REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Option : **Structures & Matériaux**

Présentée par

Mr : BESSEGHIER Abderrahmane

Intitulé de la thèse

APPLICATION DE L'ELASTICITE NON LOCALE POUR L'ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES NANOSTRUCTURES

Soutenu le :… /…. /2018 **Composition du jury** :

Président	Dr.BOURADA Mohamed	MCA	U.D.L SBA
Directeur de thèse	Pr.TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Examinateur	Dr. BOUCHAFA Ali	MCA	U.D.L SBA
Examinateur	Dr.DRAICHE Kada	MCA	U.de Tiaret
Examinateur	Dr.HEBALI Habib	MCA	U.de Tiaret
Examinateur	Dr.BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	MCA	C U de RELIZANE

Année universitaire 2017-2018

DEDICACES

Je dédis ce modeste travail à tous ceux qui m'ont aidé

Remerciements

Je remercie :

- *Mon encadreur Professeur, TOUNSI ABDELOUAHED pour ses conseils et son constant soutien, je lui exprime ici ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée*

- *Je remercie Monsieur BOURADA MOHAMED, Maître de conférence à l'université de Sidi Bel Abbès, d'avoir accepté de présider le jury.*

J'adresse aussi mes sincères remerciements au :
-Monsieur BOUCHAFA ALI de l'Université de Sidi Bel Abbès ;
-Monsieur DRAICHE KADA de l'Université de Tiaret;
-Monsieur HEBALI HABIB de l'Université de Tiaret;
-Monsieur BOUSAHLA ABDELMOUMEN ANIS de l'Université de Relizane;

de m'avoir fait l'honneur d'accepter de participer à mon jury de thèse.

Finalement, mes remerciements vont également à toute personne ayant contribué, de prés ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce travail, l'analyse de vibration libre des nano plaques à gradient fonctionnel (FG) dépendant de la taille et reposant sur une fondation élastique à deux paramètres est étudiée sur la base d'une nouvelle théorie de déformation trigonométrique non locale.
Cette théorie inclut des variables intégrales indéterminées et contient seulement quatre inconnues, qui sont inférieure à ceux de la théorie de déformation du cisaillement classique (FSDT).
Le modèle Mori-Tanaka est utilisé pour décrire la distribution progressive des propriétés du matériau le long de l'épaisseur de la plaque.
La dépendance à la taille de la plaque FG est analysée avec la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen.
En appliquant le principe de Hamilton, les équations de mouvement sont obtenues pour une théorie de la plaque de déformation de cisaillement à quatre variables raffinée puis résolues analytiquement.
Pour montrer l'exactitude de la théorie actuelle, nos résultats de recherche dans des cas spécifiques sont comparés aux résultats disponibles dans la littérature, où un bon accord sera démontré.
Enfin, l'influence de divers paramètres tels que les paramètres non locaux, l'index de la loi de puissance, les paramètres de fondation élastiques, le rapport de longueur sur diamètre et le rapport d'épaisseur sur la fréquence non dimensionnelle des plaques rectangulaires FG à l'échelle nanométrique sont présentés et discutés en détail.

Mots-clés: Théorie de l'élasticité non locale; Nano plaque FG; Vibration libre; Théorie raffinée; Élastique fondation.

Abstract

In this work, free vibration analysis of size-dependent functionally graded (FG) nanoplates resting on two-parameter elastic foundation is investigated based on a novel nonlocal refined trigonometric shear deformation theory for the first time.
This theory includes undetermined integral variables and contains only four unknowns, with is even less than the conventional first shear deformation theory (FSDT).
Mori–Tanaka model is employed to describe gradually distribution of material properties along the plate thickness.
Size-dependency of nanosize FG plate is captured via the nonlocal elasticity theory of Eringen. By implementing Hamilton’s principle the equations of motion are obtained for a refined four-variable shear deformation plate theory and then solved analytically. To show the accuracy of the present theory, our research results in specific cases are compared with available results in the literature and a good agreement will be demonstrated.
Finally, the influence of various parameters such as nonlocal parameter, power law indexes, elastic foundation parameters, aspect ratio, and the thickness ratio on the non-dimensional frequency of rectangular FG nanoscale plates are presented and discussed in detail.

Keywords: Nonlocal elasticity theory; FG nanoplate; free vibration; refined theory; Elastic foundation.

ملخص

في هذا العمل، يتم دراسة الاهتزازات الحرة لصفائح نانو من النوع التي تعتمد على الحجم الوظيفيي المتدرج (FG) موضوعة على أساسين باستعمال نظرية جديدة
وتشمل هذه النظرية متغيرات علي شكل تكاملات غير محددة وتحتوي على أربعة مجاهيل فقط ،و هي اقل من مجاهيل النظريات الاخري
كما يتم الاعتماد على حجم الاعتماد على نانو صفيحة عن طريق نظرية المرونة غير المحلية من ايرينجن.
من خلال تنفيذ مبدأ هاميلتون يتم الحصول على معادلات الحركة ومن ثم حلها تحليليا.
لإظهار دقة النظرية الحالية، نتائج أبحاثنا في حالات محددة تتم مقارنتها مع النتائج المتاحة في المراجع الاخري وسيتم التوصل إلى نتائج جيدة. وأخيرا، يتم عرض تأثير المعلمات المختلفة مثل سلم النانو، ومؤشرات قانون الطاقة، ومعلمات الأساس مرنة، ونسبة الارتفاع، ونسبة سمك على تردد غير الأبعاد من لوحات نانو فغ مستطيلة ونوقشت بالتفصيل.

الكلمات المفتاحية: نظرية المرونة اللونية.صفائح نانو نوع (FG)؛ الاهتزازات الحرة؛ نظرية المكرر؛ الاساس المرن

Sommaire

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES NOTATIONS & ABREVIATIONS

E module d'Young

G module de cisaillement

A section transversale

I Moment d'inertie de la section

x coordonnée dans le sens de l'axe x

t temps

w déflexion transversale

φ pente

k nombre d'onde

v vitesse d'onde

ω fréquence de résonance

ρ densité de masse par unité de volume

e_0a facteur de taille (non local)

CNTs nanotube de carbone

SWNT nanotube de carbone à une seule paroi

AFM microscopie atomique de force

MD Dynamique moléculaire

[ ] Matrice

$G(z)$ Module de cisaillement en fonction de z

$E(z)$ Module de Young en fonction de z

$\upsilon(z)$ Coefficient de Poisson en fonction de z

$V(z)$ Fraction volumique

k Paramètre du matériau

a Longueur de la plate

b Largeur de la plate

h Epaisseur de la plate

u_0, v_0, w_0 Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque

u,v,w Déplacements dans les directions x,y,z

φ_x, φ_y, φ_z Les rotations autour des axes x, y et z

$f(z)$ Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

σ_x, σ_y, σ_z Contraintes normales

τ_x, τ_y Contraintes cisaillement

ε_x, ε_y, ε_z Déformation dans la direction x, y et z

γ_x, γ_y Déformations de distorsion

$\delta u, \delta v, \delta w$ Champ virtuel de déplacement

δW_{int} Travail virtuel intérieur

δW_{ext} Travail virtuel extérieur

$\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, $\delta\varepsilon_z$ Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta\gamma_x$, $\delta\gamma_y$ Champ de déformation transversal virtuel

N_x N_y N_z N_{xy} Efforts normaux

M_x M_y M_z M_{xy} Moments de flexion

S_x S_y S_{xy} Moment supplémentaire du au cisaillement transverse

Q_{xz} Q_{yz} Effort de cisaillement

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s Moment supplémentaire du au cisaillement transverse

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b Moments de flexion

S_{xz}^s, S_{yz}^s Effort de cisaillement

A_{ij} Termes de rigidité de la matrice de membrane

B_{ij} Termes de rigidité de la matrice de couplage

D_{ij} Termes de la matrice de flexion

A_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

B_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

D_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

H_{ij}^s Termes de rigidité de la matrice

i j Nombres naturels

∂ Dérivée partielle

Introduction générale

Introduction générale

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants dont les propriétés se complètent. Le nouveau matériau ainsi constitué, hétérogène, possède des propriétés que les composants seuls ne possèdent pas.

Ce phénomène, qui permet d'améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.) explique l'utilisation croissante des matériaux composites dans différents secteurs industriels. Néanmoins, la description fine du composite reste complexe du point de vue mécanique de par la non-homogénéité du matériau.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des matériaux composites hétérogènes pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes et feuilletés dans le maintien de l'intégrité de la structure

FGM peut également être défini comme un composite dans lequel les propriétés du matériau varient progressivement selon une certaine direction en fonction des coordonnées de la position pour obtenir la résistance et la rigidité souhaitées.

À l'heure actuelle, les matériaux FGM sont de plus en plus fréquemment utilisés dans les domaines de l'énergie, l'aéronautique, l'aérospatiale, l'électronique, l'automobile et l'industrie chimique.

L'objectif principal du présent travail est l'étude d'une nouvelle théorie non locale de déformation de cisaillement est utilisée pour l’analyse de la vibration libre pour un nono-plaque rectangulaire type FGM reposant sur fondations élastiques.

La présente thèse comprend quatre chapitres répartis comme suit:

Le premier chapitre donne un aperçu sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), propriétés, comparaison avec les matériaux composites traditionnels ainsi que les diverses techniques appliquées pour sa fabrication. Dans cette partie, on présente aussi les applications des FGM dans les nanostructures tels les dispositifs nano optoélectroniques, les matériaux thermoélectriques, et enfin les nano composites avancées contenant une forte concentration de nanotube de carbone CNT.

Dans le chapitre II, on présente les grandes familles de méthodes d’étude des nanostructures, ainsi sur les différents types de modèles ou approches de modélisation.

Le chapitre III consiste à mettre en œuvre une nouvelle théorie non locale de déformation de cisaillement est utilisée pour l’analyse de la vibration libre pour un nono-plaque rectangulaire type FGM reposant sur fondations élastiques. Les propriétés efficaces des matériaux composites homogènes macroscopiques peuvent être dérivées des structures matérielles microscopiques hétérogènes en utilisant des techniques d'homogénéisation. Pour notre cas, la technique d'homogénéisation Mori-Tanaka est adoptée.

Dans le chapitre IV, des résultats numériques et graphiques sont présentés pour l'analyse de la réponse à la vibration libre dépendante de la taille des nano plaques intégrées FG modélisées sur la base d'une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement à quatre variables. L'étude est faite pour l'analyse d'effets des paramètres de fondation élastiques, le rapport aux dimensions de la plaque FGM, l'effet du gradient (n) et l'effet du paramètre non local μ sur la fréquence.

Afin de démontrer la validité de la présente méthode, des comparaisons de résultats issus du présent modèle avec ceux existant dans la littérature sont réalisées.

En fin, une conclusion générale sera présentée et des perspectives arrêtées.

Chapitre I

Applications des matériaux FGM dans les nanostructures

Chapitre I Applications des matériaux FGM dans les nanostructures

I.1 Introduction

Les nanostructures sont largement utilisés dans les appareils et les systèmes micro et nano-échelle tels que les biocapteurs, les microscopes à force atomique, les systèmes micro-électro-mécaniques (MEMS) et les systèmes nano électromécaniques (NEMS) en raison de leur supérieures caractéristiques : mécaniques, chimiques et électroniques.

La nanotechnologie est également intéressée par la fabrication de matériaux à gradient fonctionnel (FG) et de structures d'ingénierie à l'échelle nanométrique, ce qui permet une nouvelle génération de matériaux avec des caractéristiques révolutionnaires et avoir des dispositifs améliorés.

I.2 Matériaux FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionnally Graded Materials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continuellement de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent.

La variation continue des propriétés (figures I.1 et I.2) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

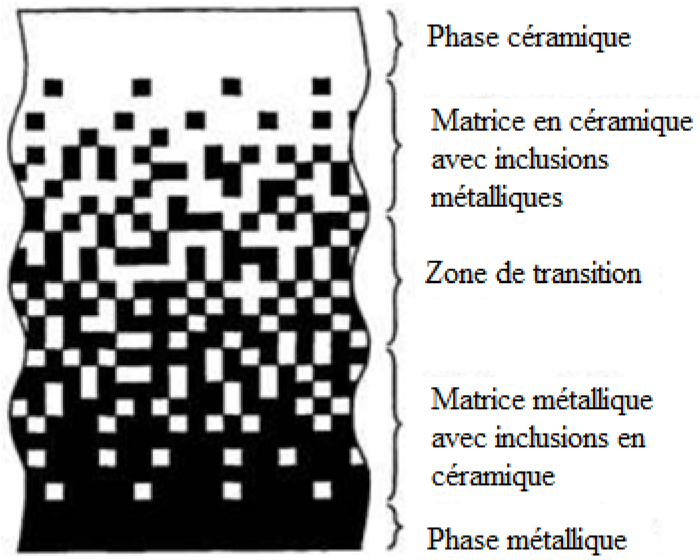


Figure I. 1 :Variation continue de la microstructure (schématisée)

Figure I. 2: Variation continue de la microstructure (photo)

Selon la nature du gradient, les matériaux FGM peuvent être regroupés en types suivants

1) Type de gradient de fraction (figure 1a)
2) Type de gradient de forme (Fig.1b)
3) Type de gradient d'orientation (Fig.1c)
4) Taille (de matériau) type de dégradé (Fig.1d)

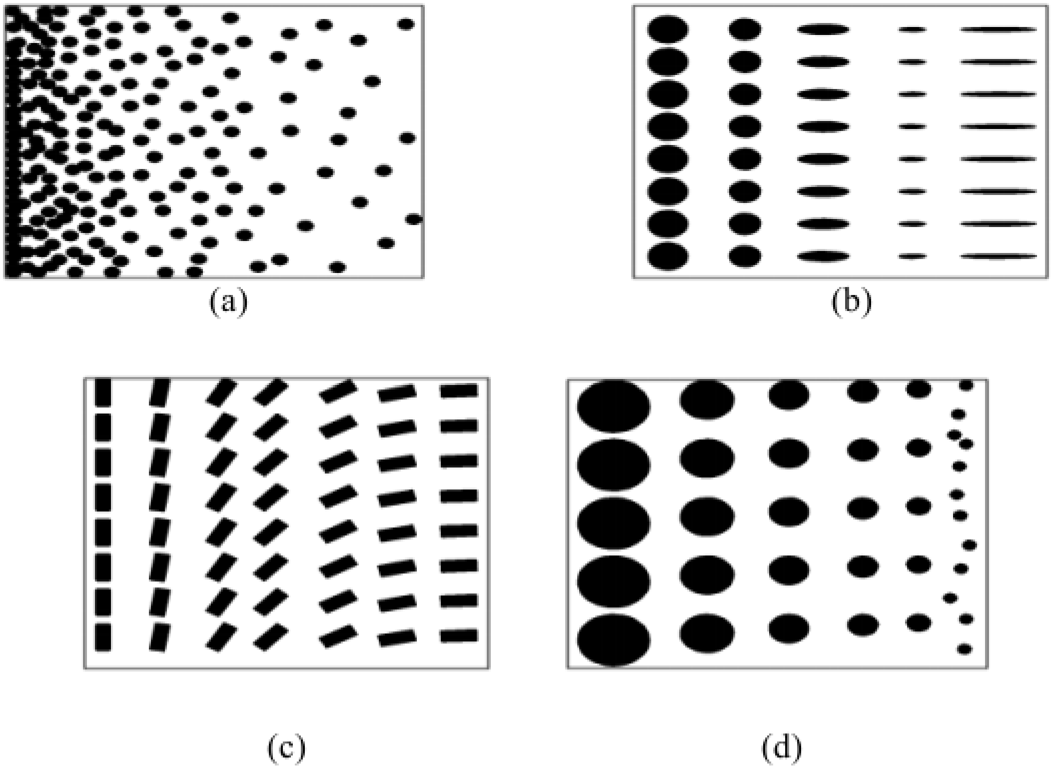


Figure I. 3: Sur la base des différences de gradients, les différents types de matériaux classés à des fins factices peuvent être de (a) type de gradient de fraction, (b) type de dégradé de forme, (c) type de gradient d'orientation, et (d) type de gradient de taille

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique ; -Bonne résistance à l'oxydation ; -Faible conductivité thermique ;
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Elimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; -Conductivité thermique élevée ; -Très bonne ténacité ;

Tableau I. 1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

I.3 Utilisation

L'intérêt pour les applications des FGM est dû à leurs caractéristiques variables que celles des matériaux composites traditionnels. Après plus de 30 ans de recherche, les applications des FGM sont offertes de manière attendue et inattendue pour profiter à la société.

La plupart des avantages de ces matériaux dépendent du fait qu'il peut être adapté selon les exigences, ce qui prolonge ainsi considérablement les outils bien utilisés de la science des matériaux. Au départ, les FGM sont utilisées dans l'aérospatiale, mais au cours des dernières décennies, les chercheurs montrent leur application dans d'autres domaines, comme les matériaux industriels, les optoélectroniques, les biomatériaux et les matériaux énergétiques. FGM est très prometteur dans de conditions d'exploitation et de chargement importants.

À titre d’exemple, la figure I.4 montre les concentrations de contraintes trouvées dans les panneaux de protection thermique conventionnels à l'interface carrelage /superstructure. Il démontre également comment une FGM réagit contre ces concentrations de contraintes en modifiant progressivement les propriétés du matériau par l'épaisseur du matériau.

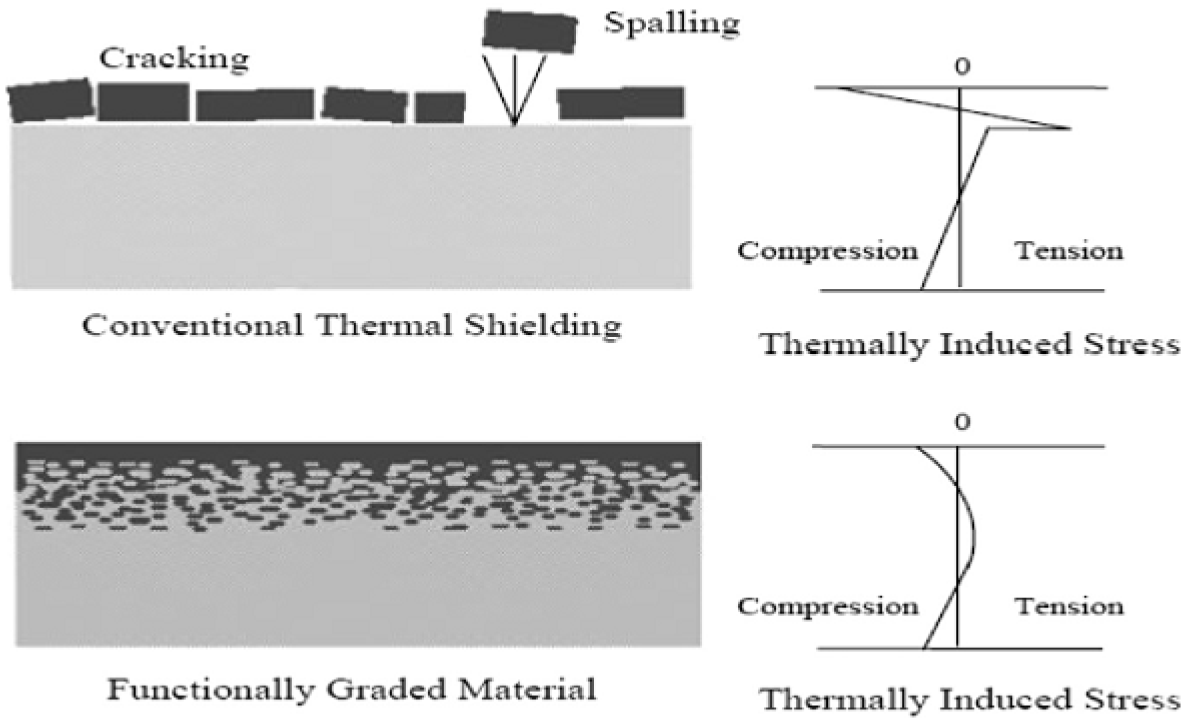


Figure I. 4: Protection thermique dans un matériau conventionnel & FGM

I.4 Comparaison FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure I.6 (Koizumi 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al. 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.
Le schéma ci-dessous résume l'emplacement des FGM dans la hiérarchie industrielle des nouveaux matériaux

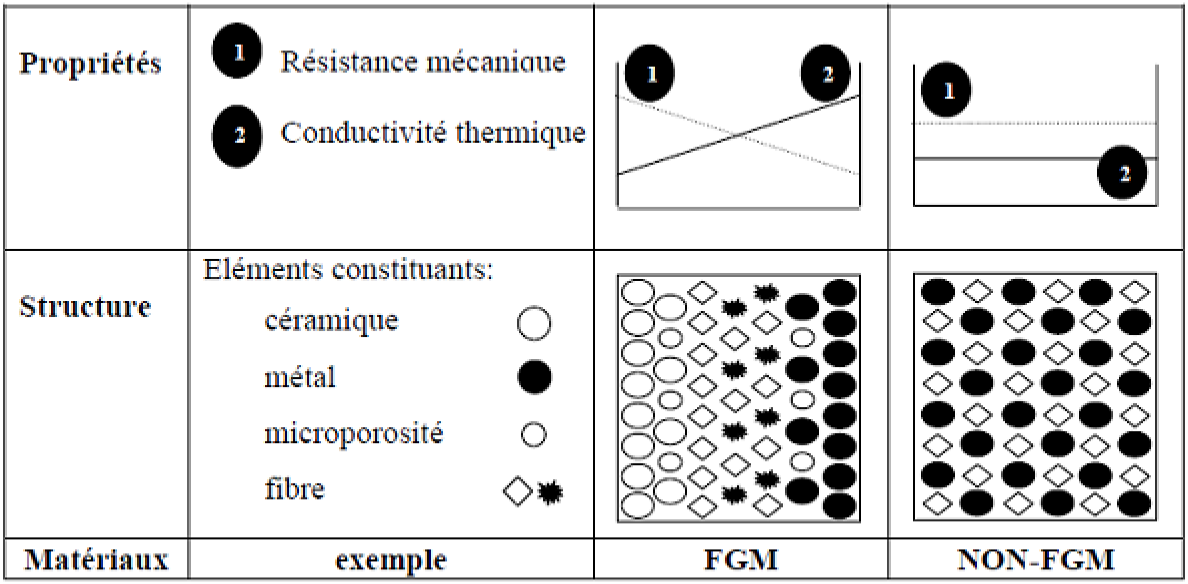


Figure I. 5: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels

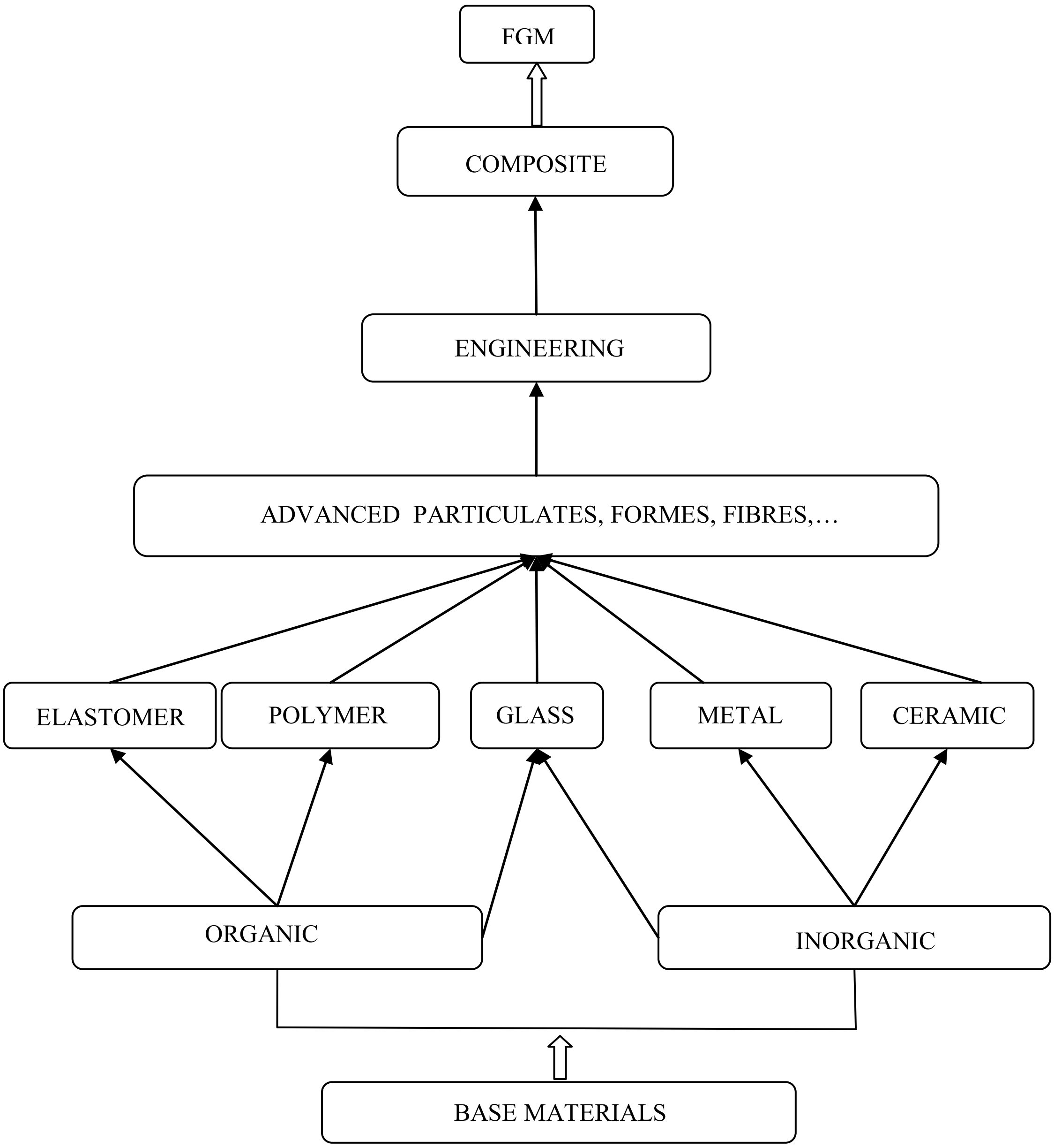


Figure I. 6: Représentations hiérarchiques des matériaux modernes

Yoshihisa (2004) a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (figure I .7). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

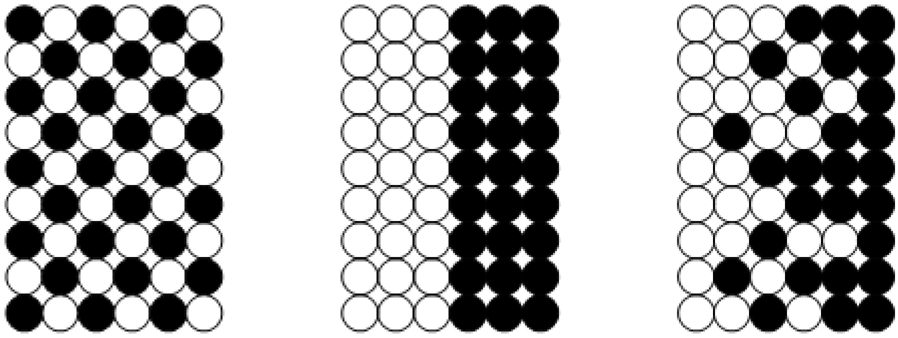


Figure I. 7: La distribution composante des matériaux (Yoshihisa 2004)

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c) Récemment, l'utilisation de matériaux FG a été largement répandue dans les micros et nanostructures tels que les systèmes micro et nano-électromécaniques (MEMS et NEMS)

I.5 Applications FGM dans les dispositifs nano optoélectroniques

De nos jours, les matériaux FGM sont largement utilisés pour les couches anti réfléchissant, les fibres, les verres GRIN et d'autres éléments passifs fabriqués à partir de diélectriques, également pour les capteurs et les applications énergétiques. Par exemple, la modulation de l'indice de réfraction pourrait être obtenue dans de tels composants grâce à la modification de la composition du matériau. Une autre possibilité est d'appliquer le concept de gradation dans les dispositifs actifs à semi-conducteurs. Dans les semi-conducteurs, la fonction matérielle peut décrire le taux de bande interdite énergétique, l'indice de réfraction, la concentration du porteur, la mobilité des porteurs, la longueur de diffusion, le champ électrique intégré et d'autres propriétés qui influent fortement sur les paramètres des dispositifs optoélectronique.

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux en perspective pour l'optoélectronique moderne, des périphériques, comme les lasers à bord de faible seuil et réglables photo détecteurs.

I.5.1 Photo détecteur à haute efficacité et cellules solaires

La limitation fondamentale de l'efficacité des cellules solaires à base de silicium homogène est la largeur énergétique constante des bandes dans les matériaux en vrac. Parce

que le rayonnement énergétique élevé est absorbé dans une couche superficielle sous la surface, il est nécessaire de former un champ électrique à proximité immédiate de la surface. Les porteurs générés peuvent effectivement être séparés dans un champ électrique, donc la longueur de diffusion des supports devrait être plus longue que la jonction profondeur.
Un autre facteur qui diminue l'efficacité de la génération du transporteur est la différence de l'écart énergétique et de l'énergie des photons absorbés. En utilisant des matériaux avec une gradation de l'écart de bande énergétique, il est possible de faire correspondre le bord d'absorption avec l'écart de bande, ce qui améliore l'efficacité de génération. L'appareil de cascade de jonctions avec différentes largeurs énergétiques de largeur de bande pourrait être l'une des solutions . Une autre façon de surmonter cette limitation est l'utilisation de matériaux classés. L'idée d'un tel dispositif est illustrée à la figure I.8.

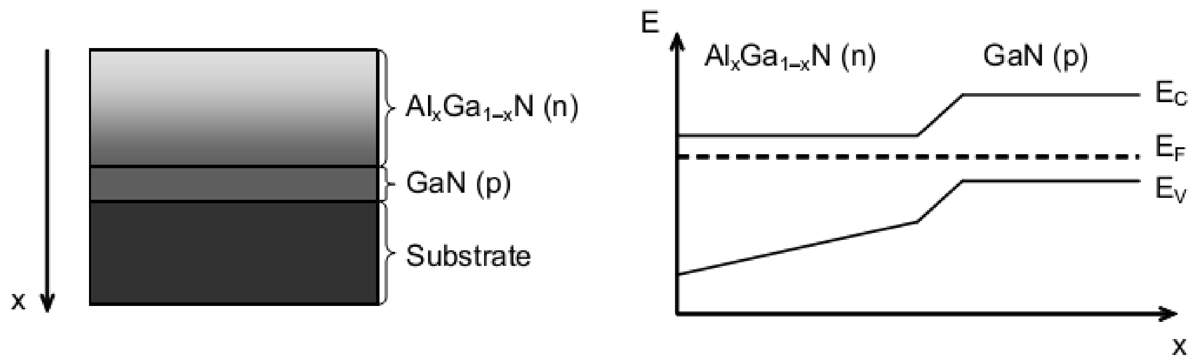


Figure I. 8: Schéma de structure *p-n* photodiode avec couche graduée

I.5.2 Couches tampons graduées pour l' hétéro-épitaxie

Typiquement, les nitrures sont cultivés sur des substrats qui ne s'adaptent pas de manière structurelle et thermique à la couche épitaxiale. Le décalage structurel et thermique peut atteindre jusqu'à 30%. Il existe plusieurs méthodes qui pourraient aider à surmonter ce problème, comme la technique de super couche épitaxiale latérale multicouches à basse température ou l'application de substrats structurés. En utilisant des matériaux classés, comme exemple $Al_xGa_{1-x}N$ Il est possible de distribuer la déformation dans la couche tampon et de réduire les fissures dans la couche active. Parce que le réseau et le coefficient de dilatation thermique changent continuellement avec le contenu d'Al dans GaN, la tension est donc agitée doucement à travers une couche graduée. L'idée de la couche tampon graduée est illustrée à la Figure I.8.

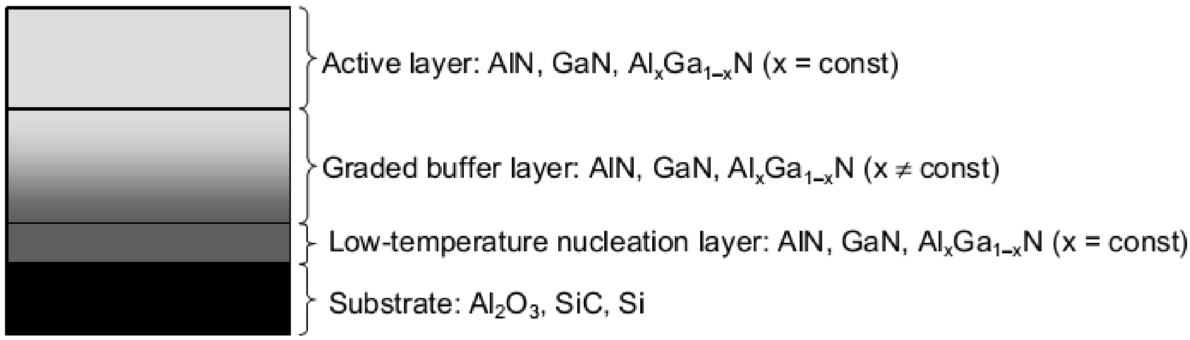


Figure I. 9: Structure de heteroepitaxie rainurée A^{III} N composés avec une couche tampon graduée

I.5.3 Photo détecteurs réglables

La théorie fondamentale de la génération de bande à bande suppose que seuls les photons avec une énergie supérieure à l'écart énergétique peuvent créer une paire électron-trou. Le concept principal de photo détectrice accordable se réfère à la possibilité de déplacer le bord d'absorption. Un autre défi dans de tels dispositifs est la séparation des supports générés.

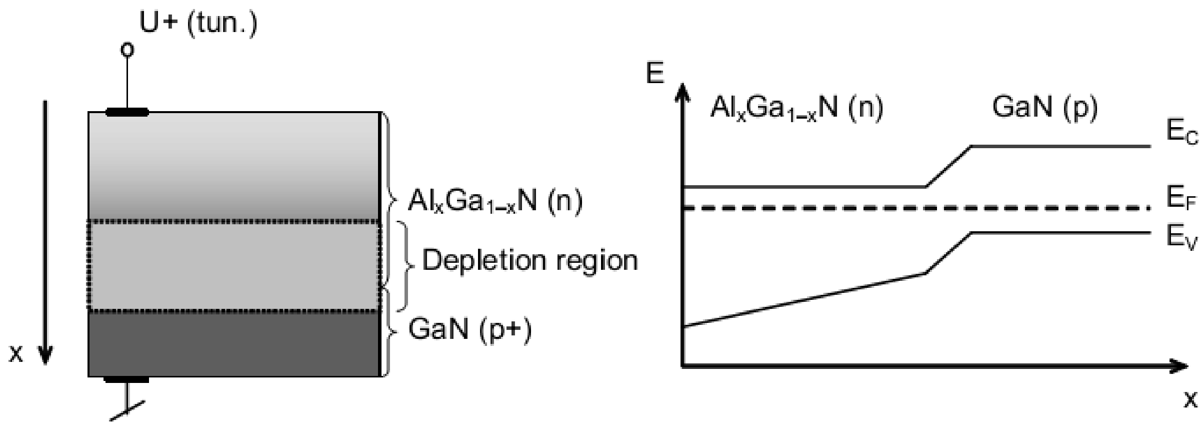


Figure I. 10: Schéma de structure Photo détecteurs réglables

Le concept schématique de la photo détectrice accordable en tension est représenté sur la Figure. I.9. En changeant la tension entre la région *p* et *n*, il est possible de moduler l'épaisseur de la région d'appauvrissement. Parce que seuls les supports qui atteignent la région d'appauvrissement peuvent être séparés, la tension influence donc le bord d'absorption (la région d'appauvrissement recouvre la couche avec un écart énergétique différent).

I.6 Applications FGM dans matériaux thermoélectriques

Un bon matériau thermoélectrique possède un coefficient Large Seebeck, une conductivité électrique élevée et une faible conductivité thermique. Une conductivité électrique élevée est nécessaire pour minimiser le chauffage de Joule, tandis qu'une faible conductivité thermique permet de conserver la chaleur aux jonctions et de maintenir un grand gradient de température.

Ces matériaux, cependant, ont un rapport constant de la conductivité électrique à la conductivité thermique, de sorte qu'il n'est pas possible d'augmenter un sans augmenter l'autre. Les métaux les mieux adaptés aux applications thermoélectriques possèdent donc un coefficient élevé de Seebeck. Malheureusement, la plupart de ces métaux possèdent des coefficients Seebeck de l'ordre de 10 microvolts / K, ce qui entraîne une efficacité de seulement des fractions de pourcentage. Par conséquent, le développement de semi-conducteurs formulés avec des coefficients Seebeck supérieurs à 100 microvolts / K a augmenté l'intérêt pour la thermoélectricité. Plus tôt, on ne savait pas que les semi-conducteurs étaient des matériaux thermoélectriques supérieurs en raison de leur rapport plus élevé entre la conductivité électrique et la conductivité thermique, par rapport aux métaux. Une valeur de mérite supérieure Z d'un matériau thermoélectrique présente une performance supérieure à une plage de températures étroite spécifique. D'autre part, la température spécifique peut être déplacée vers une température plus élevée en augmentant la concentration du support. Le tellurure de bismuth (Bi2Te3), le tellurure de plomb (PbTe) et l'alliage de Si-Ge (SiGe) sont utilisés respectivement pour la gamme de température basse, moyenne et haute. Habituellement, on utilise un matériau thermoélectrique monolithique et uniforme, bien qu'il existe un gradient de température dans le matériau thermoélectrique. Par conséquent, chaque partie n'a pas une concentration de porteur appropriée pour chaque température. On peut s'attendre à deux fois une performance supérieure à celle d'un matériau thermoélectrique traditionnel, si le gradient de concentration du support approprié est effectué pour s'adapter au gradient de température. L'exécution d'un changement par étapes de la concentration du transporteur est également une méthode d'exécution pour une application pratique. C'est un concept fondamental de la conversion d'énergie des FGM.

Il est essentiel de choisir un matériau approprié pour chaque partie pour s'adapter au gradient de température. Le matériau approprié est un matériau avec une concentration adéquate du support et un composé approprié pour correspondre à la température de chaque partie le long du gradient de température. L'assemblage FGM de ces matériaux et les électrodes de montage avec interface FGM sont également essentiels, parce que la relaxation du contrainte thermique causée par la différence de coefficient de dilatation thermique est importante à haute température.

Les matériaux thermoélectriques à structure FGM présentent une performance supérieure à celle des matériaux monolithiques. L'assemblage FGM est également une technique utile pour le réglage d'une électrode.

Afin de relâcher le charge thermique et de supprimer l'inter-diffusion. Cependant, il est difficile d'améliorer la performance en contrôlant la taille des cristaux. D'autre part, la mesure exacte de la conductivité thermique à haute température est un autre problème pour la conception précise d'une FGM.

I.7 Applications FGM dans les nanotubes de carbone

Le concept de matériau à gradient fonctionnel (FGM) a également été utilisé pour la première fois pour relier les matériaux classiques à leurs nano composites avancées contenant une forte concentration de nanotube de carbone CNT, ce qui est prometteur pour des applications structurelles, électroniques et biomatériaux inexplorées mais nouvelles.

Contrairement aux matériaux composites, les composites FG ont de nouvelles propriétés uniques, la capacité à fabriquer des propriétés mécaniques directionnelles, une capacité de température plus élevée (propriétés de dilatation thermique inférieure), une excellente fatigue et une résistance aux fractures. Le développement technologique relativement immature et les méthodes de fabrication complexes actuelles sont les principaux inconvénients. Il est difficile de satisfaire aux exigences strictes de stabilité dimensionnelle pendant la gradation et entraîne un coût plus élevé du produit.

I.7.1 Applications CNT dans FGM

Les poudres métalliques sont utilisées dans l'industrie pour la diversité des produits et applications. La métallurgie de poudre traditionnelle est le procédé où la poudre de métal ou d'alliage est compacte à un corps vert et ensuite fritté jusqu'à la forme nette proche à un niveau élevé les températures.

Les poudres métalliques les plus importantes utilisées sont: Fer et acier, cuivre, aluminium, nickel, molybdène (Mo), Tungstène (W), Tungstène cabine (WC), Tin (Sn) et leurs alliages.

Matrice métallique renforcée CNT Matrices classiques fonctionnelles, En raison de leur combinaison unique de dureté, de ténacité et de résistance, sont universellement utilisés dans les outils de coupe, les perceuses, l'usinage des matériaux résistants à l'usure, des mines et du forage géothermique.

Les matériaux à composition graduée fonctionnelle renforcés par la CNT ont la capacité de générer de nouvelles fonctionnalités et d'exécuter de nouvelles fonctions qui sont plus efficaces que les plus grandes structures et machines.

En raison de l'utilisation fonctionnelle des matériaux FGM, leur propriétés physiques / chimiques (par exemple stabilité, dureté, conductivité, réactivité, sensibilité optique, point de fusion, etc.) peuvent être manipulés pour améliorer les propriétés globales de matériaux conventionnels.

I.7.2 Processus de fabrication

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM renforcé par nanotube de carbone (FG-CNTRC) sont des composites préparés par une variété de techniques traitement.

Poudre métallurgique est le plus populaire et largement appliqué comme technique de préparation des composites FGM renforcées par nanotube de carbone. Les électrodépositions et les dépôts électrochimiques sont les secondes techniques les plus importantes pour le dépôt de revêtements minces des matrices métalliques de matrice CNT ainsi que le dépôt de métaux sur CNT.

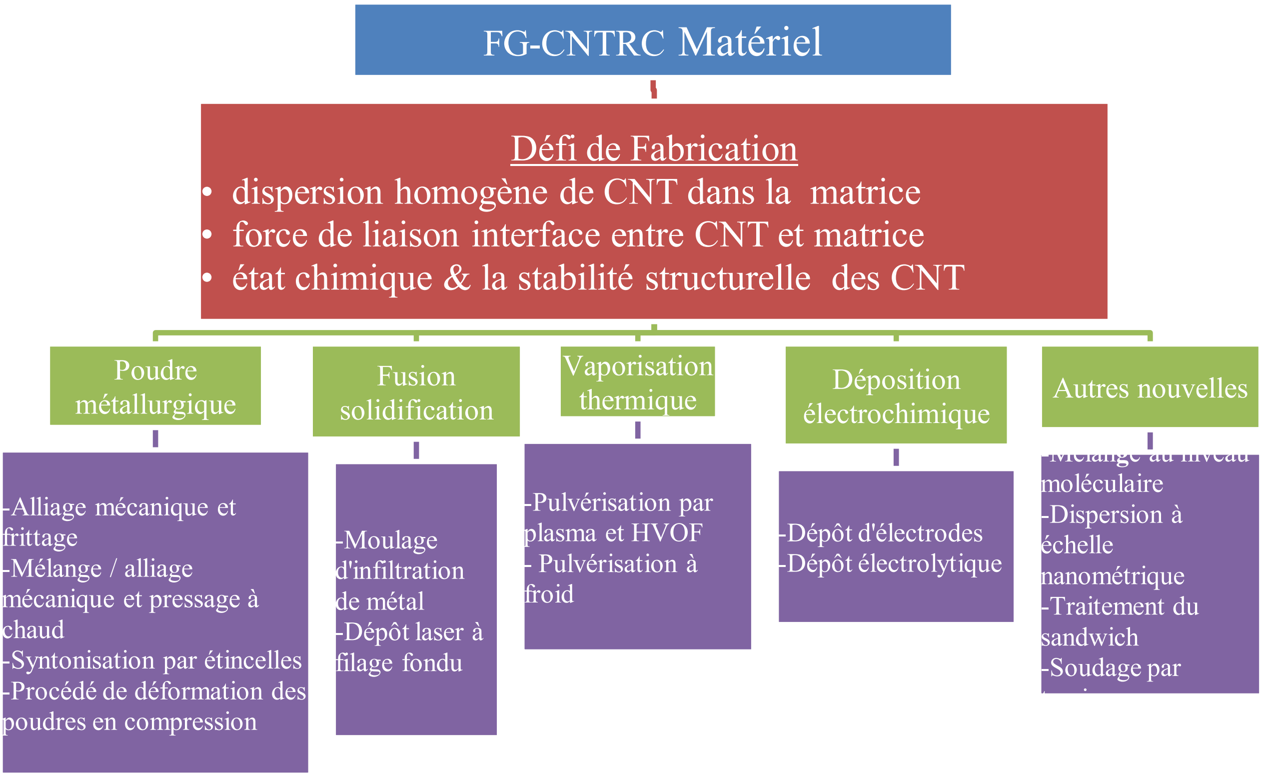


Figure I. 11: Techniques de traitement FGM renforcé par nanotube de carbone

I.8 Conclusion

L'utilisation des matériaux FGM a connu un développement remarquable, notamment dans les nanostructures. Ceci va pousser les chercheurs à explorer ses caractéristiques mécaniques, électriques et autres afin d'avoir une bonne utilisation dans les divers domaines techniques.

REFERENCES

[1] Bachir Bouiadjra Rabbab. (2015), Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaisses en Composite sur Fondations Elastiques. THESE DE DOCTORAT.USTO.

[2] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa (1986) casting of AL_2O_3/ZrO_2 laminated composites.

[3] Carbonari, R.C., Silva, E.C.N., and Paulino, G.H. (2007) Topology opti-mization design of functionally graded bimorph-type piezoelectric actuators.Smart Materials and Structures, 16(6), 2607–2620.

[4] Gururaja Udupa, S.Shrikantha rao, K.V.Gangadharan "Future applications of Carbon Nanotube reinforced Functionally Graded Composite Materials "(2012) IEEE-International Conference On Advances In Engineering, Science And Management (ICAESM -2012) March 30, 31, 2012.

[5] I. Shiota and I. A. Nishida, "Development of FGM thermoelectric materials in Japan-the state of the art," 16th International Conference on Thermoelectrics, IEEE, pp. 364-370, 1997.

[6] Isha Bharti, Nishu Gupta, and K. M. Gupta. (2013), "Novel Applications of Functionally Graded Nano,Optoelectronic and Thermoelectric Materials", International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing,., Vol. 1, No. 3, August 2013.

[7] Koizumi, M. (1996),―FGM activities in Japan‖, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.

[8] Lee, W.Y., Stinton, D.P., Berndt, C.C., Erdogan, F., Lee, Y.D., and Mutasim, Z. (1996) Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications. Journal of the American Ceramic Society, 79(12), 3003–3012.

[9] Pindera, M.-J., Arnold, S. M, Aboudi, J, and Hui, D., "Use of Composites in Functionally Graded Materials," Composites Eng.4, pp. 1-145, 1994.

[10] M. Wosko, B. Paszkiewicz, T.Piasecki, A. Szyszka, R. Paszkiewicz, and M. Tlaczala, Application of functionally graded materials in optoelectronic devices, optical Application, vol. 35, no. 3, 2005.

[11] Mehdi Estili , Kenta Takagi, Akira Kawasaki.Advanced nanostructure-controlled functionally graded materials employing carbon nanotubes.(2010)Materials Science Forum Vols 631-632 (2010).

[12] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A, Rabin, B. H., Kawasaki, A, and Ford, R. G., » functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications", Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.

[13] MÜLLER E., DRAŠAR C., SCHILZ J., KAYSSER W.A., Functionally graded materials for sensor and energy applications, Materials Science and Engineering A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing A362(1-2), 2003, pp. 17–39.

[14] Reiter T, Dvorak GJ, Tvergaard V (1997) Micromechanical models for graded composite materials. J Mech Phys Solids 45: 1281-302.

Chapitre II

Elasticité non locale dans l'étude des plaques

Chapitre II Elasticité non locale dans l'étude des plaques

I1.1 Introduction

La compréhension de la réponse mécanique des structures à l'échelle nanométrique (Structures à petite échelle de dimension nanométrique), telles que flexion, vibration et le flambement, est indispensable pour le développement et la conception précise de ces Nanostructures. Jusqu'à présent, l'expérimentation sur l'étude des actions des structures à l'échelle nanométrique est réalisable, mais assez difficile. La manipulation de chaque paramètre à l'échelle nanométrique est une tâche compliquée. En outre, les méthodes de simulation par ordinateur telles que la modélisation de la dynamique moléculaire (MD) et la simulation de nanostructures sont très coûteuses et coûteuses dans le temps pour les systèmes de matériaux à échelle réduit. En outre, du point de vue d'un ingénieur, nous ne sommes peut-être pas spécialisés en MD car il s'agit plus d'une chimie traitant des atomes, des molécules, des liens et des forces inter atomes

Modélisation et étude des nanostructures est résumé dans la figure II.1.

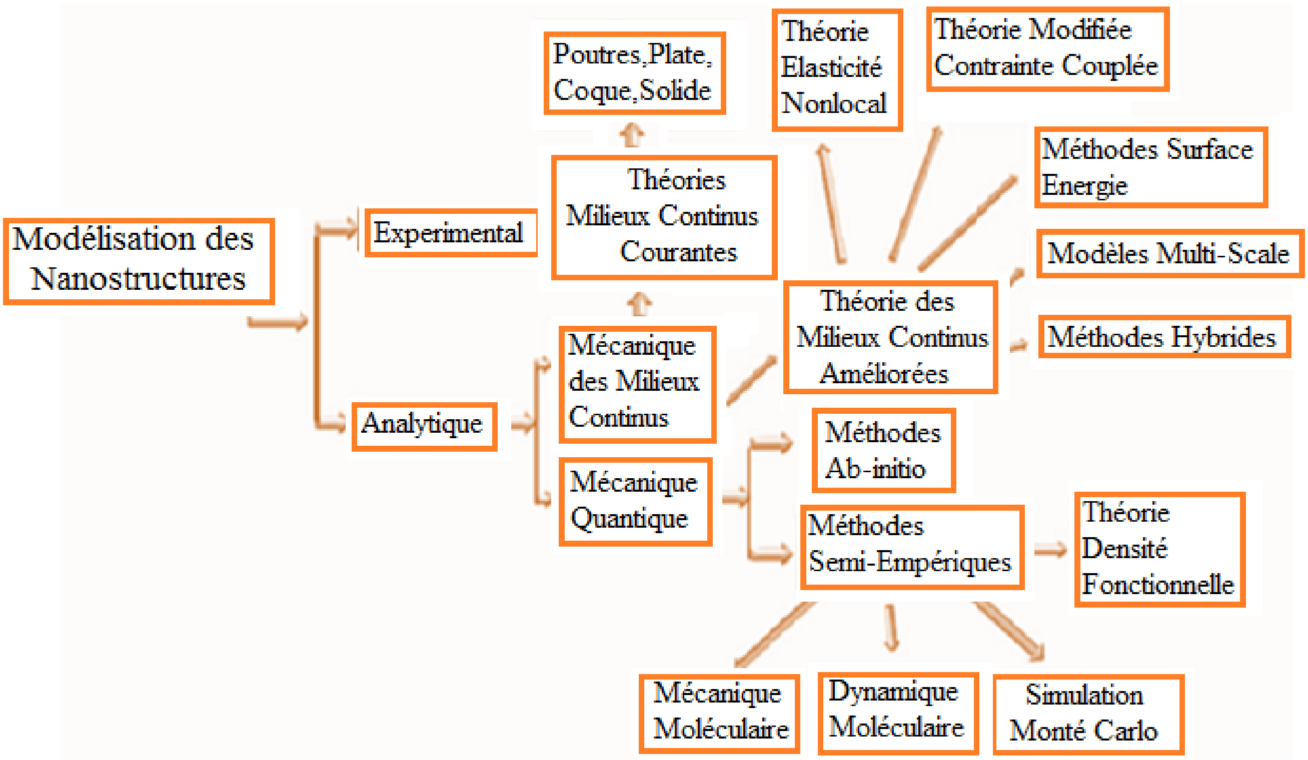


Figure II. 1: Approches utilisées pour modélisation et étude des nanostructures

Certaines des investigations antérieures et actuelles sur les nanomatériaux et les nanostructures, telles que les CNT et les graphèmes, sont réalisés par les méthodes expérimentales. Une approche expérimentale à l'échelle nanométrique est évidemment une meilleure façon d'analyser le comportement du matériau car il est plus réaliste. Cependant, dans l'étude expérimentale, le contrôle de chaque paramètre à l'échelle nanométrique est une tâche difficile.

Concernant MD, en raison des inconvénients physiques et du manque de possibilités de méthodes d'expérimentation, de nombreux scientifiques et ingénieurs ont recours à la simulation technique à niveau atomique.

Les méthodes de simulation sont en fonction d'échelle de longueur et celui du temps comme illustré dans la figure II.2.

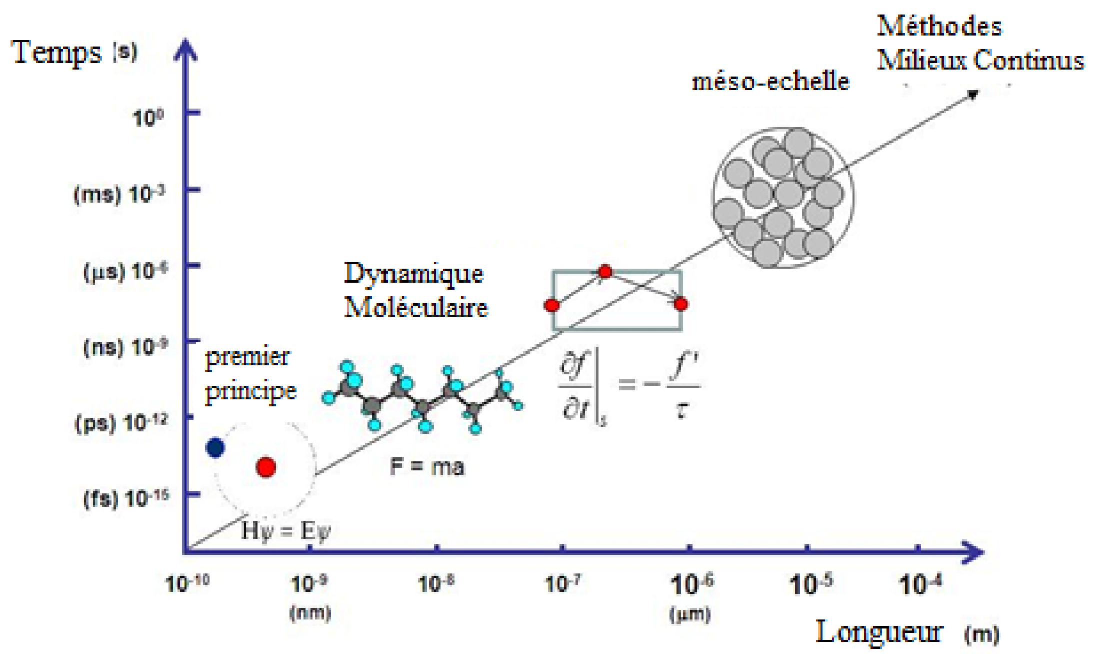


Figure II. 2: Méthodes de simulation

La dynamique moléculaire se réfère à des simulations d'informatiques coûteuses représentant des mouvements physiques d'atomes et des molécules à l'échelle nanométrique. Dans une simulation MD, le mouvement de Les atomes individuels dans un assemblage de N atomes ou de molécules sont modélisés sur la base d'une dynamique déterministe newtonienne ou d'un type Langevin Dynamique stochastique, compte tenu des coordonnées de position initiales et des vitesses des atomes. En appliquant les équations de mouvement de Newton, les trajectoires des molécules et des atomes sont alors déterminés. Les fonctions potentielles sont définies selon lequel les particules interagiront. Dans les simulations MD, les forces entre les particules et l'énergie potentielle sont définis par la mécanique moléculaire des champs de force. Les méthodes de simulation moléculaire, cependant, souffrent du désavantage que ceux-ci sont sophistiqués, nécessitent plus de ressources informatiques, nécessitent de résoudre un grand nombre d'équations et sont très coûteux et prennent un long temps d'étude.

II.2 Aperçu sur les nanostructures

Une nanostructure est un petit objet de taille intermédiaire entre les structures moléculaires et microscopiques (taille micrométrique). Les propriétés remarquables des nanostructures sont à l'origine d'une recherche intense dans le monde entier. Par conséquent, ces jours-ci, un nombre croissant de structures à l'échelle nanométrique sont fabriquées Dans le monde entier et sont utilisés comme éléments de base domaine de la nanotechnologie. Certaines des structures à l'échelle nanométrique comprennent les nanoparticules, les nano fils, les nano poutres, les nano anneaux, les nano rubans, les nano plates, les nanotubes (CNT) et les composants des nano machines.

- **Nanoparticules** : Ce sont de petits nano-objets considérés comme une unité entière en ce qui concerne son transport et ses propriétés. Ces particules présentent des propriétés dépendant de la taille et ont des dimensions dans la gamme de 1-100 nm.
  Ces nanoparticules peuvent être incorporées dans un matériau parent pour former des nano composites avancées.
- **Nano poutre and nano tiges** Ces structures à petite échelle sont classées en nanostructures unidimensionnelles. Elles ont des applications dans des systèmes micro électromécaniques (MEMS) et des systèmes nano électromécaniques (NEMS). La figure II.2 (a) montre l'image de force atomique typique d'un nano barre de dimensions nanométriques
- **Nano fils :** Il s'agit de nanostructures unidimensionnelles avec des diamètres dans la gamme des nanomètres. Ces nano fils ont généralement un rapport d'aspect, c'est-à-dire une longueur de diamètre de 1000 ou plus. Ils peuvent être utilisés pour construire la prochaine génération de dispositifs informatiques, améliorer les dispositifs de cellules solaires, etc. Une image typique du nano fil est illustrée à la figure II.2 (b).
- **Nano plaques :** Ceux-ci sont reconnus comme des nanostructures bidimensionnelles. Les nano plates sont un nouveau sous-groupe de nanostructures ascendantes avec une forme bidimensionnelle. Des exemples de nano plates minces sont des feuilles de graphène, des nano plates d'or, etc. Une image typique de nano plate est illustrée à la

figure II.2 (c). Les nanostructures bidimensionnelles ont une application potentielle dans le stockage de l'information, le catalyseur, les transducteurs, les cellules solaires, les MEMS / NEMS et les composants dans les nano machines, etc.

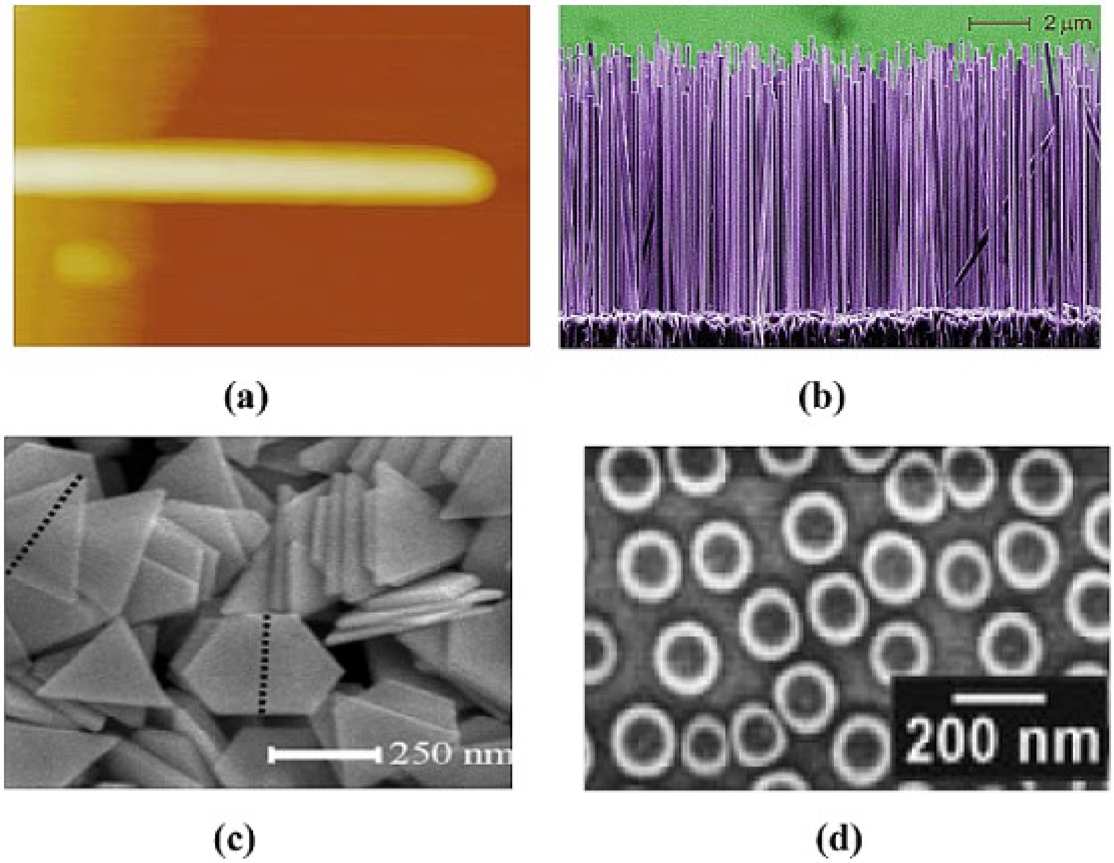
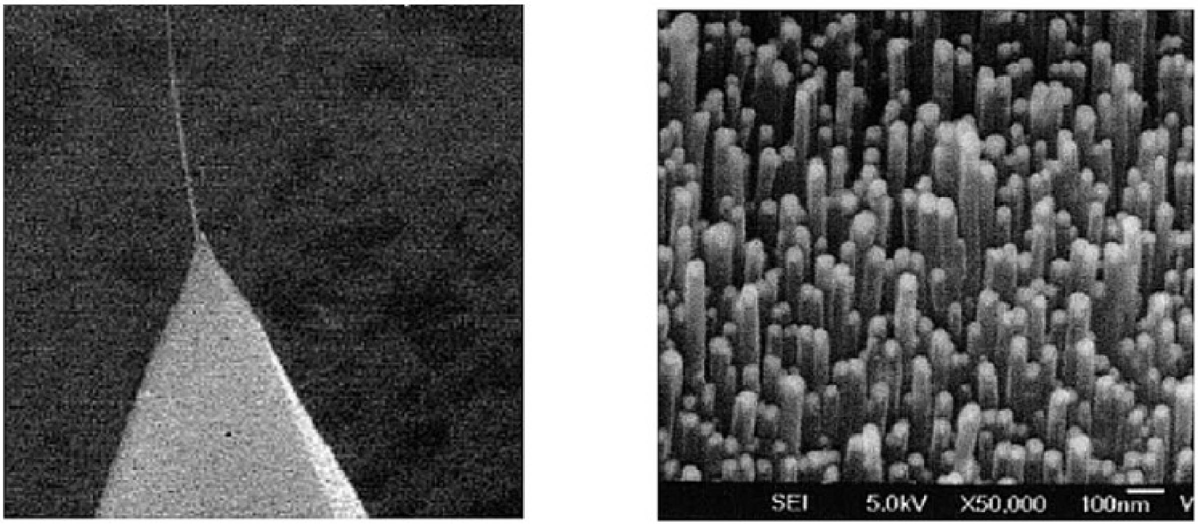


Figure II. 3: a) Une image de microscope à force atomique de nano barre avec un diamètre de 35,3 nm d'environ 600 nm de longueur ; b) les nano fils ; c) microscope électronique à balayage à grossissement élevé de nano plates d'or monocristallin ; d) balayage de micrographies électroniques de nano anneaux de 100 nm de diamètre

- **Nano anneaux :** Un nano anneau est un petit cristal formé par un anneau. Le diamètre est compris entre 50 nm et 1 µm. Les nano anneau pourraient servir de capteurs à l'échelle nanométrique, de résonateurs et de transducteurs. Ces structures à petite échelle pourraient constituer une plate-forme unique pour étudier les effets piézoélectriques et d'autres phénomènes à petite échelle. La figure II.2 (d) montre une image de nano anneau extraite du microscope électronique à balayage

- **Nano rubans :** Ce sont des bandes minces de nano feuilles ou des CNT à une seule couche déroulés. Les nano rubans tels que les nano feuilles de graphène peuvent une alternative technologique aux semi conducteurs de silicium en raison de leurs propriétés semi-conductrices.



a) b)

Figure II. 4: a) Microscope électronique à balayage de SWCNT cultivé sur pointe conique de Si, b) forêt MWCNT sur substrat en verre

Chaque élément en forme de tige est l'image de MWCNT avec un diamètre de l'ordre de dizaines de nanomètres.

- **Nanotubes :** Parmi les nombreuses structures nanométriques, les nanotubes ont suscité un grand intérêt pour la communauté scientifique en raison de leurs propriétés mécaniques, électroniques, électrochimiques et électriques exceptionnelles.
  Les nanotubes sont des cylindres longs et minces de macromolécules composées d'atomes de carbone dans un arrangement hexagonal périodique. En général, on a distingué deux variétés de ces tubes, la CNT à une seule paroi dénommée SWCNT et la CNT à plusieurs parois dénommée MWCNT, cette dernière consistant en un ensemble de Tubes concentriques à paroi unique imbriqués à l'intérieur. Un CNT à double paroi est illustrée à la figure II.4.

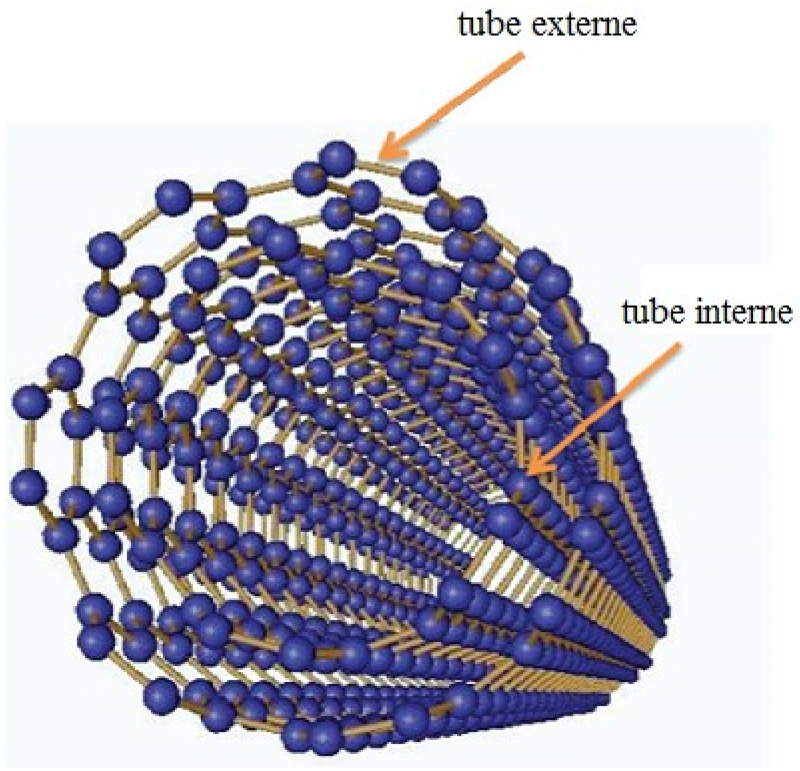


Figure II. 5: Schéma d'un nanotube de carbone à double parois

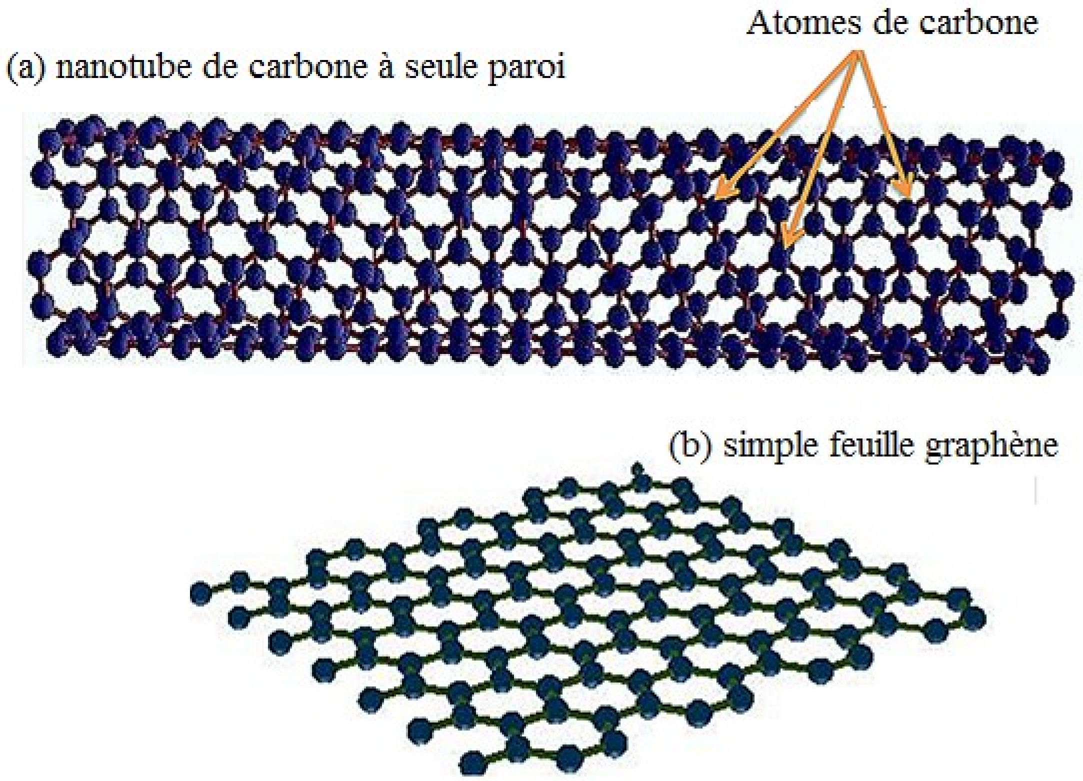


Figure II. 6: Schéma a)nanotube à un seul tube b) feuille graphène

II.3 Approches de la mécanique des milieux continus

En de telles applications, les petites influences d'échelle sont souvent démontrées. Ces influences peuvent être prises en compte par l'utilisation d'une mécanique des milieux continus dépendant de la taille telle que la théorie du gradient de déformation (Nix and Gao, 1998; Lam et al., 2003; Aifantis, 1999),et la théorie du couple contrainte modifiée (Koiter, 1969; Mindlin and Tiersten, 1962 Toupin, 1962),

II.4 Théorie d'élasticité non locale pour plaques

Le développement d'une équation de mouvement nécessite des relations constitutives non locales. Des relations constitutives bidimensionnelles non locales sont fournies. Des relations analytiques simples sont fournies pour déterminer les fréquences naturelles et les charges de flambement des feuilles de graphène à couche unique idéalisées (SLGS). Une tentative a été faite de souligner la signification de l'effet de la non-localité sur la réponse des feuilles de graphène. La nouvelle méthode structurale non locale peut réduire l'écart entre la dynamique moléculaire (MD) et la mécanique du milieu continu sans effet d'échelle pour fournir un moyen viable d'étudier des objets nano importants au-delà de graphène. Les feuilles de graphène peuvent être modélisées en tant que nano plate en théorie du milieu continu non local.

II.4.1 Non-locale plate pour feuille graphène

Le diagramme schématique des feuilles de graphène comme plate non locale est illustré à la figure II.6. Les atomes de carbone du graphène à petite échelle sont considérés comme n'étant pas de nature locale. Cela implique que la contrainte à un point dépend non seulement de la contrainte à ce point, mais aussi des contraintes de tous les points du corps. En utilisant ce concept, les feuilles de graphène discrètes peuvent être modélisées comme une plaque élastique non-locale continue. La nature discrète du graphène est décrite dans un continu élastique non local.

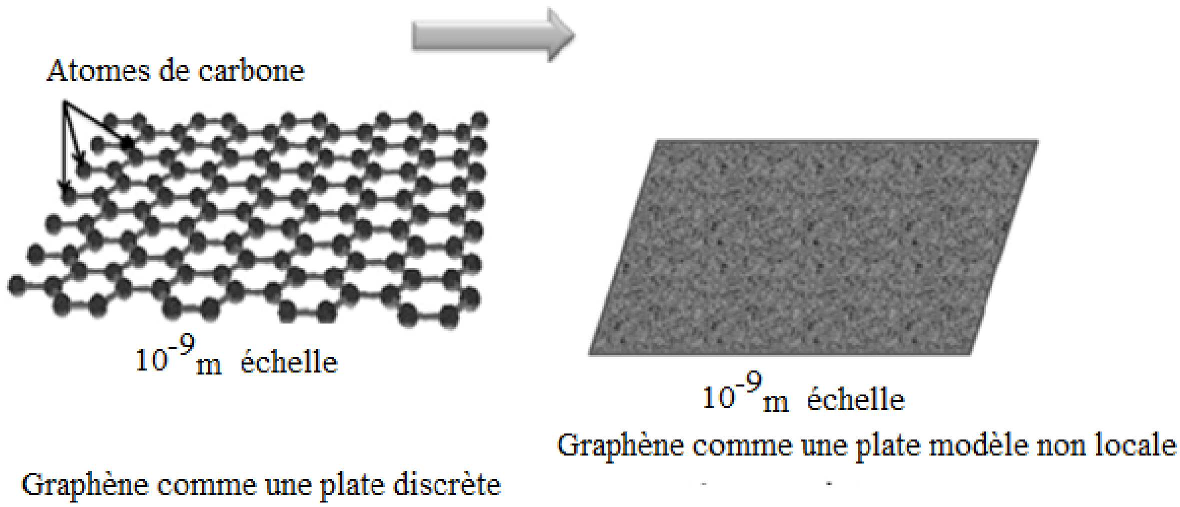


Figure II. 7: Modélisation d'une feuille graphène en théorie non local plaque

II.4.2 Relations constitutives pour non-locale plaque

Considérons l'origine choisie dans un coin des SLGS rectangulaires. Les axes de coordonnées dans la plaque non locale mappée équivalente sont indiqués à la figure II.7. La coordonnée x de l'axe est prise le long de la longueur des feuilles de graphène, la coordonnée y est prise le long de la largeur et la coordonnée z est prise le long de l'épaisseur du graphène (compte tenu d'une épaisseur atomique constante, h).

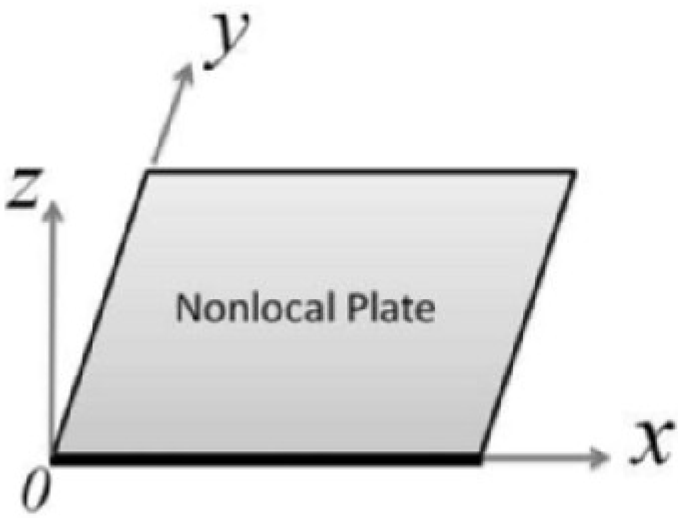


Figure II. 8: Modèle de plate non locale avec le système de coordonnées

En utilisant la théorie du milieu continu avancé de la théorie des plaques non locales, en appliquant comme équations de régulation pour une structure de graphène (plaque idéalisée), beaucoup d'études ont été menées par des chercheurs. Les études comprennent l'analyse de flexion, de vibration et de flambement du graphène, qui a été brièvement discuté dans ce chapitre. Il est important de noter que l'élasticité locale est capable de donner une prédiction étroite du comportement au graphène par rapport aux résultats de la simulation MD. Cependant, les résultats locaux ne sont pas exacts car nous ignorons les effets de taille importants à l'échelle nanométrique. À partir des théories des plaques non locales, les études sur l'analyse de flexion, de vibration et de flambement du graphène ont prédit une plus grande déviation, des fréquences plus petites et des charges de flambement par rapport aux théories classiques des plaques.

II.5 Conclusion

Diverses méthodes sont utilisées pour l'étude des plaques, vu que les méthodes expérimentales se présent dans la plus part des cas coûteuses, les modèles proposés peuvent donner satisfaction et avoir un reflet scientifique dans l'analyse des nanostructures.

Références

[1] Danilo Karličić ,Tony Murmu, Sondipon Adhikari,and Michael McCarthy. (2016), " Non-local Structural Mechanics. Book Wiley.

[2]Nix, W.D., Gao, H. (1998), "Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46, 411-425.

[3]Lam, D.C.C, Yang, F, Chong, A.C.M., Tong, P. (2003), "Experiments and theory in strain gradient elasticity", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51, 1477-1508. 17.

[4]Aifantis, E. (1999), "Strain gradient interpretation of size effects", International Journal of Fracture, 95, 299-314.

[51]Koiter, W.T. (1969), "Couple-stresses in the theory of elasticity, I & II", Journal of the Philosophical transactions of the royal society of London B , 67, 17-44.

[6]Mindlin, R, Tiersten, H. (1962), "Effects of couple-stresses in linear elasticity", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11, 415-448.

[7]Toupin, R.A. (1962), "Elastic materials with couple-stresses", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11, 385-414.

[8]Eringen, A.C. (1972), "Nonlocal polar elastic continua", International Journal of Engineering Science, 10, 1-16.

[9] BYPIN LU,P.Q.ZHANG,H.P.LEE,C.M.WANG,AND J. N. REDDY. (2007), "Non-local elastic plate theories", The Royal Society (2007)463, 3225–3240

Chapitre III

Analyse de la vibration libre des nano plaques FGM avec fondations élastiques

Chapitre III Analyse de la vibration libre des nano plaques FGM avec fondations élastiques

III.1 Introduction

En se référant à l'étude mécanique des structures de plaques, le comportement linéaire de vibration à la flexion libre des nano plates FG dépendant de la taille est analysé par Natarajan & al(2012) en employant la méthode iso géométrique basée sur la méthode des éléments finis. Dans cette recherche, ils ont utilisé la relation constitutive non locale basée sur la forme différentielle d'Eringen issu de la théorie de l'élasticité non locale. Les propriétés dynamiques de la poutre FG avec l'obtention du matériel de la loi de puissance dans les directions axiale ou transversale ont été étudiées par Alshorbagy & al. (2011). Eltaher & al. (2012) a étudié l'analyse des vibrations libre des nano poutres dépendants de la taille de FG. En employant une formulation analytique, l'analyse dynamique des plaques circulaires annulaires FG Mindlin à l'échelle nanométrique est étudiée par Hosseini-Hashemi & al. (2013). Les réponses de résonance des micro-nano plates FG via le modèle de plaque Kirchhoff sont étudiées par Nami & Janghorban (2014). Dans ce travail, ils ont adopté la théorie de l'élasticité non-locale et la théorie du gradient de déformation avec un paramètre de gradient pour inclure les influences à petite échelle.

Daneshmehr & Rajabpoor (2014) ont utilisé une théorie de plaque d'ordre supérieur non locale pour l'analyse du flambement des nano capteurs FG sous des charges bi axiales dans le plan en utilisant une quadrature différentielle généralisée (GDQ). Sur la base d'une théorie du par contrainte couple modifiée, Jung & al. Propose un modèle pour les plaques nanométriques sigmoïdes à gradient fonctionnel (S-FGM) reposant sur un milieu élastique. (2014). Al-Basyouni & al. (2015) a étudié le comportement de flexion et de vibration dépendant de la taille des micro-poutres FG en fonction de la théorie de la contrainte couple modifiée et de la position de surface neutre.

Rahmani & Pedram (2014) ont étudié les effets de taille sur la vibration de FG nano poutres basés sur la théorie de la poutre Timoshenko non locale. Bedroud et al. (2015) ont étudié la stabilité axisymétrique / asymétrique des nano plates circulaires et annulaires FG modérément épaisses sous des charges compressives uniformes dans le plan. Zare et al. (2015) a examiné les fréquences naturelles d'une nano plate FG pour différentes combinaisons de conditions aux limites. Belkorissat et al. (2015) ont discuté des propriétés de vibration de la nano-plaque FG à l'aide d'un nouveau modèle à quatre variables affiné non local. Larbi Chaht et al. (2015) ont présenté à la fois des analyses de flexion et de flambement des poutres à échelle nanométriques dépendants de la taille FG, y compris l'effet d'étirement de l'épaisseur. Zemri & al. (2015) ont étudié la réponse mécanique d'une poutre à l'échelle nanométrique de FG en utilisant une théorie de faisabilité de la théorie de la déformation du cisaillement non linéaire raffinée. Ahouel & al. (2016) a analysé le comportement mécanique dépendant de la taille des nano poutres déformables par cisaillement trigonométrique FG, y compris le concept de position de surface neutre. Bounouara & al. (2016) ont présenté une théorie de déformation du cisaillement de zéro-ordre non local pour la vibration libre des plaques à l'échelle nanométrique FG reposant sur une base élastique.

Dans ce travail, une nouvelle théorie non locale de déformation de cisaillement est utilisée pour l'analyse de la vibration libre pour un nono-plaque rectangulaire type FGM reposant sur appuis élastiques. (Figure III.1)

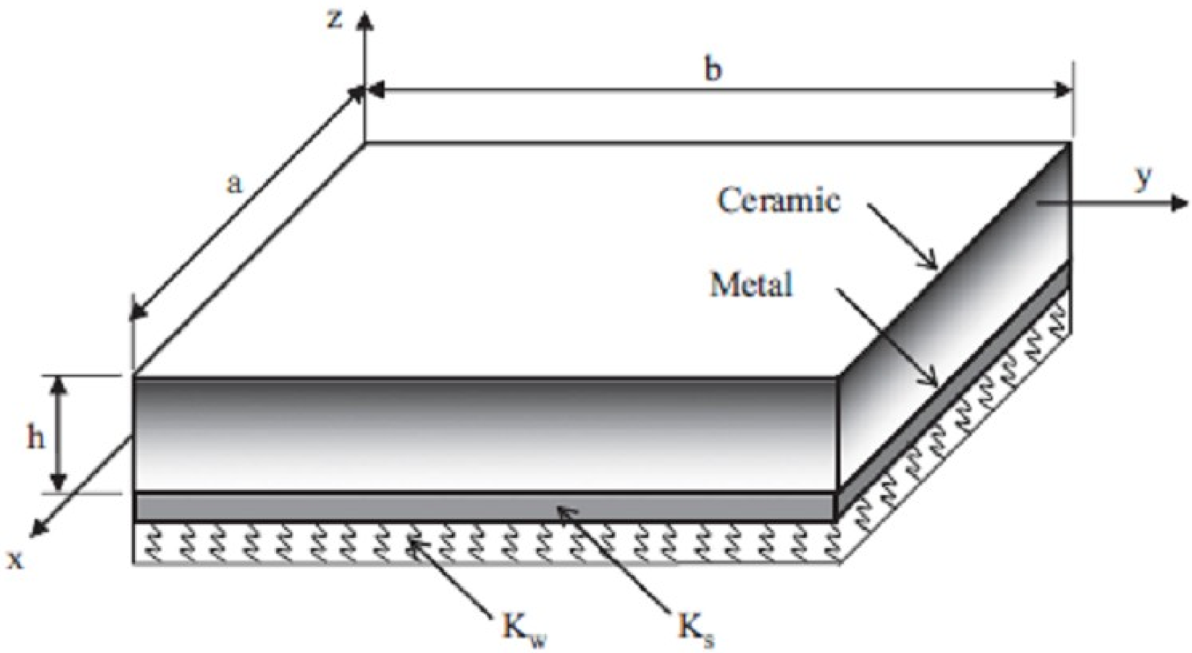


Figure III. 1: Schéma d'une plaque rectangulaire FG reposant sur des fondations élastique

III.2 Formulation théorique

III.2.1 Propriétés effective du matériau FGM

Les propriétés efficaces des matériaux composites homogènes macroscopiques peuvent être dérivées des structures matérielles microscopiques hétérogènes en utilisant des techniques d'homogénéisation. Pour notre cas, la technique d'homogénéisation Mori-Tanaka est adoptée. Cette méthode fonctionne bien pour les composites avec des régions de la microstructure graduée ont une matrice continue clairement définie et une phase particulaire discontinue.

On suppose que la phase matricielle est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulaire.

L'indice "e" désigne la valeur effective d'une propriété matérielle particulière où, comme 'c' et 'm' désignent celle des constituants céramiques et métalliques respectivement. Le module effectif (K) et le module de cisaillement (G) sont calculés comme indiqué ci-dessous:

$$\frac{K_e - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)\dfrac{3(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}} \tag{III.1a}$$

$$\frac{G_e - K_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)\dfrac{(G_c - G_m)}{G_m + f_1}} \tag{III.1b}$$

Avec

$$f_1 = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \tag{III.2}$$

Où V_i ($i=c, m$) est la fraction de volume du matériau en phase. Les indices c et m représentent respectivement les parties céramique et métallique. Les fractions volumiques des phases céramique et métallique sont liées par $V_c + V_m = 1$, V_i écrit comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^n, \quad n \geq 0 \tag{III.3}$$

Où n est l'indice gradient qui détermine la distribution du matériau sur l'épaisseur de la plaque et z est la distance du plan médian du nano plaque FG.

La figure III.2 illustre la distribution de la fraction de volume de la partie céramique à travers la direction z pour la plaque FG.

Le module effectif d'Young E et le coefficient de Poisson υ peuvent être calculés à partir des équations suivantes:

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \tag{III.4a}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \tag{III.4b}$$

La densité effective ρ est calculée à partir de la règle de mélange ci dessous

$$\rho = \rho_c V_c + \rho_m V_m \tag{III.5}$$

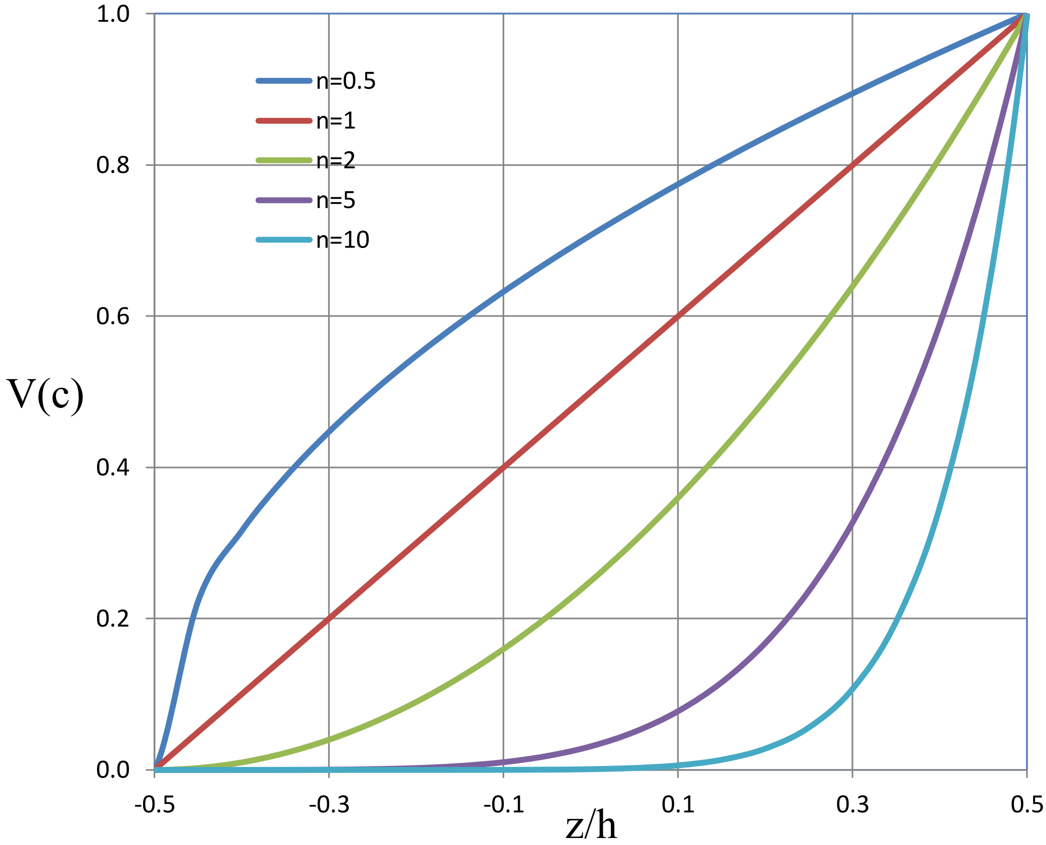


Figure III. 2: Variation de la phase céramique à travers l'épaisseur de la plaque

III.2.2 Equations cinématiques

Les équations classiques de la théorie de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) sont données comme suit :

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\theta_x(x,y,t) \quad \text{(III.6a)}$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\theta_y(x,y,t) \quad \text{(III.6b)}$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad \text{(III.6c)}$$

Ou $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$ sont les cinq variables de déplacements, f(z) présente la fonction de forme qui représente la variation de la déformation et contrainte de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque.

L'état de déplacement sera proposé avec seulement quatre inconnus :

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z)\int \varphi(x,y,t)dx \quad \text{(III.7a)}$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z)\int \varphi(x,y,t)dx \tag{III.7b}$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \tag{III.7c}$$

Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie et on a aussi la fonction cosinus proposée dont la forme est donnée comme suit:

$$f(z) = \frac{z\left(\pi + 2cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right)}{(2+\pi)} \tag{III.8}$$

Les équations de déformations peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{III.9.a}$$

Une écriture simplifiée aura la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z)\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z)\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{III.9.b}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \tag{III.10.a}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1\theta \\ k_2\theta \\ k_1\frac{\partial}{\partial y}\int \theta\, dx + k_2\frac{\partial}{\partial x}\int \theta\, dy \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1\int \theta\, dy \\ k_2\int \theta\, dx \end{Bmatrix} \tag{III.10.b}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \tag{III.10.c}$$

L'intégrale employée dans l'équation ci-dessus se résolve par la solution Navier et qu'on peut donner comme ci joint

$$\frac{\partial}{\partial y}\int \theta\, dx = A'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}\ ,\frac{\partial}{\partial x}\int \theta\, dy = B'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y},\ \int \theta\, dx = A'\frac{\partial\theta}{\partial x},\ \int \theta\, dY = B'\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{III.11}$$

Pou lesquelles *A'* et *B'* sont déterminés selon le type de solution considérée, dans le choix de cas Navier.

Alors *A'* et *B'* sont formulés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}\ , B' = -\frac{1}{\beta^2}\ , k_1 = \alpha^2\ , k_2 = \beta^2 \tag{III.12}$$

III.2.3 Équations du mouvement

Avec le principe de Hamilton, pour lequel le mouvement pour une structure élastique dans un intervalle de temps *t1<t<t2*, est tel que l'intégrale avec le temps pour l'énergie potentielle est :

$$0 = \int_0^t \left(\delta U_p + \delta U_f - \delta K\right) dt \tag{III.13}$$

δU_p : Variation de l'énergie déformation de la plaque
δU_f : Variation de l'énergie déformation du milieu élastique
δK : Variation de l'énergie cinétique
δU_p : Variation de l'énergie déformation de la plaque

L'énergie de déformation virtuelle peut être calculée comme suit:

$$\delta U_p = \int\left[\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\right]dV \tag{III.14}$$

Avec *A* est la surface de la section et *N, M* et *S* sont exprimés par les formules suivantes :

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2}(1, z, f)\sigma_i dz\ ,\ (i = x, y, xy) \tag{III.15.a}$$

et

$$\left(S_{xz}^s, S_{yz}^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} g\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right)dz \tag{III.15.b}$$

$$\delta U_p = \int \begin{bmatrix} \sigma_x \delta(\varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s) + \\ \sigma_y \delta\left(\varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s\right) + \\ \tau_{xy} \delta\left(\gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s\right) + \\ \tau_{yz} \delta\left(g(z) \gamma_{yz}^0\right) + \\ \tau_{xz} \delta(g(z) \gamma_{xz}^0) \end{bmatrix} dV =$$

$$\int \begin{bmatrix} N_x \delta\varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + \\ N_y \delta\varepsilon_y^0 + M_y^b \delta k_y^b + M_y^s \delta k_y^s + \\ N_{xy} \delta\gamma_{xy}^0 + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + \\ S_{yz}^s \delta\gamma_{yz}^0 + \\ S_{xz}^s \delta\gamma_{yz}^0 \end{bmatrix} dA \tag{III.16.a}$$

$$=$$

$$\int \begin{bmatrix} N_x \delta\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\right) + M_x^b \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right) + M_x^s (k_1 \delta\theta) + \\ N_y \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}\right) + M_y^b \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right) + M_y^s (k_2 \delta\theta) + \\ N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x}\right) + M_{xy}^b \left(-2\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y}\right) + M_{xy}^s \left(k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \delta\theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \delta\theta dy\right) + \\ S_{yz}^s (k_2 \int \delta\theta dy) + \\ S_{xz}^s (k_1 \int \delta\theta dx) \end{bmatrix} dA$$

Une autre écriture simplifiée

$$\delta U_p = \int \begin{bmatrix} N_x \delta\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\right) + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y}\right) + \\ N_y \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}\right) + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial x}\right) + \\ M_x^b \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right) + M_y^b \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right) + M_{xy}^b \left(-2\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y}\right) + \\ M_x^s (k_1 \delta\theta) + M_y^s (k_2 \delta\theta) + M_{xy}^s \left[k_1 A' \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial x \partial y}\right] + \\ S_{yz}^s \left(k_2 B' \frac{\partial \delta\theta}{\partial y}\right) + S_{xz}^s \left(k_1 A' \frac{\partial \delta\theta}{\partial x}\right) \end{bmatrix} dA \tag{III.16.b}$$

<u>Intégration par partie</u>

$$\delta u_0: \quad \int N_x \delta\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\right) + \int N_{xy} \delta\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y}\right) = N_x \delta u_0 - \int \delta u_0 \frac{\partial N_x}{\partial x} + N_{xy} \delta u_0 - - \int \delta u_0 \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \tag{III.17.a}$$

$$\delta v_0: \quad \int N_y \delta\left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial x}\right) + \int N_{xy} \delta\left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}\right) = N_x \delta v_0 - \int \delta v_0 \frac{\partial N_x}{\partial x} + N_{xy} \delta v_0 - - \int \delta v_0 \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \tag{III.17.b}$$

$$\delta w_0: \quad \int \left(M_x^b \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + M_y^b \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + M_{xy}^b \left(-2\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) dxdy =$$

$$= M_x^b \left(-\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) - \int \left(-\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial M_x^b}{\partial x} + M_y^b \left(-\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) -$$

$$- \int \left(-\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \frac{\partial M_y^b}{\partial y} + M_{xy}^b \left(-2\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) - \int \left(-2\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y} =$$

$$= M_x^b \left(-\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) - \left[\frac{\partial M_x^b}{\partial x} (\partial \delta w_0) - \int \partial \delta w_0 \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} \right] +$$

$$+ M_y^b \left(-\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial M_y^b}{\partial y} (\partial \delta w_0) - \int \partial \delta w_0 \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ M_{xy}^b \left(-2\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) - \left[\frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y} (-2\delta w_0) - \int (-2\delta w_0) \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\delta\theta: \quad M_x^s\,(k_1 \delta\theta) + M_y^s (k_2 \delta\theta) + M_{xy}^s \left[k_1 A' \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial x \partial y} \right] +$$

$$+ S_{yz}^s \left(k_2 B' \frac{\partial \delta\theta}{\partial y} \right) + S_{xz}^s \left(k_1 A' \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right) =$$

$$= M_x^s (k_1 \delta\theta) + M_y^s (k_2 \delta\theta) + k_1 A' \left[M_{xy}^s \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} - \int \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} \right] +$$

$$+ k_2 B' \left[M_{xy}^s \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} - \int \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} \right] + k_2 B' \left[S_{yz}^s \delta\theta - \int \delta\theta \frac{\partial \delta\theta}{\partial y} \right] +$$

$$+ k_1 A' \left[S_{xz}^s \delta\theta - \int \delta\theta \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} \right] =$$

$$= M_x^s (k_1 \delta\theta) + M_y^s (k_2 \delta\theta) + \qquad \text{(III.17.d)}$$

$$+ k_1 A' \left[M_{xy}^s \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} - \left[\frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} \delta\theta - \int \delta\theta \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \right] \right] +$$

$$+ k_2 B' \left[M_{xy}^s \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} - \left[\frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} \delta\theta - \int \delta\theta \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \right] \right] +$$

$$+ k_2 B' \left[S_{yz}^s \delta\theta - \int \delta\theta \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} \right] + k_1 A' \left[S_{xz}^s \delta\theta - \int \delta\theta \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} \right]$$

Récapitulatif :

$$\delta u_0: \qquad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}$$

$$\delta v_0: \qquad \frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}$$

$$\delta w_0: \qquad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \tag{III.18}$$

$$\delta \theta: \qquad M_x^s(k_1)+M_y^s(k_2)+\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y}[k_1A'+k_2B']+\left(k_2B'\frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y}\right)+$$
$$+\left(k_1A'\frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x}\right)$$

<u>δK : Variation de l'énergie cinétique</u> l'équation générale s'écrit comme suit

$$\delta K = \int\int \rho(z)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \delta u}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \delta v}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right)\right]dxdydz \tag{III.19}$$

<u>Équation 1</u> : selon l'axe *u*

$$\int \rho(z)\left(\dot{u}_0 - z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}+k_1 f(z)A'\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\right)\left(\delta\dot{u}_0 - z\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x}+k_1 f(z)A'\frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial x}\right) \tag{III.20}$$

On a (I_i, Ji, Ki) sont les masses d'inertie définit comme suit :

$$(I_0, I_1, I_2)=\int_{-h/2}^{h/2}(1, z, z^2)\rho(z)dz \tag{III.21.a}$$

$$(J_1, J_2, K_2)=\int_{-h/2}^{h/2}(f, zf, f^2)\rho(z)dz \tag{III.21.b}$$

$$\int \rho(z)\left\{\begin{array}{ll} \int \dot{u}_0\delta\,\dot{u}_0 & = I_0\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 \\ \int\left(-z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\right)\delta\dot{u}_0 & = -I_1\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{u}_0 \\ \int\left(k_1 f(z)A'\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\right)\delta\dot{u}_0 & = J_1 k_1 A'\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{u}_0 \end{array}\right\} \tag{III.22.a}$$

$$\int \rho(z)\left\{\begin{array}{ll} \int \dot{u}_0\left(-z\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x}\right) & = -I_1\dot{u}_0\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x} \\ \int\left(-z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\right)\left(-z\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x}\right) & = I_2\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x} \\ \int\left(k_1 f(z)A'\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\right)\left(-z\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x}\right) & = -J_2 k_1 A'\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x} \end{array}\right\} \tag{III.22.b}$$

$$\int \rho(z)\begin{cases} \int \dot{u}_0\left(k_1 f(z)A'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x}\right) & = J_1\dot{u}_0 k_1 A'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x} \\ \int\left(-z\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\left(k_1 f(z)A'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x}\right) & = -J_2\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}k_1 A'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x} \\ \int\left(k_1 f(z)A'\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\right)\left(k_1 f(z)A'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x}\right) & = K_2 k_1^2 A'^2\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x}\end{cases} \tag{III.22.c}$$

Équation 2 : selon l'axe *v*

$$\int \rho(z)\left(\dot{v}_0 - z\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y} + k_2 f(z)B'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)\left(\delta\dot{v}_0 - z\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} + k_2 f(z)B'\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}\right) \tag{III.23.a}$$

$$\int \rho(z)\begin{cases} \int \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 & = I_0\dot{v}_0\delta\dot{v}_0 \\ \int\left(-z\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\delta\dot{v}_0 & = -I_1\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{v}_0 \\ \int\left(k_2 f(z)B'\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)\delta\dot{v}_0 & = J_1 k_2 B'\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{v}_0\end{cases} \tag{III.23.b}$$

$$\int \rho(z)\begin{cases} \int \dot{v}_0\left(-z\dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right) & = -I_1\dot{v}_0\dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} \\ \int\left(-z\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\left(-z\dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right) & = I_2\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} \\ \int\left(k_2 f(z)B'\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)\left(-z\dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right) & = -J_2 k_2 B'\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\end{cases} \tag{III.23.c}$$

$$\int \rho(z)\begin{cases} \int \dot{v}_0\left(k_2 f(z)B'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}\right) & = J_1\dot{v}_0 k_2 B'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y} \\ \int\left(-z\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\left(k_2 f(z)B'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}\right) & = -J_2\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}k_2 B'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y} \\ \int\left(k_2 f(z)B'\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)\left(k_2 f(z)B'\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}\right) & = K_2 k_2^2 B'^2\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\dfrac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}\end{cases} \tag{III.23.d}$$

Équation 3 : selon l'axe *w*

$$\int \rho(z)\dot{w}_0\delta\dot{w}_0 = I_0\dot{w}_0\delta\dot{w}_0 \tag{III.24.a}$$

$$\delta u_0: \qquad I_0\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 - I_1\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{u}_0 + J_1k_1A'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{u}_0$$

$$\delta v_0: \qquad I_0\dot{v}_0\delta\dot{v}_0 - I_1\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{v}_0 + J_1k_2B'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{v}_0$$

$$\delta w_0: \qquad I_0\dot{w}_0\delta\dot{w}_0 - I_1\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} - I_1\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + I_2\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} - \tag{III.24.b}$$

$$-J_2k_1A'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} - J_2k_2B'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}$$

$$\delta\theta: \qquad J_1\dot{u}_0k_1A'\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x} + J_1\dot{v}_0k_2B'\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y} - J_2\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}k_1A'\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x} -$$

$$-J_2\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}k_2B'\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y} + K_2k_1^2A'^2\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x} + K_2k_2^2B'^2\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}$$

On procède à l'intégration par parties

Premier terme

$$I_0\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 = -I_0\left[\dot{u}_0\delta u_0 - \int \ddot{u}_0\delta u_0\right]$$

$$-I_1\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{u}_0 = -I_1\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta u_0 - \int\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}\delta u_0\right]$$

$$J_1k_1A'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{u}_0 = J_1k_1A'\left[\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\delta u_0 - \int\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial x}\delta u_0\right] \tag{III.25.a}$$

Second terme

$$I_0\dot{v}_0\delta\dot{v}_0 = -I_0\left[\dot{v}_0\delta v_0 - \int \ddot{v}_0\delta v_0\right]$$

$$-I_1\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{v}_0 = -I_1\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\delta v_0 - \int\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}\delta v_0\right] \tag{III.25.b}$$

$$J_1k_2B'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{v}_0 = J_1k_2B'\left[\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\delta v_0 - \int\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y}\delta v_0\right]$$

Troisième terme

$$I_0\dot{w}_0\delta\dot{w}_0 = I_0\left[\dot{w}_0\delta w_0 - \int \ddot{w}_0\delta w_0\right]$$

$$-I_1\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} = -I_1\left[\dot{u}_0\delta\dot{w}_0 - \int\frac{\partial\dot{u}_0}{\partial x}\delta\dot{w}_0\right] =$$

$$= -I_1\left[\dot{u}_0\delta\dot{w}_0 - \frac{\partial\dot{u}_0}{\partial x}\delta w_0 + \int\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}\delta w_0\right]$$

$$-I_1\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}=-I_1\left[\dot{v}_0\delta\dot{w}_0-\int\frac{\partial\dot{v}_0}{\partial y}\delta\dot{w}_0\right]=$$
$$=-I_1\left[\dot{v}_0\delta\dot{w}_0-\frac{\partial\dot{v}_0}{\partial y}\delta w_0+\int\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\delta w_0\right]$$
$$I_2\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}=I_2\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{w}_0-\int\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial x^2}\delta\dot{w}_0\right]=$$
$$=I_2\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{w}_0-\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial x^2}\delta w_0+\int\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}\delta w_0\right]$$

(III.25.c)

$$I_2\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}=I_2\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{w}_0-\int\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial y^2}\delta\dot{w}_0\right]=$$
$$=I_2\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{w}_0-\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial y^2}\delta w_0+\int\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}\delta w_0\right]$$
$$-J_2k_1A'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}=-J_2k_1A'\left[\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{w}_0-\int\frac{\partial^2\dot{\theta}}{\partial x^2}\delta\dot{w}_0\right]=$$
$$=-J_2k_1A'\left[\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{w}_0-\frac{\partial^2\dot{\theta}}{\partial x^2}\delta w_0+\int\frac{\partial^2\ddot{\theta}}{\partial x^2}\delta w_0\right]$$
$$-J_2k_2B'\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}=-J_2k_2B'\left[\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{w}_0-\int\frac{\partial^2\dot{\theta}}{\partial y^2}\delta\dot{w}_0\right]=$$
$$=-J_2k_2B'\left[\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{w}_0-\frac{\partial^2\dot{\theta}}{\partial y^2}\delta w_0+\int\frac{\partial^2\ddot{\theta}}{\partial y^2}\delta w_0\right]$$

Quatrième terme

$$J_1k_1A'\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x}=J_1k_1A'\left[\dot{u}_0\delta\dot{\theta}-\int\frac{\partial\dot{u}_0}{\partial x}\delta\dot{\theta}\right]=$$
$$=J_1k_1A'\left[\dot{u}_0\delta\dot{\theta}-\frac{\partial\dot{u}_0}{\partial x}\delta\theta+\int\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}\delta\theta\right]$$

$$J_1k_2B'\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}=J_1k_2B'\left[\dot{v}_0\delta\dot{\theta}-\int\frac{\partial\dot{v}_0}{\partial y}\delta\dot{\theta}\right]=$$ (III.25.d)
$$=J_1k_2B'\left[\dot{v}_0\delta\dot{\theta}-\frac{\partial\dot{v}_0}{\partial y}\delta\theta+\int\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\delta\theta\right]$$
$$-J_2k_1A'\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial x}=-J_2k_1A'\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{\theta}-\int\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial x^2}\delta\dot{\theta}\right]=$$
$$=-J_2k_1A'\left[\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{\theta}-\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial x^2}\delta\theta+\int\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}\delta\theta\right]$$

$$-J_2k_2B'\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial y} = -J_2k_2B'\left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{\theta} - \int \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2}\delta\dot{\theta}\right] =$$

$$= -J_2k_2B'\left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{\theta} - \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2}\delta\theta + \int \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\delta\theta\right]$$

$$K_2k_1^2A'^2\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial x} = K_2k_1^2A'^2\left[\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{\theta} - \int \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x^2}\delta\dot{\theta}\right] =$$

$$= K_2k_1^2A'^2\left[\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}\delta\dot{\theta} - \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x^2}\delta\theta + \int \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2}\delta\theta\right]$$

$$K_2k_2^2B'^2\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial y} = K_2k_2^2B'^2\left[\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{\theta} - \int \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial y^2}\delta\dot{\theta}\right] =$$

$$= K_2k_2^2B'^2\left[\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y}\delta\dot{\theta} - \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial y^2}\delta\theta + \int \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}\delta\theta\right]$$

En regroupant les termes $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta\theta$ on obtient ce qui suit :

$$\delta u_0: \ -I_0\ddot{u}_0 - I_1\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1k_1A'\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}$$

$$\delta v_0: \ -I_0\ddot{v}_0 - I_1\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1k_2B'\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}$$

$$\delta w_0: \quad I_0\ddot{w}_0 - I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) + I_2\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) - \tag{III.26}$$

$$-J_2\left(k_1A'\frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_2k_2B'\frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}\right)$$

$$\delta\theta: \quad J_1\left(k_1A'\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2B'\frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - J_2\left(k_1A'\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2B'\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ K_2\left(k_1^2A'^2\frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2^2B'^2\frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}\right)$$

δU_f : Variation de l'énergie déformation du milieu élastique

Le milieu élastique est représenté par le modèle Winkler-Pasternak pour lequel est inclus la rigidité normale et de cisaillement pour l'appui élastique

$$R = K_w w + K_s \nabla^2 \mathrm{w} \tag{III.27}$$

avec K_w et K_s sont les coefficients de rigidités transverse et de cisaillement pour le milieu élastique respectivement.

Avec

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{III.28}$$

∇^2 représente l'opérateur Laplace dans un système cartésien à 2 dimensions

L'énergie de déformation virtuelle pour le milieu élastique peut être calculée comme suit:

$$\delta U_f = \int \left[K_w w \delta w + K_s \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right)\right] dxdy \tag{III.29}$$

En substituent les équations (III.24.b), (III.29) et (III.16.b) dans l'équation. (III.13) et on mettant les coefficients δu_0, δv_0, δw_0 et $\delta \theta$ égal à zéro, les équations Euler Lagrange sont obtenues comme suit:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - K_w w_0 + K_s \nabla^2 w_0 = \\ & = I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \tag{III.30}$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & - k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = \\ & = J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - \\ & - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}\right) + \\ & + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) \end{aligned}$$

III.2.4 Modèle d'élasticité non locale pour nano plaque FG

Selon la théorie de l'élasticité non-locale d'Eringen (1972), l'état de contraintes en un point intérieur d'un corps est considéré comme fonction de déformations de tous les points dans les régions voisines.

Pour les solides élastiques homogènes, les composantes de contraintes-tensions non locales et à chaque point x dans le solide peuvent être exprimées comme suit:

$$\sigma_{ij}(x) = \int \alpha(|x' - x|, \tau) t_{ij}(x') d\Omega(x') \tag{III.31}$$

ou $t_{ij}(x')$ les composants disponibles dans le tenseur de contrainte local au point x qui sont associés aux composants tenseurs de déformation ε_{ij}

$$t_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{III.32}$$

Le concept de l'équation (III.31) est que la contrainte non locale à n'importe quel point est une moyenne de pondération du contrainte local de tous les points proches, et le noyau non local considère l'influence de la déformation au point *x'* sur la contrainte au point *x* dans le corps élastique. Le paramètre *a* est une longueur de caractéristique interne (par exemple, paramètre de réseau, distance granulaire, longueur de liaisons C-C). En outre, *x x* 'est une distance euclidienne et τ une valeur constante donnée comme suit:

$$\tau = \frac{e_0 a}{l} \tag{III.33}$$

Qui présente la relation d'une longueur interne caractéristique, et une longueur externe caractéristique, *l* (par exemple, longueur de fissure et longueur d'onde) en utilisant une constante, e_0, dépendante de chaque matériau. Le coefficient e_0 est évalué expérimentalement en comparant les courbes de diffusion des ondes planes avec celles de la dynamique atomique. Dans le modèle d'élasticité non local, les points subissent un mouvement de translation comme dans le cas classique, mais la contrainte à un point dépend des états de contraintes dans une région proche de ce point. En ce qui concerne l'interprétation physique, le modèle non local introduit des interactions à longue distance entre les points dans un modèle de milieu continu. De telles interactions à longue distance se produisent entre des atomes chargés ou des molécules dans un solide. Eringen [1972, 1983] a déterminé numériquement la forme fonctionnelle du noyau. Par une sélection appropriée de la fonction du noyau, Eringen a montré que l'équation constitutive non locale donnée en forme intégrale (voir l'équation (III.31)) peut être représentée sous une forme différentielle équivalente comme suit:

$$(1 - (e_0 a)\nabla^2)\sigma_{kl} = t_{kl} \tag{III.34}$$

∇^2 est l'opérateur Laplacien. Par conséquent, la longueur de l'échelle (e_0 a) considère les effets de la petite taille sur le comportement des nanostructures. Ainsi, les relations constitutives de la théorie non locale pour une nano plate FG peuvent être écrites comme suit:

$$(1-\mu\nabla^2)\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \tag{III.35}$$

Pour lequel $\mu=(e_0a)^2$ et les coefficients de rigidités C_{ij} sont exprimés comme suit :

$$C_{11}=C_{22}=\frac{E(z)}{1-\upsilon(z)^2},C_{12}=\frac{\upsilon E(z)}{1-\upsilon(z)^2},C_{44}=C_{55}=C_{66}=\frac{E(z)}{2[1+\upsilon(z)]} \tag{III.36}$$

Intégrer l'équation. (III.35) sur la section transversale de la plate donne la contrainte - force et la contrainte- moment des plaques FG non linéaires raffinées comme suit:

$$(1-\mu\nabla^2)\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\\ M_x^b\\ M_y^b\\ M_{xy}^b\\ M_x^s\\ M_y^s\\ M_{xy}^s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{11}^s & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0\\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s\\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0\\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0\\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s\\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0\\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0\\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\\ k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\\ k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix} \tag{III.37}$$

$$(1-\mu\nabla^2)\begin{Bmatrix}S_{xz}^s\\ S_{yz}^s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{55}^s & 0\\ 0 & A_{44}^s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}^0\\ \gamma_{yz}^0\end{Bmatrix} \tag{III.38}$$

Avec les rigidités en section transversale sont définies comme suit:

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij},B_{ij}^s,D_{ij}^s,H_{ij}^s\right)=$$

$$=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ij}(1,z,z^2,f(z),zf(z),f^2(z))dz,\quad (i,j=1,2,6) \tag{III.39.a}$$

$$A_{ij}^s=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ij}\,[g(z)]^2dz,\qquad (i,j=4,5) \tag{III.39.b}$$

Les équations non-locales du mouvement des nano plaques FG en termes de déplacement peuvent être obtenues en remplaçant les équations (III.37), (III.38) par les équations (III.30) comme suit:

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}+\left(B_{66}^s(k_1A'+k_2B')\right)\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}+(B_{11}^s k_1+B_{12}^s k_2)\frac{\partial\theta}{\partial x}=(1-\mu\nabla^2)\left[I_0\ddot{u}_0-I_1d_1\ddot{w}_0+J_1A'k_1d_1\ddot{\theta}\right] \tag{III.40.a}$$

$$\begin{aligned}&A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}-\\&-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}+\left(B_{66}^s(k_1A'+k_2B')\right)\frac{\partial^3\theta}{\partial x^2\partial y}+\\&+(B_{22}^s k_2+B_{12}^s k_1)\frac{\partial\theta}{\partial y}=(1-\mu\nabla^2)\left[I_0\ddot{v}_0-I_1d_2\ddot{w}_0+J_1B'k_2d_2\ddot{\theta}\right]\end{aligned} \tag{III.40.b}$$

$$\begin{aligned}&B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+B_{22}\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}-\\&-D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+\\&+(D_{11}^s k_1+D_{12}^s k_2)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+2\left(D_{66}^s(k_1A'+k_2B')\right)\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2}+\\&+(D_{12}^s k_2+D_{22}^s k_2)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+(1-\mu\nabla^2)(-K_w w_0+K_s\nabla^2 w_0)=\\&=(1-\mu\nabla^2)\left[I_0\ddot{w}_0+I_1(d_1\ddot{u}_0+d_2\ddot{v}_0)-I_2(d_{11}\ddot{w}_0+d_{22}\ddot{w}_0)+\right.\\&\left.+J_2\left(k_1A'd_{11}\ddot{\theta}+k_2B'd_{22}\ddot{\theta}\right)\right]\end{aligned} \tag{III.40.c}$$

$$-(B_{11}^s k_1+B_{12}^s k_2)\frac{\partial u_0}{\partial x}-\left(B_{66}^s(k_1A'+k_2B')\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}-\left(B_{66}^s(k_1A'+k_2B')\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}-(B_{12}^s k_1+B_{22}^s k_2)\frac{\partial v_0}{\partial y}-(D_{11}^s k_1+D_{12}^s k_2)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+2\left(D_{66}^s(k_1A'+k_2B')\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+(D_{12}^s k_1+D_{22}^s k_2)\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-H_{11}^s k_1^2\theta-H_{22}^s k_2^2\theta-2H_{12}^s k_1k_2\theta-((k_1A'+k_2B')^2H_{66}^s)\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial y^2}+A_{44}^s(k_2B')^2\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+A_{55}^s(k_1A')^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=(1-\mu\nabla^2)\left[-J_1(k_1A'd_1\ddot{u}_0+k_2B'd_2\ddot{v}_0)+J_2(k_1A'd_{11}\ddot{w}_0+k_2B'd_{22}\ddot{w}_0)-K_2\left((k_1A')^2d_{11}\ddot{\theta}+(k_2B')^2d_{22}\ddot{\theta}\right)\right] \tag{III.40.d}$$

III.3 Procédures des solutions

Sur la base de la technique Navier, une solution analytique des équations de mouvement pour l'étude de la vibration libre pour les nano plaque FG est présentée.

Les variables de déplacement à adopter ont la forme ci-dessous :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}e^{i\omega t}cos(\alpha x)sin(\beta y) \\ V_{mn}e^{i\omega t}sin(\alpha x)cos(\beta y) \\ W_{mn}e^{i\omega t}sin(\alpha x)sin(\beta y) \\ X_{mn}e^{i\omega t}sin(\alpha x)sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{III.41}$$

$$\alpha = m\pi/a \quad \text{et} \quad \beta = n\pi/b \tag{III.42}$$

substituons l'équation (III.41) dans l'équation(III.40), on obtient

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \lambda\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.43}$$

Avec

$$\begin{aligned}
&S_{11} = -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \; S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\
&S_{14} = \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B')B_{66}^s\beta^2), \\
&S_{22} = -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\
&S_{24} = \beta(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B')B_{66}^s\alpha^2) \\
&S_{33} = -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) + \lambda\big(K_w + K_s(\alpha^2 + \beta^2)\big) \\
&S_{34} = -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2 - 2A'D_{66}^s\alpha^2\beta^2) - \\
&\qquad - k_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2 - 2B'D_{66}^s\alpha^2\beta^2) \\
&S_{44} = k_1^2(-H_{11}^s - A'^2 H_{66}^s\alpha^2\beta^2 - A'^2 A_{55}^s\alpha^2) + k_2^2(-H_{22}^s - B'^2 H_{66}^s\alpha^2\beta^2 - B'^2 A_{44}^s\beta^2) - k_1 k_2(2H_{12}^s + 2A'B'H_{66}^s\alpha^2\beta^2) \\
&m_{11} - I_0, \quad m_{13} = \alpha I_1 \;, m_{14} = \frac{J_1 k_1}{\alpha}, \; m_{22} = -I_0, \quad m_{23} = \beta I_1, \\
&m_{24} = \frac{J_2 k_2}{\beta}, m_{33} = -I_0 - I_2(\alpha^2 + \alpha^2), \; m_{34} = -J_2(k_1 + k_2), \quad m_{44} = \\
&\qquad = \frac{-K_2(k_1^2\beta^2 + k_2^2\alpha^2)}{\alpha^2\beta^2}
\end{aligned} \tag{III.44}$$

$$\lambda = 1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)$$

Où sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad d_{ij} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ij} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \tag{III.45}$$

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1,2)$$

III.4 Conclusion

La formulation théorique a été établie par le calcul des propriétés efficaces du nano plaque FG tel le module effectif (K) et le module de cisaillement (G) selon la technique d'homogénéisation de Mori-Tanaka .La théorie classique de déformation par cisaillement (HSDT) d'ordre supérieur a permis d'obtenir le champ de déformations. L'état de déplacement sera proposé avec seulement quatre inconnus En mettant en œuvre le principe de Hamilton, les équations non-locales de mouvement sont obtenues et elles sont résolues par la méthode Navier. Selon la théorie de l'élasticité non-locale d'Eringen, l'état de contraintes sera déterminé.

Et en fin, une solution analytique des équations de mouvement pour une libre vibration pour les nano plaque FG est présentée.

RÉFERENCES

[1]Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2016), "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", Steel and Composite Structures, 20(5), 963-981.

[2]Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", Compos. Struct., 125, 621-630.

[3]Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A., Mahmoud, F.F. (2011), "Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method." Applied Mathematical Modelling, 35, 412-425.

[4]Bedroud, M., Nazemnezhad, R., Hosseini-Hashemi, S. (2015),"Axisymmetric/asymmetric buckling of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity", Meccanica, 50(7), 1791–1806.

[5]Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", Composites: Part B, 60, 274–283. 16.

[6]Chong, A.C.M., Yang, F., Lam, D.C.C. and Tong, P. (2001), "Torsion and bending of micron-scaled structures", J. Mater. Res., 16(4), 1052-1058.

[7]Daneshmehr, A., Rajabpoor, A. (2014), "Stability of size dependent functionally graded nanoplate based on nonlocal elasticity and higher order plate theories and different boundary conditions", Int J Eng Sci, 82, 84–100.

[8]Eltaher, M.A., Khater, M.E., Park, S., Abdel-Rahman, E., Yavuz, M. (2016), "On the static stability of nonlocal nanobeams using higher-order beam theories", Advances in Nano Research, 4(1), 51-64.

[9]Eltaher, M.A., Emam, S.A. and Mahmoud, F.F. (2012), “Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams”, Appl. Math. Computat., 218(14), 7406-7420.

[10]Eringen, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, International Journal of Engineering Science, 10, 1-16.

[11]Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, J Appl Phys, 54(9), 4703–4710.

[12]Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F. and Hutchinson, J.W. (1994), “Strain gradient plasticity: theory and experiment”, Acta Metall. Mater., 42(2), 475-487.

[13]Fu, Y., Du, H. and Zhang, S. (2003), “Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films”, Mater Lett., 57(20), 2995-2999.

[14]Hasanyan, D.J., Batra, R.C. and Harutyunyan, S. (2008), “Pull-in instabilities in functionally graded microthermoelectromechanical systems”, J. Therm. Stress., 31(10), 1006-1021.

[15]Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 140, 374 – 383.

[16]Hosseini-Hashemi, S., Bedroud, M., Nazemnezhad, R. (2013), “An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity”, Compos Struct, 103, 108–118.

[17]Jung, W.Y., Han, S.C., Park, W.T. (2014), “A modified couple stress theory for buckli ng analysis of S-FGM nanoplates embedded in Pasternak elastic medium”, Compos B Eng, 60, 746–756.

[18]Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. (2003), “Experiments and theory in strain gradient elasticity”, J. Mech. Phys. Solids, 51(8), 1477-1508.

[19]Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, Steel Compos. Struct., Int. J., 18(2), 425-442.

[20]Lee, Z., Ophus, C., Fischer, L., Nelson-Fitzpatrick, N., Westra, K.L., Evoy, S., Radmilovic, V., Dahmen, U. and Mitlin, D. (2006), “Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al–Mo films”, Nanotechnol., 17(12), 3063-3070.

[21]Lu, C., Wu, D. and Chen, W. (2011), “Non-linear responses of nano-scale FGM films including the effects of surface energies”, IEEE Trans. Nanotechnol., 10(6), 1321-1327.

[22]Mohammadi-Alasti, B., Rezazadeh, G., Borgheei, A.M., Minaei, S. and Habibifar, R. (2011), “On the mechanical behavior of a functionally graded micro-beam subjected to a thermal moment and nonlinear electrostatic pressure”, Compos. Struct., 93(6), 1516-1525.

[23]Nami, M.R., Janghorban, M. (2014), “Resonance behavior of FG rectangular micro/nano plate based on nonlocal elasticity theory and strain gradient theory with one gradient constant”, Compos Struct, 111, 349–353.

[24]Natarajan, S., Baiz, P., Ganapathi, M., Kerfriden, P. and Bordas, S. (2011), “Linear free flexural vibration of cracked functionally graded plates in thermal environment”, Comput. Struct., 89(15-16), 1535-1546.

[25]Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, M.H. and Ahmadian, M.T. (2009), “Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials”, Proceedings of the 3rd International Conference on Micro- and Nanosystems, San Diego, CA, USA, September, pp. 539 -544.

[26]Rahmani, O., Pedram, O. (2014), “Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory”, Int J Eng Sci, 77, 55–70.

[27]Stolken, J.S. and Evans, A.G. (1998), "A microbend test method for measuring the plasticity length scale", Acta Mater., 46(14), 5109-5115.

[28]Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez-Estrada, O.A., Rabczuk, T., Bui, T.Q., Bordas, S.P.A. (2013), "NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter", Composite Structures, 99, 309-326. 18.

[29]Witvrouw, A. and Mehta, A. (2005), "The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications", Mater. Sci. Forum., 492, 255-260.

[30]Zhang, J. and Fu, Y. (2012), "Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory", Meccanica, 47(7), 1649-1658.

[31]Zare, M., Nazemnezhad, R., Hosseini-Hashemi, S. (2015), "Natural frequency analysis of functionally graded rectangular nanoplates with different boundary conditions via an analytical method", Meccanica, 50(9), 2391–2408.

[32]Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: An assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", Struct. Eng. Mech., Int. J., 54(4), 693-710.

Chapitre IV

Résultats & discussions

Chapitre IV Résultats & discussions

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs résultats numériques et illustratifs sont présentés pour étudier la réponse de vibration libre dépendante de la taille des nano plaques intégrées FG modélisées sur la base d'une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement à quatre variables. Les propriétés du matériau de la nano plate FG varient dans le sens de l'épaisseur selon la technique d'homogénéisation Mori-Tanaka.
La surface supérieure de la plaque est en céramique (Si3N4), et la surface inférieure est riche en métal (SUS304)

céramique	Masse volumique	ρ_c	2370 kg/m^3
	Module d'Young	E_c	348.43e^9 N/m^2
métallique	Masse volumique	ρ_m	8166 kg/m^3
	Module d'Young	E_m	201.04e^9 N/m^2

Tableau IV. 1:Données choisies pour l'étude

Le coefficient de Poisson υ est supposé constant selon l'épaisseur de la plaque est vaut 0.3.

$$\overline{\omega} = \omega h\sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}},\quad \widehat{\omega} = \omega h\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}},\quad k_w = \frac{K_w a^4}{D_m},\quad k_s = \frac{K_s a^2}{D_m},\quad D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\upsilon^2)} \tag{IV.1}$$

$$Rapport\ fréquence = \frac{fréquence\ naturelle\ avec\ nonlocale\ théorie}{fréquence\ naturelle\ avec\ locale\ théorie} = \frac{\omega_{NL}}{\omega_L}$$

IV.2 Étude paramétrique

Dans cette section, afin d'étudier les effets des différents paramètres de la plaque et du chargement thermique sur la réponse de la plaque en terme de température critique, divers résultats sont présentés sur les figures IV-1 à IV-9.

a) Effets des paramètres de fondation élastiques sur le comportement de vibration du nano plaque FG: Figures. IV 1 et IV .2 présentent des variations du rapport de fréquence par rapport aux constantes Winkler et Pasternak, respectivement avec *a/h*=10 et *n* = 5

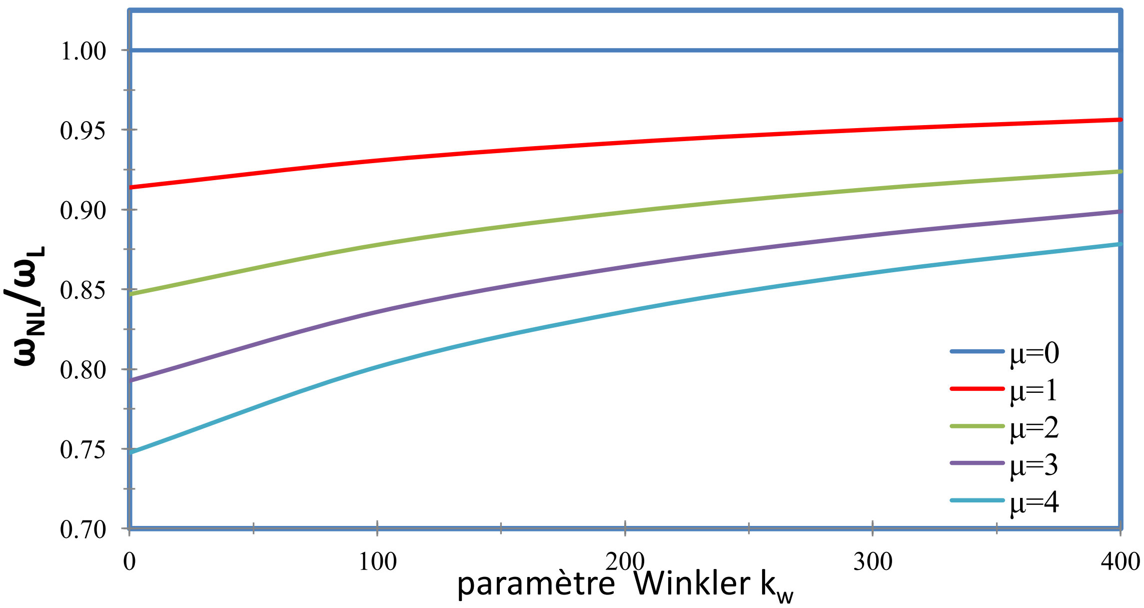


Figure IV. 1: Effet du paramètre de module Winkler sur le rapport de fréquence de la nano plaque FG carrée pour différents paramètres non locale (k_s=0, a/h=10, n=5)

De la Figure. IV. 1, on observe qu'il existe une influence significative du paramètre non local sur la réponse aux vibrations des nano plates FG soutenues par des fondations élastiques. Les rapports de fréquence fondamentaux, y compris le modèle non local, sont toujours plus petits que le modèle local (μ = 0). Cela implique que l'utilisation de la théorie locale pour analyse sur les nano plates FG entraînerait une prédiction excessive de la fréquence. En outre, en augmentant les valeurs de paramètre non local (μ), les fréquences calculées par la théorie non locale deviennent plus petites par rapport à la théorie locale. En outre, on observe que l'augmentation du coefficient de module Winkler entraîne une augmentation du rapport de fréquence. Cette tendance croissante est liée à la rigidité de la base élastique. Avec des valeurs importantes du coefficient de Winkler, le taux d'augmentation de valeur de fréquence diminue. Cela implique que l'influence non locale sur la réponse aux vibrations des nano plates FG perd son importance à mesure que les valeurs du coefficient de Winkler augmentent. Ainsi, bien que l'influence non locale rende les nano plates plus souples, la base élastique externe "empêche" les nano plates et l'oblige à être plus rigide. Par conséquent, on peut conclure que l'influence non locale devient plus significative dans le cas de plaques sans fondation élastique.

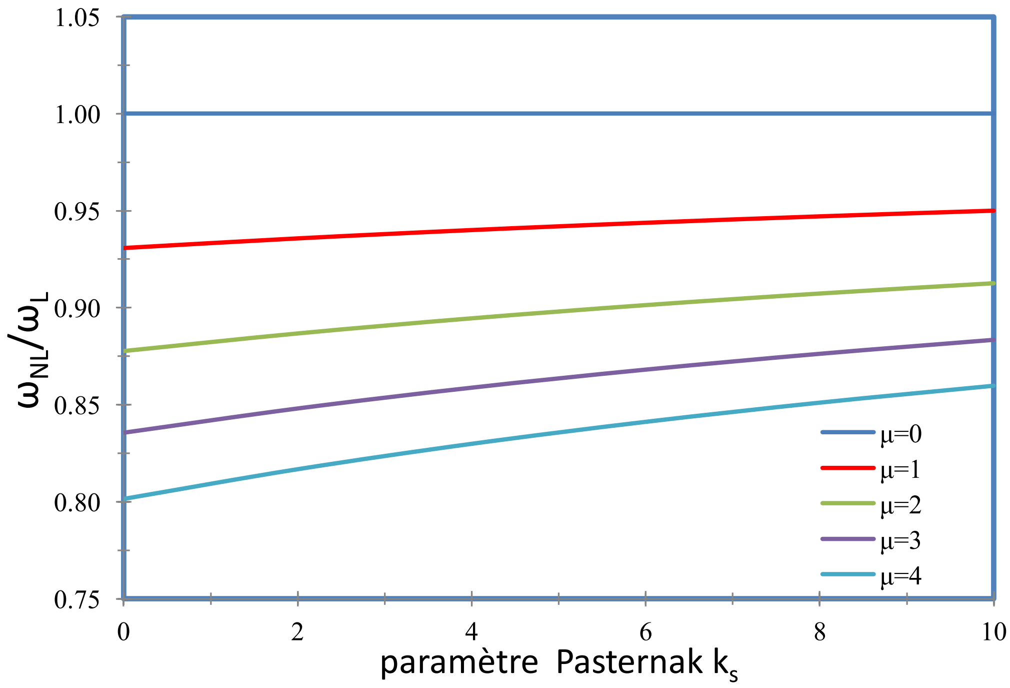


Figure IV. 2: Effet du paramètre de module Pasternak sur le rapport de fréquence de la nano plaque FG carrée pour différents paramètres non locale (k_w=100, a/h=10, n=5)

La variation du rapport de fréquence pour le premier mode avec module de cisaillement est présentée dans la Figure. IV. 2. Le rapport de fréquence augmente avec l'augmentation du coefficient de module de cisaillement. Cependant, les rapports de fréquence, y compris le modèle non local, sont toujours plus petits que le modèle local. Avec des valeurs de paramètre non local (μ) plus élevées, les fréquences sont moins comparables. Contrairement à la variation du rapport de fréquence avec le coefficient de Winkler, qui n'est pas linéaire, la variation du rapport de fréquence en fonction du coefficient de cisaillement de Pasternak (k_s) est de nature linéaire.

b) Effet du paramètre non local sur la fréquence sans dimension des plaques FG carrées non locales avec et sans fondation élastique est tracé sur la Figure. IV. 3.

L'effet d'un paramètre non local sur la fréquence non dimensionnelle des plaques FG carrées non locales avec et sans fondation élastique est tracé dans la Figure. IV. 3.On constate que la fréquence non dimensionnelle de la nano plate FG diminue en raison du fait que la présence de non-localité rend la structure de la plate plus souple. Par conséquent, le modèle de plate non locale fournit des résultats de fréquence inférieurs par rapport au modèle de plaque locale.

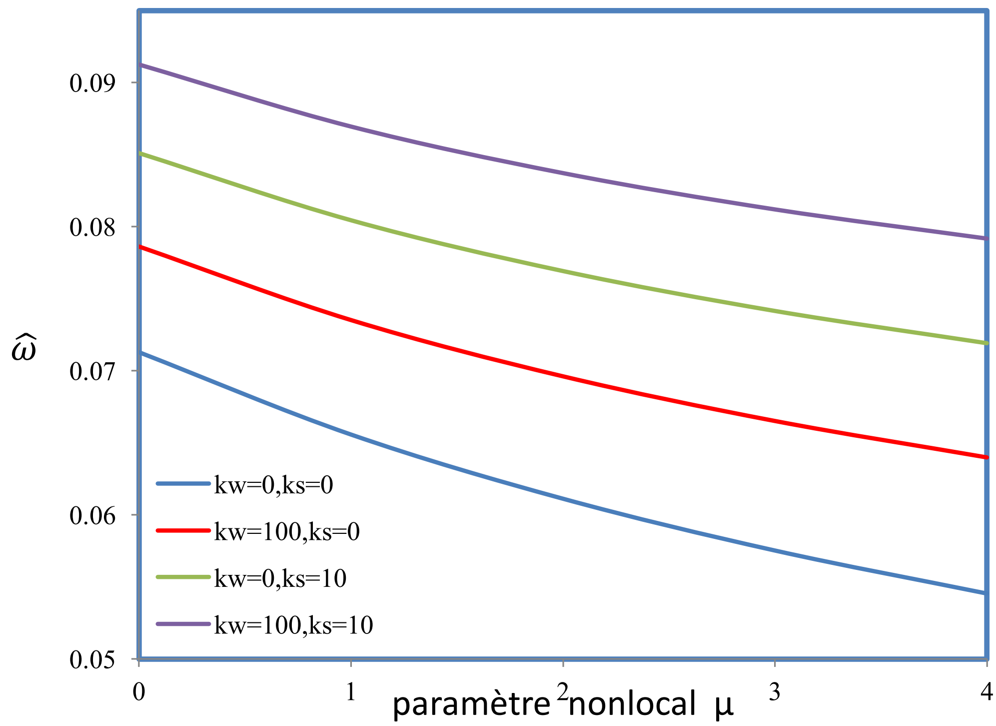


Figure IV. 3: Effet du paramètre non local sur la fréquence de la nano-plaque carrée FG avec et sans fondation élastique (*a/h*=10*, n*=5)

c) La variation de la fréquence non locale avec le coefficient de module Winkler est tracée dans la figure. IV. 4 et avec le module Pasternak à la figure IV.5.
d) La variation de la fréquence non locale avec le module Winkler est présentée à la figure. IV. 4 pour différentes valeurs a/h.

On constate qu'avec l'augmentation du module Winkler, la fréquence non locale augmente de manière linéaire. En outre, on observe que la variation de la fréquence non locale de la plaque à l'échelle nanométrique est significativement affectée par le rapport entre côtés et épaisseurs. Pour une plaque mince (a/h = 100), l'influence du paramètre non local sur la fréquence est inférieure à la plaque épaisse (a/h= 10).

Par conséquent, le rapport entre épaisseur de la plaque à l'échelle nanométrique joue un rôle considérable dans l'examen de la réponse vibratoire libre des plaques à l'échelle nanométrique reposant sur une fondation élastique.

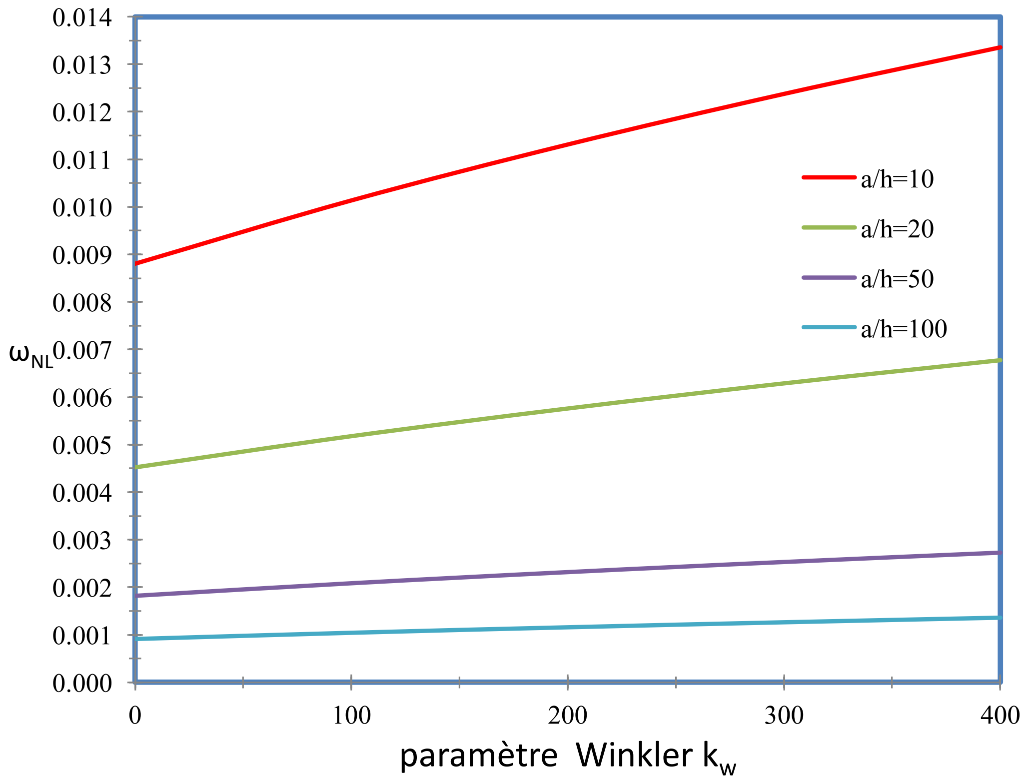


Figure IV. 4: Effet du paramètre de module Winkler sur la fréquence non locale de la nano-plaque carrée FG pour différents rapports *a/h* (k_s=0, μ=2, n=5)

La figure IV.5 présente la variation de la fréquence non locale par rapport au module Pasternak avec différentes valeurs de a / h. La considération de la fondation Pasternak donne des valeurs supérieures de fréquence à ceux de la fondation Winkler. La fréquence non locale augmente avec l'augmentation du paramètre de module Pasternak. La variation se révèle être de nature non linéaire. Cependant, on constate que la variation de la fréquence non locale est plus affectée par des valeurs de rapport latéralement inférieures à l'épaisseur (a / h = 10), comme le montre la figure. IV. 5.

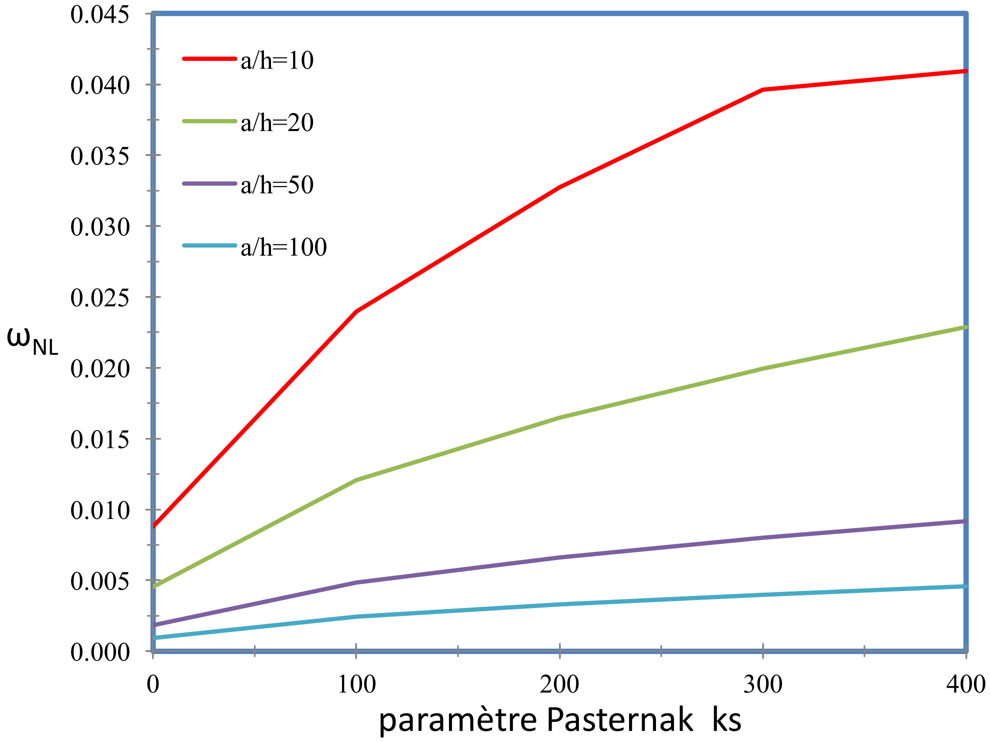


Figure IV. 5 : Effet du paramètre de module Pasternak sur la fréquence non locale de la nano-plaque carrée FG pour différents rapports *a/h* (k_w=0, μ=2, n=5)

e) la variation de la fréquence non locale par rapport aux rapports a/ b avec et sans la présence de fondations élastiques dans la figure IV.6.

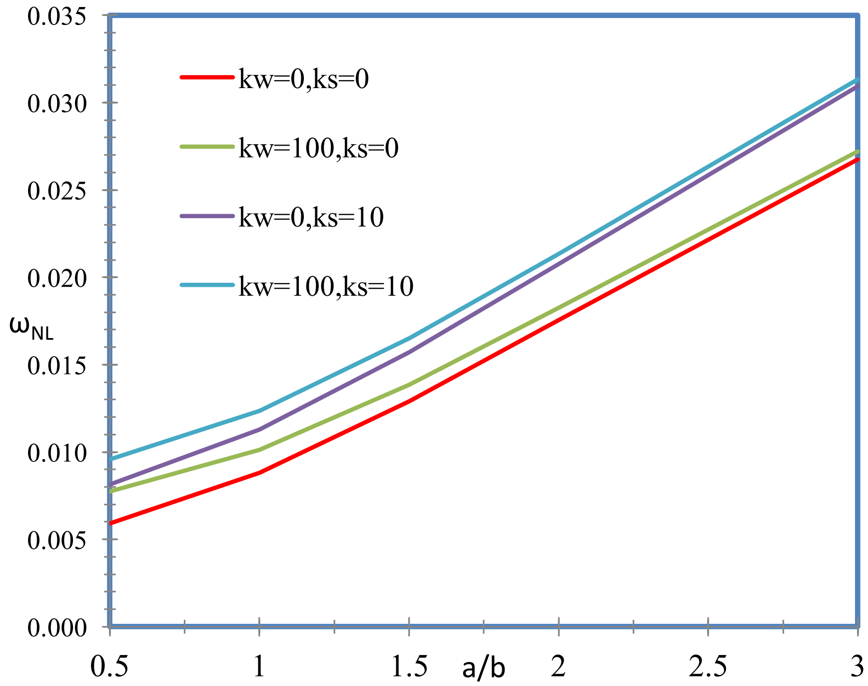


Figure IV. 6: Effet du rapport a/b sur la fréquence non locale du nano-plaque carrée FG pour différentes valeurs des paramètres de fondation (*a/h* =10, μ=2, n=5)

La figure IV.6 montre la variation de la fréquence non locale par rapport aux rapports a / b avec et sans les fondations élastiques. On peut voir à partir de cette figure que l'augmentation du rapport a / b réduit la valeur de la fréquence non locale.

En outre, on constate que la présence de fondations élastiques augmente la fréquence non locale et rend la plaque plus rigide.

f) Effet du paramètre de module Winkler et Pasternak sur la fréquence non locale de la nano-plaque carrée FG pour les trois premiers modes Fig. IV.7 et IV.8.

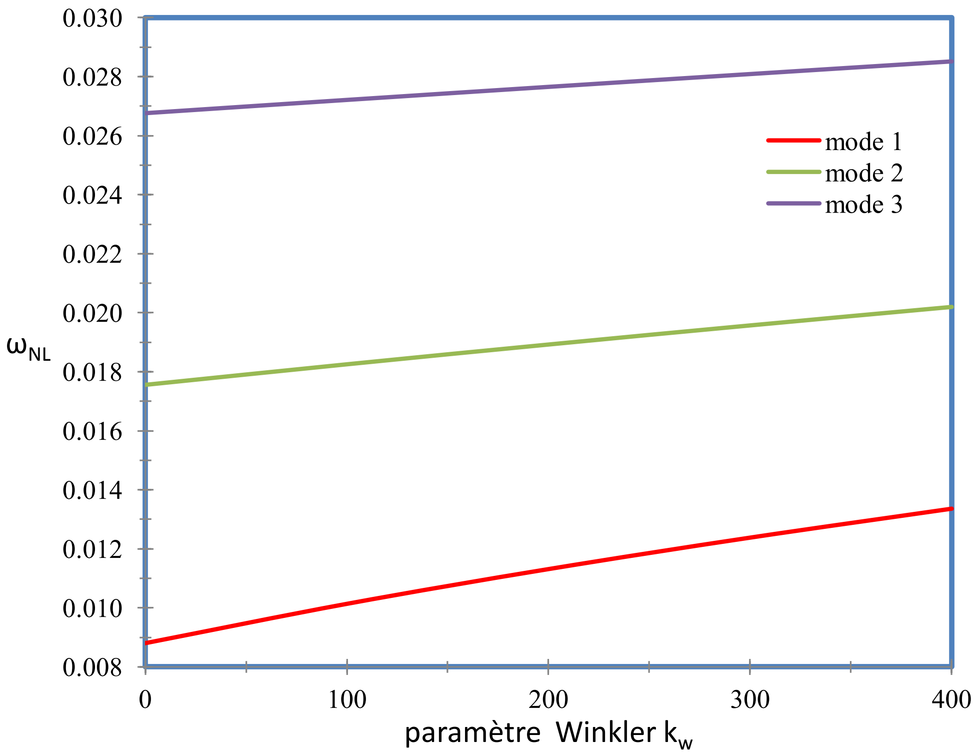


Figure IV. 7: Effet du paramètre de module Winkler sur la fréquence non locale de la nano-plaque carrée FG pour les trois premiers modes (*a/h* =10, *ks=0*, *μ*=2, *n*=5)

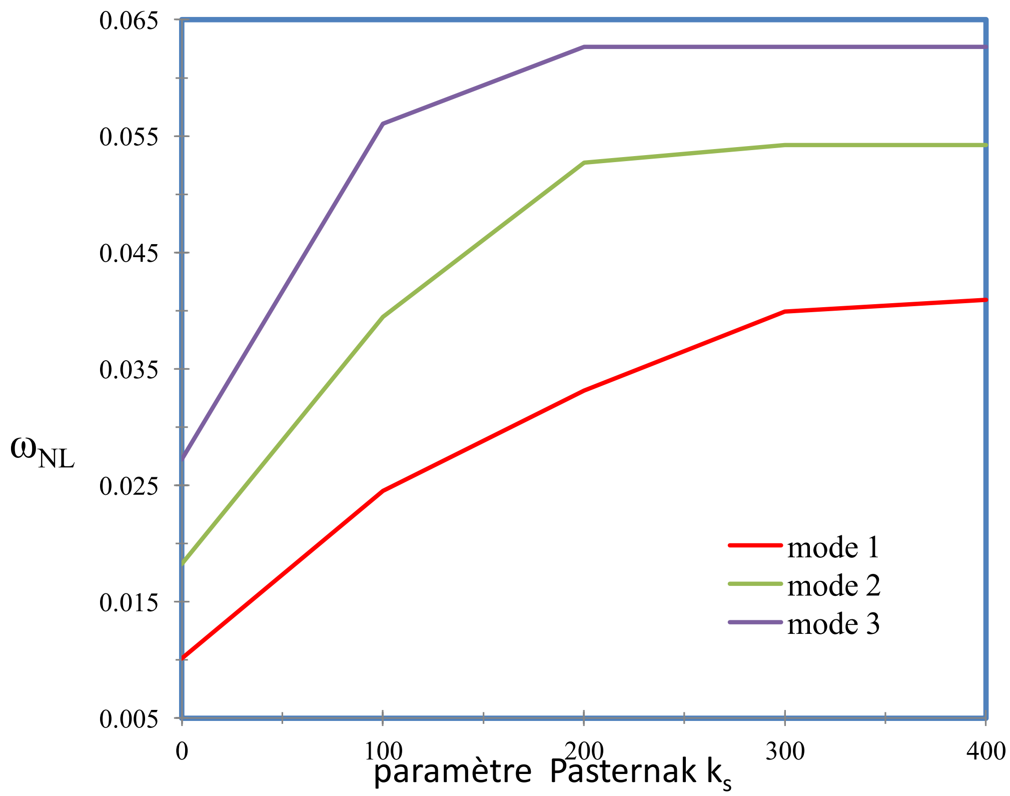
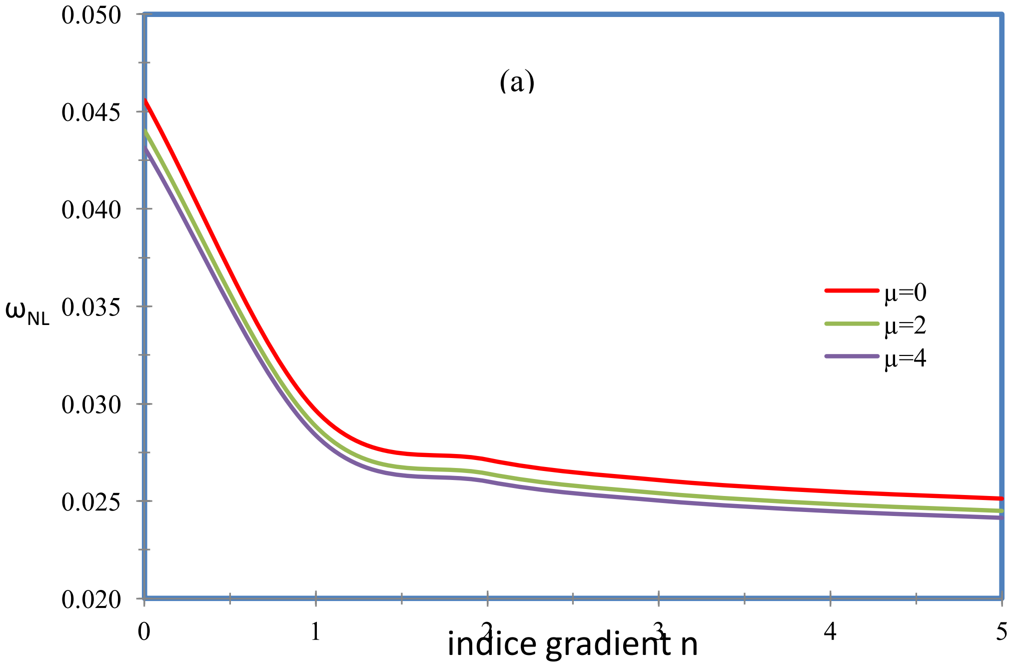


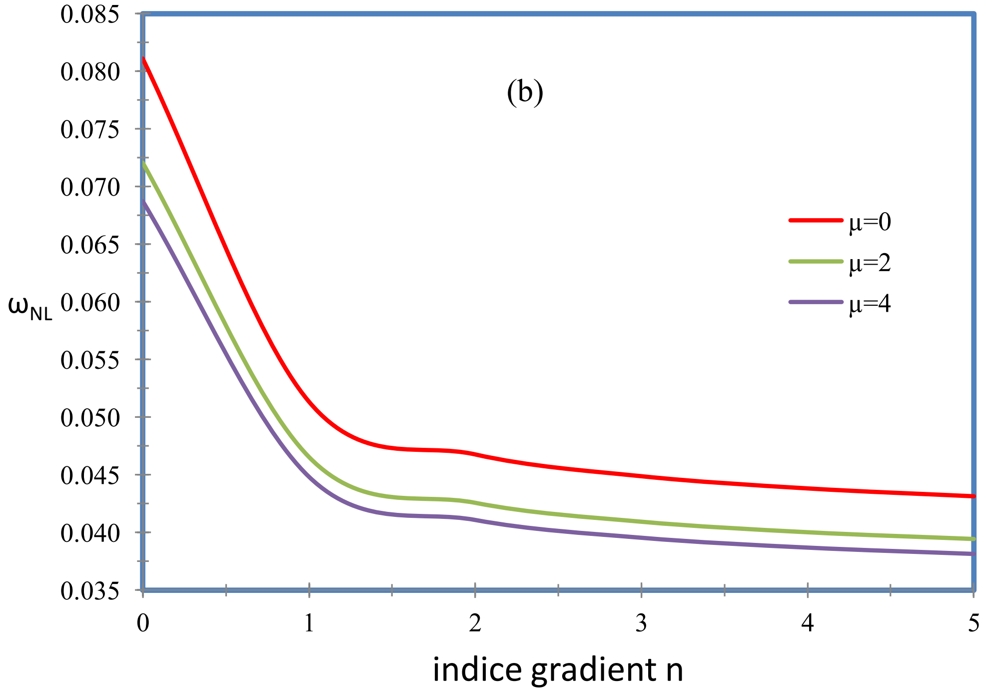
Figure IV. 8: Effet du paramètre de module Pasternak sur la fréquence non locale de la nano-plaque carrée FG pour les trois premiers modes (*a/h* =10*, kw=0, μ*=2*, n*=5)

Dans la figure IV.7, la variation du paramètre de module non-local par rapport au module Winkler est présentée pour différents modes vibratoires. On constate que la fréquence non locale augmente linéairement avec l'augmentation du paramètre Winkler et que les fréquences calculées deviennent plus importantes pour les modes vibratoires.

La figure IV.8 montre la variation de la fréquence non locale par rapport au module de Pasternak pour différents modes vibratoires. On peut voir que la fréquence non locale augmente de manière non linéaire avec l'augmentation du paramètre Pasternak. Encore une fois, les fréquences non locales se révèlent plus considérables pour les modes vibratoires.

g) Effet du gradient (*n*) et du paramètre non local μ sur une fréquence non dimensionnelle pour nano-plaque carrée FG (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode. figure IV.9


(a)
0.050
0.045
0.040
0.035
0.030
0.025
0.020
ωNL
μ=0
μ=2
μ=4
0
1
2
3
4
5
indice gradient n


(b)
0.085
0.080
0.075
0.070
0.065
0.060
0.055
0.050
0.045
0.040
0.035
ωNL
μ=0
μ=2
μ=4
0
1
2
3
4
5
indice gradient n

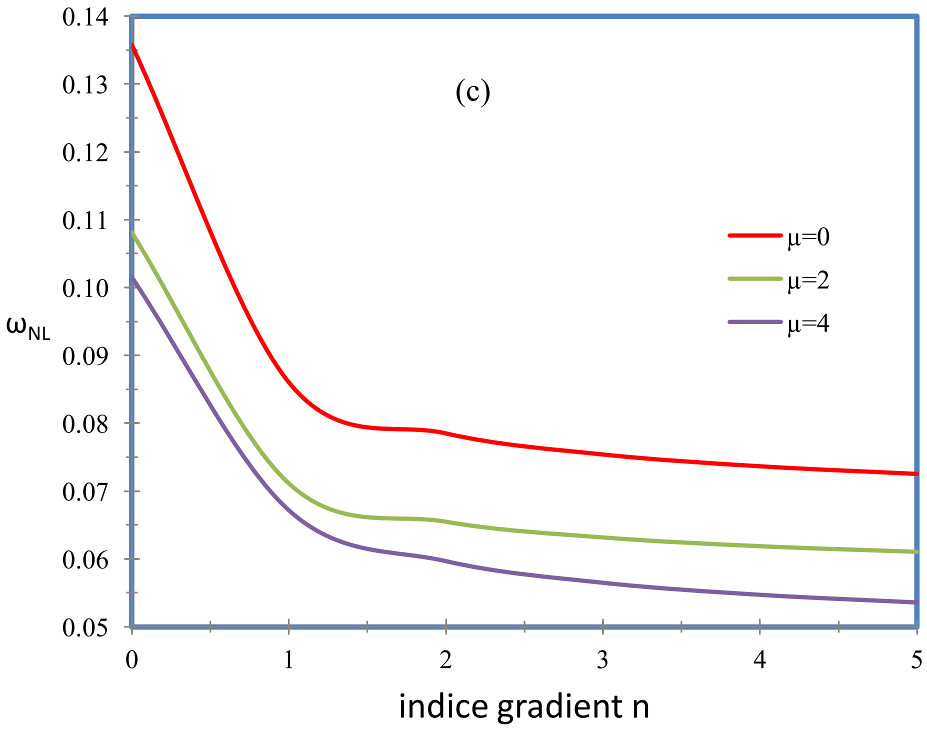


Figure IV. 9: Effet du gradient (n) et du paramètre non local (μ) sur la fréquence non dimensionnelle pour nano-plaque FG carrée simplement appuyée avec (a/h= 10, ks=k_w=100): (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode

La figure IV.9 illustre l'influence de l'indice de gradient (n) sur la fréquence non-locale non dimensionnelle des trois premiers modes de nano-plate carré FG pour diverses valeurs du paramètre non local. On peut observer que la fréquence non dimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de gradient. Ceci est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de gradient entraîne une diminution de la rigidité de la nano-plate FG. Il y a une variation abrupte des réponses lorsque l'indice de gradient passe de 0 à 2.

IV.3 Etude comparative

Afin de démontrer la validité de la présente méthode, quelques comparaisons des résultats issus du présent modèles avec ceux de la littérature sont réalisées.
Dans le premier exemple, on considère simplement des nano plaques homogènes compatibles avec différentes valeurs de paramètre non local, l'épaisseur de la plaque et le rapport d'épaisseur de la plaque. Les résultats donnés dans le tableau IV.1 sont comparés à ceux fournis par Belkorissat et al. (2015), Bounouara et al (2016) et Aghababaei et Reddy (2009).

On constate que les résultats numériques actuels sont en très bon accord avec les résultats disponibles dans les références citées.

a/b	*a/h*	*μ*	Présent	Réf [(a)]	Réf [(b)]	TSDT [(c)]	FSDT[(c)]	CPT[(c)]
1	10	0	0.0930	0.0930	0.0930	0.0935	0.0930	0.0963
		1	0.0850	0.0850	0.0850	0.0854	0.0850	0.0880
		2	0.0788	0.0787	0.0787	0.0791	0.0788	0.0716
		3	0.0737	0.0737	0.0737	0.0741	0.0737	0.0763
		4	0.0696	0.0695	0.0695	0.0699	0.0696	0.0720
		5	0.0660	0.0659	0.0659	0.0663	0.0660	0.0683
	20	0	0.0239	0.0238	0.0238	0.0239	0.0239	0.0241
		1	0.0218	0.0218	0.0218	0.0218	0.0218	0.0220
		2	0.0202	0.0202	0.0202	0.0202	0.0202	0.0204
		3	0.0189	0.0189	0.0189	0.0189	0.0189	0.0191
		4	0.0178	0.0178	0.0178	0.0179	0.0178	0.0180
		5	0.0169	0.0169	0.0169	0.0170	0.0169	0.0171
2	10	0	0.0588	0.0588	0.0588	0.0591	0.0589	0.0602
		1	0.0556	0.0555	0.0555	0.0557	0.0556	0.0568
		2	0.0527	0.0527	0.0527	0.0529	0.0527	0.0539
		3	0.0503	0.0503	0.0503	0.0505	0.0503	0.0514
		4	0.0482	0.0481	0.0481	0.0483	0.0482	0.0493
		5	0.0463	0.0463	0.0463	0.0464	0.0463	0.0473
	20	0	0.0150	0.0149	0.0149	0.0150	0.0150	0.0150
		1	0.0141	0.0141	0.0141	0.0141	0.0141	0.0142
		2	0.0134	0.0134	0.0134	0.0134	0.0134	0.0135
		3	0.0128	0.0127	0.0127	0.0128	0.0128	0.0129
		4	0.0122	0.0122	0.0122	0.0123	0.0123	0.0123
		5	0.0118	0.0117	0.0117	0.0118	0.0118	0.0118

Tableau IV. 2: Comparaison de la fréquence fondamentale ω=$\omega h\sqrt{\rho/G}$) du nano plaque FG (a=10, E=30x10^6, ρ=1, υ=0.3)

[(a)] Bounouara & al(2016)
[(b)] Belkorissat & all (2015)
[(c)] Aghababaei & Reddy (2009)

Dans le deuxième exemple, les nano plaques FG (n = 5) avec différentes valeurs de paramètre non local, rapport de géométrie (a / b) et rapport côté / épaisseur (a / h) sont étudiées. Les fréquences naturelles calculées à l'aide de la théorie de déformation trigonométrique non linéaire actuelle sont comparées à celles de Belkorissat et al. (2015) dans le tableau IV.3. Encore une fois, un très bon accord est trouvé entre les résultats.

a/b	*a/h*	*μ*	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
			Réf [(a)]	Présent	Réf [(a)]	Présent	Réf [(a)]	Présent
1	10	0	0.0432	0.0437	0.1029	0.1041	0.1915	0.1940
		1	0.0395	0.0399	0.0842	0.0852	0.1358	0.1376
		2	0.0366	0.0370	0.0730	0.0738	0.1110	0.1125
		4	0.0323	0.0327	0.0596	0.0604	0.0861	0.0872
	20	0	0.0111	0.0112	0.0274	0.0277	0.0536	0.0542
		1	0.0101	0.0103	0.0224	0.0227	0.0380	0.0385
		2	0.0094	0.0095	0.0194	0.0197	0.0310	0.0314
		4	0.0083	0.0084	0.0158	0.0161	0.0241	0.0244
2	10	0	0.1029	0.1041	0.1574	0.1594	0.2397	0.2431
		1	0.0842	0.0852	0.1177	0.1192	0.1587	0.1609
		2	0.0730	0.0738	0.0980	0.0993	0.1269	0.1287
		4	0.0596	0.0604	0.0772	0.0782	0.0968	0.0982
	20	0	0.0274	0.0277	0.0432	0.0437	0.0688	0.0696
		1	0.0224	0.0227	0.0323	0.0327	0.0455	0.0461
		2	0.0194	0.0197	0.0269	0.0272	0.0364	0.0368
		4	0.0158	0.0161	0.0212	0.0215	0.0277	0.0281

Tableau IV. 3: Comparaison de la fréquence naturelle du nano plaque FG (*a*=10, *n*=5)

[(a)] Belkorissat & all (2015)

La fréquence fondamentale non dimensionnelle des nano plaques carrées FG est fournie dans le tableau IV.4 pour différentes valeurs du paramètre non local, de l'épaisseur de la plaque, de l'indice de gradient (n) et des paramètres de fondations (kw, ks).

On constate que la fréquence fondamentale sans dimension augmente lorsque les paramètres de fondation augmentent. Par rapport à l'effet du paramètre Winkler, on peut observer que les réponses aux vibrations des nano plaques FG sont plus affectées par le paramètre de fondation Pasternak que le paramètre Winkler. On remarque également qu'avec l'introduction de fondations élastiques, la plaque devient plus rigide, tandis que le paramètre non local rend la plate plus souple. En outre, on constate que l'augmentation de l'indice de gradient (n) entraîne une réduction de la fréquence. Ceci est dû au fait que l'indice de gradient donne une diminution de la rigidité de la nano plaque FG.

kw	*ks*	*a/h*	*μ*	Indice gradient (*n*) 0 Réf [(a)]	0 Présent	2 Réf [(a)]	2 Présent	5 Réf [(a)]	5 Présent
0	0	10	0	0.1409	0.1410	0.0717	0.0733	0.0655	0.0663
			1	0.1288	0.1289	0.0655	0.0670	0.0599	0.0606
			2	0.1193	0.1194	0.0607	0.0621	0.0555	0.0561
			3	0.1117	0.1117	0.0568	0.0581	0.0519	0.0525
			4	0.1053	0.1054	0.0536	0.0548	0.0490	0.0496
		20	0	0.0361	0.0362	0.0184	0.0188	0.0168	0.0170
			1	0.0330	0.0331	0.0168	0.0172	0.0153	0.0156
			2	0.0306	0.0307	0.0156	0.0159	0.0142	0.0144
			3	0.0286	0.0287	0.0146	0.0149	0.0133	0.0135
			4	0.0270	0.0270	0.0137	0.0141	0.0125	0.0127
0	20	10	0	0.1793	0.1793	0.0980	0.1002	0.0908	0.0919
			1	0.1699	0.1699	0.0936	0.0957	0.0868	0.0878
			2	0.1628	0.1629	0.0903	0.0923	0.0839	0.0848
			3	0.1573	0.1574	0.0877	0.0897	0.0815	0.0825
			4	0.1529	0.1529	0.0856	0.0876	0.0797	0.0806
		20	0	0.0456	0.0456	0.0249	0.0255	0.0231	0.0234
			1	0.0432	0.0432	0.0237	0.0243	0.0220	0.0223
			2	0.0413	0.414	0.0229	0.0234	0.0212	0.0215
			3	0.0399	0.0400	0.0222	0.0228	0.0206	0.0209
			4	0.0388	0.0388	0.0217	0.0222	0.0202	0.0204
100	0	10	0	0.1516	0.1516	0.0792	0.0810	0.0728	0.0736
			1	0.1403	0.1404	0.0736	0.0753	0.0677	0.0685
			2	0.1317	0.1318	0.0694	0.0710	0.0639	0.0646
			3	0.1248	0.1249	0.0660	0.0675	0.0608	0.0615
			4	0.1192	0.1192	0.0633	0.0647	0.0583	0.0590
		20	0	0.0387	0.0388	0.0202	0.0207	0.0186	0.0188
			1	0.0358	0.0359	0.0188	0.0193	0.0173	0.0175
			2	0.0336	0.0336	0.0177	0.0181	0.0163	0.0165
			3	0.0319	0.0319	0.0168	0.0172	0.0155	0.0157
			4	0.0304	0.0305	0.0161	0.0165	0.0148	0.0151
100	20	10	0	0.1877	0.1878	0.1036	0.1059	0.0962	0.0973
			1	0.1788	0.1789	0.0994	0.1017	0.0924	0.0935
			2	0.1721	0.1722	0.0963	0.0985	0.0896	0.0907
			3	0.1669	0.1670	0.0939	0.0960	0.0875	0.0885
			4	0.1627	0.1628	0.0920	0.0941	0.0858	0.0867
		20	0	0.0477	0.0477	0.0263	0.0269	0.0244	0.0247
			1	0.0454	0.0454	0.0252	0.0258	0.0234	0.0237
			2	0.0436	0.0437	0.0244	0.0250	0.0227	0.0230
			3	0.0423	0.0423	0.0238	0.0243	0.0221	0.0224
			4	0.0412	0.0412	0.0233	0.0238	0.0217	0.0220

Tableau IV. 4: Comparaison de la fréquence non dimensionnelle $\hat{\omega}$ du nano plaque FG

[(a)] Bounouara & al(2016)

IV.4 Conclusion

L'étude du comportement à la vibration des nano plaques FG reposant sur une base élastique à deux paramètres est étudiée dans le cadre d'une nouvelle théorie de plaque de déformation trigonométrique non-locale. Il est indiqué que les réponses à la vibration des nano plaques FG sont affectées par divers paramètres tels que les constantes de fondation élastiques, les paramètres non locaux, l'indice du gradient, et le rapport entre épaisseur-longueur. On constate que la présence de non-localité diminue la rigidité de la plaque et réduit la fréquence des nano plaques FG. Contrairement au paramètre non local, les paramètres de fondation élastique de Winkler et Pasternak améliorent la structure de la plaque et augmentent les fréquences.

Réferences

[1]Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, Steel and Composite Structures, 20(2), 227-249.

[2]Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, Steel Compos. Struct., Int. J., 18(4), 1063-1081.

[3]Ramin Aghababaei a, J.N. Reddy(2009)” Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates” Journal of Sound and Vibration 326 (2009) 277–289.

[41]Natarajan, S., Chakraborty, S., Thangavel, M., Bordas, S., Rabczuk, T. (2012), “Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates”, Comput Mater Sci, 65, 74–80.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, le comportement à la vibration des nano plaques FG reposant sur une fondation élastique à deux paramètres est étudié en utilisant une nouvelle théorie de plaque de déformation trigonométrique non-locale. Les propriétés mécaniques des nano plaques FG varient progressivement selon le modèle de Mori-Tanaka. Le principe de Hamilton et les relations constitutives non locales d'Eringen, ainsi que les équations différentielles non-locales de mouvement sont obtenues. Ensuite, ces équations sont résolues en utilisant la méthode analytique de Navier.

Enfin, il est indiqué que la vibration libre des nano plaques FG est affectée par divers paramètres tels que les constantes de fondation élastiques, les paramètres non locaux, l'indice de gradient, les rapports entre épaisseurs et longueur. On constate que la présence de non-localité diminue la rigidité de la plaque et réduit la fréquence des nano plaques FG. Contrairement au paramètre non local, les paramètres de fondation élastique de Winkler et Pasternak améliorent la structure de la plaque et augmentent les fréquences.

Toutes les études comparatives effectuées dans notre étude ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse de la vibration libre d'une plaque à gradient de propriétés (FGM) simplement appuyées sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement.

Les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus pour les différents indices de gradient n, le rapport de géométrie, le rapport d'épaisseur, les paramètres de rigidité de la fondation, et du paramètre non local μ.

- La présence de non-localité diminue la rigidité de la plate et réduit la fréquence des nano plaques FG;
- les paramètres de fondation élastique de Winkler et Pasternak (k_w, k_s) améliorent la structure de la plaque et augmentent les fréquences;
- La fréquence naturelle diminue avec l'augmentation de rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur ;
- Le paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur la fréquence fondamentale que le paramètre Winkler.
- La fréquence non dimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de gradient. Ceci est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de gradient entraîne une diminution de la rigidité de la nano-plaque

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer la présente théorie de forme sinusoïdale à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement et des conditions aux limites en tenant compte des effets de la température. .