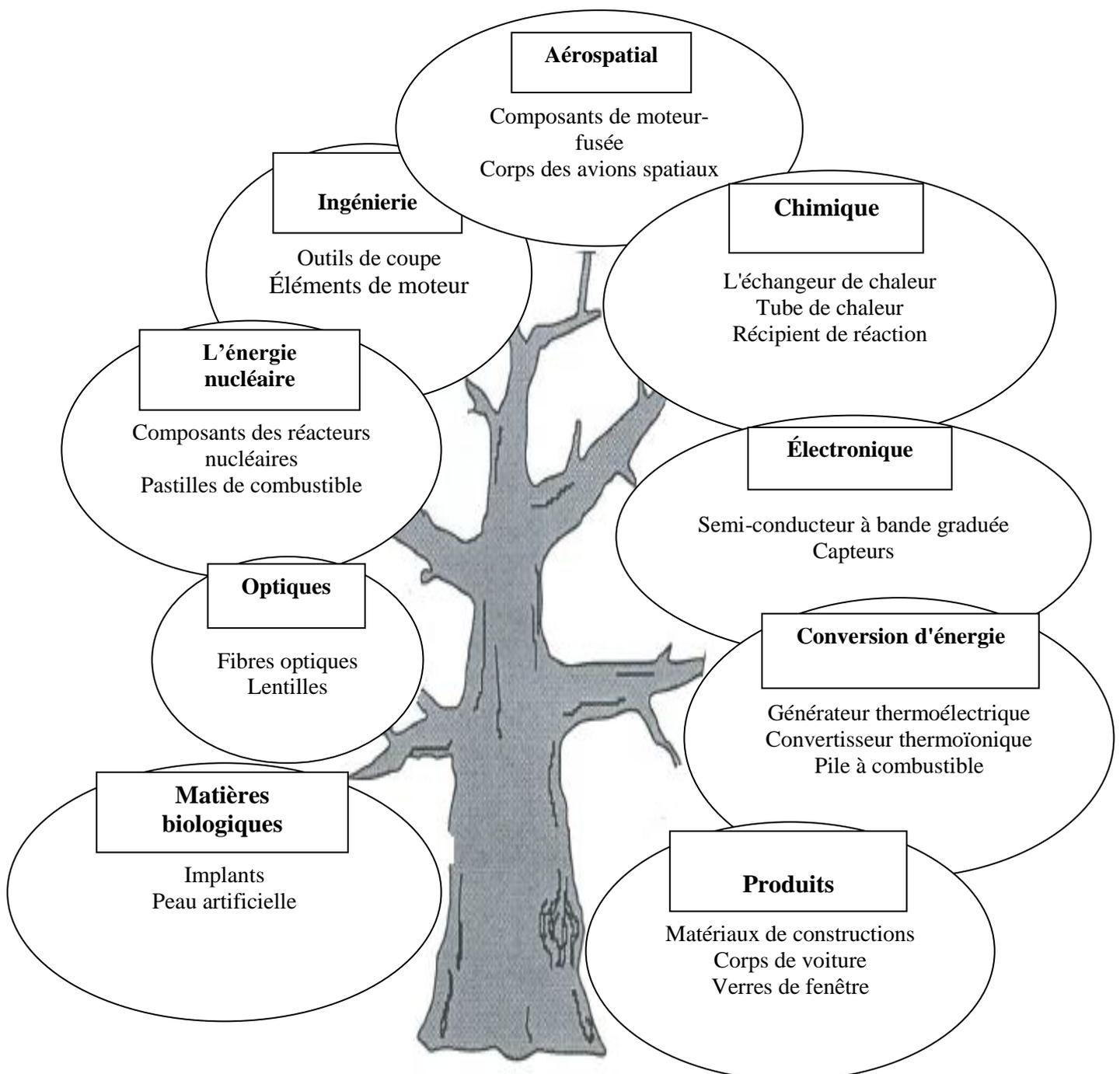


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

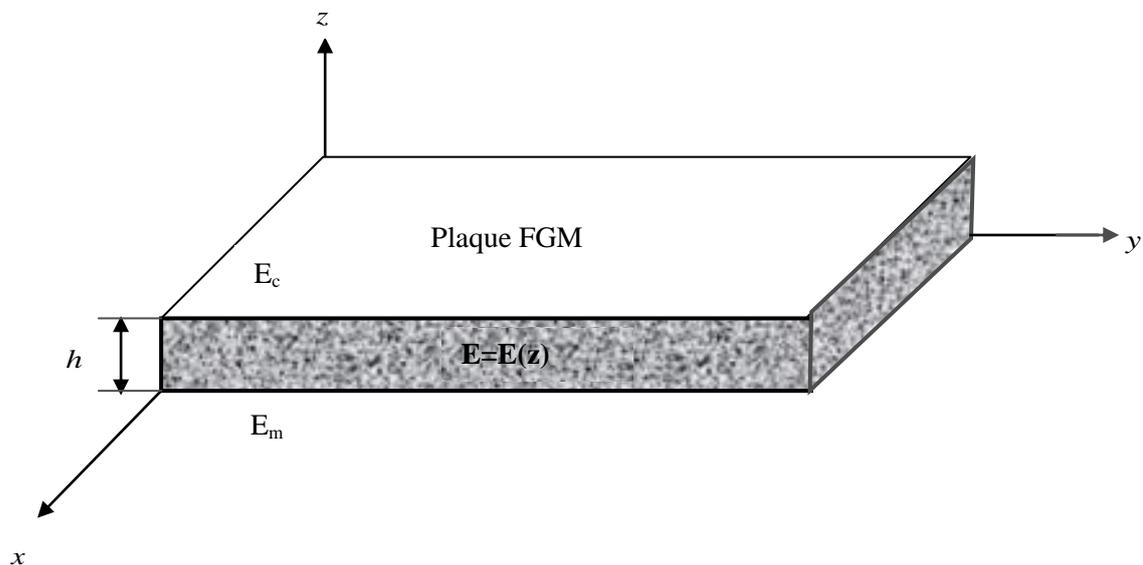


Figure I.5 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens

de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left[\frac{(z + h/2)}{h} \right]^p \quad (I-1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$S(z) = V(z) \cdot S_1 + [1 - V(z)] \cdot S_2 \quad (I-2)$$

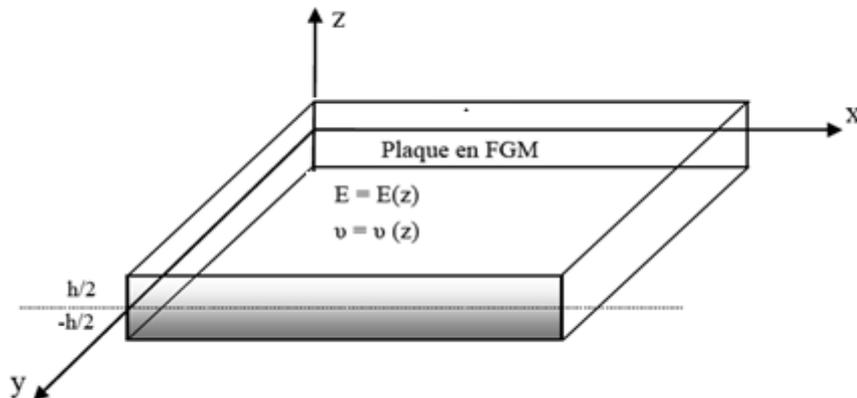


Figure I.6 : Dimensions de la plaque FGM

Où S_2 et S_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou la densité) de la surface inférieure ($z=-h/2$) et de la surface supérieure ($z=h/2$) de la plaque FGM.

Lorsque $S=S_2$, on est sur l'extrémité inférieure (100% métal: Aluminium) et quand $S=S_1$, on est sur l'extrémité supérieure où on a 100% de céramique(Alumina).

La figure I.7 montre La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM (composée de deux matériaux différents: céramique et métal) pour différentes valeurs de l'indice matériel « p ».

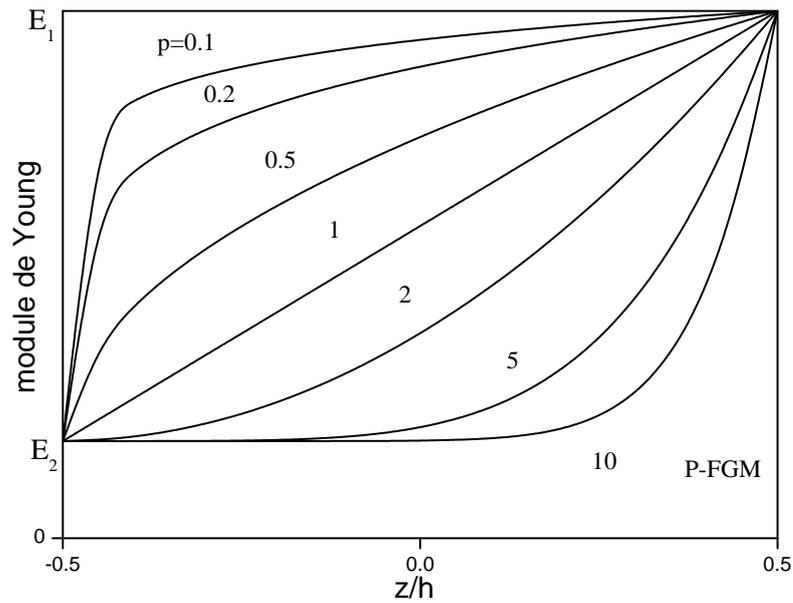


Figure I.7 : Variation du module de Young dans une plaque P-FGM

On remarque bien que le module de Young change et diminue rapidement dans la direction de l'extrémité inférieure de la plaque (pour $p > 1$), et augmente rapidement en allant vers l'extrémité supérieure (pour $p < 1$).

Lorsque $p=1$, la variation du module de Young devient linéaire.

On constate que la plaque devienne plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque.

Et l'inverse est vrai, la plaque devient de faible résistance si son module de Young est faible c'est le résultat de la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal.

Comme il est présenté sur la figure I.7, le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité ρ et le coefficient de poisson ν peuvent alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1}^n S_j \cdot V_j \quad (\text{I-3})$$

Où S_j et V_j sont respectivement les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j , et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1}^n V_j = 1 \quad (\text{I-4})$$

I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas de l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple aux composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue mais changent rapidement.

Par conséquent, Chung et Chi définissent la fraction volumique de puissance en utilisant deux fonctions afin d'assurer la bonne distribution des contraintes de toutes les interfaces [Chung et Chi, 2006]. Les deux fonctions sont définies par:

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{h/2 - z}{h/2} \right]^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5.a})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{h/2 + z}{h/2} \right]^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par:

$$S(z) = V_1(z) \cdot S_1 + [1 - V_1(z)] \cdot S_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.a})$$

$$S(z) = V_2(z) \cdot S_1 + [1 - V_2(z)] \cdot S_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6.b})$$

La figure I.8 montre que la variation du module de Young selon les équations (I.6.a) et (I.6.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

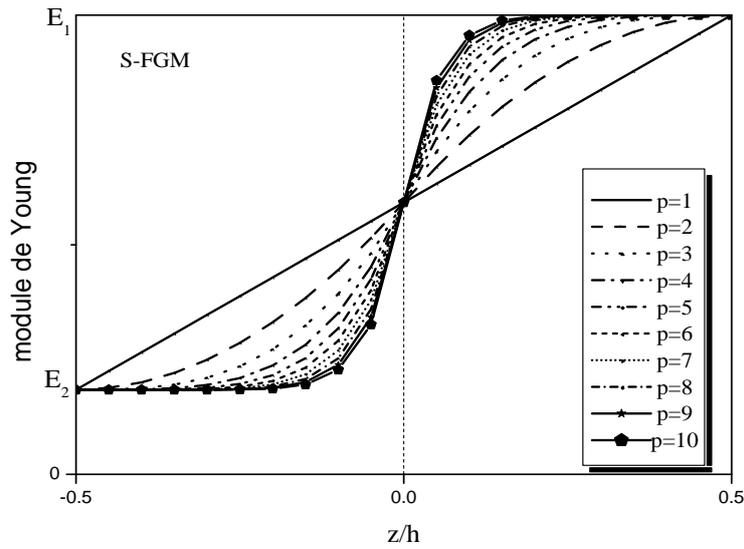


Figure I. 8 : Variation du module de Young dans une plaque S-FGM

I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale, 1983] :

$$S(z) = A.e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{I.7.a}$$

Avec :

$$A = S_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right) \tag{I.7.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.

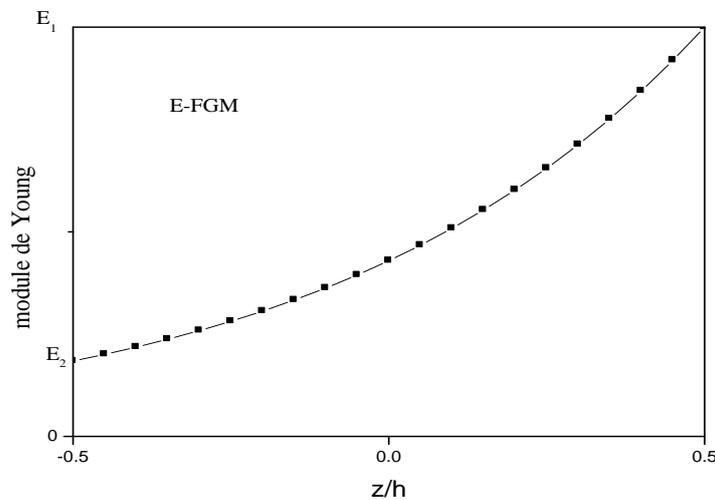


Figure I.9 : Variation du module de Young de la plaque E-FGM

On remarque que l'augmentation du module de Young suit l'augmentation de la quantité de la céramique (Al_2O_3 ou l'Alumina) par rapport à celle du métal (Al) tout en allant vers l'extrémité supérieure de la plaque.

I.7. Les modèles analytiques des plaques FGM

I.7.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On commence par le modèle le plus simple et le plus général appelé modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner, 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff, 1950] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. I.10).

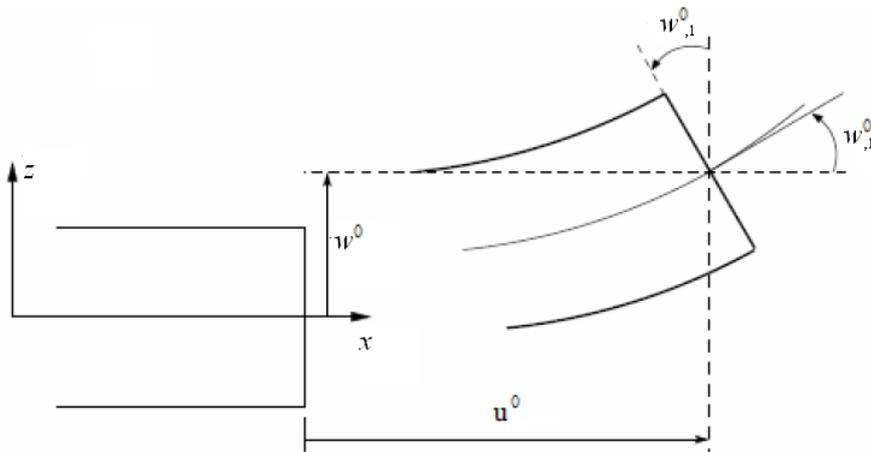


Figure I.10: Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - zw_{,1}^0(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) - zw_{,2}^0(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

Avec,

u^0, v^0 : Les déplacements de la membrane suivant les directions x et y ,

w^0 : La flèche de la plaque,

$w_{,1}^0, w_{,2}^0$: Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) mesurées sur le plan autour x et y .

I.7.2 Modèles Reissner-Mindlin (Théorie de Déformation de Cisaillement du Premier Ordre FSDT) :

Pour introduire l'effet de cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique de Mindlin adoptée est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.I.11). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin [Mindlin, 1951] s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (\text{I-9})$$

Avec :

ϕ_x, ϕ_y : Les rotations de la normale au plan moyen autour x et y .

$\gamma_{xz}^0 = (w_{,1}^0 + \phi_x)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

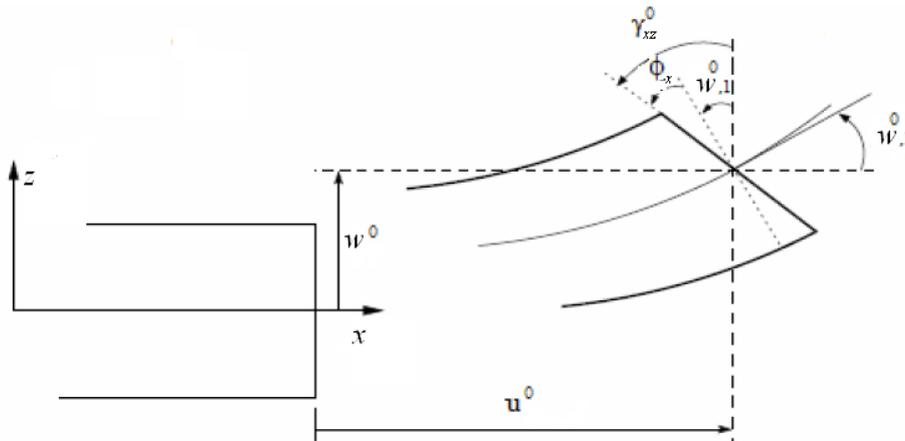


Figure I.11: Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [Whitney, 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure I.12 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

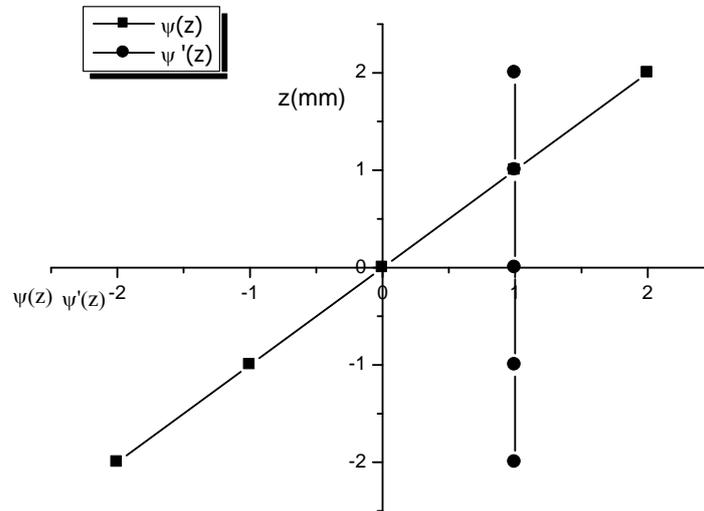


Figure. I.12: Variation de la fonction de gauchissement $\Psi(z)=z$ et $\Psi'(z)$ suivant l'épaisseur.

I.7.3. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. I.13) [Liberscu 1967, Whitney 1973, Touratier 1991, Nguyen 2004]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) \quad (I-10)$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = 0$. Le champ de déplacement (I-10) devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{I.11.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{I.11.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.11.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

$$\Psi'(z) = \partial \Psi(z) / \partial z$$

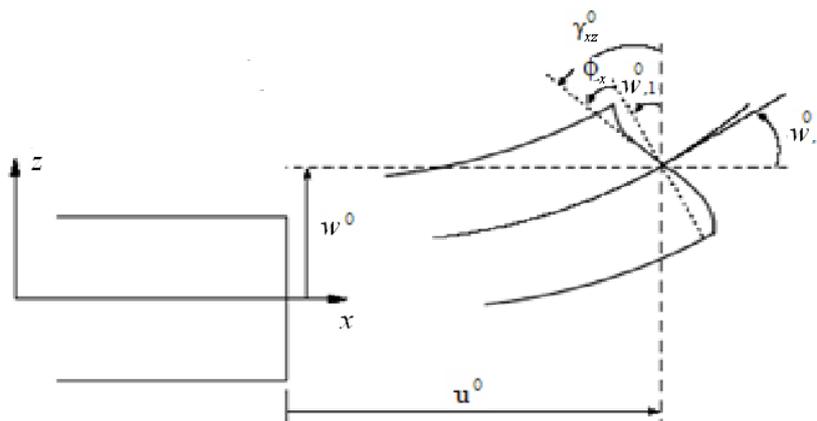


Figure I.13: Cinématique des Théories d'Ordre Supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $\Psi(z)$:

- L'approche d' [Ambartsumyan, 1969] avec ;

$$\Psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{I-12})$$

- L'approche de [Reissner,1945], Panc, et Kaczkowski avec ;

$$\Psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{I-13})$$

- la théorie des déformations du troisième ordre (the third-order shear deformation theory ou TSDT) [Reddy, 1984]:

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{I-14})$$

Dans le modèle de [Reddy, 1984], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- La théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal (The sinusoidal shear deformation theory ou SSDT) de Touratier [Touratier, 1991] est obtenue en posant :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{I-15})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$(\text{I-16})$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)\end{aligned}$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy, 1984].

- La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [Karama, 2003] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{I.17})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" ne permet qu'un développement en puissances impaires.

- L'approche de [Aydogdu, 2005] avec ;

$$\Psi(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{I.18})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. [Ait Atmane, 2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{I.19})$$

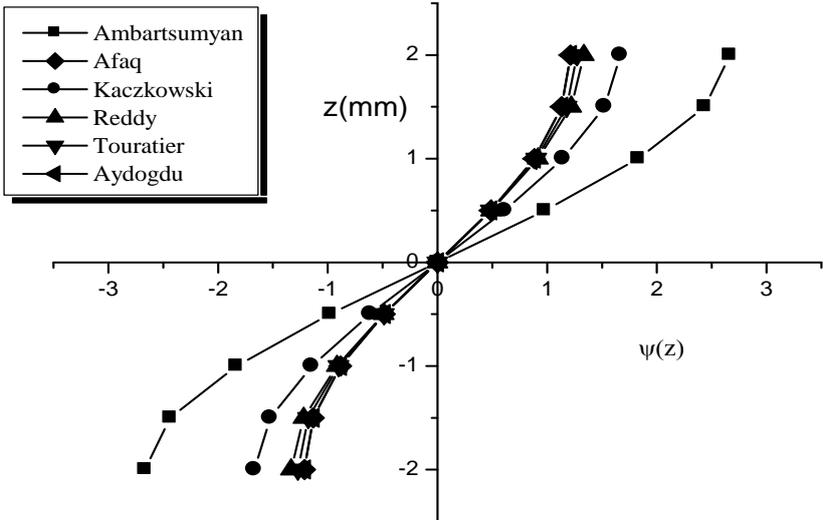


Figure I.14: Variation de la Fonction de Forme $\Psi(z)$ des Différents Modèles en Fonction de l'Épaisseur.

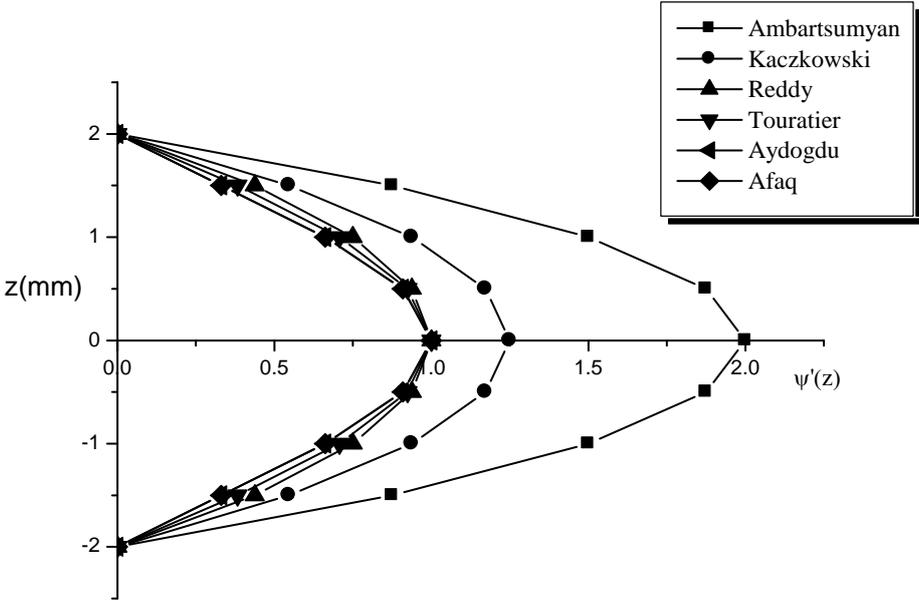


Figure I.15: Variation de la Dérivée de la Fonction de Forme $\Psi'(z)$ des Différents Modèles Suivant l'Épaisseur.

En fonction des Figures I.14 et I.15 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont sensiblement loin des autres fonctions de forme. Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche parait très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles de calcul des plaques minces et épaisses en FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II : REVUE DE QUELQUES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES FGM

II.1. Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives avec une composition variable et continue dans l'espace. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressants dans des applications potentielles, une réduction importante des contraintes dans le plan et à travers l'épaisseur, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, une grande ténacité, et une réduction du facteur d'intensité de contrainte. Un certain nombre de revues traitant les divers aspects des FGM ont été publiés ces dernières années [Zhong, 2007, Koizumi, 1992, Karama, 2003, Suresh, 1998]. Les colloques internationaux sur les FGM ont également mis en lumière les recherches les plus récentes sur ces matériaux, leur fabrication, la compréhension de leur comportement mécanique, leurs propriétés thermiques, et leurs applications [Van der Biest, 2004].

Le présent chapitre se concentre sur plusieurs aspects qui sont importants pour le développement et la conception des structures en matériaux à gradient de propriétés. Il comprend les approches d'homogénéisation des matériaux FGM, les problèmes de transfert de chaleur dans les structures en FGM et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements, statiques, dynamiques, y compris les chargements thermiques.

II.2. architecture des matériaux à gradient de propriétés

Actuellement, les FGM sont généralement associées à des particules composites où la fraction volumique des particules varie dans une ou plusieurs directions de l'espace. L'un des avantages de la variation continue de la fraction volumique des phases constitutives est l'élimination de la discontinuité des contraintes qui est souvent rencontrées dans les composites stratifiés et sandwichs, et en conséquence, éviter les problèmes liés aux délaminages et à la rupture. Les FGM peuvent être développés en utilisant des couches renforcées de fibres avec une fraction volumique de fibres qui varie à travers l'épaisseur de la structure, on obtient une optimisation des propriétés de l'ensemble ou une optimisation de la réponse de la structure vis-à-vis des types des chargements appliqués [Benatta, 2008], [Bouremana, 2009]. Si les particules de matériaux composites peuvent être localement

isotropes, ils sont hétérogènes à cause de la variation spatiale des fractions de volume des phases constitutives. Un exemple de ce matériau est illustré dans la figure II.1 [Yin, 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope.

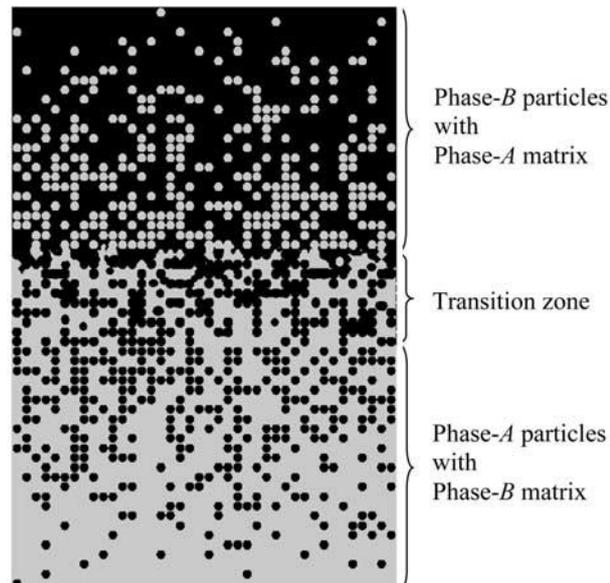


Figure II.1 : Variation de la fraction volumique des matériaux constitutifs dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés [Yin, 2004].

Un FGM peut également avoir une microstructure de squelette comme le montre la figure II.2 [Vel et Batra, 2002].

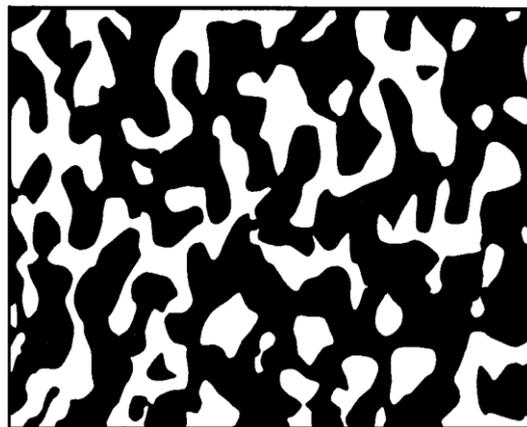


Figure II.2: Une microstructure de squelette d'un matériau FGM [Vel et Batra, 2002].

Un matériau FGM peut avoir des architectures différentes qui se traduisent par un comportement orthotrope. Un FGM peut comprendre plus de deux phases constitutives. Nemat-Alla a analysé un matériau FGM constitué de deux phases différentes (céramique et

métallique) dont la fraction volumique varie dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance [Nemat-Alla, 2003]. Des exemples dans ce chapitre montrent que les contraintes dans une plaque en (silicone/aluminium/titane) soumise à un chargement thermique peuvent être réduites par rapport aux plaques conventionnelles constituées en deux phases. Il est à noter que la distribution de la matière dans des structures à gradient de propriétés peut être conçue pour diverses caractéristiques spatiales. Un matériau FGM représente un composite à particule avec une distribution prescrite des fractions volumiques des phases constitutives.

Plusieurs chercheurs utilisent une variation par couches de la fraction volumique des particules de la céramique, c.-à-dire., des couches (céramique/métal) quasi-homogène. D'autre part, plusieurs chercheurs supposent que la fraction volumique de céramique peut être représentée par une fonction de lois de puissance suivant l'épaisseur de coordonner (z) :

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.1})$$

Où h est l'épaisseur de la structure, et k est un exposant de la fraction volumique (paramètre de matériau). En conséquence, la distribution du module d'élasticité pour un FGM isotrope et son coefficient de Poisson peut être définie en termes de constantes de matériau des phases constitutives basées sur une approche d'homogénéisation choisie.

II.3. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique

de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques les plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes.

Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [Zuiker, 1995] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent et les modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références [Reuter ,1997]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et ha [Cho et Ha, 2001] ont comparée la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [Pal, 2005] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogène mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant en compte l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publié [Yin , 2004]. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans figure II.3, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [Yin , 2004] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérées exactes. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.

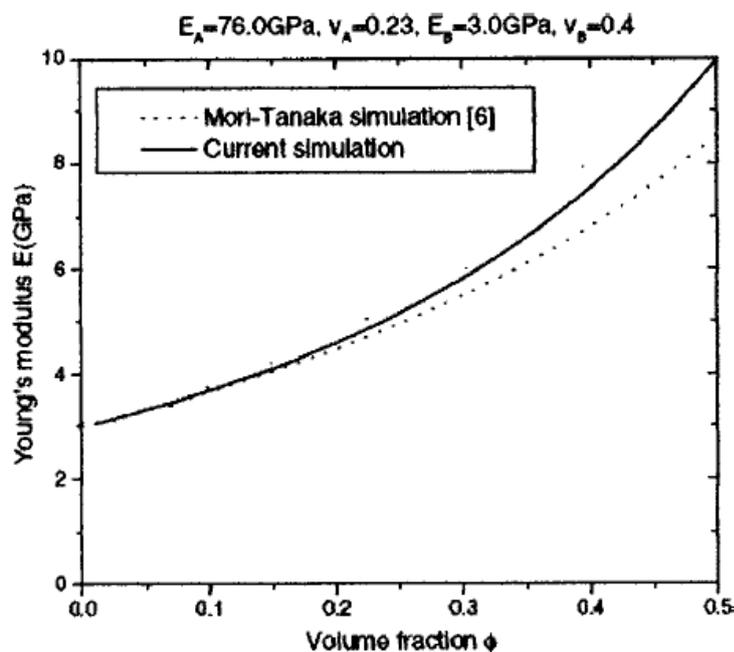


Figure II.3 : Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al [Yin , 2004] et le modèle de Mori-Tanaka.

II.3. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Jin [Jin, 2002] a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidies à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa [Ootao et Tanigawa, 2004] où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al [Sladek, 2003] en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrits et un cylindre avec une température constante appliquée sur la sa surface.

II.4. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous différents types de chargement

Sankar et Tzeng [Sankar et Tzeng, 2002] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Sankar [Sankar, 2001] a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli). Les résultats montrent que la théorie classique de poutre donne des résultats acceptables si la poutre est élancée. Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par théorie classique de poutre. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produit sur la

surface de chargement est plus élevée dans une poutre en FGM par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à celles d'une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée pour la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur [Chakraborty, 2003]. Le problème thermoélastique pour une poutre en FGM avec la variation exponentielle des propriétés matérielles dans l'épaisseur et soumise à une distribution non-uniforme de chaleur par convection a été examinée par Chin et Yen [Ching et Yen, 2006] en utilisant un maillage locales par la méthode de Petrov-Galerkin.

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par Reddy [Reddy, 2000] en utilisant la théorie du troisième ordre de cisaillement déformation. Reddy et Cheng [Reddy et Cheng, 2001] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par Vel et Batra [Vel et Batra, 2002] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de matériau. Les approches d'homogénéisations utilisées dans l'article ont inclus le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent. La plaque a été modélisée par les théories de premier ordre et troisième ordre de déformation de cisaillement. La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par Kashtalyan [Kashtalyan, 2004] qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

Chi et Chang [Chung et Chi, 2006ab] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité

change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

Zenkour [Zenkour, 2005ab] a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwiches en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version « sinusoidale » de la théorie de déformation de cisaillement. L'Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par Woo et Meguid [Woo et Meguid, 2001].

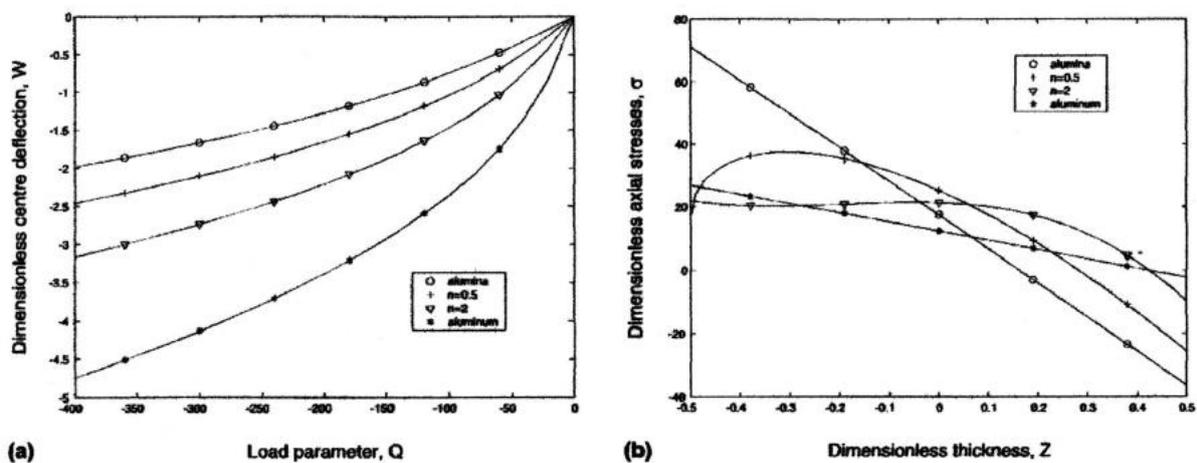


Figure II.4 : Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse [Woo et Meguid, 2001].

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique et en métal, et en FGM est montrée sur la Figure II.4. On remarque que la flèche dans une plaque FGM, pour une faible valeur de paramètre de matériau ($n = 2$) est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique est une fonction linéaire dans l'épaisseur, elle devient non linéaire dans le cas d'une plaque en FGM, ce qui reflète une distribution non uniforme des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Cette observation reflète le potentiel souligné précédemment pour une meilleure adaptation des structures FGM par rapport à leurs homologues en composites traditionnelles ou homogènes.

Tarn [Tarn, 2001] a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique. La solution exacte a été obtenue pour le cas où

les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant el cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre. L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par Javaheri et Eslami [Javaheri et Eslami , 2002a b]. Na et Kim [Na et Kim , 2004] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par Yang et al. [Yang, 2005] qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes. L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par Shen et al [Yang et Shen , 2003]. Un exemple de cette analyse est illustré sur la Figure II.5, où les conditions aux limites sont indiquées pour avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique.

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par Matsunaga [Matsunaga, 2009] pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. Zhao et al. [Zhao, 2009] ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, Fuchiyama et Noda [Fuchiyama et Noda, 2003] ont étudié le flambement d'une plaque FGM ($ZrO_2/ Ti-6Al-4V$) sous un chargement thermique.

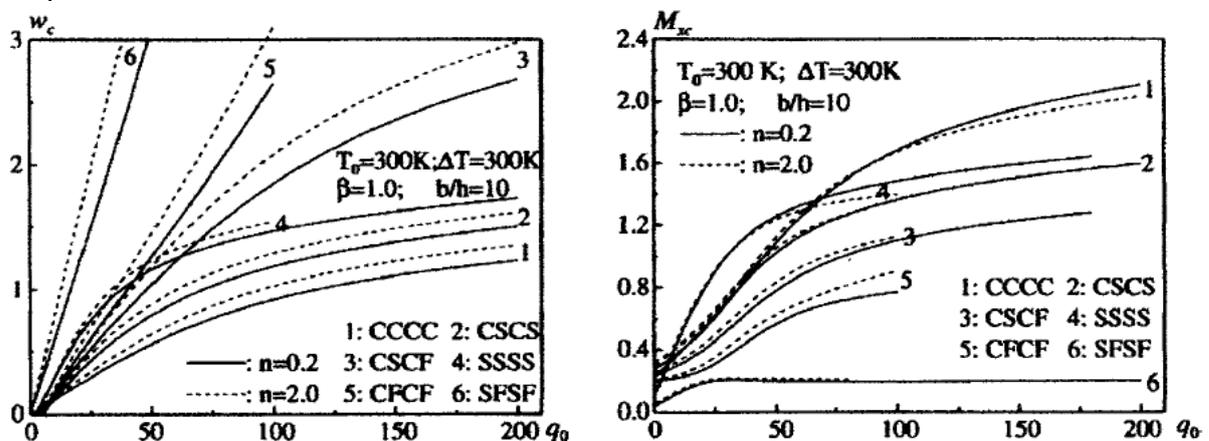


Figure II. 5: Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique [Yang et Shen , 2003].

Zenkour et Sobhy [Zenkour et Sobhy, 2010] ont utilisée la version sinusoïdale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwichs en FGM.

Une étude récente publiée par Park et Kim [Park et Kim, 2005] contient une analyse par éléments finis du de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique.

Un exemple d'une réponse de l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque simplement appuyée en FGM est illustré dans la figure II.6.

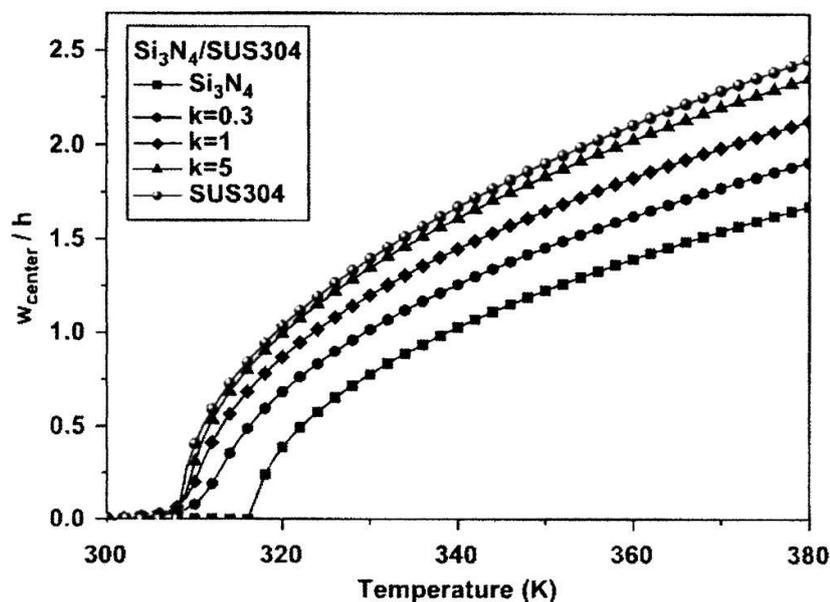


Figure II.6 : Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ($Si_3N_4/SUS304$) [Park et Kim, 2005].

II.5. Conclusion

Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM ont été présentés dans ce chapitre. En raison de vaste champ qui se développe rapidement sur les FGM, ces conclusions ne peuvent pas englober toutes les directions et les tendances importantes. Néanmoins, ils reflètent certaines des observations des auteurs sur la base des recherches publiées et leur propre analyse.

1. Dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, il est souvent possible d'employer des techniques disponibles pour les composites traditionnels. Toutefois, dans le cas où le matériau a une gradation importante (changement rapide des

propriétés d'une surface à l'autre), le modèle (VER) peut être utilisé, reflétant les variations des propriétés à l'échelle micromécanique. Peu importe l'approche d'homogénéisation adoptée, l'interaction entre les particules ne doit pas être négligée.

2. L'approche de problème de transfert de chaleur dans les FGM devrait tenir compte de l'effet de la température sur les propriétés du matériau qui à son tour affecter la solution du problème de conduction de la chaleur.

3. L'effet de chargement thermique important sur les contraintes, la stabilité au flambement et la vibration des structures en FGM devrait être étudiées en tenant compte les changements dans les propriétés du matériau dû à la température. Ces derniers changements sont particulièrement importants car les FGM sont des matériaux hétérogènes. Par conséquent, si l'une des phases de la matière constitutive est plus affectée par la température que l'autre phase, un certain degré de changement de propriété sera non uniforme dans tout le matériau, même si elle est soumise à une température uniforme.

CHAPITRE III :

ANALYSE DE LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM AYANT DES PROPRIÉTÉS MATÉRIELLES DÉPENDANTES DE LA TEMPÉRATURE EN UTILISANT DES THÉORIES RAFFINÉES DE DÉFORMATION DE CISAILLEMENT.

III.1. Introduction :

Le but de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la vibration libre des plaques FGM en utilisant plusieurs théories raffinées de déformation de cisaillement de quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans les théories présentées est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement., elles ont une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exigent pas de facteur de correction de cisaillement, et donnent une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

III.2. développement théorique :

III.2.1. géométrie de la plaque :

Considérons une plaque FG rectangulaire simplement appuyée de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur h . les coordonnées x , y et z sont prises selon la longueur, la largeur, et l'épaisseur, respectivement, comme il est montré dans la figure III.1. La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles varient doucement à travers l'épaisseur de la plaque.

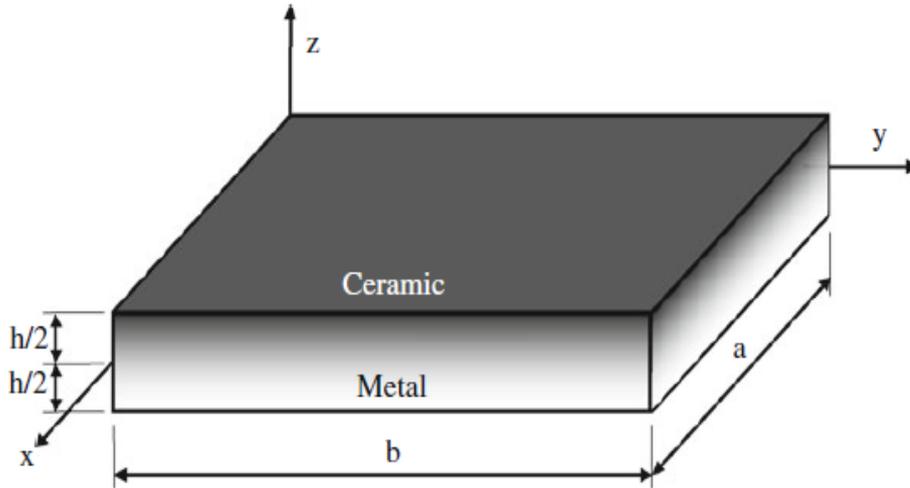


Figure III.1: géométrie d'une plaque FG rectangulaire.

III.2.2. Propriétés des matériaux :

Les FGM sont des matériaux composites constitués de la céramique et du métal. Il y'a quelque modèles dans la littérature qui expriment la variation des propriétés matérielles dans les FGM [Chi and Chung, 2006 ab]. Le plus couramment utilisé est la distribution de la loi de puissance en terme de fraction de volume des constituants. Selon ce model les propriétés matérielles sont supposées dépendantes de la température à travers l'épaisseur et peuvent être exprimées par [Kim, 2005] :

$$\Gamma(z, T) = (\Gamma_c(T) - \Gamma_m(T))V_c + \Gamma_m(T) \quad \text{et} \quad V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (\text{III.1})$$

Où Γ indique la propriété matérielle comme le module élastique E , le coefficient de Poisson ν , la masse volumique ρ et le coefficient de dilatation thermique α de la plaque FG ; de plus les indices m et c renvoient aux plaques entièrement en métal et en céramique, respectivement. V_c indique la fraction volumique de la céramique, où $p \geq 0$ est un indice matériel qui contrôle le mélange de la céramique et du métal. Les propriétés matérielles non linéaires de la plaque FG sont données comme suit [Shahrjerdi 2011] :

$$P(T) = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (\text{III.2})$$

Où P indique la propriété matérielle et $T = T_0 + \Delta T(z)$ indique la température de l'environnement; $T_0 = 300(K)$ est la température ambiante ; P_{-1} , P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients des propriétés matérielles qui dépendent de la température et ils sont propres aux

matériaux constitutifs, et $\Delta T(z)$ est la variation de la température selon la direction de l'épaisseur seulement ; tandis que la conductivité thermique k est indépendante de la température.

III.3. Différentes théories d'ordre supérieur :

En se basant sur la théorie des plaques d'ordre élevé avec la prise en compte de la déformation normale φ_z . Le champ de déplacement en un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans la plaque s'écrit :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x \quad (\text{III.3a})$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y \quad (\text{III.3b})$$

$$w = w_0(x, y) \quad (\text{III.3c})$$

Où, u, v et w sont les déplacements dans les directions x, y, z . Les déplacements u_0, v_0 et w_0 sont ceux d'un point du plan moyen $(x, y, z=0)$. φ_x, φ_y sont les rotations due à la flexion des plans yz et xz .

$\Psi(z)$: représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur. Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant $\Psi(z)=0$. La théorie du premier ordre (first-order shear déformation theory ou FSDT) est obtenue en posant $\Psi(z) = z$.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de forme $\Psi(z)$:

La théorie de déformation du troisième ordre (the third-order shear deformation theory ou TSDT) [Reddy 1984]:

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

- La théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (The sinusoidal shear deformation theory ou SSDT) de Touratier [Touratier 1991] est obtenue en posant :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

- Récemment, Karama et al. [Karama, 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse prend la forme suivante :

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.6})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" ne permet qu'un développement en puissances impaires.

III.4. théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables :

III.4.1. champ de déplacement et de déformation :

La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Le champ de déplacement des théories de déformation de cisaillement est choisi en se basant sur les hypothèses suivantes : (1) le déplacement transversal est décomposé en une composante de flexion et une composante de cisaillement ; (2) les déplacements axiaux sont décomposés en trois termes : à savoir : extension, flexion et cisaillement ; (3) les déplacements axiaux dus à la flexion sont similaires aux ceux donnés par la théorie classique des plaques (CPT) ; (4) le déplacement axial du au cisaillement engendre une variation non linéaire de la déformation et la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que cette dernière s'annule au niveau des surfaces supérieure et inférieure. En se basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement est donné sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y d'un point sur le plan moyen de la plaque; w_b et w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion et au cisaillement, respectivement ; $f(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de forme $f(z)$ est choisit de telle façon que la condition de nullité de la contrainte de cisaillement transversale aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque est respectée, et par conséquent, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

Le champ de déformation se déduit du champ de déplacement de l'équation (III.7)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.8})$$

Où:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.9})$$

et :

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{III.10})$$

III.4.2. contraintes :

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ de contrainte s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes de la contraintes et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles indiquées dans l'équation (III.1), les coefficients de rigidité C_{ij} sont exprimées par :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2(z,T)}, \quad (\text{III.12})$$

$$C_{12} = \nu(z,T)C_{11}, \quad (\text{III.13})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu(z,T))}, \quad (\text{III.14})$$

III.4.3. Equations d'équilibre:

L'énergie totale de la déformation de la plaque FG est donnée par :

$$U = U_p + U_T \quad (\text{III.15})$$

Où U_p et U_T sont les énergies de déformation dues aux effets mécaniques et thermiques, respectivement.

Les énergies de déformation U_p et U_T sont données par [Shahrjerdi, 2011; Li, 2009; Reddy, 2004]:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (\text{III.16})$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x^T d_{11} + \sigma_y^T d_{22}] dV \quad (\text{III.17})$$

Où d_{ij} , $(i, j=1, 2)$ est la relation non linéaire entre le déplacement et la déformation [Shahrjerdi, 2011; Reddy, 2004]. En substituant d_{ij} dans l'équation (III.16) on obtient les équations suivantes :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma_x^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \sigma_y^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dV \quad (\text{III.18})$$

Avec

$$\sigma_x^T = -(C_{11} + C_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad \text{et} \quad \sigma_y^T = -(C_{22} + C_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad (\text{III.19})$$

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T)[\dot{u} + \dot{v} + \dot{w}]dV \quad (\text{III.20})$$

Le principe d'Hamilton est donné par :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta K)dt = 0 \quad (\text{III.21})$$

En substituant l'Eq. (III.8) dans l'Eq. (III.11) et en appliquant les Eqs. (III.21) et (III.7), les équations de mouvement pour la plaque FG sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} & (A_{11} + A_{11}^T)d_{11}u_0 + (A_{66} + A_{22}^T)d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}w_b - (B_{11}^s + B_{11}^{sT})d_{111}w_s \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s + B_{22}^{sT})d_{122}w_s = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w}_b - J_1d_1\ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{III.22.a})$$

$$\begin{aligned} & (A_{22} + A_{22}^T)d_{22}v_0 + (A_{66} + A_{11}^T)d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - (B_{22} + B_{22}^T)d_{222}w_b - (B_{22}^s + B_{22}^{sT})d_{222}w_s \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T)d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s + B_{11}^{sT})d_{112}w_s = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w}_b - J_1d_2\ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{III.22.b})$$

$$\begin{aligned} & (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T)d_{112}v_0 + (B_{22} + B_{22}^T)d_{222}v_0 - \\ & (D_{11} + D_{11}^T)d_{1111}w_b - (D_{11}^{sT} + D_{11}^s)d_{1111}w_s - 2(2D_{66} + D_{12})d_{1122}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - \\ & (D_{22} + D_{22}^T)d_{2222}w_b - (D_{22}^s + D_{22}^{sT})d_{2222}w_s + A_{11}^T(d_{11}w_s + d_{11}w_b) + A_{22}^T(d_{22}w_b + d_{22}w_s) - \\ & (D_{11}^{sT} + D_{22}^{sT})d_{1122}w_s - (D_{11}^T + D_{22}^T)d_{1122}w_b = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_b) \\ & - J_2(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s) \end{aligned} \quad (\text{III.22.c})$$

$$\begin{aligned} & (B_{11}^s + B_{11}^s)d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s + B_{22}^{sT})d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s + B_{11}^{sT})d_{112}v_0 + (B_{22}^s + B_{22}^{sT})d_{222}v_0 \\ & - (D_{11}^s + D_{11}^{sT})d_{1111}w_b - (H_{11}^s + H_{11}^{sT})d_{1111}w_s - 2(2D_{66}^s + D_{12}^s)d_{1122}w_b - (D_{22}^s + D_{22}^{sT})d_{2222}w_b - \\ & 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - (H_{22}^s + H_{22}^{sT})d_{2222}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{11}^T(d_{11}w_s + d_{11}w_b) + \\ & A_{22}^T(d_{22}w_b + d_{22}w_s) - (D_{11}^{sT} + D_{22}^{sT})d_{1122}w_b - (H_{11}^{sT} + H_{22}^{sT})d_{1122}w_s = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) \\ & - J_2(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_b) - K_2(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s) \end{aligned} \quad (\text{III.22.d})$$

Où d_{ij} et d_{ijlm} sont des opérateurs différentielles :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.23})$$

et les composantes de rigidité sont données par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III.24.a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{III.24.b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III.24.c})$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^T & B_{11}^T & D_{11}^T & B_{11}^{sT} & D_{11}^{sT} & H_{11}^{sT} \\ A_{22}^T & B_{22}^T & D_{22}^T & B_{22}^{sT} & D_{22}^{sT} & H_{22}^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f(z)^2 \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.24.d})$$

Les inerties sont données par :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f, z^2, z f, f^2 \right) \rho(z) dz \quad (\text{III.24.e})$$

III.4.3. Solutions analytiques :

A partir de la solution de Navier pour le cas d'une plaque simplement appuyée, le champ de déplacement est exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où: U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence associée au mode (m, n) , et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

Substituant le champ de déplacement (III.7) dans les équations d'équilibre (III.22), les équations de la fréquence sont obtenues comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Avec:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\lambda^2 (A_{11} + A_{11}^T) - \mu^2 (A_{66} + A_{22}^T) \\ a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda \left[\lambda^2 (B_{11} + B_{11}^T) + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T) \mu^2 \right] \\ a_{14} &= \lambda \left[B_{11}^s \lambda^2 + B_{11}^{sT} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s + B_{22}^{sT}) \mu^2 \right] \\ a_{22} &= -\lambda^2 (A_{66} + A_{11}^T) - \mu^2 (A_{22} + A_{22}^T) \\ a_{23} &= \mu \left[\mu^2 (B_{22} + B_{22}^T) + (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) \lambda^2 \right] \\ a_{24} &= \mu \left[\mu^2 (B_{22}^s + B_{22}^{sT}) + (B_{12}^s + 2B_{66}^s + B_{11}^{sT}) \lambda^2 \right] \\ a_{33} &= -\left[(D_{11} + D_{11}^T) \lambda^4 + D_{22}^T \mu^4 + 2(D_{12} + 2D_{66} + D_{22}^T + D_{11}^T) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4 + A_{11}^T \lambda^2 + A_{22}^T \mu^2 \right] \\ a_{34} &= -\left[(D_{11}^s + D_{11}^{sT}) \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s + D_{11}^{sT} + D_{22}^{sT}) \lambda^2 \mu^2 + (D_{22}^s + D_{22}^{sT}) \mu^4 + A_{11}^T \lambda^2 + A_{22}^T \mu^2 \right] \\ a_{44} &= -\left[(H_{11}^s + H_{11}^{sT}) \lambda^4 + (H_{22}^{sT} + H_{11}^{sT} + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)) \lambda^2 \mu^2 + (H_{22}^s + H_{22}^{sT}) \mu^4 \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 (A_{55}^s + A_{11}^T) + \mu^2 (A_{44}^s + A_{22}^T) \right] \\ m_{11} &= I_1 \\ m_{12} &= 0 \\ m_{13} &= -I_2 \lambda \\ m_{14} &= -I_4 \lambda \\ m_{22} &= I_1 \\ m_{23} &= -I_2 \mu \\ m_{24} &= -I_4 \mu \\ m_{33} &= I_1 + I_3 (\mu^2 + \lambda^2) \\ m_{34} &= I_1 + I_5 (\mu^2 + \lambda^2) \\ m_{44} &= I_1 + I_6 (\mu^2 + \lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

III.5. champ de température:

Dans ce travail, on a considéré quatre cas de distribution thermique à travers l'épaisseur avec $T = T(z)$

III.5.1. température uniforme:

Dan ce cas, le champ de température uniforme est donné par :

$$T(z) = T_0 + \Delta T(z) \quad (\text{III.28})$$

Où $\Delta T(z)$ indique le changement de la température et $T_0 = 300 \text{ K}$ est la température ambiante.

III.5.2. température linéaire:

En supposant que les températures T_b et T_t sont imposées au niveau des faces inférieure et supérieure de la plaque, le champ de température du à une variation non linéaire de la température à travers l'épaisseur est obtenu comme suit :

$$T(z) = T_0 + \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{III.29})$$

Où $\Delta T = T_t - T_b$ est le gradient de la température et $T_0 = 300 \text{ K}$ est la température ambiante.

III.5.3. température non linéaire:

L'évolution non linéaire de la température à travers l'épaisseur de la plaque est déterminée en résolvant l'équation unidirectionnelle de la conduction de chaleur. Cette équation est donnée suivant l'épaisseur par l'expression suivante :

$$-\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (\text{III. 30})$$

Avec les conditions aux limites $T(h/2) = T_t$ et $T(-h/2) = T_b = T_0$. Dan ce cas l'état libre de contrainte est supposé existée à $T_0 = 300 \text{ K}$. Le coefficient de conductivité thermique $k(z)$ est

supposé être varié selon une loi de puissance Eq. (III.1). La solution analytique de l'Eq. (III.30) est:

$$T(z) = T_b - (T_t - T_b) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz} \quad (III.31)$$

Dans le cas d'une plaque FG ayant des propriétés matérielles variantes selon une loi de puissance, la solution de l'équation peut être aussi exprimée par une série polynomiale [Shahrjerdi, 2011] comme suit:

$$T(z) = T_b + \frac{(T_t - T_b)}{C_{ib}} \left[\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{ib}}{(p+1)k_b} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{p+1} + \frac{k_{ib}^2}{(2p+1)k_b^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2p+1} - \frac{k_{ib}^3}{(3p+1)k_b^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3p+1} + \frac{k_{ib}^4}{(4p+1)k_b^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4p+1} - \frac{k_{ib}^5}{(5p+1)k_b^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5p+1} \right] \quad (III.32)$$

Avec:

$$C_{ib} = 1 - \frac{k_{ib}}{(p+1)k_b} + \frac{k_{ib}^2}{(2p+1)k_b^2} - \frac{k_{ib}^3}{(3p+1)k_b^3} + \frac{k_{ib}^4}{(4p+1)k_b^4} - \frac{k_{ib}^5}{(5p+1)k_b^5} \quad (III.33)$$

Où $k_{ib} = k_t - k_b$, avec k_t et k_b sont les conductivités thermiques aux faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.

III.5.4. température sinusoïdale:

Le champ de température sous une évolution sinusoïdale à travers l'épaisseur est donné comme [Shahrjerdi, 2011; Bouazza, 2009]:

$$T(z) = (T_t - T_b) \left[1 - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + T_b \quad (III.34)$$

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement vibratoire des plaques FG en utilisant des théories d'ordre élevé. Le nombre de fonctions inconnues dans les présentes théories est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. Les théories présentées ont une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exigent pas de facteur de correction de cisaillement, et donnent une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

CHAPITRE IV :

ETUDE COMPARATIVE AVEC LES DIFFÉRENTES THÉORIES D'ORDRE ÉLEVÉ

IV.1. Introduction :

Pour faire une comparaison entre les différentes théories ; un programme de calcul a été développé pour étudier la vibration libre des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température en utilisant des théories raffinées de quatre variables.

L'intérêt de ce chapitre est de présenter une étude comparative avec les différentes théories d'ordre élevé. Pour cela Nous considérons des différentes formes de fonction de gauchissement $f(z)$ qui permettent d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur.

Tableau IV.1: les fonctions de forme

modèle	$f(z)$	$g(z) = 1 - f'(z)$
La théorie du troisième ordre de plaque (TPT)	$\frac{4z^3}{3h^2}$	$1 - \frac{4z^2}{h^2}$
La théorie sinusoïdale de plaque (SPT)	$z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
La théorie hyperbolique de plaque (HPT)	$z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\frac{1}{2}$	$\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \cosh\frac{1}{2}$
La théorie exponentielle de plaque (EPT)	$z - ze^{-2(z/h)^2}$	$\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) e^{-2(z/h)^2}$

IV.2. Validation analytique des modèles proposés :

Dans cette partie, nous proposons de valider les modèles proposés à travers les résultats connus dans la littérature. Les résultats numériques obtenus pour les plaques FG qui ont des propriétés matérielles dépendantes de la température sont présentés en utilisant des théories de

déformation de cisaillement avec quatre inconnus, et ils sont aussi comparés avec ceux obtenus par les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec plus d'inconnus [Shahrjerdi, 2011; Huang et Shen, 2004].

L'analyse de la vibration libre des plaques FG est conduite en utilisant deux différentes combinaisons de métal et de céramique $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$. La vérification est faite en considérant $h = 0.025$ m, $a = b = 0.2$ m, Une valeur identique du coefficient de Poisson est considérée pour les matériaux : céramique et métal. Cependant, le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de ces matériaux sont considérés dépendants de la température [Shahrjerdi, 2011; Huang et Shen, 2004]. Les propriétés matérielles utilisées pour les plaques FG citées précédemment sont présentées dans le tableau IV. 2

Tableau IV. 2 les coefficients des propriétés matérielles qui dépendent de la température pour $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$

matériaux		P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E	SUS304	0	$201.04e^{+9}$	$3.079e^{-3}$	$-6.534e^{-7}$	0
	Si_3N_4	0	$348.43e^{+9}$	$-3.070e^{-4}$	$2.160e^{-7}$	$-8.946e^{-11}$
	Ti-6Al-4V	0	$122.56e^{+9}$	$-4.586e^{-4}$	0	0
	ZrO_2	0	$244.27e^{+9}$	$-1.371e^{-3}$	$1.214e^{-6}$	$-3.681e^{-10}$
ν	SUS304	0	0.3262	$-2.002e^{-4}$	$3.797e^{-7}$	0
	Si_3N_4	0	0.2400	0	0	0
	Ti-6Al-4V	0	0.2888	$1.108e^{-4}$	0	0
	ZrO_2	0	0.3330	0	0	0
ρ	SUS304	0	8166	0	0	0
	Si_3N_4	0	2370	0	0	0
	Ti-6Al-4V	0	4429	0	0	0
	ZrO_2	0	3000	0	0	0
α	SUS304	0	$12.330e^{-6}$	$8.086e^{-6}$	0	0
	Si_3N_4	0	$5.8723e^{-6}$	$9.095e^{-6}$	0	0
	Ti-6Al-4V	0	$7.5788e^{-6}$	$6.638e^{-4}$	$-3.147e^{-6}$	0
	ZrO_2	0	$12.766e^{-6}$	$-1.491e^{-3}$	$1.006e^{-5}$	$-6.778e^{-11}$
k	SUS304	0	12.04	0	0	0
	Si_3N_4	0	9.19	0	0	0
	Ti-6Al-4V	0	7.82	0	0	0
	ZrO_2	0	1.80	0	0	0

Le paramètre de la fréquence non dimensionnelle est donné par :

$$\bar{\omega} = \omega(a^2 / h) [\rho_b(1-\nu^2) / E_b]^{1/2},$$

Où E_b et ρ_b sont à $T_0 = 300 (K)$ [Shahrjerdi 2011; Huang et Shen 2004].

Exemple 1 :

Dans le premier exemple, les fréquences fondamentales non dimensionnelles sont présentées dans le tableau IV. 3 pour une plaque FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$. Comme il est décrit dans les références [Shahrjerdi, 2011; Huang et Shen, 2004], la surface supérieure est riche en céramique, et la surface inférieure est riche en métal. Le coefficient de Poisson est pris égal à $\nu = 0.3$

Le tableau IV. 3 montre l'effet de l'indice matériel p sur les fréquences de la plaque FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ sous trois conditions thermiques : condition 1, $T_b = T_t = 300 (K)$; condition 2, $T_b = 300 (K)$ et $T_t = 400 (K)$; condition 3, $T_b = 300 (K)$ et $T_t = 600 (K)$, les propriétés matérielles qui dépendent de la température et qui ne dépendent pas de la température sont prises en considération. A partir du tableau IV. 3, On peut voir que les résultats calculés en utilisant les présentes théories raffinées de déformation de cisaillement (TPT, SPT, HPT et EPT) sont en bon concordance avec les autres résultats présentés dans les références [Shahrjerdi 2011; Huang et Shen 2004], surtout pour les résultats obtenus par Huang and Shen soit pour le cas d'une plaque FG ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température, ou bien qui ne dépendent pas de la température. La différence observée entre les résultats obtenus par les présentes théories et ceux de la théorie de déformation de cisaillement de second ordre (SSDT) de Shahrjerdi et al. est due aux champs de déplacement donnés par ces théories. Il faut noter que les fréquences non dimensionnelles de la plaque FG dans le cas où les propriétés matérielles dépendent de la température sont supérieures à celles calculées dans le cas où les propriétés matérielles ne dépendent pas de la température.

Tableau IV. 3 : les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée soumise à un champ thermique non linéaire

Mode (1,1) FG (ZrO_2 et Ti-6Al-4V)		$T_b = 300 (K)$				
		$T_i = 300 (K)$	$T_i = 400 (K)$		$T_i = 600 (K)$	
			Dépendante de la température	Indépendante de la température	Dépendante de la température	Indépendante de la température
ZrO ₂	SSDT ^(a)	8.333	7.614	7.892	5.469	6.924
	TSDT ^(b)	8.273	7.868	8.122	6.685	7.686
	TPT	8.278	7.807	8.130	6.533	7.826
	SPT	8.278	7.808	8.131	6.534	7.826
	HPT	8.278	7.808	8.131	6.534	7.826
	EPT	8.280	7.809	8.132	6.536	7.828
$p = 0.5$	SSDT ^(a)	7.156	6.651	6.844	5.255	6.175
	TSDT ^(b)	7.139	6.876	7.154	6.123	6.776
	TPT	7.111	6.781	7.005	5.931	6.789
	SPT	7.112	6.782	7.006	5.931	6.789
	HPT	7.112	6.782	7.006	5.931	6.789
	EPT	7.113	6.783	7.001	5.993	6.772
$p = 1$	SSDT ^(a)	6.700	6.281	6.446	5.167	5.904
	TSDT ^(b)	6.657	6.437	6.592	5.819	6.362
	TPT	6.657	6.375	6.565	5.664	6.378
	SPT	6.657	6.375	6.565	5.665	6.378
	HPT	6.657	6.375	6.565	5.665	6.378
	EPT	6.658	6.376	6.556	5.668	6.350
$p = 2$	SSDT ^(a)	6.333	5.992	6.132	5.139	5.711
	TSDT ^(b)	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	TPT	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	SPT	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	HPT	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	EPT	6.288	6.049	6.194	5.469	6.003
Ti-6Al-4V	SSDT ^(a)	5.439	5.103	5.333	4.836	5.115
	TSDT ^(b)	5.400	5.322	5.389	5.118	5.284
	TPT	5.403	5.303	5.361	5.132	5.275
	SPT	5.403	5.303	5.361	5.132	5.275
	HPT	5.403	5.303	5.361	5.132	5.275
	EPT	5.404	5.304	5.300	5.133	5.091

^(a) [Shahrjerdi, 2011]

^(b) [Huang et Shen, 2004]

Exemple2 :

Dans cet exemple, une plaque FG $Si_3N_4/SUS304$ est analysée. Pour ce matériaux, le coefficient de poissons est pris égale à $\nu = 0.28$. Les fréquences fondamentales non dimensionnelles obtenues en utilisant toutes les présentes théories sont comparées avec les résultats publiés dans les références [Shahrjerdi, 2011] et [Huang et Shen, 2004] dans le

tableau IV. 4 pour différentes valeurs du facteur de puissance p . on peut voir que les fréquences non dimensionnelles obtenues par les théories proposées sont également en bon accord avec les résultats donnés dans les références [Shahrjerdi, 2011; Huang et Shen, 2004].

Tableau IV. 4 : les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée soumise à un champ thermique non linéaire.

Mode (1,1) FG (Si_3N_4 et SUS304)		$T_b = 300$ (K)				
		$T_i = 300$ (K)	$T_i = 400$ (K)		$T_i = 600$ (K)	
			Dépendante de la température	Indépendante de la température	Dépendante de la température	Indépendante de la température
Si_3N_4	SSDT ^(a)	12.506	12.175	12.248	11.461	11.716
	TSDT ^(b)	12.495	12.397	12.382	11.984	12.213
	TPT	12.507	12.307	12.376	11.886	12.113
	SPT	12.507	12.307	12.378	11.887	12.114
	HPT	12.507	12.307	12.378	11.886	12.114
	EPT	12.509	12.309	12.380	11.889	12.116
$p = 0.5$	SSDT ^(a)	8.652	8.361	8.405	7.708	7.887
	TSDT ^(b)	8.675	8.615	8.641	8.269	8.425
	TPT	8.609	8.453	8.498	8.117	8.272
	SPT	8.609	8.453	8.499	8.118	8.273
	HPT	8.609	8.453	8.499	8.118	8.273
	EPT	8.611	8.455	8.500	8.120	8.274
$p = 1$	SSDT ^(a)	7.584	7.306	7.342	6.674	6.834
	TSDT ^(b)	7.555	7.474	7.514	7.171	7.305
	TPT	7.544	7.399	7.437	7.082	7.217
	SPT	7.544	7.399	7.437	7.082	7.218
	HPT	7.544	7.399	7.437	7.082	7.218
	EPT	7.546	7.401	7.439	7.083	7.219
$p = 2$	SSDT ^(a)	6.811	6.545	6.575	5.929	6.077
	TSDT ^(b)	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	TPT	6.771	6.631	6.664	6.323	6.447
	SPT	6.770	6.631	6.665	6.323	6.447
	HPT	6.770	6.631	6.665	6.323	6.447
	EPT	6.772	6.633	6.665	6.324	6.448
SUS304	SSDT ^(a)	5.410	5.161	5.178	4.526	4.682
	TSDT ^(b)	5.405	5.311	5.335	4.971	5.104
	TPT	5.410	5.272	5.295	4.922	5.055
	SPT	5.410	5.278	5.300	4.945	5.071
	HPT	5.410	5.278	5.299	4.945	5.071
	EPT	5.411	5.279	5.301	4.946	5.073

^(a) [Shahrjerdi, 2011]

^(b) [Huang et Shen, 2004]

Exemple 3 :

Les tableaux IV. 5 et IV. 6 présentent les fréquences non dimensionnelles des plaques FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$, respectivement, dans un champ de température non linéaire pour différents modes. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par Shahrjerdi et al. et Huang et Shen. On peut voir que les résultats présentés sont en bon concordance avec les résultats publiés précédemment [Shahrjerdi 2011; Huang et Shen 2004].

Tableau IV. 5: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée dans un champ de température non linéaire ($p=2$).

modes	theories	$T_b = 300 (K)$				
		$T_i = 300 (K)$	$T_i = 400 (K)$		$T_i = 600 (K)$	
			Dépendante de la température	Indépendante de la température	Dépendante de la température	Indépendante de la température
(1,1)	SSDT ^(a)	6.333	5.992	6.132	5.139	5.711
	TSDT ^(b)	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	TPT	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	SPT	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	HPT	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	EPT	6.288	6.049	6.194	5.469	6.003
(1,2)	SSDT ^(a)	14.896	14.383	14.684	13.260	14.253
	TSDT ^(b)	14.625	14.372	14.655	13.611	14.474
	TPT	14.665	14.265	14.581	13.416	14.412
	SPT	14.666	14.267	14.583	13.416	14.414
	HPT	14.665	14.265	14.581	13.413	14.413
	EPT	14.672	14.273	14.589	13.421	14.420
(2,2)	SSDT ^(a)	22.608	21.942	22.386	20.557	21.935
	TSDT ^(b)	21.978	21.653	22.078	20.652	21.896
	TPT	22.123	21.584	22.034	20.489	21.855
	SPT	22.127	21.589	22.038	20.494	21.860
	HPT	22.123	21.584	22.034	20.489	21.855
	EPT	22.140	21.602	22.052	20.507	21.873
(1,3)	SSDT ^(a)	27.392	26.630	27.163	25.077	26.700
	TSDT ^(b)	26.454	26.113	26.605	24.961	26.435
	TPT	26.704	26.081	26.612	24.837	26.427
	SPT	26.711	26.089	26.619	24.845	26.435
	HPT	26.704	26.081	26.612	24.837	26.427
	EPT	26.731	26.108	26.639	24.865	26.454
(2,3)	SSDT ^(a)	34.106	33.211	33.867	31.425	33.384
	TSDT ^(b)	32.659	32.239	32.840	30.904	32.664
	TPT	33.109	32.371	33.013	30.920	32.819
	SPT	33.121	32.384	33.025	30.933	32.831
	HPT	33.109	32.370	33.013	30.919	32.819
	EPT	33.151	32.413	33.055	30.964	32.862

^(a) [Shahrjerdi, 2011]

^(b) [Huang et Shen, 2004]

Tableau IV. 6: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée dans un champ de température non linéaire ($p=2$).

modes	theories	$T_b = 300 (K)$				
		$T_i = 300 (K)$	$T_i = 400 (K)$		$T_i = 600 (K)$	
			Dépendante de la température	Indépendante de la température	Dépendante de la température	Indépendante de la température
(1,1)	SSDT ^(a)	6.811	6.445	6.575	5.929	6.077
	TSDT ^(b)	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	TPT	6.770	6.631	6.664	6.323	6.447
	SPT	6.770	6.631	6.664	6.323	6.447
	HPT	6.770	6.631	6.664	6.323	6.447
	EPT	6.770	6.631	6.665	6.325	6.448
(1,2)	SSDT ^(a)	16.017	15.708	15.769	15.002	15.262
	TSDT ^(b)	15.809	15.762	15.836	15.384	15.632
	TPT	15.812	15.628	15.699	15.229	15.472
	SPT	15.814	15.631	15.702	15.231	15.474
	HPT	15.812	15.628	15.699	15.229	15.472
	EPT	15.820	15.636	15.707	15.237	15.480
(2,2)	SSDT ^(a)	24.307	23.958	24.047	23.154	23.517
	TSDT ^(b)	23.806	23.786	23.893	23.327	23.685
	TPT	23.874	23.652	23.755	23.167	23.517
	SPT	23.879	23.657	23.760	23.173	23.522
	HPT	23.874	23.652	23.755	23.167	23.516
	EPT	23.893	23.671	23.774	23.187	23.536
(1,3)	SSDT ^(a)	29.446	29.071	29.177	28.204	28.632
	TSDT ^(b)	28.687	28.686	28.816	28.185	28.609
	TPT	28.831	28.586	28.709	28.049	28.463
	SPT	28.839	28.594	28.717	28.057	28.471
	HPT	28.831	28.586	28.709	28.049	28.462
	EPT	28.860	28.614	28.738	28.078	28.491
(2,3)	SSDT ^(a)	36.657	36.247	36.376	35.290	35.809
	TSDT ^(b)	35.466	35.491	35.648	34.918	35.436
	TPT	35.768	35.489	35.640	34.879	35.383
	SPT	35.782	35.503	35.654	34.893	35.397
	HPT	35.768	35.489	35.640	34.878	35.383
	EPT	35.814	35.535	35.686	34.925	35.429

^(a) [Shahrjerdi, 2011]

^(b) [Huang et Shen, 2004]

Exemple 4:

Le tableau IV.7 présente les fréquences naturelles d'une plaque FG $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ pour des grandes valeurs de l'indice matériel p et différentes valeurs des charges thermiques. Une autre fois, une bonne concordance est observée entre les présents résultats et ceux de Shahrjerdi et al. Il faut noter que les présentes théories exigent seulement quatre inconnus contrairement au sept dans le cas de la SSDT [Shahrjerdi 2011]. On peut conclure que les présentes théories

sont non seulement valables mais aussi efficaces pour l'analyse de la réponse vibratoire des plaques FG.

Tableau IV. 7: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans un champ de température non linéaire Mode (1, 1).

Charges thermiques $T_0 = 300 \text{ (K)}$, $b = a = 0.2$, $h = 0.025$		$T_b = 300 \text{ (K)}$ $T_i = 300 \text{ (K)}$	$T_b = 300 \text{ (K)}$ $T_i = 400 \text{ (K)}$	$T_b = 300 \text{ (K)}$ $T_i = 600 \text{ (K)}$
Si_3N_4	SSDT ^(a)	12.506	12.175	11.461
	TPT	12.506	12.306	11.886
	SPT	12.507	12.307	11.887
	HPT	12.507	12.307	11.887
	EPT	12.509	12.309	11.889
$p = 5$	SSDT ^(a)	6.200	5.936	5.328
	TPT	6.151	6.014	5.703
	SPT	6.151	6.015	5.704
	HPT	6.151	6.015	5.704
	EPT	6.152	6.016	5.705
$p = 10$	SSDT ^(a)	5.907	5.645	5.031
	TPT	5.862	5.725	5.405
	SPT	5.862	5.725	5.405
	HPT	5.862	5.725	5.405
	EPT	5.863	5.723	5.407
$p = 20$	SSDT ^(a)	5.711	5.450	4.825
	TPT	5.671	5.532	5.203
	SPT	5.671	5.532	5.203
	HPT	5.671	5.532	5.203
	EPT	5.672	5.534	5.204
$p = 40$	SSDT ^(a)	5.591	5.329	4.694
	TPT	5.552	5.414	5.076
	SPT	5.552	5.414	5.076
	HPT	5.552	5.414	5.076
	EPT	5.553	5.416	5.077
SUS304	SSDT ^(a)	5.410	5.161	4.526
	TPT	5.410	5.273	4.926
	SPT	5.410	5.273	4.926
	HPT	5.410	5.273	4.926
	EPT	5.411	5.274	4.927

^(a) [Shahrjerdi, 2011]

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire des plaques épaisses en FGM en utilisant plusieurs théories d'ordre élevé à quatre variables.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les fréquences dues au chargement thermique obtenues en utilisant les présentes théories d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus ou plus) sont en bon accord.

Par conséquent, on peut dire que les théories proposée sont précises et simples pour résoudre le problème de la vibration libre des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température.

CHAPITRE V :

EFFET DE LA TEMPÉRATURE SUR LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FG AYANT DES PROPRIÉTÉS MATÉRIELLES DÉPENDANTES DE LA TEMPÉRATURE

V.1. Introduction :

Pour résoudre les problèmes dans les systèmes de barrières thermiques, telles que les structures à parois minces et épaisses utilisées dans l'industrie aéronautique et les centrales nucléaires, les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont été proposés dans les dernières décennies. En raison de leur comportement meilleur dans l'environnement à hautes températures, les FGM ont trouvés beaucoup d'applications dans les domaines de hautes technologies : aéronautique, aéronautique, nucléaire, semi-conducteurs, d'automobile,

Ce chapitre est consacré à des applications numériques réalisées sur deux type de plaques FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$ avec une variation arbitraire des propriétés matérielles (Module de Young et coefficient de dilatation thermique). Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement vibratoire des plaques FG tout en étudiant l'évolution de la fréquence.

V.2. Effet des conditions thermiques sur les propriétés matérielles:

Dans les figures V.1 à V.5, la variation du module de Young des plaques FG à travers l'épaisseur est présentée en considérant des champs thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal. La température ambiante est définie à $T_0 = 300 (K)$ pour toutes les conditions thermiques. Les conditions thermiques dans le cas d'une température linéaire sont $T_b = T_t = 600 (K)$, dans le cas d'une température non linéaire sont $T_b = 0 (K)$ et $T_t = 600 (K)$, et dans le cas d'une température sinusoïdale sont $T_b = 300 (K)$ et $T_t = 500 (K)$.

Les figures V.1 et V.2 montrent que le comportement du module de Young est similaire pour une évolution uniforme de la température ou bien linéaire, mais les graphes varient légèrement dans le cas d'une température linéaire. On peut voir que l'augmentation de l'indice matériel p mène à une diminution du module de Young. De plus, on peut observer dans les figures V.1 à V.5 que le comportement du module de Young pour une température

non linéaire et sinusoïdale est complètement différent comparativement aux autres charges thermiques.

Dans le cas où la variation de la température est non linéaire ou sinusoïdale comme il est montré dans les figures V.3 et V.4, le module de Young augmente au voisinage de la surface inférieure, puis diminue quand $p < 1$, le module de Young diminue aussi pour $1 \leq p < 10$. Cependant le module de Young diminue puis augmente au voisinage de la surface supérieure pour une grande valeur de l'indice matériel p .

Donc, on peut conclure que les conditions thermiques ont un effet considérable sur le module de Young. Une étude comparative sur le module de Young est présentée pour les conditions thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdale dans la figure V.5. On peut voir que le module de Young augmente au voisinage de la surface inférieure pour toutes les conditions thermiques puis diminue à travers l'épaisseur sauf dans le cas de la température uniforme.

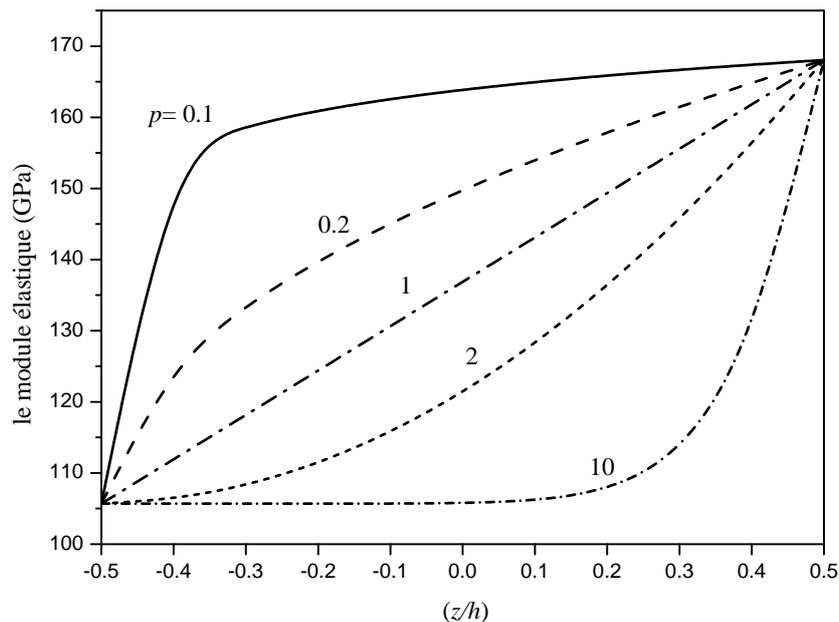


Figure V.1: Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG soumise à un chargement thermique uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel p

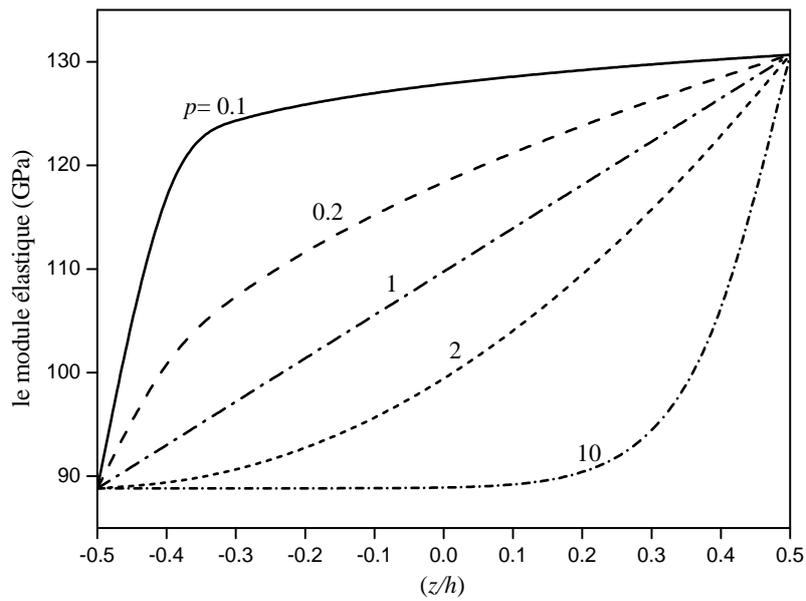


Figure V.2: Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p

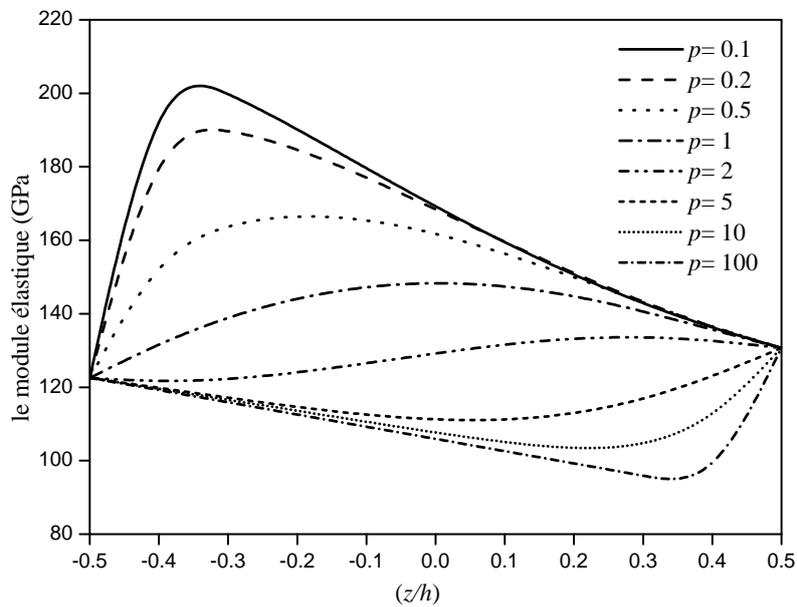


Figure V.3: Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique non linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p

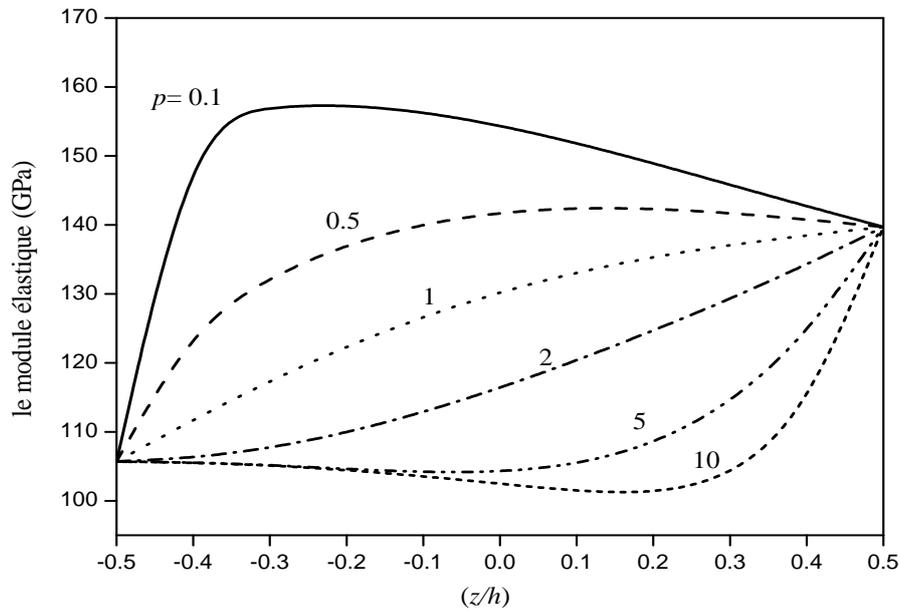


Figure V.4: Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique sinusoïdale pour différentes valeurs de l'indice matériel p

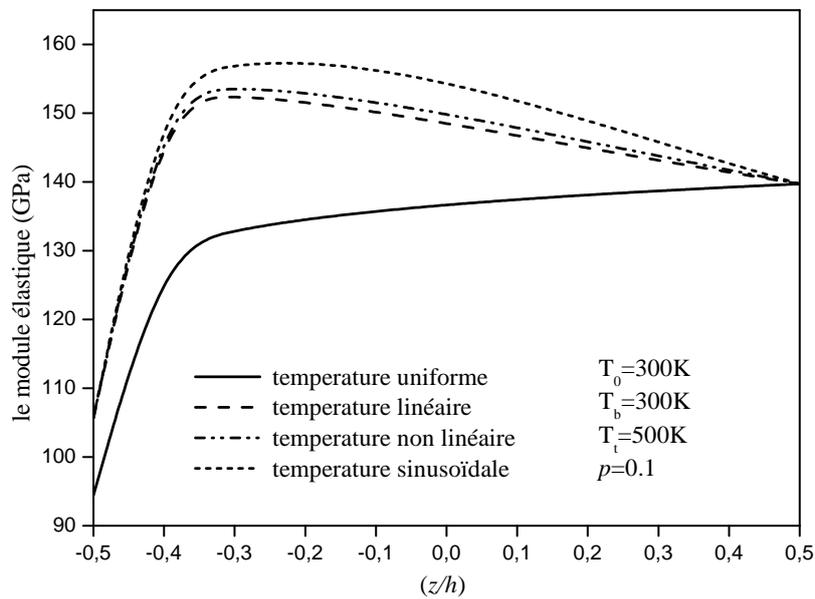


Figure V.5: Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans des champs thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel p

V.3. Etude paramétrique:

Pour illustrer l'analyse vibratoire, une variété de problèmes est considérée. Les effets des différents paramètres comme le facteur de puissance p , les modes de vibration, la géométrie de la plaque, et les champs de température sur les fréquences des plaques FG sont investigués.

L'analyse de la vibration libre des plaques FG est conduite en utilisant deux différentes combinaisons de métal et de céramique $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$. Les matériaux choisis sont les mêmes matériaux utilisés dans le chapitre précédent. Une valeur identique du coefficient de Poisson est considérée pour les matériaux : céramique et métal. Cependant, le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de ces matériaux sont considérés dépendants de la température [Shahrjerdi, 2011; Huang et Shen, 2004]. Les propriétés matérielles utilisées pour les plaques FG citées précédemment sont présentées dans le tableau IV. 1.

Les fréquences non dimensionnelles sont présentées dans les tableaux V. 1 et V. 2 pour des plaques FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$, respectivement. La fréquence naturelle non dimensionnelle est définie par :

$$\bar{\omega} = \omega(a^2/h) [\rho_b(1-\nu^2)/E_b]^{1/2}, \text{ où } E_b \text{ et } \rho_b \text{ sont à } T_0 = 300 (K) \text{ [Shahrjerdi, 2011].}$$

L'effet de l'indice matériel p sur les fréquences peut être observé en considérant des valeurs identiques des charges thermiques et des modes. Les résultats obtenus pour les plaques FG sont entre ceux obtenus pour les plaques homogènes (entièrement en céramique et métal) car le module de Young diminue à partir du métal jusqu'à la céramique. Les fréquences diminuent avec l'augmentation de la température entre la surface supérieure et inférieure de la plaque pour la même valeur de l'indice matériel p et du mode et cela représente l'effet des charges thermiques. La comparaison entre les plaques FG dont les propriétés matérielles dépendent de la température et celles qui ne dépendent pas de la température, dans les tableaux V. 1 et V. 2, montre que les fréquences sont petites dans le cas d'une plaque FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température, ce qui démontre l'importance et l'efficacité des propriétés matérielles qui dépendent de la température.

Le comportement des fréquences naturelles de la plaque FG $Si_3N_4/SUS304$ dans le tableau V. 1 est similaire au comportement de la plaque FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ dans le tableau V. 2

Les fréquences de $Si_3N_4/SUS304$ sont supérieures à celles données par $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, et cela est expliqué par le fait que le module de Young de Si_3N_4 est supérieur au module de ZrO_2 .

Il faut noter que la différence entre les fréquences de Si₃N₄/SUS304 et ZrO₂/Ti-6Al-4V qui sont obtenues pour la même température et le même mode diminue avec l'augmentation de l'indice matériel p car le module de Young de SUS304 est proche du module de Young de Ti-6Al-4V.

Tableau V.1: les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG (ZrO₂/Ti-6Al-4V) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.

Les modes de FG (ZrO ₂ et Ti-6Al-4V) $b = a = 0.2, h = 0.025$ $\nu = 0.3$		$T_b = 300 (K)$				
		$T_i = 300 (K)$	$T_i = 400 (K)$		$T_i = 600 (K)$	
			dépendante de la température	indépendante de la température	dépendante de la température	indépendante de la température
ZrO ₂	(1,1)	8.278	7.808	8.131	6.534	7.826
	(1,2)	19.344	18.577	19.054	16.842	18.867
	(2,2)	29.217	28.185	28.911	26.002	28.714
	(1,3)	35.292	34.095	34.975	31.632	34.472
	(2,3)	43.794	42.368	43.462	39.509	43.250
$p = 0.5$	(1,1)	7.112	6.782	7.006	5.931	6.789
	(1,2)	16.631	16.093	16.518	14.902	16.367
	(2,2)	25.138	24.415	25.019	22.908	24.779
	(1,3)	30.376	29.540	30.159	27.837	30.006
	(2,3)	37.713	36.720	37.486	34.744	37.326
$p = 1$	(1,1)	6.657	6.375	6.565	5.664	6.378
	(1,2)	15.558	15.095	15.392	14.084	15.264
	(2,2)	21.596	22.882	23.329	21.596	23.194
	(1,3)	26.221	27.676	28.213	26.221	28.074
	(2,3)	35.243	34.389	35.052	32.698	34.907
$p = 2$	(1,1)	6.287	6.047	6.208	5.467	6.049
	(1,2)	14.666	14.267	14.583	13.416	14.414
	(2,2)	22.127	21.589	22.038	20.494	21.860
	(1,3)	26.711	26.089	26.619	24.845	26.435
	(2,3)	33.121	32.384	33.025	30.933	32.831
Ti-6Al-4V	(1,1)	5.403	5.303	5.361	5.132	5.275
	(1,2)	12.625	12.440	12.580	12.096	12.489
	(2,2)	19.069	18.811	19.022	18.314	18.926
	(1,3)	23.035	22.730	22.985	22.142	22.886
	(2,3)	28.584	28.217	28.532	27.499	28.428

Tableau V.2: les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque FG (Si₃N₄/SUS304) simplement appuyée pour différents modes de vibration dans un champ thermique non linéaire.

Les modes de FG (Si ₃ N ₄ et SUS304) $b = a = 0.2$, $h = 0.025$ $\nu = 0.28$		$T_b = 300 (K)$				
		$T_i = 300 (K)$	$T_i = 400 (K)$		$T_i = 600 (K)$	
			Dépendante de la température	indépendante de la température	Dépendante de la température	indépendante de la température
Si ₃ N ₄	(1,1)	12.507	12.307	12.377	11.887	12.114
	(1,2)	29.260	28.964	29.121	28.371	28.843
	(2,2)	44.236	43.853	44.090	43.103	43.796
	(1,3)	53.460	53.024	53.309	52.176	53.005
	(2,3)	66.382	65.310	66.240	64.886	65.906
$p = 0.5$	(1,1)	8.609	8.453	8.498	8.118	8.272
	(1,2)	20.137	19.921	20.020	19.473	19.784
	(2,2)	30.441	30.172	30.318	29.621	30.070
	(1,3)	36.788	36.485	36.661	35.871	36.405
	(2,3)	45.680	45.331	45.547	44.627	45.281
$p = 1$	(1,1)	7.544	7.399	7.437	7.082	7.217
	(1,2)	17.641	17.444	17.528	17.029	17.298
	(2,2)	26.661	26.420	26.542	25.913	26.301
	(1,3)	32.215	31.946	32.092	31.384	31.970
	(2,3)	39.995	39.688	39.867	39.046	39.608
$p = 2$	(1,1)	6.770	6.631	6.664	6.323	6.447
	(1,2)	15.814	15.631	15.702	15.231	15.474
	(2,2)	23.879	23.657	23.760	23.173	23.522
	(1,3)	28.839	28.594	28.717	28.057	28.471
	(2,3)	35.782	35.503	35.654	34.893	35.397
SUS304	(1,1)	5.410	5.278	5.300	4.945	5.071
	(1,2)	12.657	12.495	12.539	12.054	12.301
	(2,2)	19.135	18.947	19.012	18.407	18.760
	(1,3)	23.126	22.920	22.908	22.320	22.738
	(2,3)	28.715	28.487	28.581	27.803	28.310

Le tableau V.3 présente les fréquences naturelles d'une plaque FG Si₃N₄/SUS304 dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour des grandes valeurs du facteur de puissance p et différentes charges thermiques. On remarque que les fréquences diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel p et la température entre la surface supérieure et inférieure de la plaque, ce qui représente l'effet des charges thermiques. Cela est prévu car une grande valeur de l'indice matériel p signifie que la plaque est riche en métal ce qui mène à la diminution de la rigidité.

Tableau V. 3: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG (Si₃N₄/SUS304) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans un champ de température non linéaire Mode (1, 1).

Charges thermiques $T_0 = 300 (K)$, $b = a = 0.2$, $h = 0.025$		$T_b = 300 (K)$ $T_t = 300 (K)$	$T_b = 300 (K)$ $T_t = 400 (K)$	$T_b = 300 (K)$ $T_t = 600 (K)$
Si ₃ N ₄	TPT	12.506	12.306	11.886
	SPT	12.507	12.307	11.887
	HPT	12.507	12.307	11.887
	EPT	12.509	12.309	11.889
$p = 5$	TPT	6.151	6.014	5.703
	SPT	6.151	6.015	5.704
	HPT	6.151	6.015	5.704
	EPT	6.152	6.016	5.705
$p = 10$	TPT	5.862	5.725	5.405
	SPT	5.862	5.725	5.405
	HPT	5.862	5.725	5.405
	EPT	5.863	5.723	5.407
$p = 20$	TPT	5.671	5.532	5.203
	SPT	5.671	5.532	5.203
	HPT	5.671	5.532	5.203
	EPT	5.672	5.534	5.204
$p = 40$	TPT	5.552	5.414	5.076
	SPT	5.552	5.414	5.076
	HPT	5.552	5.414	5.076
	EPT	5.553	5.416	5.077
SUS304	TPT	5.410	5.273	4.926
	SPT	5.410	5.273	4.926
	HPT	5.410	5.273	4.926
	EPT	5.411	5.274	4.927

Les fréquences naturelles non dimensionnelles qui se suivent sont calculées en considérant :

$$\bar{\omega} = \omega(b^2 / \pi^2) [I_0 / D_0]^{1/2}$$

Où :

$$I_0 = \rho h \text{ et } D_0 = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$$

Il faut noter que ρ , ν et E sont choisis pour le SUS304 à $T_0 = 300 (K)$ dans le cas d'une plaque FG Si₃N₄/SUS304, et ils sont choisis pour le Ti-6Al-4V à $T_0 = 300 (K)$ dans le cas d'une plaque FG ZrO₂/Ti-6Al-4V .

Dans les tableaux V. 4 et V. 5, on présente les caractéristiques vibratoires des plaques isotropes et FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$ et $Si_3N_4/SUS304$) dans quatre champs thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal.

Les fréquences calculées pour les plaques en céramique sont supérieures à celles des plaques en métal, puis diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel p

Tableau V. 4: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans différents champ de température. ($a/h=10$, $b/a=0.2$).

Conditions thermiques	p	MODES			
		(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)
Température uniforme $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	ZrO_2	2.489	6.386	9.966	12.211
	$p = 0.5$	2.219	5.593	8.697	10.645
	$p = 1$	2.119	5.286	9.966	10.026
	$p = 2$	2.043	5.037	7.787	9.509
	Ti-6Al-4V	1.833	4.435	6.832	8.334
Température linéaire $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	ZrO_2	2.460	6.596	10.267	12.568
	$p = 0.5$	2.284	5.722	8.888	10.875
	$p = 1$	2.166	5.386	8.350	10.210
	$p = 2$	2.077	5.117	7.911	9.661
	Ti-6Al-4V	1.853	4.491	6.920	8.444
Température non linéaire $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	ZrO_2	2.742	6.735	10.409	12.715
	$p = 0.5$	2.390	5.839	9.017	11.013
	$p = 1$	2.251	5.482	8.457	10.325
	$p = 2$	2.140	5.189	7.993	9.750
	Ti-6Al-4V	1.889	4.534	6.969	8.497
Température sinusoïdale $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	ZrO_2	2.795	6.808	10.504	12.822
	$p = 0.5$	2.403	5.856	9.040	11.039
	$p = 1$	2.256	5.489	8.468	10.337
	$p = 2$	2.142	5.193	7.998	9.757
	Ti-6Al-4V	1.891	4.538	6.975	8.504

Tableau V.5: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel p dans différents champ de température. ($a/h=10$, $b/a=0.2$).

Conditions thermiques	p	MODES			
		(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)
Température uniforme $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	Si_3N_4	3.206	9.152	14.559	17.944
	$p = 0.5$	1.849	5.917	9.570	11.853
	$p = 1$	1.478	5.035	8.201	10.177
	$p = 2$	1.222	4.407	7.213	8.961
	SUS304	0.615	3.233	5.431	6.797
Température linéaire $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	Si_3N_4	3.441	9.495	15.019	18.477
	$p = 0.5$	2.108	6.311	10.114	12.492
	$p = 1$	1.739	5.439	8.768	10.848
	$p = 2$	1.475	4.804	7.779	9.634
	SUS304	0.879	3.579	5.926	7.389
Température non linéaire $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	Si_3N_4	3.911	9.939	15.472	18.939
	$p = 0.5$	2.619	6.775	10.587	12.974
	$p = 1$	2.259	5.901	9.237	11.326
	$p = 2$	1.992	5.254	8.235	10.099
	SUS304	1.465	4.034	6.381	7.852
Température sinusoïdale $T_b = 300 (K)$, $T_t = 800 (K)$	Si_3N_4	4.060	10.113	15.675	19.162
	$p = 0.5$	2.237	6.906	10.736	13.137
	$p = 1$	2.370	6.023	9.375	11.475
	$p = 2$	2.101	5.372	8.369	10.246
	SUS304	1.578	4.156	6.522	8.006

Les tableaux V. 6 et V. 7 présentent Les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$. Deux conditions thermiques sont considérés : uniforme et linéaire.

L'effet de l'indice matériel p , le rapport a/b , et le rapport h/b sur les fréquences peut être observé. Les fréquences diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel p

Tableau V. 6: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température soumise à un champ de température uniforme ($T_b = 300 (K)$, $T_t = 400 (K)$).

h/b	a/b	p	Mode				
			(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
0.05	0.5	1	4.209	8.537	24.755	15.391	31.338
		2	3.512	7.462	22.055	13.639	27.966
		5	2.939	6.599	19.896	12.237	25.269
		10	2.616	6.159	18.856	11.549	23.981
	1	1	2.134	6.188	10.106	12.662	16.417
		2	1.865	5.514	9.031	11.324	14.692
		5	1.649	4.974	8.171	10.253	13.310
		10	1.539	4.714	7.762	9.748	12.662
0.1	0.5	1	6.188	10.106	24.853	16.417	30.628
		2	5.513	9.031	22.252	14.692	27.423
		5	4.974	8.171	20.167	13.310	24.853
		10	4.714	7.763	19.206	12.662	23.676
	1	1	2.526	6.213	9.599	11.722	14.733
		2	2.257	5.563	8.594	10.492	13.183
		5	2.042	5.042	7.787	9.504	11.937
		10	1.941	4.802	7.425	9.069	11.393
0.2	0.5	1	6.213	9.599	21.121	14.733	25.256
		2	5.563	8.594	18.883	13.183	22.569
		5	5.042	7.788	17.081	11.937	20.401
		10	4.802	7.425	16.318	11.390	19.495
	1	1	2.399	5.280	7.647	9.043	10.940
		2	2.149	4.720	6.829	8.070	9.756
		5	1.946	4.270	6.168	7.283	8.796
		10	1.856	4.078	5.898	6.966	8.423

Tableau V. 7: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) dont les propriétés matérielles dépendent de la température soumise à un champ de température linéaire ($T_b = 300 (K)$, $T_t = 400 (K)$).

h/b	a/b	p	Mode				
			(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
0.05	0.5	1	4.338	8.661	24.936	15.535	31.545
		2	3.641	7.579	22.219	13.771	28.153
		5	3.069	6.710	20.046	12.361	25.441
		10	2.751	6.270	19.001	11.671	24.149
	1	1	2.165	6.234	10.168	12.734	16.506
		2	1.895	5.558	9.086	11.388	14.770
		5	1.678	5.012	8.220	10.311	13.381
		10	1.567	4.750	7.811	9.805	12.731
0.1	0.5	1	6.234	10.168	24.979	16.506	30.779
		2	5.554	9.086	22.363	14.770	27.556
		5	5.012	8.220	20.266	13.381	24.971
		10	4.750	7.811	19.302	12.736	23.795
	1	1	2.542	6.245	9.646	11.777	14.802
		2	2.271	5.591	8.635	10.541	13.243
		5	2.055	5.066	7.824	9.548	11.990
		10	1.953	4.827	7.460	9.111	11.446
0.2	0.5	1	6.245	9.646	21.220	14.802	25.375
		2	5.591	8.635	18.969	13.243	26.671
		5	5.066	7.824	17.156	11.990	20.491
		10	4.282	7.4 58	16.406	11.439	19.601
	1	1	2.412	5.305	7.683	9.085	10.990
		2	2.159	4.742	6.860	8.107	9.800
		5	1.956	4.289	6.195	7.315	8.834
		10	1.865	4.097	5.912	6.993	8.533

Les figures V.6 et V.7 présentent La distribution de la température à travers l'épaisseur d'une plaque FG. Pour les plaques homogènes, la distribution de la température est la même. La température à une point quelconque à travers l'épaisseur d'une plaque entièrement en céramique ou en métal est toujours supérieure à celle d'une plaque FG. Contrairement à la distribution linéaire de la température pour les plaques homogènes, la variation de la température à travers l'épaisseur est non linéaire pour les plaques FG.

La figure V.7 présente la distribution de la température à travers l'épaisseur d'une plaque FG sous des conditions thermiques linéaire, non linéaire et sinusoïdale. La surface supérieure est soumise à $T_t = 500 (K)$ et la surface inférieure est soumise à $T_b = 300 (K)$. On observe

que les valeurs de la température à travers l'épaisseur sont les plus petites dans le cas d'un chargement thermique sinusoïdal. Le chargement thermique linéaire engendre une grande valeur de La température comparativement au chargement non linéaire. On remarque aussi

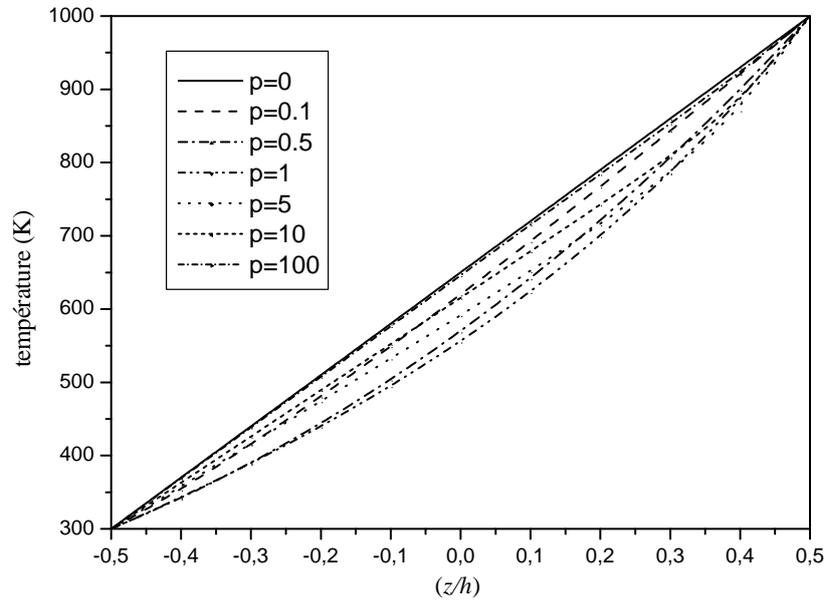


Figure V.6: Variation du champ thermique non linéaire en fonction de z/h d'une plaque FG pour différentes valeurs de l'indice matériel p

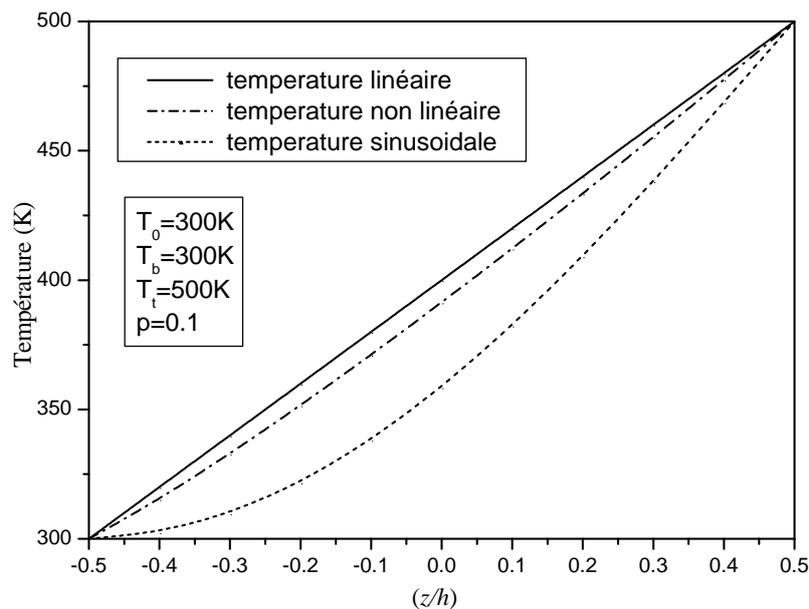


Figure V.7: Variation du champ thermique linéaire, non linéaire et sinusoïdal en fonction de z/h d'une plaque FG pour différentes valeurs de l'indice matériel p

que le graphes sont presque identiques pour les conditions thermiques linéaire et non linéaire.

Les figures V.8 à V.11 présentent les quatre premières fréquences d'une plaque FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ simplement appuyée dans des champs thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal. On observe que les fréquences diminuent avec l'augmentation de la température et cela est du à la diminution du module de Young avec l'augmentation de la température. Les fréquences diminuent rapidement dans les modes supérieurs contrairement aux modes inférieurs. La diminution des fréquences dans les modes élevés est importante par rapport à celle des modes inférieurs. La différence entre deux modes élevés consécutifs est inférieure à celle du cas de deux modes inférieurs successifs, et cela à la même température. Il est évident que l'effet de la distribution de la température dans le cas d'un champ thermique uniforme est plus significatif par rapport aux autres conditions thermiques, cela peut être expliqué par le fait que la diminution de la fréquence sous les chargements thermiques linéaire, non linéaire et sinusoïdale est presque identique, alors que la diminution de la fréquence est importante dans le cas d'un chargement thermique uniforme.

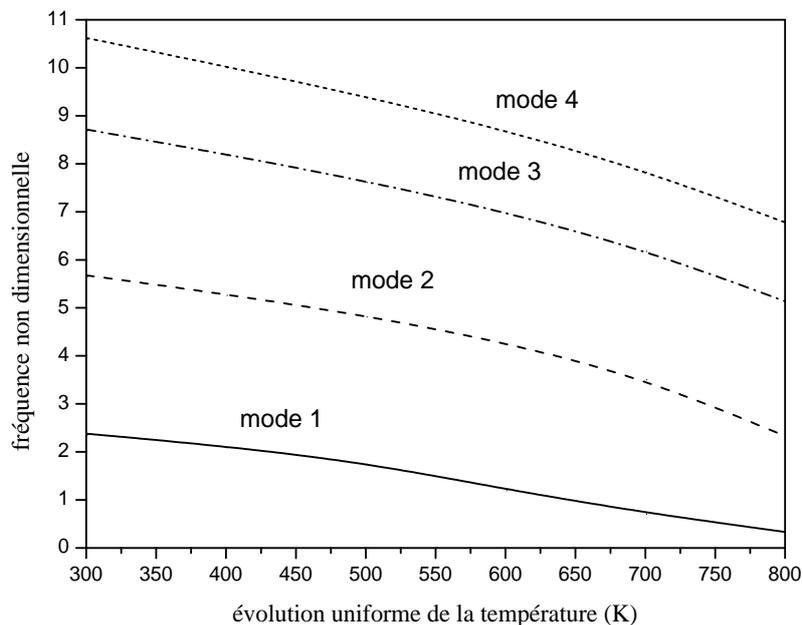


Figure V.8: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution uniforme de la température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$, $a=0.2$, $p=1$.

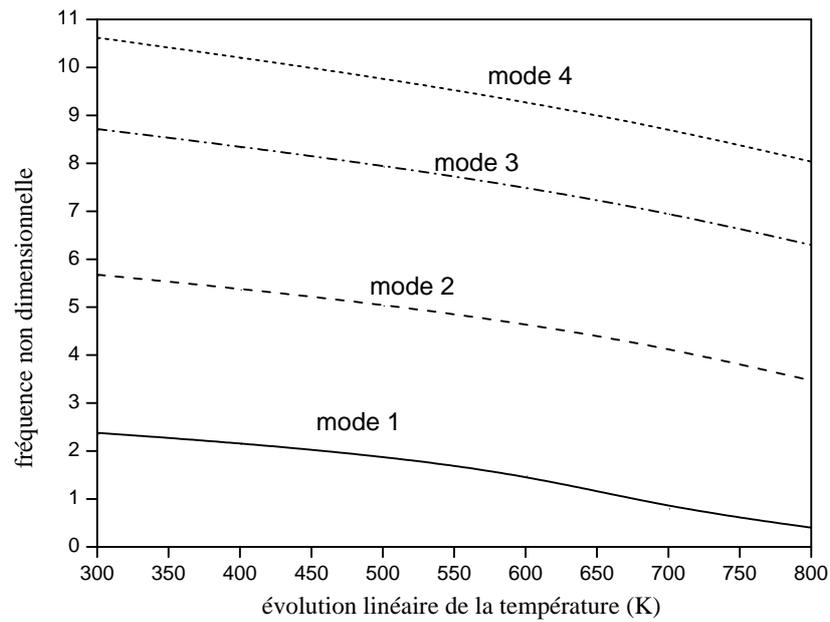


Figure V.9: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution linéaire de la température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$.

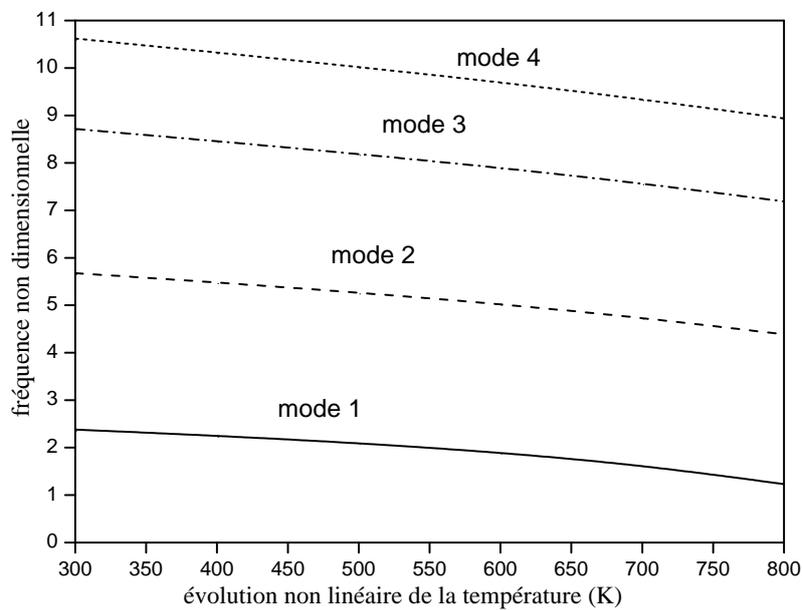


Figure V.10: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution non linéaire de la température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$.

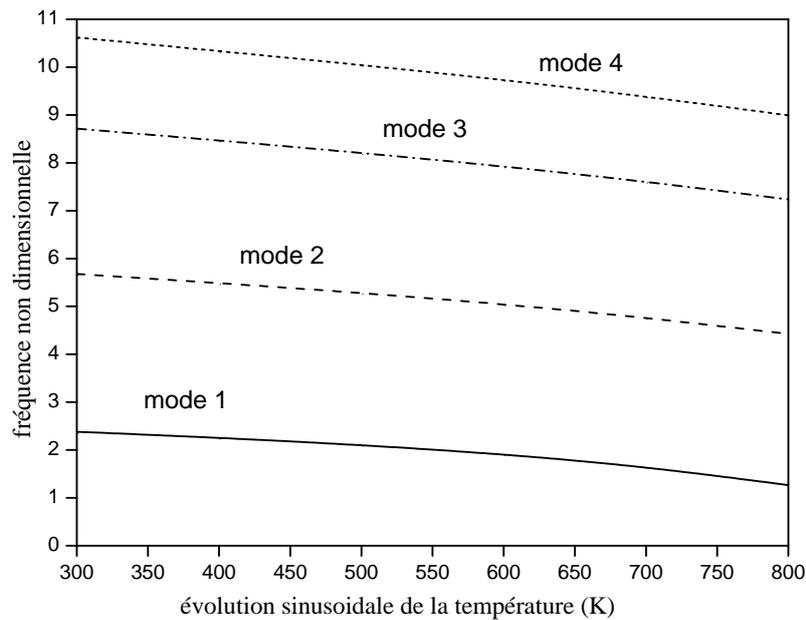


Figure V.11: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'une évolution sinusoidale de température d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=1$.

Les figures V.12 à V.15 montrent la variation des charges thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoidale en fonction du rapport b/a d'une plaque FG $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ simplement appuyée. On observe que les fréquences augmentent avec l'augmentation du rapport b/a quand $b/a \leq 2$. On remarque aussi que les fréquences diminuent avec l'augmentation de la température, cela est dû à la diminution du module de Young avec l'augmentation de la température. On remarque aussi que la diminution des fréquences dans le cas où $b/a = 2$ est importante par rapport aux autres rapports b/a quand le rapport $a/h=10$ pour une plaque FG.

Les figures V.16 à V.19 montrent les quatre premières fréquences d'une plaque $Si_3N_4/SUS304$ simplement appuyée dans des champs thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoidal. On observe que les fréquences diminuent avec l'augmentation de la température et cela est dû à la diminution du module de Young avec l'augmentation de la température. On peut observer que l'évolution de la température a un effet considérable sur les modes inférieurs comparativement aux modes élevés. On observe aussi que les plaques FG avec un indice matériel $p=10$ sont plus sensibles à la température comparativement aux plaques FG avec $p=1$.

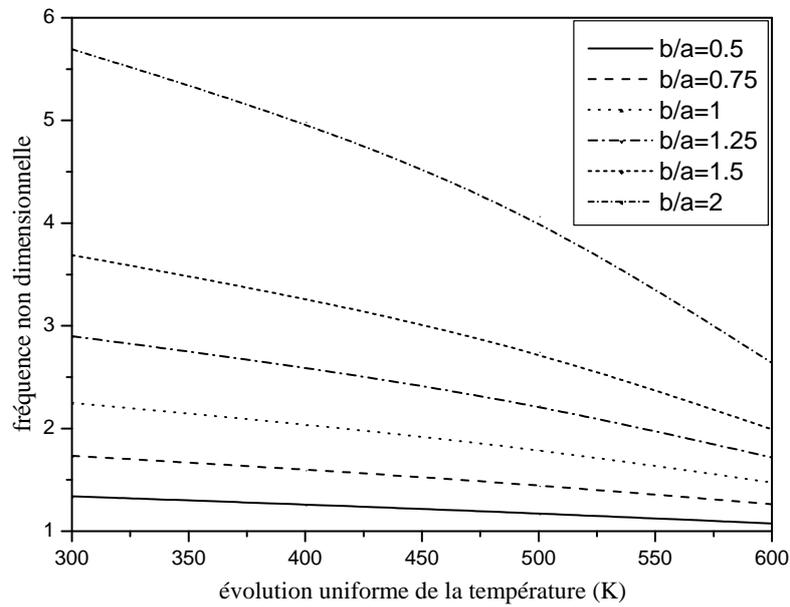


Figure V.12: les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$.

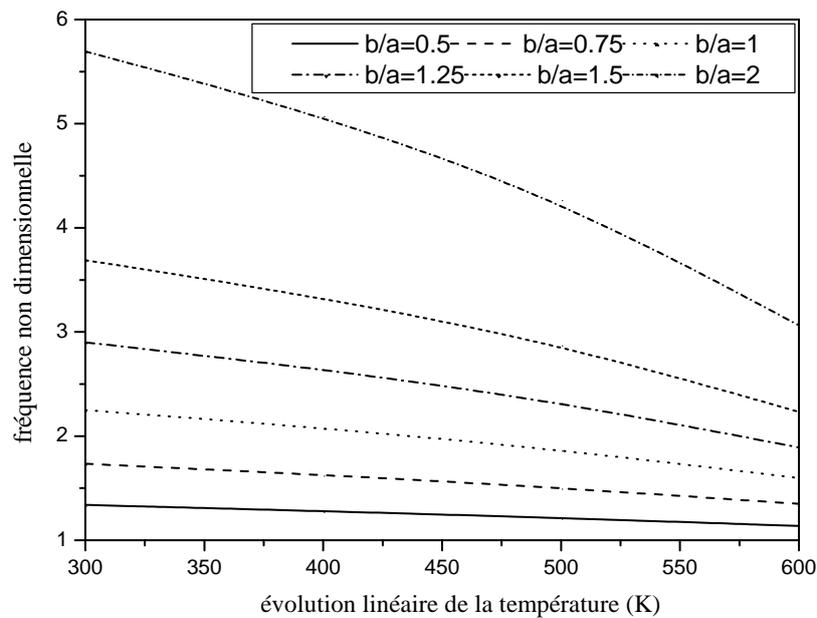


Figure V.13: les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$.

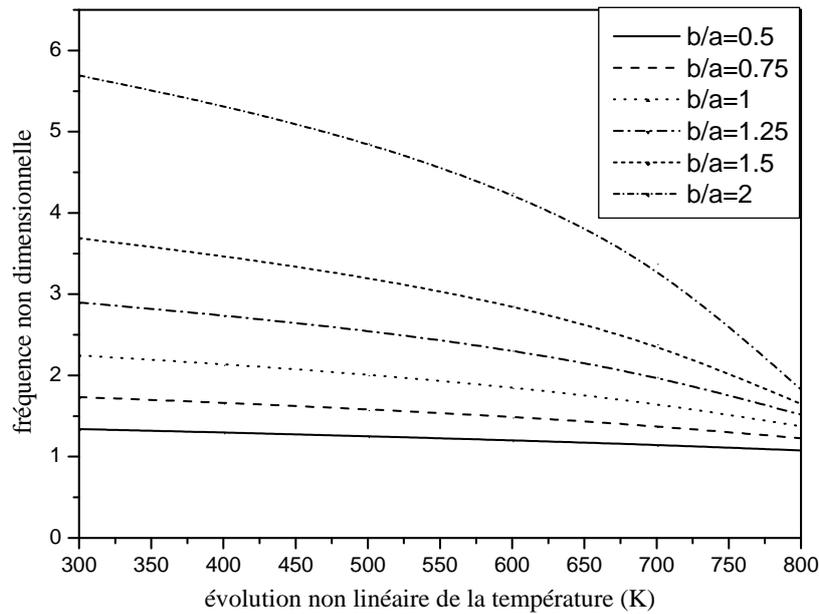


Figure V.14: les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdal pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$.

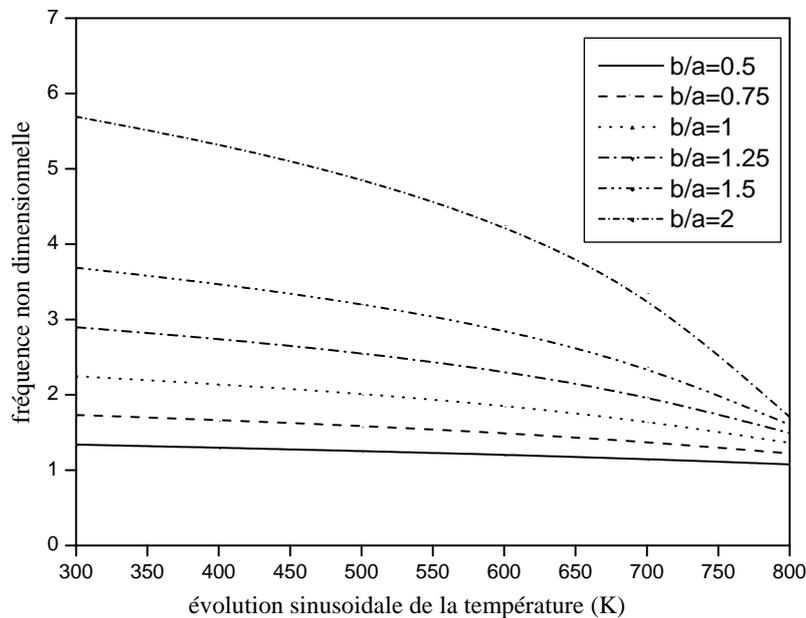


Figure V.15: les fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdal pour différentes valeurs du rapport b/a d'une plaque FG ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$, $p=2$.

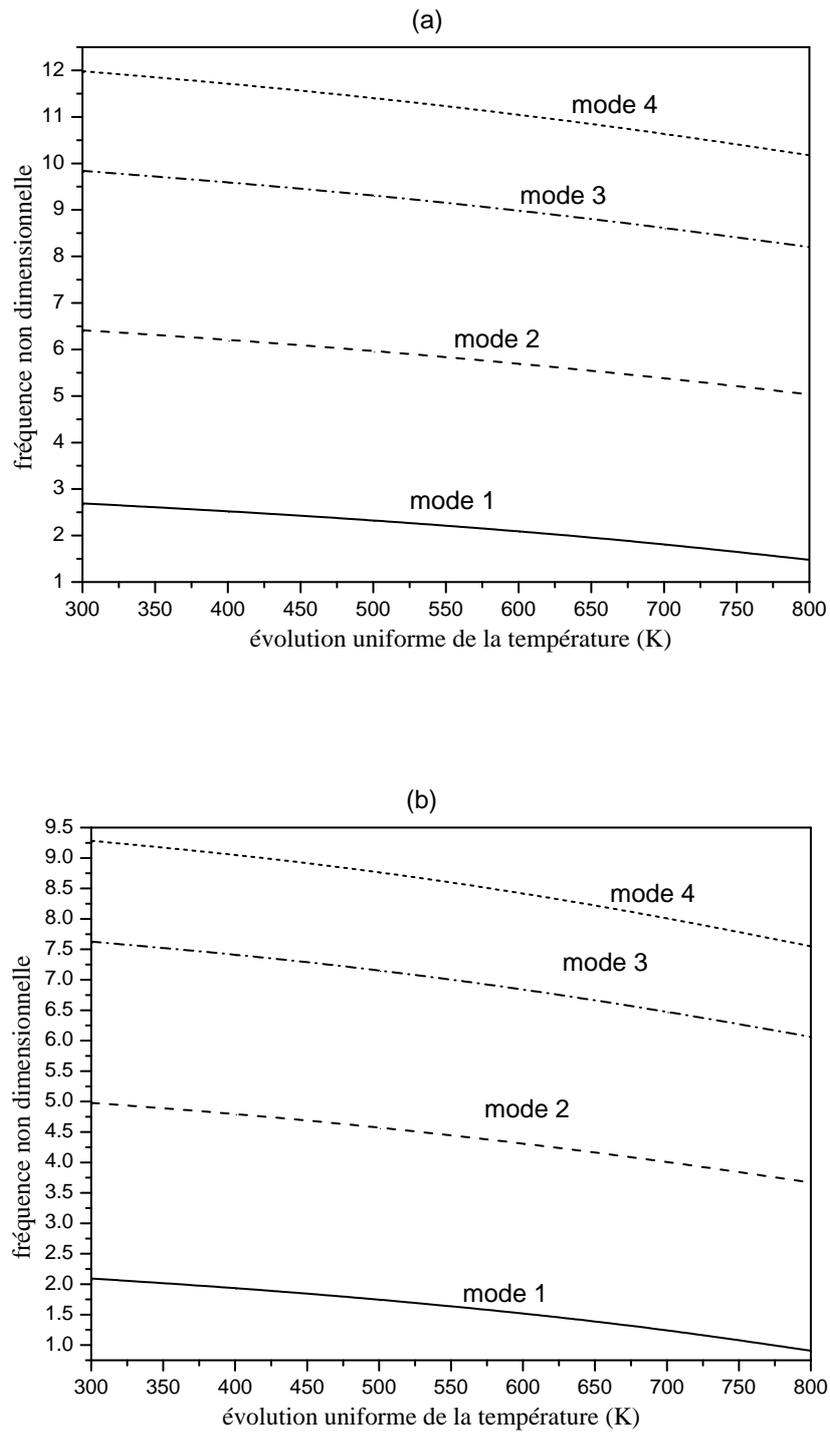


Figure V.16: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$.

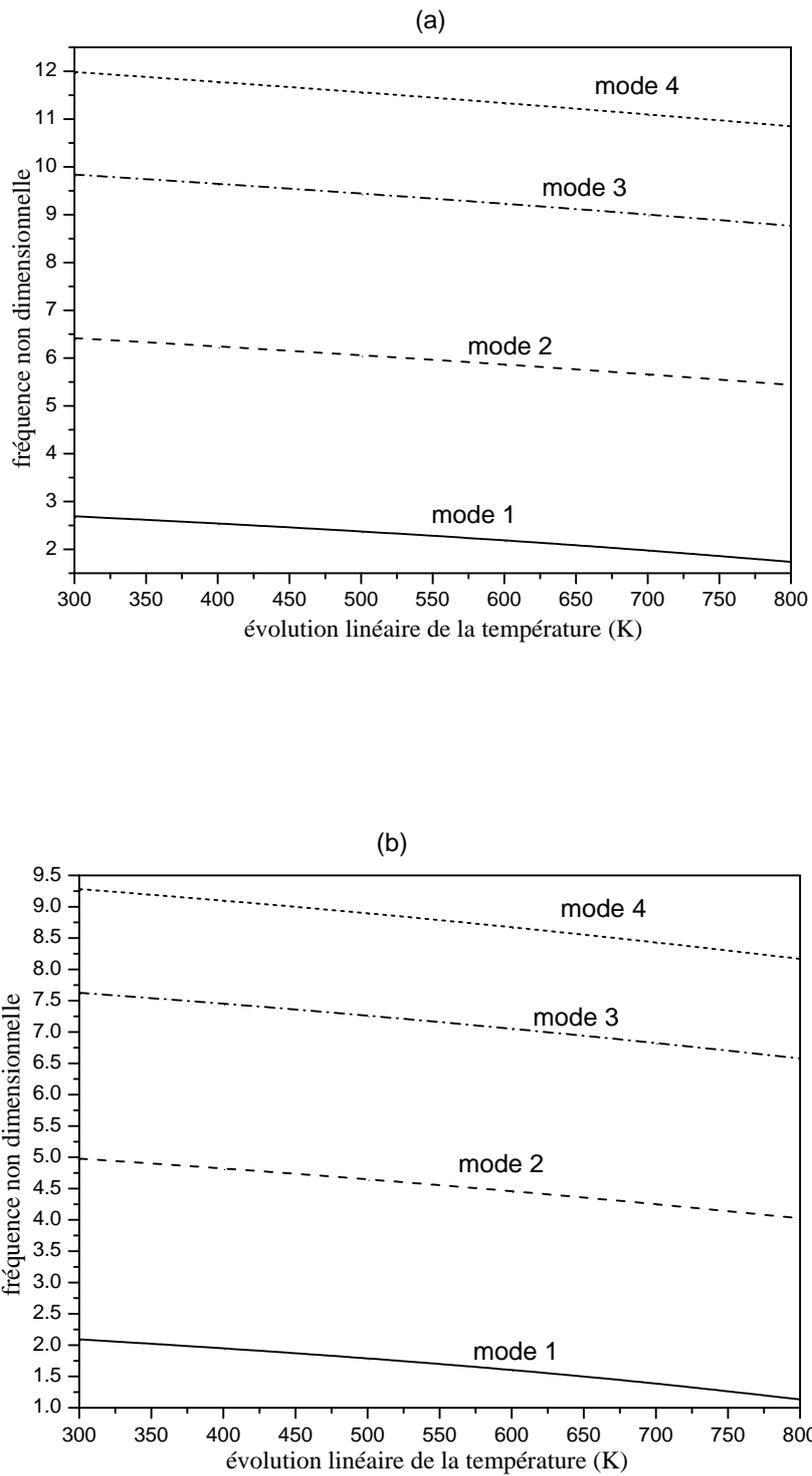


Figure V.17: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$.

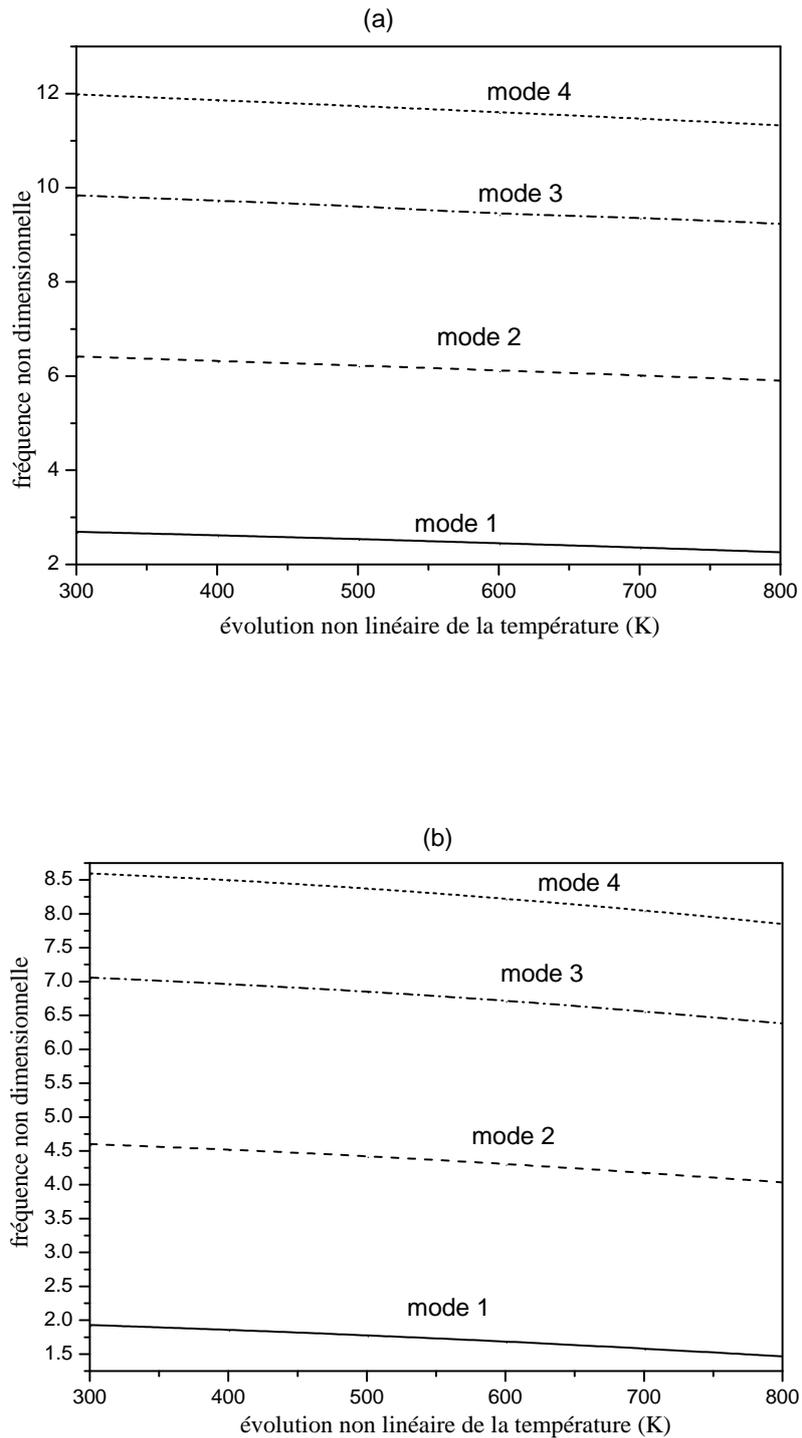


Figure V.18: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température non linéaire d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée avec $a/h=10$ $a=0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$.

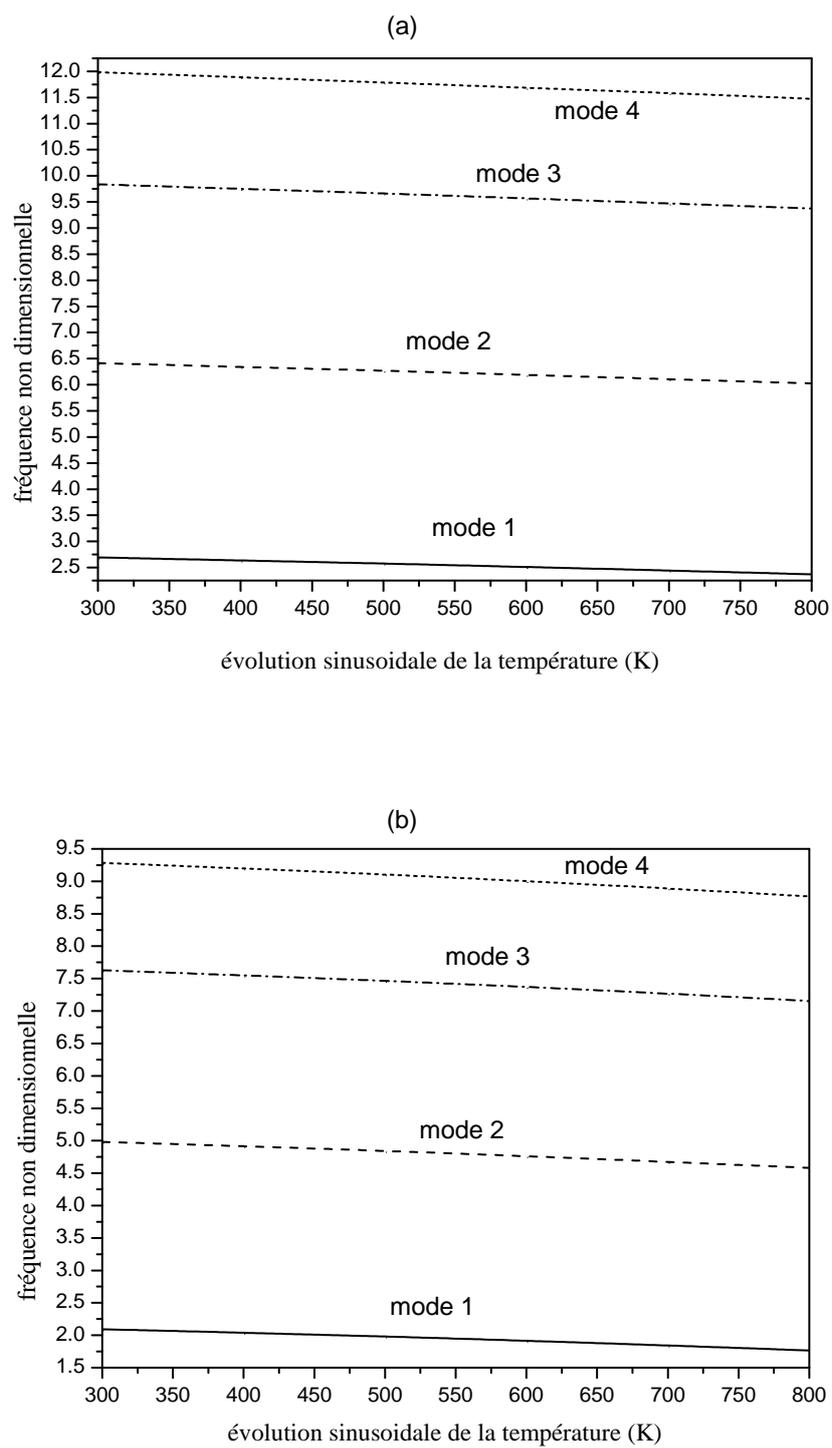


Figure V.19: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdal d'une plaque FG ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée avec $a/h = 10$ $a = 0.2$: (a) $p=1$; (b) $p=10$.

V.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de l'analyse de la vibration libre des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température. La température est supposée constante dans le plan de la plaque. Les propriétés matérielles sont supposées variées à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance. Les conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales sont imposées aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque FG qui est simplement appuyée. Ce chapitre montre l'effet des composantes du matériau, la géométrie de la plaque et les champs de température sur les caractéristiques vibratoire de la plaque FG

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur la détermination des caractéristiques vibratoires des plaques en matériaux à gradient évalué (FGM), nous avons développé une méthode analytique directe en utilisant des théories raffinées (quatre variables) qui détermine les fréquences de la vibration d'une plaque fonctionnellement graduée (FGM) simplement appuyée soumise à des champs de température uniforme, linéaire, non linéaire, et sinusoïdal. Les propriétés matérielles sont supposées dépendantes de la température et varient à travers l'épaisseur selon une distribution de puissance en termes des fractions volumiques des constituants. Comparés aux résultats trouvés dans la littérature, ces théories ont montré leur efficacité comme les autres théories à ordre élevé pour l'étude analytique des plaques FGM épaisses.

Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement vibratoire des plaques tout en étudiant l'évolution de la fréquence, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur les théories d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse de la vibration libre des plaques FG ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température. Pour valider ces théories, nous l'avons comparé avec les autres théories d'ordre élevé de Shahrjerdi et al . , et Huang et Shen.

Les théories proposées ont une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exigent pas de facteur de correction de cisaillement, et donnent une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Conclusion générale

Toutes les études comparatives ont démontrées que les fréquences dues au chargement thermique obtenues en utilisant les présentes théories d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus ou plus) sont en bon accord. Par conséquent, on peut dire que les théories proposées sont précises et simples pour résoudre le problème de la vibration libre des plaques FGM. L'avantage principal de ces théories proposées par rapport aux autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé est qu'elles possèdent moins de variables et moins d'équation d'équilibre, et par conséquent, elles sont beaucoup plus favorables aux formulations mathématiques

Deuxièmement, nous avons donné des exemples illustratifs pour montrer Les effets des différents paramètres comme le facteur de puissance p , les modes de vibration, la géométrie de la plaque, et les champs de température sur les fréquences des plaques FG en utilisant le nouveau modèle de plaque ce qui a permis de dégager plusieurs points :

- Les fréquences sont maximales pour une plaque entièrement en céramique et minimales pour une plaque entièrement en métal, et diminuent graduellement au fur à mesure que l'indice matériel p augmente.
- Les fréquences diminuent avec l'augmentation de la température dans tous les types de chargement thermique.
- Le champ de température uniforme affecte les fréquences d'une façon plus significative par rapport aux autres champs thermiques : linéaire, non linéaire et sinusoïdal.
- Les fréquences des plaques FG avec un indice matériel élevé sont plus sensibles au changement de la température.
- Les fréquences augmente avec l'augmentation du rapport b/a quand $b/a < 2$

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

Conclusion générale

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis les chargements de température.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ait Amar Meziane , 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions“, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **16(3)**, 293 – 318.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **6(2)**, 113-121.
- [Akavci, 2010] Akavci, S. (2010), “Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates”, *Mech. Compos. Mater.*, **46(2)**, 215–226.
- [Ambartsumyan, 1969] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969
- [Aydogdu, 2005] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740–1755
- [Baron, 2008] C. Baron., S. Naili, Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [Benatta, 2008] M.A. Benatta., I. Mechab I., A. Tounsi., E.A. Adda Bedia, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*; 44 (2): 765–773. 2008.
- [Bishop, 1993] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [Boch, 1986] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*; 69 (8):191-192,1986.
- [Bouazza 2009] Bouazza, M, Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Megueni, A. (2009), “Buckling analysis of functionally graded plates with simply supported edges”, *Leonardo Journal of Sciences*, **8**, 21 – 32.

- [Bouderba, 2013] Bouderba, B, Houari, MSA, Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, **14(1)**, 85 – 104.
- [Bourada, 2012] Bourada M, Tounsi A, Houari MSA, Adda Bedia EA. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **14**, 5–33.
- [Bouremana, 2009] M. Bouremana., A. Tounsi., A. Kaci., I. Mechab., Controlling thermal deformation by using composite materials having variable fiber volume fraction. *Materials & Design*; 30(7): 2532-2537, 2009.
- [Chakraborty, 2003] A. Chakraborty., S. Gopalakrishnan.,J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539,2003.
- [Ching et Yen, 2006] H.K. Ching., S.C. Yen, Transient thermoelastic deformation of 2-d functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply, *Compos. Struct*; 73 (4): 381–393, 2006.
- [Cho et Ha, 2001] J. R. Cho., D.Y. Ha, Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196, 2001.
- [Chung et Chi, 2006] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [Chung et Chi, 2006a] Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung:«Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load»,*International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, Issue 13, Pages: 3657-3674, Part I: Analysis, June 2006
- [Chung et Chi, 2006b]. Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, *Int. J; Solids Structures*; 43 (13): 3675-3691, 2006.
- [Delale, 1983] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609 –614, 1983.
- [Fekrar , 2012] Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2012), “Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory”, *Steel and Composite Structures*, **13(1)**, 91 – 107.

- [Fuchiyama et Noda , 2003]
[Grover, 2013] T. Fuchiyama., N. Noda, Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material. *JSAE Rev*; 16 (3):263–8, 1995.
Grover, N., Maiti, D.K., Singh, B.N. (2013), A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates”, *Compos. Struct.*, **95**, 667–675.
- [Huang et Shen 2004] Huang, X., Shen, H. (2004), “Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments”, *International journal of solids and structures*, **41(9-10)**, 2403 – 2427.
- [Javaheri et Eslami, 2002a] R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermoelastic buckling of rectangular plates made of functionally graded materials, *AIAA J*; 40 :162–169,2002.
- [Javaheri et Eslami, 2002b] R. Javaheri., M.R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under in plane compressive loading, *ZAMM*, 82 (4): 277–283, 2002.
- [Javaheri et Eslami , 2002c] R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher-order theory, *J. Therm. Stresses*; 25 (7): 603–625, 2002.
- [Jin, 2002] Z.-H. Jin, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895. 2002.
- [Karama, 2003] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2003), “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Struct.*, **40(6)**, 1525–1546.
- [Kettaf , 2013] Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, **15(4)**, 399-423.
- [Koizumi, 1992] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [Koizumi, 1997] M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. 1997
- [Kokini, 1990] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990,
- [Kashtalyan, 2004] M. Kashtalyan, Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864, 2004.

- [Kim, 2005] Kim, Y. (2005), “Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, **284 (3-5)**, 531 – 549.
- [Kirchhoff, 1950] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [Li, 2009] Li, Q., Iu, V., Kou, K. (2009), “Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment”, *Journal of Sound and Vibration*, **324 (3-5)**, 733 – 750.
- [Liberscu, 1967] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [Lostec, 1997] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, 1997.
- [Mantari, 2012] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C. (2012), “A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates”, *Int. J. Solids Struct.*, **49(1)**, 43–53.
- [Matsunaga, 2009] H. Matsunaga, Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; 90 (1): 76–86, 2009.
- [Mindlin, 1951] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mistler, 1973] R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, 1973.
- [Moya, 1992] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [Na et Kim , 2004] K.-S. Na., J.-H. Kim, 2004, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.
- [Nemat-Alla, 2003] M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by developing two- dimensional functionally graded materials, *Int. J. Solids Struct*; 40 (26): 7339–7356, 2003,

- [Nguyen, 2004] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Nguyen, 2007] T.K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, First order shear deformation plates models for functionally graded materials. *Compos. Struct. Struct*; 83 (1): 25-36, 2008.
- [Okamura, 1991] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [Ootao et Tanigawa, 2004] Y. Ootao.,Y. Tanigawa, Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, *Compos. Struct*; 63 (2) : 139–146, 2004.
- [Pal, 2005] R. Pal, New Models for Effective Young's modulus of particulate composites, *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523. 2005.
- [Park et Kim, 2005] J.-S. Park., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93, 2005.
- [Pradyumna et Bandyopadhyay, 2008] Pradyumna, S., Bandyopadhyay, J.N. (2008), “Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation”, *J. Sound Vib.*, **318(1–2)**, 176–192.
- [Reddy et Cheng, 2001] J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.
- [Reddy, 1984] Reddy, J.N. (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *J. Appl. Mech.*, **51(4)**, 745–752.
- [Reddy, 2000] Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **47(1–3)**, 663–684.
- [Reddy, 2004] Reddy, J.N. (2004), “*Mechanics of laminated composite plates and shells*”, CRC press.
- [Reissner, 1961] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [Reissner, 1945] E Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69, 77, 1945.

- [Ren, 1986] Ren, J.G. (1986), "A new theory of laminated plate", *Compos. Sci. Technol.*, **26(3)**, 225–239.
- [Reuter, 1997] T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302,1997.
- [Sankar et Tzeng, 2002] B. V. Sankar., J.T. Tzeng, Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232, 2002.
- [Sankar, 2001] B. V. Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696, 2001.
- [Shahrjerdi, 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Majid, D.L.A. (2011), "Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **25 (9)**, 2195 – 2209.
- [Sladek, 2003] J. Sladek., V. Sladek., Ch. Zhang, Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504, 2003.
- [Soldatos, 1992] Soldatos, K.P. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mech.*, **94(3)**, 195–220.
- [Steffens, 1990] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [Suresh, 1998] Suresh, S., and Mortensen, A., *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications, London,1998.
- [Takahashi, 1990] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.

- [Tarn, 2001] J.-Q. Tarn, Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–8206, 2001.
- [Touratier, 1991] M. Touratier. « An Efficient Standard Plate Theory ». *Engng Sci*, Volume 29, pages: 901-916, 1991.
- [Van der Biest, 2004] O. Van der Biest., M. Gasik., J. Vleugels eds, Functionally graded materials VIII (FGM 2004), Proceedings of the eighth international symposium on multifunctional and functionally graded materials, materials science forum, vols. 492–493, trans tech publications ltd, uetikon-Zuerich, Switzerland.
- [Vel et Batra, 2002] S. S.Vel., R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433, 2002.
- [Whitney, 1973] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [Woo et Meguid, 2001] J. Woo., S.A. Meguid, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.
- [Xiang, 2009] Xiang, S., Wang, K.M., Ai, Y.T., Sha, Y.D., Shi, H. (2009), “Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories”, *Compos. Struct.*, **91(1)**, 31–37.
- [Yaghoobi, 2013a] Yaghoobi, H., Torabi, M., (2013a), “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 8324-8340.
- [Yaghoobi, 2013b] Yaghoobi, H., Torabi, M., (2013b), “An analytical approach to large amplitude vibration and post-buckling of functionally graded beams rest on non-linear elastic foundation”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **51(1)**, 39-52.
- [Yang et Shen , 2003] J. Yang, J., H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, 2003.
- [Yang, 2005] J. Yang, J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8):1165 1175, 2005.

- [Yin, 2004] H. M. Yin., Z.L. Sun., G.H. Paulino, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Mater*; 52 (12):3535–3543, 2004.
- [Zenkour et Sobhy, 2010] A.M. Zenkour., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.
- [Zenkour, 2005a] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1-Deflections and stresses, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5224–5242, 2005.
- [Zenkour, 2005b] A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-Buckling and free vibration, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5243–5258, 2005.
- [Zhao, 2009] X. Zhao., YY. Lee., K.M. Liew, Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos Struct*; 90 (2): 161–71, 2009.
- [Zhong, 2007] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [Zuiker, 1995] J. R. Zuiker, Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations,” *Composites Eng*, 5 (7): 807–819, 1995.