



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences

Spécialité : Génie mécanique

Option : Mécanique des Matériaux et structures

Présentée par :

HOUARI Tarek

COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES EPAISSES SUR FONDATIONS ELASTIQUES

Soutenue le

Devant le jury composé de :

BOUCHOUICHA Benattou	Professeur	Président	Université de Sidi Bel Abbes
BENGUEDIAB Mohamed	Professeur	Directeur de thèse	Université de Sidi Bel Abbes
HOUARI Mohammed Sid Ahmed	Maitre de conférences	Co-directeur de thèse	Université de MASCARA
MILOUDI Abdelkader	Maitre de conférences	Examineur	Université de Sidi Bel Abbes
BENDOUBA Mustapha	Maitre de conférences	Examineur	Université de MASCARA
MEDDAH Hadj Miloud	Maitre de conférences	Examineur	Université de MASCARA
TOUNSI Abdelouhed	Professeur	Invité	Université de Sidi Bel Abbes

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le bon Dieu le tout puissant pour son aide et pour m'avoir guidé pour mener à bien ce travail.

Ce travail a été réalisé au sein des laboratoires de Matériaux et Hydrologie et Matériaux et Systèmes Réactifs grâce à l'aide qui m'a été apportée par plusieurs personnes.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à monsieur le professeur Benguediab Mohamed de l'Université de Sidi Bel Abbés pour avoir accepté d'encadrer scientifiquement cette thèse, de m'avoir guidé et soutenu tout au long de cette étude.

Ses qualités humaines et scientifiques, ses conseils ont tracé le chemin de cette thèse de l'introduction à la conclusion. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Ma reconnaissance au Docteur Houari Mohammed Sid Ahmed de l'Université de Mascara qui a accepté de co-encadrer et suivre scientifiquement cette thèse, m'avoir guidé et soutenu tout au long de cette étude.

Grace à lui cette thèse a été couronnée par plusieurs articles, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens aussi à remercier le professeur Bouchouicha Benattou pour m'avoir accepté de présider ce jury. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements.

Je remercie tout particulièrement,

Messieurs le professeur Tounsi Abdelouhed et le Docteur Miloudi Abdelkader de l'université de Sidi Bel Abbès et les Docteur Bendouba Mostefa et Meddah Hadj Miloud Maître de Conférences A, de l'université de Masacra pour leurs précieux conseils et aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie mes très chers parents pour leurs soutiens et leurs patiences.

Mes remerciements vont également :

A tous ma grande et petite famille

A tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

HOUARI TAREK

Résumé

Dans ce travail, une théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre supérieur incluant l'effet d'étirement est développée pour l'analyse de flexion des plaques sandwich à gradation fonctionnelle simplement supportées reposant sur une fondation élastique.

Cette théorie a seulement cinq inconnues, ce qui est encore moins que les autres théories de cisaillement et de déformation normale.

La théorie présentée est cohérente sur le plan de la variation, sans le facteur de correction de cisaillement.

Le présent a un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant les principes de Hamilton et résolues via la procédure de Navier.

La convergence et la validation du modèle numérique théorique proposé sont effectuées pour démontrer l'efficacité du modèle.

Mots clés: Plaques Sandwich FG; nouvelle théorie des plaques; pliant; effet d'étirement; modélisation analytique

Abstract

In this work, a refined higher-order shear deformation theory including the stretching effect is developed for the analysis of bending analysis of the simply supported functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation. This theory has only five unknowns, which is even less than the other shear and normal deformation theories.

The theory presented is variationally consistent, without the shear correction factor. The present one has a new displacement field which introduces undetermined integral variables. Equations of motion are obtained by utilizing the Hamilton's principles and solved via Navier's procedure.

The convergence and the validation of the proposed theoretical numerical model are performed to demonstrate the efficacy of the model.

Keywords: FG Sandwich plates; new plate theory; bending; stretching effect; analytical modeling

ملخص

في هذا العمل ، تم تطوير نظرية تشوه القص الأعلى مرتبة بما في ذلك تأثير التمدد لتحليل الانحناء للوحات ساندويتش متدرجة وظيفياً مدعومة ببساطة تستند إلى أساس مرن

هذه النظرية لديها خمسة مجهولين فقط ، وهي أقل من نظريات التشوه والنظريات العادية

النظرية المقدمة متناسقة من الناحية التناسبية ، بدون عامل تصحيح القص. يحتوي الحقل الحالي على حقل جديد للتشريد يقدم متغيرات متكاملة غير محددة. يتم الحصول على معادلات الحركة من خلال الاستفادة من مبادئ هاملتون وحلها عبر إجراء Navier. يتم تنفيذ التقارب والتحقق من النموذج العددي النظري المقترح لإثبات فعالية النموذج.

كلمات البحث: لوحات ساندويتش FG. نظرية اللوحة الجديدة الانحناء. تأثير التمدد النمذجة التحليلية

TABLE DES MATIERES

Résumé
Abstract
Liste des figures
Liste des tableaux
Liste des symboles
Introduction Générale 1

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

I.1. Introduction..... 5
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés 5
I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés8
I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés 10
 I.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)10
 I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)..... 11
 I.4.3 Compaction sèche des Poudres 11
 I.4.4. Projection plasma..... 12
 I.4.5. Frittage et Infiltration 12
I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés 12
I.6. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM 14
I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM 16
 I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM 17
 I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM 18
 I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM 19
I.8. Les modèles analytiques des plaques FGM 20
 I.8.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....20

1.8.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	21
1.8.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	22
I.9. Analyse non linéaire des plaques.....	24
1.9.1. Relations déformation-déplacement	24
1.9.2. Relations contrainte-déformation.....	26
1.9.3. Equations des efforts et des moments.....	27
1.9.4. Détermination des équations d'équilibre par le principe des travaux virtuels	28
1.9.5. Energie potentielle totale minimale (Méthode de Ritz).....	29
1.9.6. Flexion cylindrique d'une plaque longue	30
I.10. Conclusion	31

**CHAPITRE II :REVUE DES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES EN
MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES**

II.1. Introduction	32
II.2. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriétés.....	33
11.2.1. Estimation auto-cohérente « Self consistent estimates ».....	34
11.2.2. Modèle de Mori-Tanaka	35
11.2.3. Modèles sphères composites.....	35
11.2.4. Modèle d'assemblage de cylindres	36
11.2.5. Modèle micromécanique.....	36
II.3. Des études ont rapporté sur des plaques en matériaux à gradient de propriétés.....	36
11.3.1. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés.....	36
11.3.2. Analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement.....	37
11.3.3. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM.....	44
11.3.4. Les études sur l'analyse thermoélastique des structures FGM	46
11.3.5. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM.....	49
11.3.6. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM.....	52
II.4. Théories de couche unique équivalentes (théories ESL).....	55
11.4.1 Théorie de la plaque stratifiée classique (CLPT).....	55
11.4.2 Théories de déformation de cisaillement.....	56
11.4.3 Théories des couches sages.....	60
11.4.4 Théories de l'élasticité en trois dimensions	61

II.4.5 Plaques fonctionnelles.....	62
II.4.6 Remarques de conclusion.....	64
II.5. Conclusion.....	65

CHAPITRE III : ETUDE ANALYTIQUE DES PLAQUES FGM EN FLEXION

III.1. Introduction.....	67
III.2. Définition d'une plaque :.....	67
III.3. III.3. Formulation théorique.....	68
III.3.1. Configuration géométrique.....	68
III.3.2 Propriétés matérielles.....	69
III.3.3 Équations constitutives.....	70
III.3.4. Equations gouvernantes.....	72
III.4. Equations de mouvement en termes de déplacements.....	74
III.5.Solution analytique de la plaque sandwich FG simplement prise en charge.....	75
III.6. Conclusion.....	76

CHAPITRE IV:RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1.Les résultats numériques.....	77
IV.2.Analyse de flexion.....	77
IV.3.Conclusion.....	89

Conclusions Générales.....	90
----------------------------	----

Références bibliographiques.....	92
----------------------------------	----

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

Figure I.1	Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	7
Figure I.2	Protection thermique	8
Figure I.3	Principe de la méthode coulage en bande	10
Figure I.4	Les principaux domaines d’application des FGM	13
Figure I.5	La variation des déformations et des contraintes à travers l’épaisseur de la plaque stratifiée.....	14
Figure I.6	Une vue microscopique d’un FGM	15
Figure I.7	La microstructure d’un FGM	15
Figure I.8	Microphotographie d’un FGM Cu/Ni à l’aide d’un microscope optique.....	16
Figure I.9	Géométrie d’une plaque en FGM	17
Figure I.10	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	18
Figure I.11	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	19
Figure I.12	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	20
Figure I.13	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff	21
Figure I.14	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	22
Figure I.15	Illustration de la plaque d’ordre élevé.....	23
Figure I.16	moments agissant sur un élément de plaque.....	28

Chapitre II

Figure II.1	Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.....	32
Figure II.2	Matériau à deux phases avec microstructure du squelette.....	34

Figure II.3	Modèle sphères composite	35
Figure II.4	Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumises à un chargement transverse.....	39
Figure II.5	Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique.....	41
Figure II.6	Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM (Si_3N_4/SUS_3O_4).....	42

Chapitre III

Figure III.1	Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.....	68
Figure III.2	Géométrie d'une plaque sandwich FGM rectangulaire d'épaisseur uniforme dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	68
Figure III.3	La variation du matériau le long de l'épaisseur de la plaque sandwich.....	69

Chapitre IV

Figure IV.1	Le déplacement transversal \bar{w} , à travers l'épaisseur des plaques carrées sandwich symétriques et asymétriques ($a/h = 10$). (a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG	82
Figure IV.2	La contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$, à travers l'épaisseur du sandwich symétrique et asymétrique assiettes carrées ($a/h = 10$). (a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG...	83
Figure IV.3	La contrainte transversale de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$, à travers l'épaisseur des plaques carrées sandwich symétriques et asymétriques ($a/h = 10$)..... (a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG.	84
Figure IV.4	Effet du paramètre du module Winkler et Pasternak sur la déflexion \hat{w} du centre sans dimension à travers l'épaisseur d'une plaque.....	86
Figure IV.5	Effet du paramètre du module Winkler et Pasternak sur la contrainte	

axiale $\hat{\sigma}_x$ sans dimension à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG carrée. (a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG, ($p = 5, a/h = 10$)..... 87

Figure IV.6

Effet du paramètre du module de Winkler et de Pasternak sur la contrainte de cisaillement transversale $\hat{\tau}_{xz}$ sans dimension à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG carrée..... 88

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1	comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	6
-------------	--	---

Chapitre IV

Tableau IV.1	Propriétés du matériau utilisées dans les plaques sandwich fonctionnelles.....	77
Tableau IV.2	Déplacement du centre non dimensionnel \bar{w} et contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de (Al/ZrO_2) Plaque carrée sandwich FG sous charge sinusoïdale $(a/h=10)$	79
Tableau V.3	Effort de cisaillement transversal non dimensionnel $\bar{\tau}_{xz}$ pour la plaque (Al/ZrO_2) sandwich FG carrée $(a/h=10)$	80
Tableau V.4	Déplacement central non dimensionnel \hat{w} de la plaque FG $(Ti-6Al-4V/ZrO_2)$ Sandwich sur une fondation élastique sous une charge répartie sinusoïdalement $(a/h=10, b=2a)$	81

Liste des Notations

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
w_{st}	La composante de déplacement due à l'effet d'étirement
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation de l'énergie potentielle
δK	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
$i, j, l \text{ et } m$	Sont des nombres naturels.
$\{f_v\}$	Vecteur des forces volumiques ;
$\{f_s\}$	Vecteur des forces surfaciques ;
$\{Q_i\}$	Vecteur des forces concentrées.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage

D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
V	Énergie potentielle totale.
U	Énergie de déformation.
W	Travail des forces appliquées.
(m,n)	ième mode propre
$q(x,y)$	Charge transversale
(I_i, J_i, K_i)	Inerties de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Liste des Abréviations

FGM : Functionally graded material.

STA: The science and technology agency.

SFF: Solid freeform fabrication.

CTE: Coefficient of thermal expansion.

LFB : Line-focus-beam.

PM : Powder metallurgy.

NiCr : Nickel-chromium.

Al₂O₃ : Alumine ou oxyde d'aluminium.

Ti-6Al-4V : Titanium

Zr O₂ : Zirconia

CSPM : Centrifugal solid-particle method.

FEM : Le modèle de l'élément fini.

FGMMCs : Les composites à gradient de propriétés à matrice métallique.

ESL : Les théories des couches équivalentes.

CLPT : La théorie classique de la plaque laminée.

FSDT : La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

HSDT : Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

LW : L'approche par couche.

TSDT : La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre.

ESDPT : La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

Une structure en matériaux composites sandwich est constituée de deux peaux minces, rigides et solides, reliées par un noyau central épais, léger et à faible module utilisant des joints adhésifs afin d'obtenir une structure légère très efficace (Zenkert, 1997; Vinson, 2001). Généralement, les faces supérieures et inférieures portent les charges mécaniques, à la fois dans le plan et en flexion, tandis que le cœur résiste aux charges de cisaillement transversal. Une structure en matériaux composite sandwich fonctionne de la même manière qu'une poutre en "I", à la différence que le noyau d'un sandwich est d'un matériau différent et qu'il est étiré comme support continu pour les peaux de la structure. Le principal avantage des structures en matériau composite sandwich est son rapport (rigidité/poids) en flexion très élevé par rapport aux autres types d'architectures en composite et permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application souhaitée. Les structures sandwichs entraînent des déformations transversale et latérales plus faibles, une résistance au flambement plus élevée et des fréquences naturelles plus élevées par rapport aux structures en matériau composite classique.

Bien que les structures sandwichs offrent des avantages par rapport à d'autres types de structures, elles présentent des inconvénients telle que la création des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches qui peuvent conduire aux délaminages, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Il est important de développer de nouveaux types de matériaux afin d'obtenir le poids minimum absolu pour des conditions données (par exemple, géométrie structurelle et charges). Ces nouveaux sandwichs doivent être comparés à d'autres constructions en sandwich et à des structures alternatives afin de sélectionner la meilleure configuration. Une des nouvelles alternatives est une structure en sandwich en matériau à gradient de propriétés.

Une équipe de chercheurs du Japon ont proposé de palier à ces difficultés par la conception de nouveaux matériaux dits matériaux à gradient de propriétés « FGM : Functionally Graded Materials » dont les propriétés mécaniques varient lentement et continûment dans l'épaisseur de la structure (Koizumi,1997).

Les matériaux à gradation de propriétés (FGM) possèdent des propriétés qui varient progressivement dans l'espace du matériau; par conséquent, ils sont des matériaux non

homogènes à l'échelle macroscopique. Les nouveaux développements dans les méthodes de fabrication offrent au concepteur la possibilité d'adapter la microstructure du matériau afin d'améliorer ses performances structurelles. La variation des propriétés peut être obtenue en modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux des constituants, en utilisant des renforts présentant des propriétés, tailles et formes différentes, en inter changeant les rôles des phases de renfort et de matrice de manière continue et en ajustant la structure cellulaire.

Récemment, les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus considérable et importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles. Ils sont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique.

Il est ainsi primordiale de disposer et d'accommoder les moyens de calcul, les plus performant et efficaces afin d'étudier l'influence des différents types chargement sur la réponse mécanique globale d'une telle structures en particulier les structures épaisses sandwichs en matériaux à gradient de propriétés. Ce qui permet d'en déduire leurs déplacements, leurs déformations et par conséquent la distribution de leurs contraintes en toute points dans l'espace de la structure.

La recherche de la réponse mécanique en flexion au sein des structures (plaques, poutres, etc..) est principalement obtenue à partir d'hypothèses sur la forme du champ des déplacements dans l'épaisseur du modèle privilégié ou choisi. Ces modèles sont conçues comme une approximation d'une réalité tridimensionnelle, il puisse exister plusieurs, la différence entre elle est principalement constatée par la précision des approximations des déplacements sur lesquelles elles sont fondées.

Le principal but de ce travail de thèse, est de proposer un nouveau modèle simple et facile à exploiter, qui permet d'évaluer les solutions tridimensionnelles des déplacements et des contraintes au sein des plaques épaisses sandwich en matériaux à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, qui sont des approximations de qualité de la solution exacte dans le cas de plaques épaisses en FGM.

Le modèle développé c'est un modèle de déformation de cisaillement Quasi-3D qui tient en compte de la déformation normale « **Effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur, "effect of thickness stretching"** ». A la différence des autres théories d'ordre supérieur quasi-3D, le modèle proposé est basé sur une cinématique dans laquelle le terme

intégral est inclus permettant à une réduction du nombre d'inconnues et d'équations d'équilibre. Ainsi, le nombre des variables et les équations d'équilibre du modèle proposé est seulement cinq (05) contre six (06) ou plus de fonctions de déplacement inconnues utilisées dans les autres théories de déformation de cisaillement avec la prise en compte de « l'effet stretching » (Kant and Swaminathan, 2002; Zenkour and Alghamdi, 2008; Carrera et al. 2011; Neves et al. 2012). La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité dans des plaques tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaques. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature.

Pour aboutir à nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, un ensemble de généralités sur les matériaux composites avancés à gradient de propriétés est présenté, leurs principales caractéristiques, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs principaux domaines d'application. Ensuite, les modèles de structures épaisses (plaques) utilisés pour l'analyse du comportement mécanique des plaques en matériau composite est exposé.

Le deuxième chapitre présente une revue de littérature des divers travaux portant sur le comportement mécanique des structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Le troisième chapitre détaille la mise en œuvre du modèle proposé de plaques épaisses basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec la prise en compte de l'effet "Stretching" dans la direction de l'épaisseur pour l'analyse du comportement mécanique des plaques épaisses en FGM sur des appuis élastiques. Le but est de développer un nouveau modèle pour le calcul du comportement mécanique. Pour illustrer ce concept, on a présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique simple et efficace, raffinée avec seulement cinq (05) variables inconnues au lieu de (06) six.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement mécanique de la flexion des plaques sandwiches « FGM / Céramique / FGM »

en utilisant le modèle développé, la prise en compte des fondations élastiques a été discutée dans ce chapitre. On a étudié l'influence du chargement mécanique sur le comportement de la flexion des plaques tout en analysant l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentielles en utilisant les divers modèles des plaques épaisses qui incluent ou non l'effet "Stretching".

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés.

*CHAPITRE I : GENERALITES SUR
LES MATERIAUX A GRADIENT DE
PROPRIETES*

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1. Introduction

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [Zhong et al. 2007]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [Baron et al. 2008].

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi. 1992].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini et al. 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch et al.1986].

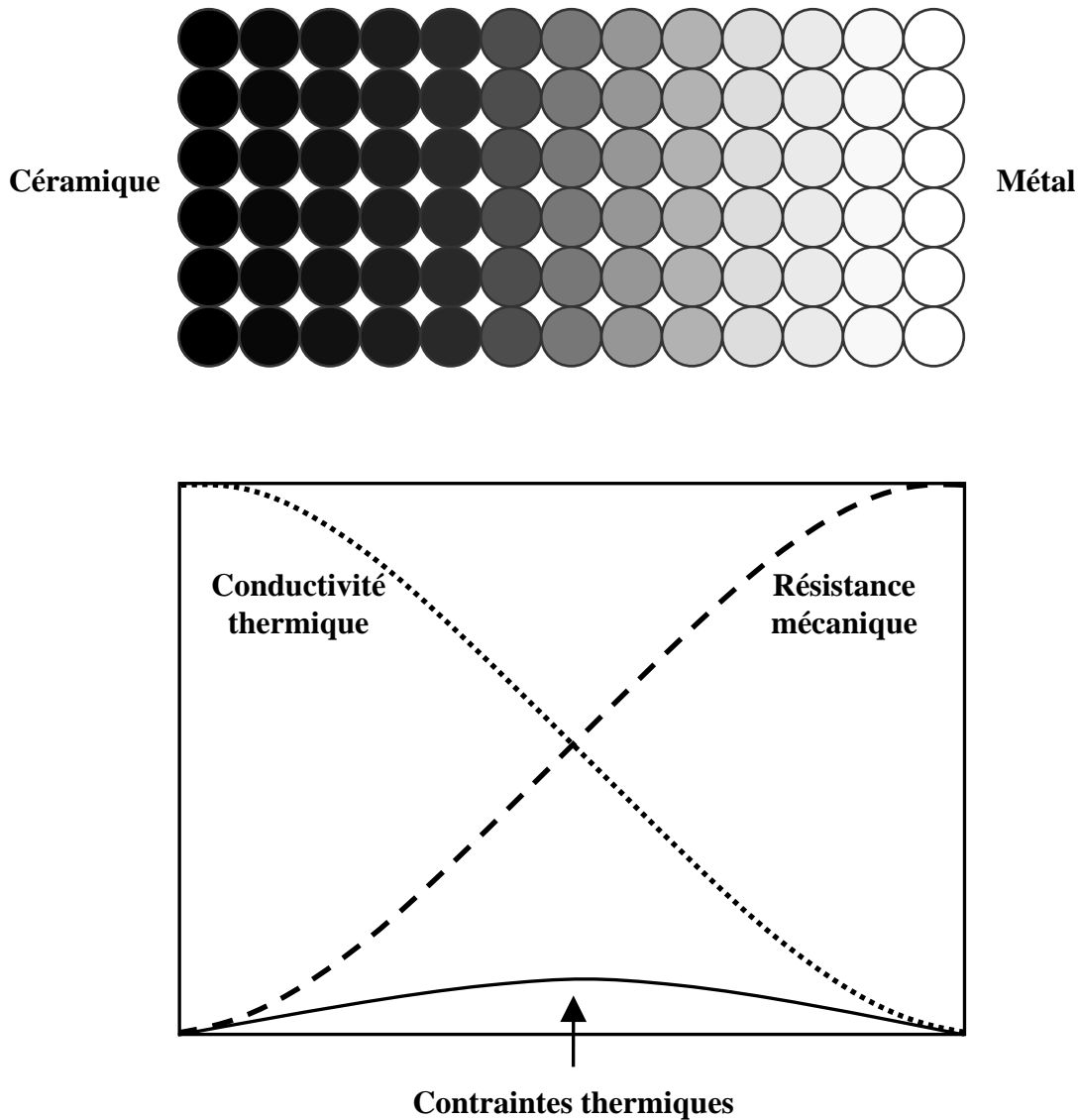


Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Boch et al.1986].

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en

changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

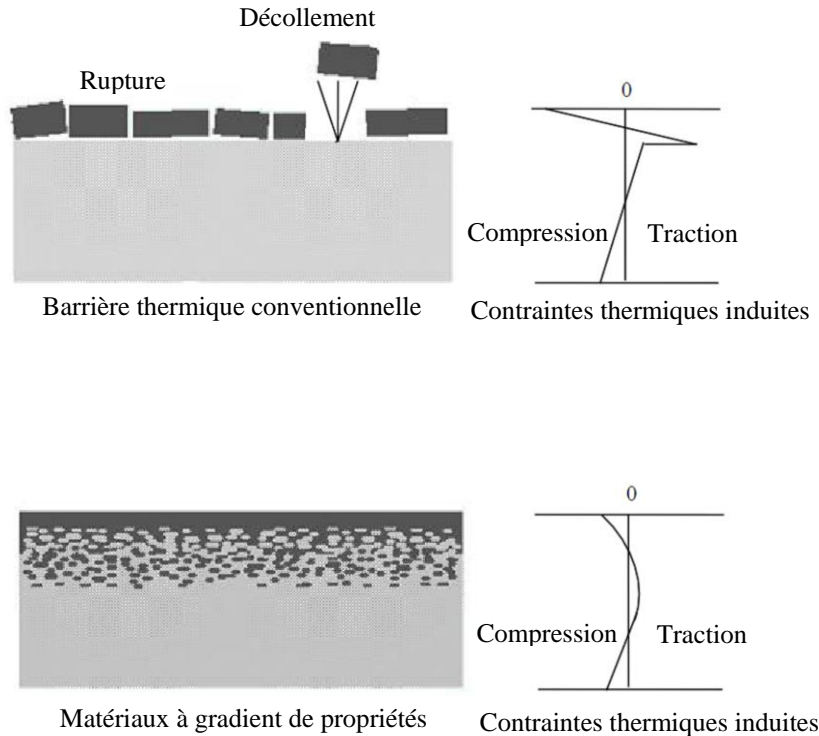


Figure I.2 : Protection thermique. [Boch et al.1986].

I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi. 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [Koizumi .1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [Nguyen et al.2007].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux

présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koizumi .1997].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi. 1992].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura .1991].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, constructions [Okamura .1991].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels,

tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être établi en divisant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec.1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

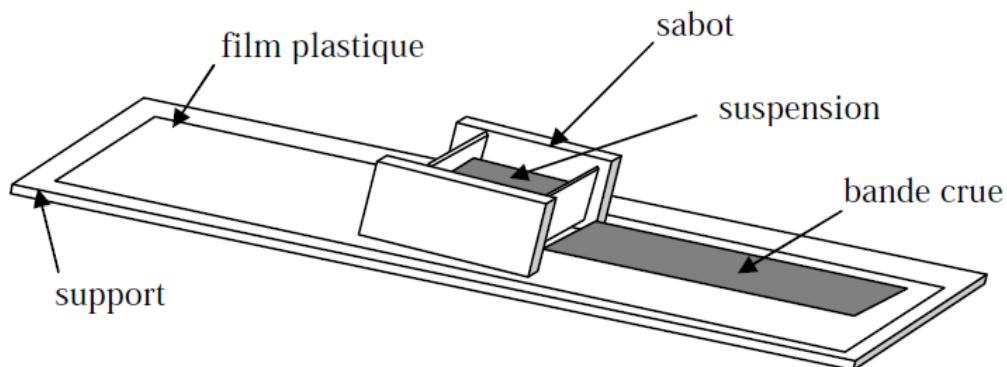


Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec.1997].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler.1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch et al.1986].

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Bouderba et al.2016]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop et al.1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens et al.1990].

I.4.5. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi et al.1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

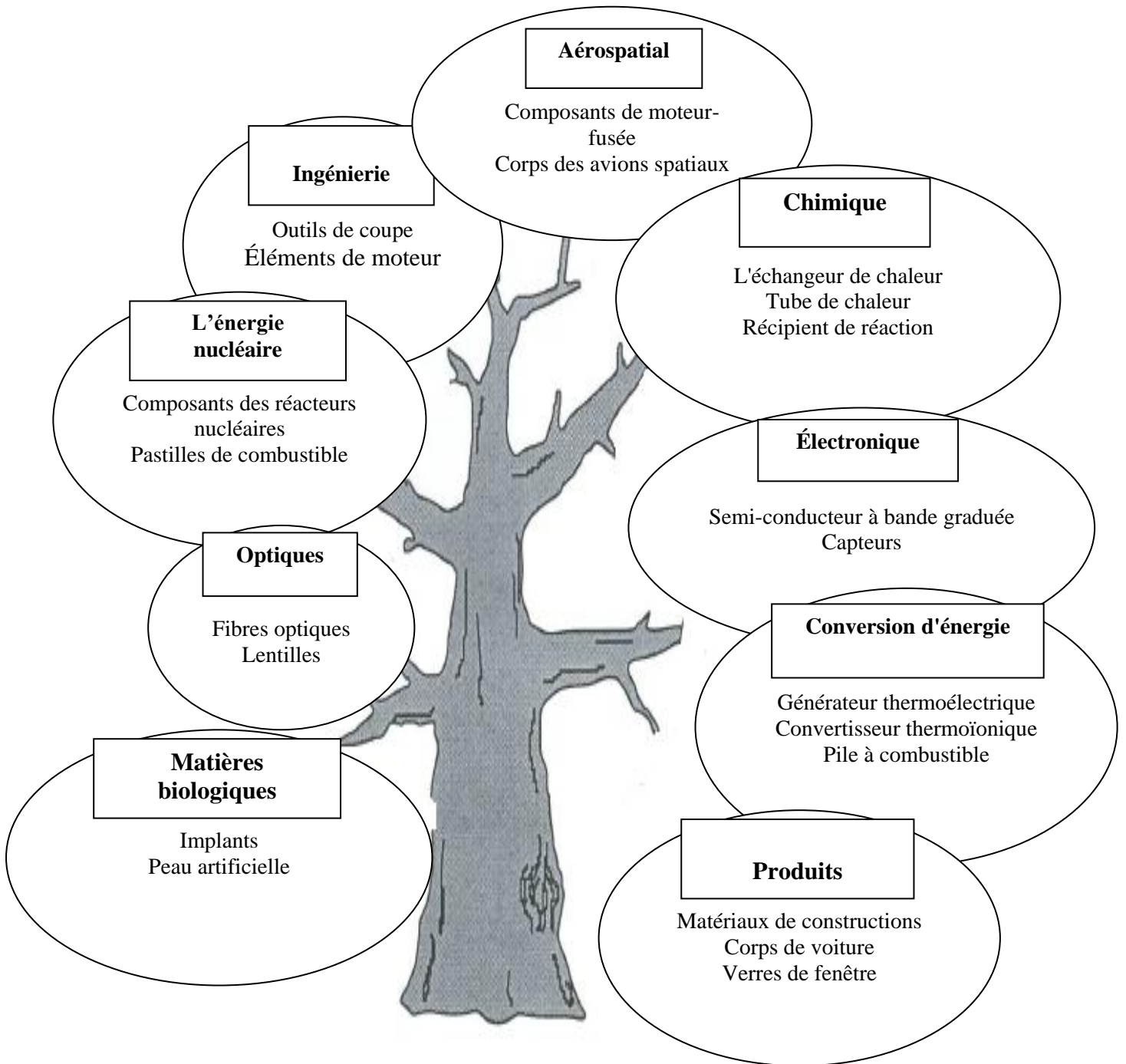


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.6. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM :

Les propriétés supérieures de matériaux composites avancés, telles que la résistance spécifique et la rigidité élevée, ont conduit à leur utilisation généralisée dans les avions à haute performance, astronefs, des pièces automobiles et des structures spatiales. Dans les structures classiques de composites stratifiés, lames élastiques homogènes sont liés ensemble pour obtenir des propriétés mécaniques et matérielles améliorées. Les matériaux composites sont fabriqués par l'homme et, par conséquent, les constituants des matériaux composites peuvent être sélectionnés et combinés de manière à produire un matériau utile qui a les propriétés souhaitées, tels que la haute résistance, une rigidité élevée, une plus grande résistance à la corrosion, une plus grande résistance à la fatigue, un faible poids et ainsi de suite.

La constitution d'anisotropie des structures composites stratifiées souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, fig I.3, qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages.

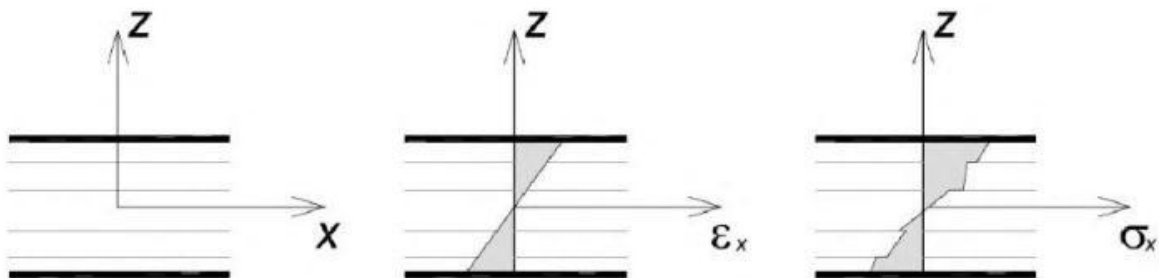


Figure I.5. La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée [Hashmi et al.2014]

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et alléger ainsi les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés.

La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte. La variation progressive dans un matériau est très efficace elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure. Les FGM sont généralement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, puisqu'ils sont utilisés aussi comme structures de barrière thermique dans des

environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Dans de telles applications, la céramique présente une résistance à la chaleur et à la corrosion; parallèlement le métal fournit la force et la ténacité. Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques, voir figure, I.6, I.7 et I.8.

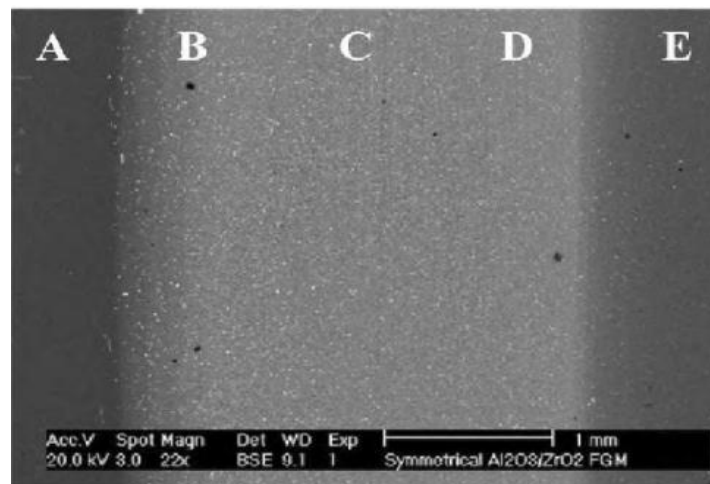


Figure I.6. Une vue microscopique d'un FGM [Hashmi et al.2014] .

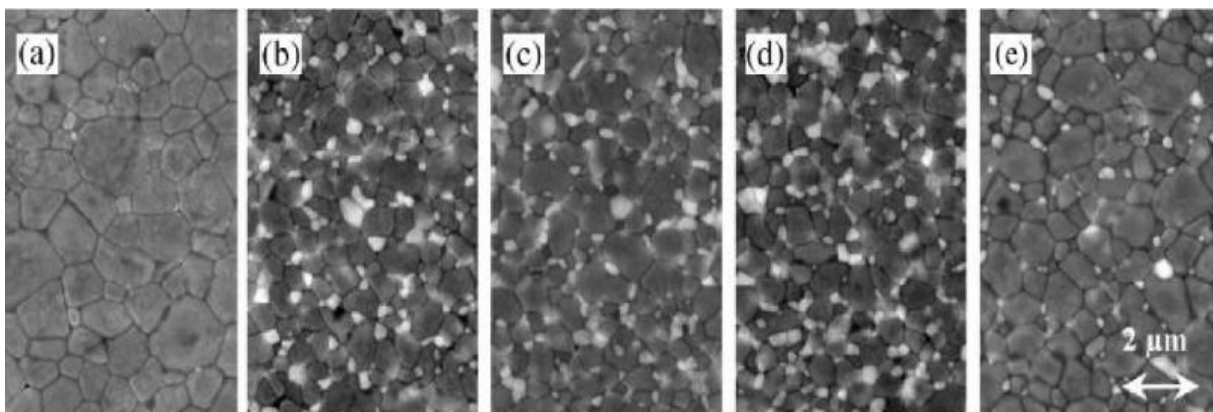


Figure I.7. La microstructure d'un FGM [Hashmi et al.2014]

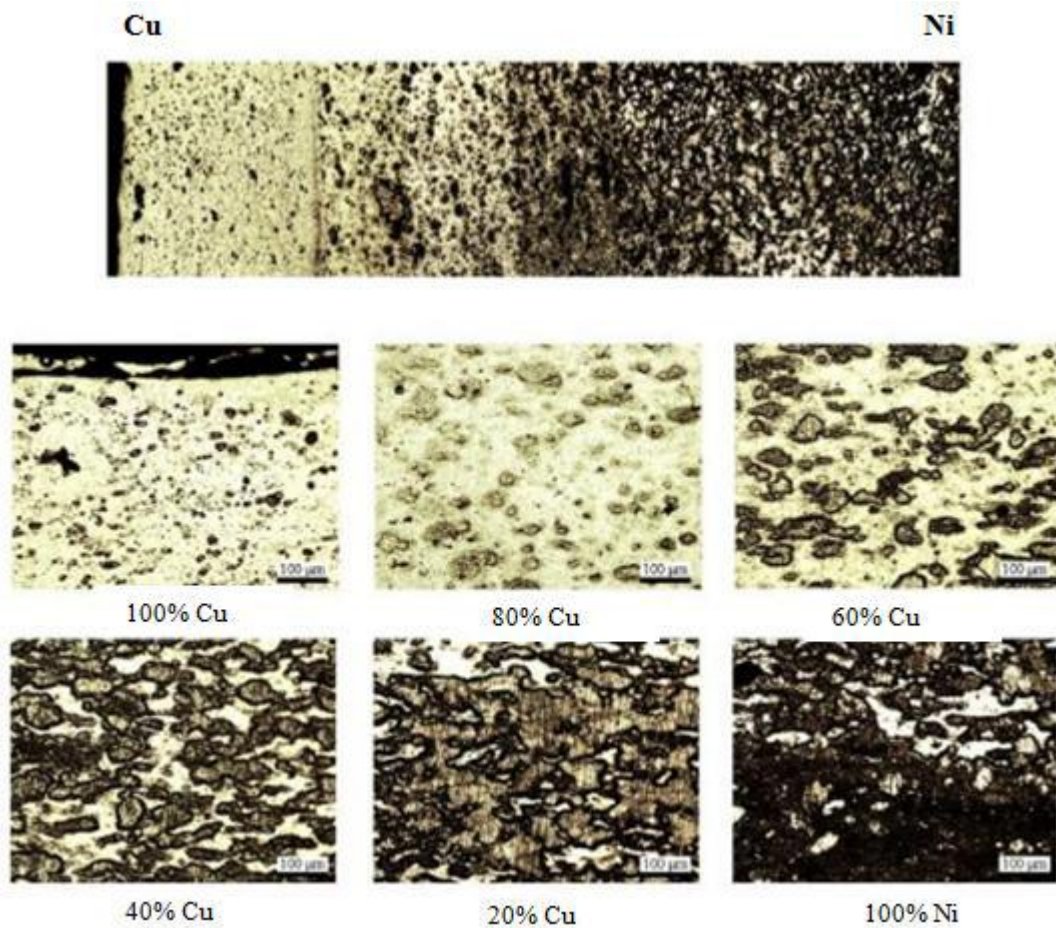


Figure I.8. Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique
[Hashmi et al.2014]

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

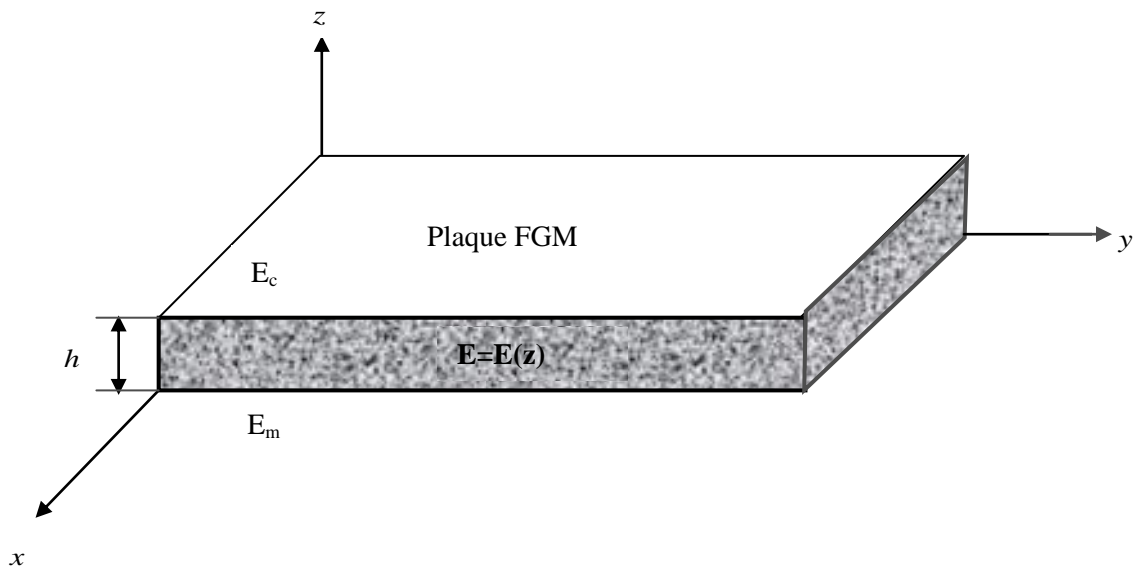


Figure I.9 : Géométrie d'une plaque en FGM[L. Lostec et al.1997].

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $\nu(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et al.1995] :

$$(I.2)$$

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.10, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

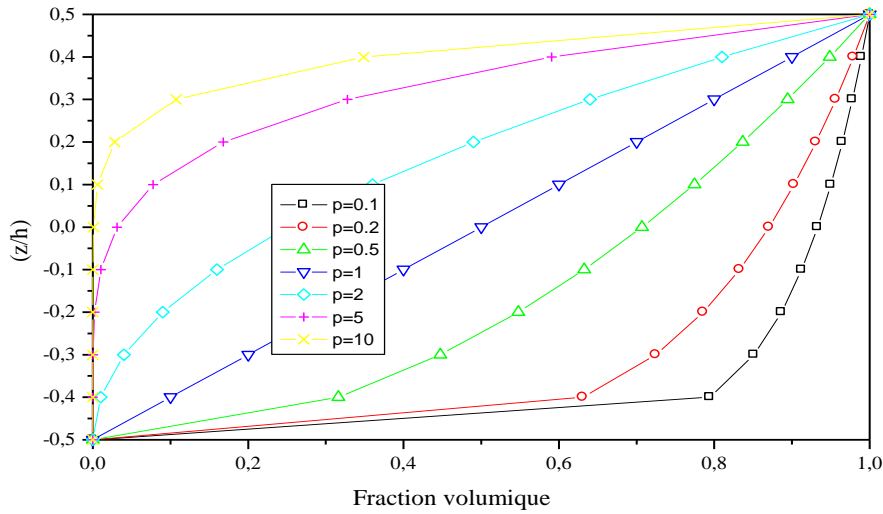


Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM[Bao et al.1995] .

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao et al.1995]. Par conséquent, Chung et chi [Chi et al 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.3.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.11 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

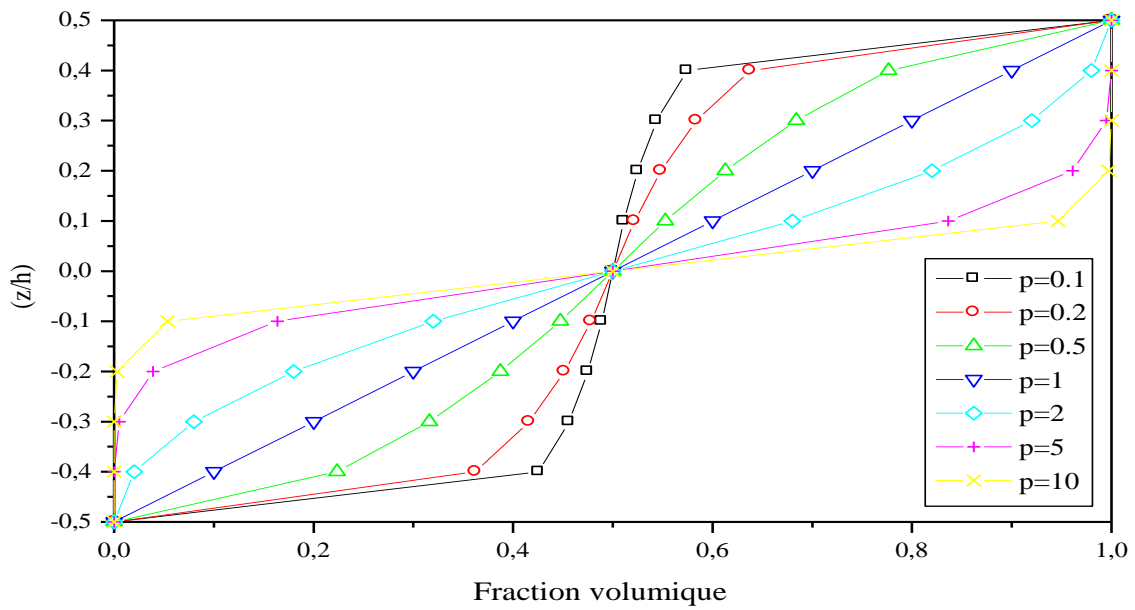


Figure I.11: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM[Chi et al 2003].

I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale et al.1983] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.12.

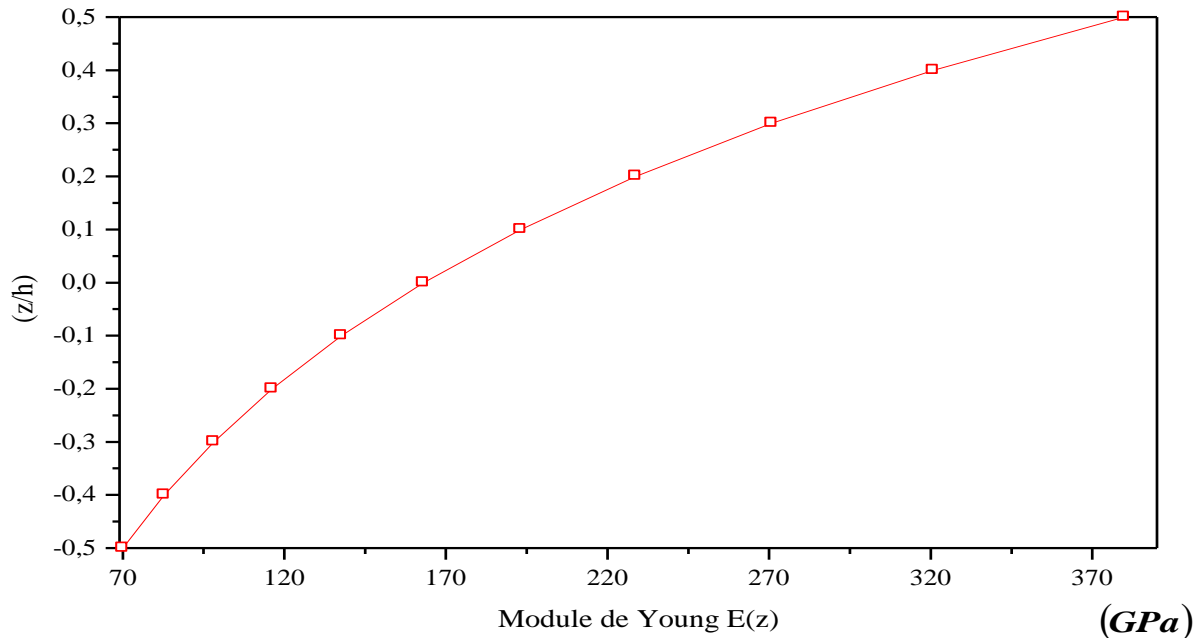


Figure I.12 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM[Delale et al.1983] .

I.8. Les modèles analytiques des plaques FGM

I.8.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure I.13), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en [Timoshenko.(1959) ; Reddy.(1997) ;Reddy.(1999)] .

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{I.6.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{I.6.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.6.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

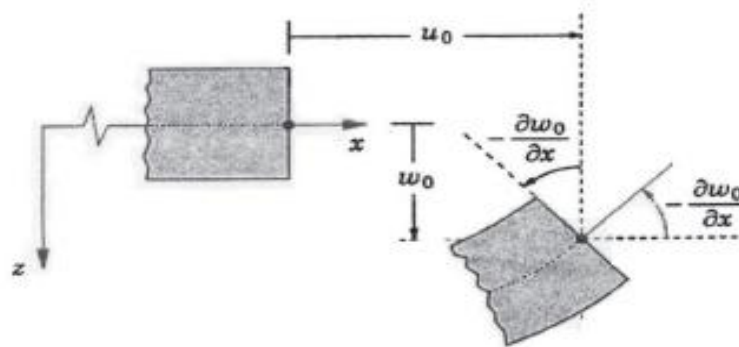


Figure I.13 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy.1997].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

I.8.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référée dans [Reissner.(1945) ; Mindlin.(1951)] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko.(1959) ; Reddy.(1997) ; Reddy.(1999)].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (I.7.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (I.7.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (I.7.c)$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

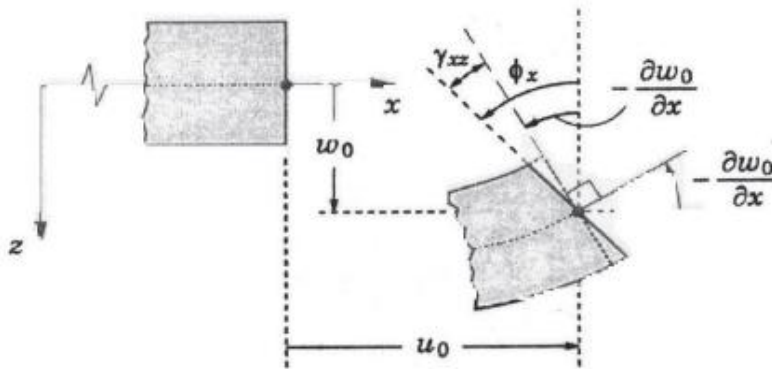


Figure I.14 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy.1997].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

I.8.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand et al.(1949); Naghdi.(1957) ;

Reissner.(1975) ; Reddy.(1984) ;Kant et al. (2002)]. Nous avons introduit ici quatres modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

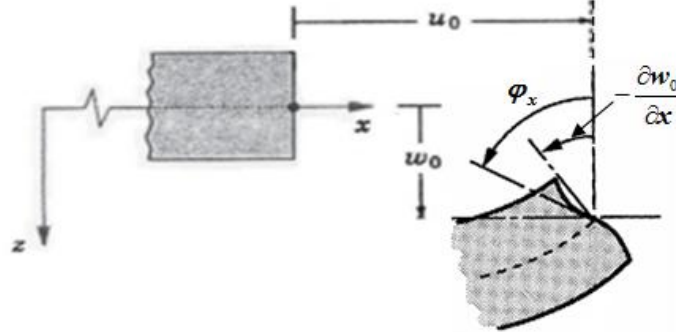


Figure I.15: Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy.1997].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{I.8.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{I.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.8.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des

axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de

cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [Reddy.(1997) ; Reddy .(1999)] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{I.9})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur .Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [Touratier.1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{I.10})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [Karama et al.2003] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{I.11})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. [Ait Atmane et al.2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{I.12})$$

I.9. Analyse non linéaire des plaques

I.9.1. Relations déformation-déplacement

Dans la majorité des problèmes abordés dans la littérature, les déplacements et les déformations de la structure ont été supposés implicitement petits. D'un point de vue pratique, ceci veut dire que la géométrie des éléments reste quasiment inchangée lorsque ceux-ci sont

soumis à des sollicitations; par conséquent, on peut utiliser au premier ordre les approximations de déformations linéaires infinitésimales.

En pratique, de telles hypothèses sont fréquemment mises à défaut, même lorsque les déformations restent petites et que la limite élastique des matériaux ordinaires n'est pas dépassée. Si l'on veut connaître avec précision les déplacements pour certaines structures, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités géométriques [Zienkiewicz.1979].

Dans le cas des grands déplacements, le tenseur de déformation de Lagrange, également appelé tenseur de déformation de Green–Lagrange ou tenseur de déformation de Green–Saint-Venant, est défini en termes de dérivées partielles de déplacement comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{I. 13})$$

Où $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, x_1 = x, x_2 = y$ et $x_3 = z$.

Le tenseur symétrique du second ordre s'exprime classiquement par la somme de deux tenseurs :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{NL} \quad (\text{I. 14})$$

Où ε_{ij}^L est la partie linéaire du tenseur ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I. 15})$$

Et ε_{ij}^{NL} est la partie quadratique du tenseur ε_{ij} traduisant la non-linéarité géométrique

$$\varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I. 16})$$

Dans la théorie de Von Karman (1910,1939) ou la théorie de la non-linéarité géométrique des plaques, on suppose que les déplacements dans le plan (u et v) sont infinitésimaux et seulement les termes non-linéaires dépendant du déplacement transversal (w) dans l'équation (I.13) sont considérés [Amabili.2008]. Tous les autres termes non-linéaires sont négligés.

I.9.2. Relations contrainte-déformation

Nous considérons les relations linéaires entre les contraintes et les déformations (loi de Hooke généralisée). Pour les matériaux orthotropes, la relation liant les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{I. 17})$$

Telle que :

$[C]$: matrice de constantes élastiques.

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

Ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes (équation (I-19)) auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{I. 19})$$

Pour une plaque en matériau à gradient de propriétés, le module de Young et le coefficient de Poisson ($E(z)$ et $\nu(z)$) dépendent de la position z . D'où les coefficients de rigidité Q_{ij} sont donnés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad (\text{I. 20a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad (\text{I. 20b})$$

$$Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 - \nu(z))}. \quad (\text{I. 20c})$$

I.9.3. Equations des efforts et des moments

Les équations exprimant les forces et les moments internes (figure I.16) sont obtenues par l'intégration des contraintes :

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} dz \quad (\text{I. 21a})$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} dz \quad (\text{I. 21b})$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{I. 21c})$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz \quad (\text{I. 21d})$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \quad (\text{I. 21e})$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz \quad (\text{I. 21f})$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz \quad (\text{I. 21g})$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{I. 21h})$$

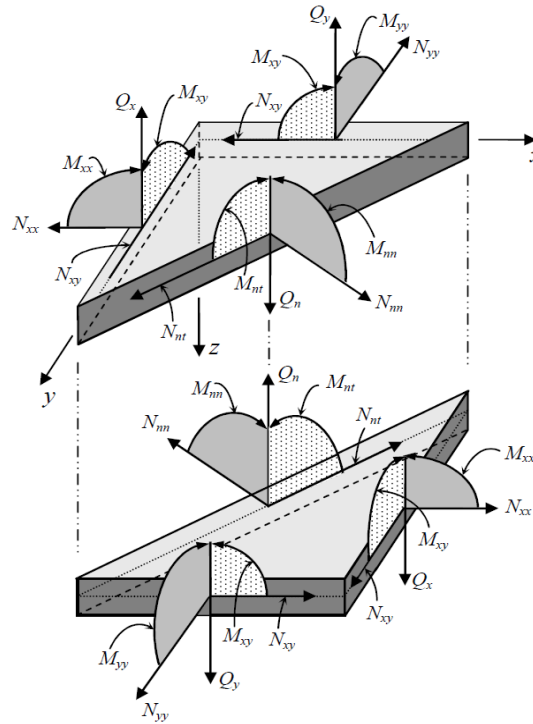


Figure I.16: Forces et moments agissant sur un élément de plaque [Kaci.2012]

I.9.4. Détermination des équations d'équilibre par le principe des travaux virtuels :

Soit un corps solide en équilibre sous l'action de forces de volume f_i^V , de surface f_i^S , et des forces concentrées Q_i . Considérons un champ de déplacement virtuel δu_i cinématiquement admissible.

Le théorème des travaux virtuels exprime le bilan des travaux virtuels interne et externe, lorsque le corps est en équilibre :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i^V \delta u_i dV + \int_S f_i^S \delta u_i dS + Q_i \delta u_i \quad (I.22)$$

V : est le volume du corps ;

S : la surface extérieure du corps où les forces surfaciques sont appliquées ;

f_i^V : Forces volumiques ;

f_i^S : Forces surfaciques appliquées à la surface extérieure S du corps ;

Q_i : Forces concentrées ;

σ_{ij} : Tenseur des contraintes ;

ε_{ij} : Tenseur des déformations infinitésimales

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f_v\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{f_s\} dS + \sum_i \{\delta u\}^T \{Q_i\} \quad (I.23)$$

$\{\delta\varepsilon\}^T$: Vecteur des déformations, transposé ;

$\{\sigma\}$: Vecteur des contraintes ;

$\{\delta u\}^T$: Vecteur des déplacements, transposé ;

$\{f_v\}$: Vecteur des forces volumiques ;

$\{f_s\}$: Vecteur des forces surfaciques ;

$\{Q_i\}$: Vecteur des forces concentrées.

On peut introduire la fonctionnelle énergie potentielle totale V , et le principe du travail virtuel s'écrit :

$$\delta U = \delta W$$

Ou :

$$\delta V = \delta(U - W) \quad (I.24)$$

Avec :

V : Énergie potentielle totale.

U : Énergie de déformation.

W : Travail des forces appliquées.

I.9.5. Énergie potentielle totale minimale (Méthode de Ritz):

Dans un corps élastique linéaire, l'énergie de déformation interne dû à la déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV, \quad (I.25)$$

L'énergie de déformation pour un milieu tridimensionnel sur le système de coordonnées cartésiennes est :

$$U = \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz \quad (I.26)$$

Le travail de forces externes $q(x)$ et F se déplaçant à travers les déplacements transversal $w(x)$ et longitudinal D est donnée par

$$V = \frac{1}{2} \int_l q(x) w(x) dl + \frac{1}{2} \{F\}^T \{D\}, \quad (I.27)$$

Et la fonction d'énergie potentielle totale est donnée par

$$\Pi = U + V \quad (I.28)$$

Pour un solide élastique en équilibre, l'expression $U=V$ est une déclaration du principe du travail réel: le travail des forces extérieures sur un solide élastique est complètement stocké sous forme d'énergie de déformation dans le solide.

L'expression $\delta\Pi = 0$ est le principe d'énergie potentielle totale minimum.

Parmi tous les déplacements possibles compatibles avec les réactions, l'état correct de déplacement est celui qui minimise l'énergie potentiel totale.

Si les déplacements peuvent être exprimées en termes d'un ensemble de coefficients, $a = \{a_1, a_2, \dots\}$ alors ces coefficients deviennent les variables inconnues, et les valeurs correctes des ces coefficients sont celles qui minimisent l'énergie potentielle. En minimisant l'énergie potentielle totale par rapport aux coefficients correspond à poser la variation dans l'énergie potentiel total par rapport aux coefficients égale à zéro, et on obtient un système d'équation qu'on doit résoudre pour ces coefficients. La variation de l'énergie potentielle totale par rapport aux coefficients a_i est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (I.29)$$

I.9.6. Flexion cylindrique d'une plaque longue

On s'intéresse aux problèmes pour lesquels la théorie des plaques peut être ramenée à une analyse à une dimension. Ce sont les plaques ayant un rapport longueur sur largeur assez élevé pour que la déformation de la plaque puisse être considérée comme indépendante de la coordonnée suivant la longueur de la plaque. Un tel comportement est appelé flexion cylindrique.

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles de calcul des plaques minces et épaisses en FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

*CHAPITRE II : REVUE DES
RECHERCHES SUR LES
STRUCTURES EN MATERIAUX A
GRADIENT DE PROPRIETES*

Chapitre II : Revue des Recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés

II.1. Introduction

Ce chapitre a pour vocation de présenter une revue de quelques travaux de recherche scientifiques portant sur la modélisation des structures multicouches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Dans le développement de notre société et notre culture, les matériaux ont joué un rôle essentiel. Le scientifique utilise des matériaux de base disponibles en divers composant organiques et inorganiques, et il a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, des alliages, des structures en céramique, etc. La structure de développement des matériaux modernes est illustrée sur la Figure II.1.

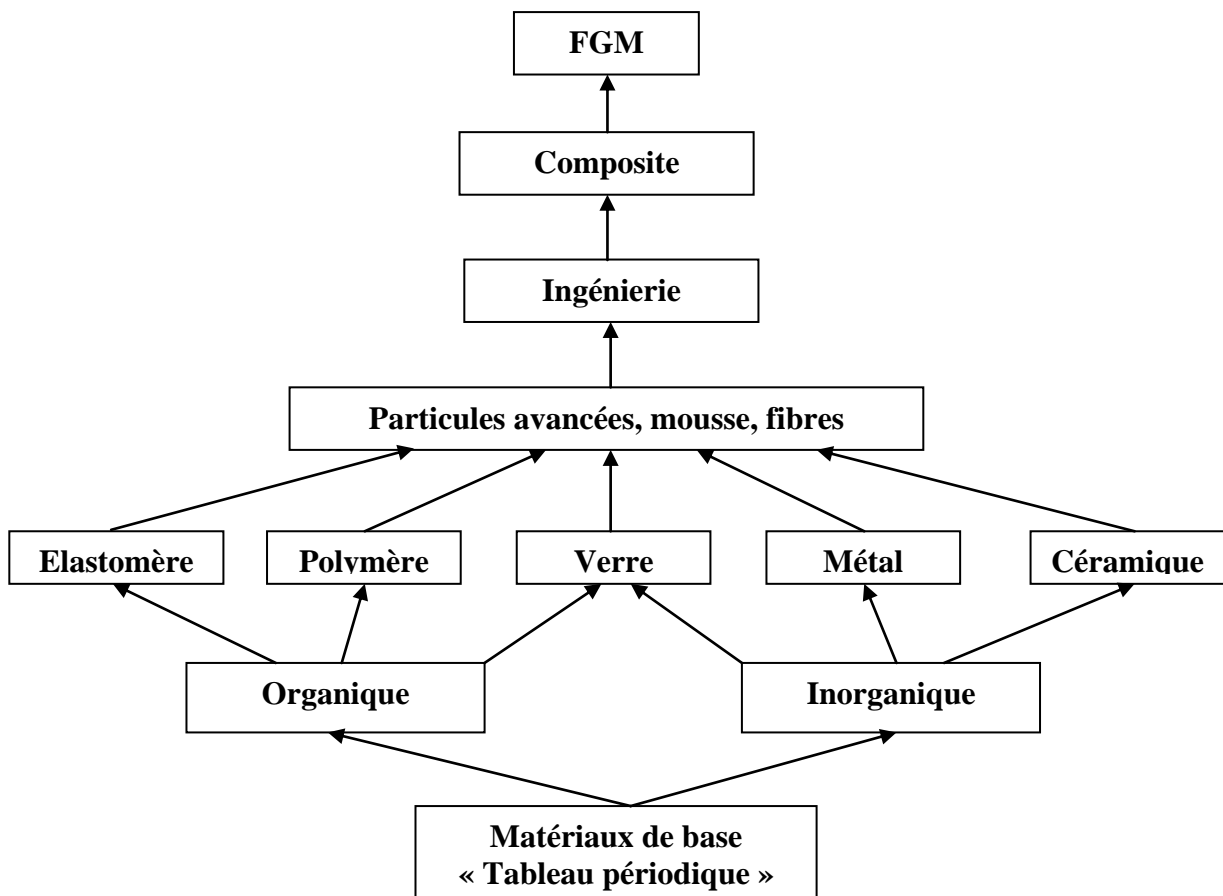


Figure II.1 : Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.

Les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials FGM) sont des matériaux composites avancés composés d'au moins deux matériaux primaires dont la composition et la microstructure du matériau changent graduellement continuellement à l'intérieur de la pièce de la structure [Koizumi.2013].

Cette distribution des matériaux permet de réaliser des gradients de propriétés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. Les domaines d'application sont nombreux pour ces pièces, en particulier l'aérospatial et le biomédical mais également l'électronique, l'énergie nucléaire, la production d'outillage, le design, etc. Ces matériaux avancés avec des gradients de composition de la structure et des propriétés spécifiques dans la direction préférée ou de l'orientation, sont meilleurs que les matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement, et la densité de matériau, varie sans interruption et de façon continue dans des directions préférées de la structure en FGM. Les matériaux FGM ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie de pointe sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes. Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures. Ces matériaux acquièrent de nombreuses applications dans divers domaines d'ingénierie en vue d'utiliser leurs propriétés potentielles de manière optimale [Jha et al.2013]. Le présent chapitre se concentre sur plusieurs aspects qui sont importants pour le développement et la conception des structures en matériaux à gradient de propriétés. Il comprend les approches d'homogénéisation des matériaux FGM, les problèmes de transfert de chaleur dans les structures en FGM et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements, statiques, dynamiques, y compris les chargements thermiques.

II.2. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriétés

La fabrication des matériaux FGM est obtenue par le mélange de deux phases de matériaux distincts, par exemple, un mélange du métal et de céramique. Souvent, l'information précise de la forme et de la distribution des particules constituants des FGM ne peut pas être disponible. Ainsi, les propriétés effectives du matériau FGM, à savoir : (module d'élasticité, module de cisaillement, densité, etc...) sont évaluées seulement sur la base de la distribution de la fraction volumique des constituants et leur forme approximative. Plusieurs

modèles de micromécanique ont été développés au cours des années pour déduire les propriétés effectives des matériaux composites macroscopiquement homogènes. Les approches analytiques, la méthode des éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisés pour la modélisation des matériaux FGM.

Les sujets les plus importants qui traitent la modélisation des structures en FGM sont: la déformation élastique, les contraintes élastiques, les déformations plastiques, le fluage dû à des températures élevées, la propagation des fissures, etc. Les différentes approches analytiques de modélisation des FGM disponibles dans la littérature sont présentées comme suit :

II.2.1. Estimation auto-cohérente « Self consistent estimates »

Cette méthode décrit ses estimations par la solution d'un problème élastique dans laquelle une inclusion ellipsoïdale est noyée dans une matrice possédant les propriétés effectives de matériau composite. Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que chaque inclusion de renforcement est noyée dans un matériau dont les propriétés effectives sont ceux du matériau composite homogénéisé recherché [Hill.(1965) ; Hashin.(1968) ; Bhaskar et al.(2001)].

Cette méthode ne fait pas de distinction entre la matrice et les phases de renforcement et les mêmes modules globaux sont prédits dans un autre composite dans laquelle les rôles des phases sont échangés. Ceci le rend particulièrement adapté pour la détermination des modules effectifs dans ces régions qui ont une microstructure du squelette interconnecté comme le montre la Figure II.2. Il s'agit d'une méthode d'analyse rigoureuse applicable à des matériaux composites à deux phases isotrope.



Figure II.2 : Matériau à deux phases avec microstructure du squelette [Hill.(1965)].

II.2.2. Modèle de Mori-Tanaka

Cette méthode fonctionne bien pour les composites avec des régions de la microstructure graduée avec une matrice continue clairement défini et une phase particulaire discontinue. Cette méthode suppose une petite particule sphérique noyée dans une matrice.

La phase de matrice, est supposé être renforcée par des particules sphériques d'une phase particulaire.

K_1 , G_1 et V_1 représente le module de compressibilité, le module de cisaillement et de la fraction volumique de la phase de matrice, respectivement, tandis que K_2 , G_2 et V_2 désignent le correspondant des propriétés du matériau et de la fraction volumique de la phase du renfort. On remarque que $V_1 + V_2 = 1$. La masse volumique effective peut être donnée par la loi des mélanges ($\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$) [Reiter et al.(1997) ; Jin.(2002)].

II.2.3. Modèles sphères composites

Le modèle sphère composite a été introduite par Hashin [Hashin.1962]. Dans ce modèle, les propriétés effectives des matériaux composites isotropes ont été déterminées de façon analytique. Ce modèle est constitué par une gradation de taille de particule sphérique noyée dans une matrice continuée (figure II. 3) tels que les sphères remplissent complètement le volume du composite.

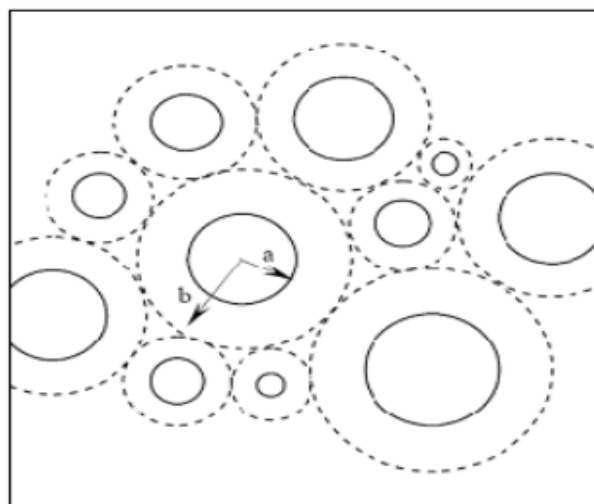


Figure II.3 : Modèle sphères composite[Hashin.1962].

II.2.4. Modèle d'assemblage de cylindres

Le modèle d'assemblage de cylindres est un modèle qui permet une détermination analytique des modules élastiques des composites, raisonnablement précise et exacte. Ce modèle est utilisé pour les composites orthotropes et nécessite à la fois que la fibre de renfort et la matrice soient isotropes, tandis que les éléments de volume représentatifs « VER » (élément qui représente le volume) est transversalement isotrope dans des plans matériels qui sont perpendiculaires à la direction des fibres [Hashin et al.1964].

II.2.5. Modèle micromécanique

Ces modèles pour les éléments de volume représentatifs « VER » peuvent être construits par des simulations en MEF pour les matériaux composites isotropes ou orthotropes. Les méthodes qui utilisent la méthode des éléments finis tentent de simuler avec précision la microstructure réaliste du « VER », et déterminer la réponse thermomécanique due aux charges appliquées de telle sorte que les propriétés des matériaux effectives peuvent être calculées pour différentes fractions de volume de renfort. De cette manière, les différents ensembles de données peuvent être collectées pour différentes combinaisons de matériaux. C'est peut être la méthode la plus précise, puisque la microstructure à l'examen est directement modélisé par des éléments finis en trois dimensions. Malheureusement, un inconvénient de cette méthode est que plusieurs modèles doivent être construits afin de déterminer les propriétés des matériaux pour différentes fractions de volume de la matière constitutive; même si cela peut être atténué avec un logiciel approprié qui permet d'automatiser le processus [Reiter et al.1997].

II.3. Des études ont rapporté sur des plaques en matériaux à gradient de propriétés

II.3.1. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Jin [Jin.2002] a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidies à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa [Ootao.2004] où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al [Sladek et al .2003] en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrit et un cylindre avec une température constante appliquée sur la sa surface.

Vel et Batra [Vel et al.2003] ont également présenté les solutions analytiques du problème de conduction thermique transitoire en 3D pour une plaque en FGM simplement appuyée, basé sur la théorie linéaire découplée, quasi-statique thermo-élasticité. Les températures uniformes sont prescrites sur les bords et soit la température en fonction du temps ou de flux de chaleur est considéré sur le dessus et les surfaces inférieures de la plaque en FGM. Les contraintes transitoires induites par la chaleur dans des plaques en FGM ont été liés au mode d'application de la charge thermique dans cette étude.

Qian et al. [Qian et al .2004] ont étudié les déformations thermo-élastiques transitoires d'une plaque en FGM épaisse. Les contraintes et les déformations dues à l'application simultanée des contraintes thermiques et mécaniques transitoires ont été calculées en maintenant les bords de la plaque à température uniforme. Les solutions sont obtenues par la méthode locale maillage de Petrov-Galerkin (MLPG). Ils ont constaté que les centres de gravité de la flèche et de la contrainte axiale induite au centre de gravité de la surface supérieure de la plaque sont nettement influencés par les conditions aux limites appliquées au niveau des bords de la plaque.

II.3.2. Analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement

Sankar et Tzeng [Sankar et al.2002] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Sankar [Sankar.2001] a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces

surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli). Les résultats montrent que la théorie classique de poutre donne des résultats acceptables si la est poutre élancée.

Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par théorie classique de poutre. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produisent sur la surface de chargement sont plus élevées dans une poutre en FGM par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée par la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur [Ching et al 2006]. Le problème thermo-élastique pour une poutre en FGM avec la variation exponentielle des propriétés matérielles dans l'épaisseur et soumise à une distribution non-uniforme de chaleur par convection a été examinée par Chin et Yen [Ching et al 2006] en utilisant un maillage locale par la méthode de Petrov-Galerkin.

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par Reddy [Reddy.2000] en utilisant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement. Reddy et Cheng [Reddy et al.2001] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par Vel et Batra [Vel et al.2002] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de matériau. Les approches d'homogénéisations utilisées dans l'article ont inclus le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent. La plaque a été modélisée par les théories de premier ordre et troisième ordre de déformation de cisaillement.

La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par Kashtalyan [Kashtalyan.2004] qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

Chi et Chang [Chi et al.(2006a) ; Chi et al.(2006b)] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

Zenkour [Zenkour.(2005a) ; Zenkour.(2005b)] a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwich en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version « sinusoïdale » de la théorie de déformation de cisaillement. Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par Woo et Meguid [Woo et al.2001].

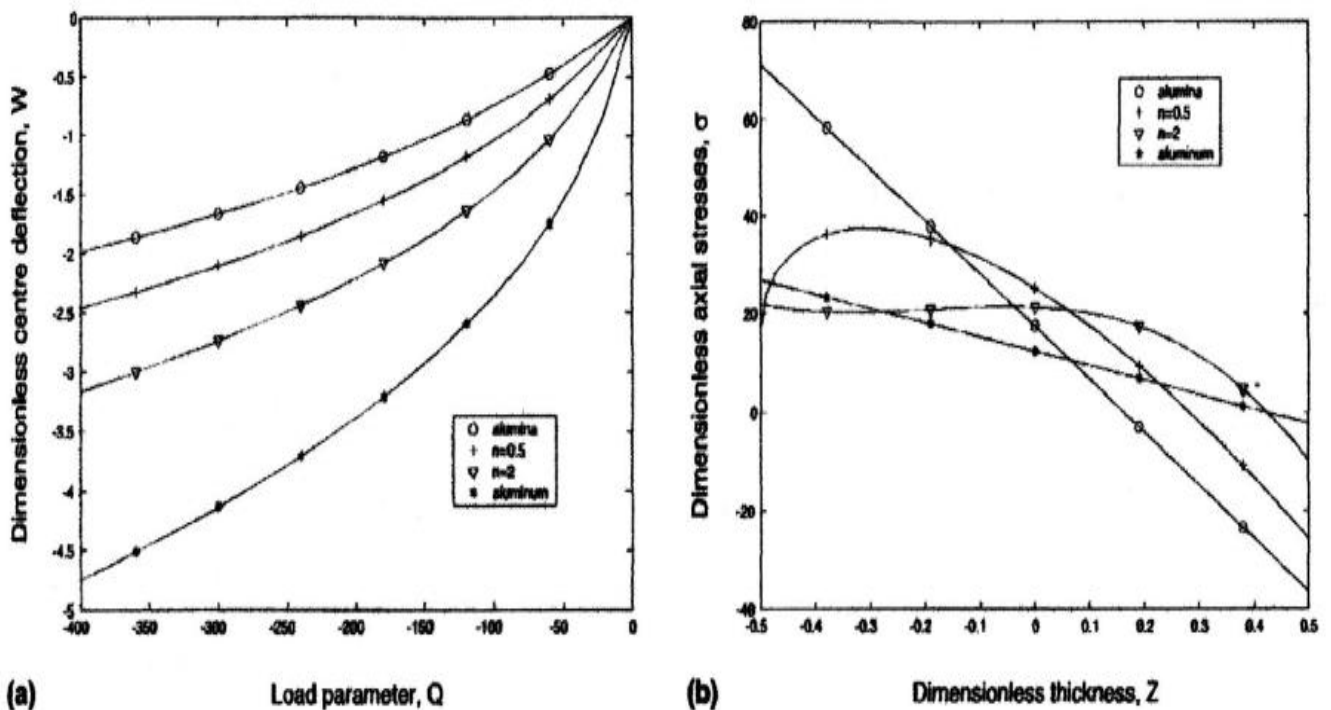


Figure II.4 : Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transversal [Woo et al.2001].

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique et en métal, et en FGM est montrée sur la Figure II.4. On remarque que la flèche dans une plaque FGM, pour une faible valeur de paramètre de matériau ($n = 2$) est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique est une fonction linéaire dans l'épaisseur, elle devient non linéaire dans le cas d'une plaque en FGM, ce qui reflète une distribution non uniforme des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Cette observation reflète le potentiel souligné précédemment pour une meilleure adaptation des structures FGM par rapport à leurs homologues en composites traditionnelles ou homogènes.

Tarn [Tarn.2001] a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique. La solution exacte a été obtenue pour le cas où les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant le cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre. L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par Javaheri et Eslami [Javaheri et al.(2002a) ; Javaheri et al.(2002b) ; Javaheri et al.(2002c)]. Na et Kim [Kim et al .2014] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par Yang et al. [Yang et al.2005] qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes. L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par Shen et al [Yang et al.2003]. Un exemple de cette analyse est illustré sur la Figure II.5, où les conditions aux limites sont indiquées pour avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique.

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par Matsunaga [Matsunaga .2009] pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. Zhao et al. [Zhao et al.2009] ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, Fuchiyama et Noda [Fuchiyama et al.1995] ont étudié le flambement d'une plaque FGM ($ZrO_2/ Ti-6Al-4V$) sous un chargement thermique.

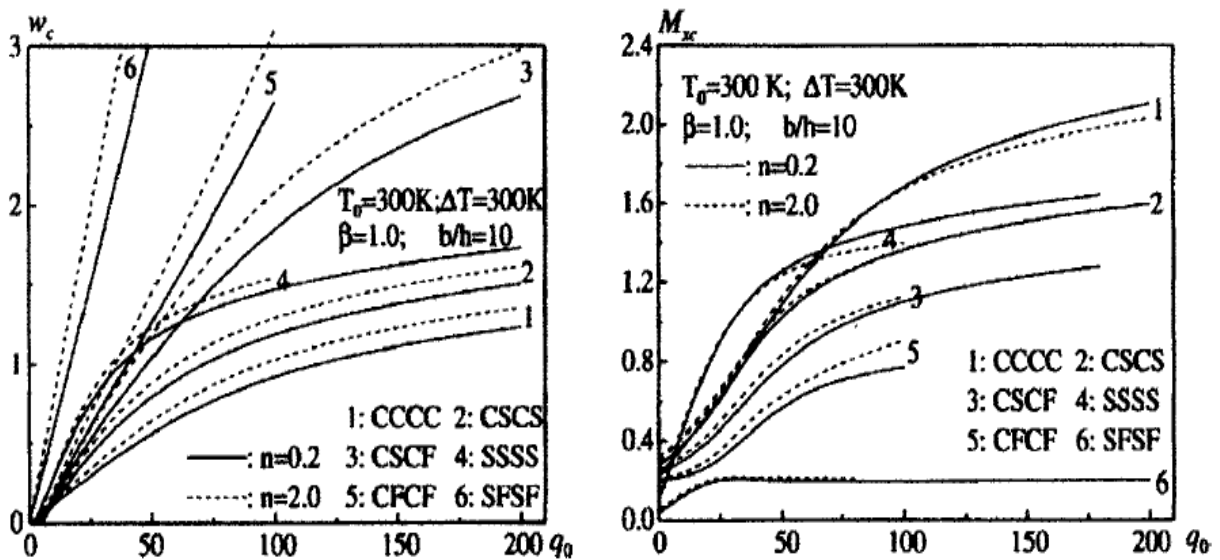


Figure II. 5: Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique [Yang et al.2003].

Zenkour et Sobhy [Zenkour et al.2010] ont utilisée la version sinusoïdale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwichs en FGM.

Une étude publiée par Park et Kim [Park et al.2005] contient une analyse par éléments finis du de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique.

Un exemple d'une réponse de l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque simplement appuyée en FGM est illustré dans la figure II.6

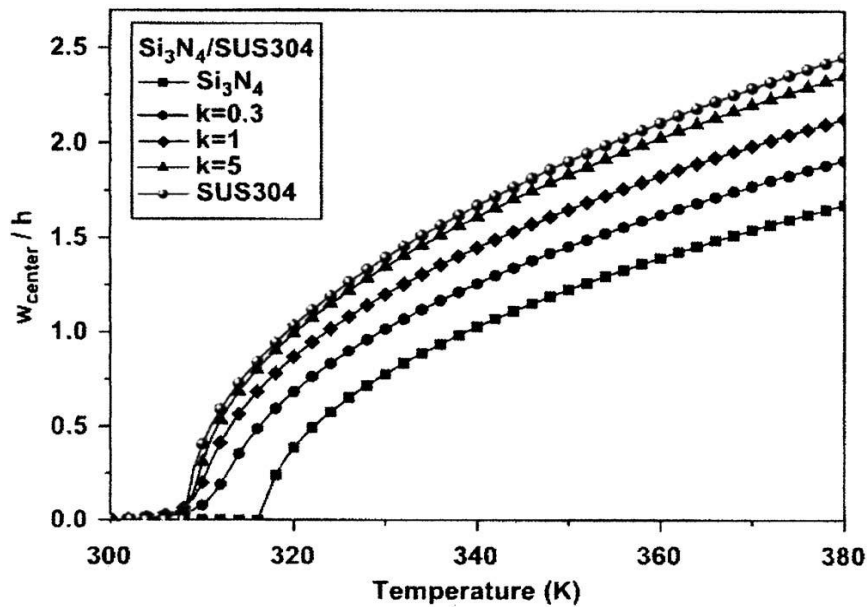


Figure II.6 : Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ($Si_3N_4/SUS304$) [Park et al.2005].

Hashemi et al. [Hashemi et al.2010] ont employé une méthode analytique pour analyser les problèmes de vibration des plaques annulaire épaisses en FGM avec des couches piézoélectriques intégrés. La plaque avec différentes conditions aux limites sur les bords est modélisée sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy « TSDT ». La variation des propriétés des matériaux de la plaque suit une distribution de loi de puissance. La distribution de potentiel électrique le long de la direction de l'épaisseur de la couche piézoélectrique est supposée être une fonction sinusoïdale.

Récemment, les mêmes auteurs [Hashemi et al.2012] ont développé une solution exacte de la vibration libre des plaques épaisses piézoélectriques couplés circulaires / annulaires pour les différentes conditions aux limites en utilisant la théorie de premier ordre de « FSDT » de Mindlin. Les effets de couplage entre les déplacements dans le plan transversal et sur les paramètres de fréquence sont avérés être significatifs dans cette étude. Il est conclu dans ce travail, que le modèle développé peut décrire le comportement vibratoire de plaques FGM avec couche piézoélectrique de manière plus réaliste.

Shahrjerdi et al. [Shahrjerdi et al.2011] ont étudié la vibration libre des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées à l'aide de la théorie de la déformation de cisaillement du second ordre (SSDT). L'analyse de vibrations libres des plaques FGM et composites est réalisée par Xiang et al. [Xiang et al.2011] à l'aide d'un modèle de déplacement constitué par

le n-polynôme d'ordre zéro satisfaisant des conditions aux limites de contrainte de cisaillement transversal nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque en FGM.

Jha et al. [Jha et al.2012] ont récemment publié une étude sur l'évaluation des fréquences naturelles des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées sur la base d'un cisaillement d'ordre supérieur avec la prise en compte de la déformation normale (HOSNT). Les propriétés du matériau telles que la densité de la matière, et le module de Young d'élasticité de la plaque FGM sont supposés suivre le modèle de loi de puissance à travers l'épaisseur. Les solutions sont obtenues en utilisant la technique de la solution de Navier avec un excellent accord des solutions d'élasticité 3D disponibles dans la littérature. Shen et Wang [Shen et al.1995] ont présenté les petites et grandes vibrations d'amplitude d'une plaque rectangulaire en FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans des environnements thermiques envisagent deux types de modèles micromécaniques des FGM.

Khorrabadi et al. [Khorrabadi et al.2008] ont étudié la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FOST et de troisième ordre TSDT pour comprendre l'effet de l'application de ces deux théories de déformation de cisaillement sur la vibration des plaques non homogènes.

Récemment, de nouvelles théories des plaques prend en compte seulement quatre fonctions inconnues et peut tenir compte des déformations de cisaillement, sont développés par Tounsi et al [Mechab et al.(2010) ; Houari et al.(2011) ;Mechab et al.(2010) ; El Meiche et al.(2011) ; Benachour et al.(2011) ; Hadji et al.(2011) ; Tounsi et al.(2013)]. Ces théories qui ressemblent à la théorie d'ordre élevé utilisent seulement quatre fonctions inconnues afin de réduire les équations d'équilibres pour les plaques à gradient de propriétés à quatre équations.

La caractéristique la plus intéressante de ces théories c'est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et en satisfaisant une distribution parabolique des déformations de cisaillement transversales, et satisfait les conditions aux limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Cependant, dans ces théories des plaques de quatre variables et d'autres théories de déformation de cisaillement, généralement les plaques FGM ont été analysées en négligeant l'étirement d'épaisseur ε_z , le déplacement transversal considéré comme indépendant de coordonnées de l'épaisseur. L'effet de la déformation normale dans les plaques FGM a été récemment étudié par Carrera [Carrera et al.2011], en utilisant une approximation par éléments finis.

II.3.3. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM

L'étude sur l'analyse des contraintes résiduelles pour les matériaux à gradients de propriétés, dites FGM est l'un des sujets les plus importants en génie et sciences des matériaux grâce à leurs utilisations dans les plus importants secteurs d'industrie (réacteurs nucléaires, réacteurs de fusion, navettes spatiales et le génie civil), la différence des propriétés thermiques des plis successifs et la fabrication des pièces à haute température de traitement vers la température ambiante fait naître des contraintes résiduelles à leurs interfaces.

Les contraintes résiduelles peuvent se produire lorsque deux matériaux ayant un coefficient de dilatation thermique différent sont liés ensemble en un composite à deux phases. Les contraintes résiduelles importantes dans une structure FGM peuvent potentiellement diminuer la capacité d'un FGM pour survivre à une charge d'impact ultérieure en service sur une plateforme d'aérospatiale.

Comme dans de nombreux problèmes d'assemblage et de composites, l'effet des contraintes résiduelles, résultant soit de traitement ou par des variations de température de service, prend un rôle important. La détermination de l'état thermique optimal de contrainte doit intégrer les propriétés thermiques et mécaniques des constituants ainsi que leur variation.

L'optimisation de ces contraintes est un objectif critique de la conception et une force motrice dans la recherche FGM. En effet, plusieurs études ont porté sur le plan théorique et expérimental [Delfosse.1992] l'évaluation de ces contraintes dans FGM. L'effet de la forme de composition sur les contraintes thermiques résiduelles a été étudié pour les deux cas élastique et élastique- plastique [Rabin. 1998; Giannakopoulos. 1995; Grujicic. 1998 ; Becker. 2000].

Abualnour et al [Abualnour. 2015] ont déterminé les contraintes résiduelles dues aux sollicitations mécaniques et thermiques des structures en matériaux à gradient de propriétés, en vue d'optimiser leur valeur en fonction des propriétés du matériau suivant la fonction de loi de puissance (P-FGM). Dans cette étude tous les problèmes ont été traités en élasticité linéaire sur un disque FGM et pour une température de traitement de 1373 K. Les calculs ont été effectués par considération de ces deux paramètres du matériau (E , α) indépendant de la température ainsi que dépendante de la température. Ils ont conclu que la distribution et l'importance des contraintes résiduelles dans un disque FGM peuvent être adaptées en maîtrisant le gradient de la composition appelé le paramètre du matériau (p) et en choisissant une combinaison appropriée à la géométrie dans le cas de la présence des régions

monolithiques. Une gradation linéaire des constituants donne un affaiblissement accentué des contraintes résiduelles après un traitement à haute température.

Carpinteri et al [Carpinteri. 2006] ont analysé le champ de contrainte et de la propagation de fracture due à la charge thermique dans les matériaux composites multicouches et / ou à gradient de propriétés. Les effets de taille et de forme connexes sont également étudiés. Le champ de contrainte de cisaillement à l'interface, ainsi que les contraintes normales dans les couches ont été calculées. Le phénomène de délaminage entre les couches a été prédit par une analyse mécanique de la rupture. Les influences des paramètres géométriques, décrivant la forme et la taille ont également été discutés.

Le comportement des poutres et des plaques FGM en un cycle thermique a été étudié par Giannakopoulos et al [Giannakopoulos. 1995]. Les éléments de structure sont essentiellement trois couches composites similaires à ceux présentés par Williamson et al. Les FGM, ont été construits avec des constituants en Al₂O₃-Ni. La couche supérieure des poutres et des plaques a été construit avec du nickel et la couche inférieure était Al₂O₃ en céramique d'épaisseur égale. Une région graduée en FGM, composée d'un mélange d'Al₂O₃-Ni, est prise en sandwich entre les couches de céramique et de métal. Il a utilisé la règle de mélanges classiques pour déterminer le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique dans la couche graduée. La règle de mélanges modifiée a été utilisée pour estimer la contrainte d'écoulement et le module tangent plastique. Des cycles de température ont été imposés qui ont induit une déformation plastique dans les membres. Les chercheurs ont mis au point des équations analytiques pour prédire les distributions de contraintes et l'apparition de la plasticité des membres en fonction de la hauteur de la poutre et l'épaisseur de la plaque.

Les modèles d'éléments finis ont été développés dans ABAQUS pour prédire la déformation plastique accumulée sous forme de cycles thermiques ont progressé au fil du temps. Le travail a présenté un cadre pour l'analyse des problèmes de cette nature [Larson. 2008]. Becker et al. [Becker. 2000] ont développé une méthode pour estimer l'influence des gradients élastiques sur l'état des contraintes résiduelles d'un FGM. Des solutions analytiques de la contrainte thermique ainsi que des calculs par éléments finis sont utilisés pour une variété de problèmes avec un module variable. Un système de matériaux de modèle, Mo-SiO₂ et Ni-Al₂O₃, ont été utilisés pour des exemples numériques. La méthode approximative a été jugée très précise pour un certain nombre de problèmes importants. L'utilisation de cette méthodologie permet l'application de solutions de la contrainte thermique pour les matériaux homogènes et FGM.

Les contraintes résiduelles dans les Al₂O₃-Ni en FGM qui se produisent lors de la fabrication à haute température ont été examinées par Ravichandran [Ravichandran. 1995] en 1995. L'objectif de cette étude était de déterminer les effets des contraintes résiduelles et les lignes directrices proposées pour des conditions optimales de traitement. Le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique ont été considérés comme dépendants de la température, bien que les contraintes résiduelles sont révélées ne pas modifier sensiblement à partir des analyses réalisées avec des propriétés de température indépendante. Les propriétés nettes du matériau dans les régions échelonnées ont été déterminées en fonction des fonctions des rapports des constituants de la fraction volumique. Ces fonctions ont été spécifiquement développées pour cette étude et ne sont pas associées à certains des modèles les plus couramment utilisés.

Jamaludin et al [Jamaludin. 2013] ont analysé la contrainte thermique résiduelle pour la conception de la plaque à gradient de propriété en hydroxyapatite-titane comme une solution aux interfaces pointues. La méthode des éléments finis (FEM) a été mise en oeuvre pour l'étude paramétrique pour voir la corrélation entre certains paramètres et la performance de la structure FGM. Les valeurs de contrainte thermique résiduelles calculées ont été vérifiées par la comparaison avec les résultats établis précédemment. Ils ont conclu que la méthode des éléments finis est prouvée applicable pour la conception et l'évaluation de la contrainte thermique résiduelle élastique d'une structure FGM.

II.3.4. Les études sur l'analyse thermoélastique des structures FGM:

Comme l'utilisation des FGM augmente, de nouvelles méthodologies doivent être développées pour caractériser les FGM, et aussi pour analyser et concevoir des composants structurels en ces matériaux. Il y a eu quelques études traitant l'analyse thermo élastique dans les composants structurels des FGM. Noda [Noda. 1991] a présenté une revue approfondie qui couvre une large gamme de sujets, de thermo élastique aux problèmes de thermo élastique.

Il a discuté de l'importance des propriétés dépendant de la température sur les contraintes et a suggéré que les propriétés de la matière doivent être prises en compte afin d'effectuer une analyse plus précise. En outre, Tanigawa [Tanigawa. 1995] a compilé une revue complète sur l'analyse thermo élastique des FGM.

Une enquête approfondie sur la littérature indique que dans la dernière décennie, les chercheurs se sont concentrés sur l'analyse thermo élastique du cylindre FGM avec une

longueur infinie. Lorsque le rapport de la longueur par rapport au rayon du cylindre diminue, l'effet de conditions aux limites devient important. Dans ce cas, la répartition des déplacements et des contraintes le long de la direction longitudinale du cylindre est non uniforme et doit être considérée.

La réponse thermo élastique de structures FGM soumis à des charges thermiques et mécanique ont été étudié par des théories simplifiées avec des approches différentes. D'autre part, certaines tentatives ont été faites pour analyser la réponse thermo élastique dans des structures FGM en trois dimensions. L'intégration de la protection thermique (céramique) et de la structure portante mécanique (métal) en une seule construction est la caractéristique souhaitable des FGM. Un système en FGM candidat pour une application donnée doit démontrer sa capacité à résister à une charge thermique et mécanique simultanée. Les FGM étudiés dans ce travail ont été soumis à des environnements à température ambiante afin de simplifier la portée du projet, cependant, un candidat FGM pour une utilisation dans diverses applications doit être étudié avec des effets thermiques. La raison en est que les propriétés du matériau et de la géométrie inhérente de l'élément structurel peuvent changer avec les changements de température. Les changements importants et configurationnelles peuvent affecter la capacité d'une FGM pour résister à des charges d'impact à partir d'objets étrangers.

En outre, la réponse quasi-statique de tout élément de structure sous charge sur une plateforme de l'aérospatiale doit être envisagée avant l'effet dynamique de vol de chargement sont adressées. Les développements les plus anciens et les plus largement utilisés de comportement thermo élastique de plaques rectangulaires à gradient de propriétés qui comprenaient des effets non linéaires ont été examinés par Praveen et al [Praveen. 1998]. Ils ont essentiellement adapté la théorie des plaques de composites stratifiés et adaptés aux paramètres rigidité du matériau (à savoir le $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$, $[D_{ij}]$ matrices et d'autres paramètres de matériau) de sommations sur des couches discrètes à des intégrales de la fonction continue définir la variation de matériau à travers l'épaisseur de la plaque et la coque [Larson. 2008]. Alibeigloo [Alibeigloo. 2011a; Alibeigloo. 2011b] a fourni une solution thermo élastique pour les déformations d'une coque et un panneau cylindrique en FGM simplement appuyée et lié à des couches piézoélectriques.

Darabseh et al [Darabseh. 2013] ont étudié l'analyse thermo élastique du cylindre creux à paroi épaisse en matériau à gradient de propriétés en deux dimensions par la méthode des éléments finis. Le cylindre en FGM avec une longueur finie est simplement appuyé et soumis à une sollicitation thermique et mécanique [Hosseini Kordkheili. 2007].

Arefi et al. [Arefi. 2016] ont étudié l'analyse thermo élastique bidimensionnelle d'un cylindre à gradient de propriétés à parois épaisses sous des charges thermiques et mécaniques et sur la base d'une fondation Pasternak. La théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre est utilisée pour décrire le champ de déplacement. L'effet de la gradation des propriétés des matériaux et les paramètres de fondation Pasternak sont considérés comme des résultats importants de cette étude.

Hosseini Kordkheili et al [Hosseini Kordkheili. 2007] ont obtenu une formulation des éléments finis pour l'analyse thermo élastique géométriquement non linéaire des plaques et des coques FGM dans lequel les propriétés du matériau sont supposées variées de manière continue à travers l'épaisseur selon une distribution en loi de puissance de la fraction volumique. Pour déterminer la distribution de température non linéaire dans la direction de l'épaisseur de la coque FGM, la méthode d'analyse de Rayleigh-Ritz est utilisée pour la résolution de l'équation différentielle de direction non linéaire. En ce qui concerne les plaques FGM, les résultats sont comparés à la solution analytique pour une déformation modérément grande des plaques FGM. Il a été démontré que les déplacements sont en bon accord pour une gamme modérée de déplacement. En outre, dans le cas des coques FGM les résultats ont été comparés avec les résultats ABAQUS pour le même problème de coque en matériaux de base en raison du manque de résultats pour des coques FGM sous des grandes déformations.

Les petites déformations élastiques des plaques FGM épaisses simplement appuyées ont été étudiées par Vel et al [Vel. 2002]. Les champs de déplacement et de température ont été générés en imposant des contraintes thermiques et mécaniques sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque, soit simultanément, soit individuellement. Les champs de déplacement et de température de trois dimensions ont été supposés avoir la forme d'une solution de puissance de la série qui résout les équations constitutives pour un matériau isotrope thermoélastique linéaire et satisfaire les conditions aux limites. L'hypothèse clé est que les propriétés des matériaux d'une plaque graduée à travers l'épaisseur varient légèrement. Les solutions de la série de puissance au problème FGM ont ensuite été comparées à des solutions générées par la théorie de la plaque classique, ainsi que les théories de premier ordre et de troisième ordre de la plaque de déformation de cisaillement [Larson. 2008].

Zhou et al [Zhou. 2011] ont étudié la réponse thermoélastique transitoire de plaques rectangulaires à gradient de propriétés. Ils ont développé une simulation numérique pour une température transitoire et des contraintes thermiques transitoires d'une plaque rectangulaire à

gradient de propriétés avec des conditions aux limites. Il a été constaté que, pour le cas de choc thermique, la température, les déplacements et les contraintes changent rapidement à l'état transitoire, et la non-homogénéité des propriétés des matériaux à une influence significative sur l'ampleur et la répartition de ces quantités. Ainsi, la conception optimisée des structures FGM peut être réalisée par le choix de la forme de distribution des fractions de volume des constituants du matériau.

II.3.5. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM

Les FGM ont de nombreux avantages par rapport aux composites traditionnels. Les propriétés du matériau varient de façon continue d'une surface à une autre, en particulier à partir d'un métal à la céramique. De ce changement continu dans la composition, les FGM peuvent résister à des environnements à haute température tout en maintenant leur intégrité structurelle.

Dans les applications pratiques des éléments de structure tels que des poutres, des plaques et des coquilles sont souvent soumises à une élévation de température uniforme. Lorsque les déplacements sont limités, des contraintes de compression peuvent exposer le système à des conditions instables potentielles. Le flambement des éléments structuraux minces représente en effet un mode de défaillance dangereux et doit être évalué de manière adéquate dans la phase de conception.

Plusieurs auteurs ont étudié le comportement des structures FGM soumises à des charges thermiques et mécaniques, et des travaux complets sur le flambement des plaques rectangulaires et circulaires en FGM sont également rapportés dans la littérature. Shen [Shen. 2002] a réalisé en 2002 l'une des premières études sur les problèmes de flambement des structures FGM. Shen a été préoccupé par l'analyse du post-flambement des panneaux FGM cylindriques chargés axialement qui en outre soutenu à des environnements thermiques. Les panneaux ont été gradués à travers l'épaisseur et une approche classique de règle de mélanges a été utilisée pour modéliser les propriétés du matériau dépendant de la température. Shen a utilisé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur de la coque pour décrire l'équation régissant sous un chargement thermo-mécanique. Shen vérifie ses équations développées par rapport aux résultats publiés pour les panneaux cylindriques isotropes, puis fournit des données de flambement pour différents systèmes de FGM [Larson. 2008].

Shariat et al [Shariat. 2006] ont étudiés l'analyse de flambement mécanique et thermique des plaques rectangulaires à gradient de propriétés sur la base de la théorie de la déformation de

cisaillement du troisième ordre (TSDT). Ils ont supposés que les propriétés mécaniques varient linéairement inhomogènes à travers l'épaisseur de la plaque.

La plaque est supposée être de trois types de sollicitations mécaniques, à savoir la compression uniaxiale, de compression biaxiale, et la compression biaxiale et de tension; et deux types de charges thermiques, à savoir la montée en température uniforme et non linéaire du gradient de température à travers l'épaisseur. Ils ont conclu que la théorie classique de la plaque surestime les charges critiques de flambement, en particulier pour les plaques épaisses. Pour les plaques épaisses à gradient de propriétés, la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre fournit plus des valeurs précises de la charge de flambement.

Abolghasemi et al [Abolghasemi. 2014] ont analysés le flambement des plaques à gradient de propriétés avec une découpe elliptique sous des charges thermiques et mécaniques combinés en utilisant la méthode des éléments finis. Contrairement à d'autres études dans lesquelles les plaques sont exposées à des contraintes thermiques ou mécaniques, dans cette étude, ils ont supposés que les charges mécaniques et thermiques sont appliquées simultanément. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans l'épaisseur de la plaque selon la répartition de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants.

Les formulations sont basées sur la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) et les éléments de matrices de rigidité sont dérivés à partir du principe de l'énergie potentielle minimale. Ils ont conclu que la température critique de flambement thermique des plaques rectangulaires est plus grande que les plaques carrées.

Aghelinejad et al [Aghelinejad. 2011] ont étudié la flexion non linéaire et axisymétrique de flambement thermique des plaques annulaires minces à gradient de propriétés selon la théorie classique de la plaque non linéaire de Von-Karman. Les conditions aux limites sont considérées encastrees-encastrees. Les propriétés matérielles de la plaque FGM sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque en fonction de la loi de puissance simple. Les effets de l'indice de puissance et les charges mécaniques et thermiques sur la flexion non linéaire, la température critique de flambement et post-flambement de la plaque à gradient de propriétés sont discutés en détail dans ce travail. Ils ont conclu que la constante du matériau (n) a un effet significatif sur la flexion et le flambement de la plaque FGM et avec l'augmentation de l'indice des FGM, que la plaque atteint entièrement en céramique, la charge de température critique augmente grandement. Une plaque entièrement métallique ($n = 0$) avec la plus faible raideur présente une flèche maximale la plus élevée pour une sollicitation thermique et mécanique spécifiée.

Kyung-Su et al [Kyung-Su. 2006] ont analysé en trois dimensions le flambement thermomécanique des structures à gradient de propriétés composées de matériau céramique, à gradient de propriétés (FGM), et des couches métalliques. Les propriétés des matériaux sont supposées être dépendantes de la température, et dans la couche FGM, sont variés en continu dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions de volume de céramique et de métal. Le modèle d'éléments finis est adopté à l'aide d'un élément solide de 18 noeuds afin d'analyser de façon plus précise la variation des propriétés des matériaux et du champ de température dans la direction de l'épaisseur. Ils ont conclu que le gradient de température critique décroît rapidement lorsque a/h augmente, mais il augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur. En outre, l'effet du rapport d'épaisseur est diminuée lorsque a/h est important [Larson. 2008].

Yang et al. [Yang. 2006] ont présenté une autre analyse post-flambage où la sensibilité à l'imperfection de d'ordre supérieur de déformation de cisaillement des plaques FGM a été envisagée. Le chargement mécanique sous la forme de compression uniforme et la charge thermique sous la forme d'un changement de température uniforme ont été appliquées à la plaque FGM. Diverses gradations, conditions aux limites, et configurations de plaques ont été étudiées paramétriquement avec des imperfections locales et globales appliquées à la plaque.

Une observation importante dans l'article est que la force post-flambage n'a pas été significativement affectée par les imperfections globales à la plaque, mais les imperfections locales à proximité du centre de la plaque pourraient réduire de manière significative la résistance post-flambage.

Le comportement de flambement et post-flambement de poutres minces soumis à des charges axiales mécaniques reposant sur les fondations élastiques ont été étudiés par Timoshenko et al [Timoshenko. 1961], Den Hartog [Den Hartog. 1952], Hetenyi [Hetenyi. 1966]. Vaz et al [Vaz. 2016] ont proposé une solution analytique pour la réponse initiale thermomécanique du post-flambement d'une poutre épaisse reposant sur une fondation élastique linéaire et soumis à une élévation de température uniforme sur toute sa section transversale. La contrainte thermique est supposée suivre une loi linéaire avec l'augmentation de la température et les propriétés des matériaux sont considérés comme indépendantes de la température.

En outre, le modèle est approprié pour décrire le comportement des poutres courtes car il prend en compte les déformations de cisaillement transversales. Les résultats indiquent que la charge de compression diminue de manière plus significative pour des valeurs élevées de

coefficient de cisaillement, en particulier pour des valeurs plus élevées de la raideur de la fondation. Les résultats montrent également que la température de déformation est plus élevée pour les modes de flambement supérieur, mais les déflexions sont plus petites.

Woo et al [Woo. 2003] ont étudié le comportement de post-flambement des plaques et coques cylindriques en matériaux à gradient de propriétés sous des charges de compression de pointe et un champ de température. Les propriétés du matériau des coques à gradient de propriétés sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur de la coque selon une distribution en loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations fondamentales pour les coques minces rectangulaires FGM sont obtenues en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déflexion transversale, et la solution est obtenue en termes de séries de Fourier. Les résultats révèlent que les effets de couplage thermomécanique et les conditions aux limites jouent un rôle majeur dans la réponse des plaques et des coques FGM sous l'action des charges de compression de pointe.

II.3.6. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM

Plusieurs modèles théoriques ont été proposés afin de mieux comprendre le comportement statique et dynamique des structures FGM. Quand il y a une fissure ou un défaut dans un FGM, de nombreux chercheurs ont étudié la dépendance de facteurs d'intensité de contrainte avec les variations de gradient pour diverses charges statiques et dynamiques [Ozturk. 1996 ; Li. 2007]. Par contre, en l'absence de fissures, le comportement mécanique des structures FGM ont été largement étudiés. Par rapport aux plaques et coques à gradient de propriétés des études liées à des poutres FGM sont très peu nombreux. Par exemple, une solution d'élasticité exacte pour une poutre FGM simplement appuyée a été donnée par Sankar [Sankar. 2001], qui a traité un cas particulier où le module de Young obéit à une variation de gradient de propriétés de type exponentielle dans le sens de l'épaisseur et le coefficient de Poisson reste constant. Au lieu du type exponentiel du module d'Young, Zhu et al [Zhu. 2004] traitent un problème similaire avec le module de Young ayant une variation polynomiale dans la direction de l'épaisseur.

Xian et al [Xian. 2010] ont étendu la théorie d'ordre supérieur pour les poutres à gradient de propriétés dont les propriétés des matériaux varient de façon continue. Une équation principale unique pour une fonction auxiliaire F pour les poutres à gradient de propriétés avec la déformation de cisaillement prise en compte, est dérivée à partir des équations de base de l'élasticité. Il peut être utilisé pour faire face aux vibrations forcées et libres ainsi que les

comportements statiques des poutres à gradient de propriétés. Une solution générale est construite, et toutes les grandeurs physiques, y compris flèche transversale, la déformation longitudinale, le moment de flexion, la force de cisaillement et des contraintes internes peuvent être représentés en termes des dérivés de F . Les résultats numériques ont été calculés et représentés graphiquement pour une poutre en porte à faux à gradient de propriétés avec la variation de l'indice de puissance soumise à une pression uniforme.

Le champ de déplacement basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est mis en oeuvre par Ravikiran et al. [Ravikiran. 2008] pour étudier le comportement statique des poutres à gradient de propriétés dans une température ambiante.

Les résultats numériques sur la flèche transversale, axiale et les contraintes de cisaillement dans une poutre FGM modérément épaisse sous une charge uniformément répartie pour des conditions aux limites encastree-encastree et simplement appuyée sont discutés dans ce travail. Les études révèlent que, selon que le chargement est sur la surface de la poutre riche en métal ou riche en céramique, la flèche et les contraintes dans la poutre ne restent pas les mêmes. Il a été aussi observé que les déviations d'une condition limite donnée sont plus pour une poutre riche en métal par rapport à une poutre riche en céramique, et la flèche augmente que l'indice de loi de puissance augmente.

L'analyse des plaques et des coques cylindriques FGM simplement appuyée à la vibration a été étudiée en première fois en 1999 par Loy et al. [Loy. 1999]. Les coques FGM cylindriques sont d'un intérêt particulier dans les technologies des navires et dans la tuyauterie. Les auteurs supposent une variation de loi de puissance en fraction volumique des constituants de l'intérieur vers extérieure de la surface de la coque et les propriétés des matériaux variés à travers l'épaisseur de la coque en fonction de la loi classique des mélanges. Une fois que les relations constitutives ont été formulées, les auteurs ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre les fréquences naturelles de la structure de la coque. Les auteurs ont comparé les résultats pour les différentes distributions de fraction de volume d'un système FGM en métal-céramique et ont constaté que les fréquences naturelles pour une coque en FGM s'allonge entre les fréquences naturelles calculées pour une coque en métal pure ou purement en céramique. Une étude qualitative a également été réalisée lorsque la géométrie de la coque a été autorisée à varier [Larson. 2008].

Qian et al. [Qian. 2004] ont analysé la déformation statique, la vibration libre et forcée des plaques rectangulaires épaisses en matériaux à gradient de propriétés en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieure. Toutes les composantes du tenseur des

contraintes sont calculées à partir des équations de la théorie de la plaque. La plaque est composée de deux constituants isotropes, est supposé être macroscopiquement isotrope ayant des propriétés matérielles différentes dans la direction d'épaisseur seulement. Les modules matériels effectifs sont calculés en utilisant la technique d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Aucun facteur de correction de cisaillement n'est employé. Ils ont conclu que les fréquences naturelles calculées de la plaque FGM correspondent très bien avec leurs valeurs analytiques. Tant pour les charges statiques et dynamiques, la flèche au centre de la plaque FGM se trouve être entre ceux pour une plaque en céramique pure et en métallique pur. Les gradients dans les propriétés du matériau ne touchent pas de manière significative la fréquence naturelle fondamentale d'une plaque FGM carrée simplement appuyée.

La réponse dynamique des plaques FGM rectangulaires a été initialement étudiée par Yang et al [Yang. 2001] en 2001. Une plaque rectangulaire, graduée à travers l'épaisseur avec une distribution en loi de puissance et les propriétés des matériaux régis par la loi classique de mélanges, était supposée être encastré sur tous les côtés ou sur les deux côtés encastré et simplement appuyée sur les deux autres côtés. La plaque a été laissée à reposer sur une fondation élastique et être soumise initialement dans le plan à des contraintes uni axiales ou biaxiales, bien que les deux ou aucune de ces caractéristiques doivent être incluses. Yang et al [Yang. 2001] ont développé une théorie très générale de la plaque où la réponse de la plaque pourrait être déterminée semi-analytiquement sous une charge générale et des conditions aux limites [Larson. 2008].

Une solution approchée pour l'analyse statique de trois dimensions, anisotropes, des plaques élastiques composées de matériaux à gradient de propriétés a été étudiée par Ramirez et al. [Ramirez. 2006]. La solution est obtenue en utilisant une théorie de la couche discrète en combinaison avec la méthode de Ritz, dans lequel la plaque est divisée en un nombre quelconque de couches homogènes et / ou du FGM. Deux types de matériau à gradient de propriétés ont été considérés: une variation exponentielle des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur de la plaque, et des propriétés mécaniques en fonction de l'orientation des fibres qui varie de façon quadratique à travers l'épaisseur du stratifié. La présente approche ne dépend pas d'une fonction spécifique de transition, et toute fonction continue représentative de la variation des propriétés du matériau dans le sens de l'épaisseur peut être incorporée dans le modèle. Afin de démontrer l'applicabilité de cette solution, différentes conditions aux limites et des configurations matérielles différentes sont présentées. La présente méthode peut être appliquée à des plaques de FGM en divisant le stratifié en couches homogènes discrètes

ayant des propriétés mécaniques obtenues comme valeurs moyennes pour la couche correspondante. La précision des résultats dépend du nombre de couches utilisées dans l'analyse et la finesse de la gradation matériau.

II.4. Théories de couche unique équivalentes (théories ESL)

Les théories ESL sont celles dans lesquelles une plaque de stratifié hétérogène est traitée comme une monocouche statiquement équivalente ayant un comportement constitutif complexe, réduisant le problème continuum 3D à un problème 2D. Dans ces théories les déplacements ou les contraintes et les composants sont développés comme une combinaison linéaire de la coordonnée d'épaisseur et fonctions non déterminées des positions dans la surface de référence. Dans le cas des théories basées sur les contraintes les équations gouvernantes sont dérivées soit en utilisant des principes de travail virtuel ou intégrer les équations d'équilibre de contraintes 3D à travers l'épaisseur du stratifié donnant une théorie de plaque monocouche équivalente.

Dans les théories basées sur les expansions de déplacement, le principe des déplacements virtuels est utilisé pour dériver des équations d'équilibre. Cette étude particulière se limite à l'élaboration de modèles d'ordre supérieur basés sur le déplacement pour les plaques composites laminées et les plaques fonctionnelles.

II.4.1 Théorie de la plaque stratifiée classique (CLPT)

La théorie du stratifié ESL la plus simple est la théorie de la plaque stratifiée classique (CLPT), qui est une extension de la théorie de la plaque classique de Kirchhoff aux plaques composites stratifiées. Cette théorie est basée sur les hypothèses selon lesquelles le stratifié est mince et les déflexions du stratifié sont faibles. On suppose également que la normale à la surface médiane du stratifié reste droite, inextensible et normale pendant la déformation. Les champs de déplacement utilisés pour cette formulation sont:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1a})$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1b})$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad (\text{II.1c})$$

Où u_0 , v_0 , w_0 sont les déplacements le long des directions de coordonnées (x, y, z) respectivement sur un point sur le plan médian ($z = 0$).

Différents CLPT présentés par [Lekhnitskii.(1957) ; Jones.(1999)] etc. est trouvé pour donner des résultats satisfaisants pour l'analyse globale des composants laminés minces. Le CLPT, lorsqu'il est appliqué sur des plaques isotropes ou orthotropes, sous-prédiction des déformations latérales et des contraintes, et des contraintes de flambage surprédites, l'erreur étant plus importante dans le cas des plaques orthotropes que dans les plaques isotropes. En raison de cette inadéquation inhérente de la CLPT en ne tenant pas compte de la déformation transversale du cisaillement dans la formulation, des efforts ont été faits pour développer des théories affinées qui permettraient de surmonter ces limitations.

II.4.2 Théories de déformation de cisaillement

Il est bien connu que le CLPT est inadéquat dans la modélisation des stratifiés épais car la déformation transversale du cisaillement n'est pas prise en compte dans la formulation. Etant donné que les matériaux composites stratifiés sont souvent très flexibles en cisaillement, les déformations transversales de cisaillement doivent être prises en compte pour une représentation précise du comportement de la plaque stratifiée doit être atteint. La théorie la plus largement utilisée est la déformation de cisaillement du premier ordre théorie qui est basée sur le champ de déplacement:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\omega_x(x,y,t) \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - z\omega_y(x,y,t) \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad (\text{II.2c})$$

où u_0, v_0, w_0 sont les déplacements suivant les directions x, y, z respectivement ω_x et ω_y désignent des rotations autour des axes y et x respectivement.

Les études sur les plaques épaisses ont été initiées au milieu des années 1940 et au début des années 1950 par [Reissner.1944] qui a proposé la théorie de la plaque épaisse la plus simple en introduisant l'effet de la déformation transverse par un principe énergétique complémentaire.

[Mindlin.1951] a présenté une théorie de la déformation au cisaillement du premier ordre dans laquelle la déformation par cisaillement est prise en compte conjointement avec les

facteurs de correction du cisaillement. Dans cette théorie, l'hypothèse de non-linéarité de CLPT est modifiée de manière à ce que la normale au plan médian non déformé reste droite et non-allongée mais pas nécessairement non-normale au plan médian déformé. Cette hypothèse implique un cisaillement transversal non nul déformation, mais elle conduit également à la violation statique de la contrainte de cisaillement nulle des surfaces libres puisque la contrainte de cisaillement devient constante à travers l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, un facteur de correction a été proposé. Cette théorie a été utilisée par Whitney et [Pagano.1970] pour étudier la vibration et la flexion des plaques anisotropes et par [Liew et al.1993] pour analyser une plaque épaisse avec un maximum de 20 pourcent de rapport épaisseur / largeur. Ces théories ont été étendues aux stratifiés par [Yang et al.(1966) ; Reissner.(1979) ; Wang et al.(1997)].

[Barker et al.1971] ont présenté un modèle EF basé sur le FSDT pour les stratifiés symétriques et asymétriques. [Hinton et al.(1975) ; Reddy.(1981)] ont également développé des modèles FE basés sur le FSDT pour le composite stratifié plaques. Le FSDT donne une valeur constante de déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque et nécessite donc des facteurs de correction de cisaillement. Les facteurs de correction de cisaillement sont des grandeurs sans dimension introduites pour tenir compte de l'écart entre l'état constant des contraintes de cisaillement dans le FSDT et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement dans la théorie de l'élasticité. Le facteur de correction de cisaillement dépend de divers facteurs tels que les propriétés du stratifié, la couche de couche, l'orientation des fibres et les conditions aux limites. [Whitney.(1973) ; Chatterjee et al.(1979)] ont présenté une étude sur les facteurs de correction de cisaillement et ont conclu que les facteurs de correction de cisaillement sont différents pour les plaques et les stratifiés isotropes.

Pour réaliser une analyse fiable et une conception sûre, la proposition et les développements de modèles utilisant des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont été considérés. Ici, la distribution d'épaisseur traversant des fonctions de déplacement est supposée être des polynômes d'ordre supérieur de coordonnées d'épaisseur. En principe, il est possible d'étendre le champ de déplacement en termes de coordonnées d'épaisseur jusqu'à un degré quelconque. Cependant, en raison de la complexité algébrique et de l'effort de calcul impliqué avec les théories d'ordre supérieur en échange d'un gain marginal de précision, les théories supérieures au troisième ordre n'ont pas été populaires. La raison de l'expansion des déplacements jusqu'au terme cubique dans la coordonnée d'épaisseur

est d'avoir une variation quadratique de la contrainte de cisaillement transversale et de la contrainte à travers chaque couche. Cela évite d'utiliser les facteurs de correction de cisaillement FSDT.

[Hildebrand et al.1949] ont été les pionniers d'une telle approche. [Lo et al. 1977a] ont passé en revue le travail de pionnier sur le terrain et ont formulé une théorie qui tient compte des effets de la détonation transverse par cisaillement, de la déformation transversale et de la distribution non linéaire des déplacements dans le plan par rapport à la coordonnée d'épaisseur. Les théories de troisième ordre ont été proposées par [Librescu.(1975) ; Schmidt et al.(1977) ; Krishnamurty et al.(1977) ; Levinson.(1980) ; Seide.(1980) ; Murthy et al.(1981) ; Kant et al.(1988) ; Phan et al.(1985)]. D'excellentes revues des théories raffinées des plaques composites stratifiées ont été présentées par [Reddy et al.(1990) ; Noor et al.1990], Des articles de revue tels que [Kant et al.2002 ; Vel et al.(2002) ; Mittelstedt et al.(2004)] ont couvert une grande partie de la recherche précédente sur les théories des plaques laminées au cours des dernières décennies. A partir de ces enquêtes, principalement liées à l'analyse statique, on peut trouver le besoin et le grand intérêt pour le développement d'outils numériques performants pour étudier le flambement et la dynamique des structures composites multicouches stratifiées. Très peu de publications de recherche traitent du flambement des structures de plaques-coques multicouches en utilisant un déplacement d'ordre supérieur [Reddy et al.(1985) ; Reddy et al.(1985)] ont utilisé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour analyser les plaques anisotropes laminées pour les détections, les contraintes, la charge de flambage et les fréquences naturelles. Ils ont utilisé un champ de déplacement, qui représente la distribution parabolique de la couche Wise de la contrainte de cisaillement transverse, mais en imposant la condition que ces contraintes disparaissent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

D'autres études utilisant le même champ de déplacement sont dues à [Reddy et al.(1989) ; Khdeir et al.(1989)] des solutions de forme fermée sont dérivées et comparées aux théories CLPT et HSDT pour les stratifiés composites rectangulaires asymétriques pour flambage et vibration libre sous plusieurs limites conditions. Des modèles discrets d'ordre supérieur d'éléments finis ont été développés et discutés pour la vibration et / ou le flambage par [Senthilnathan et al.1988 ; Kant et al.(1988) ; Putcha et al.(1986) ; Kozma et al.(1986) ; Kant et al.(1993)] .

Ghosh et Dey [Ghosh et al.1994] ont mis au point un élément rectangulaire à quatre nœuds pour l'analyse du flambement des plaques multicouches. Ce modèle suppose une distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement et la non-linéarité des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. La matrice de rigidité géométrique est développée en utilisant des contraintes dans le plan. [Kof.2007] ont mis au point une formulation par éléments finis avec des variables mixtes pour l'analyse des contraintes de composites. [Noor et al.1994] donnent des aperçus complets du flambement et de la vibration des structures plaques-coques composites, [Goyal et al.(2008) ; Palazotto et al.(1992)] . Rose et autres [Rose.1999] développé un modèle discret d'ordre supérieur pour étudier le flambement et le comportement dynamique des composites stratifiés. Un ordre de Zeroth Shear DefoTInation Theory a été dérivé par [Shimpi.1999], qui prédit des résultats précis pour les plaques isotropes épaisses et minces. L'approche ZSDT n'utilise que des entités physiquement significatives, soit la déviation latérale et les forces de cisaillement dès la formulation. La plupart des théories de plaque d'ordre supérieur imposent des conditions aux limites sans traction sur les faces de la plaque.

Leung et al. [Leung et al.2003] ont développé une théorie du troisième ordre non contraint pour l'analyse des contraintes de plaques stratifiées symétriquement.

Toutes les théories d'ordre supérieur disponibles dans la littérature sont des théories de troisième ordre. Cependant, Matsunaga [Sugita et al.2000] a proposé une théorie du neuvième ordre dans laquelle les champs de déplacement dans le plan consistent en un polynôme de neuvième ordre dans la coordonnée d'épaisseur globale z où la déflexion transversale est représentée par le polynôme du huitième ordre du z global. Les résultats numériques ont montré que les déformations de cisaillement d'ordre supérieur ont sûrement un effet important sur les fréquences naturelles et les contraintes de flambement.

Wu et Chen [Wu et al.2005] ont développé des formulations d'éléments finis en utilisant la théorie globale-locale du troisième ordre pour prédire le comportement thermique et mécanique des plaques composites. Ces théories prédisent des composantes de contrainte de cisaillement sans méthodes de post-traitement. Plus tard,[Kolahchi et al.2016] ont proposé une théorie globale locale du cinquième ordre pour l'analyse de la réponse détaillée des plaques multicouches. Bien que la plupart des théories d'ordre supérieur commencent par le champ de déplacement, ou ses formes spéciales, les équations directrices diffèrent considérablement les unes des autres. Une source de différence est la méthode de dérivation. D'autres sources de différences comprennent le choix des variables, la prise en compte de

divers degrés de non-linéarité géométrique, l'inclusion de contraintes transversales non normales et la satisfaction de contraintes de cisaillement transversales spécifiées (nulles ou non) sur les surfaces des plaques.

II.4.3 Théories des couches sages

Contrairement aux théories ESL, les théories Wise de la couche sont développées en supposant que le champ de déplacement ne présente que la Co-continuité à travers l'épaisseur du stratifié. Ainsi les composants de déplacement sont continus à travers l'épaisseur du stratifié mais les dérivées du déplacement par rapport à la coordonnée d'épaisseur peuvent être discontinues en différents points de l'épaisseur, permettant ainsi la possibilité de contraintes transversales continues aux interfaces. Dans les modèles par couches, la continuité des déplacements ainsi que les contraintes transversales sont satisfaites au niveau de l'interface.

Mau [Mau.1973] a utilisé le FSDT avec la définition de couche Wise des déplacements généralisés. En introduisant les contraintes de cisaillement de la couche intermédiaire en tant que multiplicateurs de Lagrange pour satisfaire la continuité des déplacements aux interfaces de couches, les équations directrices ont été obtenues en minimisant la fonction d'énergie potentielle modifiée. Sur la base de la solution d'élasticité pour un faisceau stratifié, [Ren et al.1989] a développé une théorie de la plaque avec la distribution de contrainte de cisaillement correspondante. Cette théorie a sept constantes et s'est avérée très précise. Murakami [Murakami.1986] a proposé d'ajouter une fonction de CO en zigzag à des composantes de déplacement dans le plan d'un déplacement global arbitraire pour obtenir une théorie de plaque laminée permettant de prendre en compte la variation du zigzag des composantes de déplacement dans le plan. théories. En combinant à la fois la fonction de forme en zigzag et les polynômes de Legendre pour approximer les champs de déplacement dans le plan, [Toledano et al.1987] ont développé une théorie de zig-zag d'ordre supérieur. Pour évaluer la performance de cette théorie, les problèmes de flexion cylindrique des plaques stratifiées ont été analysés. Carrera [Carrera.2004] a également discuté, à l'aide d'exemples numériques, de l'utilisation de la fonction zig-zag proposée par Murakami [Murakami.1986] dans les théories du déplacement global et une conclusion a été tirée que l'introduction de la fonction zig-zag est plus efficace que l'amélioration du numéro de commande dans les théories du déplacement global. De plus, Demasi [Demasi .2005] a proposé une plaque multicouche et a indiqué que cette approche est incapable de satisfaire a priori une continuité inter-laminaire pour des contraintes transversales. Par conséquent, cette approche ne peut pas calculer les contraintes

transversales directement à partir d'équations constitutives. Ces théories en zigzag discrètes de couche I nécessitent un grand nombre de degrés de liberté pour représenter les fonctions de déplacement d'épaisseur. Cela affecte de manière significative l'efficacité de calcul de la procédure d'analyse. L'imposition de certaines conditions de continuité à la couche les interfaces peuvent être utilisées pour réduire le nombre total de paramètres de déplacement inconnus. Di Sciuva [Di Sciuva.1986] a proposé un modèle linéaire en zig-zag qui peut garantir la continuité des contraintes transversales de cisaillement aux interfaces, mais incapable de satisfaire les conditions de contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure. Par la suite, un modèle en zigzag cubique a été développé par Di Sciuva [Di Sciuva (1992) ; Di Sciuva .(1995)]. Comparé au modèle linéaire en zigzag, le modèle en zigzag cubique peut améliorer la précision des contraintes transversales de cisaillement. Reddy [Reddy.1987] a proposé un modèle par couches en termes d'éléments finis lagrangiens unidimensionnels. Ce modèle est très général pour accommoder n'importe quel nombre de couches, distribution de couches et ordre d'interpolation. Savithri [Savithri .1991], Savithri et Varadan [Savithri (1990) ; Varadan (1992)] ont développé une théorie affinée pour l'analyse linéaire et non linéaire de plaques stratifiées épaisses. Cette théorie incorpore des variations non linéaires réalistes du plan en des déplacements à travers l'épaisseur et des changements brusques de pente aux interfaces et en même temps conserver le même nombre de constantes non observées que dans la théorie FSDT. Même si les modèles par couches satisfont la continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface, mais sont incapables de calculer exactement les contraintes transversales de cisaillement directement à partir des équations constitutives. Pour obtenir des contraintes transversales précises, la méthode de l'équation d'équilibre est généralement adoptée.

II.4.4 Théories de l'élasticité en trois dimensions

Divers chercheurs ont rapporté leurs contributions basées sur la solution d'élasticité 3D pour les plaques. L'objectif fondamental dans le développement de la solution d'élasticité est d'obtenir des résultats précis des quantités globales et locales. Ces solutions servent de solution de référence pour les théories approximatives.

Srinivas et af. [Srinivas.(1969) ; af.(1970)] ont mis au point une solution d'élasticité exacte pour l'analyse de la flexion et des vibrations libres de plaques rectangulaires épaisses homogènes, isotropes et simplement supportées. Plus tard, Srinivas et Rao [Srinivas. (1970) ; Rao .(1971)] ont présenté une analyse exacte des stratifiés épais. Wittrick [Wittrick.1987] a

présenté des solutions similaires. Hussainy et Srinivas [Hussainy.1975] ont présenté une solution exacte pour les stratifiés composites avec diverses orientations de fibres. Pagano [Pagano.(1969) ; Pagano .(1970a) ; Pagano.(1970b)], Pagano et Wang [Pagano.1971] et Pagano et Hatfield [Pagano.1972] ont développé une solution d'élasticité exacte pour une plaque stratifiée à plis croisés sous cintrage cylindrique et bidirectionnel. Noor [Noor.(1973) ; Noor.(1975)] utilisait un schéma de différence d'ordre supérieur l'équation de la théorie de l'élasticité 3D et un tel schéma de différences finies ont été montrés pour donner des résultats très précis pour les caractéristiques de réponse de la plaque. [Ren .1986b] a présenté la théorie exacte de la plaque cantilever anisotrope. [Kaprielian et al.1988] ont présenté une solution d'élasticité exacte pour une plaque stratifiée symétrique à trois couches. [Piskunov et al. 1990] ont fourni une solution généralisée 3D pour les plaques orthotropes avec un nombre quelconque de couches disposées asymétriquement et soumises à des tractions non-normales et tangentielles. Fan et Ye [Fan et al.(1990a) ; Fan et al.(1990b)] ont fourni des solutions d'élasticité pour la statique et la dynamique des plaques stratifiées épaisses. Noor et Burton [Fan et al.1990b], et Savoia et Reddy [Savoia et al.1992] présenté des solutions d'élasticité 3D pour des plaques rectangulaires à plis croisés et anti-symétriques. Wu et Wardenier [Wu et al.1998] ont révélé une solution d'élasticité exacte pour une plaque épaisse simplement supportée soumise à un chargement arbitraire.

II.4.5 Plaques fonctionnelles

Functionally Graded Materials (FGM) est une classe de composites qui a une variation progressive des propriétés matérielles d'une surface à l'autre. En général, tous les matériaux multiphasés, dans lesquels les propriétés matérielles varient progressivement d'une manière prédéterminée, entrent dans la catégorie des mutilations génitales féminines. Le concept de MGF a été proposé en 1984 par le spécialiste des matériaux dans la région de Sendai au Japon [Koizumi .1993]. Les modèles de plaque pour la MGF ont été étudiés avec des méthodes analytiques et numériques. Différentes approches ont été développées pour établir l'analyse appropriée des plaques FG. Le modèle basé sur la théorie classique des plaques de Kirchhoff a été appliqué par Chi et Chung [Chi et al.(2006a) ; Chi et al.(2006b)]. Ils ont développé la solution analytique pour les plaques FG simplement supportées soumises à des charges mécaniques. Une fonnulation par éléments finis basée sur CPT a été étudiée par [He et al. 2001] pour contrôler la forme et la vibration de la plaque FG avec capteurs et actionneurs électriques peizo intégrés. Dans le cadre de CPT, Javaheri et Eslami [Javaheriet al.2002] ont

présenté l'analyse de flambement des plaques FG sous compression dans le plan et Samsam et al. [Samsam et al. 2005] ont présenté une analyse du comportement au flambement des plaques FG rectangulaires avec des imperfections géométriques. En pratique, ces modèles ne sont pas utilisés pour les plaques épaisses qui ont une contribution importante de l'énergie de déformation de cisaillement. Afin de prendre en compte les effets du changement progressif des propriétés matérielles, les théories FSDT et HSDT ont été utilisées dans l'analyse. Cependant, étant donné que dans le FSDT, les déformations transversales de cisaillement sont supposées constantes dans le sens de l'épaisseur, les facteurs de correction doivent être incorporés pour ajuster la rigidité transversale de cisaillement pour étudier le statique des problèmes dynamiques de la plaque. Praveen et Reddy [Praveen et al.1998] ont examiné les réponses statiques et dynamiques non linéaires des plaques de FG en utilisant la FSDT et la souche de Von Karman. Croce et Venini [Croce et al.2004] ont formulé une famille hiérarchique de éléments selon la théorie de Reissner-Mindlin. Trung et al [Trung et al .2008] ont présenté un modèle FSDT pour les matériaux à gradient fonctionnel et les solutions numériques de l'analyse statique ont été comparées aux solutions disponibles. Basé sur FSDT Sahraee [Sahraee .2009] a présenté l'analyse en flexion des plaques de secteur circulaire épaisses FG. Il est supposé que les propriétés mécaniques non homogènes de la plaque, graduées à travers l'épaisseur, sont décrites par une fonction de puissance de la coordonnée d'épaisseur. Reddy [Reddy .2000] a présenté une théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre pour l'analyse statique et dynamique des plaques de FG. Cheng et Batra [Cheng et al.2000a] ont utilisé la théorie de Reddy pour étudier les vibrations de flambement et d'équilibre d'une plaque polygonale à gradation fonctionnelle simplement supportée. De plus, Cheng et Batra [Cheng et al.2000b] ont relaté les déflexions des plaques FG données par FSDT et les théories de la désaffranchissement au cisaillement du troisième ordre par rapport à celles d'une plaque de Kirchhoff homogène équivalente. La réponse statique de la plaque FG a été étudiée par Zenkour [Zenkour .(2004) ; Zenkour .(2006)] en utilisant une théorie généralisée de la déformation par cisaillement. Furtheilliere, Zenkour [Zenkour .(2005a) ; Zenkour .(2005b)] a présenté l'analyse des plaques sandwiches FG pour la déflexion, les contraintes, le flambement et la vibration libre en utilisant la théorie classique des plaques. Afin d'analyser les effets complets des déformations d'ordre supérieur sur les fréquences naturelles et les contraintes de flambage des plaques FG, Matsunaga [Matsunaga .2008] a présenté divers ordres des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur élargi.

Reddy et Chin [Reddy et al.1998] ont étudié la dynamique réponse thermoélastique de cylindres et de plaques fonctionnels.

Najafizadeh et Eslami [Najafizadeh et al.2002] ont présenté l'analyse de flambage d'une plaque circulaire solide chargée radialement en matériau gradué fonctionnellement.

Pour les plaques FG épaisses dont l'épaisseur n'est pas négligeable par rapport à la longueur latérale, des modèles 3D pour les problèmes statiques et dynamiques peuvent être utilisés. Cheng et Batra [Cheng et al.2000c] ont étudié les déformations thermo mécaniques 3D des plaques FG.

[Elishakoff et al.2005] ont utilisé la méthode de Ritz pour dériver les équations de régression pour les plaques FG enserrées. Une solution approximative développée par [Ramirez et al. 2006] pour l'analyse statique de 3D, des plaques anisotropes, élastiques composées de MGF sont obtenues en utilisant une approche de couche discrète. Une solution 3D a été présentée pour la vibration libre et forcée de plaques rectangulaires simplement supportées par Vel et Batra [Vel et al.2004]. La propriété matérielle effective en un point est estimée par [Mori - Tanaka .1973] ou par les schémas auto - consistants [Reiter et al. 1997].

II.4.6 Remarques de conclusion

Une revue complète est faite dans ce chapitre sur les différentes théories applicables aux plaques composites stratifiées. Bien que différentes théories d'ordre supérieur à couche unique équivalente aient été développées pour améliorer la distribution des contraintes, il reste qu'aucune des théories ne peut donner de bons contraintes inter laminaires. Avancement sur la mécanique des plaques fonctionnellement classés est également examiné.

Dans le cadre du processus de conception, il est nécessaire de prévoir avec précision les déplacements, les contraintes normales et transversales contribuer de manière significative aux critères de délaminage et de flambement pour établir les capacités de charge et de performance des structures multicouches. Les solutions d'élasticité 3D sont complexes d'un point de vue informatique et la revue insiste sur la nécessité de poursuivre le développement d'outils efficaces pour l'analyse de flexion et de flambement des «plaques composites stratifiées et des plaques fonctionnelles».

II.5. Conclusion

Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM ont été présentés dans ce chapitre. En raison du vaste champ qui se développe rapidement sur les FGM, ces conclusions ne peuvent pas englober toutes les directions et les tendances importantes. Néanmoins, ils reflètent certaines des observations des auteurs sur la base des recherches publiées et leur propre analyse.

1. Dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, il est souvent possible d'employer des techniques disponibles pour les composites traditionnels. Toutefois, dans le cas où le matériau a une gradation importante (changement rapide des propriétés d'une surface à l'autre), le modèle (VER) peut être utilisé, reflétant les variations des propriétés à l'échelle micromécanique. Peu importe l'approche d'homogénéisation adoptée, l'interaction entre les particules ne doit pas être négligée.

2. L'approche du problème de transfert de chaleur dans les FGM devrait tenir compte de l'effet de la température sur les propriétés du matériau qui à son tour affectera la solution du problème de conduction de la chaleur.

3. L'effet de chargement thermique important sur les contraintes, la stabilité au flambement et la vibration des structures en FGM devrait être étudiées en tenant compte les changements dans les propriétés du matériau dû à la température. Ces derniers changements sont particulièrement importants car les FGM sont des matériaux hétérogènes. Par conséquent, si l'une des phases de la matière constitutive est plus affectée par la température que l'autre phase, un certain degré de changement de propriété sera non uniforme dans tout le matériau, même si elle est soumise à une température uniforme.

4. Les solutions analytiques 3D pour les plaques en FGM sont très utiles car ils fournissent des résultats de référence pour évaluer la précision des divers théories de la plaque 2D et formulations éléments finis, mais leur méthodes de résolution impliquent des complexités mathématiques et sont très difficile et fastidieux à résoudre.

5. Dans la plupart des théories 2D développées pour prédire la réponses des plaques FGM, seule la déformation de cisaillement transversal effet a été pris en compte, et très peu de théories envisagent de prendre en compte l'effet à la fois de cisaillement transversal et la déformation normale (Thickness Stretching Effect).

6. Après avoir examiné une grande partie de la recherche sur les FGM disponible il est évident que la quasi-totalité de la recherche a été menée purement analytique ou de la simulation numérique.

7. Utilisation de l'amélioration des modèles théoriques 2D qui semblent fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D devraient être poursuivis dans l'intérêt du coût de calcul et des analyses efficaces.

En conclusion, les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

Cette partie présente aussi une revue de littérature sur les différents travaux qui ont été effectués sur l'analyse des structures FGM. La quasi-totalité des recherches menées purement analytique ou dans la simulation numérique considère que la structure FGM est parfaite. Par contre, dans la fabrication des FGM, des microporosités peuvent se produire dans les structures FGM au cours de leurs fabrications. Ce travail décrira plus en détail une méthode analytique basée sur une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement pour caractériser la réponse statique et dynamique des plaques FGM poreuses et sans porosités avec la prise en considération de l'effet des paramètres de fondations.

*CHAPITRE III : ETUDE ANALYTIQUE DES
PLAQUES FGM EN FLEXION SUR DES
APPUIS ELASTIQUES*

Chapitre III: Etude Analytique des Plaques FGM en Flexion sur des Appuis Elastiques

III.1.Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux problèmes pour lesquels la théorie des plaques peut être ramenée à une analyse à deux dimensions. Le problème concerne les plaques ayant un rapport longueur sur largeur proche de l'unité et un rapport longueur sur épaisseur inférieur à 10 pour que la déformation de la plaque puisse être considérée comme dépendante des coordonnées (x,y,z) de la plaque. Un tel comportement est appelé flexion avec la prise en compte de l'effet de l'étirement "Stretching effect".

L'objectif de cette recherche est de présenter une solution analytique linéaire des plaques très épaisses en matériau à gradient de propriétés (FGM-Sandwich) en flexion soumise à un chargement transversal et reposant sur des fondations élastiques de type "Winkler-Pasternak". Les propriétés matérielles sont supposées graduelles suivant la direction d'épaisseur selon une distribution simple en termes de fractions volumiques des constituants.

III.2. Définition d'une plaque :

Une plaque est un solide délimité par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Figure III.1). On définit :

le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;

le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, x, y) , d'équation $z = 0$;

une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

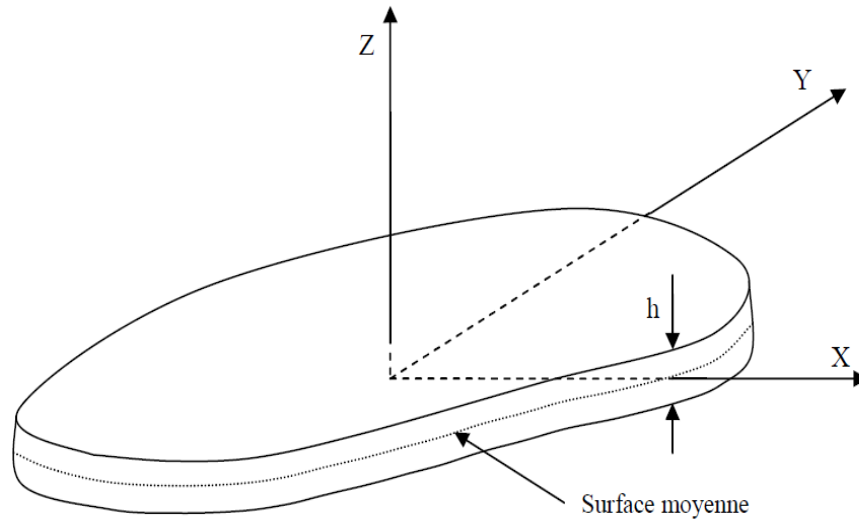


Figure III.1. Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire

III.3. Formulation théorique

III.3.1. Configuration géométrique

Une plaque sandwich FGM rectangulaire pleine avec une épaisseur uniforme avec une épaisseur h , une longueur a et une largeur b uniforme est considérée dans la présente étude (figure III.2). Le système de coordonnées (x, y, z) cartésien rectangulaire est pris de telle sorte que x, y le plan $(z=0)$ coïncide avec le plan médian de la plaque sandwich. Les faces supérieures et inférieures de la plaque sont à $z=\pm h/2$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y . La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, à savoir, «couche 1», «couche 2» et «couche 3» du bas vers le haut de la plaque. Les coordonnées verticales du bas, les deux interfaces, et le haut sont désignés par $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 , $h_3 = h/2$, respectivement.

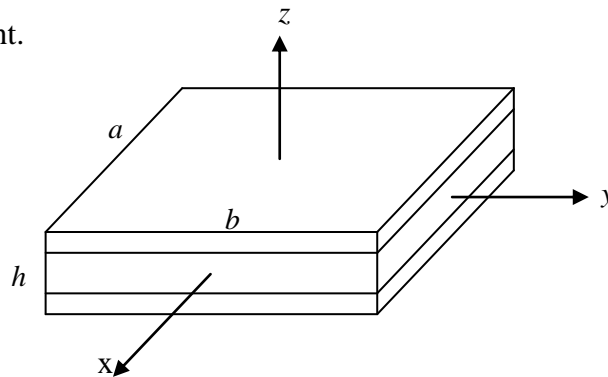


Figure III.2 : Géométrie d'une plaque sandwich FGM rectangulaire d'épaisseur uniforme dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

Afin d'étudier l'effet de la variation d'épaisseur des trois couches sur les déplacements et les contraintes, une notation simple est utilisée dans tous les exemples numériques considérés par exemple, une notation de 1-2-1 (c'est-à-dire l'épaisseur de la face inférieure du noyau et du dessus de la face) est utilisée pour représenter que les feuilles de face supérieure et inférieure ont la même épaisseur, tandis que l'épaisseur de l'âme est deux fois l'épaisseur du fond / du haut. D'autres cas, à savoir. 1-0-1, 1-1-1, 2-1-2, 3-1-3 et 2-2-1, sont également considérés comme réalisant les différents exemples numériques. Les couches de face de la plaque sandwich sont constituées d'un matériau isotrope avec des propriétés de matériaux variant sans à-coup dans z la seule direction. La couche centrale est faite d'un matériau homogène isotrope, comme le montre la Figure III.3.

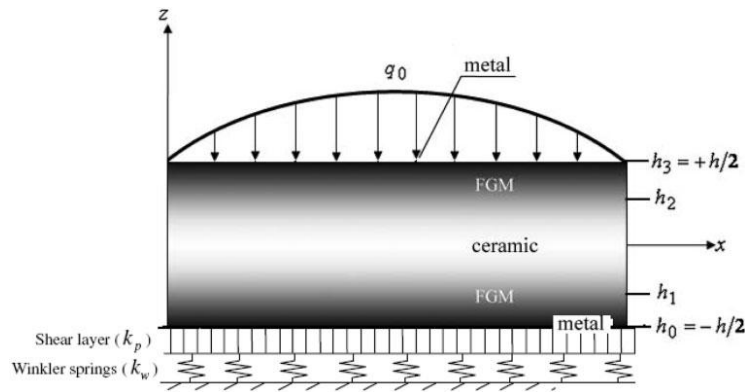


Figure III.3 : La variation du matériau le long de l'épaisseur de la plaque

III.3.2. Propriétés matérielles :

Une loi de puissance simple en termes de fraction volumique de la phase céramique est considérée:

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (\text{III.1a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{III.1b})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{III.1c})$$

Où $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$) représente la fonction de fraction volumique de la couche n ; p est l'indice de fraction volumique ($0 \leq p \leq +\infty$), qui contrôlent la répartition du matériau dans le sens de l'épaisseur.

Les propriétés matérielles efficaces, comme le module de Young E , et le coefficient de Poisson ν , peut être exprimé mathématiquement par la règle de mélange comme [Benachour et al.(2011); Hadji et al.(2011); Houari et al.(2013); Bellifa et al.(2017); Besseghier et al.2017]:

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (\text{III.2})$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de FGM de couche n . P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieures et inférieures de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$, ($n = 1,2,3$).

Pour simplifier, le coefficient de Poisson de la plaque est supposé constant dans cette étude, car l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup plus faible que celui du module de Young [Timoshenko.1959].

III.3.3. Équations constitutives:

Pour les FGMs, élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{III.3})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composants de contrainte respectivement.

En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation. (3), les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés en

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.4a})$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.4b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.4c})$$

Basé sur la théorie de la plaque épaisse et incluant l'effet de la déformation normale transversale (effet de l'étirement suivant l'épaisseur), les hypothèses de base pour le champ de déplacement de la plaque peuvent être décrites comme suit:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{III.5a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.5b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III.5c})$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie de la plaque, la théorie proposée dans cette étude utilise une fonction hyperbolique dans la forme suivante:

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{III.6})$$

On peut observer que la cinématique dans l'équation. (5) utilise seulement cinq inconnues (u_0 , v_0 , w_0 , θ et φ_z).

Les contraintes non nulles du présent modèle de plaque à cinq variables sont exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.7})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.8a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad (\text{III.8b})$$

et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{III.8c})$$

On peut observer à partir de l'équation (7) que les contraintes transversales de cisaillement (γ_{xz}, γ_{yz}) sont égaux à zéro à la surface supérieure ($z = h/2$) et inférieure ($z = -h/2$) de la plaque. Un coefficient de correction de cisaillement est, par conséquent, pas nécessaire.

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une procédure de Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.9})$$

où les coefficients A' et B' sont considérés selon le type de solution employée, dans ce cas par la méthode Navier. Par conséquent A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III.10})$$

où α et β sont définis dans l'équation (III. 21).

III.3.4. Equations gouvernantes :

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour le problème de flexion des plaques sandwichs en FGM.

Le principe du travail virtuel dans le cas présent [Vel et al.(2002) ;Al-Basyouni et al.(2015) ;Zemri et al.(2015) ; Ahouel et al.(2016) ; Saidi et al.(2016) ; Mouffoki et al.(2017) ; Zidi et al.(2017) ; Hachemi et al.(2017)] est donné par:

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} (q - f_e) dw d\Omega \quad (\text{III.11})$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Winkler-Pasternak

$$f_e = k_w w - k_s^1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{III.12})$$

Où k_w est le module de réaction de la fondation (coefficient élastique de la fondation) et k_s^1 et k_s^2 sont les modules de cisaillement de la fondation (rigidité de fondation de la couche de cisaillement). Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons $k_s^1 = k_s^2 = k_s$. Si la rigidité de la fondation de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient une fondation Winkler.

En substituant les équations (4) et (7) dans l'équation (12) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (12) peut être réécrite comme suit:

$$\int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] d\Omega - \int_{\Omega} (q - f_e) \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où Ω est la surface supérieure et les résultantes de contrainte N , M , et S sont exprimées par:

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, f) \sigma_i^{(n)} dz \quad (i = x, y, xy); \quad N_z = \int_{h_{n-1}}^{h_n} g'(z) \sigma_z^{(n)} dz \quad (\text{III.14a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{h_{n-1}}^{h_n} g(\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} dz \quad (\text{III.14b})$$

où h_n et h_{n-1} sont les coordonnées z supérieures et inférieures de la couche.

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées à partir de (III.11) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$, et $\delta \varphi_z$ à zéro, séparément.

Les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation de cisaillement sont obtenus comme suit:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e + q = 0 \\ \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0 \\ \delta \varphi_z : \quad & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z + g(z)q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

En introduisant l'équation (III. 4) dans l'équation (III.14), les résultantes des contraintes de la plaque sandwich composée de trois couches peuvent être liée à la totalité des couches par

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \\ \varepsilon_z^0 \end{pmatrix} \quad (III.16a)$$

$$\begin{pmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix} \quad (III.16b)$$

Où

$$\left(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \left(1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) dz \quad (III.17a)$$

$$\left(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij} \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, f(z), g'(z) \right) g'(z) C_{ij} dz \quad (III.17b)$$

III.4. Equations d'équilibre en terme des déplacements :

En substituant l'équation (III. 16) dans l'équation (III. 15), les équations d'équilibre peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0 , v_0 , w_0 , θ , and φ_z) comme

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 + X_{13}d_1\varphi_z - B_{11}d_{11}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{12}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}\theta + (B_{11}^sk_1 + B_{12}^sk_2)d_1\theta = 0, \quad (III.18a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 + X_{23}d_2\varphi_z - B_{22}d_{22}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{11}w_0 + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (B_{22}^sk_2 + B_{12}^sk_1)d_2\theta = 0, \quad (III.18b)$$

$$B_{11}d_{11}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{12}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{11}v_0 + B_{22}d_{22}v_0 + Y_{13}d_{11}\varphi_z + Y_{23}d_{22}\varphi_z - D_{11}d_{11}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{11}w_0 - D_{22}d_{22}w_0 + (D_{11}^sk_1 + D_{12}^sk_2)d_{11}\theta + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (D_{12}^sk_1 + D_{22}^sk_2)d_{22}\theta - f_e + q = 0 \quad (III.18c)$$

$$-(B_{11}^sk_1 + B_{12}^sk_2)d_1u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{12}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{11}v_0 - (B_{12}^sk_1 + B_{22}^sk_2)d_2v_0 - k_1Y_{13}^s\theta_z - k_2Y_{23}^s\theta_z + (D_{11}^sk_1 + D_{12}^sk_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}w_0 + (D_{12}^sk_1 + D_{22}^sk_2)d_{22}w_0 - H_{11}^sk_1^2\theta - H_{22}^sk_2^2\theta - 2H_{12}^sk_1k_2\theta - ((k_1A' + k_2B')^2H_{66}^s)d_{112}\theta + A_{44}^s(k_2B')^2d_{22}\theta + A_{55}^s(k_1A')^2d_{11}\theta + A_{44}^s(k_2B')d_{22}\varphi_z + A_{55}^s(k_1A')d_{11}\varphi_z = 0 \quad (III.18d)$$

$$X_{13}d_1u_0 + X_{23}d_2u_0 + Z_{33}\varphi_z + Y_{13}d_{11}w_0 + Y_{23}d_{22}w_0 + A_{44}^s(k_2B')d_{22}\theta + A_{55}^s(k_1A')d_{11}\theta + A_{44}^sd_{22}\varphi_z + A_{55}^sd_{11}\varphi_z = 0, \quad (III.18e)$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.19})$$

III.5. Solution analytique de la plaque sandwich FG simplement prise en charge :

Dans ce travail, nous nous intéressons aux solutions exactes de l'équation (III. 18) pour une plaque simplement supportée. En utilisant la procédure de la solution Navier, les expressions suivantes des déplacements (u_0 , v_0 , w_0 , θ , et φ_z) sont pris comme suit:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Z_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Où

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \quad (\text{III.21})$$

(U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} , Z_{mn}) sont les coefficients de déplacement maximum inconnus. La charge transversale $q(x, y)$ est également donnée par:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{III.22})$$

Les coefficients Q_{mn} sont donnés ci-dessous pour certaines charges typiques:

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (\text{III.23})$$

Pour une charge uniformément répartie ;

$$Q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2} & m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m, n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Pour une charge répartie sinusoïdale; $Q_{mn} = q_0$ dans lequel q_0 est l'intensité de la charge.

En substituant les équations (III. 21) et (III. 22) dans l'équation (III. 18), les solutions analytiques peuvent être déterminées par:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Z_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad a_{12} = -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), \quad a_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\ a_{14} &= \alpha(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\beta^2), \quad a_{15} = X_{13}\alpha \\ a_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad a_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\ a_{24} &= \beta(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\alpha^2) \\ a_{25} &= X_{23}\beta \\ a_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) - k_w - k_s^1\alpha^2 - k_s^2\beta^2 \\ a_{34} &= -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - k_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2), \\ a_{35} &= -(Y_{13}\alpha^2 + Y_{23}\beta^2) \\ a_{44} &= -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2B')^2 A_{44}^s \beta^2 \\ a_{45} &= -k_1A' A_{55}^s \alpha^2 - k_2B' A_{44}^s \beta^2 + k_1Y_{13}^s + k_2Y_{23}^s \\ a_{55} &= -(A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 + Z_{33}) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

III.6. Conclusion

Une théorie des plaques efficace, simple et raffinée, a été développée avec succès pour l'analyse de la flexion des plaques sandwiches en FGM. Les plaques sandwiches sont soumises à une charge transversale et l'effet de la déformation normale est introduit dans les équations des déplacements. Le concept des travaux virtuels avec la théorie actuelle est utilisé pour déterminer les équations d'équilibre et prédire les déplacements et les contraintes à travers l'épaisseur des plaques sandwiches en FGM. Il peut être conclu que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi efficace dans la prédiction de la réponse linéaire de flexion de la plaque sandwich en FGM par rapport à d'autres théories de cisaillement déformation qui incluent ou non la déformation normale dans leur analyse.

***CHAPITRE IV. RESULTATS DE
L'ANALYSE DU COMPORTEMENT
DE LA FLEXION DES PLAQUES EN
FGM***

**Chapitre IV : Résultats de l'analyse du comportement de la flexion
des plaques sandwichs en FGM reposants sur des fondations
élastiques type (Winkler-Pasternak)**

IV.1.Introduction

Dans ce chapitre, l'exactitude du modèle quasi-3D de plaque présenté pour l'analyse du comportement de la flexion de plaques sandwichs en matériau FGM simplement appuyées et reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak est vérifiée en comparant les résultats numériques trouvés avec les résultats existants des théories quasi-3D et 2D de la littérature. En outre, les influences de la déformation de cisaillement et de l'étirement suivant l'épaisseur sur la réponse mécanique de la flexion des plaques sandwichs FGM sont ainsi étudiées. Les plaques sandwichs en FGM sont réalisées par les combinaisons suivantes: (ZrO_2 / Al) et ($ZrO_2 / Ti - 6Al - 4V$). Les valeurs des propriétés matérielles pour le métal et la céramique utilisés dans la plaque sandwich en FGM sont données dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans les plaques sandwichs en FGM

[Akavci.2016] .

Propriétés	(Al / ZrO_2)		$(Ti - 6Al - 4V / ZrO_2)$	
	Zirconia	Aluminum	Zirconia	Titanium
E (GPa)	151	70	117	66.2
ν	0.3	0.3	1/3	1/3

IV.2. Analyse de flexion

Pour plus de commodité, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées dans l'analyse des résultats:

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right),$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10^2 D_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{1}{10^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{1}{10 q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad K_w = \frac{k_w a^4}{D_c}, \quad K_s = \frac{k_s a^2}{D_c}, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E_0 = 1 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Le premier exemple vise à vérifier la précision de la présente théorie en prédisant la réponse en flexion des plaques sandwich FGM. Le tableau IV.2 présente les déplacements transversaux \bar{w} des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ non dimensionnelles de la plaque sandwich FGM faite en matériau (ZrO_2 / Al) sous une charge sinusoidales pour différentes configuration de plaques sandwichs et différentes valeurs de paramètre du matériau k .

Les prédictions obtenues sont comparées à la solution 2D et Quasi-3D de [Neves et al.(2012c); Akavci.(2016)] et les solutions quasi-3D de Neves [Neves et al.2012a]. Il est à noter que les solutions quasi-3D de [Neves et al.(2012c); Akavci. (2016); Neves et al. (2012a)] sont dérivées d'une variation hyperbolique des déplacements dans le plan et dans le sens transversal.

Les résultats des solutions 2D du présent travail et les résultats de [Neves et al. (2012c); Akavci. (2016)] sont présentés pour montrer l'importance d'inclure l'effet d'étirement d'épaisseur dans l'analyse du comportement mécanique de la flexion des plaques sandwichs en FGM. On peut voir que les déplacements transversaux et les contraintes prédites par le présent modèle hyperbolique quasi-3D sont en excellent accord avec des solutions quasi-3D, en particulier avec celles rapportées par [Neves et al.2012a]. Puisque la théorie quasi-3D actuelle et d'autres théories quasi-3D incluent l'effet d'étirement de l'épaisseur, leurs solutions sont très proches les unes par rapport aux autres.

Cependant, les solutions 2D, qui omettent cet effet, donnent une prédiction moins exacte et surestiment légèrement la flèche. On peut également observer à partir du tableau IV.2 que les solutions quasi-3D, donnent un déplacement transversal inférieur et une contrainte axiale supérieure par rapport aux solutions 2D qui éliminent l'effet de l'étirement. On constate ainsi, l'augmentation de valeurs de paramètre du matériau p augmente les déplacements \bar{w} . La différence entre les théories de déformation de cisaillement est moins significative quand $\varepsilon_z = 0$ en particulier pour les plaques entièrement en céramique ($p = 0$).

Tableau IV.2: La flèche \bar{w} et contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour la plaque carrée (Al/ZrO_2) sandwichs en FGM sous une charge sinusoïdale $(a/h=10)$.

p	Théorie	ε_z	\bar{w}				$\bar{\sigma}_x$			
			2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Neves et al. (2012c)	= 0	0.19610	0.19610	0.19610	0.19610	1.99470	1.99470	1.99460	1.99460
	Neves et al. (2012c)	≠ 0	0.19490	0.19490	0.19490	0.19490	2.00660	2.00660	2.00650	2.00640
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524
	Akavci 2016	= 0	0.19605	0.19605	0.19605	0.19605	1.99516	1.99516	1.99516	1.99516
	Akavci 2016	≠ 0	0.19466	0.19466	0.19466	0.19466	2.0730	2.0730	2.0730	2.0730
	Présent modèle	= 0	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606	1.99332	1.99332	1.99332	1.99332
	Présent modèle	≠ 0	0.19487	0.19487	0.19487	0.19487	1.99525	1.99525	1.99525	1.99525
1	Neves et al. (2012c)	= 0	0.30900	0.29490	0.28380	0.27400	1.47420	1.40670	1.30260	1.30640
	Neves et al. (2012c)	≠ 0	0.30700	0.29290	0.28200	0.27220	1.48130	1.41370	1.30920	1.31330
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.30430	0.29007	0.27874	0.26915	1.46131	1.39243	1.28274	1.29030
	Akavci 2016	= 0	0.30627	0.29196	0.28083	0.27093	1.46322	1.39432	1.28879	1.29201
	Akavci 2016	≠ 0	0.30398	0.28977	0.27847	0.26891	1.52514	1.45397	1.34177	1.34783
	Présent modèle	= 0	0.30635	0.29202	0.28085	0.27093	1.46214	1.39324	1.28769	1.29091
	Présent modèle	≠ 0	0.30431	0.29007	0.27875	0.26915	1.46132	1.39244	1.28272	1.29030
2	Neves et al. (2012c)	= 0	0.35420	0.33510	0.31860	0.30530	1.69200	1.60170	1.44760	1.45880
	Neves et al. (2012c)	≠ 0	0.35190	0.33290	0.31640	0.30320	1.69940	1.60880	1.45430	1.46590
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.35001	0.33068	0.31356	0.30060	1.68472	1.59170	1.42887	1.44497
	Akavci 2016	= 0	0.35222	0.33282	0.31613	0.30261	1.68708	1.59420	1.43723	1.44736
	Akavci 2016	≠ 0	0.34957	0.33030	0.31319	0.30031	1.75757	1.66237	1.49644	1.51084
	Présent modèle	= 0	0.35237	0.33294	0.31620	0.30262	1.68601	1.59310	1.43607	1.44622
	Présent modèle	≠ 0	0.35001	0.33068	0.31356	0.30060	1.68473	1.59171	1.42886	1.44497
10	Neves et al. (2012c)	= 0	0.40510	0.38680	0.36370	0.35030	1.93160	1.84850	1.63270	1.67610
	Neves et al. (2012c)	≠ 0	0.40260	0.38430	0.36120	0.34800	1.93970	1.85590	1.63950	1.68320
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.40153	0.38303	0.35885	0.34591	1.93266	1.84705	1.61792	1.66754
	Akavci 2016	= 0	0.40390	0.38538	0.36204	0.34817	1.93451	1.84956	1.62871	1.67048
	Akavci 2016	≠ 0	0.40094	0.38248	0.35823	0.34549	2.01036	1.92481	1.69436	1.74262
	Présent modèle	= 0	0.40426	0.38566	0.36221	0.34830	1.93354	1.84857	1.62753	1.66937
	Présent modèle	≠ 0	0.40153	0.38303	0.35885	0.34591	1.93266	1.84707	1.61792	1.66755

Le tableau IV.3 présente les valeurs de la contrainte transversale de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ pour $p = 0, 1, 2$ et 10 et pour les différentes configurations de plaques sandwichs en FGM.

Les résultats obtenus sont comparés avec les deux différentes [Neves et al. 2012c] et les théories quasi-tridimensionnelles [Neves et al.(2012c) ; Neves et al (2012a)] .

Une faible différence entre les résultats et cela est dû aux différentes approches utilisées pour prédire la réponse de la plaque sandwich en FGM. Mais, en général, un bon accord entre les résultats est trouvé. La contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ augmente à mesure que le paramètre de matériau p augmente.

Tableau IV.3 Contraintes de cisaillement transversal non dimensionnel $\bar{\tau}_{xz}$ pour la plaque carrée (Al/ZrO_2) sandwich en FGM ($a/h=10$).

p	Théorie	ε_z	$\bar{\tau}_{xz}$			
			2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Neves et al. 2012c	= 0	0.2538	0.2459	0.2407	0.2358
	Neves et al. 2012c	≠ 0	0.2538	0.2461	0.2411	0.2363
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794
	Présent modèle	= 0	0.23217	0.23217	0.23217	0.23217
	Présent modèle	≠ 0	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794
1	Neves et al. 2012c	= 0	0.2744	0.2640	0.2590	0.2489
	Neves et al. 2012c	≠ 0	0.2745	0.2643	0.2594	0.2496
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.27050	0.26060	0.25890	0.25196
	Présent modèle	= 0	0.26535	0.25533	0.25337	0.24635
	Présent modèle	≠ 0	0.27050	0.26060	0.25890	0.25196
2	Neves et al. 2012c	= 0	0.2758	0.2664	0.2632	0.2515
	Neves et al. 2012c	≠ 0	0.2760	0.2668	0.2636	0.2523
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.28792	0.27138	0.26885	0.25776
	Présent modèle	= 0	0.28335	0.26661	0.26359	0.25241
	Présent modèle	≠ 0	0.28792	0.27138	0.26885	0.25776
10	Neves et al. 2012c	= 0	0.2669	0.2635	0.2690	0.2559
	Neves et al. 2012c	≠ 0	0.2671	0.2639	0.2692	0.2568
	Bessaim et al. 2013	≠ 0	0.33210	0.29534	0.29036	0.26850
	Présent modèle	= 0	0.32826	0.29167	0.28561	0.26392
	Présent modèle	≠ 0	0.33210	0.29534	0.29036	0.26850

Tableau IV.4 : La flèche non dimensionnelle \widehat{w} de la plaque rectangulaire en FGM sandwich $(T_i - 6Al - 4V / ZrO_2)$ reposant sur des fondations élastiques sous une charge répartie sinusoidalement ($a/h=10, b=2a$).

Configuration	p	Theory	ε_z	(K_w, K_s)			
				0,0	100,0	0,100	100,100
1-0-1	0	Taibi et al. (2015)	= 0	0,681308	0,405225	0,0836524	0,077194
		Akavci (2016)	≠ 0	0,677195	0,404967	0,0728693	0,067958
		Présent modèle	= 0	0,681329	0,405232	0,0724390	0,067546
		Présent modèle	≠ 0	0,678245	0,405328	0,072876	0,067960
	0.5	Taibi et al. (2015)	= 0	0,886739	0,469985	0,0861015	0,079275
		Akavci (2016)	≠ 0	0,881167	0,470028	0,0747292	0,0695684
		Présent modèle	= 0	0,886715	0,469978	0,0742679	0,0691335
		Présent modèle	≠ 0	0,882541	0,470413	0,0747383	0,0695762
	2	Taibi et al. (2015)	= 0	1,109938	0,526052	0,087816	0,080727
		Akavci (2016)	≠ 0	1,10267	0,526445	0,0760263	0,0706912
		Présent modèle	= 0	1,10979	0,526019	0,0755397	0,0702342
		Présent modèle	≠ 0	1,104593	0,526872	0,0760337	0,0706977
3-1-3	0.5	Taibi et al. (2015)	= 0	0,868596	0,464839	0,085927	0,079128
		Akavci (2016)	≠ 0	0,86314	0,464849	0,0745969	0,0694537
		Présent modèle	= 0	0,868577	0,464833	0,0741382	0,0690211
		Présent modèle	≠ 0	0,864416	0,465262	0,0746036	0,0694619
	2	Taibi et al. (2015)	= 0	1,08997	0,519461	0,0876306	0,0805702
		Akavci (2016)	≠ 0	1,07386	0,519785	0,0758855	0,0705695
		Présent modèle	= 0	1,08085	0,519427	0,075402	0,0701153
		Présent modèle	≠ 0	1,075741	0,520220	0,0758944	0,0705772
2-1-2	0.5	Taibi et al. (2015)	= 0	0,8604107	0,462484	0,0858464	0,079059
		Akavci (2016)	≠ 0	0,855014	0,462481	0,0745356	0,0694005
		Présent modèle	= 0	0,8603967	0,462480	0,0740781	0,0689690
		Présent modèle	≠ 0	0,856336	0,462864	0,074545	0,0694089
	2	Taibi et al. (2015)	= 0	1,066384	0,516062	0,0875334	0,080488
		Akavci (2016)	≠ 0	1,05934	0,516358	0,0758117	0,0705056
		Présent modèle	= 0	1,066248	0,516031	0,0753303	0,070053
		Présent modèle	≠ 0	1,061188	0,516793	0,0758212	0,0705140
1-1-1	0.5	Taibi et al. (2015)	= 0	0,838977	0,456219	0,0856283	0,0788745
		Akavci (2016)	≠ 0	0,833746	0,456185	0,0743699	0,0692568
		Présent modèle	= 0	0,838979	0,456220	0,0739157	0,0688281
		Présent modèle	≠ 0	0,8350130	0,4565615	0,0743797	0,0692654
	2	Taibi et al. (2015)	= 0	1,024387	0,506023	0,0872398	0,0872398
		Akavci (2016)	≠ 0	1,01766	0,506246	0,0755889	0,0703128
		Présent modèle	= 0	1,024298	0,506002	0,0751129	0,0698651
		Présent modèle	≠ 0	1,019386	0,506675	0,0755999	0,0703225

La figure IV.1 montre l'influence du paramètre du matériau p sur la variation du déplacement (\bar{w}) dans la direction de l'épaisseur pour les plaques sandwichs en FGM carrées symétriques et asymétriques avec un rapport d'élanement $a/h = 10$.

Les résultats sont illustrés en utilisant à la fois les présents modèles de déformation de cisaillement "2D" et "quasi-3D". On peut voir clairement que le déplacement transversal (\bar{w}) des plaques métalliques est plus important que celui des plaques en céramique, en général, le déplacement transversal augmente à mesure que le paramètre du matériau p augmente.

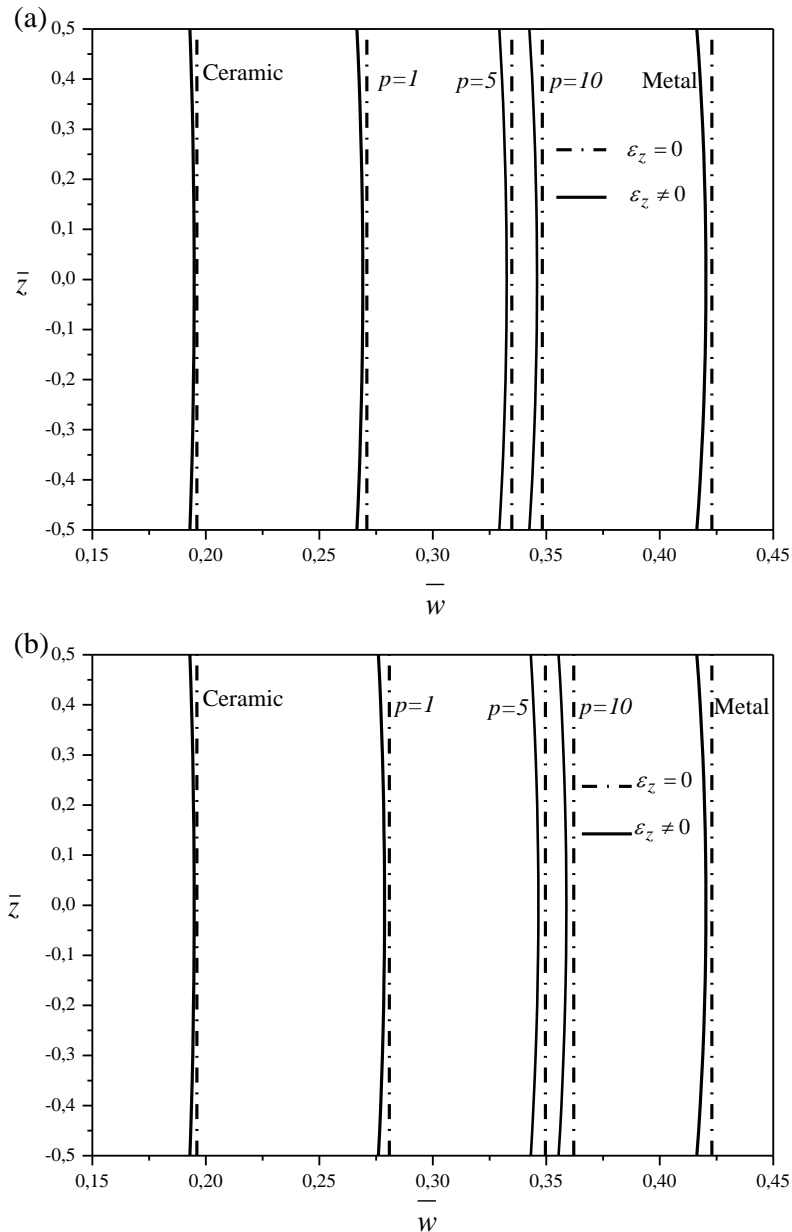


Figure IV.1: Le déplacement transversal \bar{w} , à travers l'épaisseur des plaques carrées sandwichs symétriques et asymétriques ($a/h = 10$). (a) La plaque FGM sandwich (1-2-1). (b) La plaque FGM sandwich (2-2-1).

La figure IV.2 illustre la distribution des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ pour diverses valeurs de paramètre du matériau p dans la direction de l'épaisseur de la plaque carrée, pour les plaques FGM sandwichs symétriques et asymétriques avec rapport d'élanement $a/h=10$.

Les contraintes de compression maximale se produisent sur la surface supérieure et les contraintes de traction maximale se produisent, bien sûr, sur la surface inférieure de la plaque FGM sandwich. La plaque homogène en céramique ou en métal donne des contraintes de compression maximale et de traction identique suivant l'épaisseur de la plaque.

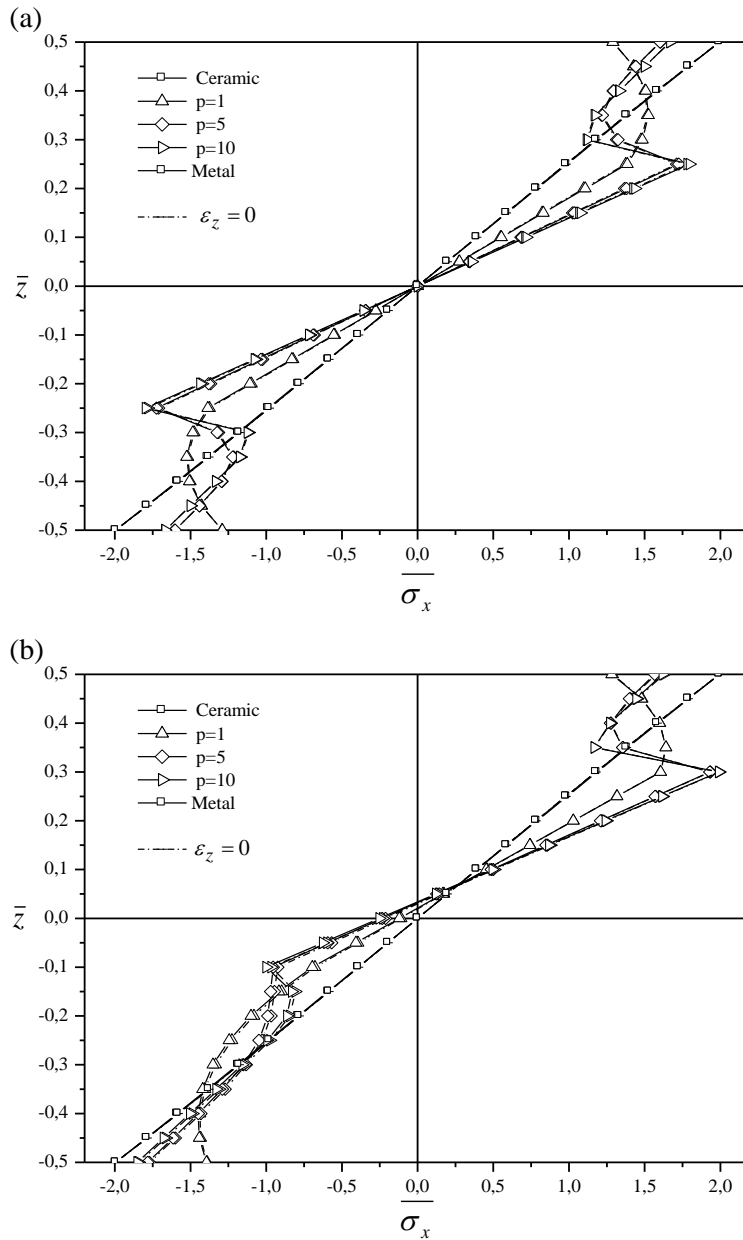


Figure IV.2 : La contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$, à travers l'épaisseur du sandwich symétrique et asymétrique assiettes carrées ($a/h=10$).

(a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG.

Sur la figure IV.3, nous avons tracé les distributions des contraintes de cisaillement transversal dans l'épaisseur, la valeur maximale se produisant en un point situé sur le plan médian de la plaque pour des plaques symétriques ou homogènes. On peut observer que les contraintes transversales de cisaillement des plaques sandwich FGM non symétriques ne sont pas symétriques et que l'augmentation de l'indice de fraction volumique p conduit à une augmentation de la contrainte de cisaillement transversal de la plaque.

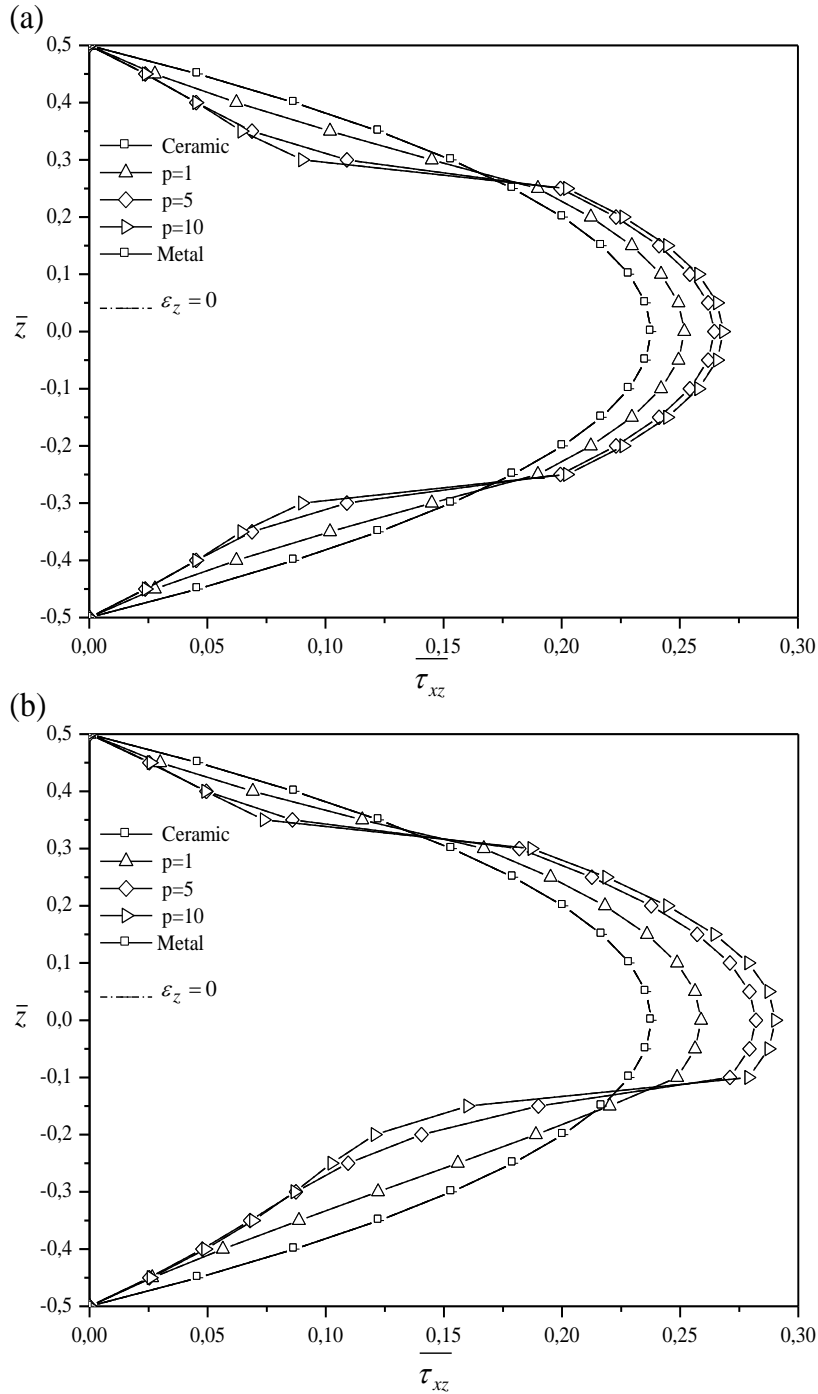


Figure IV.3 : La contrainte transversale de cisaillement τ_{xz} , à travers l'épaisseur des plaques carrées sandwich symétriques et asymétriques ($a/h = 10$).

(a) La plaque sandwich (1-2-1) FGM. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FGM.

Le deuxième exemple pour prouver la validité du modèle hyperbolique Quasi-3D proposé pour la réponse en flexion des plaques sandwichs en FGM simplement supportée ($T_i - 6Al - 4V / ZrO_2$) reposants sur des fondations élastiques, les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau IV.4 et comparés avec les solutions 2D de Taibi et al.(2015) [169] et les solutions quasi-3D Akavci S.S. (2016) [Akavci S.S. (2016)].

Des résultats supplémentaires sont représentés sur les figures IV.6-8 en utilisant la présente théorie de plaque hyperbolique quasi-3D avec ($\varepsilon_z \neq 0$).

Le tableau IV.4 contient la flèche \hat{w} pour une plaque FGM sandwich soumise à des charges mécaniques reposant ou non sur des fondations élastiques à un ou deux paramètres pour différentes valeurs paramètre de matériau p et plusieurs types de plaques FGM sandwich. On peut voir que les résultats du présent modèle sont en accord avec les résultats de littérature pour une plaque FGM sandwich simplement supportée reposant sur des fondations élastiques. Lorsque le paramètre du matériau p augmente, la flèche \hat{w} augmente. De plus, l'inclusion du paramètre de base de Winkler donne des résultats plus importants que ceux avec l'inclusion des paramètres de base de Pasternak. On peut montrer que les déflexions diminuent avec l'existence des fondations élastiques. Puisque le modèle quasi-3D de la présente formulation inclut l'effet d'étirement d'épaisseur, la flèche \hat{w} est légèrement diminuée par rapport aux autres flèche \hat{w} des solutions 2D. L'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur rend les plaques sandwich en FGM plus rigides.

L'effet de l'inclusion des fondations élastiques sur la flèche adimensionnelle \hat{w} pour les plaques carrées en FGM symétriques et asymétriques ($k = 5, a/h = 10$) est représenté sur la figure IV.4.

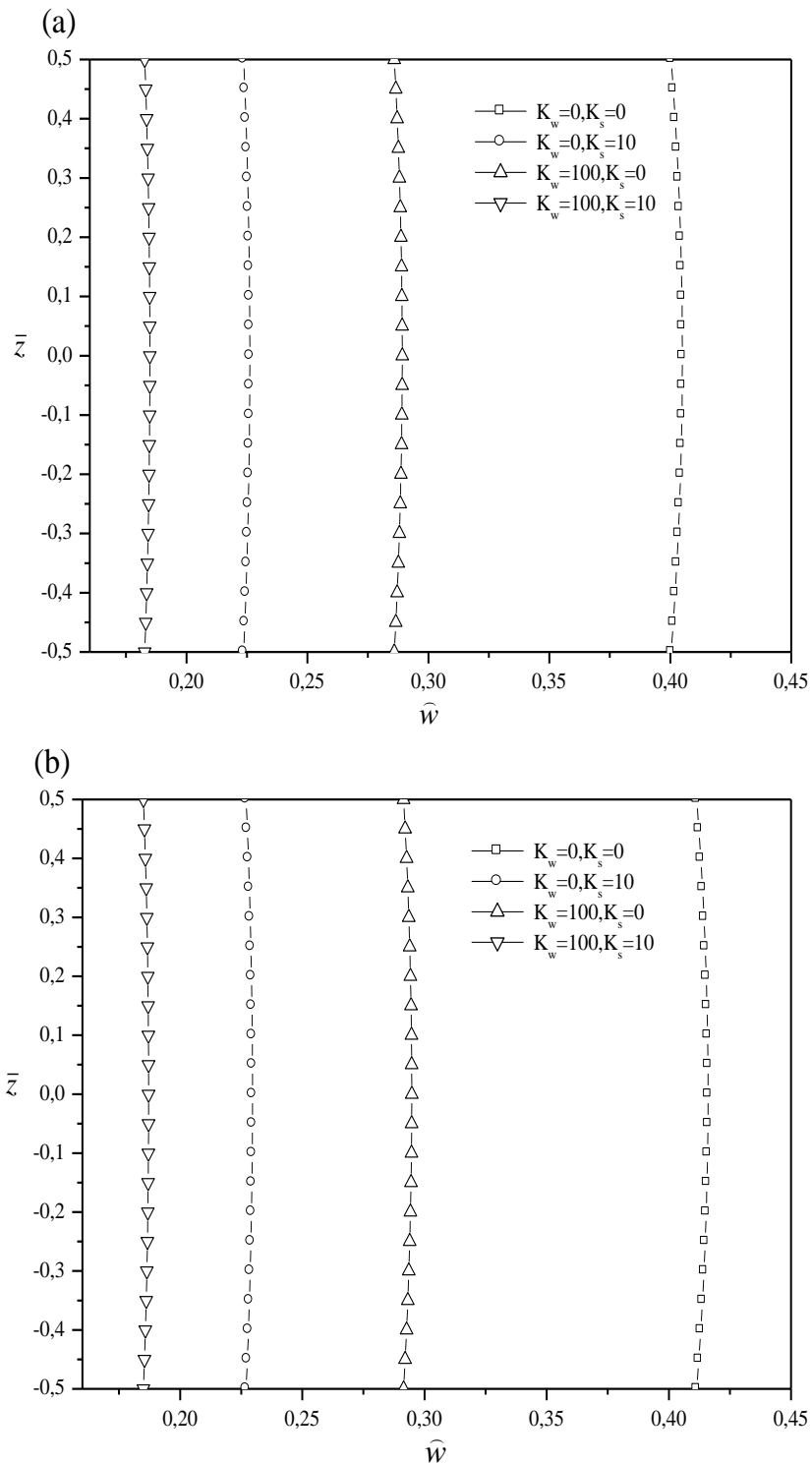


Figure IV.4 : Effet des paramètres des rigidités de Winkler et Pasternak sur la flèche \hat{w} du centre sans dimension à travers l'épaisseur d'une plaque carrée sandwich en FGM.
 (a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG, $p = 5, a/h = 10$).

On voit à partir de la figure IV.4 que la base élastique augmente, la flèche \widehat{w} centrale sans dimension des plaques sandwich FG diminue.

Figures IV.5 et IV.6 montrent l'influence de l'inclusion des fondations élastiques sur la contrainte axiale $\widehat{\sigma}_x$ et la contrainte transversale de cisaillement $\widehat{\tau}_{xz}$ dans la direction de l'épaisseur des plaques carrées sandwichs en FGM symétrique et asymétrique pour ($k=5, a/h=10$). On constate que les contraintes de cisaillement axiales normales et transversales diminuent progressivement avec l'augmentation des valeurs de la rigidité des fondations élastiques.

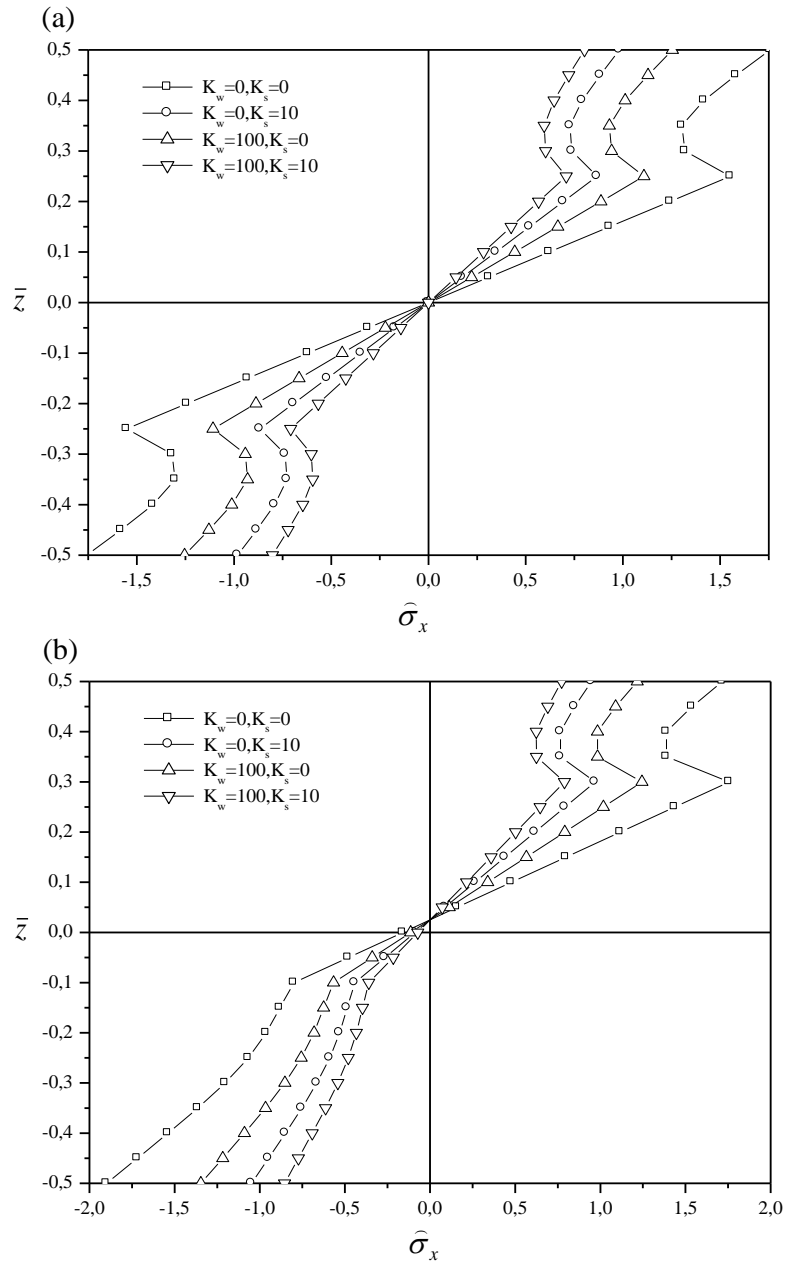


Figure IV.5 : Effet des paramètres des rigidités de Winkler et Pasternak sur la contrainte axiale $\widehat{\sigma}_x$ sans dimension à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FG carrée. (a) La plaque FGM sandwich (1-2-1). (b) La plaque FGM sandwich (2-2-1), ($p=5, a/h=10$).

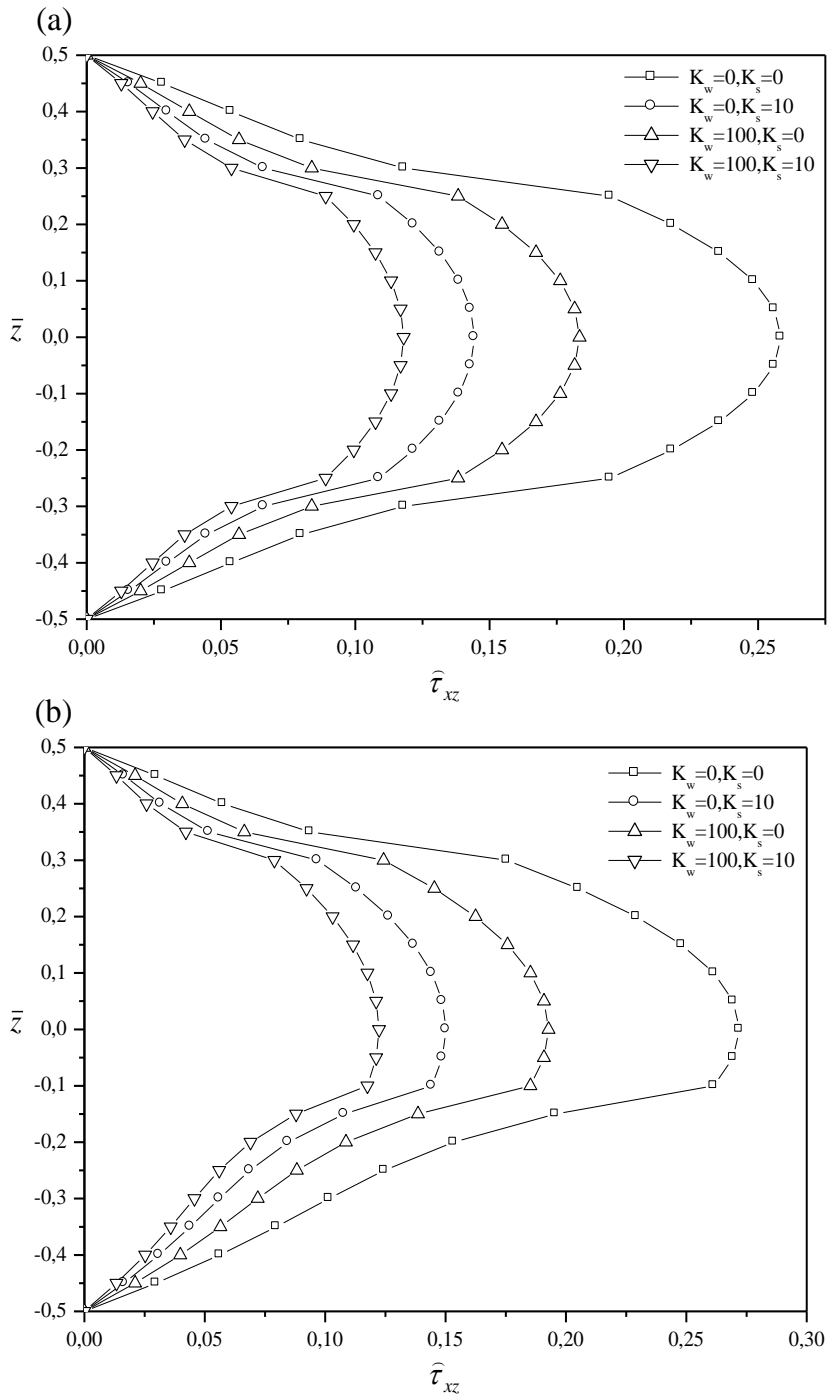


Figure IV.6 : Effet des paramètres des rigidités de Winkler et de Pasternak sur la contrainte de cisaillement transversale $\hat{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM sandwich.

(a) La plaque sandwich (1-2-1) FG. (b) La plaque sandwich (2-2-1) FG, (,). ($p=5, a/h=10$).

IV.3.Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats analytiques de l'analyse du comportement de la flexion des plaques FGM sandwich en utilisant la présente théorie hyperbolique avec la prise en compte de la déformation normale.

La présente théorie donne une forte similitude avec les autres théories qui prennent en compte la déformation normale, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et efficace pour résoudre les réponses en flexion des plaques sandwich en FGM.

CONCLUSIONS GENERALES

Conclusion Générale

La recherche présentée dans cette thèse consiste à présenter une solution analytique basée sur l'élasticité linéaire pour les plaques sandwichs en matériaux à gradient de propriétés soumise à un chargement mécanique transversal et reposant sur des appuis élastiques de type Winkler Pasternak. La problématique correspond principalement à l'investigation de l'influence de l'inclusion de la contrainte axiale suivant l'épaisseur ($\sigma_z \neq 0$) sur la réponse de la plaque sandwich en matériau composite à gradient de propriétés en flexion. Un nouveau modèle d'ordre élevé avec prise en compte de «**Thickness Stretching Effect**» par l'introduction d'une distribution hyperbolique sur l'épaisseur des champs de déplacements a été présenté.

La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en assurant des contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont développées et les résultats numériques correspondants sont comparées avec des résultats de la littérature qui prennent en compte la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$).

En supposant en premier lieu que le déplacement transversal $w(x, y, z)$ est construit en deux composants à savoir : la flèche de la plaque $w_0(x, y)$ induite par la flexion pure et l'effet de la déformation de cisaillement et de la flèche due à l'effet Stretching $g(z)\varphi_z(x, y)$. En deuxième lieu, par l'introduction d'un terme intégrale indéterminé, le nombre d'inconnues et les équations d'équilibre du modèle proposé sont réduits, et par conséquent, rendent cette théorie simple et efficace à utiliser. Ainsi, le nombre de fonctions inconnues dans du modèle proposé est réduit à seulement cinq inconnues, contrairement au autres théories dont le nombre d' inconnues est six ou plus dans le cas ou on tient en compte « l'effet stretching ».

Toutes les études comparatives ont montré que la flèche, les contraintes obtenues par la présente théorie ($\varepsilon_z \neq 0$) (cinq inconnues) et les théories l'ordre élevé de déformation de

cisaillement avec ($\varepsilon_z \neq 0$) sont en bonne concordance. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et peuvent ainsi améliorer le coût du calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie.

On peut conclure que la prise en compte de « l'effet stretching » augmente légèrement la rigidité de la plaque sandwich en FGM, qui a conduit à une réduction des déplacements dans la plaque, donc une caractéristique importante et souhaitable dans la conception structurelle.

En perspective, il est prévu d'appliquer un nouveau modèle d'ordre élevé à cinq variables avec la prise en compte de « l'effet stretching » pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux dû à la température.

Références Bibliographiques

- [Abolghasemi.2014]** Abolghasemi, Mir Mahdi, Vahid Yousefi et Behzad Hazizadeh. "Matériau hybride inorganique-organique à base de nanoparticules de ZnO ancrées à un composite à base de polythiophène et de silice ordonnée hexagonalement pour utilisation dans la microextraction des fibres en phase solide des HAP." *Microchimica Acta* 181.5-6 (2014): 639-645.
- [Af.1970]** A. F Carlucci, et Peggy M. Bowes. "Production de vitamine et utilisation par phytoplankton dans la culture mixte 1." *Journal of Phycology* 6.4 (1970): 393-400.
- [Aghelinejad.2011]** Aghelinejad, M., et al. "Analyse thermomécanique post-flambage non linéaire de plaques annulaires minces à gradient fonctionnel basées sur la théorie des plaques de Von-Karman." *Mécanique des matériaux et structures avancés* 18.5 (2011): 319-326.
- [Ahouel et al.2016]** Ahouel, M., Houari, MSA, AddaBedia, EA, Tounsi, A. (2016) « Comportement mécanique dépendant de la taille des nanofaisceaux déformables trigonométriques à gradient fonctionnel, y compris le concept de position de surface neutre », *Steel and Composite Structures*, 20 (5), 963-981.
- [Ait Atmane et al.2010]** Ait Atmane, H., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, « Analyse vibratoire gratuite de plaques à gradations fonctionnelles reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation par cisaillement ». *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [Akavci.2016]** Akavci, S. S. (2016), «Comportement mécanique des plaques sandwich fonctionnelles sur fondations élastiques», *Composites*

Part B: Engineering., 96, 136-152.

- [Al-Basyouni et al.2015]** Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. et Mahmoud, S.R. (2015), « Flexion dépendant de la taille et analyse vibratoire de micro-faisceaux à gradation fonctionnelle basés sur la théorie de contrainte de couple modifiée et la position de surface neutre», *Compos.Struct.*,125,621-630.
- [Alibeigloo.2011]** Alibeigloo, A. "Solution thermoélastique pour les déformations statiques de la coque cylindrique fonctionnellement calibrée liée à de fines couches piézoélectriques." *Structures composites* 93,2 (2011): 961-972.
- [Amabili.2008]** Amabili, M., (2008), *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates* Cambridge university press. New york,
- [Arefi.2016]** Arefi, Mohammad et Ashraf M. Zenkour. "Utilisation de la théorie des plaques de déformation par cisaillement sinusoïdal pour l'analyse transitoire de nanoplaques sandwich à trois couches intégrées à des feuilles faciales piézo-magnétiques." *Matériaux et structures intelligents* 25.11 (2016): 115040.
- [Bao et al.1995]** Bao, G.,L. Wang, « Fissuration multiple dans des revêtements céramiques / métalliques fonctionnalisés », *Int. J; Structures solides*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Barker et al.1971]** Barker, R. M., et Pryor Jr, C.W. (1971). « Une analyse par éléments finis comprenant des effets de cisaillement transversal pour des applications sur des plaques stratifiées ». *Journal de l'AIAA*, 9 (5), 912-917.
- [Baron. 2008]** Baron, C., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) :

722–730, 2008.

[Beker.2000]

Beker, A. R. C. L. et coll. "Effet de l'hormone de libération de l'hormone de croissance (GHRH) et du peptide intestinal vasoactif (VIP) sur la maturation in vitro des ovocytes bovins." *Theriogenology* 53.9 (2000): 1771-1782.

[Bellifa et al.2017]

Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. et Mahmoud, S.R. (2017), « Une théorie des plaques raffinée à quatre variables, efficace et simple pour l'analyse du flambement des plaques fonctionnelles».

[Benachour et al.2011]

Benachour, A., Tahar, H.D., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A (2011). « A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient » *Composites: Part B.*, 42, 1386–1394.

[Besseghier et al.2017]

Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), « Analyse vibratoire libre des plaques FG nanométriques incorporées en utilisant une nouvelle théorie de déformation trigonométrique non line » *Smart Struct Syst Int.J.*19 (6) ,601-614.

[Bhaskar et al.2001]

Bhaskar K, TK de Varadan. « Évaluation de l'approximation du schéma auto-cohérent: conductivité des composites ». *ASME J Appl Mec* 2001; 68 (4): 660-2.

[Bishop et al.1993]

Bishop. A., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, « Un matériau à gradient fonctionnel produit par un procédé métallurgique en poudre », *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.

[Boch et al.1986]

Boch, P., Chartier,T., Huttepain, M. « Coulée sur bande de composites stratifiés Al₂O₃ / ZrO₂ », *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.

[Bouderba et al.2016]

Bouderba, B., Houari, MSA, Tounsi, A., Mahmoud, SR (2016),

- "Stabilité thermique des plaques sandwich fonctionnelles à l'aide d'une théorie simple de déformation de cisaillement", *Structural Engineering and Mechanics.*, 58 (3), 397- 422.
- [Carpinteri.2006]** Carpinteri, Alberto et Giuseppe Lacidogna. "Surveillance des dommages d'un bâtiment en maçonnerie historique par la technique d'émission acoustique." *Matériaux et structures* 39,2 (2006): 161-167.
- [Carrera et al.2011]** Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., Soave, M.(2011), « Effets de l'étirement d'épaisseur dans les plaques et les coquilles fonctionnellement classés », *Composite PartieB:Ingénierie.*,42(2),123-133.
- [Carrera.2004]** Carrera, Ana C. "Signalisation TOR chez les mammifères." *Journal de la science cellulaire* 117.20 (2004): 4615-4616.
- [Chatterjee et al.1979]** Chatterjee, S. N., & Kulkarni, S. V. (1979). «Facteurs de correction de cisaillement pour les plaques stratifiées ». *Aiaa Journal*, 17 (5), 498-499.
- [Cheng et al.2000]** Cheng Lim, Puay et Nelson KH Tang. "Une étude des attentes et de la satisfaction des patients dans les hôpitaux de Singapour." *Revue internationale d'assurance de la qualité des soins de santé* 13.7 (2000): 290-299.
- [Cheng et al.2000]** Cheng Lim, Puay et Nelson KH Tang. "Une étude des attentes et de la satisfaction des patients dans les hôpitaux de Singapour." *Revue internationale d'assurance de la qualité des soins de santé* 13.7 (2000): 290-299.
- [Chi et al 2003]** Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, « Fissuration dans des composites de revêtement-substrat de revêtements FGM multicouches et sigmoïdes ». *Mécanique de la fracture*

d'ingénierie; 70 (10), 1227–1243, 2003.

- [Chi et al.2006]** Chi, Jen-Tsan et al. "Programmes d'expression génique en réponse à l'hypoxie: spécificité de type cellulaire et signification pronostique dans les cancers humains." *Médecine PLoS* 3.3 (2006): e47.
- [Chi et al.2006a]** Chi, S.H., Chung, Y.L, « Comportement mécanique des plaques de matériaux à gradient fonctionnel sous charge transversale - Partie I: Analyse », *Int. J; Structures solides*; 43 (13): 3657 à 3674, 2006.
- [Chi et al.2006b]** Chi, S.H., Chung, Y.L, « Comportement mécanique des plaques de matériaux à gradient fonctionnel sous charge transversale - Partie II: Résultats numériques », *Int. J; Structures solides*; 43 (13): 3675-3691, 2006.
- [Ching et al 2006]** Ching, H.K., S.C. Yen, « Déformation thermoélastique transitoire des faisceaux à gradients fonctionnels 2-d sous alimentation calorifuge non convective », *Compos. Struct*; 73 (4): 381-393, 2006.
- [Delale et al.1983]** Delale, F., Erdogan, F. (1983), « Le problème de la fissure pour un plan non homogène », *ASME J. Appl. Mech.*, 50 (3), 609-614.
- [Delfosse.1992]** Delfosse, D., H-U. Künzi et B. Ilschner. "Détermination expérimentale des contraintes résiduelles dans les matériaux à gradient de composition unidimensionnel." *Acta metallurgica et materialia* 40.9 (1992): 2219-2224.
- [Demasi .2005]** Demasi, Luciano. "Éléments de plaque multicouches raffinés basés sur les fonctions de zigzag de Murakami." *Composite Structures* 70.3 (2005): 308-316.
- [Di Sciuva.1986]** Di Sciuva, Marco. " Pliage, vibration et flambement de plaques orthotropes multicouches épaisses simplement supportées:

évaluation d'un nouveau modèle de déplacement. "Journal of Sound and Vibration 105.3 (1986): 425-442.

[Di Sciuva.1992]

Di Sciuva, Marco. " Modèles de plaques anisotropes multicouches avec contraintes interlaminaires continues." *Composite Structures* 22.3 (1992): 149-167.

[Di Sciuva.1995]

Di Sciuva, Marco. " Elément fini à plaques multicouches triangulaires du troisième ordre avec contraintes interlaminaires continues. "Revue internationale de méthodes numériques en ingénierie 38.1 (1995): 1-26.

[El Meiche et al.2011]

El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., Adda.Bedia, E.A. (2011). « A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate ». *International Journal of Mechanical Sciences.*, 53, 237–247.

[Elishakoff.2005]

Elishakoff, Isaac. "Controverse associée aux soi-disant" forces suiveuses ": aperçu critique." *Examens de mécanique appliquée* 58.2 (2005): 117-142.

[Fan . 1990]

Fan, Chen-Ming et Tom Maniatis. "Une protéine de liaison à l'ADN contenant deux motifs à doigts de zinc largement séparés qui reconnaissent la même séquence d'ADN." *Genes & Development* 4.1 (1990): 29-42.

[Fuchiyama et al.1995]

Fuchiyama, T., & Noda, N. (1995). Analyse des contraintes thermiques dans une plaque de matériau à gradient fonctionnel. *JSAE review*, 16(3), 263-268.

[Ghosh et al.1994]

Ghosh, D., Deb, A., Lahiri, M., Dey, A., Hossain, S. A., Das, S., ... & Roy, J. (1994). « La production de multihadrons dans les interactions à haute énergie et l'intermittence ». *Examen physique D*, 49 (7), 3113.

[Gianna kououlos.1995]

Gianna, Claire C., Michael A. Gresty et Adolfo M. Bronstein. "Influence de la distance cible et du niveau d'accélération sur les

mouvements oculaires provoqués par les pas d'accélération latérale." *Acta Oto-Laryngologica* 115 550 (1995): 65-67.

[Goyal et al.2008]

Goyal, V. K., et Kapania, R. K. (2008). « Stabilité dynamique des poutres laminées incertaines soumises à des charges su tangentielles ». *Journal international des solides et des structures*, 45 (10), 2799-2817.

[Groce et al.2004]

Groce, Nora Ellen et Reshma Trasi. "Viol de personnes handicapées: le sida et la croyance populaire dans le nettoyage vierge". *The Lancet* 363.9422 (2004): 1663-1664.

[Grujice.1998]

Grujic, Petar. "Requiem pour la science serbe." *Physics World* 11.9 (1998): 19

[Hachemi et al2017]

Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, M., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), « Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement simple inconnue pour l'analyse en flexion de plaques FG reposant sur des fondations élastiques », *Steel and Composite Structures.*, 25 (6), 717-726.

[Hadji et al.2011]

Hadji, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2011). « Vibration libre des plaques sandwich fonctionnelles à l'aide de la théorie des plaques raffinées à quatre variables ». *Applied Mathematics and Mechanics.*, 32 (7), 925-942.

[Hashemi et al.2010]

Hashemi Sh-H, Es'haghi M, Karimi M. « Analyse vibratoire en forme ferm d'épaisseur plaques annulaires fonctionnellement graduées à couches piézoélectriques intégrées ». *Int J Mech Sci* 2010;52:410–28.

[Hashemi et al.2012]

Hashemi Sh - H, Khorshidi K, Es'haghi M, Fadaee M, Karimi M. « Sur les effets du couplage entre les modes vibrants dans le plan et hors du plan des plaques circulaires / annulaires fonctionnelles intelligentes ». *Appl Math Model* 2012; 36 :

1132-47.

[Hashin et al.1964]

Hashin Z, Rosen BW. « Les modules d'élasticité des matériaux renforcés par des fibres ». Journal of applied mechanics, 31(2), 223-232,1964.

[Hashin.1962]

Hashin Z. « Les modules d'élasticité des matériaux hétérogènes ». J. Appl. Mech., 29 (143), 1962.

[Hashin.1968]

Hashin Z. « Évaluation de l'approximation du schéma auto-cohérent: conductivité des composites ». J Compos Mater 1968; 4: 284-300.

[Hashmi et al.2014]

Hashmi, A. Stephen K. « Double catalyse de l'or ». Comptes de la recherche chimique 47.3 (2014): 864-876.

[He et al.2001]

He, Jiang et al. "Facteurs de risque d'insuffisance cardiaque congestive chez les hommes et les femmes américains: étude épidémiologique de suivi de NHANES I". Archives de la médecine interne 161.7 (2001): 996-1002.

[Hetenyi.1966]

Hetenyi Jr, G., R. Ninomiya et G. A. Wrenshall. "Taux de production de glucose chez les chiens déterminés par deux traceurs et traceurs différents." Journal of Nuclear Medicine 7 (1966): 454-463.

[Hildebrand et al.1949]

Hildebrand, F.B., E. Reissner., G.G. Thomas, « Notes sur les fondements de la théorie des petits déplacements des coquilles orthotropes ». NACA T. N. N°:1833, 1949.

[Hill.1965]

Hill R. « Une mécanique auto-cohérente des matériaux composites ». J Mech Phys Solids 1965; 13: 213-22.

[Hinton et al.1975]

Hinton, E., Scott, F. C, et Ricketts, R. E. (1975). «Lissage des contraintes par les moindres carrés locaux pour les éléments isoparamétriques paraboliques ». Journal international pour

les méthodes numériques en ingénierie, 9 (1), 235-238.

[Hosseini.2007]

Hosseini, M. G., M. Ehteshamzadeh et T. Shahrabi. "Protection de la corrosion de l'acier doux avec des bases de Schiff dans une solution de 0,5 M H₂SO₄." *Electrochimica acta* 52.11 (2007): 3680-3685.

[Houari et al.2011]

Houari, MS A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Adda Bedia, EA (2011), « théorie des plaques raffinées à deux variables pour l'analyse de flexion thermoélastique des plaques sandwich fonctionnelles », *Journal of Thermal Stresses* ., 34 (4), 315-334.

[Houari et al.2013]

Houari, MSA, Tounsi, A. et Anwar Bég, O. (2013), « Analyse de flexion thermoélastique de plaques sandwich à gradient fonctionnel utilisant une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale », *Int.J.Mech.Sci.*, 76, 102 -111.

[Hussainy.1975]

Hussainy, S. A. et S. Srinivas. "Flexion de plaques composites rectangulaires." *Science et technologie de la fibre* 8.1 (1975): 59-76.

[Jamaludin.2013]

Jamaludin, Noraini et al. "Sur la procédure à pas unique symétrique à intervalle modifié ISS2-5D pour l'inclusion simultanée de zéros polynomiaux." *Journal international d'analyse mathématique* 7.20 (2013): 983-988.

[Javaheri et al.2002]

Javaheri, R. et M. R. Eslami. "Flambement thermique de plaques à gradation fonctionnelle". *Journal AIAA* 40.1 (2002): 162-169.

[Javaheri et al.2002a]

Javaheri, R. M.R. Eslami, «Bouclage thermoélastique des plaques rectangulaires en matériaux fonctionnels », *AIAA J*; 40: 162-169, 2002.

- [Javaheri et al.2002b] Javaheri, R. M.R. Eslami, « Bouclage de plaques classiquement fonctionnelles sous chargement en compression plan », ZAMM, 82 (4): 277-283, 2002.
- [Javaheri et al.2002c] Javaheri, R. M.R. Eslami, « Flambage thermique de plaques à gradient fonctionnel basé sur une théorie d'ordre supérieur », J. Therm. Les contraintes; 25 (7): 603-625, 2002.
- [Jha et al.2012] Jha DK, Kant T, Singh RK. « Théorie du cisaillement et de la déformation normale d'ordre supérieur pour la fréquence naturelle des plaques rectangulaires fonctionnelles ». Nucl Eng Des 2012; 250: 8-13.
- [Jha et al.2013] Jha, D.K., Kant, T. et Singh, R.K. (2013), « Revue critique des recherches récentes sur les plaques fonctionnelles », Composite Structures 96, 833-849.
- [Jin.2002] Jin, Z.-H. « Une solution asymptotique de champ de température dans une bande d'un matériau fonctionnellement classé », Int. Commun. Transfert de masse thermique; 29 (7): 887-895. 2002.
- [Jones.1999] Jones, D.T. (1999), « Prédiction de la structure secondaire des protéines basée sur des matrices de notation spécifiques à la position1 ». Journal of molecular biology, 292 (2), 195-202.
- [Kaci.2012] Kaci. A.(2012), « Etude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique ».
- [Kant et al.1988] Kant, I., & Muglioni, J. M. (1988). « Idée d'une histoire universelle au point de vue cosmopolitique ». Paris: Bordas.
- [Kant et al.1988a] Kant, T., et Pandya, B. N. (1988). « Une formulation simple d'éléments finis d'une théorie d'ordre supérieur pour les plaques composites stratifiées asymétriquement ». Structures

composites, 9 (3), 215-246.

[Kant et al.1993]

Kant, T., et al. « Une revue critique et quelques résultats des théories affinées récemment développées de composites laminés renforcés par fibres et de sandwichs ». Structures composites, 1993, vol. 23, no 4, p. 293-312.

[Kant et al.2002]

Kant, T., Swaminathan, K. (2002), « Solutions analytiques pour l'analyse statique des plaques composites stratifiées et sandwiches basées sur une théorie affinée d'ordre supérieur », Composites structures., 56 (4), 329-344.

[Kaprielian et al.1988]

Kaprielian, P. V., T. G. Rogers et Anthony James Merrill Spencer. "Théorie des plaques élastiques stratifiées I. Lamines isotropes." Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 324.1582 (1988): 565-594.

[Karama et al.2003]

Karama, M., K.S. Afaq., S. Mistou, « Comportement mécanique du faisceau composite stratifié par le nouveau modèle de structures composites stratifiées multicouches avec continuité de la contrainte de cisaillement transversale », Int. J. Structures solides; 40 (6): 1525-1546, 2003.

[Kashtalyan.2004]

Kashtalyan, M. « Solution d'élasticité tridimensionnelle pour la flexion de plaques rectangulaires fonctionnelles », Eur. J. Mech. A / Solides; 23 (5): 853-864, 2004.

[Khdeir et al.1989]

Khdeir, A.A., Reddy, J.N., et Frederick, D. (1989). « Une étude de la flexion, de la vibration et du flambement de coques cylindriques circulaires à plis croisés avec diverses théories de coquilles ». International Journal of Engineering Science, 27 (11), 1337-1351

- [Khorramabadi et al.2008]** Khorramabadi, MK. Najafizadeh MM, Shahraki AJ, Khazaeinejad P. « Effet des théories de cisaillement sur la vibration libre des plats gradués fonctionnellement ». World Acad Sci Eng Technol 2008; 48: 216-21.
- [Kim et al .2014]** Kim, Na Young, et YAMAMOTO, Yoshihisa. Exciton–polariton condensates. Nature Physics, 2014, vol. 10, no 11, p. 803.
- [Kof.2007]** A Kof, L. (2007, octobre). « Scénarios: Identifier les objets et les actions manquants au moyen de la linguistique computationnelle ». In Requirements Engineering Conference, 2007. RE'07. 15ème IEEE International (pp. 121-130). IEEE.
- [Koizumi .1997]** M. Koizumi, « Activités de MGF au Japon ». Matériaux composites; 28 (1-2):1– 4. 1997
- [Koizumi. 1992]** Koizumi, M. « Progrès récents des matériaux fonctionnels au Japon ». Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [Koizumi.1993]** Koizumi, M. "Le concept de MGF." (1993): 3-10.
- [Koizumi.1997]** Koizumi M., 1997. FGM Activities in Japan, Composites Part B, 28B, 1-4.
- [Koizumi.2013]** Koizumi, M., Komaba, H. et Fukagawa, M. (2013). Fonction parathyroïdienne dans la maladie rénale chronique: rôle de l'axe FGF23-Klotho. Dans le phosphate et la vitamine D dans la maladie rénale chronique (vol. 180, pp. 110-123). Éditeurs Karger.
- [Kokini et al. 1990]** Kokini, K. Y. Takeuchi, « Revêtements thermiques céramiques multicouches sous charges thermiques transitoires ». Dans le cadre du premier symposium international sur les matériaux à gradient fonctionnel - FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, 1990.

- [Kolahchi et al.2016]** Kolahchi, R., Safari, M., Esmailpour, M. (2016), « Analyse dynamique de stabilité des visco-plaques renforcées par CNT fonctionnalisées dépendant de la température reposant sur le milieu élastomère orthotropic », *Composite Structures*, 150, 255 - 265.
- [Kozma et al.1986]** Kozma, F., & Ochoa, O. (1986). « Flambement de plaques composites utilisant des éléments finis déformables par cisaillement ». *Journal de l'AIAA*, 24 (10), 1721-1723.
- [Krishnamurty et al.1977]** Krishnamurty, K. V., et Reddy, M. M. (1977). Matrice de chélate de tris (pyrrolidine dithiocarbamate) cobalt (III) pour la préconcentration des métaux traces à partir d'une solution aqueuse par co-précipitation. *Analytical Chemistry*, 49 (2), 222-226.
- [Kyung.2006]** Kyung, B., et al. "Pseudogap induit par des corrélations de spin à courte distance dans un isolant de Mott dopé." *Physical Review B* 73.16 (2006): 165114.
- [Larson.2008]** Larson, Edward J. *Été pour les dieux: le procès Scopes et le débat continu de l'Amérique sur la science et la religion*. Hachette UK, 2008.
- [Lekhnitskii.1957]** Lekhnitskii, S.G.(1957), « Anisotropic Plates [in Russian], Gostekhizdat, Moscow » .
- [Leung et al.2003]** Leung, Donald YM, et al. "Effet de la thérapie anti-IgE chez les patients allergiques aux arachides." *New England Journal of Medicine* 348.11 (2003): 986-993.
- [Levinson.1980]** Levinson, M. (1980). Une théorie précise et simple de la statique et de la dynamique des plaques élastiques. *Mechanics Research Communications*, 7 (6), 343-350.

- [Li.2007] Li, Xian-Hua et al. "Contraintes isotopiques U-Pb zircon, géochimiques et Sr-Nd-Hf sur l'âge et l'origine des granites jurassiques de type I et A du centre du Guangdong, sud-est de la Chine: un événement igné majeur suite à la destruction d'une dalle plate subduite?" . " Lithos 96.1-2 (2007): 186-204.
- [Librescu.1975] Librescu, L. (1975). Elastostatique et cinétique des structures de type coque anisotropes et hétérogènes (Vol 2). Springer Science et médias d'affaires.
- [Liew et al.1993] Liew, J. R., White, D.W., et Chen, W.F. (1993), « Analyse de plastique-charnière raffinée du second ordre pour la conception des cadres. Partie I ». Journal of Structural Engineering, 119 (11), 3196-3216.
- [Lostec.1997] Lostec, L. « Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L », Thèse de l'université de Limoges, 1997
- [Loy.1999] Loy, C. T., K. Y. Lam et J. N. Reddy. "Vibration de coques cylindriques fonctionnelles" Journal international des sciences mécaniques 41.3 (1999): 309-324.
- [Matsunaga.2008] Matsunaga, Hiroyuki. "Vibrations libres et stabilité des plaques fonctionnelles selon une théorie de déformation d'ordre supérieur en deux dimensions." Structures composites 82,4 (2008): 499-512.
- [Matsunaga .2009] Matsunaga, H. « Flambement thermique de plaques fonctionnellement graduées selon une théorie de déformation de plus haut ordre 2D ». Compos Compos; 90 (1): 76-86, 2009.
- [Mau.1973] Mau, S. T. "Une théorie raffinée de la plaque laminée." Journal of Applied Mechanics 40.2 (1973): 606-607.

- [Mechab et al.2010]** Mechab, I., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Belhadj, H.A., Adda Bedia, E.A. (2010). « Une théorie de la plaque raffinée à deux variables pour l'analyse en flexion des plaques à gradations fonctionnelles ». *Acta Mech Sin.*, 26, 941-949.
- [Mindlin.1951]** Mindlin, R.D. (1951), « Vibrations d'épaisseur-cisaillement et de flexion des plaques de cristal ». *Journal of Applied Physics*, 22 (3), 316-323.
- [Mindlin.1951a]** Mindlin, R.D. « Influence de l'inertie rotatoire et du cisaillement sur le mouvement de flexion des plaques élastiques isotropes ». *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [Mistler.1973]** Mistler, R.E. « Substrats d'alumine à haute résistance produits par une technique de coulée multicouche », *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, 1973.
- [Mittelstedt et al.2004]** Mittelstedt, C., & Becker, W. (2004). « Concentrations de stress interlaminaire dans les structures en couches: Partie I - une étude de la littérature sélective sur l'effet de bord libre depuis 1967 ». *Journal of Composite Materials*, 38 (12), 1037-1062.
- [Mouffoki et al.2017]** Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), « Analyse vibratoire de nanofaisceaux avancés non-locaux dans un environnement hygro-thermique en utilisant une nouvelle théorie de faisceau de déformation de cisaillement trigonométrique inconnue », *Smart Structures Systems*, 20 (3), 369-383.
- [Murakami.1986]** Murakami, H. "Laminated composite plate theory with improved in-plane responses." *Journal of Applied Mechanics* 53.3 (1986): 661-666.
- [Murthy et al.1981]** Murthy, M.R., Reid III, T.J., Sicignano, A., Tanaka, N., et Rossmann, M.G. (1981). « Structure de la catalase du foie de bœuf ». *Journal of molecular biology*, 152 (2), 465 à 499.

- [Naghdi.1957] Naghdi, P. M. « Sur la théorie des coquilles élastiques minces ». Application trimestrielle. Math, 14: 369-380 1957.
- [Najafizadeh et al.2002] Najafizadeh, M. M. et M. R. Eslami. "Analyse de flambement de plaques circulaires de matériaux à gradation fonctionnelle sous compression radiale uniforme." Journal international des sciences mécaniques 44.12 (2002): 2479-2493.
- [Neves et al.2012a] Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E., Roque, CMC, Cinefra, M., Jorge, RMN Soares, CMM (2012a), « Une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal quasi-3D pour l'analyse de vibration statique et libre de fonctionnellement plaques graduées », Compos. B., 43, 711-725.
- [Neves et al.2012c] Neves, AMA, Ferreira, AJ, Carrera, E., Cinefra, M., Jorge, RMN, & Soares, CMM (2012c), «Analyse statique des plaques sandwich fonctionnelles selon une théorie hyperbolique en considérant Zig-Zag et les effets de déformation », Advances in Engineering Software., 52, 30-43.
- [Nguyen et al.2007] Nguyen,T.K., K. Sab., G. Bonnet, « Facteurs de correction de cisaillement des plaques fonctionnellement graduées ». Mech. Avancé Mater. Struct; 14 (8): 567-575, 2007.
- [Noda.1991] Noda, Minoru. "Méthode de fabrication d'un transistor à effet de champ asymétrique." Brevet US n ° 5 036 017. 30 juillet 1991.
- [Noor et al.1990] Noor, A.K., et Burton, W.S. (1990). « Évaluation des modèles de calcul pour les coques composites multicouches ». Revues de mécanique appliquée, 43 (4), 67-97.

- [Noor et al.1994] Noor, A.K., Peters, J.M., et Burton, W.S. (1994). « Solutions tridimensionnelles pour les sandwichs structuraux initialement sollicités ». *Journal of engineering mechanics*, 120 (2), 284-303.
- [Noor.1973] Noor, Ahmed K. "Vibrations libres de plaques composites multicouches." *Journal AIAA* 11.7 (1973): 1038-1039.
- [Okamura .1991] Okamura, H. « État des projets de conception de matériaux pour les applications de service sévères », *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [Ootao.2004] Ootao, Y. « Problème thermoélastique transitoire de bande épaisse fonctionnellement dégradée due à l'apport de chaleur non uniforme », *Compos. Struct*; 63 (2): 139-146, 2004.
- [Ozturk.1996] Öztürk, Y., et al. "Effets d'*Hypericum perforatum* L. et d'*Hypericum calycinum* L. extraits sur le système nerveux central chez la souris." *Phytomedicine* 3.2 (1996): 139-146.
- [Pagano.1969] Pagano, N. J. "Solutions exactes pour les stratifiés composites en flexion cylindrique." *Journal of composite materials* 3.3 (1969): 398-411.
- [Pagano.1970] Pagano, N.J. (1970), « Solutions exactes pour composites bidirectionnels rectangulaires et plaques sandwich ». *Journal de matériaux composites*, 4 (1), 20-34.
- [Pagano.1971] Pagano, N. J. et R. Byron Pipes. "L'influence de la séquence d'empilement sur la force du stratifié." *Journal des matériaux composites* 5.1 (1971): 50-57.
- [Pagano.1972] Pagano, N. J. et Haron J. Hatfield. "Comportement élastique des composites bidirectionnels multicouches". *Journal AIAA* 10.7 (1972): 931-933.

- [Palazotto et al.1992]** Palazotto, A.N., & Dennis, S.T. (1992). Analyse non linéaire des structures de coque. Washington, DC: Institut américain de l'aéronautique et de l'astronautique.
- [Park et al.2005]** Park, J.-S., J.-H. Kim, « Post bouchage thermique et analyse vibratoire de plaques fonctionnelles », J. Sound Vib; 289 (25-28): 77-93, 2005.
- [Phan et al.1985]** Phan, N.D., & Reddy, J.N. (1985). Analyse de plaques composites stratifiées en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Journal international pour les méthodes numériques en ingénierie, 21 (12), 2201-2219.
- [Piskunov .1990]** Piskunov, N. E. "L'imagerie de surface des étoiles." *Memorie della Societa Astronomica Italiana* 61 (1990): 577-593.
- [Praveen et al.1998]** Praveen, G. N. et J. N. Reddy. "Analyse thermoélastique transitoire non linéaire de plaques céramique-métal à gradations fonctionnelles." *Revue internationale des solides et des structures* 35.33 (1998): 4457-4476.
- [Praveen.1998]** Praveen, G. N. et J. N. Reddy. "Analyse thermoélastique transitoire non linéaire de plaques céramique-métal à gradations fonctionnelles." *Revue internationale des solides et des structures* 35.33 (1998): 4457-4476.
- [Putcha et al.1986]** Putcha, N. S., et Reddy, J. N. (1986). Stabilité et analyse des vibrations naturelles des plaques stratifiées en utilisant un élément mixte basé sur une théorie de la plaque raffinée. *Journal of Sound and Vibration*, 104 (2), 285-300.
- [Qian et al .2004]** Qian LF, Batra RC, Chen LM. « Déformations statiques et dynamiques d'une plaque élastique épaisse à gradient fonctionnel en utilisant un cisaillement d'ordre supérieur et une théorie des plaques déformables normales et une méthode de Petrov-Galerkin locale sans maillage ». *Composites Partie B* 2004; 35: 685-97.

- [Qian.2004] Qian, L.F., R.C. Batra et L.M. Chen. "Déformations statiques et dynamiques de plaques élastiques à gradation fonctionnelle épaisses en utilisant la théorie du cisaillement d'ordre supérieur et de la plaque déformable normale et la méthode locale Petrov-Galerkin sans maille." *Composites Partie B: Ingénierie* 35.6-8 (2004): 685-697.
- [Rabin.1998] Rabin, Matthew. "Psychologie et économie." *Journal de littérature économique* 36.1 (1998): 11-46
- [Ramirez.2006] Ramirez, Alfredo et al. "Le parkinsonisme héréditaire avec démence est causé par des mutations de l'ATP13A2, codant pour une ATPase de type P lysosomale de type 5". *Nature genetics* 38.10 (2006): 1184.
- [Rao.1971] Rao, C. Radhakrishna. *Inverse généralisé des matrices et de ses applications*. N ° 04; QA263, R3 .. 1971.
- [Ravichandran.1995] Ravichandran, LINGAMANAI DU V., ROGER A. Johns et A. P. P. A. V. O. O. Rengasamy. "Inhibition directe et réversible de l'oxyde nitrique synthase endothélial par l'oxyde nitrique." *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology* 268.6 (1995): H2216-H2223.
- [Ravikiran.2008] Ravikiran, C. N. "Perfectionner la musique carnatique, Vol. III. La Fondation internationale pour la musique carnatique." (2008).
- [Reddy .1999] Reddy, J.N. « Théorie et analyse des plaques élastiques ». Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Reddy et al.1985] Reddy, J.N., et Phan, N.D. (1985). Stabilité et vibration des plaques isotropes, orthotropes et stratifiées selon une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. *Journal du*

son et des vibrations, 98 (2), 157-170.

- [Reddy et al.1985]** Reddy, J.N., et Liu, C.F. (1985). « Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur des coques élastiques stratifiées ». *International Journal of Engineering Science*, 23 (3), 319-330.
- [Reddy et al.1989]** Reddy, J.N., et Khdeir, A. (1989). « Flambement et vibration de plaques composites stratifiées utilisant diverses théories de plaques ». *Journal de l'AIAA*, 27 (12), 1808-1817.
- [Reddy et al.1990]** Reddy, J. S., Kumar, R., et Ratnasamy, P. (1990). « Titane silicalite-2: synthèse, caractérisation et propriétés catalytiques ». *Catalyse appliquée*, 58 (1), L1-L4.
- [Reddy et al.2001]** Reddy, J.N., Z.-Q. Cheng, «Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates », *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.
- [Reddy.1981]** Reddy, J.N., & Chao, W.C. (1981), « Une comparaison des solutions de forme fermée et d'éléments finis de plaques rectangulaires anisotropes laminées épaisses ». *Nuclear Engineering and Design*, 64 (2), 153-167.
- [Reddy.1984]** Reddy, J.N. « Une théorie simple d'ordre supérieur pour les plaques composites stratifiées », *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.
- [Reddy.1987]** Reddy, J. N. "Une généralisation des théories bidimensionnelles des plaques composites stratifiées." *Communications dans les méthodes numériques appliquées* 3.3 (1987): 173-180.

- [Reddy.1997] Reddy, J.N. « Mécanique des plaques composites stratifiées: théorie et analyse ».CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [Reddy.2000] Reddy, J.N. « Analyse des plaques fonctionnelles ». Int. J. Numer. Méthodes Eng; 47: 663 à 684, 2000.
- [Reissner.1944] Reissner, E. (1944), « Sur la théorie générale des profils minces pour les mouvements non uniformes ».
- [Reissner.1945] Reissner, E. « L'effet de la déformation transversale de cisaillement sur la flexion des plaques élastiques ». J. Appl. Mech;12 (2): 69-77, 1945. McGraw-Hill Book Inc. Paris.
- [Reissner.1975] Reissner, E. « Sur la flexion transversale des plaques, y compris les effets de la déformation transversale transverse », Int. J. Structures solides; 25 (5):495-502, 1975.
- [Reissner.1979] Reissner, E. (1979), « Remarque sur l'effet de la déformation transversale en cisaillement dans les plaques anisotropes stratifiées ». Californie Univ San Diego La Jolla Dépôt de la mécanique appliquée et des sciences de l'ingénieur.
- [Reiter et al.1997] Reiter T, Dvorak GJ, Tvergaard V. « Modèles micromécaniques pour matériaux composites gradués ». J Mech Phys Solids 1997; 45: 1281-302.
- [Reiter et al.1997] Reiter, Russel et al. "Actions pharmacologiques de la mélatonine dans la physiopathologie des radicaux oxygénés." Sciences de la vie 60.25 (1997): 2255-2271.
- [Ren et al.1989] Ren, J. G., et D. R. J. Owen. « Vibration et flambement des plaques stratifiées ». Journal international des solides et des structures 25.2 (1989): 95-106.

- [Ren.1986b]** Ren, J. G. "Une nouvelle théorie de la plaque laminée." Composites Science and Technology 26.3 (1986): 225-239.
- [Sahraee.2009]** Sahraee, S. "Analyse de flexion de plaques sectorielles à gradation fonctionnelle à l'aide de la théorie des plaques de Levinson." Structures composites 88,4 (2009): 548-557.
- [Saidi et al.2016]** Saidi, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A. (2016), « Une théorie simple de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse des vibrations de plaques rectangulaires épaisses fonctionnellement calées reposant sur des fondations élastiques », Geomechanics and Engineering, 11 (2), 289-307.
- [Samsam et al.2005]** Samsam, Tracey E., Deborah L. Hunter et Philip J. Bushnell. "Effets de l'exposition chronique et aiguë répétée au chlorpyrifos sur l'apprentissage et l'attention soutenue chez le rat." Sciences toxicologiques 87.2 (2005): 460-468.
- [Sankar et al.2002]** Sankar B. V., J.T. Tzeng, « Contraintes thermiques dans les poutres à gradient fonctionnel », AIAA J; 40 (6): 1228-1232, 2002.
- [Sankar.2001]** Sankar, B.V. « Une solution d'élasticité pour les poutres à gradins fonctionnels », Compos. Sci. Technol; 61 (5): 689 à 696, 2001.
- [Savithri.1991]** Savithri, H.S , Kadaré, G., Dugeon, G., Savithri, H.S. et Haenni, A.L., 1991. Comparaison des stratégies d'expression de cinq ARN de tymovirus par des études de traduction in vitro. Journal of general virology, 73 (2), pp.493-498.
- [Savoia et al.1992]** Savoia, M. et J. N. Reddy. "Une approche variationnelle des solutions d'élasticité en trois dimensions des plaques composites stratifiées." Journal de mécanique appliquée 59.2S (1992):

S166-S175.

- [Schmidt et al.1977]** Schmidt, F. L., et Hunter, J. E. (1977). Développement d'une solution générale au problème de la généralisation de la validité. *Journal of Applied Psychology*, 62 (5), 529.
- [Seide.1980]** Seide, P. (1980). « Une théorie approximative améliorée pour la flexion des plaques stratifiées ». En *mécanique aujourd'hui* (pp. 451-466).
- [Senthilnathan et al.1988]** Senthilnathan, V. P., et Stein, S. E. (1988). « Mécanismes de condensation des hydrocarbures biaryliques ». *Le Journal of Organic Chemistry*, 53 (13), 3000-3007.
- [Shahrjerdi et al.2011]** Shahrjerdi A, F Mustapha, Bayat M, SM Sapuan, Zahari R, Shahzamanian MM. «Fréquence naturelle de F.G. plaque rectangulaire par la théorie de la déformation de cisaillement ». *IOP Conf. Sér. Mater Sci Eng* 2011; 17 (1): 1-6.
- [Shariat.2006]** Shariat, Shahrokh F., et al. "Résultats de la cystectomie radicale pour carcinome à cellules transitionnelles de la vessie: une série contemporaine du Consortium de recherche sur le cancer de la vessie." *The Journal of urology* 176.6 (2006): 2414-2422.
- [Shen et al.1995]** Shen, T. C., Wang, C., Abeln, G. C., Tucker, J. R., Lyding, J. W., Avouris, P., & Walkup, R. E. (1995). Désorption à l'échelle atomique par des mécanismes d'excitation électroniques et vibratoires. *Science*, 268(5217), 1590-1592.
- [Shen.2002]** Shen, Jingshi et al. "Régulation du stress ER de la localisation ATF6 par dissociation de la liaison BiP / GRP78 et démasquage des signaux de localisation de Golgi." *Cellule de développement* 3.1 (2002): 99-111.
- [Shimpi.1999]** Shimpi, R. P. (1999). « Théorie de déformation de cisaillement de Zeroth-ordre pour des plats ». *Journal de l'AIAA*, 37 (4), 524-

526.

[Sladek et al .2003]

Sladek J., V. Sladek., Ch. Zhang, « Analyse par conduction thermique transitoire dans des matériaux fonctionnellement gradués par la méthode de l'équation intégrale de frontière locale sans maillage », *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504, 2003.

[Srinivas.1969]

Srinivas, S., Akella Kameswara Rao et CV Joga Rao. "Flexion de plaques rectangulaires épaisses, homogènes et laminées simplement supportées." *ZAMM-Revue de mathématiques et de mécanique appliquées / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 49.8 (1969): 449-458.

[Srinivas.1970]

Srinivas, S. et A. K. Rao. "Pliage, vibration et flambement de plaques rectangulaires et de stratifiés épais, orthotropes, simplement supportés." *Journal international des solides et des structures* 6.11 (1970): 1463-1481.

[Steffens et al.1990]

Steffens,H.D., M. Dvorak., M. Wewel, « Plasma pulvérisé fonctionnellement dégradé matériaux-traitement et applications, dans *Proceeding of the First Symposium international sur les matériaux à gradient fonctionnel -FGM'90* »-Sendai-Japan; 139-43, 1990.

[Sugita et al.2000]

Sugita K, Kasahara T, Matsunaga E, Ebinuma H. « Un vecteur de transformation pour la production de plantes transgéniques sans marqueur contenant un seul transgène copie à haute fréquence ». *Le journal des plantes*. 2000 1er juin; 22 (5): 461-9.

[Takahashi et al.1990]

Takahashi. M., Y. Itoh., H. Kashiwaya, « Fabrication et évaluation du matériau en gradient W / Cu par technique de frittage et d'infiltration, dans le cadre du premier symposium international sur les matériaux à gradient fonctionnel - FGM'90 »-Sendai-Japan; 129-34, 1990

[Tanigawa.1995]

Tanigawa, Yoshinobu. "Quelques problèmes thermoélastiques

de base pour les matériaux structurels non homogènes." Examens de mécanique appliquée 48.6 (1995): 287-300.

[Tarn .2001]

Tarn, J.-Q. « Solutions exactes pour cylindres anisotropes fonctionnellement gradués soumis à des charges thermiques et mécaniques », Int. J. Solids Struct; 38 (46-47): 8189-8206, 2001.

[Timoshenko.1959]

Timoshenko, S.P., S.Woinowsky-Krieger, « Théorie des plaques et des coquilles ». McGraw-Hill, New York, 1959.

[Timoshenko.1961]

SP Timoshenko, JM Gere - McGrawHill-Kogakusha Ltd, Tokyo,

[Toledano et al.1987]

Toledano, A., et Murakami, H. (1987). « Une théorie des plaques laminées d'ordre élevé avec des réponses dans le plan améliorées ». Revue internationale des solides et des structures, 23 (1), 111-131.

[Tounsi et al.2013]

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. (2013), « Une théorie raffinée de déformation de cisaillement trigonométrique pour la flexion thermoélastique des plaques sandwich fonctionnelles », Aerospace science and technology., 24 (1), 209-220.

[Touratier.1991]

Touratier, M. « Une théorie standard efficace des plaques », Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.

[Trung et al.2008]

Trung, Thuy Khuong et al. "Adsorption d'hydrocarbures dans les structures organiques métalliques flexibles MIL-53 (Al, Cr)." Journal de l'American Chemical Society 130.50 (2008): 16926-16932.

[Varadan.1992]

Varadan, V. K. et al. "Déphaseurs céramiques pour systèmes d'antennes orientables électroniquement." Journal hyperfréquence 35.1 (1992): 116-122.

- [Vaz.2016] Vaz, Eric, Yishi Zhao et Michael Cusimano. "Les habitats urbains et le paysage des blessures" *Habitat International* 56 (2016): 52-62.
- [Vel et al.2002] Vel SS, Batra RC. « Solution exacte pour les déformations thermoélastiques des plaques rectangulaires épaisses fonctionnelles », *AIAA J*; 40 (7): 1421-1433, 2002.
- [Vel et al.2003] Vel SS, Batra RC. « Analyse tridimensionnelle des contraintes thermiques transitoires dans des plaques fonctionnelles ». *Int J Solids Struct* 2003; 40: 7181-96.
- [Vinson.2001] Vinson, J.R., 2001. *Sandwich Structures*, *Applied Mechanics Review*, 54(3), 201-214.
- [Wang et al.1997] Wang, Y., Babchin, J., Chernyi, L.T., Chow, R.S., et Sawatzky, R.P. (1997), « Début rapide de la cristallisation du carbonate de calcium sous l'influence d'un champ magnétique ». *Water Research*, 31 (2), 346-350.
- [Whitney.1973] Whitney, J. M. (1973), « Facteurs de correction de cisaillement pour les stratifiés orthotropes sous charge statique ». *Journal of Applied Mechanics*, 40 (1), 302-304.
- [Wittrick.1987] Wittrick, W. H. "Des solutions analytiques, tridimensionnelles d'élasticité à certains problèmes de plaques et quelques observations sur la théorie des plaques de Mindlin." *Journal international des solides et structures* 23.4 (1987): 441-464.
- [Woo et al.2001] Woo, J., S.A. Meguid, « Analyse non-linéaire de plaques fonctionnelles et de coquilles peu profondes », *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409-7421, 2001.
- [Woo.2003] Woo, Alec, Terence Tong et David Culler. "Maîtriser les défis sous-jacents du routage multihop fiable dans les réseaux de capteurs." *Actes de la 1ère conférence internationale sur les*

systèmes de capteurs en réseau embarqués. ACM, 2003.

- [Wu et al.1998] Guoyao, W.U. et Sidney M. Morris. "Métabolisme de l'arginine: oxyde nitrique et au-delà." *Biochemical Journal* 336.1(1998):1-17.
- [Wu et al.2005] Huang, S.C., Wu, E.T., Chen, Y. S., Chang, C.I., Chiu, S., Chi, N.H., & Ko, W.J. (2005). « Expérience avec le soutien de la vie extracorporelle chez les patients pédiatriques après une chirurgie cardiaque ». *Asaio Journal*, 51 (5), 517-521
- [Xian.2010] Xian, Si-dong. "Un nouveau modèle d'évaluation globale floue basé sur la machine à vecteurs de support." *Information floue et ingénierie 2.1* (2010): 75-86.
- [Xiang et al.2011] Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. «Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre n pour la vibration libre des plats de sandwich fonctionnalisés et composés ». *Compos Struct* 2011; 93: 2826-32.
- [Yang et al.1966] Yang, C.N., et Yang, C.P. (1966), « Chaîne unidimensionnelle d'interactions spin-spin anisotropes. I ». *Preuve de l'hypothèse de Bethe pour l'état fondamental dans un système fini. Examen physique*, 150 (1), 321.
- [Yang et al.2003] Yang, J. J., H.-S. Shen, « Analyse en flexion non linéaire de plaques à gradient fonctionnel déformable par cisaillement soumises à des charges thermomécaniques dans diverses conditions aux limites », *Composites, Part B*; 34 (2): 103-115, 2003.
- [Yang et al.2005] Yang, J. J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, « Les statistiques du second ordre du flambage élastique des plaques rectangulaires fonctionnelles », *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8): 1165 1175, 2005.

- [Yang.2001] Yang, Wei-Shiung et al. "La réduction de poids augmente les taux plasmatiques d'une protéine anti-inflammatoire dérivée de la graisse, l'adiponectine." *The Journal of Clinical Endocrinology & Metabolism* 86.8 (2001): 3815-3819.
- [Yang.2006] Yang, Xiaoyong et al. "L'expression des récepteurs nucléaires relie l'horloge circadienne au métabolisme." *Cell* 126.4 (2006): 801-810.
- [Ye .1990] Ye, X. S., S. Q. Pan et J. Kuc. "L'activité, la structure des isoenzymes et la localisation cellulaire de la peroxydase sont liés à la résistance systémique du tabac à la moisissure bleue (*Peronospora tabacina*) et au virus de la mosaïque du tabac." *Phytopathologie* 80.12 (1990): 1295-1299.
- [Zemri et al.2015] Zemri, A., Houari, MSA, Bousahla, AA, Tounsi, A. (2015), « Une réponse mécanique du faisceau nanométrique fonctionnellement gradué: une évaluation d'une théorie de faisceau de la théorie de déformation non locale focalisée », *Structural Engineering and Mechanics*, 54 (4), 693-710.
- [Zenkert 1997] Zenkert D., 1997. *The Handbook of Sandwich Construction*, Engineering Materials Advisory Service Ltd.
- [Zenkour 2005b] Zenkour, A.M. « Une analyse complète des plaques sandwich fonctionnelles: Partie 2-Flambage et vibrations libres », *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5243-5258, 2005.
- [Zenkour et al.2010] Zenkour, A. M., Sobhy, M. (2010), « Flambage thermique de divers types de plaques sandwichs FGM », *Composite Structures.*, 93 (1), 93-102.
- [Zenkour.2004] Zenkour, A. M. "Solution analytique pour le cintrage de plaques stratifiées croisées sous charge thermomécanique." *Structures composites* 65,3-4 (2004): 367-379.
- [Zenkour.2005] Zenkour, A. M. "Une analyse complète des plaques sandwich

à gradations fonctionnelles: Partie 1-Flèche et contraintes." Journal international des solides et des structures 42,18-19 (2005): 5224-5242.

[Zenkour.2005a]

Zenkour, A.M. « Une analyse complète des plaques sandwich fonctionnelles: Partie 1 - Déviations et contraintes », Int. J. Solids Struct; 42 (18-19): 5224-5242, 2005.

[Zenkour.2006]

Zenkour, Ashraf M. "Théorie de la déformation par cisaillement généralisée pour l'analyse en flexion de plaques classées fonctionnellement". Modélisation mathématique appliquée 30.1 (2006): 67-84.

[Zenkour.2008]

Zenkour A.M, Alghamdi N.A. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, J. Materials Science 43 (2008) 2574-2589.

[Zhao et al.2009]

Zhao, X., YY. Lee ., K.M. Liew, « Analyse de flambage mécanique et thermique de plaques fonctionnelles ». Compos Compos; 90 (2): 161-71, 2009.

[Zhou.2011]

Zhou, Caicun et al. "Erlotinib versus chimiothérapie comme traitement de première intention chez les patients atteints d'un cancer du poumon non à petites cellules avec mutation EGFR avancée (OPTIMAL, CTONG-0802): étude de phase 3 multicentrique, ouverte, randomisée." L'oncologie de la lancette 12,8 (2011): 735-742.

[Zhong. 2007]

Z. Zhong., T. Yu, « Solution analytique de poutre à gradins fonctionnels en porte-à-faux ». Composites Science et Technologie; 67 (3-4): 481-488, 2007.

[Zhu.2004]

Zhu, L., et al. "Réaction in situ vésiculaire-matrice-interface à la microsphère CdS auto-encapsulée." Journal of colloid and interface science 273.1 (2004): 155-159.

[Zidi et al.2017]

Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017), « Une nouvelle théorie simple de la déformation de cisaillement hyperbolique à deux inconnues pour les poutres à gradients fonctionnels », Struct. Eng. Mech., 64 (2), 145-153.

[Zienkiewicz.1979]

Zienkiewicz., O.C., (1979), La méthode des éléments finis.
Théorie de la stabilité élastique. 1961

