RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT 3éme CYCLE
Spécialité : **Génie Civil**
Option : **Structures**
Présentée par

MOUFFOKI Abderrahmane

Sujet de thèse

Etude du comportement mécanique des structures FGM à l'échelle nano-métrique.

Soutenu le devant le Jury composé de :

Mr. **A. BENACHOUR**	Professeur	UDL-SBA	**Président**
Mr. **M.S.A. HOUARI**	MCA	UMS-MASCARA	**Directeur de thèse**
Mr. **A. TOUNSI**	Professeur	UDL-SBA	**Co-Directeur de thèse**
Mr. **S. BENYOUCEF**	Professeur	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. **M. BOURADA**	MCA	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. A. **KACI**	MCA	U.SAIDA	**Examinateur**

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Le présent travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbes.

Je suis très heureuse de témoigner ma profonde estime à mon encadreur Monsieur le professeur **ADDA BEDIA EL ABASS** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, ses aides et son sens de la motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont été très utile pour mener à terme de ce travail.
Et par la même occasion, je vous souhaite cher Professeur un prompt rétablissement et une longue vie pleine de bonheur et de prospérité.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieurs le professeur **Abdelouahed TOUNSI** et **M.S.A HOUARI** qui ont apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. la disponibilité et les conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés. Je tiens à exprimer avec fierté ma gratitude d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs,**S. BENYOUCEF**,**A. BENACHOUR**, **A. KACI** et **M.BOURADA** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés et tous mes enseignants de la faculté des Sciences et technologie de l'Université de Mascara.

TABLE DES MATIERES

ملخـــــص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

INTRODUCTION GENERALE……..…….... 1

Chapitre I : généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1. Introduction……. 4

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés …… 6

I.3. Les Techniques de fabrication des matériaux fonctionnels FGMs …… 8

I.3.1 Coulage en bande (Tape Casting) …..……... 9

I.3.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)……... 10

I.3.3 Dépôt par Electrophorèse…….……... 10

I.3.4 Compaction sèche des Poudres …..…...……... 11

I.3.5 Projection thermique……..……...……... 11

I.3.6 C. V. D. et P. V. D.....…….…….……... 11

I.3.7 Frittage et Infiltration…….....……...……... 11

I.3.8 Frittage Laser Différentiel…….……... 11

I.4. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés …… 12

I.4.1. Application des FGM dans le domaine du Génie civil ……...…… 13

I.5. Les propriétés matérielles effectives des matériaux FGM……...…… 14

I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM…….....…….. 15

I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM…….....…….. 15

I.5.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM…….....…….. 17

I.6. Les modèles de poutre pour les matériaux à gradient de propriétés …… 18

I.6.1. Le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT) ……..….. 18

I.6.2. Le modèle de poutre Timoshenko (TBT) …….....…….. 20

I.6.3. Le modèle de poutre basé sur la théorie du troisième ordre …….. 21
de la déformation de cisaillement (TSDT)

I.7. Conclusion…….. 23

Chapitre II : Revue des recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés

II.1. Introduction……. 24
II.2. Concept et historique des matériaux fonctionnellement gradués …… 24
II.3. Revue des travaux sur les structures FGM à l'échelle nanométrique ……. 26
II.4. Théorie d'élasticité non-local ……..……..... 27
II.5. Modèles de poutre non local ……..……..... 30
II.5.1. Modèles non local basés sur l'EBT ……..……...…… 30
II.5.2. Modèles non local basés sur la TBT ……..…… 31
II.5.3. Modèles non local basés sur la RBT ……..…… 32
II.5.4. Modèles non local basés sur les HSDTs ……..…… 32
II.6. De la macro à la nano échelle ……..…….. 33
II.7. Conclusion……...…….. 33

CHAPITRE III: Analyse de la vibration libre des nanopoutres sous un chargement hygro-thermique

III.1. Introduction……..... 34
III.2. Formulation mathématique …… 34
III.2.1. Modèle non-local d'une poutre P-FGM ……..... 34
III.2.2. Propriétés des matériaux……..... 35
III.2.3. Relations cinématiques ……..... 36
III.2.4. Équations de mouvement……..... 37
III.2.5. Théorie d'élasticité non-local d'une nano-poutre FGM……..... 39
III.3. Solution analytique ……..……..…….. 42
III.4. Divers environnements hygro-thermiques …….. 43
III.4.1. Changement uniforme d'humidité et de température……..…….. 43
III.4.2. Changement linéaire d'humidité et de température ……..……..…….. 43
III.4.3. Changement Sinusoïdal d'humidité et de température……..…..…….. 43
III.5. Conclusion …… 44

Chapitre IV: Résultats et discussions de l'analyse des vibrations libres sous chargement hygrothermique de la nano poutre en FGM

IV.1. Introduction……..... 45

IV.2. Validation analytique de la nouvelle théorie ..……..…….. 45

IV.3. Résultats numériques et discussions …… 46

IV.4. Conclusion …….. 58

CONCLUSION GENERALE…… 59

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES……. 61

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

Tableau I.1 Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal……..... 6

Tableau I.2 Vue d'ensemble des méthodes de fabrication des FGMs……... 9

CHAPITRE III

Tableau III.1 Propriétés dépendantes de la température des constituants .……..... 36

CHAPITRE IV

Tableau IV.1 Comparaison de la vibration libre sous une température linéaire……. 46

Tableau IV.2 Propriétés dépendantes de la température des constituants…….....… 47

Tableau IV.3 Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une poutre nano-FGM simplement appuyée sous chargement hygro-thermique uniforme pour différentes théories de poutres ($K_w = 0, K_p = 0, L/h = 20$)..... 49

Tableau IV.4 Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une poutre nano-FGM simplement appuyée sous chargement hygro-thermique linéaire pour différentes théories de poutres($K_w = 0, K_p = 0, L/h = 20$)..... 50

Tableau IV.5 Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une poutre nano-FGM simplement appuyée sous chargement hygro-thermique sinusoïdal pour différentes théories de poutres ($K_w = 0, K_p = 0, L/h = 20$)..... 51

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1 Variation des propriétés dans les composites conventionnels et les FGMs.… 5

Figure I.2 Gradation de la microstructure avec des constituants céramométalliques (i) microstructure doucement graduée (ii) vue agrandie et (iii) FGM céramique métal ……..... 5

Figure I.3 (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés..... 7

Figure I.4 Concept des matériaux à gradient de propriétés……...…….. 7

Figure I.5 Protection thermique (barrière thermique) ……...…….. 8

Figure I.6 Principe de la méthode coulage en bande ……..……..... 10

Figure I.7 Disposition du procédé frittage laser différentiel…… 12

Figure I.8 Applications des FGM dans divers domaines……....……..... 12

Figure I.9 Géométrie d'une poutre en FGM…… 14

Figure I.10 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM…… 15

Figure I.11 Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM…… 16

Figure I.12 Variation du module de Young dans une plaque E-FGM……..…… 17

Figure I.13 Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).…… 19

Figure I.14 Figure I-15 : Illustration du modèle de la poutre de Timoshenko (TBT).…... 20

Figure I.15 Illustration d'une poutre d'ordre élevé…….. 22

CHAPITRE II

Figure II.1 Variation de la fraction volumique des matériaux constituants de la FGM…. 25

Figure II.2 Une microstructure de squelette d'un matériau FGM……..…..... 25

CHAPITRE III

Figure III.1 Géométrie d'une nanopoutre FGM reposant sur une fondation élastique 36

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE IV

Figure IV.1 Influence de l'humidité et le paramètre non local sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM simplement appuyée pour diverses charges hygrothermiques ($p=1,\ L/h=20, K_w=0, K_p=0, \Delta T=40(\mathrm{K})$) …. 52

Figure IV.2 Influence de l'humidité sur la fréquence adimensionnelle de la nano poutre FGM simplement appuyée par rapport aux différentes élévations de température ($p=1, L/h=20, K_w=0, K_p=0$))..... 53

Figure IV.3 Influence de la fondation élastique sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM simplement appuyée en fonction du changement de température pour les environnements thermiques $\Delta C=0$ et hygrothermiques, $\Delta C=2$ ($p=1, L/h=20, \mu=2(\mathrm{nm})^2$)..... 54

Figure IV.4 L'effet de l'indice de matériel sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM pour des environnements thermiques, $\Delta C=0$ et hygrothermiques, $\Delta C=2$ ($L/h=20, \mu=2(\mathrm{nm})^2, \Delta T=40(\mathrm{K})$)..... 55

Figure IV.5 L'effet du rapport longueur/épaisseur sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM pour diverses augmentations d'humidité ($p=1, \mu=2(\mathrm{nm})^2$)). 56

Figure IV.6 L'effet des paramètres de la fondation élastique sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM pour diverses augmentations d'humidité ($p=1, L/h=20, \mu=2(\mathrm{nm})^2, \Delta T=40(\mathrm{K})$)..... 57

LISTE DES NOTATIONS

$E\ (z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\boldsymbol{\upsilon\ (z)}$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$\boldsymbol{\upsilon}$	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du métal
$\boldsymbol{V\ (z)}$	Fraction volumique
$\lambda(z), \mu(z)$	Coefficients de Lamé
k	Paramètre du matériau
L	Longueur de la poutre
b	Largeur de la poutre
h	Épaisseur de la poutre
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
σ_x, σ_y , σ_z	Contraintes normales
τ_{xz} , τ_{yz}, τ_{xy}	Contraintes de cisaillement
S^s_{xz}, S^s_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i, j, l et m	Sont des nombres naturels.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie potentielle
δT	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}$, $\delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$\boldsymbol{A_{ij}}$	Termes de rigidité en membrane
$\boldsymbol{B_{ij}}$	Termes de rigidité de couplage
$\boldsymbol{D_{ij}}$	Termes de rigidité de flexion
$\boldsymbol{A_{ij}^s}$	Termes de rigidité de la matrice de cisaillement
$\boldsymbol{B_{ij}^s}$	Termes de rigidité de la matrice de cisaillement
$\boldsymbol{D_{ij}^s}$	Termes de rigidité de la matrice de cisaillement
$\boldsymbol{H_{ij}^s}$	Termes de rigidité de la matrice de cisaillement
N^T	la forces appliquée due au changent de la température
N^H	la forces appliquée due au changent de la l'humidité
$\mu=(e_0 a)^2$	paramétre de l'effet non-locale
(I_i, J_i, K_i, J_i^s)	Inerties de masse
CBT	Classical beam theory
TBT	Timoshenko beam theory
HSDBT	Higher order shear deformation beam theory
$\{\ \}$	Vecteur colonne
$[\ ]$	Matrice

Introduction générale

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L’emploi des nano structures en matériaux composites avancés dans les applications industrielles n'a cessée d'augmenter depuis plusieurs années, et cela dans toutes les industries : automobile, aéronautique, spatiale, marine, civil, ferroviaire, médicale, nucléaire ou encore sportive.

Les performances en termes de gain de masse, des propriétés mécaniques et des techniques de fabrication offrent de nombreuses possibilités d’utilisation, parfois très complexes.

Dans les structures classiques, des couches homogènes ou en matériaux composites sont collées l’une à l’autre pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustique, …etc.) de la structure.

Toutefois, les propriétés des structures en matériaux composites classiques en statique, en fatigue et en vibration peuvent se dégrader sévèrement par la présence des dommages dus à la discontinuité des propriétés matérielles à travers l’interface des couches, provoquant des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques et thermiques, spécialement dans des environnements humide et thermique, la différence relative entre les coefficients de dilatation thermique, dilatation hygroscopique des deux matériaux de base constituant le matériau composite provoque des contraintes résiduelles importantes qui peuvent conduire à des délaminages, des fissures, et d’autres mécanismes d’endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d’une couche à l’autre ou entre fibre-matrice.

A cet effet, le concept des matériaux à gradient des propriétés (Functionally Graded Materials « FGM ») est introduit vers la fin des années 80 par une équipe de chercheurs japonais afin de surmonter ces difficultés, en concevant un matériau dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l’épaisseur de la structure (C. Baron., S. Naili 2008).

Les applications des structures en matériaux à gradient de propriétés (FGM : Functionally Graded Materials) ont été largement utilisées dans le domaine d'aérospatial, aéronautique, automobile et d'autres domaines d'ingénierie (Kar and Panda, 2015 ; Mehar and Panda, 2017).

Les structures FGMs avec la variation continue des propriétés des matériaux possèdent la possibilité parfaite de la réduction des contraintes résiduelles d'origine thermiques.

Les composants structuraux avancés en FGMs sont exposés à des conditions environnementales telles que la température élevée et l'humidité qui nuisent à la résistance et à la rigidité des structures en matériaux composites avancées, même à l'échelle nanométrique.

Par conséquent, l'analyse de telles structures nanométriques composites sous chargement hygrothermique a été d'un intérêt considérable pour les chercheurs. Récemment, des intérêts considérables ont été consacrés aux travaux expérimentaux et théoriques de la réponse hygrothermique des structures graduées. Puisque le contrôle des conditions expérimentales n'est pas évident pour les structures à l'échelle nanométrique, des modèles théoriques deviennent nécessaires.

Ce travail de thèse vise à développer un nouveau modèle trigonométrique de déformation de cisaillement pour étudier l’influence de l'humidité et l'élévation de température dues à diverses charges hygrothermiques sur le comportement en vibration libre des nano poutre en FGM reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. Le modèle proposé contient moins d'inconnues et moins d'équations de mouvement que la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, mais satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les bords supérieure et inférieure de la poutre, d’où le facteur de correction de cisaillement n'est pas requis. De plus, contrairement aux théories de déformation de cisaillement du premier ordre et d'ordre supérieur, le nombre de variables dans le présent modèle est le même que dans la théorie classique des poutres (Classical beam theory : CBT). Trois types de conditions environnementales sont étudiées, à savoir les charges hygrothermiques uniformes, linéaires et sinusoïdales. Les propriétés matérielles des poutres FGM sont supposées varier en fonction d'une distribution de loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations de mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Des exemples numériques sont présentés pour montrer l'exactitude, la simplicité et la précision du présent modèle. L’influence des conditions hygro-thermiques, l'indice de loi de puissance, l'effet non local et la présence des fondations élastiques sur les réponses en vibration libre des nano poutres en FGM sous l'effet hygro-thermique sont étudiés.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la présentation des matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés effectives, l'histoire de leur développement, méthodes de fabrication, ainsi que leurs principaux domaines d'application. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de poutres utilisés pour l'analyse du comportement statique et vibratoire des structures en FGM.

Le deuxième chapitre présente une revue récents travaux scientifiques portant sur les macro/nanostructures en matériaux à gradient de propriétés en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Le troisième chapitre détaille la mise en œuvre du modèle proposé des nano-poutres basé sur la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à seulement deux variables pour l'analyse du comportement vibratoire des nano poutres en FGM sous chargement hygrothermique reposant sur des fondations élastiques.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement en vibration libre sous un chargement hygrothermique.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés sous un chargement hygrothermique.

Chapitre I :
Généralités sur les matériaux fonctionnellement graduées

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1. Introduction :

La plupart des matériaux composites les plus légères avec les rapports de haute poids/résistance et rigidité/poids ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et d'autres filières de technologies. Cependant, le matériau composite traditionnel est incapable pour utiliser sous les environnements à hautes températures et humides. Généralement les métaux ont été exploités dans le champ de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente ténacité et dureté. Dans les environnements à hautes températures, la résistance du métal est assimilée réduite au matériau composite traditionnel. La céramique a d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Néanmoins, l'exploitation des matériaux céramique est couramment limitée en raison de leur basse dureté.

De grandes performances sont déjà bien présentes dans la catégorie des matériaux composites, dans lesquels un type de matériau hybride est constitué de matériaux à gradient de propriétés (FGMs). Dans le dernier du 20ème siècle, presque tous les aspects du monde à la mode de la bicyclette à vaisseau spatial, de l'habillement à la construction, seraient intensément modifiées par une nouvelle classe de matériaux. Des matériaux de haute performance comme les FGMs permettent également certaines des réalisations technologiques les plus étonnantes du siècle dans le domaine des applications biomédicales, optoélectroniques, spatiales, chimiques, mécaniques et d'autres applications d'ingénierie.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGMs) sont des matériaux de haute performance, microscopiquement inhomogènes avec gradients de composition et de structure avec des propriétés spécifiques dans l'orientation préférée. Les changements continus dans leurs microstructures, les FGMs se distinguent des autres matériaux composites traditionnels qui échouent à travers un processus appelé délaminage dans les sollicitations mécaniques et thermiques extrêmes (P. Shanmugavel et *al.*2002) ;(D.K. Jha et *al.*2013). Les propriétés mécaniques désirées des FGMs c-à-d le module d'Young, module de cisaillement, le coefficient de Poisson et la densité du matériau peuvent être obtenus dans une direction préférée par le biais de la variation des fractions volumiques des matériaux constitutifs. La

figure I-1 montre la variation des propriétés matérielles dans le composite conventionnel et les FGMs. Ce matériau de haute technologie offre une excellente capacité de résistance à la chaleur et à la corrosion et capable de résister à d'ultra-hauts gradients de température (M. Niino et *al.*1987. ; P. Shanmugavel et *al.*2002).

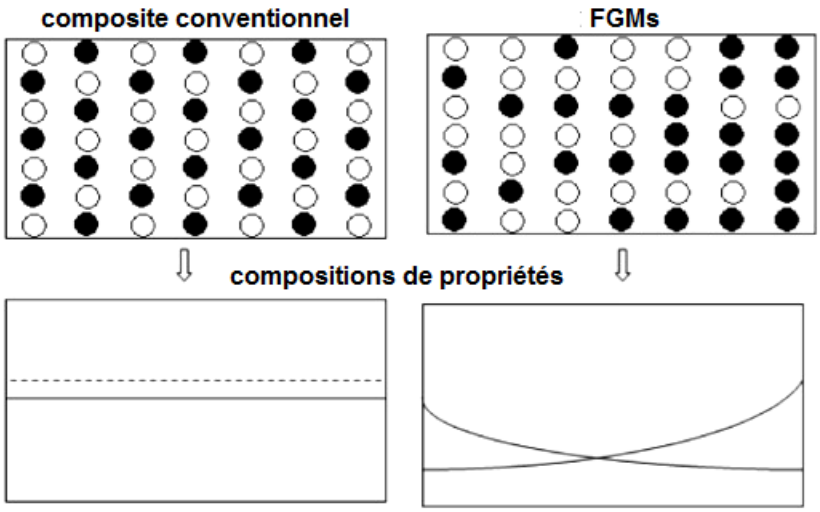

Figure. I-1 : Variation des propriétés dans les composites conventionnels et les FGMs (Ankit G et *al.*2015)

Les très populaire FGMs disponibles sont des composites céramique-métal, où la partie céramique présente une bonne capacité de résistance à la corrosion et à la chaleur et une partie métallique offrant une ténacité à la rupture et une soudabilité supérieure (D.K. Jha et *al.*2013). Une microstructure continuellement graduée avec des constituants en métal/céramiques est représentée dans la figure. I-2.

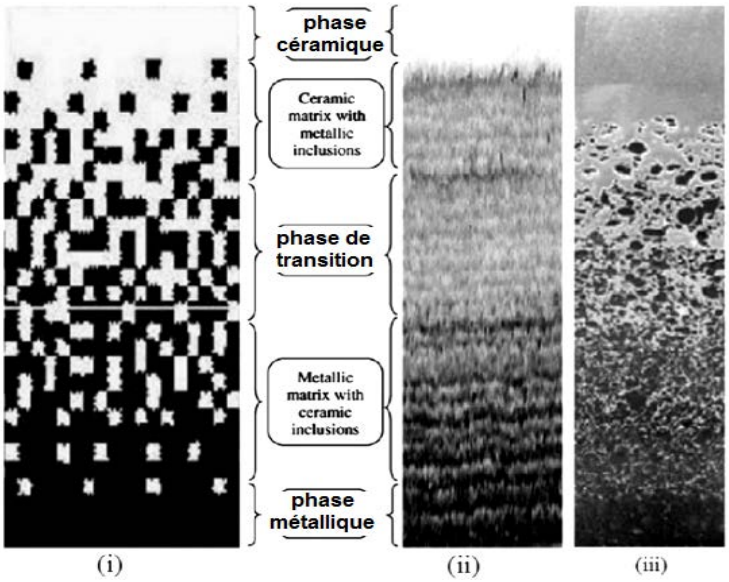

Figure. I-2 : Types de Gradation de la microstructure (i) microstructure doucement graduée (ii) vue agrandie et (iii) FGM céramique/métal (D.K. Jha et *al.*2013).

Gururaja et *al.*2014 et Howard .1994 ont constaté que les FGMs peut agir comme une couche d'interface pour raccorder deux matériaux incompatibles afin d'améliorer la force de liaison, enlever la concentration des contraintes, fournir la multifonctionnalité, la capacité de contrôler la déformation, l'usure, la corrosion, etc. Pendant les trois dernières décennies, les chercheurs ont démontré régulièrement que les FGMs aident à diminuer l'amplitude des contraintes thermiques maximales (B. Choules et *al.*1996- R.C. Wetherhold et *al.*1996), en éliminant les concentrations de contraintes aux couches d'interface et aux bords libres dans les composites stratifiés (Y. Yang et *al.*1996-Y.D. Lee et *al.*1995). Les FGMs améliorent également la ténacité à la rupture des céramiques fragiles par l'introduction d'une phase métallique qui se déforme plastiquement (F. Erdogan 1995- L.L. Shaw 1998). Les éléments poutres et plaques ont été conçus pour résister à des conditions thermiques sévères à titre d'exemple les structures aérospatiales, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude du comportement des nano poutres FGM reposé sur fondation élastique **(Winkler–Pasternak)** dans un milieu hygro thermique.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre « Couches intermédiaires »	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure I.3a) ou discrète (figure I.3b) à travers l'épaisseur (Hirai 1996). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries

aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

Figure I.3 : **(a)** Variation continue des propriétés **(b)** Variation discrète des propriétés.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.4. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

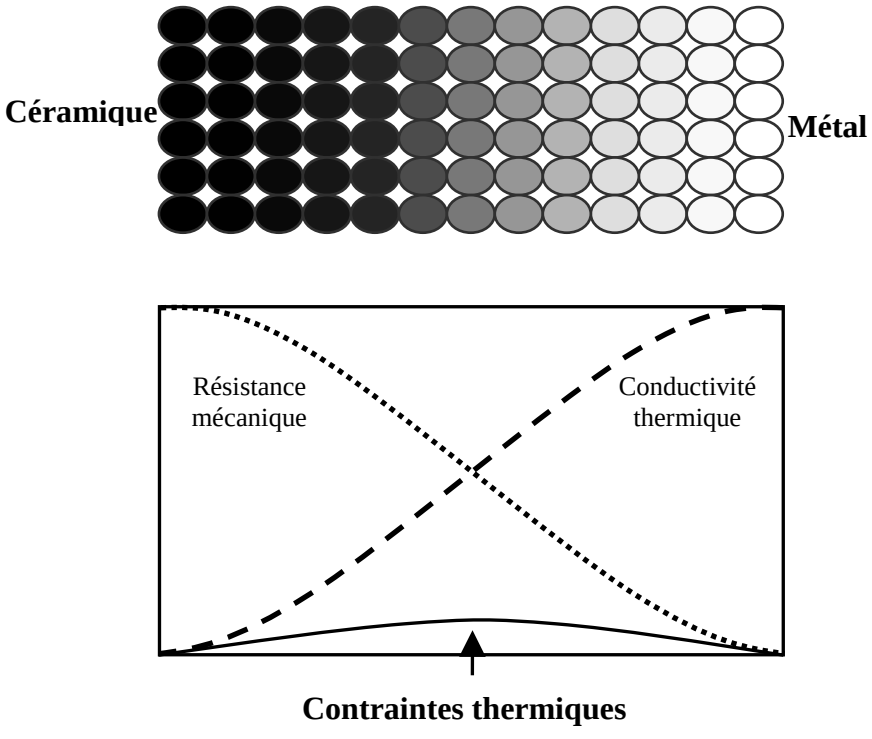

Figure I.4 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.5 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il

montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

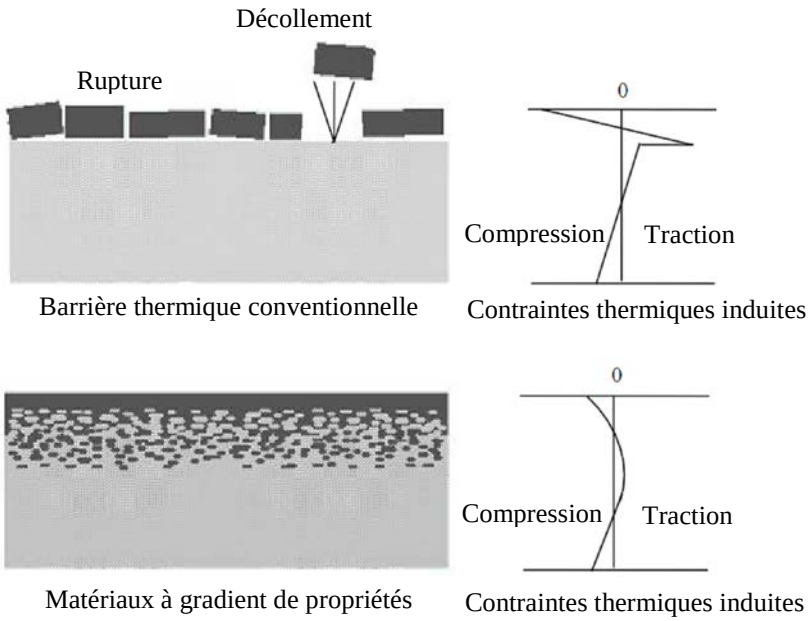

Figure I.5: Protection thermique (Aerospace Specification Metals, 2003).

I.3. Les Techniques de fabrication des matériaux fonctionnels FGMs :

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Il existe plusieurs méthodes différentes physiques et chimiques pour la fabrication des FGMs selon le type de matériaux, l'application et les commodités accessibles. Les méthodes de traitement des FGMs peuvent être classées en deux grandes catégories basées sur le traitement constructif et le transport de masse (J.F. Groves et *al.*1997- M.Rasheedat et

*al.*2012). Dans la première catégorie, le FGM est construit couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement construits. L'avantage de cette technique est de fabriquer un nombre illimité de gradients. Pendant ce temps, dans la seconde catégorie, les gradients à l'intérieur d'un composant dépendent du phénomène de transport naturel tel que le flux de fluide, la diffusion d'espèces atomiques ou la conduction thermique. Cependant, les progrès de la technologie d'automatisation au cours des deux dernières décennies ont offert des processus de gradation constitutifs technologiquement et économiquement réalisables.

Les techniques existantes et les plus à jour pour la fabrication des FGMs sont données en détail et la vue d'ensemble des processus de fabrication est présentée dans le tableau I-2.

Tableau I-2 : Vue d'ensemble des méthodes de fabrication des FGMs (Y. Fukui 1991).

S1.NO	**Process**	**Variability of transition function**	**Versatility in phase content**	**Type of FGM**	**Versatility in component geometry**
1	Powder stacking	Very good	Very good	Bulk	Moderate
2	Sheet lamination	Very good	Very good	Bulk	Moderate
3	Wet powder spraying	Very good	Very good	Bulk	Moderate
4	Slurry dipping	Very good	Very good	Coating	Good
5	Jet solidification	Very good	Very good	Bulk	Very good
6	Sedimentation/centrifuging	Good	Very good	Bulk	poor
7	Filtration/slip casting	Very good	Very good	Bulk	Good
8	Laser cladding	Very good	Very good	Bulk, Coating	Very good
9	Thermal spraying	Very good	Very good	Coating, Bulk	Good
10	Diffusion	Moderate	Very good	Joint, Coating	Good
11	Directed solidification	Moderate	Moderate	Bulk	Poor
12	Electrochemical gradation	Moderate	Good	Bulk	Good
13	Foaming of polymers	Moderate	Good	Bulk	Good
14	PVD, CVD	Very good	Very good	Coating	Moderate
15	GMFC process	Very good	Moderate	Bulk	Good

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après :

I.3.1. Coulage en bande (Tape Casting) :

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure I.6). Les produits obtenus sont des feuillets avec des

épaisseurs contrôlées (25-1000µm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

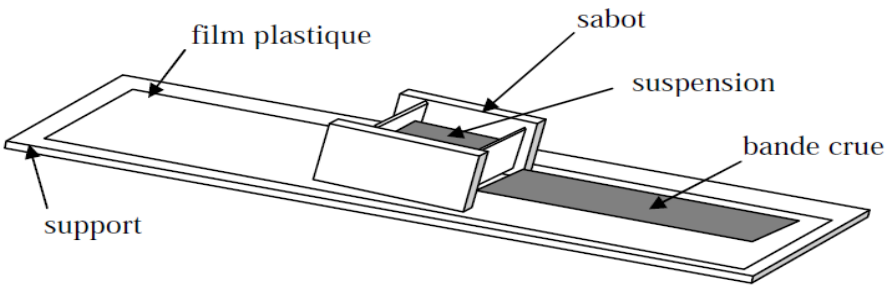

Figure I.6 : Principe de la méthode coulage en bande (Boch 1986).

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et *al.*1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Boch 1986). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

I.3.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

-formation du tesson ou "prise » ;

-consolidation du tesson ou "raffermissement".

I.3.3 Dépôt par Electrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh 1997).

I.3.4. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.3.5. Projection thermique :

Le dépôt par projection thermique se décline en quatre techniques différentes : la projection par flamme, la projection par arc électrique, la projection par plasma (VPS) et la projection thermique à froid. Pour l'ensemble de ces techniques, la fabrication du FGM tient au contrôle de la distribution de la poudre dans la buse de projection thermique.

I.3.6 C. V. D. et P. V. D. :

Le dépôt en phase vapeur physique ou chimique est une technique dans laquelle les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peut être utilisé pour élaborer un matériau à gradient de propriétés sur des substrats de formes compliquées, (KAWA, 1990).

I.3.7. Frittage et Infiltration :

Cette méthode passe par deux étapes et convenable à la mise en forme d'un composite FGM résultant de la combinaison de deux matériaux sous des températures de fusion extrêmement différentes. La première étape est de produire une matrice frittée à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour réduire les contraintes thermiques (TAKA, 1990).

I.3.8 Frittage Laser Différentiel :

La puissance du laser permet de contrôler la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki et *al.*1990 ont fabriqué une pièce F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.7 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

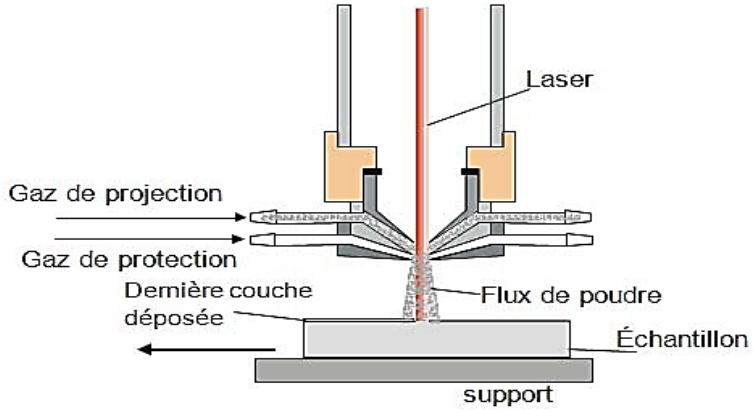

Figure I.7. Disposition du procédé frittage laser différentiel (YUKI et *al.*1990).

I.4. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.8. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

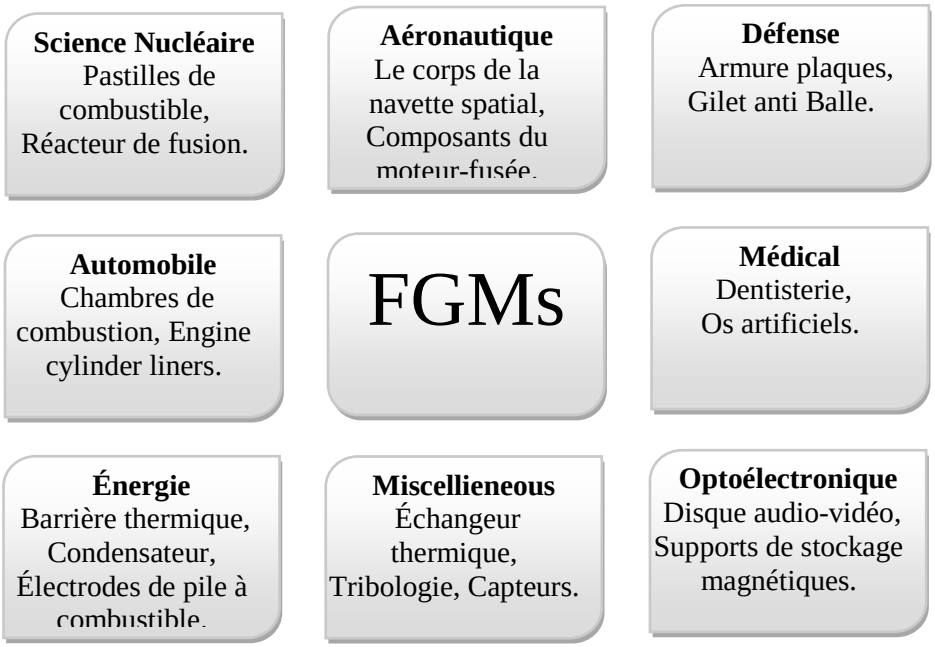

Figure I.8 : Applications des FGM dans divers domaines.

I.4.1. Application des FGM dans le domaine du Génie civil :

I.4.1.1. Les joints dans la charpente métallique :

Lors de l'assemblage des éléments en charpente métallique, on est obligé de réaliser des soudures entre deux éléments de nature/nuance différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints FGM est optimale.

I.4.1.2. Les grands vitrages dans les zones chaudes :

L'utilisation des vitres en FGM a pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout et le poids des structures.

I.4.1.3. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements):

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation (Jeffery R et *al.*2007).

I.4.1.4. Les chaussées souples (Functionally Graded Concrete Materials for Flexible Pavements) :

Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux pour éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs tout en obtenant un comportement optimisé, augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité (Ernie P, Wael A, and Ewan C, August2007).

I.4.1.5. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel):

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches (Baoguo MA et *al.*2009).

I.5. Les propriétés matérielles effectives des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

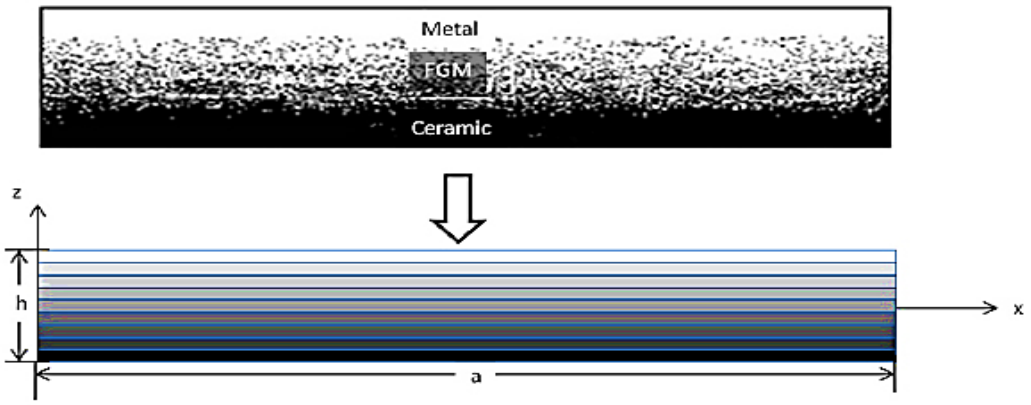

Figure I.9 : Géométrie d'une poutre en FGM.

La coordonnée x définis la longueur de la poutre, tandis que l'axe z perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les besoins.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la poutre en FGM varie en fonction de la loi de puissance (**P-FGM :** la fonction polynômiale) ou la fonction exponentielle (**E-FGM**) ou avec la fonction sigmoïde (**S-FGM**).

I.5.1. Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^{k} \tag{I.1}$$

Où $\boldsymbol{k}$ est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles de la poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (G. Bao., L. Wang 1995) :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \tag{I.2}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure $(\boldsymbol{z = -h/2})$ et de la surface supérieure $(\boldsymbol{z = h/2})$ de la poutre, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I.10 , il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $\boldsymbol{k} < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $\boldsymbol{k} > 1$.

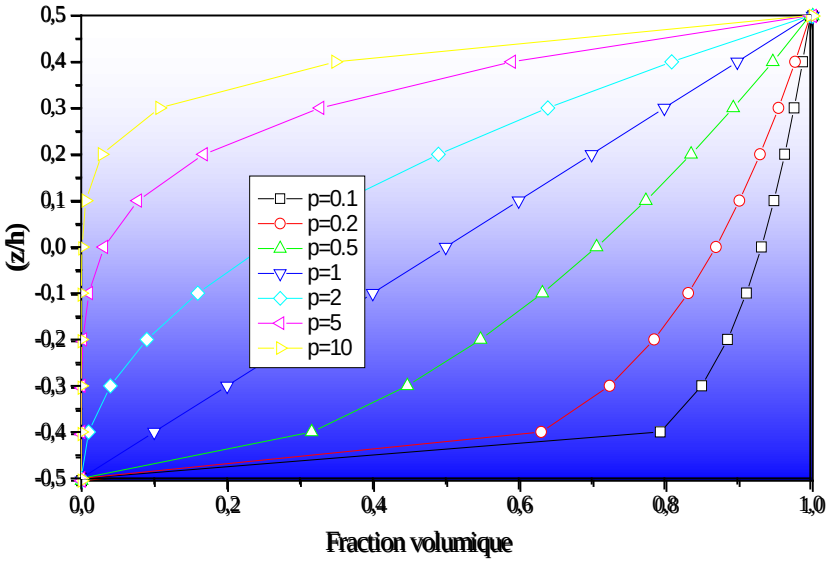

Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM.

I.5.2. Propriétés matérielles d'une poutre S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement G. Bao., L. Wang (1995). Par

conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \le z \le 0 \tag{I.3.a}$$

$$V_2(z) = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{h/2-z}{h/2}\right)^k \quad \text{Pour } 0 \le z \le h/2 \tag{I.3.b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)\,E_1 + [1-V_1(z)]\,E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \le z \le 0 \tag{I.4.a}$$

$$E(z) = V_2(z)\,E_1 + [1-V_2(z)]\,E_2 \quad \text{Pour } 0 \le z \le h/2 \tag{I.4.b}$$

La figure I.11 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, dans une poutre S-FGM.

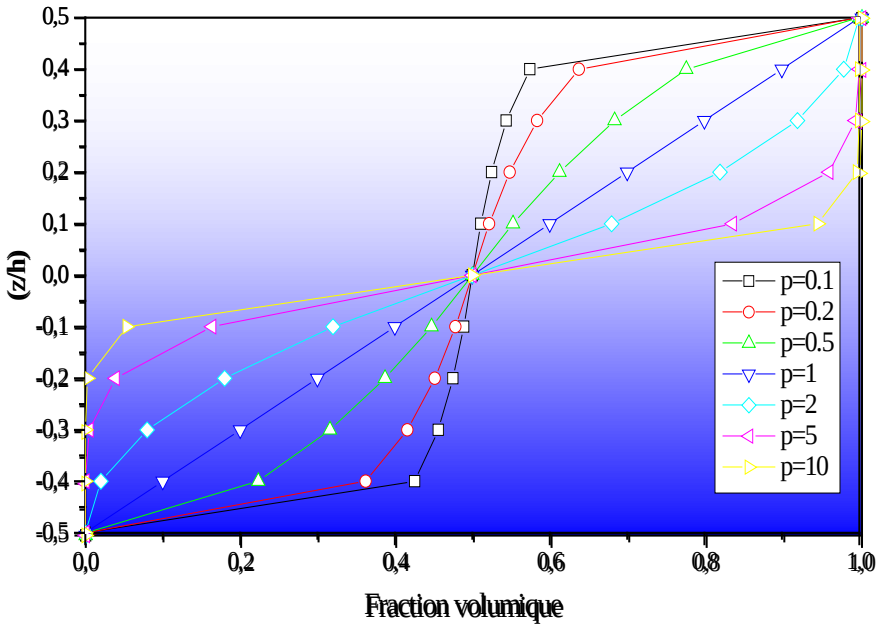

Figure I.11: Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.

I.5.3. Les propriétés matérielles d'une poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, (F. Delale., F. Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure I.13.

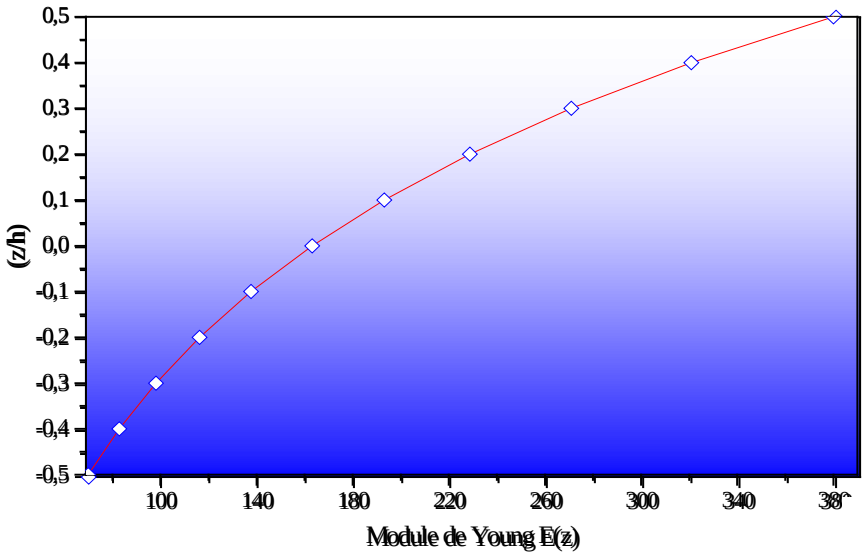

Figure I.12 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

I.6. Les modèles de poutre pour les matériaux à gradient de propriétés :

Le terme de « poutre » désigne un élément de structure dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Et soumis à des charges qui provoquent la déformation de flexion. Des théories de poutre sont développées en supposant que la forme du champ de déplacement ou le champ de contrainte en tant que combinaison linéaire des fonctions inconnues et la coordonnée dans l'épaisseur exprimée généralement sous la forme :

$$\varphi_i(x,y,z,t)=\sum_{j=0}^{n} z^j \varphi_i^j(x,y,t) \qquad (I\,.\,6)$$

Où φ_i est la i^{ème} composante du déplacement ou de la contrainte, **(x, y)** sont les coordonnées en plan, **z** est la coordonnée dans l'épaisseur, **t** représente le temps et φ_i^j sont des fonctions à déterminer. Le facteur temps ne sera pas considéré ici. Il existe de nombreuses théories de la poutre avec différentes formes de la formule (I . 6) qui cherchent une expression de φ_i^j . Une critique sur les modèles de plaques peut être trouvée dans Ghugal et Shimpi (2002), et Tung, N. V, (2004).

Afin d'étudier le comportement des poutres en matériaux à gradient de propriété, quatre modèles de poutres ont été développés pour ce matériau sont brièvement présentés : le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT :Classical beam theory), le modèle de poutre basé sur la théorie de la poutre de Timoshenko (TBT :Timoshenko beam theory), le modèle de poutre basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSBT) et le modèle de poutre basé sur la théorie sinusoïdale de la déformation de cisaillement (SSBT).

I.6.1 Le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT) :

Ce modèle basé sur la théorie classique de poutre (CBT) satisfait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à l'axe moyen avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion. Une description détaillée des modèles de poutres, y compris le modèle actuel peut être trouvée dans Timoshenko et Woinowsky-Kreiger, (2009), Reddy.J (1997 et 1999).

Sur la base des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement de ce modèle de poutre (CBT) développée est donné par l'équation suivante :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{dw_0(x)}{dx} \qquad \text{(I . 7a)}$$

$$w(x,z) = w_0(x) \qquad \text{(I . 7b)}$$

Où (u_0, w_0) sont deux fonctions de déplacement inconnues de l'axe médian de la poutre (z = 0), Figure I.14.

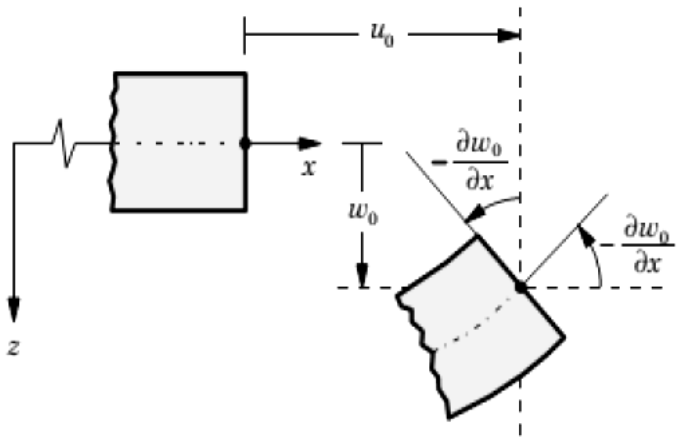

Figure I-13 : Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).

Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les poutres épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier. Les analyses du comportement des poutres fonctionnellement graduées (FGBs) à l'aide du modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli (CBT) ont été étudiées par He et *al.*2001.

I.6.2 Le modèle de poutre basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT) (Timoshenko TBT) :

Contrairement au modèle classique, ce modèle prend en compte les déformations de cisaillement transversales, qui sont assumées constantes dans l'épaisseur de la poutre. Le modèle nécessite donc un facteur de correction pour calculer l'effort de cisaillement transverse. Les premières études sur la théorie de premier ordre de la déformation de cisaillement de la poutre (FSDT) peuvent être trouvées dans Reissner, E., (1945et1975), Mindlin. Les études sur ce modèle peuvent être trouvées dans Timoshenko et Woinowsky-Kreiger, (2009), Reddy.J (1997), Miara et Podio-Guidugli (2006). La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses et restrictions que la théorie classique, mais la poutre est à l'état de normalité détendue,

$$\boldsymbol{u(x,z) = u_0(x) + z\phi(x)} \qquad \text{(I . 8a)}$$

$$\boldsymbol{w(x,z) = w_0(x)} \qquad \text{(I . 8b)}$$

Où (u_0, w_0) et (ϕ_x) sont les déplacements dans la surface moyenne et la rotation autour de l'axe y, respectivement, Figure I.15. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des poutres classique décrite dans la section précédente en remplaçant $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique.

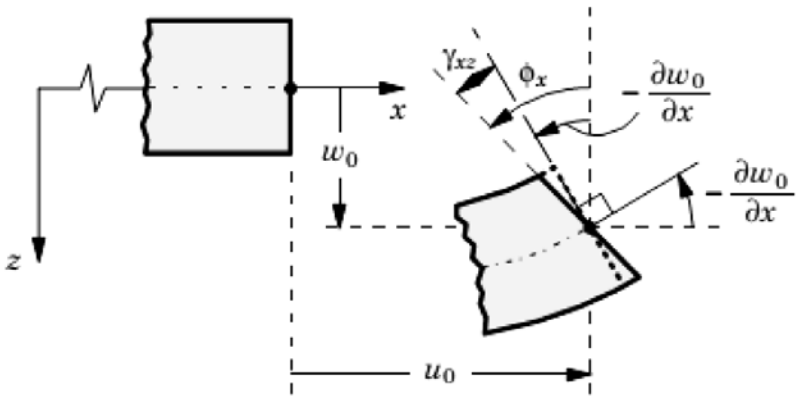

Figure I-14 : Illustration du modèle de la poutre de Timoshenko (TBT).

Le modèle FSDT a été largement utilisé pour l'analyse des matériaux à gradient de propriété en raison de sa simplicité de l'analyse et la programmation (Praveen, G.N., Reddy, J. 1998) et (Zenkour, A. M.,2003). Cependant, le fait que la déformation de cisaillement transversale est constante dans l'épaisseur, il nécessite donc une correction quand on calcule les contraintes transversales de cisaillement et les efforts. Pratiquement, une correction de cisaillement transverse du modèle de la plaque homogène a été prise.

En outre, afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des poutres ont été développées. Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de poutre à ordre élevé pour les matériaux à gradient de propriétés (FGMs). Dans la section suivante, nous allons rappeler deux modèles de poutres basés sur des théories de la déformation de cisaillement à ordre élevé utilisés pour l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) : un modèle de poutre basé sur la théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé (TSDT) proposé par Reddy.J (1997 et 1999) et un modèle de la poutre basé sur la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) étudié par Zenkour, A. M., (2003 ; 2004a et 2004b)

I.6.3 Le modèle de poutre basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT) :

Les théories de la déformation de cisaillement des poutres à ordre élevé ont été développées ces dernières années, d'abord pour l'analyse de plusieurs problèmes isothermes et ensuite déployées pour comprendre les phénomènes physiques induits dans la poutre. Contrairement à la CBT et TBT avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie de la déformation de cisaillement des poutres à ordre élevé est basée sur une distribution non-linéaire des champs dans la section. Par conséquent, l’effet de la déformation de cisaillement transversal est pris en compte.

Ces modèles ne nécessitent pas de facteurs de correction. Les références sur ces modèles peuvent être trouvées dans Hildebrand, F.B et *al.*1949, Naghdi, P. M., (1957), Liberscu, L, (1967), Nelson, R., et *al.*1974, Lo, K. H., et *al.*1977a ; 1977b, Kant, T., Swaminathan, (2002).

Nous présentons ici deux modèles de poutres utilisés pour l'analyse du comportement des matériaux à gradient de propriété (FGMs).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} + \Psi(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(I . 9a)}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(I . 9b)}$$

Avec : $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_0)$ et (ϕ_x) sont les déplacements axiaux et la rotation autour de l'axe $\boldsymbol{y}$, respectivement $\boldsymbol{\varphi}_x = \frac{\partial \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\phi}_x$ la figure I.16. Ψ (z) est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de poutre (CBT) est obtenue en prenant Ψ (z) = 0, alors que la théorie de premier ordre de Timoshenko (TBT) peut être obtenue en écrivant Ψ (z) = z.

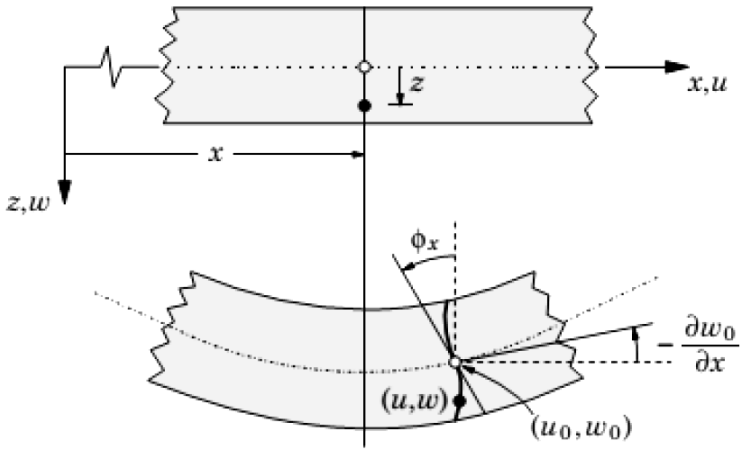

Figure I-15 : Illustration d'une poutre d'ordre élevé.

Les déplacements de la théorie des déformations de cisaillement à ordre élevé de Reddy (TSDT) Reddy.J (1997 et 1999) sont obtenus par :

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}\left(1 - \frac{4}{3\boldsymbol{h}^2}\boldsymbol{z}^2\right) \qquad \text{(I . 10)}$$

La théorie du troisième ordre de cisaillement (TSDT), qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme quadratique dans l'épaisseur de la poutre, a été proposée par Reddy.J (1997et1999). Elle ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement.

La théorie du troisième ordre a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs (Reddy, (2000) ; Cheng, Z., et *al.*2000b et Ferreira, A., et *al.*2004).
La théorie de cisaillement sinusoïdale (SSDT) de Zenkour (Zenkour, A. M., 2003 ; 2004a et 2004b) est obtenu par l'hypothèse :

$$\psi(z)=\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \qquad (I\ .\ 11)$$

Où le champ de déplacement qui en résulte est basé sur celui de la théorie classique en ajoutant le terme $\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\varphi_\alpha$ à la composante de déplacement dans le plan u_α.

Ce modèle a été également utilisé pour étudier le comportement des structures FGMs par Zenkour (Zenkour, A. M., 2005a ;2005b et 2006). Comme pour la TSDT, pas de facteurs de correction de cisaillement transversal utilisés dans cette théorie.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (ESDPT) développée par Karama et *al.*2003 est obtenue en prenant :

$$\psi(z)=ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z=0. \qquad (I\ .\ 12)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) développée par Ait Atmane et *al.*2010 est obtenue en prenant :

$$\psi(z)=\frac{\cos(\pi/2)}{\left[\cos(\pi/2)-1\right]}z-\frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{\left[\cos(\pi/2)-1\right]} \quad \text{et} \quad \varphi_z=0. \qquad (I\ .\ 13)$$

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés effectives, leurs principales procédés technologiques de fabrication, et leurs domaines d'application ; ensuite les modèles de poutres utilisés pour l'analyse du comportement statique et vibratoire des structures en FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II :
Revue des Recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés

isotropes, ils sont hétérogènes à cause de la variation spatiale des fractions de volume des phases constitutives. Un exemple de ce matériau est illustré dans la figure II.1 (H.M.Yin, Z.L. Sun,G.H.Paulino,2004) où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope.

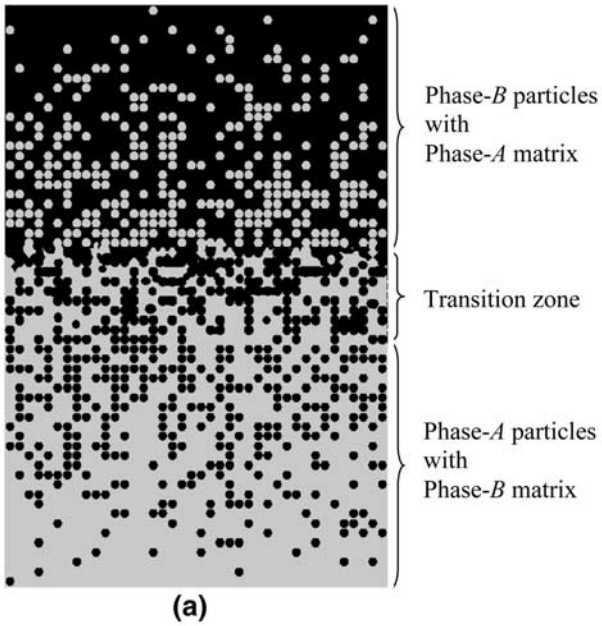

Figure II.1 : Variation de la fraction volumique des matériaux constituants dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés (H.M.Yin, Z.L. Sun,G.H.Paulino,2004).

Une FGM peut également avoir une microstructure de squelette comme le montre la figure II.2 (S. S.Vel., R.C. Batra,2002).

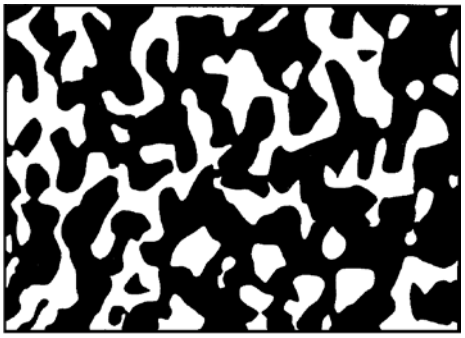

Figure II.2: Une microstructure de squelette d'un matériau FGM (S. S.Vel., R.C. Batra,2002).

Cette revue se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), y compris la théorie classique de la plaque (CPT), la théorie de la déformation de

cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDTs), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel.

II.3. Revue des travaux sur les structures FGM à l'échelle nanométrique :

Les structures FGMs avec la variation continue des propriétés des matériaux possèdent des avantages pour avoir la réduction des contraintes résiduelles et thermiques. Les composants structuraux avancés en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont exposés à des conditions environnementales telles que la température élevée et l'humidité qui nuisent à la résistance et à la rigidité des structures composites avancées, même à l'échelle nanométrique. Par conséquent, l'analyse de telles structures nanométriques composites sous chargement hygrothermique a été d'un intérêt considérable pour les chercheurs.

Récemment, des intérêts considérables ont été consacrés aux travaux expérimentaux et théoriques de la réponse hygrothermique des structures graduées. Puisque le contrôle des conditions expérimentales n'est pas évident pour les structures à l'échelle nanométrique, des modèles théoriques deviennent nécessaires. Lee et Kim (2013) ont étudié le comportement thermique post-flambement des plaques FGM en tenant compte de l’effet hygrothermique ainsi que l’effet d'humidité basés sur la théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre. Akbar Zadeh et Chen (2013) ont présenté une solution analytique pour les contraintes hygrothermiques dans un milieu piézoélectrique à gradient fonctionnel unidimensionnel soumis à un champ magnétique constant et reposant sur une fondation élastique de type Winkler. Zidi et *al.* (2014) ont étudié l'analyse de la flexion de plaques FGM sous chargement hygro-thermomécanique à l'aide d'une théorie de plaque raffinée à quatre variables. Ebrahimi et Barati (2016a) ont étudié l'influence des environnements sur la vibration d'amortissement des nano-poutres FGM basée sur la théorie d'élasticité du gradient de contrainte non local. Sobhy (2016) a proposé une approche analytique pour illustrer la vibration hygrothermique et le flambement des plaques sandwiches FGM reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak en utilisant une nouvelle théorie précise de plaque de déformation de cisaillement à quatre variables.

Aussi, récemment, Laoufi et *al.* (2016) ont présenté une méthode analytique pour déterminer la déflexion et la distribution des contraintes dans des plaques fonctionnellement graduée soumises à une charge mécanique, à des champs de température et d'humidité. Plus récemment, Beldjelili et *al.* (2016) ont étudié le comportement de la flexion d'une plaque en

matériau à gradient fonctionnel sigmoïde (S-FGM) reposant sur des fondations élastiques variables à deux paramètres en tenant compte de l'hypothèse hygro-thermo-mécanique basée sur une théorie de plaque raffinée à quatre variables. En raison de l'incapacité de la théorie classique de poutre (CBT) ou la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT) à prendre en compte les déformations transversales, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser la différence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant Dans le cas de la théorie de la poutre de Timoshenko (TBT), un certain nombre de théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont proposées et développées en supposant une variation d'ordre élevé du déplacement axial à travers l'épaisseur de la poutre. Pour les poutres FGM épaisses et modérément épaisses, la CBT a surestimé la fréquence naturelle en ignorant l'effet de déformation transverse par cisaillement (Şimşek 2009, Eltaher et *al* 2012, Kaci et *al.* 2012). Dans la théorie de poutre de Timoshenko (TBT) (Şimşek et Yurtçu 2012, bouremana et *al.* 2013), la distribution de la contrainte de cisaillement transverse est supposée constante par rapport à la coordonnée d'épaisseur. Cependant, les influences de la contrainte transversale de cisaillement peuvent devenir plus importantes pour des poutres modérément courtes. En fait, pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement, de nombreuses théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé ont été proposées, notamment la théorie parabolique de déformation (PSDBT) de Reddy (Reddy 1984), la théorie de poutre de déformation trigonométrique. (TSDBT) de Touratier (Touratier 1991), la théorie de poutre de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDBT) de Soldatos (Soldatos 1992), la théorie de poutre de déformation de cisaillement exponentiel (ESDBT) de Karama (Karama et *al.* 2003).

II.4. Théorie d'élasticité non local :

Selon la théorie de l'élasticité non-local (Eringen and Edelen 1972, Eringen 1983), l'état de contrainte à un point à l'intérieur d'un corps est considéré comme une fonction des contraintes de tous les points dans les régions voisines. Pour les solides élastiques homogènes, les composantes du tenseur des contraintes non locales σ_{ij} à chaque point x dans le solide peut être exprimé comme :

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega} \alpha\left(\left|x'-x\right|, \tau\right) t_{ij}(x') d\Omega(x') \qquad \text{(II. 1)}$$

D'où $t_{ij}(x')$ sont les composants disponibles dans le tenseur de contrainte locale au point x qui sont associés aux composants tenseurs de déformation ε_{kl} comme :

$$t_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{II. 2}$$

Le concept de l'éq. (II-1) C'est que le stress non-local en tout point est une moyenne pondérée de la contrainte locale de tous les points proches, et le noyau nonlocal $\alpha\left(\left|x'-x\right|,\tau\right)$ considère l'influence de la déformation au point x' sur la contrainte au point x dans le corps élastique. Le paramètre α Est une longueur caractéristique interne (Par exemple, le paramètre de maille, distance granulaire, la longueur des liaisons C-C). Aussi $\left|x'-x\right|$ est la distance euclidienne et τ est une valeur constante comme suit :

$$\tau = \frac{e_0 a}{l} \tag{II. 3}$$

Qui présente la relation d'une longueur caractéristique interne, et une longueur caractéristique externe, l (Par exemple, longueur de fissure et longueur d'onde) en utilisant la constante, e_0, dépend de chaque matériau. La valeur de e_0 est évalué expérimentalement en comparant les courbes de diffusion des ondes planes avec celles de la dynamique atomique. Dans le modèle non local d'élasticité, les points subissent un mouvement de translation comme dans le cas classique, mais la contrainte en un point dépend de la déformation dans une région proche de ce point. La valeur de e_0 a été étalonnée par Huang et *al.* (2012) pour l'analyse de flexion statique des SLGSs. Arash et Ansari, (2012) ont également évalué la valeur du paramètre non local pour la vibration libre des SWCNTs en comparant les prédictions du modèle de coque FSDT non local avec les simulations MD. Duan et *al.* (2013) ont proposé un modèle de poutre microstructuré pour calibrer la valeur de e_0 pour l'analyse des vibrations libres des poutres non locales.

Des expressions analytiques de e_0 ont été obtenus basé sur les propriétés géométriques et les modes de vibration. Zhang et *al.* (2014-2015) ont proposé une poutre microstructuré modèle de grille pour déterminer la valeur de e_0 pour la vibration libre des poutres non locales (Zhang et *al.* 2014) et flambement et la vibration libre des plaques non locales. Il a été constaté que la valeur de e_0 varie en fonction de la contrainte initiale, l'inertie rotatif, la forme du mode et le rapport d'aspect des plaques rectangulaires. En général, une estimation prudente du paramètre non local pour les SWCNTs est e_0 a < 2,0 nm (Wang Q, Wang CM, 2007).

Eringen, (1983) a montré que l'équation constitutive non locale donnée sous forme intégrale peut être représentée sous une forme différentielle :

$$\left(1-(e_0 a)\nabla^2\right)\sigma_{kl} = t_{kl} \tag{II. 4}$$

Dans lequel ∇^2 est l'opérateur laplacien. Par conséquent, la longueur d'échelle $e_0 a$ considère l'effet de la petite échelle sur le comportement des nanostructures.

La forme explicite de l'équation (II. 4) peut être écrit pour trois problèmes avec des matériaux isotropes comme suit :

Pour les problèmes unidimensionnels (1D) :

$$\sigma_{xx} - \mu\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2} = E\varepsilon_{xx} \tag{II.5a}$$

$$\sigma_{xz} - \mu\frac{d^2\sigma_{xz}}{dx^2} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xz} \tag{II.5b}$$

Pour les problèmes (2D) :

$$\sigma_{xx} - \mu\left(\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_{xx}}{dy^2}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \tag{II.6a}$$

$$\sigma_{yy} - \mu\left(\frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_{yy}}{dy^2}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) \tag{II.6b}$$

$$\sigma_{xy} - \mu\left(\frac{d^2\sigma_{xy}}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_{xy}}{dy^2}\right) = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} \tag{II.6c}$$

$$\sigma_{xz} - \mu\left(\frac{d^2\sigma_{xz}}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_{xz}}{dy^2}\right) = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xz} \tag{II.6d}$$

$$\sigma_{yz} - \mu\left(\frac{d^2\sigma_{yz}}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_{yz}}{dy^2}\right) = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yz} \tag{II.6e}$$

Pour les problèmes (3D) :

$$\sigma_{xx}-\mu\left(\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2}+\frac{d^2\sigma_{xx}}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_{xx}}{dz^2}\right)=\frac{E}{1-v^2}\left(\varepsilon_{xx}+v\varepsilon_{yy}+v\varepsilon_{zz}\right) \quad \text{(II.7a)}$$

$$\sigma_{yy}-\mu\left(\frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2}+\frac{d^2\sigma_{yy}}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_{yy}}{dz^2}\right)=\frac{E}{1-v^2}\left(v\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+v\varepsilon_{zz}\right) \quad \text{(II.7b)}$$

$$\sigma_{zz}-\mu\left(\frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2}+\frac{d^2\sigma_{zz}}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_{zz}}{dz^2}\right)=\frac{E}{1-v^2}\left(v\varepsilon_{xx}+v\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right) \quad \text{(II.7c)}$$

$$\sigma_{xy}-\mu\left(\frac{d^2\sigma_{xy}}{dx^2}+\frac{d^2\sigma_{xy}}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_{xy}}{dz^2}\right)=\frac{E}{1+v}\varepsilon_{xy} \quad \text{(II.7d)}$$

$$\sigma_{xz}-\mu\left(\frac{d^2\sigma_{xz}}{dx^2}+\frac{d^2\sigma_{xz}}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_{xz}}{dz^2}\right)=\frac{E}{1+v}\varepsilon_{xz} \quad \text{(II.7e)}$$

$$\sigma_{yz}-\mu\left(\frac{d^2\sigma_{yz}}{dx^2}+\frac{d^2\sigma_{yz}}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_{yz}}{dz^2}\right)=\frac{E}{1+v}\varepsilon_{yz} \quad \text{(II.7f)}$$

Où ε_{ij} sont les composantes du tenseur de déformation ; et E et v sont le module de Young et le coefficient de Poisson des matériaux, respectivement.

Comparé au modèle intégral, le différentiel est largement utilisé pour les nanostructures en raison de sa simplicité. Cependant, le modèle différentiel peut donner des résultats paradoxaux dans certains cas, par exemple : problèmes en flexion et en vibration des poutres en porte-à-faux.

II.5. Modèles de poutre non local :

II.5.1. Modèles non local basés sur l'EBT :

Les premiers modèles d'élasticité non-locale de poutres basés sur l'EBT ont été développés par Peddieson et *al.* (2003) et Sudak, (2003). Peddieson et *al.* (2003) ont appliqué leur modèle pour explorer l'effet d'échelle sur le comportement en flexion des nano poutres isotropes.

Depuis les premiers travaux de Peddieson et *al.* (2003) et Sudak, (2003), un grand nombre de recherches ont été consacrées à la modélisation des nano poutres et CNTs utilisant le modèle non local d'Euler-Bernouli. Par exemple, Li et *al.* (2011) ont dérivé des solutions de forme fermée pour les fréquences naturelles de nano poutres chargées axialement simplement appuyées. Ghannadpour et *al.* (2013) ont utilisé la méthode de Ritz pour résoudre les équations directrices du modèle non local d'Euler-Bernouli pour la flexion, le flambement et

la vibration libre des nano poutres avec diverses conditions aux limites. Le modèle non local d'EBT a également été développé pour les nano poutres en FGM. Simsek, (2012) a étudié l'effet non local sur la vibration axiale des nano tiges en FGM avec des sections transversales variables. Le module d'élasticité et la densité massique des nano tiges ont été supposés varier dans la direction axiale selon une loi de puissance. Nguyen et *al.* (2014) ont présenté des solutions analytiques du modèle EBT non local pour l'analyse de la flexion statique de poutres FGM avec diverses conditions aux limites. Le module d'élasticité des nano poutres en FGM peut varier soit dans la direction axiale, soit dans la direction transversale. Basé sur l'approche de Galerkin, Niknam et Aghdam, (2014) ont dérivé des solutions du modèle EBT non local pour les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement de nano poutres FGM reposant sur une fondation élastique. Ebrahimi et Salari, (2015) ont étudié l'effet thermique sur la vibration libre des nano poutres FGM sous divers BCs en utilisant une approche semi-analytique. Nejad et Hadi, 2016) et Nejad et *al.* (2016) ont examiné les comportements de flexion et de flambement des nano poutres FGM dans lesquels le module d'élasticité peut varier dans les deux sens axial et transversal de la poutre.

II.5.2. Modèles non local basés sur la TBT :

Le premier modèle TBT non local a été développé par Wang Q, (2005) pour étudier la propagation des ondes dans les CNTs. Le modèle tient compte de l'effet de déformation de cisaillement qui devient important dans les CNTs courts et épais. Le modèle non local cohérent a également été développé par Reddy et Pang, (2008) en reformulant à la fois l'EBT et le TBT en utilisant les relations constitutives non locales d'Eringen. Ansari et *al.* (2015) ont développé un modèle TBT non local pour la vibration forcée non linéaire de nano poutres magnéto-électro-thermo élastiques.

Le modèle TBT non local cohérent a également été développé pour les nano poutres FGM. Simsek et Yurtcu, (2013) ont proposé des modèles EBT et TBT non locaux pour les analyses de flexion et de flambement des nano poutres FGM. Le modèle TBT non local cohérent a été étendu par Rahmani et Pedram, (2014) à l'analyse des vibrations libres des nano poutres FGM simplement appuyées. Ebrahimi et Salari, (2015-2016) ont également développé un modèle TBT non local cohérent pour l'analyse de flambement et de vibration libre des nano poutres FGM dans lesquels les effets thermiques ont été pris en compte.

II.5.3. Modèles non local basés sur la RBT :

Sur la base des relations constitutives non locales d'Eringen, Reddy JN, (2007) a reformulé la théorie des poutres EBT, TBT, RBT et Levinson pour inclure l'effet non local. Des relations variationnelles de quatre modèles ont également été dérivés pour faciliter le développement de modèles non locaux en élément finis. Emam SA, (2013) a proposé un modèle non local non-linéaire pour l'analyse de flambement et de post-flambement des nano poutres isotropes. Des solutions analytiques pour un chargement de flambement et la réponse post-flambement ont également été obtenues pour des nano poutres simplement supportés et clampés. Rahmani et Jandaghian, (2015) ont étendu le modèle RBT non local aux nano poutres FGM. Des solutions analytiques pour les charges critiques de flambement ont été obtenues pour des poutres FGM sous différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. Ebrahimi et Barati, (2016) ont également développé un modèle RBT non local pour les nano poutres en FGM, dans lequel les effets thermiques et l'interaction entre la nano poutre et un milieu élastique ont été considérés.

II.5.4. Modèles non local basés sur les HSDTs :

L'un des premiers modèles non locaux d'ordre élevé HSDT a été développé par Aydogdu, (2009) pour les nanotubes isotropes sur la base de la théorie générale de déformation de cisaillement exponentielle d'Aydogdu M, (2009). Thai HT, (2012) a également proposé un modèle HSDT non local pour les nano poutres isotropes, mais il était basé sur la théorie des plaques raffinée de Shimpi, (2002). Le champ de déplacement de cette théorie est dérivé de la répartition des déplacements en parties de cisaillement et de flexion. Tounsi et *al.* (2013) et Zemri et *al.* (2015) ont étendu le modèle HSDT non local de Thai HT, (2012) pour inclure l'effet thermique Tounsi et *al.* (2013) et le comportement non homogène des matériaux FGM Zemri et *al.* (2015). L'extension du modèle sinusoïdal de Thai et Vo, (2012) et le modèle sinusoïdal quasi-3D de Tounsi et *al.* (2013) pour les nano poutres en FGM a été respectivement faite par Ahouel et *al.* (2016) et Chaht et *al.* (2015). Berrabah et *al.* (2013) ont comparé la précision de divers modèles HSDT non locaux pour prédire les charges de flexion, flambement et les fréquences naturelles des nano poutres isotropes. Les champs de déplacement de ces modèles HSDT non locaux ont été pris à partir du simple HSDT proposé par Thai et Choi, (2013) dont les déplacements dans le plan et dans le sens transversal sont divisés en composants de flexion et de cisaillement. Mashat et *al.* (2016) ont étudié la vibration et le flambement thermique de nano poutres incorporées sous divers BCs en utilisant un modèle HSDT non local couvrant les théories de EBT, TBT, RBT et la théorie sinusoïdale.

Récemment, Thai et *al.* (2017) ont présenté un modèle HSDT non local simple pour les nano poutres isotropes, impliquant un seul inconnu.

II.6. De la macro à la nano échelle :

Les modèles dépendant de la petite échelle ont été largement utilisés pour prédire le comportement global des poutres et plaques des nanostructures telles que les nanotubes de carbone (CNTs) et les feuilles de graphène. Une attention particulière est accordée aux nanomatériaux, afin de déterminer quand et comment la taille joue des rotations majeures. Les phénomènes à l'échelle nanométrique et à l'échelle locale ont un impact significatif sur le comportement et la défaillance des structures à l'échelle méso et macro. Cette révolution a été entravée par un manque de compréhension à la fois du comportement fondamental de ces matériaux à différentes échelles

L'intérêt de l’étude du comportement des structures en matériaux à gradient de propriétés (FGM) à l'échelle nanométrique vient du fait que la matière à l'échelle macro et nanométrique se comporte différemment. Les effets négligeables au niveau macroscopique deviennent importants au niveau nanométrique. Lorsque la taille caractéristique diminue encore pour atteindre le monde nanométrique, une autre limite est rencontrée. Alors que les propriétés macroscopiques de la matière ne restent plus valides à la taille du nanomètre.

II.7. Conclusion :

Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM à l’échelle nanométrique ont été présentés dans ce chapitre. En raison de vaste champ qui se développe rapidement sur les FGM, En conclusion, les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variées, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

Chapitre III :

Analyse en vibration libre des nanopoutres en FGM sous chargements hygro-thermique

Chapitre III : Analyse de la vibration libre des nanopoutres sous un chargement hygro-thermique

III.1. Introduction :

La mécanique des milieux continus présente des théories qui ont pour but le calcul approximatif des grandeurs généralisées en se basant sur le système des équations de compatibilité, d'équilibre, des conditions aux limites, et complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations.

Ce chapitre propose une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique pour l'étude de l'influence du chargement combiné de l'humidité et de la température sur la vibration des nano poutres en matériaux à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques (Winkler-Pasternak). Le principal avantage de cette théorie réside dans la prise en compte de l'effet de cisaillement transverse avec seulement un champ de déplacement modélisé avec seulement 2 inconnues, idem que la théorie classique du poutre (CBT). Ainsi, satisfaisant les conditions aux limites de la traction nulle sur les bords supérieure et inférieure de la poutre, d'où le facteur de correction de cisaillement n'est pas requis.

III.2. Formulation mathématique :

III.2.1. Modèle non-local d'une poutre P-FGM :

Selon la forme de la loi de puissance les propriétés matérielles de la nano poutre en FGM (Fig. III-1) tel que module de Young (E), Le coefficient de Poisson (ν), la densité massique (ρ), le coefficient de dilatation thermique (α), coefficient d'expansion de l'humidité (β) et le module de cisaillement (G) peut être calculé (Belabed et *al.* 2014 ; Bellifa et *al.* 2016) :

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \tag{III. 1}$$

D'où, V_i $(i = c, m)$ est la fraction volumique de chaque partie du matériau. Les indices 'c' et 'm' représentent les phases de céramique et de métal, respectivement. Les fractions volumiques des phases céramique et métal sont liées par :

$$V_c + V_m = 1 \tag{III. 2}$$

Et V_c est écrit comme :

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p, \quad p \geq 0 \tag{III. 3}$$

Avec $'p'$ est l'indice de gradient qui détermine la distribution du matériau à travers l'épaisseur de la poutre et z est la distance de la surface médiane de la nano poutre FGM.

III.2.2. Propriétés des matériaux

Les propriétés matérielles effectives non local de la poutre FGM, y compris le module de Young (E), module de cisaillement (G), la densité massique (ρ), le coefficient de dilatation thermique (α), et le coefficient d'expansion de l'humidité (β) peut être exprimé sous la forme suivante :

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + E_m \tag{III. 4a}$$

$$G(z) = (G_c - G_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + G_m \tag{III. 4b}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \rho_m \tag{III. 4c}$$

$$\alpha(z) = (\alpha_c - \alpha_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \alpha_m \tag{III. 4d}$$

$$\beta(z) = (\beta_c - \beta_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \beta_m \tag{III. 4e}$$

La relation suivante peut être adoptée pour représenter les coefficients de matériau dépendant de la température :

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3) \tag{III. 5}$$

D'où, T est la température de l'environnement; P indique la propriété du matériau; P_{-1}, P_0, P_1, P_2 et P_3 sont les coefficients des propriétés du matériau dépendant de la température uniques aux matériaux constitutifs (Tableau III-1).

Tableau III-1 : Propriétés dépendantes de la température des constituants (Ebrahimi et Salari, 2015).

Matériaux	Propriétés	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Si_3N_4	E(Pa)	3.4843e+11	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
	$\alpha(K^{-1})$	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
	$\rho(Kg/m^3)$	2370	0	0	0	0
	v	0.24	0	0	0	0
SUS 304	E(Pa)	2.0104e+11	0	3.079e-4	-6.534e-7	0
	$\alpha(K^{-1})$	12.33e-6	0	8.086e-4	0	0
	$\rho(Kg/m^3)$	8166	0	0	0	0
	v	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0

III.2.3. Relations cinématiques :

Considérons une poutre FGM simplement appuyée avec une longueur L et une section rectangulaire $b \times h$ avec b étant la largeur et h est la hauteur (Fig. III-1). La poutre est faite de matériau isotrope d'où les propriétés matérielles variant doucement dans la direction de l'épaisseur.

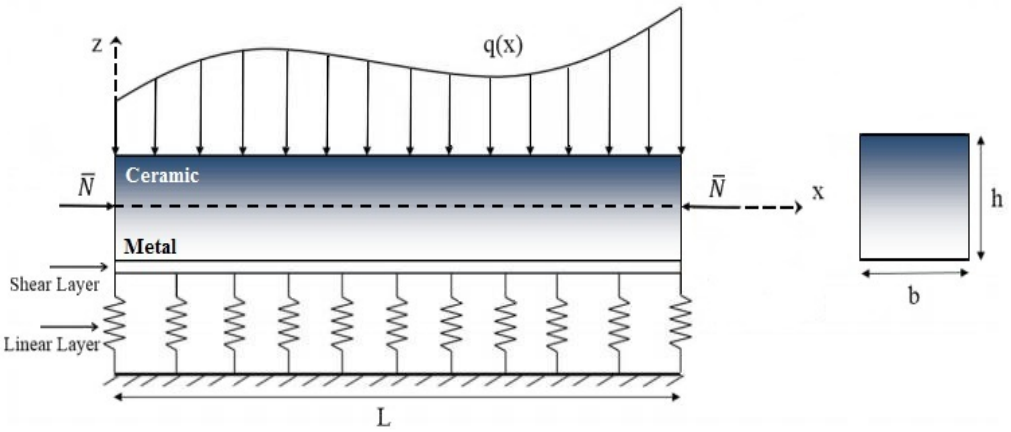

Fig. III-1 : Géométrie de la nano-poutre en FGM reposant sur une fondation élastique.

Contrairement aux théories mentionnées précédemment, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la présente théorie est seulement deux comme dans la théorie d'Euler-Bernoulli EBT.

Le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement à deux inconnues proposées est basé sur la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli (EBT) incluant la fonction trigonométrique en termes de coordonnées d'épaisseur pour représenter la déformation par cisaillement et est supposée comme suit :

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta\, f(z)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ w(x,z,t) &= w_0(x,t) \end{aligned} \tag{III. 6}$$

D'où u_0 et w_0 sont deux fonctions de déplacement inconnues de l'axe médian de la poutre. $f(z)$ Est la fonction de gauchissement représentant la variation des contraintes transversales de cisaillement et les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre et est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{z\left(\pi + 2\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right)}{(2+\pi)} \tag{III. 7}$$

Les déformations linéaires non nulles liées au champ de déplacement Eq. (1) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x + \beta\, f(z)\eta_x, \quad \gamma_{xz} = \beta\, g(z)\gamma_{xz}^0, \tag{III. 8}$$

D'où :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \eta_x = -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}, \quad \gamma_{xz}^0 = -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}, \tag{III. 9}$$

Et

$$g(z) = f'(z), \tag{III. 10}$$

D'où β est défini dans l'équation (**27**).

III.2.4. Équations de mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous la forme suivante :

$$0 = \int_0^t \delta(U + V - K)\, dt \tag{III. 11}$$

D'où t est le temps; t_1 et t_2 sont le temps initiale et la fin, respectivement; U est l'énergie de déformation, V est le travail effectué par les forces extérieures, et K est la variation de l'énergie cinétique de la poutre.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être indiquée comme :

$$\delta U = \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}\right) dx dz = \int_0^L \left(N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta k_x + \beta (S_x \delta \eta_x + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0)\right) dx \quad \text{(III. 12)}$$

Dans lequel les contraintes résultent N_x, M_x, S_x et Q_{xz} sont définis par :

$$\left(N_x, M_x, S_x\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1, z, \beta f(z)\right) dz, \quad Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \beta g(z) dz \quad \text{(III. 13)}$$

La première variation du travail effectué par les forces appliquées peut s'écrire sous la forme :

$$\delta V = \int_0^L \left[\left(N^T + N^H\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) - k_w w \delta w + k_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) \right] dx \quad \text{(III. 14)}$$

D'où k_w et k_s sont les coefficients linéaires et de cisaillement de la fondation élastique, respectivement, N^T et N^H sont les forces appliquées dues au changent de la température et l'humidité comme :

$$\begin{aligned} N^T &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z,T) (T - T_0) dz \\ N^H &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \beta(z,T) (C - C_0) dz \end{aligned} \quad \text{(III. 15)}$$

D'où T_0 et C_0 sont la température de référence et la concentration d'humidité, respectivement. La variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}\right] \rho(z) dx dz \\ &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \{ I_0 \left(\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0\right) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) - J_1 \beta \left(\dot{u}_0 \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \delta \dot{u}_0 \right) \\ &+ I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + K_2 \beta^2 \left(\frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} \right) + J_2 \beta \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \} dx dz \end{aligned} \quad \text{(III. 16)}$$

D'où la convention dot-super script indique la différenciation à l'égard de la variable du temps t; $\rho(z)$ la densité massique; et (I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) sont les inerties massiques définis comme :

$$\left(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f, z^2, z\, f, f^2\right) \rho(z) dz \tag{III. 17}$$

En utilisant les expressions de δU, δV, et δK des équations. (14) et (16) dans l'équation. (11) et intégrer par des parties, et collecter les coefficients de δu_0 et δw_0, les équations de mouvement suivantes de la poutre sont obtenues :

$$\delta u_0 : \ \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \tag{III. 18}$$

$$\delta w_0 : \ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \beta \left(\frac{\partial^4 S_x}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 Q_{xz}}{\partial x^3} \right) + \left(N^T + N^H\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) + \beta J_1 \left(\frac{\partial^3 \ddot{u}_0}{\partial x^3} \right) - 2\beta J_2 \left(\frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} \right) - \beta^2 K_2 \left(\frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial x^6} \right)$$

III.2.5. Théorie d'élasticité non-local d'une nano-poutre FGM :

Selon la théorie de l'élasticité non-locale (Eringen and Edelen 1972, Eringen 1983), l'état de contrainte à un point à l'intérieur d'un corps est considéré comme une fonction des contraintes de tous les points dans les régions voisines. Pour les solides élastiques homogènes, les composantes du tenseur des contraintes non locales σ_{ij} à chaque point x dans le solide peut être exprimé comme :

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega} \alpha\left(\left|x' - x\right|, \tau\right) t_{ij}(x') d\Omega(x') \tag{III. 19}$$

D'où $t_{ij}(x')$ sont les composants disponibles dans le tenseur de contrainte locale au point x qui sont associés aux composants tenseurs de déformation ε_{kl} comme :

$$t_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{III. 20}$$

Le concept de l'éq. (19) C'est que le stress non-local en tout point est une moyenne pondérée de la contrainte locale de tous les points proches, et le noyau nonlocal $\alpha(|x'-x|,\tau)$ considère l'influence de la déformation au point x' sur la contrainte au point x dans le corps élastique. Le paramètre α Est une longueur caractéristique interne (Par exemple, le paramètre de maille, distance granulaire, la longueur des liaisons C-C). Aussi $|x'-x|$ est la distance euclidienne et τ est une valeur constante comme suit :

$$\tau = \frac{e_0 a}{l} \tag{III. 21}$$

Qui présente la relation d'une longueur caractéristique interne, et une longueur caractéristique externe, l (Par exemple, longueur de fissure et longueur d'onde) en utilisant la constante, e_0, dépend de chaque matériau. La valeur de e_0 est évalué expérimentalement en comparant les courbes de diffusion des ondes planes avec celles de la dynamique atomique. Dans le modèle non local d'élasticité, les points subissent un mouvement de translation comme dans le cas classique, mais la contrainte en un point dépend de la déformation dans une région proche de ce point. En ce qui concerne l'interprétation physique, le modèle non local introduit des interactions à longue portée entre les points d'un modèle de continuum. De telles interactions à longue distance se produisent entre des atomes chargés ou des molécules dans un solide. Eringen (Eringen 1972, Eringen 1983) a déterminé numériquement la forme fonctionnelle du noyau. Par une sélection appropriée de la fonction du noyau, Eringen a montré que l'équation constitutive non locale donnée sous forme intégrale (voir l'équation (19)) peut être représentée sous une forme différentielle équivalente à :

$$\left(1-(e_0 a)\nabla^2\right)\sigma_{kl} = t_{kl} \tag{III. 22}$$

Dans lequel ∇^2 est l'opérateur laplacien. Par conséquent, la longueur d'échelle $e_0 a$ considère les effets de petite taille sur le comportement des nanostructures. Ainsi, les relations constitutives de la théorie non locale pour une nano-poutre FGM peuvent être écrites comme :

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11} & 0\\ 0 & Q_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \tag{III. 23}$$

Dans lequel $\mu = (e_0 a)^2$ et les coefficients de rigidité, Q_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = E(z),\ Q_{44} = G(z). \tag{III. 24}$$

Intégrant l'éq. (23) sur la section transversale de la poutre donne la force-déformation et le moment-déformation des poutres FGM raffinées non locales comme suit :

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & \beta B_{11}^s \\ B_{11} & D_{11} & \beta D_{11}^s \\ \beta B_{11}^s & \beta D_{11}^s & \beta^2 H_{11}^s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x \\ \eta_x \end{Bmatrix} \tag{III. 25a}$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)Q_{xz} = \beta^2 A_{44}^s \gamma_{xz}^0 \tag{III. 25b}$$

D'ou

$$\left\{A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s\right\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z)\left(1, z, z^2, f(z), z\ f(z), f^2(z)\right)dz\,, \tag{III. 26a}$$

$$A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}(z)\left[g(z)\right]^2 dz, \tag{III. 26b}$$

avec

$$\beta = -\frac{\left(D_{11}^s A_{11} - B_{11} B_{11}^s\right)}{\left(A_{11} A_{44}^s + A_{11}\lambda^2 H_{11}^s - B_{11}^s \lambda^2\right)}, \tag{III. 27a}$$

Pour une poutre isotrope β prend l'expression suivante :

$$\beta = -\frac{D_{11}^s}{\left(A_{44}^s + \lambda^2 H_{11}^s\right)}, \tag{III. 27b}$$

En substituant l'équation (25) dans l'équation. (18), les équations directrices peuvent être écrites en termes de déplacements généralisés (u_0 et w_0) comme :

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \beta B_{11}^s \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3}, \tag{III. 28a}$$

$$B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}-D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\beta\left(B_{11}^s\frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5}-2D_{11}^s\frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6}\right)-\beta^2\left(H_{11}^s\frac{\partial^8 w_0}{\partial x^8}-A_{44}^s\frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6}\right)+\left(N^T+N^H\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$+k_w w-k_s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=I_0\ddot{w}_0+I_1\left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}\right)-I_2\left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}\right)+\beta J_1\left(\frac{\partial^3\ddot{u}_0}{\partial x^3}\right)-2\beta J_2\left(\frac{\partial^4\ddot{w}_0}{\partial x^4}\right)-\beta^2 K_2\left(\frac{\partial^6\ddot{w}_0}{\partial x^6}\right) \quad \text{(III. 28b)}$$

III.3. Solution analytique :

La solution de Navier est utilisée pour déterminer la solution analytique pour la nano poutre en FGM simplement appuyée.

La solution prend la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix}u_0(x)\\w_0(x)\end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}U_m\cos(\lambda x)e^{i\omega t}\\W_m\sin(\lambda x)e^{i\omega t}\end{Bmatrix} \quad \text{(III. 29)}$$

D'où $\lambda=m\pi/a$, (U_m, W_m) sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée au nième mode propre, Substituer les expressions de u_0 et w_0 de l'éq. (29) dans les équations du mouvement, éq. (28), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}-\xi\,\omega^2\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\m_{12} & m_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}U_m\\W_m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad \text{(III. 30)}$$

D'où

$$\begin{aligned}
a_{11}&=-A_{11}\lambda^2\\
a_{12}&=B_{11}\lambda^3-\beta\,B_{11}^s\lambda^5\\
a_{22}&=-D_{11}\lambda^4-2\beta\,D_{11}^s\lambda^6-\beta^2\left(H_{11}^s\lambda^8+A_{55}^s\lambda^6\right)+\left(N^T+N^H\right)\lambda^2-k_w-k_s\lambda^2\\
m_{11}&=-I_0\\
m_{12}&=I_1\lambda+\beta\,J_1\lambda^3\\
m_{22}&=-I_0-I_2\lambda^2-2\beta\,J_2\lambda^4+\beta^2\,K_2\lambda^6\\
\lambda&=1+\mu\,\lambda^2
\end{aligned} \quad \text{(III. 31)}$$

III.4. Divers environnements hygro-thermiques :

III.4.1. Changement uniforme d'humidité et de température :

Pour une nano-poutre en FGM à une concentration d'humidité de référence C_0 et température de référence T_0, l'humidité et la température sont uniformément augmentées à une valeur finale C et T, respectivement, où le changement d'humidité et de température $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$.

III.4.2. Changement linéaire d'humidité et de température :

Pour une FGM nano-poutre d'ou laquelle l'épaisseur de la poutre est suffisamment fine, les distributions d'humidité et de température sont linéairement variables dans l'épaisseur comme suit :

$$T = T_m + \Delta T\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right), C = C_m + \Delta C\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{(III. 32)}$$

$(\Delta T, \Delta C)$ Dans l'Eq. (32) pourrait être défini $\Delta T = T - T_0$, $\Delta C = C - C_0$.

III.4.3. Changement Sinusoïdal d'humidité et de température :

Les champs d'humidité et de température lorsque la nano-poutre FGM est exposé à une élévation sinusoïdale (de l'humidité / de la température) à travers l'épaisseur peut être défini comme suit : (Na et Kim, 2004 ; Ebrahimi et Barati, 2016b) :

$$T = T_m + \Delta T\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right), \quad \text{(III. 33a)}$$

$$C = C_m + \Delta C\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{(III. 33b)}$$

D'où $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$ sont les changements de température et d'humidité.

III.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement mécanique en vibration libre des nano poutres en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé d'où le nombre de fonctions inconnues est seulement deux, tandis que trois ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. La théorie présentée a une forte similitude avec la théorie classique des poutres dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre IV :

Résultats de l’analyse des vibrations libres sous chargements hygrothermique de la nano poutre en FGM

Chapitre IV : Résultats de l’analyse des vibrations libres sous chargement hygrothermique de la nano poutre en FGM

IV.1. Introduction :

L’intérêt de cette section est d’exposer les résultats numériques de l’analyse du comportement hygro-thermo-élastique de la vibration libre des nano poutres en FGMs en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique. D’où le nombre de fonctions inconnues est seulement deux, tandis que trois ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. La théorie présentée a une forte similitude avec la CBT dans de nombreux aspects, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l’épaisseur tout en remplissant les conditions de contraintes de cisaillement nulle sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles de la nano-poutre FGM en tant que module d'Young, coefficient de Poisson, coefficients de dilatation thermique et d'humidité varient sans interruption dans la direction de l’épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

IV.2. Validation analytique de la nouvelle théorie :

L'approche générale décrite dans les sections précédentes pour l'analyse hygro-thermomécanique des vibrations d'une poutre FGM nanométrique simplement appuyée a été étudiée à travers de nombreux exemples numériques pour vérifier la précision de la nouvelle théorie non-locale de poutre de déformation de cisaillement trigonométrique proposée.

La vérification est effectuée en supposant que les valeurs de différentes quantités dans la céramique et le métal : $L(longuer) = 10nm$, $b(largeur) = 1nm$, et $h(épaisseur) = variable$. Pour indiquer l'exactitude de la validité du présent modèle, une étude comparative est fournie.

Le tableau IV.1 montre la fréquence naturelle des nano-poutres FGM présentées sous variation linéaire de température. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés indépendamment sur la base de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT) et de la théorie des poutres de déformation de cisaillement parabolique (PSBT), et ceux rapportés par

Ebrahimi et Salari (2015) Pour la théorie des poutres de Timoshenko (TBT), lorsque le paramètre non local passe de 0 à 4 nm^2.

On peut observer que le présent modèle peut évaluer le comportement vibrationnel des nano-poutres FGM avec un excellent accord. Le facteur de correction de cisaillement est pris égal à 5/6 pour la théorie de Timoshenko.

Tableau IV.1: Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre nano-FGM sous variation de température linéaire sans fondation élastique avec différents indices de gradient ($L/h = 20$).

μ (nm^2)	$p = 0$				$p = 0.2$			
	CBT	TBT[(a)]	PSBT	Present	CBT	TBT[(a)]	PSBT	Present
0	9.1796	9.1475	9.1475	9.1477	7.3681	7.3420	7.3422	7.3423
1	8.6910	8.6601	8.6601	8.6603	6.9670	6.9419	6.9421	6.9422
2	8.2608	8.2310	8.2310	8.2311	6.6135	6.5892	6.5894	6.5895
3	7.8777	7.8488	7.8488	7.8490	6.2983	6.2747	6.2748	6.2750
4	7.5334	7.5053	7.5053	7.5054	6.0145	5.9916	5.9917	5.9918
	$p = 1$				$p = 5$			
	CBT	TBT[(a)]	PSBT	Present	CBT	TBT[(a)]	PSBT	Present
0	5.3740	5.3537	5.3537	5.3538	4.3059	4.2875	4.2868	4.2869
1	5.0676	5.0480	5.0480	5.0481	4.0496	4.0317	4.0311	4.0311
2	4.7967	4.7777	4.7777	4.7778	3.8223	3.8049	3.8043	3.8043
3	4.5545	4.5360	4.5360	4.5361	3.6185	3.6015	3.6009	3.6009
4	4.3357	4.3177	4.3177	4.3178	3.4338	3.4172	3.4166	3.4167

(a) Ebrahimi and Salari (2015)

IV. 3. Résultats numériques et discussions :

Les propriétés matérielles de la FGM nano-poutre en tant que module d'Young, coefficient de Poisson, coefficients de dilatation thermique et d'humidité varient dans le sens de l'épaisseur selon le modèle d'homogénéisation de loi de puissance. Dans un environnement thermique, une température élevée modifie de manière importante les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs. Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte les propriétés matérielles dépendants de la température pour prédire le comportement des FGMs sous haute température avec plus de précision.

Les propriétés matérielles dépendants de la température d'une poutre P-FGM non local qui est faite d'acier **(SUS 304)** avec $\beta_m = 0.0005$ et Silicon nitride **(Si3N4)** avec $\beta_c = 0$ sont indiquées dans Le tableau IV.2.

Tableau IV. 2 : Propriétés dépendantes de la température des constituants (Ebrahimi et Salari, 2015).

Materials	**Properties**	**P_0**	**P_{-1}**	**P_1**	**P_2**	**P_3**
Si_3N_4	E(Pa)	3.4843e+11	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
	$\alpha(K^{-1})$	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
	$\rho(Kg/m^3)$	2370	0	0	0	0
	v	0.24	0	0	0	0
SUS 304	E(Pa)	2.0104e+11	0	3.079e-4	-6.534e-7	0
	$\alpha(K^{-1})$	12.33e-6	0	8.086e-4	0	0
	$\rho(Kg/m^3)$	8166	0	0	0	0
	v	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0

Pour bien illustrer l'analyse **Hygro-thermo-structurale**, Trois types de conditions environnementales sont étudiées, à savoir les charges hygrothermiques uniformes, linéaires et sinusoïdales.

IV.3.1. Divers environnements hygro-thermiques :

IV.3.1.1. Changement uniforme d'humidité et de température :

Pour une nano-poutre en FGM à une concentration d'humidité de référence C_0 et température de référence T_0, l'humidité et la température sont uniformément augmentées à une valeur finale C et T, respectivement, où le changement d'humidité et de température $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$.

IV.3.1.2. Changement linéaire d'humidité et de température :

Pour une FGM nano-poutre d'où laquelle l'épaisseur de la poutre est suffisamment fine, les distributions d'humidité et de température sont linéairement variables dans l'épaisseur comme suit :

$$T = T_m + \Delta T\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right), C = C_m + \Delta C\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{(IV. 1)}$$

$(\Delta T, \Delta C)$ Dans l'Eq. (IV. 1) pourrait être défini $\Delta T = T - T_0$, $\Delta C = C - C_0$.

IV.3.1.3. Changement Sinusoïdal d'humidité et de température :

Les champs d'humidité et de température lorsque la nano-poutre FGM est exposé à une élévation sinusoïdale (de l'humidité / de la température) à travers l'épaisseur peut être défini comme suit : (Na et Kim, 2004 ; Ebrahimi et Barati, 2016b) :

$$T = T_m + \Delta T\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)\right), \qquad \text{(IV .2a)}$$

$$C = C_m + \Delta C\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)\right) \qquad \text{(IV. 2b)}$$

D'où $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$ sont les changements de température et d'humidité.

L'augmentation de la température dans la surface entièrement métallique de la nano-poutre FGM à la température de référence T_0 est $T_m - T_0 = 5\text{K}$.

Pour une meilleure présentation des résultats, Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle suivantes :

$$\hat{\omega} = \omega L^2\sqrt{\frac{\rho_c A}{E_c I}},\ K_w = k_w\frac{L^4}{E_c I}, K_p = k_p\frac{L^2}{E_c I} \qquad \text{(IV. 3)}$$

Les résultats numériques sont présentés dans les tableaux IV.3 – IV.5 en utilisant la présente théorie et les différentes théories des poutres. Le facteur de correction de cisaillement pour la théorie de FSDBT est pris $\boldsymbol{k}_s = 5/6$.

Les tableaux IV.3, IV.4 et IV.5 montrent les variations des fréquences adimensionnelles des nano-poutres FGM reposant sur des fondations élastiques pour différentes théories de poutres et trois conditions environnementales appelées chargement hygro-thermiques uniformes, linéaires et sinusoïdales à $L/h = 20$. On peut voir que toutes les théories des poutres proposées fournissent un excellent accord car les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle sont cohérentes avec la solution analytique présentée. En outre, il est observé que les résultats de la fréquence des théories de poutre de déformation de cisaillement sont inférieurs à la théorie de poutre classique en raison de la cause que la CBT est incapable de capturer l'effet de déformation de cisaillement. Notez que la CBT ne tient pas compte de l'effet de déformation de cisaillement, de sorte que les fréquences non-dimensionnelle prédites par CBT sont surestimées. La fréquence non-dimensionnelle diminue

à mesure que le paramètre non local augmente, pour tout type de chargement hygro-thermique. La raison en est la plus faible rigidité de la nano-poutre lorsque sa taille diminue.

Par conséquent, les variations d'humidité ou de température ont un impact important sur la rigidité et la réponse vibratoire des nano-poutres FGM dépendant de la taille et des fréquences naturelles indépendamment du type de chargement hygrothermique. De plus, il est observable que la distribution sinusoïdale de la température et de l'humidité fournit une fréquence naturelle plus élevée que les autres chargements hygro-thermiques ; le chargement hygro-thermique uniforme a la plus basse fréquence.

Tableau IV.3: Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une poutre nano-FGM simplement appuyée sous chargement hygro-thermique uniforme pour différentes théories de poutres ($K_w = 0$, $K_p = 0$, $L/h = 20$).

μ	Beam theory	$(\Delta T, \Delta C) = (0, 0)$			$(\Delta T, \Delta C) = (20, 1)$			$(\Delta T, \Delta C) = (40, 2)$		
		$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$
0	CBT	7.9923	5.9506	4.8629	7.4706	5.2423	4.0328	6.9006	4.4134	2.9692
	TBT	7.9683	5.9324	4.8466	7.4449	5.2216	4.0132	6.8728	4.3887	2.9423
	PSBT	7.9684	5.9324	4.8460	7.4451	5.2214	4.0124	6.8729	4.3887	2.9414
	Present	7.9686	5.9325	4.8461	7.4452	5.2215	4.0125	6.8731	4.3888	2.9414
1	CBT	7.6249	5.6770	4.6393	7.0759	4.9289	3.7594	6.4710	4.0354	2.5845
	TBT	7.6020	5.6597	4.6238	7.0512	4.9089	3.7402	6.4439	4.0108	2.5564
	PSBT	7.6021	5.6597	4.6233	7.0513	4.9089	3.7395	6.4441	4.0108	2.5554
	Present	7.6022	5.6598	4.6233	7.0515	4.9090	3.7395	6.4442	4.0110	2.5554
2	CBT	7.3039	5.4380	4.4440	6.7285	4.6511	3.5148	6.0889	3.6902	2.2125
	TBT	7.2819	5.4214	4.4292	6.7047	4.6316	3.4960	6.0625	3.6655	2.1824
	PSBT	7.2820	5.4214	4.4286	6.7048	4.6316	3.4953	6.0627	3.6655	2.1813
	Present	7.2822	5.4215	4.4287	6.7050	4.6317	3.4953	6.0628	3.6657	2.1814
3	CBT	7.0203	5.2269	4.2714	6.4193	4.4018	3.2933	5.7452	3.3700	1.8393
	TBT	6.9992	5.2109	4.2572	6.3963	4.3828	3.2747	5.7193	3.3450	1.8057
	PSBT	6.9993	5.2109	4.2567	6.3964	4.3828	3.2740	5.7195	3.3450	1.8045
	Present	6.9994	5.2110	4.2567	6.3965	4.3829	3.2741	5.7196	3.3452	1.8045
4	CBT	6.7673	5.0385	4.1175	6.1415	4.1760	3.0904	5.4328	3.0686	1.4438
	TBT	6.7470	5.0231	4.1038	6.1191	4.1574	3.0721	5.4074	3.0431	1.4039
	PSBT	6.7471	5.0231	4.1033	6.1192	4.1574	3.0714	5.4076	3.0431	1.4024
	Present	6.7472	5.0232	4.1033	6.1194	4.1575	3.0714	5.4077	3.0432	1.4025

Tableau IV.4: Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une nano-poutre FGM simplement appuyée sous chargement hygro-thermique linéaire pour différentes théories de poutres ($K_w = 0$, $K_p = 0$, $L/h = 20$).

μ	Beam theory	$(\Delta T, \Delta C) = (0, 0)$			$(\Delta T, \Delta C) = (20, 1)$			$(\Delta T, \Delta C) = (40, 2)$		
		$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$
0	CBT	7.9053	5.8680	4.7844	7.6880	5.5817	4.4153	7.4600	5.2763	4.0085
	TBT	7.8810	5.8496	4.7679	7.6631	5.5623	4.3974	7.4343	5.2557	3.9887
	PSBT	7.8812	5.8496	4.7673	7.6632	5.5623	4.3967	7.4344	5.2557	3.9880
	Present	7.8813	5.8497	4.7674	7.6634	5.5624	4.3967	7.4345	5.2558	3.9881
1	CBT	7.5336	5.5904	4.5570	7.3051	5.2885	4.1670	7.0644	4.9645	3.7326
	TBT	7.5105	5.5728	4.5413	7.2812	5.2698	4.1498	7.0397	4.9445	3.7132
	PSBT	7.5106	5.5728	4.5407	7.2813	5.2698	4.1491	7.0398	4.9445	3.7125
	Present	7.5107	5.5729	4.5407	7.2814	5.2699	4.1492	7.0400	4.9446	3.7125
2	CBT	7.2086	5.3476	4.3580	6.9691	5.0306	3.9478	6.7162	4.6882	3.4854
	TBT	7.1864	5.3307	4.3429	6.9461	5.0126	3.9311	6.6923	4.6688	3.4663
	PSBT	7.1865	5.3307	4.3423	6.9463	5.0126	3.9304	6.6925	4.6688	3.4656
	Present	7.1866	5.3308	4.3424	6.9464	5.0127	3.9305	6.6926	4.6689	3.4657
3	CBT	6.9211	5.1327	4.1819	6.6711	4.8011	3.7519	6.4063	4.4405	3.2612
	TBT	6.8997	5.1164	4.1674	6.6489	4.7836	3.7357	6.3831	4.4216	3.2424
	PSBT	6.8998	5.1164	4.1668	6.6491	4.7836	3.7350	6.3833	4.4216	3.2417
	Present	6.8999	5.1165	4.1668	6.6492	4.7837	3.7351	6.3834	4.4217	3.2418
4	CBT	6.6644	4.9408	4.0246	6.4042	4.5949	3.5752	6.1277	4.2163	3.0556
	TBT	6.6437	4.9251	4.0105	6.3827	4.5780	3.5593	6.1052	4.1978	3.0370
	PSBT	6.6439	4.9251	4.0100	6.3829	4.5780	3.5588	6.1053	4.1978	3.0363
	Present	6.6440	4.9252	4.0100	6.3830	4.5781	3.5588	6.1054	4.1979	3.0364

Tableau IV.5: Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une nano-poutre FGM simplement appuyée sous chargement hygro-thermique sinusoïdal pour différentes théories de poutres ($K_w = 0$, $K_p = 0$, $L/h = 20$).

μ	Beam theory	$(\Delta T, \Delta C) = (0, 0)$			$(\Delta T, \Delta C) = (20, 1)$			$(\Delta T, \Delta C) = (40, 2)$		
		$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 0.2$	$p = 1$	$p = 5$
0	CBT	7.9053	5.8680	4.7844	7.7592	5.6833	4.5349	7.6070	5.4897	4.2683
	TBT	7.8810	5.8496	4.7679	7.7344	5.6642	4.5174	7.5818	5.4699	4.2497
	PSBT	7.8812	5.8496	4.7673	7.7346	5.6642	4.5168	7.5819	5.4699	4.2490
	Present	7.8813	5.8497	4.7674	7.7347	5.6643	4.5168	7.5820	5.4700	4.2490
1	CBT	7.5336	5.5904	4.5570	7.3799	5.3956	4.2936	7.2194	5.1907	4.0102
	TBT	7.5105	5.5728	4.5413	7.3562	5.3773	4.2768	7.1953	5.1717	3.9922
	PSBT	7.5106	5.5728	4.5407	7.3564	5.3773	4.2762	7.1954	5.1717	3.9915
	Present	7.5107	5.5729	4.5407	7.3565	5.3774	4.2762	7.1955	5.1718	3.9916
2	CBT	7.2086	5.3476	4.3580	7.0475	5.1430	4.0811	6.8791	4.9272	3.7812
	TBT	7.1864	5.3307	4.3429	7.0248	5.1254	4.0649	6.8558	4.9087	3.7637
	PSBT	7.1865	5.3307	4.3423	7.0249	5.1254	4.0643	6.8559	4.9087	3.7630
	Present	7.1866	5.3308	4.3424	7.0250	5.1255	4.0644	6.8560	4.9088	3.7631
3	CBT	6.9211	5.1327	4.1819	6.7530	4.9188	3.8920	6.5768	4.6921	3.5756
	TBT	6.8997	5.1164	4.1674	6.7310	4.9018	3.8763	6.5543	4.6742	3.5585
	PSBT	6.8998	5.1164	4.1668	6.7312	4.9018	3.8757	6.5544	4.6742	3.5579
	Present	6.8999	5.1165	4.1668	6.7313	4.9019	3.8757	6.5545	4.6743	3.5579
4	CBT	6.6644	4.9408	4.0246	6.4894	4.7178	3.7219	6.3058	4.4806	3.3892
	TBT	6.6437	4.9251	4.0105	6.4682	4.7013	3.7067	6.2840	4.4631	3.3724
	PSBT	6.6439	4.9251	4.0100	6.4684	4.7013	3.7061	6.2840	4.4631	3.3718
	Present	6.6440	4.9252	4.0100	6.4685	4.7014	3.7062	6.2842	4.4632	3.3718

Des résultats supplémentaires sont illustrés sur les figures IV.1 – IV.6 en utilisant la théorie d'ordre élevé à deux variables des poutres. Dans cette partie, on prend $L/h = 20$.

La figure IV.1 illustre la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle de nano-poutres sinusoïdales simplement appuyées par rapport à l'augmentation de la concentration d'humidité uniforme, linéaire et sinusoïdale dans le domaine de pré-flambage pour différentes valeurs du paramètre non local à $p = 1$, $L/h = 20$, $K_w = K_p = 0$ et $\Delta T = 40(K)$. Il est observable qu'à une condition environnementale spécifiée, le modèle de poutre non local crée une fréquence naturelle inférieure à celle du modèle de poutre local. En outre, il est montré que pour toutes les conditions environnementales, la fréquence naturelle adimensionnelle diminue

avec l'augmentation d'humidité. Par conséquent, la concentration de l'humidité et la non-localité ont un impact important sur l'adoucissement et une caractéristique souhaitable dans la structure de poutre qui doivent être prises en compte dans l'analyse des nano-poutres FGM.

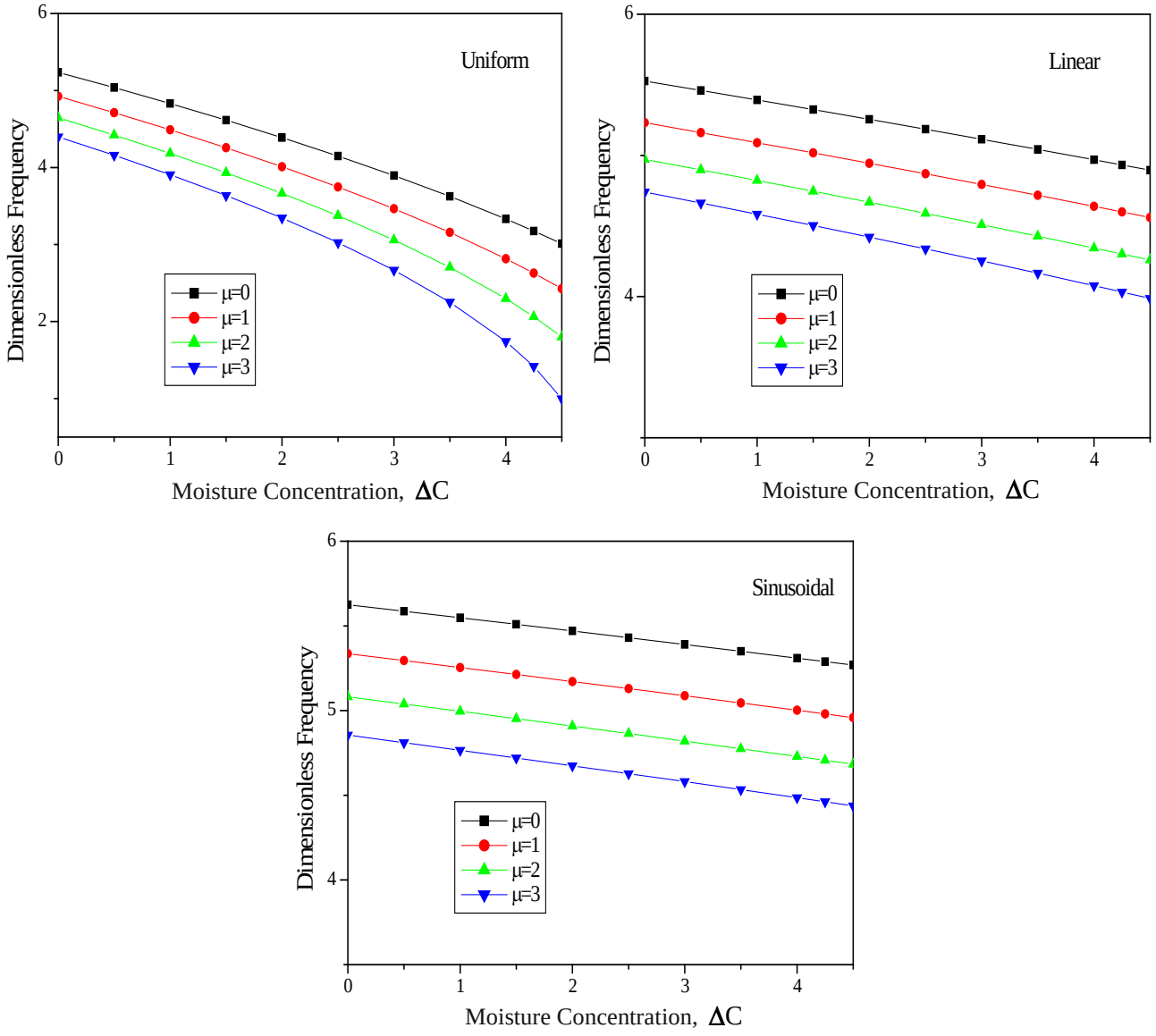

Figure IV.1 Influence de l'humidité et le paramètre non local sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM simplement appuyée pour diverses charges hygrothermiques **(** $p=1$, $L/h=20$, $K_w=0$, $K_p=0$, $\Delta T = 40\,(\mathrm{K})$).

Les variations des fréquences propres adimensionnelles des FGM nano-poutres simplement appuyées en fonction de différentes augmentations de température pour différentes valeurs de concentration d'humidité à $p=1$, $L/h=20$, $K_w=K_p=0$ et $l=2(\text{nm})^2$ sont représentés sur la figure IV.2.

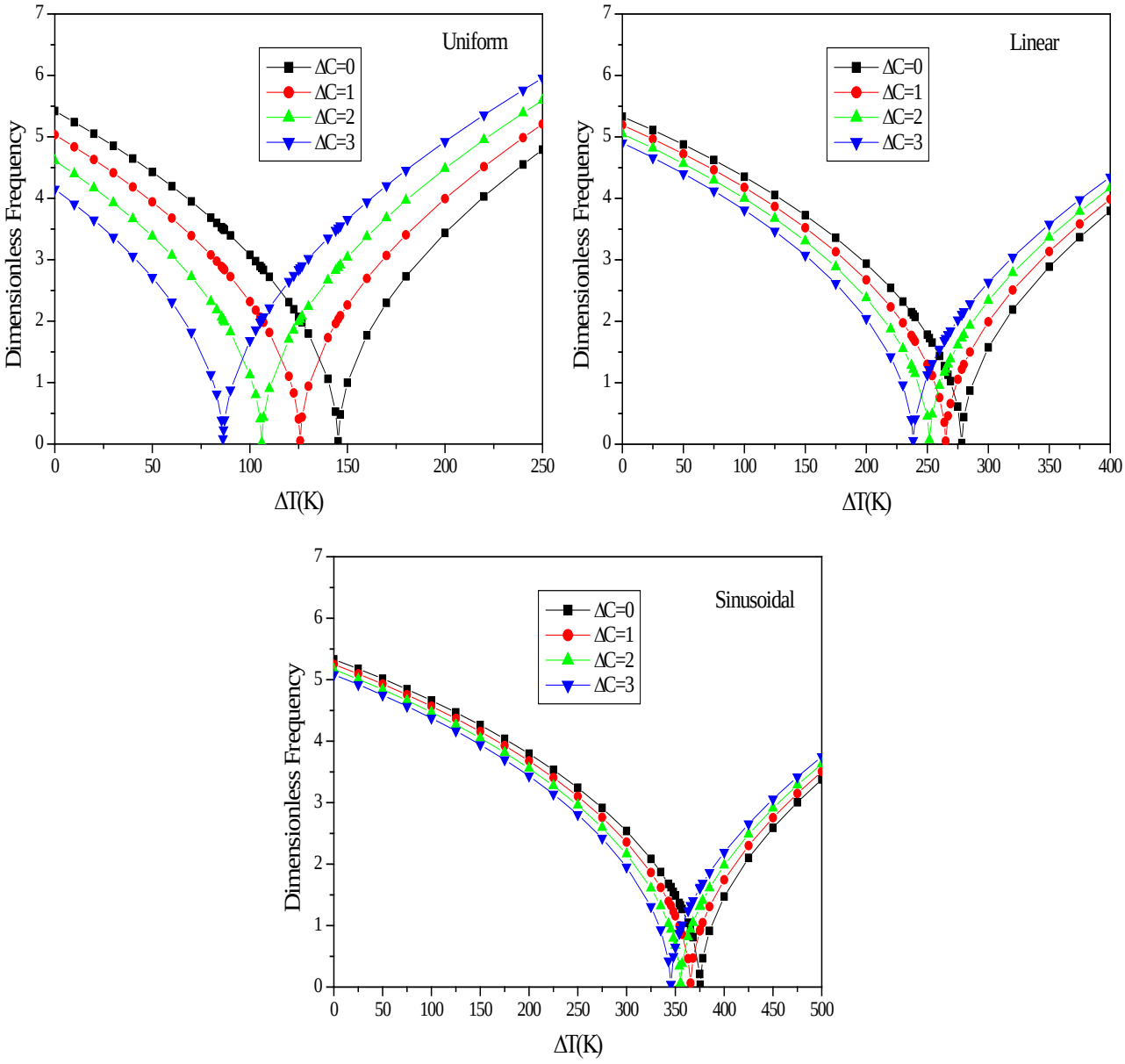

Figure IV.2. Influence de l'humidité sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM simplement appuyée par rapport aux différentes élévations de température ($p=1, L/h=20, K_w=0, K_p=0$)).

Pour tout type de chargements hygro-thermiques avec l'incrément de température, les fréquences propres adimensionnelles des nano-poutres FGM atteignent la valeur zéro à proximité du point de température critique. Ceci fait particulièrement référence à la

dégradation de raideur du nano-poutre lorsque la température augmente. Après le point de ramification, la température croissante donne des valeurs plus grandes de fréquence naturelle. En outre, on voit que la concentration d'humidité a une influence importante sur la configuration de pré-flambement et post- flambement de la nano-poutre FGM sous des charges hygro-thermiques.

La figure IV.3.indique l'influence des paramètres de fondation élastique sur le comportement vibratoire de pré-flambement et de post-flambage de la nano-poutre en FGM par rapport à diverses augmentations de température sous des chargements thermiques $\Delta C = 0$ et hygro-thermiques $\Delta C = 2$ lorsque $p = 1$, $L/h = 20$ et $l = 2(\text{nm})^2$.

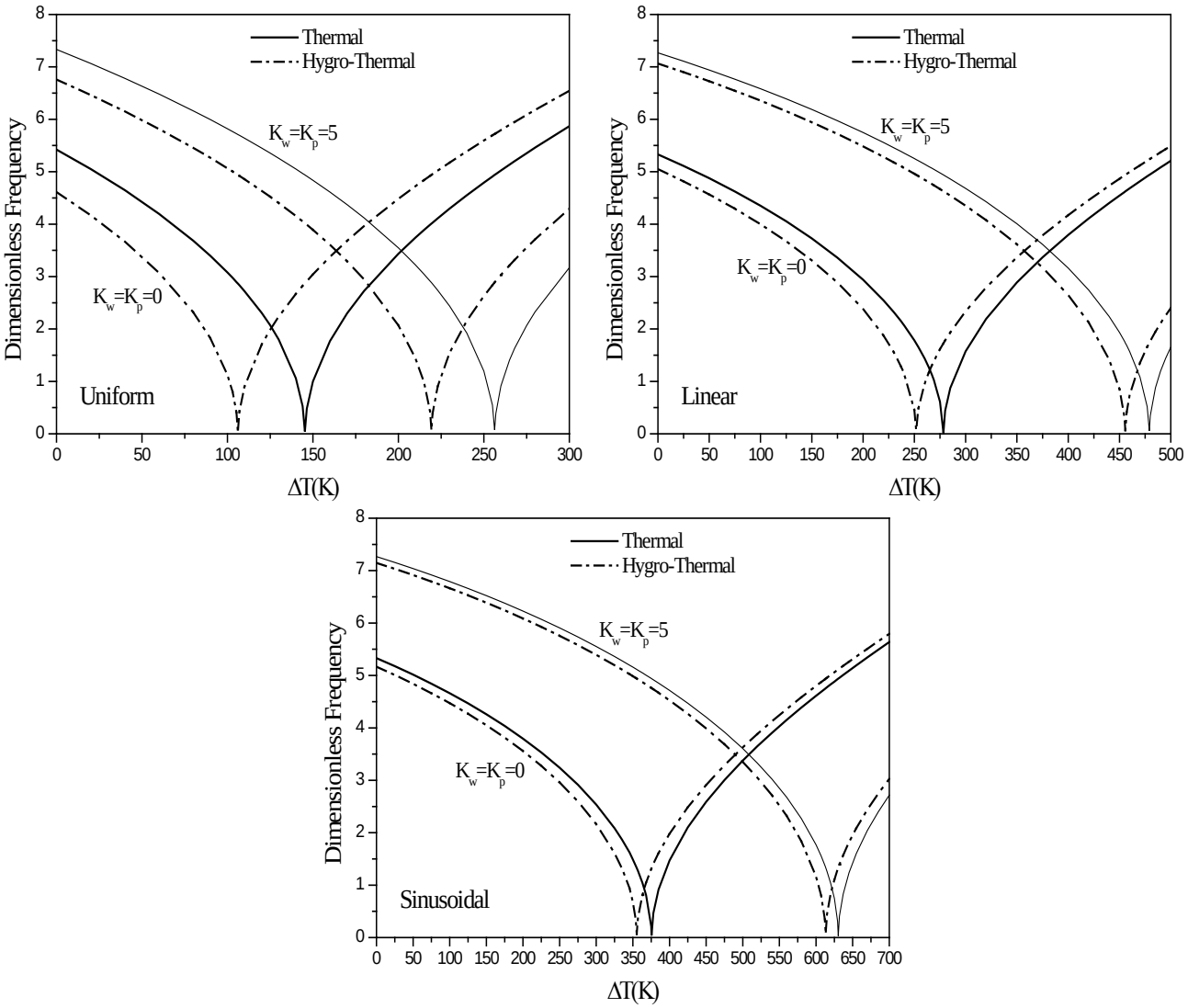

Figure IV.3 : Influence de la fondation élastique sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM simplement appuyée en fonction du changement de température pour les environnements thermiques, $\Delta C = 0$ et hygrothermiques, $\Delta C = 2$ ($p = 1$, $L/h = 20$, $\mu = 2\,(\text{nm})^2$).

On peut voir que l'existence d'une fondation élastique améliore la structure de la poutre dans un environnement hygrothermique et augmente la température critique de flambement. Dans un environnement d'humidité spécifique, l'inclusion de la couche de cisaillement ou du paramètre de fondation Pasternak (K_p) donne des résultats de plus grande amplitude pour la fréquence adimensionnelle que ceux avec l'inclusion de paramètre de fondation de Winkler (K_w).

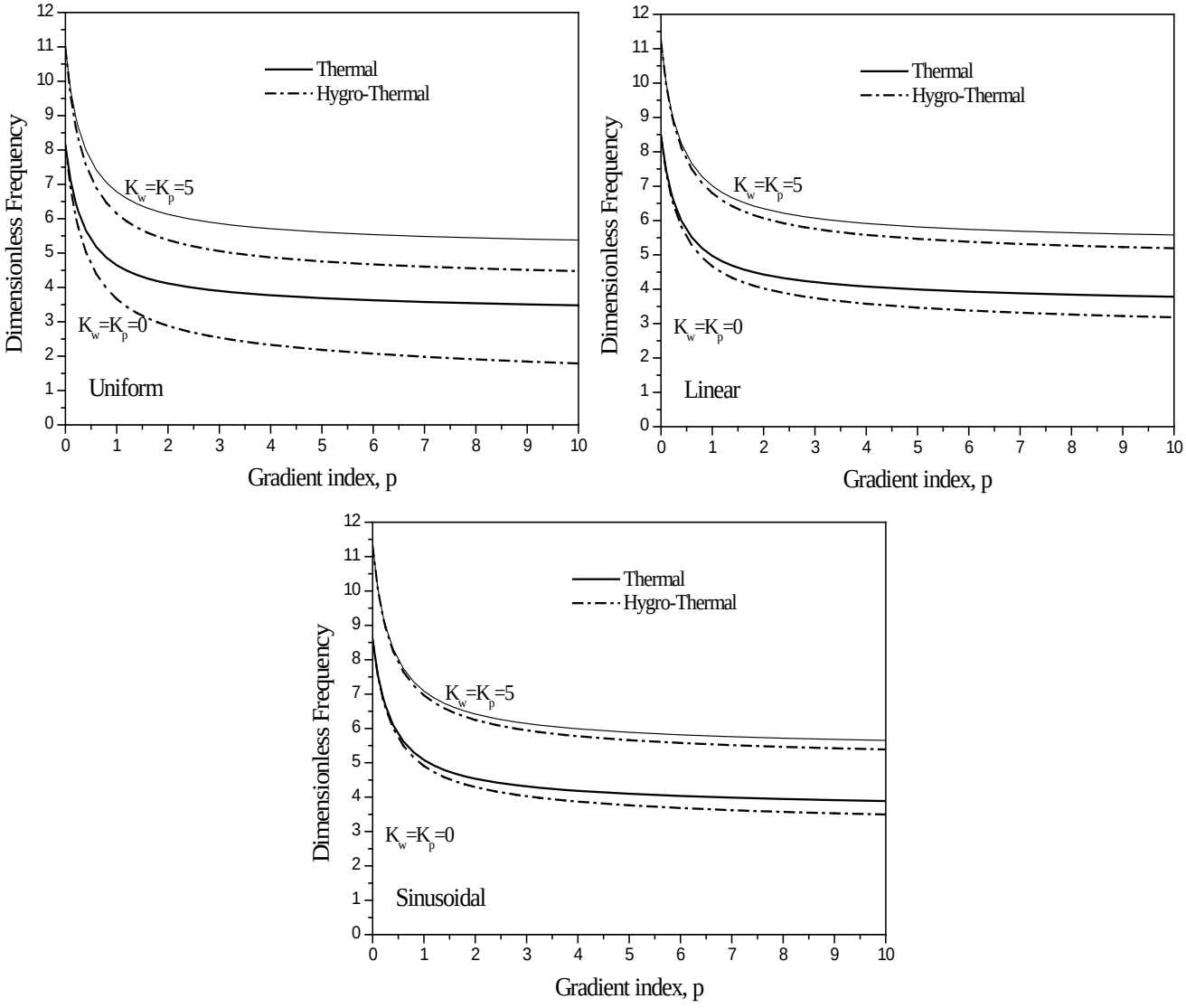

Figure IV.4 : L'effet de l'indice de matériel sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM pour des environnements thermiques, $\Delta C = 0$ et hygrothermiques, $\Delta C = 2$ ($L/h = 20$, $\mu = 2\,(\mathrm{nm})^2$, $\Delta T = 40\,(\mathrm{K})$).

La variation de la fréquence propre par rapport à l'indice de fraction volumique pour diverses charges thermiques et hygrothermiques avec et sans fondation élastique en $L/h = 20$

et $l = 2(\text{nm})^2$ est représentée sur la figure IV.4. On peut voir que sous n'importe quel type de conditions environnementales, la fréquence naturelle diminue avec l'augmentation de l'indice de gradient, significativement pour les indices de fraction volumique inférieurs. On peut voir que l'existence d'une fondation élastique améliore la structure de la poutre dans un environnement hygrothermique et augmente la fréquence adimensionnelle. En outre, il est observé que l'effet d'humidité sur les réponses de fréquences naturelles adimensionnelles des nano-poutres fonctionnellement gradués est plus important pour des valeurs plus grandes de l'indice de fraction volumique. Ceci est dû au fait que des valeurs plus faibles d'indice de non-homogénéité correspondent à une plus grande partie de la phase céramique qui a un coefficient de dilatation d'humidité égal à zéro ($\beta_c = 0$).

La figure IV.5 indique l'influence du rapport d'élancement sur les fréquences propres des nano-poutres en FGM pour différents types de chargement thermiques et hygrothermiques avec et sans fondation élastique à $p = 1$ et $l = 2(\text{nm})^2$. Pour toutes les conditions environnementales, la fréquence adimensionnelle augmente pour des faibles rapports d'élancement, puis diminue pour des rapports d'élancement plus élevés, ce qui indique l'importance de la déformation de cisaillement lorsque l'épaisseur de la poutre est grand. De plus, on voit que l'effet hygrothermique n'est pas significatif pour des valeurs plus faibles de l'élancement. Par conséquent, lorsque le taux d'élancement augmente, l'effet du chargement hygrothermique devient plus remarquable.

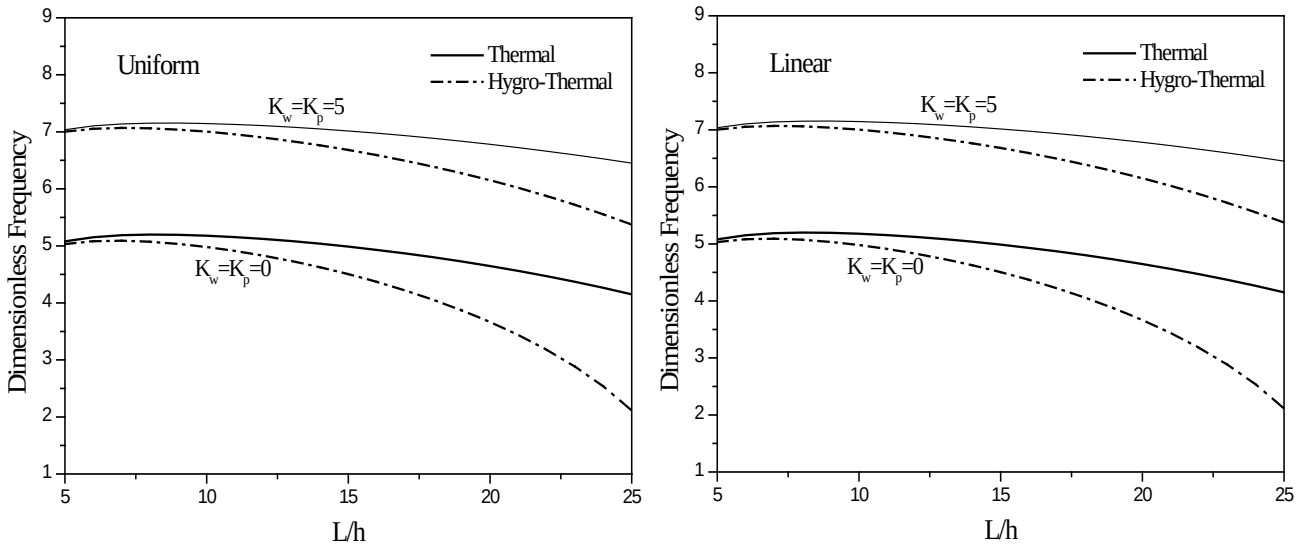

Figure IV.5 : L'effet du rapport longueur/épaisseur sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM pour diverses augmentations d'humidité ($p = 1, \mu = 2\,(\text{nm})^2$)).

La figure IV.6 montre la variation de la fréquence adimensionnelle du model sinusoïdale de la nano-poutre FGM par rapport aux paramètres de Winkler et de Pasternak pour différentes concentrations d'humidité uniformes et linéaires à $p=1$, $L/h=20$ et $l=2(\text{nm})^2$.

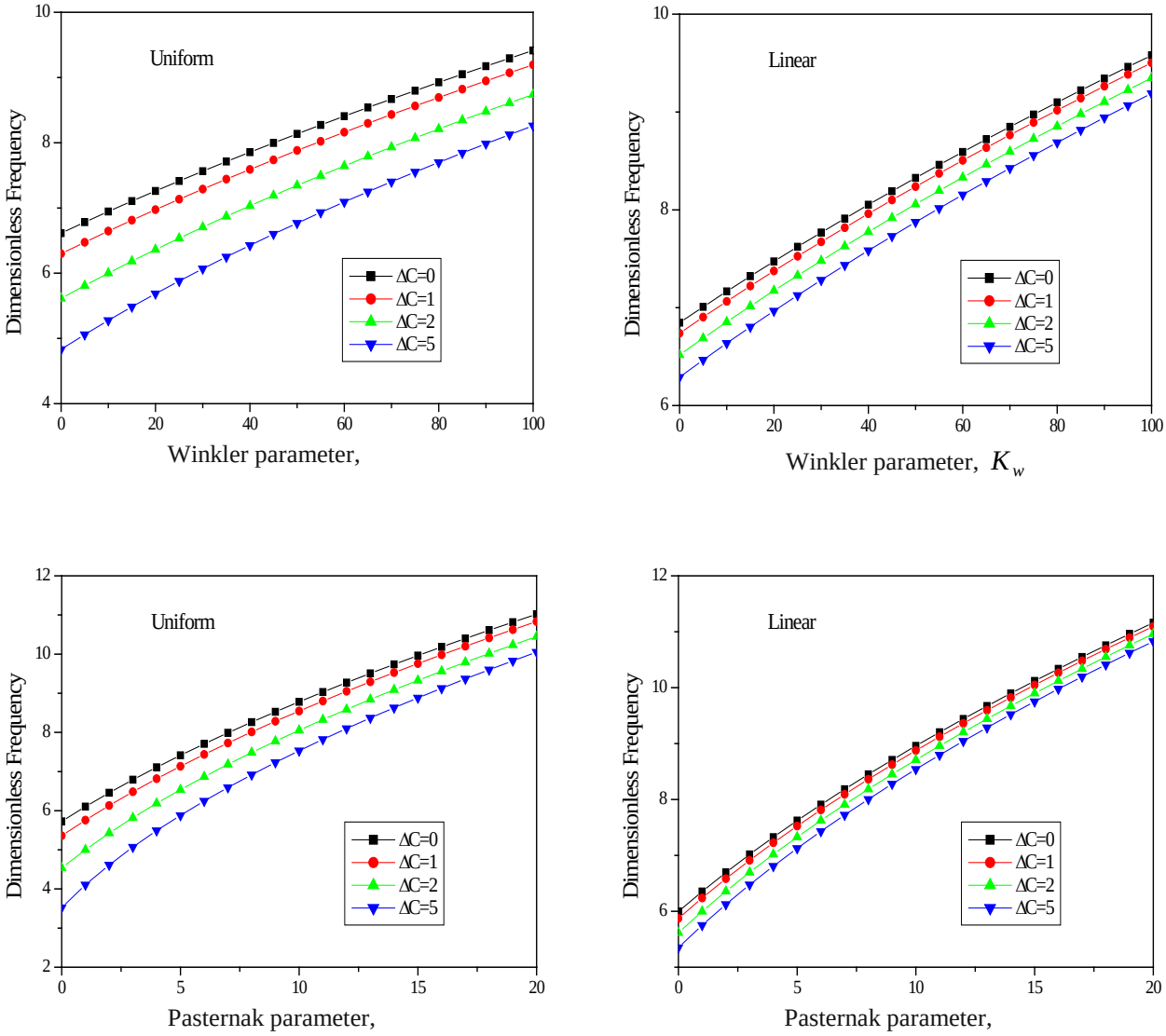

Figure IV.6 : L'effet des paramètres de la fondation élastique sur la fréquence adimensionnelle de la nano-poutre FGM pour diverses augmentations d'humidité ($p=1, L/h=20, \mu=2\,(\text{nm})^2, \Delta T=40\,(\text{K})$).

La fréquence adimensionnelle des nano-poutres FGM augmente avec l'augmentation des paramètres de Winkler et Pasternak pour toutes les valeurs de concentration d'humidité. De plus, il a été trouvé que l'inclusion de la couche de cisaillement ou du paramètre Pasternak (K_p) donne des résultats de plus grande amplitude pour une fréquence adimensionnelle que ceux avec l'inclusion de paramètre de Winkler (K_w).

IV.4. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse des vibrations libres hygro-thermo-mécaniques des nano-poutres fonctionnellement graduées reposés sur des fondations élastiques en utilisant la nouvelle théorie trigonométrique de poutre de déformation de cisaillement à deux variables. Divers exemples numériques sont examinés pour démontrer l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie. Une très bonne corrélation a été trouvée entre les résultats de la présente théorie (avec 2 inconnues) et ceux de la littérature surtout la théorie classique du poutre (CBT) (avec 2 inconnues). Ces résultats prouvent que la théorie proposée peut être comparable aux HSDT classiques avec un plus grand nombre de variables Dans le cas général, il est conclu également que l'indice de loi de puissance, la non-localité et les fondations élastiques ont une influence significative sur les réponses de vibration libres des FG nano poutres sous l'effet hygrothermique

.

Conclusion générale

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les nano structures en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. En plus, il serait très intéressant d'étudier le comportement mécanique des structures FGM à l'échelle nano métrique pour bien prédire la réponse des structures FGM à l'échelle micro/macro sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

Cette thèse présente les activités de recherche liées à l'étude du comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés à l'échelle nanométrique « FGM ». L'analyse hygro-thermo-mécaniques des vibrations libres de nano poutres fonctionnellement graduées reposée sur une fondation élastique Winkler-Pasternak est étudiée en utilisant un nouveau modèle de poutre de déformation de cisaillement trigonométrique avec la méthode analytique de Navier. Le principal avantage de ce modèle est que, en plus d'inclure l'influence de la déformation de cisaillement, le champ de déplacement est modélisé avec seulement 2 inconnues comme la théorie classique du poutre (CBT) et même inférieure avec la théorie de la poutre de Timoshenko (TBT).

Le modèle proposé contient moins d'inconnues et moins d'équations non local de mouvement que la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (TBT), mais satisfait aux conditions aux limites de traction nulle sur les bords supérieure et inférieure de la poutre, d'où le facteur de correction de cisaillement n'est pas requis. De plus, contrairement aux théories mentionnées précédemment, le nombre de variables dans la théorie actuelle est le même que dans la CPT. Trois types de conditions environnementales, à savoir les charges hygro-thermiques uniformes, linéaires et sinusoïdales, sont étudiées. Le modèle utilise deux paramètres pour capturer l'effet d'échelle de nano poutre avec précision en utilisant la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen. Les propriétés des matériaux varient selon le modèle de loi de puissance sont censées être dépendantes de la température. Les équations de mouvement sont dérivées du principe de Hamilton.

Les effets des environnements hygro-thermiques, l'indice de loi de puissance, l'effet non local et les paramètres K_w, K_p de la fondation élastique sur les réponses de vibration libres des poutres FGMs sous l'effet hygro-thermique sont explorés.Des exemples numériques sont présentés pour montrer la validité, la simplicité et la précision de la présente théorie de déformation de cisaillement.

L'influence de l'humidité est significative pour des valeurs plus élevées d'indice de gradient et de rapport d'élancement. En outre, il a été constaté qu'à une condition environnementale prescrite, l'effet non-local et l'indice de gradient ont un effet décroissant notable sur la fréquence naturelle des nano poutres en FGM. On en déduit que le paramètre Pasternak de la fondation élastique a un effet plus important sur l'augmentation de la rigidité et de la fréquence naturelle adimensionnelle de la nano poutre FGM que le paramètre Winkler.

En perspective, une amélioration de la formulation actuelle sera envisagée dans les travaux futurs pour rendre compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur en utilisant des modèles de déformation par cisaillement quasi-3D.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des nano matériaux à gradient de propriétés et précisément leurs comportements mécaniques vis-à-vis des chargements hygrothermiques.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

Adda Bedia, W., Benzair, A., Semmah, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On the thermal buckling characteristics of armchair single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal continuum elasticity", Brazil. J. Phys., 45(2), 225-233.

Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", Steel Compos. Struct., 20(5), 963-981.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", J. Sandw. Struct. Mater., 16(3), 293-318.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", Steel Compos. Struct., 19(2), 369-384.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", Struct. Eng. Mech., 53(6), 1143-1165.

Aizikovich, S.M., Mitrin, B.I., Seleznev, N.M., Wang, Y.C. and Volkov, S.S. (2016), "Influence of a soft FGM interlayer on contact stresses under a beam on an elastic foundation", Struct. Eng. Mech., 58(4), 613-625.

Akavci, S.S. (2015), "An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", Compos. Struct., 108, 667-676.

Akbarzadeh, A.H. and Chen, Z.T.(2013), "Hygrothermal stresses in one-dimensional functionally graded piezoelectric media in constant magnetic field", Compos. Struct., 97, 317-331.

Akbaş, Ş.D. (2015), "Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments", Steel Compos. Struct

Ankit Gupta, Mohammad Talha, "Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures" Progress in Aerospace Sciences 79 (2015) 1–14

Arash B, Ansari R. Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain. Phys E. 2010;42: 2058-64.

Arefi, M. (2015a), "Elastic solution of a curved beam made of functionally graded materials with different cross sections", Steel Compos. Struct., 18(3), 659-672.

Arefi, M. (2015b), "Nonlinear electromechanical analysis of a functionally graded square plate integrated with smart layers resting on Winkler-Pasternak foundation", Smart Struct. Syst., 16(1), 195-211.

Arefi, M. and Allam, M.N.M. (2015), “Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation”, Smart Struct. Syst., Int. J., 16(1), 81-100.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, Steel Compos. Struct., 18(1), 187-212.

Bakora, A. and Tounsi, A. (2015), “Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, Struct. Eng. Mech., 56(1), 85-106.

Barati, M.R. and Shahverdi, H. (2016), “A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions”, Struct. Eng. Mech., 60(4), 707-727.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, Compos. Part B, 60, 274-283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro- thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, Smart Struct. Syst., 18(4), 755-786.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, Steel Compos. Struct., 18(4), 1063-1081.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, Struct. Eng. Mech., 62(6), 695-702.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, Struct. Eng. Mech., (Accepted).

Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M. and Semmah, A. (2014), “Chirality and scale rffects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes”, Compos. Part B, 57, 21-24.

Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, J. Sandw. Struct. Mater., 15, 671-703.

Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A. and Tounsi, A. (2017), “A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams”, Smart Struct. Syst., 19(2), 115-126

Bouremana, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A. and Bedia, E. A.A. (2013), “A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams”, Steel Compos. Struct., 15(5), 467-479.

D.K. Jha, T. Kant, R.K. Singh, Critical review of recent research on functionally graded plates, Compos. Struct. 96 (2013)833–849.

Duan WH, Challamel N, Wang CM, Ding Z. Development of analytical vibration solutions for microstructured beam model to calibrate length scale coefficient in nonlocal Timoshenko beams. J Appl Phys. 2013;114: 104312-11.

Ebrahimi, F. and Barati, M.R. (2016b), “A unified formulation for dynamic analysis of nonlocal heterogeneous nanobeams in hygro-thermal environment”, Appl. Phys. A, 122, 792.

Ebrahimi, F. and Salari, E. (2015), “Effect of various thermal loadings on buckling and vibrational characteristics of nonlocal temperature dependent FG nanobeams”, Mech. Adv. Mater. Struct., 23(12), 1379-1397.

Ebrahimi, F., Salari, E. and Hosseini, S.A.H. (2015), “Thermomechanical vibration behavior of FG nanobeams subjected to linear and nonlinear temperature distributions”, J. Therm. Stress., 38(12), 1362-1388.

Eltaher, M.A., Emam, S.A. and Mahmoud, F.F. (2012), “Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams”, Appl. Math. Comput., 218(14), 7406-7420.

Eringen, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, Int. J. Eng. Sci., 10(1), 1-16.

Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, J. Appl. Phys., 54(9), 4703-4710.

Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B. (1972), “On nonlocal elasticity”, Int. J. Eng. Sci., 10, 233-248.

Huang LY, Han Q, Liang YJ. Calibration of nonlocal scale effect parameter for bending single-layered graphene sheet under molecular dynamics. Nano. 2012;7: 125003-8.

Koizumi, M. (1993) The Concept of FGM, Ceramic Transactions. Functionally Gradient Materials, 34, 3-10.

Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, Steel Compos. Struct., 18(2), 425-442.

Lee, C.Y. and Kim, J.H. (2013), “Hygrothermal postbuckling behavior of functionally graded plates”, Compos. Struct., 95, 278-282.

M. Niino, T.Hirai, R.Watanabe, The functionally gradient materials ,J.Jpn. Soc. Compos. Mater. 13 (1987)257–264. .

Na, K.S. and Kim, J.H. (2004), “Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials”, Compos. B Eng., 35(5), 429-437.

P.Shanmugavel, G.B.Bhaskar, M.Chandra sekaran, P.S.Mani, S.P.Srinivasan, An overview of fracture analysis in functionally graded materials , Eur. J. Sci. Res.68(3) (2012) 412–439.

Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", J. Appl. Mech., 51(4), 745-752.

Şimşek, M. (2009), "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method", Int. J. Eng. Appl. Sci., 1(3), 1-11.

Şimşek, M. and Yurtçu, H.H. (2012), "Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory", Compos. Struct., 97, 378-386.

Soldatos, K.P. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", Acta Mechanica, 94(3), 195-220.

Thai, H-T., Vo, T.P., Nguyen, T-K., Kim, S-E., A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates, (2017), j. compstruct.2017.06.040

Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), "A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", Struct. Eng. Mech., 60(4), 547-565.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", Aerosp. Sci. Technol., 24(1), 209-220.

Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory", Int. J. Eng. Sci., 29(8), 901-916.

Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", Struct. Eng. Mech., 54(4), 693-710.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", Aerosp. Sci. Technol., 34, 24-34.