

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL-ABBÈS

BP 89 SBA 22000 –ALGERIE

THESE

Présentée par

Kacimi Bouazza

Pour obtenir le Diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

Option : Géométrie différentielle

Intitulée

***Sur la Géométrie Spinorielle et les Structures
Para-quaternioniques sur une Variété Presque
Produit***

Thèse soutenue le : 07/06/2017

Devant le jury composé de :

Président :

Ouahab Abdelghani

Pr. Univ. Sidi Bel Abbès

Directeur de thèse:

Hathout Fouzi

Dr. Univ. Saïda

Co- Directeur de thèse

Hakem Ali

Pr. Univ. Sidi Bel Abbès

Examineurs :

Benaïssa Abbes

Pr. Univ. Sidi Bel Abbès

Senoussaoui Abderrahmane

Pr. Univ. Oran

Dida Hamou Mohamed

Dr. Univ. Saïda

Remerciements

Je tiens à remercier Fouzi HATHOUT pour la gentillesse et la bienveillance avec laquelle il a encadré cette thèse. HATHOUT m'a initié avec patience et disponibilité aux différents outils de la géométrie différentielle auxquels on a fait appel durant la réalisation de ce travail. Ses nombreux conseils, son soutien constant et son enthousiasme m'ont été précieux le long de la période de réalisation de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour tout ce qu'il a fait pour moi. Je remercie HAKEM Ali pour son soutien durant ce travail.

Je tiens à remercier OUAHAB Abdelghani qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Merci également à SENOUSSAOUI Abderrahmane, BENAÏSSA Abbes et DIDA Hamou Mohamed qui ont accepté d'être les examinateurs de cette thèse. Leurs critiques et suggestions ont grandement contribué à améliorer la première version de cette thèse.

En fin je veux rendre hommage à ma mère, ma grande mère, mon père, ainsi que ma famille.

Table des matières

Introduction	6
1 Préliminaires	11
1.1 Variétés différentiables	11
1.2 Fibré tangent	12
1.2.1 Applications différentiables	12
1.2.2 Fibré tangent	13
1.3 Connexion linéaire	14
1.4 Fibré cotangent	15
1.5 Groupes de Lie	15
1.6 Groupe fondamental	16
1.7 Revêtement	17
1.8 Formes différentielles	18
1.8.1 Formes différentielles	18
1.8.2 Différentielle	19
1.9 Cohomologie de De Rham	19
1.10 Fibré	20
1.10.1 Fibré principal	21
1.10.2 Fibré vectoriel	23
1.11 Cohomologie de Čech	26
1.11.1 Complexe de Čech	26

1.11.2	Cohomologie de Čech	27
1.11.3	Cohomologie de Čech à valeurs dans des faisceaux	28
2	Variété feuilletée	31
2.1	Variété feuilletée	31
2.2	Structure transverse	32
2.2.1	Exemples	34
2.3	Exemples de feuilletage	34
2.3.1	Feuilletage simple	34
2.3.2	Feuilletage linéaire	36
2.3.3	Feuilletage Riemannien	36
2.4	Feuilletage induit	40
2.5	Morphisme de feuilletage	41
2.6	Théorème de Frobenius	41
2.6.1	Distribution	43
2.6.2	Variété localement produit	43
2.7	Cohomologie basique	45
2.8	Signature de variété et de feuilletage Riemannien	46
2.8.1	Signature de variété	46
2.8.2	Signature de feuilletage Riemannien	46
3	Variété spinorielle et transversalement spinorielle	51
3.1	Algèbres de Clifford et groupes spinoriels	51
3.1.1	Algèbres de Clifford	51
3.1.2	Groupe spinoriel	54
3.2	Structures spinorielles sur les fibrés vectoriels	57
3.3	Variété spinorielle	61
3.4	Cohomologie de Čech basique	61
3.5	Quelques applications de la cohomologie de Čech basique	62
3.5.1	Variétés transversalement spinorielles	62

3.5.2	Variétés de dimension multiple de quatre	63
4	Structures para-quaternioniques	65
4.1	Structures presque para-hermitiennes	65
4.2	Structures para-hypercomplexes	67
4.3	Structures para-quaternioniques	67
4.4	Fibré tangent d'ordre trois	74
4.4.1	Relèvement de M à T^3M	75
4.5	Structures para-quaternioniques sur T^3M	77
4.5.1	Intégrabilité	78
4.5.2	Structures para-quaternioniques sur T^3M	80

Introduction

La notion de "variété" est centrale dans la géométrie différentielle, beaucoup de structures géométriques peuvent être définies sur elle. Pour une variété différentiable M , on introduit un produit scalaire variant différentiablement sur chaque espace tangent, M devient une variété Riemannienne qui donne l'étude à de telles constructions : géodésiques, courbure,...

Une autre structure appelée G -fibré principal, où G est un groupe de Lie peut être définie sur M . Le fibré des repères pour les espaces tangents à M forme un $GL(n)$ -fibré principal; ajoutant une structure Riemannienne, elle nous permet de le réduire à un $O(n)$ -fibré principal et puis à $SO(n)$ -fibré principal en mettant une orientation sur M . Une façon de connaître l'orientabilité est de vérifier une quantité cohomologique : la première classe de Stiefel-Whitney $w_1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$.

Pour $n > 3$, on a $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$; le groupe de Lie appelé $Spin(n)$ est un revêtement à deux feuilles de $SO(n)$. Dans ce cas on demande pas que le fibré des repères lui-même a un groupe de structure $Spin(n)$, comme $Spin(n)$ n'est pas un sous-groupe de $GL(n)$. Au lieu de cela, encore une fois, la question de l'existence d'une telle structure se résume à une classe caractéristique, cette fois la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$.

La théorie des feuilletages a été introduite par H. Hopf [26] en liaison avec la question de l'existence d'une distribution d'ordre 2 complètement intégrable sur la 3-sphère. Elle a été développée plus tard par Ehresmann [26]. Une structure feuilletée sur une variété est lié à la décomposition d'une variété en sous-variétés de même dimension. Plus précisément un feuilletage \mathcal{F} de codimension q sur une variété M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, de submersions $f_i : U_i \rightarrow T$ sur une variété transverse T de dimension q et pour tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les difféomorphismes

$\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \subset T \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j) \subset T$ vérifient $f_i(x) = \gamma_{ij} \circ f_j(x)$ pour tout $x \in U_i \cap U_j$. Dans ce cas, on dit que $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ est un cocycle feuilleté définissant \mathcal{F} . Ainsi deux différentes structures apparaissent dans la théorie des feuilletages : la structure longitudinale, i.e. celles des feuilles et la structure transverse, i.e. orthogonale aux feuilles.

En 1958, B. Reinhart [32] a introduit la notion de feuilletage Riemannien défini par la donnée d'une métrique Riemannienne $g_{\nu\mathcal{F}}$ sur le fibré normal $\nu\mathcal{F}$ invariante le long des feuilles. De plus, il a introduit la notion d'une métrique quasi-fibrée, i.e. la métrique sur $\nu\mathcal{F}$ est la métrique induite qu'il a décrite géométriquement : en effet toute géodésique orthogonale au feuilletage en un point reste orthogonale au feuilletage en tout point. L'existence d'une telle métrique induit une connexion métrique ∇ sur le fibré normal à torsion nulle. Cette connexion sera appelée connexion de Levi-Civita transversale. De plus la courbure associée à la connexion ∇ satisfait une propriété fondamentale dans le sens qu'elle s'annule le long des feuilles. On peut ainsi lui associer la courbure de Ricci transversale et la courbure scalaire transversale.

Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée et on suppose que \mathcal{F} est transversalement orienté i.e. la première classe transversale de Stiefel-Whitney $w_1(\nu\mathcal{F}) \in H^1(\mathcal{F}; \mathbb{Z}_2)$ du fibré $\nu\mathcal{F}$ est nulle. On note par $SO(\nu\mathcal{F})$ le fibré au dessus de M des repères orthonormés de $\Gamma(\nu\mathcal{F})$. Si on veut définir une structure spinorielle transversale i.e. sur $\nu\mathcal{F}$, on a besoin de $H^2(\mathcal{F}; \mathbb{Z}_2)$: le deuxième groupe de cohomologie de Čech basique, donc l'existence d'une telle structure se résume à une classe caractéristique, cette fois $w_2(\nu\mathcal{F}) \in H^2(\mathcal{F}; \mathbb{Z}_2)$ la deuxième classe transversale de Stiefel-Whitney du fibré orienté $\nu\mathcal{F}$. Si M supporte deux feuilletages orthogonaux, transversalement orientables \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 respectivement de codimension p et q avec $p + q = n$ et si \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont transversalement spinorielles on a montré que M est une variété spinorielle.

La signature d'une variété M noté $Sign(M)$ est exactement la signature de la forme quadratique non dégénérée définie dans (2.4). D'après le résultat de A.El Kacimi et M.Nicolau [12], on définit la signature de feuilletage \mathcal{F} comme étant la signature de la variété transverse appelée la signature basique. Dans [17] F.Hathout et M.Djaa obtenant le résultat suivant : si (M, g) est une variété Riemannienne compacte orientable de dimension multiple de quatre et \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont deux feuilletages orthogonaux de codimensions multiple de quatre ($p = 4l_1$ et $q =$

4l₂). Alors $Sign(M) = Sign(\mathcal{F}_1).Sign(\mathcal{F}_2)$.

On combine ce résultat avec le théorème de Lichnerowicz [23] avec \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont munis de structures spinorielles transverses et si l'une des métriques Riemanniennes transverses a une courbure scalaire positif alors $Sign(M) = 0$.

La deuxième direction dans cette thèse est les structures para-quaternioniques. Une structure para-quaternionique sur une variété différentiable est constituée d'une structure presque para-hypercomplexe qui est un triplet des endomorphismes du fibré tangent $\mathbb{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$, où J_1 est une structure presque complexe et J_2, J_3 sont des structures presque produit satisfaisant les relations d'anti-commutations et compatibles avec la métrique semi-Riemannienne nécessairement de signature neutre. De plus, si les structures \mathbb{J} sont parallèles par rapport à la connexion de Levi-Civita de la métrique compatible, on arrive à la notion de structure para-hyperkählérienne et aussi appelée structure hyperkählérienne ou structure hyper-symplectique ([6], [22],[20], [29],[27],...). Les structures para-quaternioniques et para-hyperhermitiennes sont des structures qui apparaissent dans la physique théorique et les systèmes intégrables ([1],[14],[19] ...).

D'autre part, le fibré tangent d'ordre trois d'une variété différentiable M de dimension n est une variété différentiable de dimension $4n$ des classes d'équivalences des courbes c sur M qui sont équivalentes par rapport à leurs 3-vitesse ou une variété des 3-jet notée j^3c , qui est une généralisation du fibré tangent TM . Cet ensemble a été étudié avec des noms différents par beaucoup auteurs (voir [7],[9]), pour le fibré des 2-jet et sa généralisation au fibré des r -jet voir ([8]), où T^rM est la variété différentiable des classes d'équivalences des courbes c sur M qui sont équivalentes par rapport à leurs r -vitesse ou une variété des r -jet notée j^rc .

Dodson et Radivoiović prouvent que T^2M devient un fibré vectoriel sur M avec groupe de structure $GL(2n, \mathbb{R})$ si la variété M est munie d'une connexion linéaire [9], ce résultat a été généralisé à T^rM dans [8]. Le fibré tangent d'ordre trois d'une variété différentiable M de dimension n est un fibré vectoriel lorsque M est munie d'une connexion linéaire ∇ . La connexion linéaire ∇ de la variété M définit un difféomorphisme S entre le fibré des 3-jet T^3M et la somme de Whitney de trois copies de fibré tangent TM . S est un difféomorphisme de fibrés localement triviale mais il n'est pas un isomorphisme de fibrés naturels. Ensuite, par la

théorie de relèvement vertical et horizontal (X^V, X^H) d'un champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$ et le λ -relèvement, on définit le repère adapté $\{X^0, X^1, X^2, X^3\}$, donc une suite de distributions E_0, E_1, E_2 et E_3 sur T^3M telle que $T(T^3M) = \bigoplus_{i=0,3} E_i$, si $\lambda = 1$: E_0, E_1 coïncide avec H et V respectivement le sous-espace horizontal et le sous-espace vertical de TM . Le λ -relèvement des champs de tenseurs sur une variété M au fibré des 3-jet T^3M , est une généralisation du relèvement vertical et horizontal des structures géométriques au fibré tangent TM (voir [7],[8]).

Le fibré tangent d'ordre 3 d'une variété presque para-hermitienne vue comme variété de dimension multiple de 4 admet une structure presque para-quaternionique mais il n'est jamais para-quaternionique kählérienne.

Dans cette partie, on construit une structure presque para-quaternionique sur le fibré tangent d'ordre trois d'une variété presque para-hermitienne et on étudie son intégrabilité. On donne les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles cette structure devient parahyperkählérienne et on prouve que le fibré tangent d'ordre trois ne peut pas être une variété para-quaternionique kählérienne.

Le plan du travail est le suivant :

Le premier chapitre est consacré au rappelle de quelques notions élémentaires de la géométrie différentielle et (semi)-Riemannienne et on donne les définitions et notations des objets qui seront considérés par la suite.

Au deuxième chapitre, on définit la structure feuilletée d'une variété différentiable ainsi que un feuilletage en général en particulier un feuilletage Riemannien. Des exemples concrets des feuilletages sont présentés. On s'intéresse à un invariant topologique appelé signature de variété. De la même manière, on définit la signature de feuilletage qui est la signature de la variété transverse.

Dans le chapitre 3, on étudie les variétés spinorielles et transversalement spinorielles, on commence par un rappel sur les algèbres de Clifford et les groupes spinoriels, puis on définit la cohomologie de Čech basique et par l'application de cette cohomologie on donne deux résultats.

Finalement au chapitre 4, on définit les structures presque para-hypercomplexes en parti-

culier les structures para-hyperhermitiennes et para-hyperkählériennes ainsi que les structures presque para-quaternioniques. On se ramène ensuite à généraliser la construction d'une structure presque para-quaternionique sur le fibré tangent [21],[37], autrement dit on va construire une structure presque para-quaternionique ou une structure para-hyperhermitienne sur le fibré des 3-jet T^3M , on étudie également son intégrabilité. On donne les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles cette structure devient para-hyperkählérienne. Enfin, on prouve que le fibré tangent d'ordre trois ne peut pas être une variété para-quaternionique kählérienne.

Chapitre 1

Preliminaires

Dans ce chapitre on rappelle quelques propriétés et définitions nécessaires pour la suite. Les références principalement utilisées sont : [15],[31],[25],[33] et [38].

1.1 Variétés différentiables

On se donne un espace topologique séparé paracompact M .

Définition 1.1.1 *On dit que M est une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point x de M possède un voisinage ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^n i.e. il existe une application bijective*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$$

tel que φ et son inverse φ^{-1} sont continues.

Un point x de U est repéré par les coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathbb{R}^n de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Alors, on dit que U est un ouvert de coordonnées locales de M au voisinage de x . La paire (U, φ) est appelée carte locale et $(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les coordonnées locales de x .

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telle que l'intersection U et V soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans U et ses coordonnées

(x'_1, \dots, x'_n) dans V . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \psi^{-1}(U \cap V) & & \end{array}$$

est commutatif alors on a

$$(x'_1, \dots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

où l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée changement de coordonnées de la carte (U, φ) vers la carte (V, ψ) .

On appelle atlas définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$, un tel objet sera toujours noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$

Définition 1.1.2 *On dira que M est une variété différentiable si elle est une variété topologique et l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^∞ .*

1.2 Fibré tangent

1.2.1 Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives m et n . On dit qu'une application continue $f : M \rightarrow N$ est différentiable au point p de M si, pour toute carte locale de M , (U, φ) contenant p et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(p)$ et tout voisinage ouvert W de p contenu dans U et telle que $f(W) \subset V$, l'application

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$$

est différentiable. On dira que f est différentiable si elle est différentiable en tout point de M .

La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ est donc par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p))$$

Si f est différentiable, bijective et f^{-1} est différentiable on dit que f est un difféomorphisme. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté $\text{Diff}(M)$.

1.2.2 Fibré tangent

Soient M une variété différentiable de dimension n et p un point de M . Sur l'ensemble des courbes $\mathcal{C} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M : \gamma(0) = p\}$, on définit une relation d'équivalence ne dépendant pas du choix de p , par

$$\gamma \sim \gamma' \iff \dot{\gamma}_i(t)_{/t=0} = \dot{\gamma}'_i(t)_{/t=0} \quad \forall \gamma, \gamma' \in \mathcal{C}$$

Par définition, l'espace tangent en p à M , que l'on note T_pM , est l'ensemble des classes d'équivalences dans \mathcal{C} pour cette relation. Les éléments de T_pM sont appelés vecteurs tangents à M en p définis par une courbe γ par $X_i(p) = \dot{\gamma}_i(t)_{/t=0}$.

Une autre définition de l'espace tangent équivalente à la première est la suivante : On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur M , $F(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ de classe } C^\infty\}$. Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions. Pour $p \in M$, nous définissons sur $F(M)$ une relation d'équivalence définie par :

$$f \sim g \iff \exists U \subset M, p \in U \text{ ouvert tel que } f|_U = g|_U$$

On note $C_p^\infty(M)$ l'ensemble des classes d'équivalences dans $F(M)$ pour cette relation. En tout point $p \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ engendrent donc un espace vectoriel réel de dimension n indépendant de la carte choisie (U, φ) .

Par définition, l'espace tangent en p à M noté T_pM , est l'espace vectoriel de dimension n engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ sur $C_p^\infty(M)$.

Définition 1.2.1 On définit le fibré tangent par

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

TM est une variété différentiable de dimension $2n$. Un élément de TM est un couple (p, u) où p est un point de M et u est un vecteur tangent à M en p . L'application $\pi : (p, u) \in TM \rightarrow p \in M$ est différentiable.

On appelle section C^∞ de TM ou champ de vecteurs sur M toute application différentiable $X : TM \rightarrow M$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Le champ de vecteurs X en tout point $p \in M$ est un

vecteur $X(p)$ tangent à M en p de façon à ce que la variation de $X(p)$ (en fonction de p) soit différentiable.

L'ensemble $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M .

Définition 1.2.2 Une métrique semi-Riemannienne sur une variété différentielle M de dimension n est une famille des applications $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in M$, telle que

1. Pour tout $x \in M$, g_x est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée de signature constante (p, q) .
2. Si $X, Y \in \Gamma(TM)$, la fonction $g(X, Y)(x) = g_x(X_x, Y_x)$ est différentiable.

(M, g) est appelée variété semi-Riemannienne. Une variété semi-Riemannienne est Riemannienne lorsque la signature de la métrique est $(0, n)$. Localement si M est munie d'un système de coordonnées locales x^i alors

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où g_{ij} sont des fonctions de classe C^∞ sur M .

1.3 Connexion linéaire

Définition 1.3.1 Une connexion linéaire sur une variété différentielle M est une application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

telle que pour tous $X, Y, X', Y' \in \Gamma(TM)$ et $f, g \in C^\infty(M)$

1. $\nabla_{fX+gX'}Y = f\nabla_X Y + g\nabla_{X'} Y$
2. $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$
3. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

La torsion d'une connexion est le tenseur de type $(1, 2)$ défini par l'expression :

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Définition 1.3.2 *On dit qu'une connexion linéaire sur une variété (semi-)Riemannienne (M, g) est métrique si g est parallèle i.e. $\nabla g = 0$. Il existe une unique connexion ∇ sur le fibré tangent TM qui est métrique et sans torsion. On appelle cette connexion la connexion de Levi-Civita sur M . Le tenseur de courbure de Riemann R de (M, g) est le tenseur, de type $(1, 3)$, défini par :*

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

1.4 Fibré cotangent

L'espace dual T_x^*M de T_xM est appelé espace cotangent à la variété M en x , on définit de même, le fibré cotangent à M , que l'on désigne par T^*M , la réunion de tous les espaces $T_x^*M = (T_xM)^*$ en ses divers points :

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

Ainsi, chaque élément de T^*M , peut être identifié à un couple (x, w_x) , où $x \in M$ et $w_x \in T_x^*M$.

Définition 1.4.1 (Variété orientable) *Une variété différentiable connexe M est dite orientable s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M telles que les coordonnées (x_i) et (x'_i) de deux cartes quelconques de M s'intersectant et contenant p , le changement de coordonnées $x'_j(x_i)$ vérifie*

$$\det \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(p) \right) > 0$$

1.5 Groupes de Lie

Définition 1.5.1 *Un groupe de Lie est un groupe G muni d'une structure de variété différentielle, telle que l'application*

$$\begin{aligned} \theta : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

est de classe C^∞ .

Définition 1.5.2 *Un morphisme de groupes de Lie est un morphisme de groupe qui est différentiable.*

Définition 1.5.3 *Un sous groupe de Lie H d'un groupe de Lie G , est un sous groupe de G qui possède une structure de groupe de Lie, et qui est une sous variété de G .*

Exemple 1.5.1 *Donnons quelques exemples de groupes de Lie*

1. $S^1 = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.
2. Le groupe linéaire réel $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / \det M \neq 0\}$ de dimension n^2 .
3. Le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) / \det M = 1\}$ de dimension $n^2 - 1$

1.6 Groupe fondamental

Revenons ici à un point de vue plus topologique sur les variétés. Ce qui va suivre sera valable en particulier pour les variétés différentiables. Dans ce qui suit, M désigne un espace topologique connexe par arc.

Soit x_0 un point quelconque de M , fixé. Nous posons $\mathcal{C}(x_0)$ l'ensemble des courbes $c : [0, 1] \rightarrow M$ telles que $c(0) = c(1) = x_0$, ce sont donc les courbes qui commencent et se referment en x_0 . $\mathcal{C}(x_0)$ est l'espace des lacets centrés en x_0 , et nous dirons que $c \in \mathcal{C}(x_0)$ est un lacet.

Il faut remarquer que si c_1 est un lacet $c_1 : [a, b] \rightarrow M$ tel que $c_1(a) = c_1(b) = x_0$, alors il existe un lacet $c \in \mathcal{C}(x_0)$ qui passe par les mêmes points de M que c_1 . Il suffit en effet de changer la paramétrisation, par exemple en posant

$$c(t) = c_1(a + t(b - a))$$

Maintenant, nous dirons que deux lacets c_0 et c_1 de $\mathcal{C}(x_0)$ sont homotopes s'il existe une application continue $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(x_0)$ telle que $F(0) = c_0$ et $F(1) = c_1$. On peut encore voir F comme une application continue

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

avec $F(0, t) = c_0(t)$ et $F(1, t) = c_1(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, pour toute valeur $u \in [0, 1]$, $F(u, \cdot)$ est un lacet de $\mathcal{C}(x_0)$. L'application F permet de déformer continûment le lacet c_0 ($u = 0$) en le lacet c_1 ($u = 1$).

La relation d'homotopie sur les lacets est une relation d'équivalence, qui permet de quotienter $\mathcal{C}(x_0)$. Nous posons $\pi_1(M, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{C}(x_0)$ pour la relation d'homotopie. Nous noterons $[c] \in \pi_1(M, x_0)$ la classe d'homotopie de $c \in \mathcal{C}(x_0)$.

Nous allons maintenant donner à l'ensemble $\pi_1(M, x_0)$ une structure de groupe. Pour cela, nous définissons sur $\pi_1(M, x_0)$ un produit

$$[c_0] \cdot [c_1] = [c_0 c_1]$$

C'est ce produit qui donne à $\pi_1(M, x_0)$ une structure de groupe appelé le groupe fondamental de l'espace M en p . Ce produit dépend du point x_0 choisi au départ. Si y_0 est un autre point de M , alors $\pi_1(M, y_0)$ est isomorphe à $\pi_1(M, x_0)$. Ceci signifie que la structure de ces groupes est toujours la même $\forall x_0 \in M$. Notons $\pi_1(M)$ l'un de ses groupes, c'est le groupe fondamental de l'espace M , appelé aussi groupe d'homotopie d'ordre 1 de M . L'espace M est simplement connexe si $\pi_1(M) = 1$, si M et \hat{M} sont deux espaces topologiques connexes par arcs homéomorphes, alors $\pi_1(M)$ et $\pi_1(\hat{M})$ sont isomorphes.

1.7 Revêtement

Soient M, \tilde{M} deux variétés différentiables où \tilde{M} est connexe par arcs et π une application de \tilde{M} vers M . On dit que (\tilde{M}, π) est un revêtement de M , si pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p et des ouverts deux à deux disjoints $\{U_i\}_{i \in I}$ de \tilde{M} , où l'ensemble I est non vide (il peut être fini ou infini), tels que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

et les $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ sont des difféomorphismes. Un revêtement \tilde{M} ressemble donc localement à M (chaque ouvert U_i est une copie de U), mais \tilde{M} est plus gros que M . L'ensemble $\pi^{-1}(p)$ est la fibre de \tilde{M} au dessus de p . Un revêtement ayant des fibres formées de n points est un

revêtement à n feuilles. Le couple (\widetilde{M}, π) est appelé le revêtement universel de M si (\widetilde{M}, π) est un revêtement unique de M on a :

1/ $\pi_1(\widetilde{M}) = \{1\}$ alors \widetilde{M} est simplement connexe ;

2/ L'ensemble $\pi^{-1}(p) \subset \widetilde{M}$ est isomorphe à $\pi_1(M)$ pour tout $p \in M$, c'est à dire $I \simeq \pi_1(M)$.

Si M est simplement connexe, alors nous avons $\widetilde{M} = M$.

1.8 Formes différentielles

1.8.1 Formes différentielles

Soient M une variété différentiable de dimension n et $r \in \mathbb{N}$. Une r -forme différentielle est une section du fibré vectoriel

$$\alpha_r : \wedge^r T^*M \longrightarrow M$$

Ainsi, une r -forme différentielle α associe, à tout x dans M , une r -forme alternée α_x sur l'espace tangent $T_x M$ à M en x . De même, une forme différentiable sur M est une section du fibré vectoriel $\alpha_* : \wedge^* T^*M \rightarrow M$. L'espace des r -formes différentielles sur M sera noté $\Omega^r(M)$. Comme $\wedge^0 T^*M$ s'identifie avec $M \times \mathbb{R}$, notons que $\Omega^0(M)$ s'identifie avec $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Par convention, on pose $\Omega^p(M) = \{0\}$ si $p < 0$.

Localement, la r -forme α s'écrit en coordonnées (x_1, \dots, x_n) sous la forme

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

où les $\alpha_{i_1 \dots i_r}$ sont des fonctions différentiables. On pose :

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r(M)$$

Deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ s'écrivant

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \text{ et } \beta = \sum \beta_{j_1 \dots j_s} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$$

ont pour produit extérieur

$$\alpha \wedge \beta = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} \beta_{j_1 \dots j_s} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$$

où les sommes sont étendues à tous les r -uplets $(i_1 \dots i_r)$ et s -uplets $(j_1 \dots j_s)$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$. On obtient ainsi une forme différentielle de degré $r + s$ sur M . On a bien sûr $\alpha \wedge \beta = (-1)^{r+s}$ et $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. L'espace $\Omega^*(M)$ est ainsi muni d'une structure d'algèbre graduée anti-commutative. Le produit extérieur d'une r -forme et d'une fonction est une r -forme différentielle. Chaque espace vectoriel $\Omega^r(M)$ admet donc une structure de module sur l'anneau des fonctions C^∞ sur M (qui n'est rien d'autre que $\Omega^0(M)$).

1.8.2 Différentielle

A toute r -forme on associe la $(r + 1)$ -forme $d\alpha$ définie (localement) par la formule

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

On définit ainsi, pour tout r , l'opérateur linéaire

$$d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

appelé la différentielle extérieure sur M . Pour $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ on a :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d(\beta)$$

i.e. d est une dérivation sur l'algèbre $\Omega^*(M)$. D'autre part, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'opérateur composé $d^2 = d \circ d$ est nul.

On dit que la r -forme α est fermée (ou un cocycle) si $d\alpha = 0$, exacte (ou un cobord) s'il existe $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, appelée la primitive de α , telle que $d\beta = \alpha$. On pose :

$$Z^r(M) = \{\text{r-formes fermées sur } M\} \text{ et } B^r(M) = \{\text{r-formes exactes sur } M\}$$

1.9 Cohomologie de De Rham

D'après ce qu'on vient de voir, à toute variété M de dimension n on peut associer une suite d'espaces vectoriels et d'opérateurs linéaires :

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

(où la première et la dernière flèche sont bien sûr les applications nulles) qu'on appelle complexe de De Rham de M . Comme $d^2 = 0$, on a $B^r(M) \subset Z^r(M)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. On dira alors que la suite 1.1 est semi-exacte. Le défaut d'exactitude est mesuré par le quotient

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

qu'on appelle r -ième espace de cohomologie de De Rham de M . Deux r -formes fermées α et β sont dites cohomologues si elles définissent la même classe de cohomologie i.e. s'il existe une $(r-1)$ -forme γ telle que $\alpha - \beta = d\gamma$. L'espace vectoriel $H^r(M)$ est réduit à $\{0\}$ si et seulement si, l'équation différentielle $\alpha = d\beta$ admet une solution pour toute r -forme fermée α .

Exemple 1.9.1 • *Si M une variété différentiable connexe, l'espace vectoriel $H^0(M)$ est toujours isomorphe à \mathbb{R} engendré par la fonction constante égale à 1.*

• *Si $M = \mathbb{R}^n$ alors on a*

$$H^r(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.10 Fibré

Un fibré est une variété différentiable qui ressemble localement au produit cartésien d'un ouvert d'une variété différentiable et d'une fibre. C'est une généralisation du produit cartésien $M \times F$ où M et F sont deux variétés, M étant la base et F la fibre. Cela signifie encore que dans un fibré, au-dessus de chacun des points de M , il y a une copie de F . Mais globalement nous n'avons pas $M \times F$, mais une variété P , qui contient d'une certaine façon des copies de M et de F . En fonction d'une éventuelle structure algébrique sur la variété fibre (espace vectoriel, groupe...), les fibrés pourront être classés grossièrement. Le premier exemple que nous allons donner représente le type de fibré le plus simple, et le plus important : le fibré principal, qui admet pour fibre un groupe de Lie.

1.10.1 Fibré principal

Un fibré principal P est une variété différentiable. Localement, cette variété est difféomorphe à $U \times G$ où U est un ouvert de M qui sera appelé la base de l'espace total P , G le groupe de (Lie) structure de fibré et $\pi : P \rightarrow M$ une application différentiable surjective appelée la projection. On le note $P(M; G)$ ou $G \hookrightarrow P \rightarrow M$.

Le surjection π fait contenir M dans P . La fibre au dessus de $x \in M$ sera par définition $\pi^{-1}(x)$, notée souvent P_x . Cette fibre est difféomorphe à G , et il existe une action à droite de G sur P , notée $\tilde{R}_g p = p.g$ où $p \in P$ et $g \in G$ telle que

-Pour $g \in G$; $p.g$ reste dans la même fibre $P_{\pi(p)}$ i.e. $\pi(p) = \pi(p.g)$.

-la restriction de l'action à droite de G sur chaque fibre est transitive et libre.

Le fibré P est localement trivial si pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x et un difféomorphisme trivialisant $\phi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tel que

- $\pi(\phi(x, g)) = x$.

- ϕ est compatible avec l'action de G sur P au sens suivant : si on note $\phi_x : G \rightarrow \pi^{-1}(x)$, pour $x \in U$, l'application $\phi_x(g) = \phi(x, g)$, alors on a $\phi_x(ga) = \phi_x(g).a$ et ϕ_x est le difféomorphisme qui identifie G à $\pi^{-1}(x)$.

Définition 1.10.1 *Un système de trivialisations locales $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ est un ensemble de couples (U_i, ϕ_i) formés d'ouverts U_i constituant un recouvrement de M et de difféomorphismes trivialisants $\phi : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$.*

Pour un système de trivialisations locales donné, considérons $x \in U_i \cap U_j$ et $p \in \pi^{-1}(x)$ fixés. Posons alors $g_i = \phi_{i,x}^{-1}(p)$ et $g_j = \phi_{j,x}^{-1}(p)$ deux éléments de G . Ces deux éléments de G peuvent toujours être reliés par $g_i = g_{ij}(x)g_j$ pour un $g_{ij}(x) \in G$ qui ne dépend pas de $p \in \pi^{-1}(x)$, mais seulement de x , remarquons alors que

$$g_i = \phi_{i,x}^{-1} \circ \phi_{j,x}(g_j)$$

donc pour $g_j = e$, on a aussi

$$g_{i,j} = \phi_{i,x}^{-1} \circ \phi_{j,x}(e)$$

où e est l'élément neutre de G .

Définition 1.10.2 Pour un système de trivialisations locales $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, les fonctions : $U_i \cap U_j \rightarrow G$ sont appelées fonctions de transition du fibré P .

Les fonctions g_{ij} ont des propriétés qui les caractérisent.

$$1-g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x)$$

$$2-g_{ii} = e$$

$$3\text{-Au dessus de } U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset, \text{ on a } g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x) = e.$$

Les trois relations ci-dessus sont des conditions nécessaires et suffisantes pour permettre le passage du local $U_i \times G$ au global P .

Morphismes de fibrés principaux

Considérons $P(M, G)$ et $Q(N, G)$ deux fibrés principaux de variétés bases a priori différentes, mais de même groupe de structure G . Une application différentiable $\psi : P \rightarrow Q$ est un morphisme de fibrés principaux si ψ commute avec l'action à droite de G :

$$\psi(pg) = \psi(p)g$$

pour tous $p \in P$ et $g \in G$. Ceci implique en particulier que ψ respecte les fibres : $\psi(P_x)$ est inclus dans une fibre de Q . Donc ψ induit une application $\tilde{\psi} : M \rightarrow N$ entre les variétés bases, telle que $\psi(P_x) \subset Q_{\tilde{\psi}(x)}$.

Cette notion de morphisme conduit tout naturellement à celle d'isomorphisme de fibré principal. Dans ce cas, $\tilde{\psi}$ est un difféomorphisme entre les variétés bases.

Définition 1.10.3 On dira qu'un fibré principal $P(M, G)$ est trivial s'il est isomorphe au fibré $M \times G$.

Localement, au dessus de chaque ouvert U d'une trivialisations locale (U, φ) de P , on définit la section locale trivialisante par

$$s : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset P; s(x) = (x, e)$$

Toute section locale $S : U \rightarrow P$ s'écrit alors de façon unique $S(x) = s(x).g(x)$ pour une application $g : U \rightarrow G$. On dit que g est la trivialisations locale de S pour la section locale

trivialisante s .

Soit $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un système de trivialisations locales. Sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ les sections locales trivialisantes s_i et s_j associées sont reliées par les relations

$$s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x)$$

Une section globale S sur M peut se décomposer sur ces sections locales : sur chaque U_i , nous écrivons $S(x) = s_i(x) \cdot S_i(x)$ où $S_i(x) \in G$. Les applications S_i forment un système de trivialisations locales de S . Alors on a la définition

Définition 1.10.4 *Trivialiser la section globale S sur M consiste à associer à $S : M \rightarrow P$ une collection d'applications locales $S_i : U_i \rightarrow G$ qui vérifient des formules de recollement*

$$S_i = g_{ij} S_j \text{ sur } U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

Théorème 1.10.1 (cf. [25]) *Un fibré principal est trivial si et seulement si il admet une section globale.*

1.10.2 Fibré vectoriel

Définition 1.10.5 *Un fibré vectoriel (E, π, M, V, G) est un fibré dont la fibre type V , de projection π , de base M et de groupe de structure G où V un espace vectoriel et dont chaque fibre E_x est aussi un espace vectoriel. Le rang d'un fibré vectoriel est la dimension de sa fibre.*

Toute trivialisations locale (U, φ) de E , $\varphi_x : V \rightarrow E_x$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et l'action de G sur V est une représentation linéaire. Les sections d'un fibré vectoriel héritent la structure vectorielle. Le fibré vectoriel admet toujours des sections globales, on peut donc voir M comme une sous-variété de E . Il peut arriver que l'espace vectoriel V soit un espace vectoriel complexe. Dans ce cas, chaque fibre est un espace vectoriel complexe, la structure différentiable est obtenue en identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , et la linéarité des applications se fait sur \mathbb{C} . Puisque le groupe G se représente linéairement sur V , le groupe de structure est nécessairement un sous-groupe de $GL(V)$. On peut aussi le considérer comme un sous-groupe de $GL(r, \mathbb{R})$ (ou $GL(r, \mathbb{C})$ si V est complexe) où r est la dimension de V (et le rang de E).

Exemple 1.10.1 *Pour une variété M de dimension n , le fibré tangent TM est un fibré vectoriel.*

Réduction du groupe de structure

Il peut arriver que les fonctions de transitions d'un fibré principal P , dont un système de trivialisations locales est $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, ne prennent pas leurs valeurs dans tout le groupe G , mais seulement dans un sous groupe H de G , c'est à dire que pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, nous avons,

$$\forall x \in U_i \cap U_j \quad g_{ij}(x) \in H$$

On peut alors considérer un sous-fibré de P , fibré principal de groupe de structure H , ayant ces fonctions de transitions. Chaque fibre de ce fibré est $\phi_{i,x}(H)$ pour $x \in M$. Nous dirons que nous avons une réduction du groupe de structure si tel est le cas.

Dans certaines applications, il peut être souhaitable de réduire le groupe de structure, même si les $g_{ij}(x)$ ne sont pas dans un sous-groupe H de G . Pour voir si cette réduction est possible, il faut essayer de changer le système de trivialisations locales pour que les fonctions de transitions soient à valeurs dans H . Pour changer de système de trivialisations locales, on se donne des applications

$$g_i : U_i \rightarrow G$$

Les nouvelles fonctions de transition sont alors

$$g'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x)g_{ij}(x)g_j(x)$$

Nous pouvons donc réduire le groupe de structure si pour tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, nous avons

$$(g_i^{-1}g_{ij}g_j)(x) \in H$$

Mais le choix des applications g_i qui permettent de vérifier cette condition n'est pas toujours possible. C'est seulement lorsque ce choix est possible que nous pourrions réduire le groupe de structure du fibré. En général, lorsque cette réduction est possible, elle n'est pas unique.

Exemple 1.10.2 *Fibré des repères, fibré orientable*

Comme ci-dessus, soit E un fibré vectoriel au dessus de M , de fibre type V , espace vectoriel réel de dimension r . Pour tout $x \in M$, notons $L_x(E)$ l'ensemble des bases de l'espace vectoriel E_x . Alors

$$L(E) = \bigcup_{x \in M} L_x(E)$$

est un fibré principal de groupe de structure $GL(V)$. C'est le fibré des repères de E . Si h est une métrique de fibré sur E , définie positive, alors on peut considérer au dessus de $x \in M$ l'ensemble $O_x(E)$ des bases orthonormées de E_x pour le produit scalaire h_x . Le fibré

$$O(E) = \bigcup_{x \in M} O_x(E)$$

est un fibré principal de groupe de structure $O(r)$. C'est une réduction du fibré principal $L(E)$. Réciproquement, une réduction du fibré $L(E)$ au sous-groupe $O(r)$ définit une métrique de fibré sur E , puisqu'on connaît alors les bases orthonormées pour cette métrique en chaque point de M .

Sur l'espace vectoriel $V \simeq \mathbb{R}^r$, la donnée d'un produit scalaire défini positif est équivalente à la donnée d'une classe d'équivalence dans $GL(r, \mathbb{R})/O(r)$. En effet, la donnée d'un tel produit scalaire équivaut à la donnée de l'espace de ses bases orthonormées. $GL(r, \mathbb{R})$ agit à droite sur l'ensemble des bases de \mathbb{R}^n . Par cette action, $O(r)$ préserve l'espace des bases orthonormées du produit scalaire, d'où l'équivalence. On remarquera alors que sur un fibré vectoriel E de fibre $V \simeq \mathbb{R}^r$, la donnée d'une métrique est équivalente à la donnée d'un élément de $GL(r, \mathbb{R})/O(r)$ en tout point de M , c'est à dire d'une section du fibré $L(E)/O(r)$. Nous retrouvons ainsi que toute réduction du fibré $L(E)$ au sous-groupe $O(r)$ équivaut à la donnée d'une telle section.

Dans le cas où l'on peut réduire le groupe de structure à $SO(r)$, on dit que le fibré vectoriel E est orientable. Cette réduction n'est pas toujours possible, et dépend de la structure globale de E . En particulier, le fibré vectoriel TM est orientable si et seulement si M est une variété orientable.

1.11 Cohomologie de Čech

1.11.1 Complexe de Čech

La cohomologie de Čech est un moyen purement combinatoire de calculer la cohomologie de de Rham d'une variété. On peut la définir sur toute variété topologique.

Soit X une telle variété topologique, et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un **recouvrement d'ouverts** de X . On se donne sur I un ordre (quelconque) afin de pouvoir écrire $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p$ pour des $\alpha_i \in I$. Soit G un groupe abélien dont on notera additivement la loi interne.

Soit $C^0(\mathfrak{U}, G)$ l'ensemble des fonctions qui associent à tout ouvert $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ un élément de G . Remarquons tout de suite, car c'est essentiel, qu'on peut interpréter ces fonctions comme des fonctions constantes $U_\alpha \rightarrow G$, ou encore comme des fonctions $I \rightarrow G$. L'espace des p -cochaînes $C^p(\mathfrak{U}, G)$ est l'ensemble des applications qui associent à toute intersection $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$ un élément de G . Bien sûr, on identifie $U_\alpha \cap U_\beta$ à $U_\beta \cap U_\alpha$. Pour éviter les éventuelles répétitions de ces ouverts, on utilise l'ordre introduit sur I pour ne retenir que les intersections $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$ pour lesquelles $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p$. On note $U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ cette intersection. Une p -cochaîne peut alors être notée $g = \{g_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}\}_{\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p}$ avec $g_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p} \in G$. On note

$$C^*(\mathfrak{U}, G) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{U}, G)$$

l'espace gradué de toutes les cochaînes. Parfois, pour alléger les notations, on pourra avoir besoin de ne pas respecter la règle d'écriture $g_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ avec $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p$. Dans ce cas, on prend la convention que $g_{\alpha_{\sigma(0)} \alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(p)}} = \text{sign}(\sigma) g_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, p\}$.

À $g = \{g_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}\}_{\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p} \in C^p(\mathfrak{U}, G)$ on peut associer une $(p+1)$ -cochaîne

$$\{(\delta g)_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}}\}_{\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p < \alpha_{p+1}}$$

en posant

$$(\delta g)_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i g_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

où $\widehat{\alpha}_i$ signifie que l'on omet α_i . Dans cette définition, on a utilisé explicitement la notation additive de la loi interne de G . Dans le cas où cette loi serait multiplicative, il s'agirait d'un produit sur des $g_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$ ou de leur inverse.

Il est alors assez facile de vérifier que $\delta^2 = 0$, et que donc $(C^*(\mathfrak{U}, G), \delta)$ est un complexe différentiel gradué. Sa cohomologie, notée $H^*(\mathfrak{U}, G)$, est **la cohomologie de Čech du couple** (\mathfrak{U}, G) .

1.11.2 Cohomologie de Čech

La cohomologie $H^*(\mathfrak{U}, G)$ dépend du choix du recouvrement \mathfrak{U} . Nous dirons qu'un recouvrement $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ est plus fin que \mathfrak{U} si on peut inclure chaque ouvert V_β dans un U_α . Il existe donc une application $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : J \rightarrow I$ telle que $V_\beta \subset U_{\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(\beta)}$. On dira que $(\mathfrak{V}, \phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}})$ est un raffinement de \mathfrak{U} . Dans ce cas, $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}$ induit une application

$$\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}^\# : C^p(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow C^p(\mathfrak{V}, G)$$

en posant

$$(\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}^\# g)_{\beta_0 \dots \beta_p} = g_{\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(\beta_0) \dots \phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(\beta_p)}$$

Il est facile de voir que $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}^\#$ est un morphisme de complexes différentiels gradués. Donc on hérite d'une application en cohomologies

$$\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}^\# : H^p(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow H^p(\mathfrak{V}, G)$$

On peut montrer que cette application est indépendante du choix de $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : J \rightarrow I$ qui fait de $(\mathfrak{V}, \phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}})$ un raffinement de \mathfrak{U} .

Grâce à cette application, on peut considérer la limite directe des groupes $H^*(\mathfrak{U}, G)$ lorsque \mathfrak{U} parcourt tous les recouvrements de X . Cette limite est construite de la façon suivante. On considère en même temps tous les groupes $H^*(\mathfrak{U}, G)$ pour tous les recouvrements \mathfrak{U} , et on introduit l'ensemble

$$\bigcup_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, G)$$

qui est l'union disjointe de ces groupes. Sur cet ensemble (qui n'est pas un groupe), on définit une relation d'équivalence en disant que deux éléments $[g] \in H^*(\mathfrak{U}, G)$ et $[h] \in H^*(\mathfrak{V}, G)$ sont équivalents s'il existe un recouvrement \mathfrak{W} qui soit à la fois un raffinement pour \mathfrak{U} et pour \mathfrak{V} , tel que

$$\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}^*([g]) = \phi_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}^*([h]) \in H^*(\mathfrak{W}, G)$$

Cette relation signifie donc qu'en utilisant un raffinement suffisamment fin, les images de $[g]$ et $[h]$ coïncident dans le groupe de cohomologie de ce raffinement. On peut donner une structure de groupe au quotient de $\cup_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, G)$ par cette relation d'équivalence. Notons $\overline{[g]}$ la classe de $[g]$ dans ce quotient. Avec les notations précédentes, mais où cette fois $[g]$ et $[h]$ ne sont plus nécessairement équivalents, on pose $\overline{[g]} + \overline{[h]} = \overline{\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}^*([g]) + \phi_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}^*([h])}$. On note $H^*(X, G)$ le groupe obtenu, c'est la cohomologie de Čech de X à valeurs dans G .

1.11.3 Cohomologie de Čech à valeurs dans des faisceaux

Un préfaisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est une application qui associe à chaque ouvert $U \subset X$ un groupe (abélien) $\mathcal{F}(U)$ tel que

1. si $U \subset V$ sont deux ouverts de X , alors il existe un morphisme de groupes $i_{UV} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ qu'on appelle le morphisme de restriction de \mathcal{F} ;
2. si $U \subset V \subset W$ sont trois ouverts de X , alors $i_{UW} = i_{UV}i_{VW}$.

L'ensemble vide s'envoie toujours sur le groupe nul : $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Un préfaisceau \mathcal{F} est un faisceau si en plus

1. si $U = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$, alors $i_{\cup_{\alpha} U}(f) = 0$ pour tout α implique que l'élément $f \in \mathcal{F}(U)$ est nul ;
2. tout point de X admet un voisinage ouvert suffisamment petit U sur lequel il existe une famille d'éléments compatibles $f_{\alpha} \in \mathcal{F}(U_{\alpha})$, pour $U = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$, qui soient restrictions d'un élément $f \in \mathcal{F}(U)$.

Une famille compatible $f_{\alpha} \in \mathcal{F}(U_{\alpha})$ pour $U = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ satisfait à $i_{U_{\alpha\beta}U_{\beta}}(f_{\beta}) = i_{U_{\beta\alpha}U_{\alpha}}(f_{\alpha})$.

Un morphisme de préfaisceaux $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une collection de morphismes de groupes $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ qui commutent avec les restrictions respectives de \mathcal{F} et \mathcal{G} .

On se place dans le cadre des notations déjà utilisées. Soit $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement d'ouverts de X . On définit les 0-cochaînes sur \mathfrak{U} à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{F} comme l'ensemble des fonctions qui associent à tout ouvert U_α un élément de $\mathcal{F}(U_\alpha)$. On note $C^0(\mathfrak{U}, F)$ cet espace de cochaînes. Les p -cochaînes sont les fonctions qui associent à tout $U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ un élément de $\mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p})$. Un tel élément est noté $a = \{a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}\}$. On le suppose antisymétrique par rapport aux indices α_i . On note $C^p(\mathfrak{U}, F)$ l'espace des p -cochaînes.

La différentielle δ est définie par la relation

$$(\delta a)_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i i_{U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}} U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} a_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

Il est facile de vérifier que $\delta^2 = 0$ en utilisant les propriétés des morphismes de restriction. On note $H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ la cohomologie associée à ce complexe. En utilisant une limite directe des groupes associée à des recouvrements de plus en plus fins, on peut introduire la cohomologie de Čech à valeurs dans \mathcal{F} , qu'on note $H^*(X, \mathcal{F})$.

Si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de préfaisceaux, alors on peut montrer que'on obtient une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Exemple 1.11.1 *On dit qu'un faisceau est constant si $\mathcal{F}(U) = G$ pour tout ouvert U , où G est un groupe abélien, et les restrictions sont toutes l'application identité sur G . Concrètement, les p -cochaînes sont des fonctions constantes de $U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ dans G . On retrouve donc la définition précédente de la cohomologie de Čech. On note G ce faisceau.*

Soit maintenant le faisceau qui associe à tout ouvert U de X l'algèbre des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} sur U : $\mathcal{F}(U) = C^0(U, \mathbb{R})$. Les morphismes de restriction sont exactement les restrictions des fonctions à des ouverts plus petits. Une p -cochaîne est une collection de fonctions continues $U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p} \rightarrow \mathbb{R}$. Ce cas est donc très différent du précédent. On peut généraliser ce faisceau en prenant des fonctions différentiables ($\mathcal{F}(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$), ou bien encore des fonctions holomorphes si on se place par exemple sur une variété complexe.

Une autre généralisation du faisceau précédent consiste à associer à U l'espace des r -formes différentielles sur U : $\mathcal{F}(U) = \Omega^r(U)$.

Théorème 1.11.1 ([25]) *La cohomologie de Čech à valeurs dans le groupe abélien \mathbb{R} d'une variété différentielle M est isomorphe à la cohomologie de De Rahm de M i.e.*

$$H^p(M, \mathbb{R}) \simeq H^p(M), \forall p \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

Variété feuilletée

Dans ce chapitre on donne la notion d'une variété feuilletée ainsi que les feuilletages Riemanniens, la cohomologie basique et la signature basique. Les références principales de ce chapitre sont : [2],[5],[11],[26] et [13]. Sauf mention expresse du contraire ou précision, tous les objets considérés ont une régularité C^∞ .

2.1 Variété feuilletée

Soit M un espace Euclidien $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ muni des coordonnées canoniques notées par $(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$. On considère pour tout $y \in \mathbb{R}^q$ la famille des sous-espaces affines F_y de M définie par le système différentiel : $dy_1 = \dots = dy_q = 0$. Dans ce cas, M est considérée comme la réunion disjointe de ces espaces, sa topologie est le produit de la topologie usuelle de \mathbb{R}^p et la topologie discrète de \mathbb{R}^q . M est dite, avec cette structure, une variété feuilletée de feuilletage de dimension p et de codimension q . Elle constitue un modèle local d'un feuilletage de dimension p et de codimension q noté \mathcal{F} .

Soit \mathcal{O} un ouvert de M , on appelle \mathcal{F} -plaque de \mathcal{O} l'intersection de \mathcal{O} avec l'espace horizontal F_y . Un difféomorphisme $\phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ est dit \mathcal{F} -feuilleté s'il est de la forme $\phi(x, y) = \phi(\phi_1(x, y), \phi_2(y))$, il envoie une \mathcal{F} -plaque de \mathcal{O} vers une \mathcal{F} -plaque de \mathcal{O}' .

Définition 2.1.1 Soit M une variété de dimension $n = p + q$. Un feuilletage \mathcal{F} sur M de codimension q est la donnée d'un recouvrement d'ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ où pour tout i , les

difféomorphismes $\varphi_i : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow U_i$ vérifient :

Pour toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ le changement de coordonnées

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme \mathcal{F} -feuilleté de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$, $y' = \gamma_{ij}(y)$.

La variété M est décomposée en sous-variétés connexes de dimension p appelées feuilles de \mathcal{F} . Un ouvert U de M est dit saturé pour \mathcal{F} s'il est une réunion de feuilles, si $x \in U$ alors toute feuille qui passe par x est contenue dans U .

Les coordonnées locales (U_i, φ_i) qui satisfassent les conditions de la définition (2.1.1) sont dites distinguées pour le feuilletage \mathcal{F} . Notons par (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} .

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension q sur M défini par un atlas maximal $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ comme dans la définition (2.1.1). Soit $\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ la seconde projection, alors l'application

$$f_i : U_i \xrightarrow{\pi \circ \varphi_i^{-1}} \mathbb{R}^q$$

est une submersion, $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$ sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, et les fibres de la submersion f_i sont les \mathcal{F} -plaques de U_i . Les submersions f_i et les difféomorphismes locaux γ_{ij} donnent une caractérisation complète du feuilletage \mathcal{F} .

Définition 2.1.2 *Un feuilletage \mathcal{F} de codimension q sur une variété M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, de submersions $f_i : U_i \longrightarrow T$ sur une variété transverse T de dimension q et pour tout $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les difféomorphismes $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \subset T \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j) \subset T$ vérifient $f_i(x) = \gamma_{ij} \circ f_j(x)$ pour tout $x \in U_i \cap U_j$. Dans ce cas, on dit que $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ est un cocycle feuilleté définissant \mathcal{F} .*

2.2 Structure transverse

Soient maintenant (M, g_M, \mathcal{F}) une variété riemannienne de dimension $p + q$ et \mathcal{F} un feuilletage de codimension q . On note $T\mathcal{F}$ le sous-fibré vectoriel de TM tangent aux feuilles

et on considère la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T\mathcal{F} \xrightarrow{i} TM \xrightarrow{\Pi} \nu\mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

où $\nu\mathcal{F}$ désigne le fibré quotient $TM/T\mathcal{F}$. L'existence d'une métrique riemannienne sur M décompose orthogonalement l'espace tangent de M en $T\mathcal{F}$ et $T\mathcal{F}^\perp$, et on a un isomorphisme $\sigma : \nu\mathcal{F} \rightarrow T\mathcal{F}^\perp$. La métrique g_M se décompose ainsi en

$$g_M = g_{T\mathcal{F}} \oplus g_{T\mathcal{F}^\perp}.$$

Ainsi l'image réciproque de $g_{T\mathcal{F}^\perp}$ par σ induit une métrique sur le fibré $\nu\mathcal{F}$ faisant de l'isomorphisme σ une isométrie. Dans la suite, on identifiera $\nu\mathcal{F}$ à $T\mathcal{F}^\perp$ en tant que fibrés vectoriels. $\Gamma(\mathcal{F})$ est l'espace des section C^∞ de $T\mathcal{F}$ " i.e. $\Gamma(\mathcal{F})$ l'ensemble des champs de vecteurs de $\Gamma(M)$ tangent aux feuilles de \mathcal{F} ".

Définition 2.2.1 Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite basique si $Xf = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$.

Toute fonction basique est constante sur les feuilles de \mathcal{F} . Notons par \mathfrak{B} L'algèbre des fonctions basiques.

Définition 2.2.2 Un vecteur $Y \in \mathfrak{X}(M)$ est dit feuilleté si pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ le crochet $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{F})$.

L'ensemble de champs de vecteurs feuilletés noté $\Gamma(M, \mathcal{F})$ est un \mathfrak{B} -Module. Par définition $\Gamma(\mathcal{F})$ est un idéal de $\Gamma(M, \mathcal{F})$ et le quotient $\Gamma(M/\mathcal{F}) = \Gamma(M, \mathcal{F})/\Gamma(\mathcal{F})$ est appelé l'ensemble des champs basiques (ou transverses) sur (M, \mathcal{F}) .

Définition 2.2.3 Une forme différentielle $\omega \in \Omega^r(M)$ est dite basique si $i_X\omega = 0$ et $L_X\omega = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$, où L_X désigne la dérivée de Lie dans la direction de X et i_X le produit intérieur.

Notons par $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ l'espace des formes basiques de degré r sur une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) . C'est un module sur \mathfrak{B} .

Soit M une variété de dimension n ($n = p + q$) munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q définie par le cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$.

Définition 2.2.4 Une *structure transverse* à \mathcal{F} est la donnée d'une structure géométrique sur la variété T invariante par les difféomorphismes locaux γ_{ij} .

Cette structure est très importante dans la notion des feuilletages.

2.2.1 Exemples

1. Le feuilletage \mathcal{F} est dit transversalement orientable si T donne une orientation préservée par les difféomorphismes locaux γ_{ij} .
2. Un feuilletage \mathcal{F} est dit transversalement kählérien (resp. transversalement Kähler-quaternionien), si la variété T est kählérienne (resp. Kähler-quaternionienne) et si les γ_{ij} préservent la structure kählérienne (resp. Kähler-quaternionienne).

Nous donnons maintenant des exemples de feuilletages.

2.3 Exemples de feuilletage

2.3.1 Feuilletage simple

a) Deux feuilletages triviaux peuvent être définis sur une variété M de dimension n .

1. Un feuilletage dont ces feuilles sont les points, donc de codimension n .
2. Un feuilletage avec une seule feuille M , donc de codimension 0.

b) Toute submersion $\pi : M \rightarrow B$ dont ces fibres sont connexes définit un feuilletage.

Ces feuilles sont les fibres $\pi^{-1}(b), b \in B$. Dans ce cas, tout feuilletage associé à une submersion est appelé un feuilletage simple et si ces fibres sont connexes, il est appelé strictement simple. En particulier tout produit $F \times B$ est un feuilletage dont ces feuilles sont $F \times \{b\}, b \in B$. Ce feuilletage est de codimension la dimension de B , de plus, il est orientable si et seulement si B est orientable.

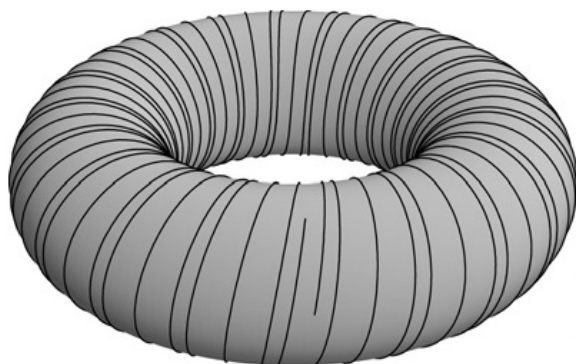


FIGURE 2.1 – Feuilletage de Kronecker sur le tore

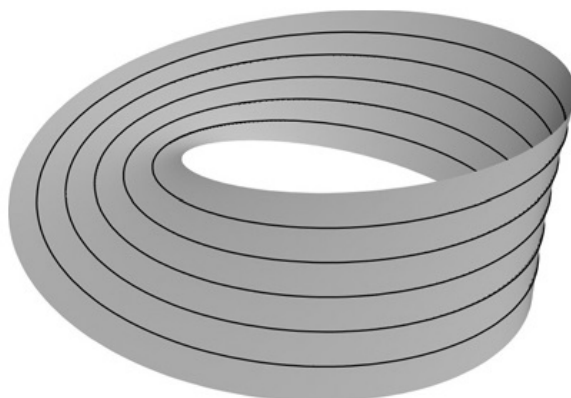


FIGURE 2.2 – Feuilletage de la bande de Möbius

2.3.2 Feuilletage linéaire

Sur le tore \mathbb{T}^2

Soit a un réel irrationnel et considérons la submersion

$$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow s(x, y) = x - ay.$$

Elle induit un feuilletage \mathcal{F}_s sur \mathbb{R}^2 . Soit f la projection universelle standard du tore \mathbb{T}^2

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2; f(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}).$$

Alors \mathcal{F}_s induit un feuilletage \mathcal{F} par f sur le tore \mathbb{T}^2 . Si (U, φ) est une carte feuilletée pour \mathcal{F}_s telle que $f|_U$ est injective alors, $\varphi \circ f|_U^{-1}$ est une carte feuilletée pour \mathcal{F} . Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont difféomorphes à \mathbb{R} et denses dans \mathbb{T}^2 .

\mathcal{F} est appelé le feuilletage de Kronecker (Voir figure.2.1). Dans le cas où α est rationnel, toutes les feuilles de \mathcal{F} sont difféomorphes au cercle unité \mathbb{S}^1 .

Sur la bande de Möbius

Considérons f la projection universelle standard

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M; (x, y) \longrightarrow (x', y') \quad \text{telle que} \quad x' - x \in \mathbb{Z}, y' = (-1)^{x'-x}y$$

de la bande ouverte de Möbius M . Le feuilletage trivial de codimension 1 sur \mathbb{R}^2 induit un feuilletage \mathcal{F} sur M .

Toutes ces feuilles sont difféomorphes à \mathbb{S}^1 , elles s'enveloppent deux fois autour de M , à l'exception celle du milieu, elle tourne seulement une fois (Voir figure.2.2).

2.3.3 Feuilletage Riemannien

Définition 2.3.1 *Un feuilletage \mathcal{F} est dit Riemannien s'il existe sur T une métrique riemannienne dont les difféomorphismes γ_{ij} sont des isométries ou \mathcal{F} est Riemannien si toute géodésique orthogonale aux feuilles en un point, alors elle est orthogonale aux feuilles en tous les points.*

Exemple 2.3.1 *Soit ξ un champ de Killing non singulier sur M . Le feuilletage défini par les orbites de ξ est Riemannien.*

L'image réciproque de la métrique sur T par les submersions f_i induit une métrique $g_{\nu\mathcal{F}}$ sur le fibré $\nu\mathcal{F}$ invariante le long des feuilles. Elle vérifie [32]

$$L_X g_{\nu\mathcal{F}} = 0, \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}), \quad (2.1)$$

cette condition s'appelle la condition d'invariance d'holonomie. L'égalité (2.1) assure l'existence d'une connexion de Levi-Civita transversale sur le fibré normal [36]. On a la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 *Soit $g_{\nu\mathcal{F}}$ une métrique définie sur le fibré normal $\nu\mathcal{F}$ qui vérifie (2.1). Alors il existe une unique connexion métrique ∇ à torsion nulle.*

La connexion ∇ peut être vue comme l'image réciproque de la connexion de Levi-Civita de T par les submersions qui définissent \mathcal{F} . La torsion sur $\nu\mathcal{F}$ est définie pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ par

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X \pi(Y) - \nabla_Y \pi(X) - \pi[X, Y],$$

où $\pi : TM \rightarrow \nu\mathcal{F}$ est la projection. La courbure R^∇ agit sur $\Gamma(\nu\mathcal{F})$ par

$$R^\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]},$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$. Une propriété fondamentale de R^∇ dans le cas des feuilletages riemanniens est la suivante,

Proposition 2.3.2 *Pour tout $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$, on a*

$$i_X R^\nabla = 0,$$

Preuve. Le fait que la torsion sur $\nu\mathcal{F}$ soit nulle implique que pour tous $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $Y \in \Gamma(TM)$, on a $\nabla_X \pi(Y) = \pi[X, Y]$. D'où pour $X, X' \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $Y \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$, on calcule

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, X')Y &= \nabla_X \nabla_{X'} Y - \nabla_{X'} \nabla_X Y - \nabla_{[X, X']} Y \\ &= \nabla_X \pi[X', Y] - \nabla_{X'} \pi[X, Y] - \pi[[X, X'], Y] \\ &= \pi[X, [X', Y]] - \pi[X', [X, Y]] - \pi[[X, X'], Y] = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence de l'identité de Jacobi. Il reste à montrer que $R^\nabla(X, Y)Z = 0$ pour $Y, Z \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$. Pour cela, on commence par montrer le lemme suivant, ■

Lemme 2.3.1 *Pour toute connexion ∇ sur le fibré normal à torsion nulle, on a*

$$R^\nabla(X, Y)Z = R^\nabla(X, Z)Y,$$

où $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $Y, Z \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$.

Preuve. La torsion de ∇ étant nulle, on a pour tous $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $Y, Z \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \pi[X, Z] - \nabla_Z \pi[X, Y] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Z]} Y - \pi[Y, [X, Z]] - \nabla_Z \nabla_X Y - \pi[[X, Y], Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - R^\nabla(Z, X)Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \pi[Y, [X, Z]] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= R^\nabla(X, Z)Y + \nabla_X \pi[Y, Z] - \pi[Y, [X, Z]] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= R^\nabla(X, Z)Y + \pi[X, [Y, Z]] - \pi[Y, [X, Z]] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= R^\nabla(X, Z)Y \end{aligned}$$

Si la connexion ∇ est métrique, alors la 4-forme $g_{\nu\mathcal{F}}(R^\nabla(X, Y)Z, W)$ est antisymétrique en Z et W . En effet,

$$\begin{aligned} g_{\nu\mathcal{F}}(R^\nabla(X, Y)Z, Z) &= g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &= X(g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_Y Z, Z)) - g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y(g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_X Z, Z)) \\ &\quad + g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - \frac{1}{2}[X, Y](g_{\nu\mathcal{F}}(Z, Z)) \\ &= \frac{1}{2}X(Y(g_{\nu\mathcal{F}}(Z, Z))) - \frac{1}{2}Y(X(g_{\nu\mathcal{F}}(Z, Z))) \\ &\quad - \frac{1}{2}[X, Y](g_{\nu\mathcal{F}}(Z, Z)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La connexion de Levi-Civita transversale étant métrique à torsion nulle, on obtient alors par ce lemme que pour $Y, Z \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$,

$$0 = g_{\nu\mathcal{F}}(R^\nabla(X, Z)Y, Y) = g_{\nu\mathcal{F}}(R^\nabla(X, Y)Z, Y) = -g_{\nu\mathcal{F}}(R^\nabla(X, Y)Y, Z).$$

On en déduit que $R^\nabla(X, Y)Y = 0$. En utilisant de nouveau le lemme 2.3.1, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= R^\nabla(X, Y + Z)(Y + Z) \\ &= R^\nabla(X, Y)Y + R^\nabla(X, Y)Z + R^\nabla(X, Z)Y + R^\nabla(X, Z)Z \\ &= 2R^\nabla(X, Y)Z. \end{aligned}$$

On a alors le résultat demandé. ■

On peut déduire de la proposition précédente que, pour tous $Y, Z \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$, l'opérateur $R^\nabla(Y, Z) : \Gamma(\nu\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\nu\mathcal{F})$ est un endomorphisme bien défini. De plus, il vérifie la première identité de Bianchi. En effet, pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyclique}} R^\nabla(X, Y)Z &= \sum_{\text{cyclique}} (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= \sum_{\text{cyclique}} (\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= \sum_{\text{cyclique}} (\nabla_Z (\pi[X, Y]) - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= \sum_{\text{cyclique}} \pi[Z, [X, Y]] = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence de l'identité de Jacobi. L'équation (2.1) amène à la définition suivante :

Définition 2.3.2 *Une métrique g_M sur M est dite quasi-fibrée si la métrique induite $g_{\nu\mathcal{F}}$ sur $\nu\mathcal{F}$ vérifie la condition d'invariance d'holonomie.*

Dans ce cas, la connexion de Levi-Civita transversale est donnée pour tout $Y \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$ par (c.f.[36])

$$\nabla_X Y = \begin{cases} \pi[X, Y], & \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}); \\ \pi(\nabla_X^M Y), & \forall X \in \Gamma(\nu\mathcal{F}). \end{cases} \quad (2.2)$$

où ∇^M désigne la connexion de Levi-Civita associée à M . On vérifie facilement que la connexion ∇ définie par (2.2) est métrique à torsion nulle.

Dans la suite, on considérera un feuilletage Riemannien avec une métrique quasi-fibrée.

Définition 2.3.3 *On définit la courbure de Ricci transversale par*

$$\begin{aligned} Ric^\nabla : \Gamma(\nu\mathcal{F}) &\longrightarrow \Gamma(\nu\mathcal{F}) \\ Y &\longmapsto Ric^\nabla Y = \sum_{i=1}^q R^\nabla(Y, e_i)e_i, \end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{i=1, \dots, q}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(\nu\mathcal{F})$. De même, on définit la courbure scalaire transversale $Scal^\nabla$ comme étant la trace de la courbure de Ricci transversale.

Un feuilletage \mathcal{F} est dit transversalement d'Einstein si la courbure de Ricci transversale est proportionnelle à $g_{\nu\mathcal{F}}$.

La seconde forme fondamentale Π du fibré $T\mathcal{F}$ est définie comme étant la seconde forme fondamentale de chaque feuille de \mathcal{F} . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \Pi : \Gamma(T\mathcal{F}) \times \Gamma(T\mathcal{F}) &\longrightarrow \Gamma(\nu\mathcal{F}) \\ (X, Y) &\longmapsto \Pi(X, Y) = \pi(\nabla_X^M Y). \end{aligned}$$

D'où Π est symétrique. La courbure moyenne κ de \mathcal{F} est donnée pour tout $Y \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$ par $\kappa(Y) = g_{\nu\mathcal{F}}(\tau, Y)$, où τ est la trace de la seconde forme fondamentale. Un feuilletage est dit minimal si chaque feuille est minimale, c'est-à-dire si la courbure moyenne est nulle. Ainsi, un feuilletage est dit totalement géodésique si chaque feuille est totalement géodésique ce qui revient à dire que la seconde forme fondamentale est nulle.

2.4 Feuilletage induit

Soient M, N deux variétés et supposons que \mathcal{F} est un feuilletage de codimension q sur M . On dit que l'application $f : N \longrightarrow M$ est transverse à \mathcal{F} si pour tout point $x \in N$, l'espace tangent $T_y M$ de M au point $y = f(x)$ est généré par $T_y \mathcal{F}$ et $(d_x f)(T_x N)$ i.e.

$$T_y M = T_y \mathcal{F} + (d_x f)(T_x N)$$

De même, si M est de dimension $n = p + q$, l'application $f : N \longrightarrow M$ est transverse à \mathcal{F} si pour tout $x \in N$, il existe un système de coordonnées locales

$(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ où V est un voisinage de $y = f(x)$ telle que l'application

$$g_U = (y_1^{-1} \circ f, \dots, y_n^{-1} \circ f) : U = f^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

est une submersion. La collection des submersions locales (U, g_U) définit un feuilletage de codimension q noté $f^*(\mathcal{F})$ sur N appelé feuilletage pull-back de \mathcal{F} par f .

Si f est une submersion, \mathcal{F} est un feuilletage par point et f est transverse à \mathcal{F} alors les feuilles de $f^*(\mathcal{F})$ sont exactement les fibres de f .

Si $N = \widetilde{M}$ (\widetilde{M} est le revêtement universel de M) et $f : \widetilde{M} \longrightarrow M$ la projection du revêtement, alors $f^*(\mathcal{F})$ noté $\widetilde{\mathcal{F}}$ a la même dimension et les mêmes propriétés que \mathcal{F} .

2.5 Morphisme de feuilletage

Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux feuilletages sur deux variétés M et M' respectivement. Une application $f : M \longrightarrow M'$ est appelée morphisme entre \mathcal{F} et \mathcal{F}' si pour toute feuille L de \mathcal{F} , $f(L)$ est contenue dans une feuille de \mathcal{F}' . De plus, f est un isomorphisme s'il est un difféomorphisme ; dans ce cas, la restriction de f à feuille L de \mathcal{F} est difféomorphe à une feuille $L' = f(L) \in \mathcal{F}'$.

Supposons que f est un difféomorphisme de M . Alors pour toute feuille L de \mathcal{F} , $f(L)$ est une feuille de codimension q de \mathcal{F}' sur M . On dit alors que \mathcal{F}' est l'image de \mathcal{F} par f i.e. $\mathcal{F}' = f^*(\mathcal{F})$. Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont C^r -conjugués (topologiquement si $r = 0$, différentiable si $r = \infty$; analytiquement si $r \in \mathbb{C}$) s'il existe un C^r -difféomorphisme $f : M \longrightarrow M$ tel que $\mathcal{F}' = f^*(\mathcal{F})$.

L'ensemble $\text{Diff}^r(M, \mathcal{F})$ des C^r -difféomorphismes de M qui préserve le feuilletage \mathcal{F} est un sous-groupe du groupe $\text{Diff}^r(M)$ l'ensemble de tous les C^r -difféomorphismes de M .

2.6 Théorème de Frobenius

Soient M une variété de dimension $n = p + q$, E un sous fibré de rang p du fibré tangent TM de M et U un ouvert de M tel que TM est équivalent à $U \times \mathbb{R}^n$ sur U . A tout point $x \in U$, la fibre E_x est considérée comme le noyau de q 1-formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_q$ linéairement

indépendentes :

$$E_x = \bigcap_{j=1}^q \ker \omega_j(x). \quad (2.3)$$

Le sous fibré E est appelé le fibré des p -plan sur M . On dit que E est involutive si pour tout X et Y tangent à E (i.e. sections de E), le croché $[X, Y]$ est tangent à E .

On dit que E est complètement intégrable si autour de tout point $x \in M$, il existe une sous-variété P_x de dimension p admettant $E|_{P_x}$ comme son fibré tangent.

La sous-variété connexe maximale satisfaisante les propriétés précédentes est appelée sous-variété intégrable du système (2.3). Elle définit une partition de M donc un feuilletage de codimension n .

Théorème 2.6.1 *Soit E un sous fibré de rang p défini localement par le système différentiel (2.3). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- E est involutive,
- E est complètement intégrable,
- Il existe des 1-formes différentielles (b_{ij}) , $i, j = 1, \dots, q$ telles que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \wedge \omega_j$$

Soit ω une 1-forme non singulière sur M . Alors ω définit un feuilletage de codimension 1 si et seulement si il existe une 1-forme β telle que $d\omega = \beta \wedge \omega$ qui est équivalente à $\omega \wedge d\omega = 0$ donc particulièrement ω est fermée.

D'autre part, la 1-forme différentielle non singulière ω sur \mathbb{R}^3 définie par $\omega = dx - zdy$ vérifie la relation $\omega \wedge d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ mais elle ne peut pas définir un feuilletage. Le fibré $E \subset T\mathbb{R}^3$ noyau de la 1-forme ω a des propriétés remarquables : étant donnés deux points a et b dans \mathbb{R}^3 , il existe une courbe différentiable $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ et γ est tangente à E pour tout point. On dit que ω définit une structure de contact. La structure de contact est opposée à la structure feuilletée.

2.6.1 Distribution

Une distribution différentiable D de dimension p sur M est un sous fibré vectoriel de TM de base M i.e. pour tout $x \in M$ on a

- D_x est sous-espace vectoriel de T_xM ;
- $\exists U$ voisinage de x et $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(U)$ tel que $\exists \bar{x} \in U(X_1(\bar{x}), \dots, X_p(\bar{x}))$ est une base de $D_{\bar{x}}$.

Alors, un champ de vecteurs sur M est dit tangent à D si pour $x \in M$ on a $X_x \in D_x$. D est dite involutive si elle est stable par rapport au crochet de Lie i.e. $X, Y \in D \implies [X, Y] \in D$, elle est un sous-module de $\mathfrak{X}(M)$.

Définition 2.6.1 Une sous-variété intégrale d'une distribution D est la sous-variété N de M telle que

$$\forall x \in N : T_xN = D_x$$

On remarque que la définition des distributions coincide avec la définition de fibré des p -plans sur M .

Définition 2.6.2 Une distribution D de dimension p sur M est complètement intégrable si M admet un feuilletage \mathcal{F} de dimension p .

On peut appliquer la théorème de Frobenius d'où, D est involutive si et seulement si elle est complètement intégrable.

2.6.2 Variété localement produit

Soient maintenant, N et L deux variétés différentiables d'atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ de dimension p et $\{(W_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ de dimension q respectivement. On sait que la variété produit $M \times N$ est une variété de dimension $n = p + q$ et d'atlas $\{(W_i \times V_j, \phi_i \times \varphi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$. Alors on définit la variété localement produit par :

Définition 2.6.3 Une structure d'atlas localement produit de dimension $n = p + q$ sur M est l'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que les applications de changements de cartes

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, y) = (\varphi_{ij}^1(x), \varphi_{ij}^2(y))$$

sont des difféomorphismes.

La matrice de changement de carte s'écrit comme suit

$$D_{(x,y)}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & B(y) \end{bmatrix}$$

où $A(x) \in GL(p, \mathbb{R})$ et $B(y) \in GL(q, \mathbb{R})$.

Définition 2.6.4 Une variété est dite variété localement produit si elle admet une structure d'atlas localement produit.

Posons sur l'atlas localement produit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} U_i^p &= \{x \in U_i : (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^p) = cts\} \\ U_i^q &= \{x \in U_i : (\varphi_i^{p+1}, \dots, \varphi_i^{p+q}) = cts\} \end{aligned}$$

Alors

$$U_i \equiv U_i^p \times U_i^q$$

D'où, localement M s'écrit $M = M^p \times M^q$

Théorème 2.6.2 Une structure d'atlas localement produit est une structure d'atlas feuilleté de dimension p et q .

Supposons maintenant que la variété M admet une métrique g .

Définition 2.6.5 Une métrique g sur une variété localement produit M est localement décomposable si

$$g = \sum_{i,j=1}^p g_{ij} d\varphi^i d\varphi^j + \sum_{s,k=1}^{p+q} g_{sk} d\varphi^s d\varphi^k \text{ de matrice représentative } \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{sk} \end{pmatrix}$$

relativement à l'atlas localement produit $(U_i, \varphi_i)_i$.

Les sous-variétés feuilles M^p et M^q sont g -orthogonales, g -totalement géodésiques et parallèles.

Maintenant on considère une variété Riemannienne (M, g) compacte orientable supportant deux feuilletages Riemanniens \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 orthogonaux de codimensions respectives n_1 et n_2 avec $n_1 + n_2 = n$. Alors la métrique g induit deux métriques g_1 et g_2 respectivement sur les fibrés vectoriels $\nu\mathcal{F}_1$ et $\nu\mathcal{F}_2$; g_1 est invariante le long des feuilles de $\nu\mathcal{F}_1$ et g_2 est invariante le long des feuilles de $\nu\mathcal{F}_2$. Localement g_1 et g_2 s'écrivent

$$g_1 = \sum_{ij=1}^{n_1} (g_1)_{ij} dx_i \otimes dx_j \text{ et } g_2 = \sum_{ij=1}^{n_2} (g_2)_{ij} dy_i \otimes dy_j$$

et sont telles que $g = g_1 + g_2$. Les deux fibrés $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_2$ sont des sous fibrés de TM et constituent une décomposition orthogonale

$$TM = T\mathcal{F}_1 \oplus T\mathcal{F}_2$$

Conclusion 2.6.1 *La variété localement produit M supporte deux feuilletages \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Si de plus, on la munit d'une structure Riemannienne, \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont orthogonaux.*

2.7 Cohomologie basique

Soit M une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q . Si ω est une r -forme basique ($r \leq n$) alors sa différentielle $d\omega$ l'est aussi, donc on obtient un complexe différentiel

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Omega^1(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n_2}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{d} 0$$

on le note $(\Omega^r(M/\mathcal{F}), d)$ et on l'appelle le complexe de De Rham basique de \mathcal{F} . On note aussi

$$d/\Omega(M/\mathcal{F}) = d_b \quad \text{la différentielle basique}$$

Son homologie

$$H^*(M/\mathcal{F}) = \bigoplus_{r=0}^n H^r(M/\mathcal{F})$$

est la cohomologie basique de \mathcal{F} . On peut la voir comme la cohomologie de De Rham de l'espace des feuilles M/\mathcal{F} même si M/\mathcal{F} n'a pas une structure différentiable. Si \mathcal{F} est une

fibration $M \rightarrow N$, $H^*(M/\mathcal{F})$ est exactement la cohomologie de De Rham de N . Si M est compacte $H^r(M/\mathcal{F})$ pour $(r = 0, 1)$ est de dimension finie, mais pour $r \geq 2$ elle ne l'est pas (cf. [13]).

Dans ce qui suit, M désigne une variété différentiable de dimension n d'atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et de fibré tangent TM .

2.8 Signature de variété et de feuilletage Riemannien

2.8.1 Signature de variété

Pour une variété compacte M orientée de dimension $n = 4l$. Les espaces vectoriels de cohomologie de De Rham $H^p(M)$ sont de dimension finie et l'application bilinéaire :

$$\Phi : ([\alpha], [\beta]) \in H^p(M) \times H^{n-p}(M) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

est non dégénérée (c'est la dualité de Poincaré). De plus Φ est symétrique pour $r = 2l$:

Définition 2.8.1 *La signature de l'application Φ est un élément de \mathbb{Z} appelé signature de M notée $Sign(M)$ (voir [23]). Lorsque $\dim(M)$ n'est pas un multiple de 4 on définit $Sign(M) = 0$.*

La signature est donc définie pour toute variété compacte orientable. C'est un invariant topologique.

Exemple 2.8.1 *Soit $\mathbb{C}P^2$ l'espace projectif complexe alors $Sign(\mathbb{C}P^2) = 1$.*

2.8.2 Signature de feuilletage Riemannien

Supposons que le feuilletage Riemannien \mathcal{F} de codimension paire $n = 2k$ sur M est homologiquement orientable i.e. $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$ donc isomorphe à \mathbb{R} , chacun des espaces vectoriels (réels) $H^r(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie, et avec des feuilles qui sont des sous-variétés minimales pour la métrique quasi-fibré associée à \mathcal{F} d'où la forme de volume v existe d'après [11].

Le laplacien basique

Soit ω une r -forme basique ($r \leq n$) alors sa différentielle l'est aussi, donc on obtient un complexe différentiel $(\Omega^r(M/\mathcal{F}), d)$ de De Rham basique de \mathcal{F} , et sa cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$.

Considérons d'autre part, l'opérateur

$$\star_b : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{n-r}(M/\mathcal{F})$$

défini sur une base orthonormée $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}$ par

$$\star_b(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \varepsilon e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-r}}$$

où $\{j_1, \dots, j_{n-r}\}$ est la suite croissante complémentaire de $\{i_1, \dots, i_r\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et ε la signature de la permutation $\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r}\}$. Ce qui définit l'opérateur étoile de Hodge basique. Sur $\Omega^r(M/\mathcal{F})$, on définit le produit scalaire hermitien par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \overline{\star_b \beta} \wedge v$$

où v désigne la forme volume sur les feuilles.

Soit alors δ_b l'adjoint de d_b par rapport au $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\delta_b : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r-1}(M/\mathcal{F})$$

$$\text{telle que } \delta_b = (-1)^{n(r-1)-1} \star_b d_b \star_b$$

δ_b est aussi appelé la codifférentielle.

L'opérateur auto-adjoint défini par

$$\Delta_b : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^r(M/\mathcal{F})$$

$$\Delta_b = D_b^2 = (d_b + \delta_b)^2 = d_b \delta_b + \delta_b d_b$$

est le laplacien basique. Alors

$$\Delta_b^0 = \Delta_b / \Omega^0(M/\mathcal{F}) = \delta_b d_b$$

est le laplacien basique opérant sur les fonctions basiques. Notons par

$$\ker \Delta_b = \ker D_b = \{\alpha \in \Omega(M/\mathcal{F}) / d_b \alpha = 0 \text{ et } \delta_b \alpha = 0\} = \mathcal{H}^p(M/\mathcal{F})$$

l'ensemble des p -formes harmoniques.

Et on a le théorème de **Hodge basique**

Théorème 2.8.1 *L'espace vectoriel $\mathcal{H}^p(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie, $Im\Delta$ est de codimension finie et on a la décomposition orthogonale*

$$\Omega^p(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^p(M/\mathcal{F}) \oplus Im\Delta$$

Comme conséquence, on a l'identification

$$H^p(M/\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}^p(M/\mathcal{F}) \quad (2.5)$$

et

$$\dim H^p(M/\mathcal{F}) = \dim \mathcal{H}^p(M/\mathcal{F})$$

Signature basique

Soit l'application $\tau : \Omega^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^*(M/\mathcal{F})$ un isomorphisme défini par $\tau(\alpha) = i^{r(r-1)+k}\star\alpha$. On a $\tau^2 = id$, il est involutive d'où il admet deux valeurs propres 1 et -1 . Soit $\Omega_+^*(M/\mathcal{F})$ et $\Omega_-^*(M/\mathcal{F})$ les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 respectivement. On a la décomposition

$$\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \Omega_+^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega_-^*(M/\mathcal{F})$$

Les opérateurs D_b et τ sont liés par la relation

$$D_b\tau = -\tau D_b$$

Soient alors

$$D_{b+} : \Omega_+^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_-^*(M/\mathcal{F}) \text{ et } D_{b-} : \Omega_-^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_+^*(M/\mathcal{F})$$

les opérateurs restrictions de D_b sur $\Omega_+^*(M/\mathcal{F})$ et $\Omega_-^*(M/\mathcal{F})$ respectivement.

Définition 2.8.2 *L'opérateur D_{b+} est appelé l'opérateur de signature du feuilletage \mathcal{F} , d'indice*

$$ind(D_{b+}) = \dim(\ker D_{b+}) - \dim(\ker D_{b-})$$

De la relation (2.5) on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^*(M/\mathcal{F}) &= \mathcal{H}_+^*(M/\mathcal{F}) \oplus \mathcal{H}_-^*(M/\mathcal{F}) \\ H^*(M/\mathcal{F}) &= H_+^*(M/\mathcal{F}) \oplus H_-^*(M/\mathcal{F})\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}ind(D_{b_+}) &= \dim \mathcal{H}_+^*(M/\mathcal{F}) - \dim \mathcal{H}_-^*(M/\mathcal{F}) \\ &= \dim H_+^*(M/\mathcal{F}) - \dim H_-^*(M/\mathcal{F})\end{aligned}$$

Soit V_r l'espace $H^r(M/\mathcal{F}) \oplus H^{2k-r}(M/\mathcal{F})$ pour $0 \leq r \leq k-1$. L'action de τ sur $H^*(M/\mathcal{F})$ permute $H^r(M/\mathcal{F})$ et $H^{2k-r}(M/\mathcal{F})$ d'où V_r est invariant par τ , ce qui donne

$$\begin{aligned}ind_{\mathcal{F}}(D_{b_+}) &= \dim \mathcal{H}_+^k(M/\mathcal{F}) - \dim \mathcal{H}_-^k(M/\mathcal{F}) \\ &= \dim H_+^k(M/\mathcal{F}) - \dim H_-^k(M/\mathcal{F})\end{aligned}$$

Remarque 2.8.1 Si k_2 est impair on a $\tau = i\star$, alors $\tau(\alpha) = -\overline{\tau(\alpha)}$ pour $\alpha \in \Omega^{k_2}(M/\mathcal{F})$ qui implique $\star^2 = id$. D'où la restriction de τ sur $\mathcal{H}_+^k(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_-^k(M/\mathcal{F})$ est un isomorphisme qui donne $ind_{\mathcal{F}}(D_{b_+}) = 0$.

Si k est pair on a $\tau = \star$, la signature de la forme non dégénérée dans le cas basique définie dans (2.4) est la signature de \mathcal{F} appelée **signature basique**.

D'où le théorème

Théorème 2.8.2 [11] Soit M une variété compacte connexe et orientable munie d'un feuilletage Riemannien homologiquement orientable \mathcal{F} de codimension paire $n = 2k$. Alors

$$Sign(\mathcal{F}) = ind_{\mathcal{F}}(D_{b_+})$$

Lorsque $codim(\mathcal{F})$ n'est pas un multiple de 4 on décrète $Sign(\mathcal{F}) = 0$. La signature basique est donc définie pour tout feuilletage Riemannien homologiquement orientable. La signature basique $Sign(\mathcal{F})$ est un invariant topologique. Il est connu que $Sign(N \times L) = Sign(N) \times Sign(L)$ (cf.[38]). Cette formule est généralisée dans ([17]) à une variété supportant deux feuilletages riemanniens orthogonaux.

Théorème 2.8.3 [17] *Soit M une variété compacte orientable de dimension n supportant deux feuilletages Riemanniens orthogonaux \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de codimensions respectives $n_1 = 4l_1$ et $n_2 = 4l_2$. Alors on a*

$$\text{Sign}(M) = \text{Sign}(\mathcal{F}_1) \cdot \text{Sign}(\mathcal{F}_2).$$

Chapitre 3

Variété spinorielle et transversalement spinorielle

Dans ce chapitre on donne premièrement un rappel sur les algèbres de Clifford, les groupes spinoriels et les variétés spinorielles (définitions et propriétés), les références principales sont : [16],[23] et [34]. Deuxièmement on définit la cohomologie de Čech basique et on détermine deux applications de cette cohomologie sur les feuilletages spinoriels.

3.1 Algèbres de Clifford et groupes spinoriels

Dans cette section, nous nous consacrons à l'étude des algèbres de Clifford qui nous permettent d'introduire le groupe spinoriel $Spin_n$. Cette section est essentielle car à partir de ces objets, on va pouvoir définir le cadre de la géométrie spinorielle et transversalement spinorielle.

3.1.1 Algèbres de Clifford

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutative \mathbb{K} muni d'une forme quadratique q .

Définition 3.1.1 *L'algèbre de Clifford noté $Cl(V, q)$ associée à l'espace quadratique (V, q) est*

l'algèbre associative unitaire qui est définie par :

$$Cl(V, q) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}(V)$$

où $\mathcal{T}(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$ est l'algèbre tensorielle de V et $\mathcal{I}(V)$ l'idéal bilatère de $\mathcal{T}(V)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x + q(x)1$, pour $x \in V$.

Remarque 3.1.1 *On a par définition de $Cl(V, q)$, l'existence d'une projection canonique*

$$\begin{aligned} \pi_q : \mathcal{T}(V) &\longrightarrow Cl(V, q) \\ \phi &\longmapsto [\phi] \end{aligned}$$

On peut donc identifier V à un sous-espace vectoriel de $Cl(V, q)$, i.e. l'application est injective $V \hookrightarrow Cl(V, q)$.

Proposition 3.1.1 *(Propriété universelle)[23] Soit \mathcal{A} une algèbre associative unitaire, et soit $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ une application \mathbb{K} -linéaire telle que pour tout $v \in V$, on ait :*

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_{\mathcal{A}}$$

Alors f se prolonge de manière unique en un \mathbb{K} -homomorphisme d'algèbres $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow \mathcal{A}$. De plus, $Cl(V, q)$ est l'unique \mathbb{K} -algèbre associative vérifiant cette propriété.

On va donner maintenant une application directe de cette proposition :

Proposition 3.1.2 [23] *On a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels entre l'algèbre extérieure de V et l'algèbre de Clifford $Cl(V, q)$ de (V, q) qui est donné par :*

$$\begin{aligned} \Lambda^*(V) &\longrightarrow Cl(V, q) \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} &\longmapsto e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \end{aligned}$$

où e_1, \dots, e_n est une base orthonormée par rapport à q .

Remarque 3.1.2 *Le système*

$$\mathcal{B} = \{1, e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} / 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n, 0 \leq k \leq n\}$$

est donc une base de $Cl(V, q)$.

Définition 3.1.2 *On dit qu'une algèbre \mathcal{A} est \mathbb{Z}_2 -graduée si on peut décomposer \mathcal{A} sous la forme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ et si les sous-espaces vectoriels \mathcal{A}_i vérifient la propriété : $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$ pour $i, j \in \mathbb{Z}_2$.*

Proposition 3.1.3 [23] *L'algèbre de Clifford $Cl(V, q)$ est une algèbre \mathbb{Z}_2 -graduée.*

Si q_n désigne la forme quadratique associée au produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^n , alors on a : $Cl(\mathbb{R}^n, q_n) \simeq Cl^0(\mathbb{R}^{n+1}, q_{n+1})$. On donne maintenant la notion de produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué, ce qui va nous permettre de donner un isomorphisme entre différentes algèbres de Clifford.

Définition 3.1.3 *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux algèbres \mathbb{Z}_2 -graduées, on définit alors sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ une loi multiplicative donnée par : $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{ij} (aa') \otimes (bb')$, où $a \in \mathcal{A}^i, a' \in \mathcal{A}^j, b \in \mathcal{B}^k, b' \in \mathcal{B}^l$, pour $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_2$. L'algèbre ainsi obtenue est notée $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ on l'appelle le produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué de \mathcal{A} et \mathcal{B} . L'algèbre $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ est une algèbre \mathbb{Z}_2 -graduée, dont les parties paire et impaire sont données par :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^0 &= (\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0) \oplus (\mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^1) \\ (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^1 &= (\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^1) \oplus (\mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^0). \end{aligned}$$

Proposition 3.1.4 [23] *Soit $V = V_1 \oplus V_2$ une décomposition q -orthogonale de V alors on a : $Cl(V, q) = Cl(V_1 \oplus V_2, q) \simeq Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$ où $q_i = q|_{V_i}$ pour $i = 1, 2$.*

On note par : $Cl(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s}) = Cl_{r,s}, Cl_{n,0} = Cl_n$ et $Cl_{0,n} = Cl_n^*$ où $q_{r,s}(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=r+1}^n x_i^2$ est la forme quadratique de type (r, s) avec $r + s = n$.

Proposition 3.1.5 [23] *On a l'isomorphisme d'algèbres :*

$$Cl_{r,s} \simeq Cl_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} Cl_1 \hat{\otimes} Cl_1^* \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} Cl_1^*$$

où Cl_1 apparaît r fois et Cl_1^* s fois.

Exemples 3.1.1 1. *On considère la forme quadratique triviale $q \equiv 0$ sur un espace vectoriel V . Alors $Cl(V, q) = \Lambda^*(V)$*

2. *Pour $n = 1$ une base de Cl_1 est donnée par $\{1, e_1\}$ avec $e_1^2 = -1$, alors on a $Cl_1 \simeq \mathbb{C}$.*

3. *Pour $n = 2$ une base de Cl_2 est donnée par $\{1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2\}$ avec $e_1^2 = e_2^2 = (e_1 \cdot e_2)^2 = -1$, alors on a $Cl_2 \simeq \mathbb{H}$.*

3.1.2 Groupe spinoriel

Dans cette section on va définir un sous-groupe particulier du groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford Cl_n . On suppose que (V, q) est un \mathbb{K} -espace quadratique. On considère donc le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $Cl(V, q)$ donné par :

$$Cl^\times(V, q) = \{\psi \in Cl(V, q) / \exists \tilde{\psi} \in Cl(V, q) \text{ avec } \psi \cdot \tilde{\psi} = 1\}$$

On remarque que si $v \in V$ tel que $q(v) \neq 0$, alors $v \in Cl^\times(V, q)$. Dans toute la suite, on suppose que q est non-dégénérée.

Définition 3.1.4 1. L'action adjointe de $Cl^\times(V, q)$ sur $Cl(V, q)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Ad : Cl^\times(V, q) &\longrightarrow Aut(Cl(V, q)) \\ \psi &\longmapsto Ad_\psi(x) = \psi \cdot x \cdot \psi^{-1}. \end{aligned}$$

2. L'action adjointe tordue de $Cl^\times(V, q)$ sur $Cl(V, q)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad} : Cl^\times(V, q) &\longrightarrow Aut(Cl(V, q)) \\ \psi &\longmapsto \widetilde{Ad}_\psi(x) = \alpha(\psi) \cdot x \cdot \psi^{-1}. \end{aligned}$$

Où α est le prolongement à $Cl(V, q)$ de l'application linéaire $-Id_V$. On remarque que pour tout $v \in V - \{0\}$: $Ad_v(V) \subset V$ et $\widetilde{Ad}_v(V) \subset V$, et de plus Ad_v préserve la forme quadratique q i.e. $Ad_v \in O(V, q)$.

Définition 3.1.5 1. Le sous-groupe $P(V, q)$ de $Cl^\times(V, q)$ est défini par :

$$P(V, q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_k / v_i \in V \text{ et } q(v_i) \neq 0\}.$$

2. Le sous groupe $\tilde{P}(V, q)$ de $Cl^\times(V, q)$ est aussi défini par :

$$\tilde{P}(V, q) = \{\psi \in Cl^\times(V, q) / \widetilde{Ad}_\psi(V) = V\}.$$

Il est clair que : $P(V, q) \subset \tilde{P}(V, q)$.

Proposition 3.1.6 [23] *Le noyau de l'homomorphisme $\widetilde{Ad} : \tilde{P}(V, q) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{K})$ est le groupe multiplicatif \mathbb{K}^* .*

Définition 3.1.6 *On définit l'application "norme" par :*

$$\begin{aligned} N : Cl(V, q) &\longrightarrow Cl(V, q) \\ \psi &\longmapsto \alpha({}^t\psi) \cdot \psi. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} {}^t(\cdot) : Cl(V, q) &\longrightarrow Cl(V, q) \\ e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} &\longmapsto e_{i_k} \cdot \dots \cdot e_{i_1}. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.7 [23] *La restriction de N au groupe $\tilde{P}(V, q)$ définit un homomorphisme de groupes $N : \tilde{P}(V, q) \longrightarrow \mathbb{K}^*$.*

Corollaire 3.1.1 [23] *L'application $\widetilde{Ad}_\psi : V \longrightarrow V$, pour $\psi \in P(V, q)$, préserve la forme quadratique q . On a donc un homomorphisme de groupes $\widetilde{Ad} : \tilde{P}(V, q) \longrightarrow O(V, q)$.*

Définition 3.1.7 1. *Le groupe Pin de (V, q) est le sous groupe $Pin(V, q)$ de $P(V, q)$ défini par :*

$$Pin(V, q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_k / v_i \in V \text{ et } q(v_i) = 1\}.$$

2. *Le groupe spinoriel de (V, q) est le sous groupe de $Pin(V, q)$ donné par :*

$$Spin(V, q) = Pin(V, q) \cap Cl^0(V, q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} / v_i \in V \text{ et } q(v_i) = 1\}.$$

On notera : $P(\mathbb{R}^n, q_n) = P_n$, $Pin(\mathbb{R}^n, q_n) = Pin_n$ et $Spin(\mathbb{R}^n, q_n) = Spin_n$.

On arrive maintenant au théorème important de cette partie.

Théorème 3.1.1 *Pour $n \geq 2$, le morphisme $\xi = \widetilde{Ad}/Spin_n$ est un revêtement non trivial à deux feuillets du groupe SO_n . En particulier, pour $n \geq 3$, le groupe $Spin_n$ est le revêtement universel de SO_n .*

Preuve. Par le corollaire 3.1.1, on a $\widetilde{Ad} : P_n \subset \widetilde{P}_n \rightarrow O_n$, or $Spin_n \subset P_n$, donc $\widetilde{Ad} : Spin_n \rightarrow O_n$. On sait de plus que l'image d'un vecteur non nul de V par \widetilde{Ad} est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à ce vecteur. L'image de $\widetilde{Ad}/Spin_n$ est alors le groupe engendré par un produit pair de telles symétries, donc par le théorème de Cartan-Dieudonné [23], c'est exactement le groupe SO_n . Alors le morphisme $\xi : Spin_n \rightarrow SO_n$ est surjectif. On détermine maintenant le noyau de ξ :

soit $\psi \in Ker\xi$, alors par la proposition 3.1.7, on a $\psi \in \mathbb{K}^*$, de plus, comme $\psi = v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k}$, on a $N(\psi) = q(v_1) \dots q(v_{2k}) = 1$. Or $\psi \in \mathbb{K}^* \implies N(\psi) = \psi^2 = 1$, donc $\psi = 1$ et alors $Ker\xi \simeq \mathbb{Z}_2$. Le morphisme de groupes ξ est donc un revêtement à deux feuillets, reste alors à montrer qu'il est non trivial. Pour se faire, il suffit de vérifier que 1 et -1 sont dans la même composante connexe de $Spin_n$. Pour le voir, on choisit $v, w \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et considérons la courbe

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \frac{\pi}{2}] &\longrightarrow Spin_n \\ t &\longmapsto (v \sin(t) + w \cos(t)) \cdot (v \sin(t) - w \cos(t)). \end{aligned}$$

Comme γ satisfait $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(\frac{\pi}{2}) = -1$, alors pour $n \geq 2$, le morphisme ξ est bien un revêtement non trivial à deux feuillets de SO_n .

De plus, pour $n \geq 3$, on sait que le groupe fondamental de SO_n est \mathbb{Z}_2 , alors on a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \pi_1(SO_n) \simeq \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \widetilde{SO}_n \longrightarrow SO_n \longrightarrow \{1\}$$

où \widetilde{SO}_n est le revêtement universel de SO_n , dont on sait qu'il est unique à isomorphisme près.

Or on a aussi la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n \xrightarrow{\xi} SO_n \longrightarrow \{1\}$$

. Alors, $Spin_n$ est le revêtement universel de SO_n pour $n \geq 3$. ■

Exemples 3.1.2 1. On a pour $n = 1$, $Spin_1 \subset Cl_1^0 \simeq Cl_0 \simeq \mathbb{R}$ et $SO_1 = \{Id\}$ alors $Spin_1 \simeq \mathbb{Z}_2$.

2. Pour $n = 2$, on a $Spin_2 \subset Cl_2^0 \simeq Cl_1 \simeq \mathbb{C}$ donc $Spin_2 \simeq S^1$.

On se donne une variété différentielle M de dimension $p + q$, supposée connexe et orientée.

3.2 Structures spinorielles sur les fibrés vectoriels

Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de rang n sur une variété différentielle M . On suppose que ce fibré est munie d'une structure riemannienne. On suppose également que le fibré est orienté, c'est à dire qu'il existe une orientation définie sur les fibres. Cette structure n'existe pas toujours. Pour analyser la situation, nous considérons le fibré $O(E)$ au dessus de M des repères orthonormés de E . Ceci est le fibré principal dont la fibre à un point $x \in M$ est l'ensemble des bases orthonormées de $E_x = \pi^{-1}(x)$. Le fibré des orientations dans E est alors le quotient $Or(E) = O(E)/SO_n$, où deux bases sont identifiés si la matrice orthogonale qui transforme l'une à l'autre a un déterminant égale à 1. Notons que $Or(E)$ est un revêtement à deux feuillets de M et que E est orientable si et seulement si $Or(E)$ est trivial.

Lemme 3.2.1 [23] *Soit $Cov_2(M)$ l'ensemble des classes d'équivalences des revêtements à deux feuillets de M . Alors on a un isomorphisme naturel*

$$Cov_2(M) \approx H^1(M; \mathbb{Z}_2). \quad (3.1)$$

Par l'isomorphisme (3.1) on voit maintenant que, pour chaque fibré vectoriel E sur M , le revêtement à deux feuillets détermine un élément noté $w_1(E) \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, appelé la première classe de Stiefel-Whitney de E .

Théorème 3.2.1 [23] *Un fibré vectoriel E sur M est orientable si et seulement si $w_1(E) = 0$. En outre, si $w_1(E) = 0$ alors les orientations distinctes sur E sont en bijection avec les éléments de $H^0(M; \mathbb{Z}_2)$.*

La deuxième assertion du théorème 3.2.1 dite simplement qu'il y a deux orientations possibles de E sur chaque composante connexe de M .

Soit E un fibré vectoriel orienté sur une variété différentielle M et soit $SO(E)$ le fibré au dessus de M des repères orthonormés de E .

Définition 3.2.1 *On suppose que $n \geq 3$. Une structure spinorielle sur E est la donnée d'un couple $(SpinE, \eta)$ où $SpinE$ est un $Spin_n$ -fibré principal sur M et η est un revêtement à deux*

feuilletés tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc}
 SpinE \times Spin_n & \longrightarrow & SpinE & \longrightarrow & M \\
 \eta \otimes Ad \downarrow & & \eta \downarrow & \nearrow & \\
 SO(E) \times SO_n & \longrightarrow & SO(E) & &
 \end{array}$$

Les applications

$$SpinE \times Spin_n \longrightarrow SpinE$$

et

$$SO(E) \times SO_n \longrightarrow SO(E)$$

sont respectivement les actions de $Spin_n$ et SO_n sur les fibrés principaux $SpinE$ et $SO(E)$.

L'application $Ad : Spin_q \longrightarrow SO_q$ est définie pour tous $u \in Spin_q$ et $x \in \mathbb{R}^q$

par $Ad_u(x) = u \cdot x \cdot u^{-1}$.

Pour $n = 2$, une structure spinorielle sur E est définie de manière analogue, avec $Spin_n$ remplacé par SO_2 et $Ad : SO_2 \longrightarrow SO_2$. Pour $n = 1$, $SO(E) \cong M$ et une structure spinorielle est simplement défini comme un revêtement à deux feuilletés de M . Soient π, π' les projections sur M de $SO(E)$ et $SpinE$ respectivement. Supposons maintenant que $\eta : SpinE \rightarrow SO(E)$ est un revêtement à deux feuilletés qui n'est pas trivial sur les fibres de M . Le fait que $\pi' = \pi \circ \eta$ rend $SpinE$ un fibré sur M . Pour faire ce fibré, un fibré principal de groupe de structure $Spin_n$ nous devons faire l'action de SO_n sur $SO(E)$ à une action compatible de $Spin_n$ sur $SpinE$. Alors on a le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 *Les structures spinorielles sur E sont en bijection avec les revêtements à deux feuilletés de $SO(E)$ qui ne sont pas triviaux sur les fibres de π .*

Cela peut être réinterprété par le lemme 3.2.1 comme suit :

Corollaire 3.2.1 *On suppose que M est connexe. Les structures spinorielles sur E sont en bijection avec les éléments de $H^1(SO(E); \mathbb{Z}_2)$ dont ses restrictions aux fibres de $SO(E)$ sont non nuls.*

Nous sommes maintenant en mesure de discuter la question de l'existence et de l'unicité des structures spinorielles. Pour chaque fibration

$$SO_n \xrightarrow{i} SO(E) \xrightarrow{\pi} M$$

il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(SO(E); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(SO_n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_E} H^2(M; \mathbb{Z}_2) \quad (3.2)$$

qui peut être déduite de la suite spectrale de Serre [23].

Définition 3.2.2 *L'image $w_2(E) = w_E(g_2) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ du générateur g_2 de $H^1(SO_n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ est la deuxième classe de Stiefel-Whitney du fibré orienté E .*

Du Corollaire 3.2.1 et l'exactitude de la suite (3.2), on conclut immédiatement le théorème suivant.

Théorème 3.2.3 *Soit E un fibré vectoriel orienté sur une variété M . Alors il existe une structure spinorielle sur E si et seulement si la deuxième classe de Stiefel-Whitney de E est nulle i.e. $w_2(E) = 0$. En outre, si $w_2(E) = 0$, alors les structures spinorielles distinctes sur E sont en bijection avec les éléments de $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$.*

Remarque 3.2.1 *Notons que la structure spinorielle sur E est indépendante de la métrique du fibré dans le sens suivant : une structure spinorielle sur E détermine de manière unique une structure spinorielle pour toute autre métrique. Cela découle du théorème 3.2.3 et l'observation que l'inclusion $SO(E) \subset GL^+(E)$, où $GL^+(E)$ est le fibré de toutes les bases orientées dans E , est une équivalence d'homotopie voir ([23]).*

Proposition 3.2.1 *Soient trois fibrés vectoriels E', E'' et $E = E' \oplus E''$ sur une variété M , un choix d'orientation de deux d'entre eux fixe une unique orientation du troisième. De même, un choix de structure spinorielle sur deux d'entre eux détermine de façon unique une structure spinorielle du troisième.*

Preuve. Pour l'orientation c'est évident puisque pour les espaces vectoriels de dimensions finis $V = V' \oplus V''$, un choix d'orientation de deux d'entre eux détermine une unique orientation du troisième.

Supposons maintenant que E, E' et E'' sont orientables. Alors $w_2(E) = w_2(E') + w_2(E'')$ voir([23]). Par conséquent, un choix de structure spinorielle sur deux d'entre eux fixe de façon unique une structure spinorielle du troisième, supposons que dans la bijection du corollaire 3.2.1, $a' \in H^1(SO(E'); \mathbb{Z}_2)$ et $a'' \in H^1(SO(E''); \mathbb{Z}_2)$ représentent les structures spinorielles sur E' et E'' respectivement, considérons maintenant le produit cartésien des fibrés $E' \times E'' \rightarrow M \times M$ et soit

$$\Delta : SO(E' \oplus E'') \longrightarrow SO(E' \times E'')$$

l'application diagonale. La classe dans $H^1(SO(E' \oplus E''); \mathbb{Z}_2)$ qui représente les structures spinorielles déterminées par a' et a'' est Δ^*b où $b \in H^1(SO(E' \times E''); \mathbb{Z}_2)$ est la classe unique qui étend $a' \times 1 + 1 \times a'' \in H^1(SO(E') \times SO(E''); \mathbb{Z}_2)$ sous l'inclusion $SO(E') \times SO(E'') \subset SO(E' \times E'')$. L'unicité de b peut être vu de diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(M \times M; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^1(SO(E' \times E''); \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & \\ & & \approx \downarrow & & \approx \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(M \times M; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^1(SO(E') \times SO(E''); \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & H^1(SO_{n+n}; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^2(M \times M; \mathbb{Z}_2) & & \\ & & \approx \downarrow & & \approx \downarrow & & \\ & \longrightarrow & H^1(SO_n \times SO_n; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^2(M \times M; \mathbb{Z}_2) & & \end{array}$$

D'où chaque deux entre les classes a', a'' et Δ^*b déterminent la troisième. Soit $\pi_V : SO(V) \rightarrow M$ la projection où $V = E, E'$ ou E'' . Alors, toute structure spinorielle γ' (sous la bijection du corollaire 3.2.1) est donnée par : $a' + \pi_{E'}^*u'$ et toute structure spinorielle γ'' sur E'' peut être écrite sous la forme $a'' + \pi_{E''}^*u''$ pour $u', u'' \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, donc γ' et γ'' déterminent $\Delta^*b + \pi_{E' \oplus E''}^*(u' + u'')$. D'où le résultat demandé. ■

3.3 Variété spinorielle

Nous sommes maintenant en mesure de définir la notion de structure spinorielle sur les variétés différentielles.

Définition 3.3.1 *Une variété spinorielle est une variété Riemannienne orientée avec une structure spinorielle sur son fibré tangent. Les classes de Stiefel-Whitney $w_i(M)$ d'une variété M sont définies comme étant les classes de Stiefel-Whitney de son fibré tangent TM .*

Ainsi, par le théorème 3.2.3 nous avons.

Théorème 3.3.1 *Une variété Riemannienne orientée M admet une structure spinorielle si et seulement si sa deuxième classe de Stiefel-Whitney est nulle i.e. $w_2(M) = 0$. En outre, si $w_2(M) = 0$ alors les structures spinorielles sur M sont en bijection avec les éléments de $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$.*

Exemples 3.3.1 1. *Toute groupe de Lie simplement connexe admet une structure spinorielle.*

2. *La variété SO_n possède deux structures spinorielles distinctes .*

3.4 Cohomologie de Čech basique

Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilleté et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ le faisceau des fonctions basiques de groupe abélien G . Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert distingué de M , On définit le complexe des p -cochaînes de Čech par :

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \prod_{(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U_{i_0, \dots, i_p}) \quad \text{pour tous } p \geq 0$$

où $U_{i_0, \dots, i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$ et sa différentielle par :

$$\begin{aligned} d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) &\longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \\ d(a)_{i_0, \dots, i_{p+1}} &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k a_{i_0, \dots, \check{i}_k, \dots, i_{p+1}} \end{aligned}$$

on a $d \circ d = 0$.

Exemple 3.4.1 Si $a \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, nous avons $a = (a_i)$ avec $a_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U_i)$, da est donnée par $(da)_{ij} = (a_j - a_i)_{U_{ij}}$ et appelé cobord.

Les éléments de $Z^p(U, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \ker(d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}))$ sont appelés cycles. La cohomologie du complexe $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ notée $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ est appelée la p -cohomologie de Čech basique du couple $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Cette cohomologie dépend du recouvrement distingué \mathcal{U} et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. On obtient immédiatement

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \Gamma(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \quad \text{l'ensemble des fonctions basique.}$$

Définition 3.4.1 La p -cohomologie de Čech basique du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est

$$H^p(\mathcal{F}, G) = H^p(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \lim_{\mathcal{U} \text{ recouvrement de } M} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}).$$

3.5 Quelques applications de la cohomologie de Čech basique

3.5.1 Variétés transversalement spinorielles

Définition 3.5.1 Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilleté et on suppose que \mathcal{F} est transversalement orienté et on note par $SO(\nu\mathcal{F})$ le fibré au dessus de M des repères orthonormés de $\Gamma(\nu\mathcal{F})$. Une structure spinorielle transversale est la donnée d'un couple $(Spin(\nu\mathcal{F}), \eta)$ où $Spin(\nu\mathcal{F})$ est un $Spin_q$ -fibré principal sur M et η est un revêtement à deux feuilletés tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} Spin(\nu\mathcal{F}) \times Spin_q & \longrightarrow & Spin(\nu\mathcal{F}) & \longrightarrow & M \\ \eta \otimes Ad \downarrow & & \eta \downarrow & \nearrow & \\ SO(\nu\mathcal{F}) \times SO_q & \longrightarrow & SO(\nu\mathcal{F}) & & \end{array}$$

Les applications

$$Spin(\nu\mathcal{F}) \times Spin_q \longrightarrow Spin(\nu\mathcal{F})$$

et

$$SO(\nu\mathcal{F}) \times SO_q \longrightarrow SO(\nu\mathcal{F})$$

sont respectivement les actions de $Spin_q$ et SO_q sur les fibrés principaux $Spin(\nu\mathcal{F})$ et $SO(\nu\mathcal{F})$. L'application $Ad : Spin_q \rightarrow SO_q$ est définie pour tous $u \in Spin_q$ et $x \in \mathbb{R}^q$ par $Ad_u(x) = u \cdot x \cdot u^{-1}$. Dans ce cas, le feuilletage \mathcal{F} est dit spinoriel.

Cette définition est équivalente au fait que les fonctions de transition φ_{ij} de $SO(\nu\mathcal{F})$ se relèvent à des fonctions de transition $\tilde{\varphi}_{ij}$ de $Spin(\nu\mathcal{F})$, i.e. le diagramme précédent commute et les $\tilde{\varphi}_{ij}$ satisfont la condition de cocycle

$$\tilde{\varphi}_{ij}\tilde{\varphi}_{jk} = \tilde{\varphi}_{ik}$$

Définition 3.5.2 Pour le fibré vectoriel $\nu\mathcal{F}$ sur (M, \mathcal{F}) , le revêtement à deux feuillets détermine un élément $w_1(\nu\mathcal{F}) \in H^1(\mathcal{F}, \mathbb{Z}_2)$, appelé la première classe transversale de Stiefel-Whitney de $\nu\mathcal{F}$.

Définition 3.5.3 L'image $w_2(\nu\mathcal{F}) = w_{\nu\mathcal{F}}(g_2) \in H^2(\mathcal{F}; \mathbb{Z}_2)$ du générateur g_2 de $H^1(SO_q; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ est la deuxième classe transversale de Stiefel-Whitney du fibré orienté $\nu\mathcal{F}$.

Théorème 3.5.1 Soit M une variété supporte deux feuilletages orthogonales, transversalement orientables \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 respectivement de codimension p et q avec $p + q = n$. Si \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont transversalement spinoriels alors M est une variété spinorielle.

Preuve. De la proposition 3.2.1, la variété M est orientable. De plus, si \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont des feuilletages transversalement spinoriels, alors par les définitions 3.5.2 et 3.5.3 et le théorème 3.3.1, leurs deuxièmes classes transversales de Stiefel-Whitney sont nulls

$$w_2(\nu\mathcal{F}_1) = w_2(\nu\mathcal{F}_2) = 0.$$

D'où la variété M est spinorielle. ■

3.5.2 Variétés de dimension multiple de quatre

Théorème 3.5.2 Soit M une variété Riemannienne compacte orientée de dimension multiple de quatre supporte deux feuilletages Riemanniens orthogonales \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 avec des structures spinorielles transverses respectivement de codimension $(p = 4l_1$ et $q = 4l_2)$ avec $4(l_1 +$

$l_2) = n$. Si l'une des métriques Riemanniennes transverses de l'un des feuilletages est de courbure scalaire positive alors $Sign(M) = 0$.

Preuve. On sait que, si M est une variété spinorielle orientée de dimension multiple de quatre compacte avec une métrique Riemannienne de courbure scalaire positive, alors $Sign(M) = 0$ (théorème de Lichnerowicz [23]). De plus, lorsque un feuilletage \mathcal{F} de codimension multiple de quatre sur une variété Riemannienne compacte orientée (M, g_M) a une structure spinorielle transverse et une métrique Riemannienne de courbure scalaire transverse positive, alors $Sign(\mathcal{F}) = 0$. Ainsi par le théorème 2.8.3 on :

$$Sign(M) = Sign(\mathcal{F}_1).Sign(\mathcal{F}_2),$$

la signature de M est nulle lorsque \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 a une structure spinorielle transverse et une métrique Riemannienne transverse de courbure scalaire positive. ■

Chapitre 4

Structures para-quaternioniques

On présente dans ce chapitre les définitions de base et les propriétés des structures presque para-hermitiennes, para-hyperhermitiennes, et presque para-quaternioniques sur une variété différentiable, les références principales sont : [4],[8],[20],[21],[28] et [37].

Le but de ce chapitre est de construire une structure presque para-quaternionique ou une structure para-hyperhermitienne sur le fibré tangent d'ordre trois d'une variété presque para-hermitienne et d'étudier son intégrabilité. On obtient les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles cette structure devient para-hyperkählérienne et on prouve que le fibré tangent d'ordre trois ne peut pas être une variété para-quaternionique kählérienne.

4.1 Structures presque para-hermitiennes

Définition 4.1.1 *Une structure presque complexe sur une variété différentiable M est un tenseur J de type $(1, 1)$ sur M tel que :*

$$J^2 = -I$$

et on dit que (M, J) est une variété presque complexe.

Définition 4.1.2 *Le tenseur de Nijenhuis N , de type $(1, 2)$, d'une structure presque complexe J est définie par :*

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y]$$

pour tous X, Y dans $\Gamma(TM)$. On dit que la variété presque complexe (M, J) est une variété complexe si et seulement si $N \equiv 0$.

Définition 4.1.3 Une structure presque produit sur une variété différentiable M est un tenseur P de type $(1, 1)$ sur M tel que :

$$P \neq \pm Id \text{ et } P^2 = Id$$

(M, P) est appelée une variété presque produit.

Définition 4.1.4 Le tenseur de Nijenhuis N , de type $(1, 2)$, d'une structure presque produit P est définie par :

$$N(X, Y) = [PX, PY] - P[X, PY] - P[PX, Y] + P^2[X, Y]$$

pour tous X, Y dans $\Gamma(TM)$.

Si on considère un tenseur métrique sur une variété presque produit, alors on peut donner la définition suivante.

Définition 4.1.5 Soit M une variété différentiable. Une structure presque para-hermitienne sur M est un couple (g, P) , où g est une métrique semi-Riemannienne sur M , et P une structure presque produit sur M , vérifiant

$$g(PX, Y) + g(X, PY) = 0 \tag{4.1}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$. Ensuite, le triplet (M, g, P) sera appelée variété presque para-hermitienne. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g , si de plus $\nabla P = 0$ alors (M, g, P) est appelée variété para-kählérienne.

Proposition 4.1.1 ([39]) Si (M, g, P) est une variété presque produit, alors nous avons

1. $[PX, PY] = (\nabla_{PX}P)(Y) - (\nabla_{PY}P)(X) + P(\nabla_{PX}Y - \nabla_{PY}X)$
2. $P[PX, Y] = P\nabla_{PX}Y - P\nabla_YPX$
3. $P[X, PY] = P\nabla_XPY - P\nabla_{PY}X$

pour tous X, Y dans $\Gamma(TM)$.

4.2 Structures para-hypercomplexes

Définition 4.2.1 Une structure presque para-hypercomplexe sur une variété différentiable M est un triplet $\mathbb{J} = (J_1, J_2, J_3)$ des tenseurs de type $(1, 1)$ satisfont :

1. $(J_\alpha)^2 = -\tau_\alpha I$, pour tout $\alpha \in \{1, 2, 3\}$
2. $J_\alpha J_\beta = -\tau_\gamma J_\gamma = -J_\beta J_\alpha$ pour une permutation cyclique (α, β, γ) de $(1, 2, 3)$

où $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = 1$ et $\tau_3 = 1$. (M, \mathbb{J}) est appelée variété presque para-hypercomplexe .

Soit (M, \mathbb{J}) une variété presque para-hypercomplexe ; nous allons désigner les tenseurs de Nijenhuis des structures $(J_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 3}$ par $(N_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 3}$.

Définition 4.2.2 Une structure presque para-hypercomplexe $\mathbb{J} = (J_1, J_2, J_3)$ sur une variété différentiable M est dite para-hypercomplexe si et seulement si $N_\alpha = 0$, pour chaque $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ et on dit que (M, \mathbb{J}) est une variété para-hypercomplexe.

Définition 4.2.3 Soit (M, \mathbb{J}) une variété presque para-hypercomplexe. Un tenseur métrique g est dit compatible avec la structure presque para-hypercomplexe $\mathbb{J} = (J_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ si la condition suivante est vérifiée

$$g(X, J_\alpha Y) + g(J_\alpha X, Y) = 0, \quad (4.2)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, et tout $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. La structure (\mathbb{J}, g) est appelée une structure presque para-hyperhermitienne, et (M, \mathbb{J}, g) une variété presque para-hyperhermitienne. Nous allons lever le terme "presque" si $N_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

Définition 4.2.4 Soit (M, \mathbb{J}, g) une variété presque para-hyperhermitienne. Si $\nabla J_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ alors (M, \mathbb{J}, g) est appelé variété para-hyperkählerienne.

4.3 Structures para-quaternioniques

Définition 4.3.1 Soit M une variété différentiable de dimension n . On appelle une structure para-quaternionique sur M toute sous-fibré σ de rang trois du fibré vectoriel $End(TM)$ des endomorphismes de TM , engendré localement par une structure presque para-hypercomplexe

$\{J_1, J_2, J_3\} \cdot \{J_1, J_2, J_3\}$ est appelée la base canonique locale de σ et (M, σ) une variété presque para-quaternionique.

Remarque 4.3.1 En d'autres termes, un sous-fibré σ du fibré vectoriel $End(TM)$ définit une structure para-quaternionique sur M si, pour tout $x \in M$ il existe un voisinage $U \subset M$ de x et un triplet (J_1, J_2, J_3) des tenseurs de type $(1, 1)$ sur U , de telle sorte que, pour toute $y \in U$ le triplet $((J_1)_y, (J_2)_y, (J_3)_y)$ engendre l'espace vectoriel σ_y , et les identités suivantes sont vérifiées sur U :

1. $(J_\alpha)^2 = -\tau_\alpha I$, pour tout $\alpha \in \{1, 2, 3\}$
2. $J_\alpha J_\beta = -\tau_\gamma J_\gamma = -J_\beta J_\alpha$ pour une permutation cyclique (α, β, γ) de $(1, 2, 3)$

où $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = 1$ et $\tau_3 = 1$.

Définition 4.3.2 Soit (M, σ) une variété presque para-quaternionique. Un tenseur métrique g sera dit compatible avec la structure para-quaternionique σ si pour toute base locale $\mathbb{J} = (J_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ on ait :

$$g(X, J_\alpha Y) + g(J_\alpha X, Y) = 0.$$

Le triplet (M, σ, g) est appelée une variété presque para-quaternionique hermitienne .

Remarque 4.3.2 Si (M, σ, g) est une variété presque para-quaternionique hermitienne, alors il est toujours possible de choisir, pour tout $x \in M$, un voisinage ouvert U de x , avec une base locale $\mathbb{J} = (J_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ pour $\sigma|_U$, sur lequel les champs de vecteurs $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont définis, tels que la $4m$ - uplet

$$(E_i, J_1 E_i, J_2 E_i, J_3 E_i)_{1 \leq i \leq m}$$

est une base de champs de vecteurs sur U . Il s'ensuit que $\dim(M) = 4m$ et g doit être une métrique semi-Riemmanienne, avec une signature neutre $(2m, 2m)$.

Soit (M^{4n}, σ, g) une variété presque para-quaternionique hermitienne, on peut choisir localement une structure para-hypercomplexe $\mathbb{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ qui est une base de σ . D'où toute variété presque para-quaternionique hermitienne est localement presque para-hypercomplexe hermitienne.

On peut localement définir des 2-formes non-dégénérées

$$\Omega_{J_\alpha}(X, Y) = g(X, J_\alpha Y), \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Alors, la 4-forme

$$\Omega = \Omega_{J_1} \wedge \Omega_{J_1} - \Omega_{J_2} \wedge \Omega_{J_2} - \Omega_{J_3} \wedge \Omega_{J_3}$$

est définie globalement sur M .

Définition 4.3.3 Une variété presque para-quaternionique hermitienne (M^{4n}, σ, g) , $n \geq 2$, est appelée variété para-quaternionique kählérienne si $\nabla\Omega = 0$ et M n'est pas para-hyperkählérienne .

Exemple 4.3.1 L'algèbre des para-quaternions

On prend \mathbb{R}^4 muni de sa structure de \mathbb{R} -espace vectoriel, et désignons les quatres vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) de la base canonique par les symboles $1, i, j, k$ respectivement. Chaque vecteur $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ peut être écrit sous la forme

$$q = x + yi + zj + wk.$$

Maintenant on considère une nouvelle opération sur \mathbb{R}^4 tout d'abord définie sur les vecteurs $1, i, j, k$

$$\begin{aligned} 1i = i1 = i, & \quad i^2 = -1, & \quad ij = k = -ji \\ 1j = j1 = j, & \quad j^2 = 1, & \quad jk = -i = -kj \\ 1k = k1 = k, & \quad k^2 = 1, & \quad ik = j = -ki \end{aligned}$$

et $1^2 = 1$; ce produit s'étend à deux vecteurs généraux par multilinéarité :

$$\begin{aligned} qq' &= (xx' - yy' + zz' + ww') + (xy' + x'y + z'w - zw')i \\ &+ (xz' + x'z + yw - y'w)j + (xw' + x'w + yz' - y'z)k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pour tout $q = x + yi + zj + wk$ et $q' = x' + y'i + z'j + w'k$. Avec la structure d'espace vectoriel réel de \mathbb{R}^4 et la nouvelle opération, \mathbb{R}^4 devient une algèbre associative, non commutative, réelle, unitaire, que nous noterons $\tilde{\mathbb{H}}$, avec l'unité $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$. Cette algèbre est appelée l'algèbre des nombres para-quaternioniques, et ses éléments sont appelés nombres para-quaternioniques ou para-quaternions brièvement.

L'application

$$\theta : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{tel que} \quad \theta(q) = \theta(x + yi + zj + wk) = (x, y, z, w)$$

est clairement un isomorphisme d'espace vectoriel, que nous allons considérer canonique. Via θ nous pouvons munir $\tilde{\mathbb{H}}$ avec une structure de variété différentiable réelle de quatre dimensions, difféomorphe à \mathbb{R}^4 .

Remarque 4.3.3 Pour chaque paraquaternion $q = x + yi + zj + wk$ nous pouvons associer les para-quaternions

$$\begin{aligned} \Re(q) &= x, \\ \Im(q) &= yi + zj + wk, \\ \bar{q} &= x - yi - zj - wk, \end{aligned}$$

qui sont appelés la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué de q , respectivement. On obtient trois applications \mathbb{R} -linéaire $\Re : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}$, $\Im : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}$ et $\bar{\cdot} : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}$. En utilisant (4.4), par un calcul direct, on obtient les propriétés suivantes, pour tout $q, q_1, q_2 \in \tilde{\mathbb{H}}$

- (i) $\bar{\bar{q}} = q$,
- (ii) $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$.

On définit une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique et non dégénérée sur $\tilde{\mathbb{H}}$ par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \tilde{\mathbb{H}} \times \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \langle q_1, q_2 \rangle = \Re(q_1 \bar{q}_2).$$

Explicitement, si $q_h = x_h + y_h i + z_j + w_h k$, avec $h = 1, 2$ on a

$$\langle q_1, q_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 - w_1 w_2$$

Si on note par $g_2^4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ le produit scalaire standard semi-euclidien de signature $(2, 2)$ sur \mathbb{R}^4 , et $\mathbb{R}_2^4 = (\mathbb{R}^4, g_2^4)$ et en général on note par \mathbb{R}_s^n l'espace vectoriel semi-euclidien $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}^n, g_s^n)$ où g_s^n est le produit scalaire standard semi-euclidien de signature $(s, n - s)$ sur \mathbb{R}^n définie par

$$g_s^n(x, y) = \sum_{i=1}^{n-s} (x^i y^i) + \sum_{i=n-s+1}^n (x^i y^i).$$

alors l'isomorphisme θ devient une isométrie entre $(\tilde{\mathbb{H}}, \langle, \rangle)$ et (\mathbb{R}^4, g_2^4) . Ce produit scalaire induit une forme quadratique $Q : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $Q(q) := \langle q, q \rangle$. Explicitement, si $q = x + yi + zj + wk$, on a $Q(q) = x^2 + y^2 - z^2 - w^2$. Il s'ensuit qu'un paraquaternion q est inversible si et seulement si $Q(q) \neq 0$, et

$$q^{-1} = \frac{1}{Q(q)} \bar{q}$$

On peut vérifier, avec un calcul direct, que certaines des propriétés principales de ce produit scalaire sont les suivantes

(iii) $\langle q_1 \lambda, q_2 \lambda \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle Q(\lambda)$,

(iv) $Q(q_1 q_2) = Q(q_1) Q(q_2)$,

(v) $Q(q) = Q(\bar{q})$,

pour tout $q, q_1, q_2, \lambda \in \tilde{\mathbb{H}}$. En particulier, $Q(i) = 1$, $Q(j) = -1$ et $Q(k) = -1$, à partir de (iii) il s'ensuit que :

(vi) $\langle q_1 i, q_2 i \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$,

(vii) $\langle q_1 j, q_2 j \rangle = - \langle q_1, q_2 \rangle$,

(viii) $\langle q_1 k, q_2 k \rangle = - \langle q_1, q_2 \rangle$,

pour tout $q_1, q_2 \in \tilde{\mathbb{H}}$.

Exemple 4.3.2 L'espace vectoriel para-quaternionique de dimension n

Maintenant on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on considère l'espace $\tilde{\mathbb{H}}^n = \{(q^1, \dots, q^n) : q^h \in \tilde{\mathbb{H}}\}$, munie de sa structure d'espace vectoriel de dimension n $x \cdot (q^1, \dots, q^n) = (xq^1, \dots, xq^n)$. L'isomorphisme

$\theta : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}^4$ s'étend de façon naturelle à un isomorphisme, encore désigné par $\theta : \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$, de telle sorte que, pour toute $q = (q^h)_{1 \leq h \leq n} \in \tilde{\mathbb{H}}$, avec $q^h = x^h + y^h i + z^h j + w^h k$, $h \in \{1, \dots, n\}$:

$$\theta(q) = \theta(x^h + y^h i + z^h j + w^h k) = (x^h, y^h, z^h, w^h)_{1 \leq h \leq n}$$

Par ce isomorphisme on peut munir $\tilde{\mathbb{H}}^n$ par une structure de variété différentielle de dimension $4n$ difféomorphe à \mathbb{R}^{4n} .

On peut étendre aussi le produit scalaire de $\tilde{\mathbb{H}}$ à $\tilde{\mathbb{H}}^n$, on considère l'application

$$\langle, \rangle : \tilde{\mathbb{H}}^n \times \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \langle q_1, q_2 \rangle = \sum_{h=1}^n \langle q_1^h, q_2^h \rangle,$$

pour tout $q_1 = (q_1^h)_{1 \leq h \leq n}$ et $q_2 = (q_2^h)_{1 \leq h \leq n} \in \tilde{\mathbb{H}}^n$. Explicitement, posons $q_l^h = (x_l^h + y_l^h i + z_l^h j + w_l^h k)$, avec $l = 1, 2$ et $h \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \sum_{h=1}^n x_1^h x_2^h + y_1^h y_2^h - z_1^h z_2^h - w_1^h w_2^h$$

L'isomorphisme $\theta : \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ devient une isométrie entre $(\tilde{\mathbb{H}}^n, \langle, \rangle)$ et \mathbb{R}_{2n}^{4n} . De cette façon, on peut munir $\tilde{\mathbb{H}}^n$ avec une structure de variété semi-Riemannienne de dimension $(4n)$ avec une métrique de signature neutre $(2n, 2n)$, canoniquement isométrique à \mathbb{R}_{2n}^{4n} . La forme quadratique induite par ce produit scalaire est

$$Q : \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad Q(q) = \langle q, q \rangle,$$

Explicitement, si $q = (q^h)_{1 \leq h \leq n} = (x^h + y^h i + z^h j + w^h k)_{1 \leq h \leq n}$, on a

$$Q(q) = \sum_{h=1}^n Q(q^h) = \sum_{h=1}^n ((x^h)^2 + (y^h)^2 - (z^h)^2 - (w^h)^2).$$

La multiplication à droite entre un vecteur $q \in \tilde{\mathbb{H}}^n$ et un scalaire $\lambda \in \tilde{\mathbb{H}}$

$$(q^1, \dots, q^n)\lambda = (q^1\lambda, \dots, q^n\lambda),$$

définie une structure de $\tilde{\mathbb{H}}$ -module à droite sur $\tilde{\mathbb{H}}^n$, par rapport à laquelle les propriétés (iii), (vi), (vii) et (viii) du produit scalaire sur $\tilde{\mathbb{H}}^n$ sont vérifiées encore. En particulier, la multiplication à droite des éléments i, j, k nous permet de définir les trois endomorphismes de $\tilde{\mathbb{H}}^n$ suivants :

$$J_1 : \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}^n \quad \text{tel que} \quad J_1(q) = qi,$$

$$J_2 : \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}^n \quad \text{tel que} \quad J_2(q) = qj,$$

$$J_3 : \tilde{\mathbb{H}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}^n \quad \text{tel que} \quad J_3(q) = qk,$$

Ces endomorphismes vérifiant les identités $(J_a)^2 = -\tau_a I$ et $J_a J_b = -\tau_c J_c$, pour tout $a \in \{1, 2, 3\}$, et tout permutation cyclique (a, b, c) de $(1, 2, 3)$, avec $\tau_1 = -\tau_2 = -\tau_3 = -1$. Si nous considérons $\tilde{\mathbb{H}}^n$ naturellement isomorphe à l'espace tangent $T_q \tilde{\mathbb{H}}^n$, pour tout $q \in \tilde{\mathbb{H}}^n$, les endomorphismes précédentes induisent trois tenseurs $(J_a)_{a=1,2,3}$ de type $(1, 1)$ sur la variété $\tilde{\mathbb{H}}^n$, ayant les mêmes identités que ci-dessus. En outre, à partir de (vi), (vii) et (viii), on obtient facilement les conditions de compatibilité suivantes

$$\langle J_a(q), q' \rangle + \langle q, J_a(q') \rangle = 0,$$

pour tout $a \in \{1, 2, 3\}$. Alors, $(\tilde{\mathbb{H}}^n, J_a, \langle, \rangle)$, $a \in \{1, 2, 3\}$, est une variété presque para-hyperhermitienne. Grâce à l'isométrie $\theta : (\tilde{\mathbb{H}}^n, \langle, \rangle) \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$, on obtient trois tenseur de type $(1, 1)$, $(J_a)_{a=1,2,3}$ sur \mathbb{R}^{4n} qui agit sur les coordonnées naturelles $(x^h, y^h, z^h, w^h)_{1 \leq h \leq n}$, comme suit

$$\begin{aligned} J_1\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial w^h}, & J_1\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right) &= -\frac{\partial}{\partial z^h} \\ J_1\left(\frac{\partial}{\partial z^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^h}, & J_1\left(\frac{\partial}{\partial w^h}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x^h} \\ J_2\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial z^h}, & J_2\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right) &= -\frac{\partial}{\partial w^h} \\ J_2\left(\frac{\partial}{\partial z^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^h}, & J_2\left(\frac{\partial}{\partial w^h}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y^h} \\ J_3\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^h}, & J_3\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^h} \\ J_3\left(\frac{\partial}{\partial z^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial w^h}, & J_3\left(\frac{\partial}{\partial w^h}\right) &= \frac{\partial}{\partial z^h} \end{aligned}$$

De plus ils vérifiant les identités $(J_a)^2 = -\tau_a I$ et $J_a J_b = -\tau_c J_c$, pour tout $a \in \{1, 2, 3\}$, et toute permutation cyclique (a, b, c) de $(1, 2, 3)$, avec $\tau_1 = -\tau_2 = -\tau_3 = -1$. Et comme $\nabla J_a = 0$, $(\mathbb{R}^n, J_a, g_{2n}^{4n})$, $a \in \{1, 2, 3\}$, est une variété para-hyperkählérienne. En utilisant l'isomorphisme θ , nous avons aussi que la variété $(\tilde{\mathbb{H}}^n, J_a, \langle, \rangle)$, $a \in \{1, 2, 3\}$, est para-hyperkählérienne.

4.4 Fibré tangent d'ordre trois

Soit M une variété différentiable de dimension n . Pour chaque $x \in M$, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $C_x = \{c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M/c \text{ est lisse et } c(0) = x, \epsilon > 0\}$ par

$$c \approx_x h \Leftrightarrow c^{(i)}(0) = h^{(i)}(0) \text{ pour } i = \overline{1, 3},$$

où $c^{(i)}$ désigne la dérivée d'ordre i de c :

$$c^{(i)} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM; t \mapsto [dc^{(i)}(t)](0)$$

Définition 4.4.1 On définit le fibré tangent d'ordre trois ou l'espace des 3-jet de M au point x par $T_x^3 M = C_x / \approx_x$. L'espace

$$T^3 M = \bigcup_{x \in M} T_x^3 M$$

est le fibré tangent d'ordre trois, c'est une variété différentiable de dimension $4n$. On note par $j_x^3 c$ la classe d'équivalence de c par rapport à \approx_x et $j^3 c$ un élément de $T^3 M$.

De plus, lorsque M est munie d'une connexion linéaire, $T^3 M$ devient un fibré vectoriel avec groupe de structure le groupe linéaire $GL(2n; \mathbb{R})$.

Maintenant, soit ∇ une connexion linéaire sur M et soit $\pi_3 : T^3 M \rightarrow M$ la projection définie par $\pi_3(j^3 c) = c(0)$, si (U, x^1, \dots, x^n) est une carte locale sur M , alors on considère la carte induite $(\pi_3^{-1}(U), x^{i,\lambda})_{i=\overline{1,n}, \lambda=\overline{0,3}}$ sur $T^3 M$ définie par

$$x^{i,\lambda}([c]_3) = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} (x^i \circ c)(0).$$

La connexion ∇ définit un difféomorphisme entre $T^3 M$ et la somme de Whitney de trois copies de TM par :

$$\begin{aligned} S & : T^3 M \rightarrow TM + TM + TM \\ S([c]_3) & = (\dot{c}(0), (\nabla_c \dot{c})(0), (\nabla_c \nabla_c \dot{c})(0)) \end{aligned}$$

où ∇_c est la dérivée covariante le long de c , \dot{c} est le champ de vecteurs vitesse de c et

$$\nabla_c \dot{c}^i = \left(\frac{d^2 c^i}{dt^2} + p_1^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \nabla_c \nabla_c \dot{c}^i = \left(\frac{d^3 c^i}{dt^3} + p_2^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où p_1^i (resp. p_2^i) est un polynôme de degré un (resp. deux) sur $\frac{d^k c^i}{dt^2}$ avec $k \leq 1$ (resp. $k \leq 2$) et les coefficients de p_1^i (resp. p_2^i) depends des coefficients de Γ_{ij}^k (resp. $D_\alpha \Gamma_{ij}^k$).

4.4.1 Relèvement de M à T^3M

Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, ∇ sa connexion de Levi-Civita et R sa tenseur de courbure.

Quelques résultats de Relèvement de M à TM

Soit f une fonction sur M . Pour toute champs de vecteur X sur M , on note f^V le relèvement vertical de f à TM défini par

$$f^V = f \circ \pi; \pi \text{ est la projection de } TM \text{ sur } M$$

Alors, il existe un et un seul champ de vecteurs X^V sur TM appelé le relèvement vertical de X tel que

$$X^V(f^V) = 0$$

La connexion ∇ définit un sous-fibré H sur TM telle que

$$T(TM) = V \oplus H \text{ où } V = \ker d\pi$$

d'où pour tout z de TM

$$d_z \pi /_{H_z} : H_z \rightarrow T_{\pi(z)} M$$

est un isomorphisme. Alors, si X est un champ de vecteurs sur M , on peut définir

$$X^H(z) = (d_z \pi /_{H_z})^{-1}(X_{\pi(z)})$$

X^H est l'unique champ de vecteurs sur TM appelé le relèvement horizontal de X à TM .

Par conséquent, $\{X^H, X^V\}$ est un repère linéaire appelé repère adapté à ∇ dans TM .

Relèvement de M à T^3M

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur M . Pour $\lambda = \overline{0,3}$, le λ -relèvement de X à T^3M est défini par

$$\begin{aligned} X^0 &= S_*^{-1}(X^H, X^H, X^H) \\ X^1 &= S_*^{-1}(X^V, 0, 0) \\ X^2 &= S_*^{-1}(0, X^V, 0) \\ X^3 &= S_*^{-1}(0, 0, X^V) \end{aligned}$$

quand $\lambda = 1$ le λ -relèvement de (X^0, X^1) coïncide avec (X^H, X^V) dans TM . Dans le cas général, quand $\lambda = 2$ le λ -relèvement a été étudié dans [18], et pour tous λ il a été étudié dans [8]. $\{X^\lambda\}_{\lambda=0,\dots,3}$ est un repère linéaire à $4n$ éléments appelé repère adapté dans T^3M .

Proposition 4.4.1 [8] Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $p \in T^3M$ nous avons les identités

1. $[X^0, Y^0]_p = [X, Y]_p^0 - (R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)w)^2 + (R(X, Y)z)^3$
2. $[X^0, Y^i] = (\nabla_X Y)^i$
3. $[X^i, Y^0] = -(\nabla_Y X)^i$
4. $[X^i, Y^j] = 0$

où $(u, w, z) = S(p)$ et $i, j = \overline{1,3}$.

Définition 4.4.2 On définit Dg le relèvement diagonal de g à T^3M par

$$\begin{cases} i) {}^Dg(X^i, Y^i) = g(X, Y) \\ ii) {}^Dg(X^i, Y^j) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

pour $i, j = \overline{0,3}$ ($i \neq j$) et $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Dg coïncide avec la métrique de Sasaki sur TM (voir [8]).

Par la formule de Koszule, la connexion de Levi-Civita ${}^D\nabla$ de $(T^3M, {}^Dg)$ est donnée par

$$\begin{aligned} ({}^D\nabla_{X^0} Y^0)_p &= (\nabla_X Y)_p^0 - \frac{1}{2}((R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)w)^2 + (R(X, Y)z)^3) \\ ({}^D\nabla_{X^0} Y^i)_p &= (\nabla_X Y)_p^i + \frac{1}{2}(R(X, Y)u)^0 \\ ({}^D\nabla_{X^i} Y^0)_p &= \frac{1}{2}(R(X, Y)u)^0 \\ ({}^D\nabla_{X^i} Y^j)_p &= 0 \text{ pour } i, j \neq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

pour tous champs de vecteurs X, Y dans $\Gamma(TM)$, $p \in T^3M$ et $(u, w, z) = S(p)$.

4.5 Structures para-quaternioniques sur T^3M

Maintenant, nous supposons que (M, P, g) est une variété presque para-hermitienne de dimension n .

Définition 4.5.1 On définit trois tenseurs $\tilde{\mathbb{J}} = (J_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ sur T^3M par les égalités suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1X^0 = X^2 \\ J_1X^1 = X^3 \\ J_1X^2 = -X^0 \\ J_1X^3 = -X^1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} J_2X^0 = PX^2 \\ J_2X^1 = PX^3 \\ J_2X^2 = PX^0 \\ J_2X^3 = PX^1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} J_3X^0 = PX^0 \\ J_3X^1 = PX^1 \\ J_3X^2 = -PX^2 \\ J_3X^3 = -PX^3 \end{array} \right\}$$

Alors, nous avons le théorème :

Théorème 4.5.1 *Le fibré des 3-jet T^3M admet une structure presque para-hypercomplexe qui est para-hyperhermitienne par rapport à Dg .*

Preuve. Par la définition 4.5.1, on aura pour J_1

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1^2X^0 = J_1X^2 = -X^0 \\ J_1^2X^1 = J_1X^3 = -X^1 \\ J_1^2X^2 = -J_1X^0 = -X^2 \\ J_1^2X^3 = -J_1X^1 = -X^3 \end{array} \right\} \implies J_1^2\tilde{X} = -\tilde{X}$$

les calculs de J_2^2 et J_3^2 sont similaires à J_1^2 .

Pour les relations d'anti-commutation, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} J_2J_1X^0 = J_2X^2 = PX^0 = J_3X^0 \\ J_2J_1X^1 = J_2X^3 = PX^1 = J_3X^1 \\ J_2J_1X^2 = -J_2X^0 = -PX^2 = J_3X^2 \\ J_2J_1X^3 = -J_2X^1 = -PX^3 = J_3X^3 \end{array} \right\} \implies J_2J_1\tilde{X} = J_3\tilde{X}.$$

Et cela similaire à $-J_1J_2 = J_3$, ainsi

$$J_1^2 = -J_2^2 = -J_3^2 = -Id \text{ et } J_2J_1 = -J_1J_2 = J_3$$

En utilisant la définition 4.5.1 on obtient pour J_1 ,

$$\left\{ \begin{array}{l} Dg(J_1X^0, J_1Y^0) = Dg(X^0, Y^0) \\ Dg(J_1X^0, J_1Y^1) = 0 = Dg(X^0, Y^1) \\ Dg(J_1X^0, J_1Y^2) = 0 = Dg(X^0, Y^2) \\ Dg(J_1X^0, J_1Y^3) = 0 = Dg(X^0, Y^3) \\ Dg(J_1X^1, J_1Y^1) = Dg(X^1, Y^1) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} Dg(J_1X^1, J_1Y^2) = 0 = Dg(X^1, Y^2) \\ Dg(J_1X^1, J_1Y^3) = 0 = Dg(X^1, Y^3) \\ Dg(J_1X^2, J_1Y^2) = Dg(X^2, Y^2) \\ Dg(J_1X^2, J_1Y^3) = 0 = Dg(X^2, Y^3) \\ Dg(J_1X^3, J_1Y^3) = 0 = Dg(X^3, Y^3) \end{array} \right.$$

d'où

$$Dg(J_1\tilde{X}, J_1\tilde{Y}) = Dg(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Et de même pour J_2 et J_3 , nous obtenons la compatibilité de $\tilde{\mathbb{J}}$ avec g^D définie dans la formule (4.5)

$$Dg(J_1\tilde{X}, J_1\tilde{Y}) = -Dg(J_2\tilde{X}, J_2\tilde{Y}) = -Dg(J_3\tilde{X}, J_3\tilde{Y}) = Dg(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Donc, $\tilde{\mathbb{J}}$ est une structure para-hyperhermitienne relativement à Dg . ■

4.5.1 Intégrabilité

L'intégrabilité de la structure $\tilde{\mathbb{J}}$ est donnée par 16 équations pour chaque $j, i = \overline{0, 3}$, dans la proposition suivante.

Proposition 4.5.1 *Le tenseur de Nijenhuis de la structure J_1 est donnée par*

$$\begin{aligned} N_1(X^0, Y^0) &= (R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)v)^2 + (R(X, Y)w)^3 \\ N_1(X^2, Y^2) &= (R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)v)^2 + (R(X, Y)w)^3 \\ N_1(X^2, Y^0) &= N_1(X^2, Y^0) \\ &= J_1((R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)v)^2 + (R(X, Y)w)^3) \\ &= (R(X, Y)u)^3 - (R(X, Y)v)^0 - (R(X, Y)w)^1 \\ N_1(X^i, Y^j) &= 0 \text{ pour tout } i, j = \overline{0, 3} \text{ et } (i, j) \neq \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\} \end{aligned}$$

pour tous $i, j = \overline{0,3}$ et $(i, j) \neq \{(0,0), (0,2)(2,0), (2,2)\}$. De même, on en déduit pour J_2

$$\begin{aligned}
N_2(X^0, Y^0) &= -(P(\nabla_X P)Y)^0 + (R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)v)^2 + (R(X, Y)w)^3 \\
N_2(X^0, Y^2) &= -(P(\nabla_X P)Y + (\nabla_{PY} P)Y)^2 \\
&\quad + (R(X, PY)u)^3 + (R(X, PY)v)^0 + (R(X, PY)w)^1 \\
N_2(X^2, Y^0) &= (P(\nabla_Y P)X + (\nabla_{PX} P)X)^2 \\
&\quad + (R(PX, Y)u)^3 + (R(PX, Y)v)^0 + (R(PX, Y)w)^1 \\
N_2(X^0, Y^i) &= (P(\nabla_X P)Y)^i \quad \text{pour } i = 1,3 \\
N_2(X^i, Y^0) &= -(P(\nabla_Y P)X)^i \quad \text{pour } i = 1,3 \\
N_2(X^i, Y^j) &= 0 \quad \text{pour } i, j = 1,3 \\
N_2(X^1, Y^2) &= -((\nabla_{PY} P)X)^3 \\
N_2(X^2, Y^1) &= ((\nabla_{PX} P)Y)^3 \\
N_2(X^2, Y^2) &= ((\nabla_{PX} P)Y - (\nabla_{PY} P)X)^0 \\
&\quad - (R(PX, PY)u)^1 + (R(PX, PY)v)^2 + (R(PX, PY)w)^3 \\
N_2(X^2, Y^3) &= ((\nabla_{PX} P)Y)^1 \\
N_2(X^3, Y^2) &= -((\nabla_{PY} P)X)^1
\end{aligned}$$

et finalement pour J_3

$$\begin{aligned}
N_3(X^0, Y^0) &= ((\nabla_{PX} P)Y - (\nabla_{PY} P)X - P(\nabla_X P)Y + P(\nabla_Y PX))^0 + \\
&\quad + (P(R(PX, Y)u) + P(R(X, PY)u) - R(PX, PY)u - R(X, Y)u)^1 \\
&\quad + (P(R(PX, Y)v) + P(R(X, PY)v) - R(PX, PY)v - R(X, Y)v)^2 \\
&\quad + (P(R(PX, Y)w) + P(R(X, PY)w) - R(PX, PY)w - R(X, Y)w)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3(X^0, Y^1) &= (\nabla_{PX}PY - P(\nabla_XP)Y - P\nabla_{PX}Y)^1 \\
&= ((\nabla_{PX}P)Y - P(\nabla_XP)Y)^1 \\
N_3(X^1, Y^0) &= -(\nabla_{PY}PX - P(\nabla_YP)X - P\nabla_{PY}X)^1 \\
&= (P(\nabla_YP)X - (\nabla_{PY}P)X)^1 \\
N_3(X^0, Y^i) &= (P\nabla_{PX}Y - P(\nabla_XP)Y - \nabla_{PX}PY)^i \\
&= -(P(\nabla_XP)Y + (\nabla_{PX}P)Y)^i \text{ pour } i = 2, 3 \\
N_3(X^i, Y^0) &= -(P\nabla_{PY}X - P(\nabla_YP)X - \nabla_{PY}PX)^i \\
&= (P(\nabla_YP)X + (\nabla_{PY}P)X)^i \text{ pour } i = 2, 3 \\
N_3(X^i, Y^j) &= 0 \text{ pour } i, j = \overline{1, 3}
\end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $S(p) = (u, w, z)$

Preuve. Rappelons que les tenseurs de Nijenhuis des structures $\tilde{\mathbb{J}} = (J_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ sont données par

$$\begin{aligned}
N_\alpha(X^i, Y^j) &= [J_\alpha X^i, J_\alpha Y^j] - J_\alpha[X^i, J_\alpha Y^j] - J_\alpha[J_\alpha X^i, Y^j] + J_\alpha^2[X^i, Y^j] \\
\text{pour } \alpha &= 1, 2, 3 \text{ et } j, i = \overline{0, 3}.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition 4.5.1 et la formule (4.6), on obtient le tenseur de Nijenhuis de J_1 (i.e N_1). Pour N_2 et N_3 , en utilisant la proposition 4.1.1. \blacksquare

Alors, nous avons le théorème suivant

Théorème 4.5.2 *La structure $\tilde{\mathbb{J}} = (J_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$ est une structure presque para-hypercomplexe sur T^3M qui est presque para-hyperhermitienne par rapport à Dg . De plus, $(T^3M, {}^Dg, \tilde{\mathbb{J}})$ est para-hyperhermitienne (i.e $\tilde{\mathbb{J}}$ est intégrable) si et seulement si (M, P, g) est une variété para-kählérienne plate.*

4.5.2 Structures para-quaternioniques sur T^3M

Soit (M, P, g) une variété presque para-hermitienne de dimension n . On appelle structure presque para-quaternionique sur T^3M tout sous-fibré $\tilde{\sigma}$ du fibré $End(T^3M)$, engendré localement par une structure para-hyperhermitienne $\tilde{\mathbb{J}}$, $(T^3M, \tilde{\sigma})$ est appelée une variété presque

para-quaternionique et $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ est appelée variété presque para-quaternionique hermitienne.

On définit trois 2-formes non-dégénérées dans $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ par :

$$\tilde{\Omega}_{J_\alpha}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = {}^Dg(\tilde{X}, J_\alpha \tilde{Y}), \quad \alpha = \overline{1, 3} \quad (4.7)$$

pour tout champs de vecteurs \tilde{X}, \tilde{Y} dans T^3M . La 4-forme est donnée par :

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{J_1} \wedge \tilde{\Omega}_{J_1} - \tilde{\Omega}_{J_2} \wedge \tilde{\Omega}_{J_2} - \tilde{\Omega}_{J_3} \wedge \tilde{\Omega}_{J_3}$$

Proposition 4.5.2 *La connexion de Levi-Civita de la métrique Dg vérifiée ${}^D\nabla\tilde{\Omega} = 0$ si et seulement si (M, P, g) est une variété para-kählérienne plate.*

Pour prouver cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.5.1 *i. Par les formules (4.5), (4.7) et la définition 4.5.1, les trois 2-formes $\tilde{\Omega}_{J_\alpha}$ sont données par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Omega}_{J_1}(X^i, Y^j) = g(X, Y) \text{ pour } (i, j) = (2, 0) \text{ et } (3, 1) \\ \tilde{\Omega}_{J_1}(X^i, Y^j) = -g(X, Y) \text{ pour } (i, j) = (0, 2) \text{ et } (1, 3) \\ \tilde{\Omega}_{J_1}(X^i, Y^j) = 0 \text{ pour les autres cas } (i, j) \\ \tilde{\Omega}_{J_2}(X^i, Y^j) = g(X, PY) \text{ pour } (i, j) = (2, 0), (3, 1), (0, 2) \text{ et } (1, 3) \\ \tilde{\Omega}_{J_2}(X^i, Y^j) = 0 \text{ pour les autres cas } (i, j) \\ \tilde{\Omega}_{J_3}(X^i, Y^j) = g(X, PY) \text{ pour } (i, j) = (0, 0), (1, 1) \\ \tilde{\Omega}_{J_3}(X^i, Y^j) = -g(X, PY) \text{ pour } (i, j) = (2, 2), (3, 3) \\ \tilde{\Omega}_{J_3}(X^i, Y^j) = 0 \text{ pour les autres cas } (i, j) \end{array} \right.$$

avec $i, j = \overline{0, 3}$ et tout X, Y dans $\Gamma(TM)$.

ii.

$$\begin{aligned} {}^D\nabla_{U^i}(\tilde{\Omega}_{J_\alpha} \wedge \tilde{\Omega}_{J_\alpha})(X^i, Y^j, Z^k, W^l) &= 2 \sum_{Y^j, Z^k, W^l} ({}^Dg(X^i, ({}^D\nabla_{U^i} J_\alpha) Y^j) \tilde{\Omega}_{J_\alpha}(Z^k, W^l) \\ &\quad + \tilde{\Omega}_{J_\alpha}(X^i, Y^j) {}^Dg(Z^k, ({}^D\nabla_{U^i} J_\alpha) W^l)) \end{aligned}$$

où la somme est prise sur les permutations cyclique de Y^j, Z^k, W^l et $i, j, k, l = \overline{0, 3}$.

iii.

$$({}^D\nabla_{X^i}J_\alpha)Y^j = {}^D\nabla_{X^i}(J_\alpha Y^j) - J_\alpha({}^D\nabla_{X^i}Y^j) \quad (4.8)$$

On utilise les formules (4.6) et (4.8), nous avons

$$\begin{aligned} ({}^D\nabla_{X^0}J_\alpha)Y^0 &= {}^D\nabla_{X^0}(J_\alpha Y^0) - J_\alpha(\nabla_X Y)^0 \\ &\quad + \frac{1}{2}J_\alpha((R(X, Y)u)^1 + (R(X, Y)w)^2 + (R(X, Y)z)^3) \\ ({}^D\nabla_{X^0}J_\alpha)Y^i &= {}^D\nabla_{X^0}(J_\alpha Y^j) - J_\alpha(\nabla_X Y)^i + \frac{1}{2}J_\alpha(R(u, Y)X)^0 \\ ({}^D\nabla_{X^i}J_\alpha)Y^0 &= {}^D\nabla_{X^i}(J_\alpha Y^0) + \frac{1}{2}J_\alpha(R(X, Y)u)^0 \\ ({}^D\nabla_{X^i}J_\alpha)Y^j &= {}^D\nabla_{X^i}(J_\alpha Y^j) \text{ pour } i, j = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Preuve. [Preuve de la proposition 4.5.2] ${}^D\nabla_{X^i}\tilde{\Omega}$ est donnée par $4^4 = 256$ identités lorsque les indices i, j, k, l variés de 0 à 3. Pour cela, nous avons utilisés un programme ordinateur avec le logiciel Matlab. ${}^D\nabla_{X^i}\tilde{\Omega}$ est calculé dans trois parties comme suit

$$\begin{aligned} {}^D\nabla_{X^i}\tilde{\Omega} &= {}^D\nabla_{X^i}(\tilde{\Omega}_{J_1} \wedge \tilde{\Omega}_{J_1}) - {}^D\nabla_{X^i}(\tilde{\Omega}_{J_2} \wedge \tilde{\Omega}_{J_2}) - {}^D\nabla_{X^i}(\tilde{\Omega}_{J_3} \wedge \tilde{\Omega}_{J_3}) \\ &= I_1 - I_2 - I_3 \quad i = \overline{0, 3} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Compte tenu du lemme 4.5.1 – (i, ii) comme une database pour le programme ordinateur, chaque partie I_α ($\alpha = 1, 2, 3$) est calculée avec 256 identités lorsque les indices i, j, k, l variés de 0 à 3. On remarque que toutes les (256) identités sont des sommes de termes de types

$$g(X, Y) {}^Dg(Z^k, ({}^D\nabla_{X^i}J_\alpha)W^l) \text{ et } g(X, PY) {}^Dg(Z^k, ({}^D\nabla_{X^i}J_\alpha)W^l) \quad (4.11)$$

où X, Y, Z, W commutes dans toutes les permutations cycliques sauf X dans ${}^D\nabla_{X^i}$.

Cependant, nous avons du lemme 4.5.1 – (iii) pour la structure J_1

$$\begin{aligned}
({}^D\nabla_{X^0}J_1)Y^0 &= \frac{1}{2}((R(X, Y)u)^3 - (R(X, Y)z)^1) & (4.12) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_1)Y^1 &= \frac{1}{2}((R(u, Y)X)^0 + (R(u, Y)X)^2) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_1)Y^2 &= \frac{1}{2}((R(X, Y)u)^1 + 2(R(X, Y)w)^2 + (R(X, Y)z)^3) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_1)Y^3 &= \frac{1}{2}((R(u, Y)X)^2 - (R(u, Y)X)^0) \\
({}^D\nabla_{X^i}J_1)Y^0 &= \frac{1}{2}(R(u, X)Y)^2 \text{ et } i = \overline{1, 3} \\
({}^D\nabla_{X^2}J_1)Y^2 &= -\frac{1}{2}(R(u, X)Y)^0 \\
({}^D\nabla_{X^i}J_1)Y^j &= 0 \text{ et } i, j = 1, 3
\end{aligned}$$

et pour J_2

$$\begin{aligned}
({}^D\nabla_{X^0}J_2)Y^0 &= ((\nabla_X P)Y)^2 + \frac{1}{2}((R(u, PY)X)^0 & (4.13) \\
&\quad + (PR(X, Y)w)^0 + (PR(X, Y)z)^1 + (PR(X, Y)u)^3) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_2)Y^1 &= ((\nabla_X P)Y)^3 + \frac{1}{2}((R(u, PY)X)^0 + (PR(u, Y)X)^2) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_2)Y^2 &= (\nabla_X P)Y^0 - \frac{1}{2}((R(X, PY)u)^1 + ((R(PX, Y)w)^2 \\
&\quad - (PR(u, Y)X)^2 + (R(PX, Y)z)^3) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_2)Y^3 &= (\nabla_X P)Y^1 + \frac{1}{2}((R(u, PY)X)^0 + (PR(u, Y)X)^2) \\
({}^D\nabla_{X^i}J_2)Y^0 &= \frac{1}{2}(PR(X, Y)u)^2 \text{ pour } i = \overline{1, 3} \\
({}^D\nabla_{X^i}J_2)Y^2 &= \frac{1}{2}(R(u, X)PY)^0 \text{ pour } i = \overline{1, 3} \\
({}^D\nabla_{X^i}J_2)Y^j &= 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ pour } j = 1, 3
\end{aligned}$$

finalement pour J_3

$$\begin{aligned}
({}^D\nabla_{X^0}J_3)Y^0 &= ((\nabla_X P)Y)^0 - \frac{1}{2}((R(X, PY)u)^1 + (R(X, PY)w)^2 + \\
&\quad (R(X, PY)z)^3) + (P(R(X, Y)u)^1 - P(R(X, Y)w)^2 \\
&\quad - P(R(X, Y)z)^3) \\
({}^D\nabla_{X^0}J_3)Y^1 &= ((\nabla_X P)Y)^1 + \frac{1}{2}(PR(u, Y)X)^0 \\
({}^D\nabla_{X^0}J_3)Y^2 &= -((\nabla_X P)Y)^2 + \frac{1}{2}(PR(u, Y)X)^0 \\
({}^D\nabla_{X^0}J_3)Y^3 &= -((\nabla_X P)Y)^3 + \frac{1}{2}(PR(u, Y)X)^0 \\
({}^D\nabla_{X^i}J_3)Y^0 &= \frac{1}{2}(R(u, X)PY + P(R(X, Y)u))^0 \text{ pour } i = \overline{1, 3} \\
({}^D\nabla_{X^i}J_\alpha)Y^j &= 0 \text{ pour } i, j = \overline{1, 3}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Compte tenu des formules (4.12), (4.13) et (4.14), les termes (4.11) s'annulent si et seulement si P est parallèle (i.e $\nabla P = 0$) et sans courbure (i.e $R = 0$). Alors ${}^D\nabla_{X^i}\tilde{\Omega}$ s'annule si et seulement si (M, P, g) est une variété para-kählérienne plate. ■

Remarque 4.5.1 Si P n'est pas parallèle ou $R \neq 0$ alors ${}^D\nabla_{X^i}\tilde{\Omega} \neq 0$.

Nous avons le théorème suivant

Théorème 4.5.3 Soit $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ le fibré des 3-jets avec la structure para-hyperhermitienne $\tilde{\mathbb{J}}$ relativement à la métrique diagonale Dg . $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ est une variété para-hyperkählérienne si et seulement si (M, P, g) est une variété para-kählérienne plate (i.e $\nabla P = 0$ et $R \equiv 0$).

Preuve. La preuve est donnée par les formules (4.12), (4.13) et (4.14). ■

Théorème 4.5.4 La variété presque para-quaternionique hermitienne $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ n'est pas une variété para-quaternionique kählérienne.

Preuve. De la proposition 4.5.2, nous avons ${}^D\nabla\tilde{\Omega} = 0$ si (M, P, g) est une variété para-kählérienne plate (i.e $\nabla P = 0$ et $R \equiv 0$) ou dans ce cas, $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ est une variété para-hyperkählérienne (i.e ${}^D\nabla\tilde{\mathbb{J}} = 0$) et en tenant compte la définition 4.3.3, $(T^3M, \tilde{\sigma}, {}^Dg)$ n'est pas une variété para-quaternionique kählérienne. ■

Bibliographie

- [1] J.Barret, G.W.Gibbons, M.J.Perry, C.N.Pope and P.Ruback, Kleinian geometry and the $N = 2$ superstring, *Int.J.Mod. Phys. A*,9, 1994, 1457-1494.
- [2] A.Bejancu, H.R.Farran, *Foliations and geometric structures, Mathematics and Its Applications*, Springer 2005.
- [3] R.Bielawski, Complexification and hypercomplexification of manifolds with linear connection, *Internat.J.Math*, 14(8), 2003, 813-824.
- [4] A.Caldarella, *Paraquaternionic structures on smooth manifolds and related structures*, Thèse de doctorat, Università degli studi di Bari, 2007.
- [5] C.Camacho, A.Lins Neto, *Geometric theory of foliation*, Birkhäuser 1985.
- [6] A.Dancer, A.Swann, *Hypersymplectic manifolds*, In *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry .ESI Lectures in mathematics and Physics*, 2008, 97-148.
- [7] H.M.Dida, F.Hathout and M.Djaa, *On the geometry of the second order tangent bundle with the diagonal lift metric*, *Int. Journal of Math. Anal*, 3, 2009, 443-456.
- [8] M.Djaa, J.Gancarzewicz, *The geometry of tangent bundles of order r*, *boletin Academia Galega de Ciencias*, 4, 1985, 147-165.
- [9] C.T.J.Dodson, M.S.Radivoiovici, *Tangent and Frames Bundles of order two*. *Analele stiintice ale Univesitatii .AL. I Gusa*, 28, 1982, 63-71.
- [10] P.Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle*, *J.Reine Angew .Math*, 210, 1962, 73-88.

-
- [11] A.El Kacimi Alaoui, Towards a Basic Index Theory, Proceedings of the Summer School and Workshop Dirac Operator : Yesterday and Today, CAMS-AUB, Beirut 2001, 251-261.
- [12] A.El Kacimi Alaoui, M.Nicolau, Structure géométriques invariantes et feuilletages de Lie, Indag. Math. N.S, 3,1990, 323-334.
- [13] A.El Kacimi Alaoui, V.Sergiescu and G.Hector, La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien de dimension finie. Math. Z, 188, 1985, 593-599.
- [14] B.Feix, Hyperkähler metrics on cotangent bundles, J.Reine Angew.Math, 532, 2001, 33-46.
- [15] R. Godement, Topologie algébrique et theorie des faiceaux, Hermann 2006.
- [16] G.Habib, Tenseur d'impulsion-énergie et feuilletages, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2006.
- [17] F.Hathout, M.Djaa, Basic signature and applications, Result.Math, 54, 2009, 75-84.
- [18] F.Hathout, H.M.Dida, Diagonal lift in the tangent bundle of order two and its applications, Turk J Math, 29, 2005, 1-12.
- [19] C.M.Hull, Actions for $(2, 1)$ sigma models and strings, Nucl.Phys.B509, 1998, 252-272.
- [20] S.Ivanov, V.Tsanov and S.Zamkovoy, Hyper-para-Hermitian manifolds with torsion, J.Gem.Phys, 56(4), 2006, 670-690.
- [21] S.Ivanov, S.Zamkovoy, Para-hermitian and para-quaternionic manifolds, Differ.Gem. Appl, 23, 2005, 205-234.
- [22] S.Lanus, G.E.Vîlcu, Some constructions of almost para-hyperhermitian structures on manifolds and tangent bundles, Int. J.Gem. Methods Mod.Phys, 5(6), 2008, 893-903.
- [23] H.B.Lawson, M.L.Michelsohn, Spin geometry, P.U.P princeton, New Jersey 1989.
- [24] A.M.Lonescu, G.E.Vîlcu, A Note on Paraquaternionic Manifolds, Missouri J. Math. Sci, 19, 2007, 213-218.
- [25] T.Masson, Introduction à l'homologie et la cohomologie avec exemples,thierry.masson@th.u-psud.fr.

-
- [26] P.Molino, Riemannian foliations, Birkhäuser 1988.
- [27] Y.Nakashima, Y.Watanabe, Some constructions of almost Hermitian and quaternion metric structures, Math. J. Toyama Univ, 13, 1990, 119-138.
- [28] B.Kacimi et al., Para-Quaternionic structures on the 3-Jet bundle, Math.Sci.Appl.E-Notes, 4(2), 2016, 37-46.
- [29] D.Kaledin, A canonical hyperkähler metric on the total space of a cotangent bundle, Proceedings of the second meeting "Quaternionic structures in mathematics and physics" (Rome 1999), World Sci.Publishing, River Edge, NJ, 195-230.
- [30] H.Kamada, Neutral hyper-Kähler structures on primary Kodaira surfaces, Tsukuba J.Math , 23, 1999, 321-332.
- [31] S.Kobayashi, K.Nomizu, Foundation of differential geometry, Interscience, New York and London 1963.
- [32] B. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math, 69, 1959, 119-132.
- [33] G.Schwarz, On the Rham cohomology of the leaf space of a foliation, Topology, 13, 1974, 185-188.
- [34] E.Spanier, Algebraic Topology, Springer 1981.
- [35] M.Tahara, S.Marchiafava and Y.Watanabe, Quaternionic Kähler structures on the tangent bundle of a complex space form, Rend. Ist. Mat. Univ.Trieste, 31(12), 1999, 163-175.
- [36] Ph.Tondeur, Foliations on Riemannian manifolds, Springer, New York 1988.
- [37] G.E.Vîlcu, Para-hyperhermitian structures on tangent bundles, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60(3), 2011, 165-173.
- [38] F.W.Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag 1983.
- [39] K.Yano, M.Kon, Structures on manifolds, Springer 1984.