



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Par :

Monsieur ELMEICHE Abbas

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Dynamique des structures

Intitulé de la thèse

**Analyse dynamique des nano-poutres en FGM
sous l'action d'une charge mobile**

Soutenue le :

Devant le Jury Composé de :

LOUSDAD Abdelkader	Professeur	Président	UDL Sidi Bel Abbes
MEGUENI Abdelkader	Professeur	Directeur de thèse	UDL Sidi Bel Abbes
REFASSI Kaddour	Professeur	Examineur	UDL Sidi Bel Abbes
SERIER Zouaoui	Professeur	Examineur	USTO Oran
AMARA Khaled	Professeur	Examineur	CU Ain- Témouchent
MERDJI Ali	Professeur	Examineur	Univ. Mascara

Année Universitaire : 2018-2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

*A mes chers parents, qui sans leur soutien et encouragement
ce travail n'a pu avoir lieu. Que Dieu les bénisse pour une
bonne santé et une longue vie*

*A ma femme, bien aimée pour l'amour, l'attention, la
patience et le soutien qu'elle m'a apporté*

*A mes frères et sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des
exemples de persévérance, de courage et de générosité.*

*A mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté
d'un savoir bien acquis.*

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à DIEU tout puissant pour la santé, la volonté et la puissance qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

J'adresse mes sincères remerciements à Mr A.MEGUENI, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, ses aides et son sens de motivation, ses conseils éclairés, sa grande disponibilité, ainsi que pour ses encouragements qui m'ont été très utiles pour mener à bien ce travail.

Je tiens aussi à rendre hommage à Monsieur A.LOUSDAD, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, pour m'avoir fait l'honneur d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie sincèrement, Messieurs : K.REFASSI, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, Z.SERIER, Professeur à l'Université USTO de Oran, K.AMARA, Professeur à l'Université de Ain-Temouchent, A.MERDJI, Professeur à l'Université de Mascara, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes sincères remerciements vont également à mes chers amis Mr. M.BOUAMAMA et Mr. A.ELHANNANI, pour leur soutien moral et leur sens d'humour que leur amitié m'a apporté.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes enseignants, mes collègues et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation et à l'aboutissement de ce travail.

Résumé

Résumé

Cette étude s'intéresse sur l'analyse du comportement dynamique des nano-poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) excité par une charge concentrée mobile, en basant sur la théorie de l'élasticité non-locale, avec la prise en considération de l'effet de cisaillement transversale.

Les équations gouvernant le mouvement sont modélisées par le principe d'Hamilton combiné avec l'introduction des formes faibles dans le système vibratoire, sous divers ordre de la théorie des poutres, tout en incluant l'inertie rotative. Les propriétés mécaniques des nano-poutres varient continuellement dans le sens de l'épaisseur conformément à la loi de puissance. Les solutions de Rayleigh-Ritz sont employées pour discrétiser les dérivées partielles spatiales de problème dynamique dans le modèle mathématique du mouvement.

Les fréquences propres de l'analyse vibratoire libre sont déterminées en résolvant le système d'équations gouvernant les problèmes des valeurs propres et la méthode de Newmark est adoptée pour trouver les réponses dynamiques de l'analyse vibratoire forcé. Une étude de convergence est établie ainsi des résultats numériques sont validés avec ceux disponibles dans la littérature pour montré la fiabilité et l'efficacité de nos présent modèle.

Plusieurs exemples sont traités et examinés pour déterminer l'influence du paramètre non-locale, la distribution du matériau, l'effet de la déformation du cisaillement, le rapport d'élancement et la vitesse de la charge mobile sur les réponses dynamiques transversale des nano-poutres en FGM.

Mots clés : Analyse dynamique, nano-poutres, FGM, charge mobile, élasticité non-locale, cisaillement transversal, fréquences propres, vitesse, réponses dynamiques.

Résumé

Abstract

This study focuses on the dynamic behavior analysis of functionally graded materials (FGM) nanobeams excited by a moving concentrated load, based on the nonlocal elasticity theory, taking into account the shear deformation beams effect.

The governing motion equations are modeled by Hamilton's principle combined with the introduction of weak forms into the vibratory system, under various orders beams theories, while including rotational inertia. The mechanical properties of FGMs nanobeams vary continuously through the thickness direction according to the power-law exponent form. Rayleigh-Ritz solutions are used to discretize the spatial partial derivatives of the dynamic problem in the mathematical model of motion.

The fundamental frequencies of the free vibratory analysis are determined by solving the system of equations governing the eigenvalue problems and Newmark's method are employed to find the dynamic vibration analysis responses. A convergence study is established and numerical results are validated with those available in the literature to show the reliability and efficiency of current model.

Several examples are discussed and examined to determine the impact of the nonlocal parameter, material distribution, shear deformation beam effect, slenderness ratio and the velocity of the moving load on transverse dynamic responses of FGM nanobeams.

Keywords: Dynamic analysis, nanobeams, FGM, moving load, nonlocal elasticity, transverse shear deformation, fundamental frequencies, velocity, dynamic responses.

Résumé

المخلص

ترتكز هذه الدراسة على تحليل السلوك الديناميكي للعوارض النانوية من المواد المتدرجة وظيفيا المستتارة بحمل مركز متحرك ، استنادا إلى نظرية المرونة الغير المحلية ، مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير إجهاد القص العرضي.

لقد صممت معادلات الحركة الحاكمة وفقا لمبدأ هاملتون مع إدخال الأشكال الضعيفة في النظام الاهتزازي، تحت تأثير نظريات العوارض المختلفة، مع ضمان إحتواء العطالة الدورانية. الخواص الميكانيكية للعوارض النانوية تتغير بصيغة مستمرة في اتجاه السمك وفقا لقانون الدوال ذات استطاعة. تستخدم حلول رايلي وريتز لتمييز المشتقات الجزئية المكانية للمشكلة الديناميكية في النموذج الرياضي للحركة.

تم تحديد الترددات الذاتية للتحليل الاهتزازي الحر من خلال حل نظام المعادلات التي تحكم مشاكل القيمة الذاتية واستخدمت طريقة نيومارك لإيجاد الإستجابات الديناميكية للتحليل الاهتزازي القسري. تم إنشاء دراسة تقاربية للنتائج العددية ومقارنتها مع تلك المتوفرة في المجال العلمي لإظهار موثوقية وكفاءة النموذج الحالي.

تناقش وتفحص عدة أمثلة لتحديد أثر المرونة غير المحلية ، توزيع المواد ، تأثير إجهاد القص العرضي ، نسبة التمدد وسرعة الحمل المتحرك على الإستجابات الديناميكية العرضية للعوارض النانوية المتدرجة وظيفيا.

الكلمات الرئيسية: التحليل الديناميكي، العوارض النانوية، المواد المتدرجة وظيفيا، حمل متحرك، المرونة الغير المحلية، إجهاد القص العرضي، الترددات الذاتية، سرعة الحمل، الإستجابات الديناميكية.

Sommaire

Liste des abréviations

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction Générales 1

Chapitre I : Généralité sur les Nanotechnologies

I.1. Introduction.....	5
I.2. Intérêts de la réduction d'échelle à des dimensions nanométriques	7
I.3. Définition des nanomatériaux	9
I.4. Les différents types de nanomatériaux	10
I.2.3. Propriétés des matériaux à l'échelle nanométrique	11
I.5.1. Propriétés mécaniques	11
I.5.2. Propriétés thermiques	12
I.5.3. Propriétés électriques	12
I.5.4. Propriétés optiques	12
I.5.5. Propriétés de barrière	12
I.5.6. Propriétés magnétiques	12
I.6. Méthodes d'observation et de manipulation à l'échelle nanométrique	13
I.7. Procédés de fabrication des nanomatériaux	14
I.7.1. Procédés par voie physique	15
I.7.2. Procédés par voie chimique	16
I.7.3. Procédés par voie mécanique	16
I.8. Domaine d'application	17
I.9. Les avantages et risques liés à la nanotechnologie	18
I.10. Quelques exemples de structures autoportées appliquées aux études mécaniques	19
I.11. Conclusion.....	21

Chapitre II: Aperçu global sur le matériau d'étude

II.1. Introduction.....	22
II.2. Définition d'un matériau composite	22
II.3. Eléments constitutifs d'un matériau composite	23
II.3.1. La matrice	23
II.3.1.1. Matrice organique	24
II.3.1.2. Matrice minérales	24
II.3.2. Le renfort	25
II.3.2.1. Les fibres de verre	25
II.3.2.2. Les fibres de carbone	25
II.3.2.3. Les fibres d'aramides	26
II.3.2.4. Les fibres céramiques	26
II.4. Type de matériaux composites	27
II.5. Mise en œuvre des composites	27
II.5.1. Moulage au contact	27
II.5.2. Moulage par projection	28
II.5.3. Moulage par compression	28
II.5.4. Moulage sous vide	28
II.5.5. Moulage par transfert de résine	29
II.6. Secteurs d'application des composites	30
II.7. Architecture des matériaux composites.....	32
II.7.1. Monocouches	32
II.7.2. Stratifiés	32
II.7.3. Sandwich	33
II.8. Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	34
II.8.1. Au titre des avantages.....	34
II.8.2. Au titre des inconvénients.....	34
II.9. Matériaux composites intelligents (FGM).....	35
II.9.1. Définition du concept des matériaux fonctionnellement gradué (FGM).....	35
II.9.2. Modélisation de la couche FGM	36
II.9.3. Historique des matériaux à gradient de propriétés (FGM).....	37
II.9.4. Secteurs d'application des FGM	38
II.10. Conclusion	40

Chapitre III : Cinématique des poutres

III.1. Introduction.....	41
III.2. Historique de la théorie des poutres	41
III.3. Les différents modèles des poutres.....	42
III.3.1. Modèle d'Euler Bernoulli.....	42
III.3.2. Modèle de Timoshenko.....	44
III.3.3. Modèle d'Ordre Supérieur-HSDBT-	46
III.4. Conclusion.....	50

Chapitre IV : Modélisation mathématique du problème dynamique

IV.1. Introduction.....	51
IV.2. Modélisation du système dynamique	52
IV.2.1. Propriétés matérielles des FGM nano-poutres	52
IV.2.2. Théorie non local des FGM nano-poutres	52
IV.2.3. Développement mathématique	54
IV.2.4. Résolution mathématique du problème dynamique	61
IV.3. Conclusion.....	64

Chapitre V : Applications numériques et interprétations

V.1. Introduction.....	65
V.2. Applications numériques et interprétations	66
V.2.1. Résultats numériques du problème dynamique libre.....	67
V.2.2. Résultats numériques du problème dynamique forcé	76
V.3. Conclusion.....	82

Conclusion Générales et Perspectives.....	83
--	-----------

Annexe	86
---------------------	-----------

Référence Bibliographiques	88
---	-----------

Liste des abréviations

FGMs	Matériaux fonctionnellement gradués
{ }	Vecteur colonne
[]	Matrice
Σ	Sommation
$\{\bar{\sigma}\}$	Tenseur de contraintes
$\{\bar{\varepsilon}\}$	Tenseur de déformations
$[\bar{C}]$	Tenseur d'élasticité Hookean
[K]	Matrices de rigidité globale
[M]	Matrices de masse globale
{F(t)}	Vecteur généralisée de la charge extérieur
h	Hauteur de la poutre
b	Largeur de la poutre
A	Section de la poutre
I	Moment d'inertie de la poutre
L/h	Elancement de la poutre
P_U	Propriété matérielle de la face supérieure
P_L	Propriété matérielle de la face inférieure
V_U	Fractions volumique de la face supérieure
V_L	Fractions volumique de la face inférieure
k	Indices de la fonction de puissance
E	Module de Young
G	Module de cisaillement
E(z)	Module de Young en fonction de l'axe Z
E_U	Module de Young de la face supérieur
E_L	Module de Young de la face inférieur
ρ	Densité massique
ρ_U	Densité massique de la face supérieure
ρ_L	Densité massique de la face inférieure
μ	Paramètre non local

e_0	Constante appropriée pour chaque matériau
a	Longueur caractéristique interne
∇^2	Opérateur de Laplace
t	Temps
Δt	Incrément de temps
$U(M)$	Champ de déplacement d'un point M
$u(x, z, t)$	Déplacement suivant l'axe X
$v(x, z, t)$	Déplacement suivant l'axe Y
$w(x, z, t)$	Déplacement suivant l'axe Z
$u_0(x, t)$	Composantes de déplacement suivant l'axe X
$w_0(x, t)$	Composantes de déplacement suivant l'axe Z
$\varphi_0(x, t)$	Distorsion mesurée sur la ligne moyenne de la poutre
$\Psi_0(x, t)$	Rotation totale mesurée sur la ligne moyenne de la poutre
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$f'(z)$	Fonction de cisaillement
ks	Facteur de correction du cisaillement
δS	Variation virtuelle de l'énergie de déformation
δK	Variation virtuelle de l'énergie cinétique
δV	Variation virtuelle des travaux extérieurs
N^c	Effort normal interne
M^b	Moment de flexion résultant classique
M^{sd}	Moment de flexion du au cisaillement
Q	Effort de cisaillement
P	Amplitude de la charge mobile
v_p	Vitesse de la charge mobile
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$	Coefficient de rigidités de la matrice
I_i	Inertie massique
$\delta(.)$	Fonction Dirac-delta
$\varphi(x), \psi(x), \varnothing(x)$	Fonctions de Rayleigh-Ritz
p_0, q_0	Indices de la fonction de test de Rayleigh–Ritz
n	Nombre de la fonction de test de Rayleigh–Ritz
$u(t), w(t), \varphi(t)$	Coefficients temporaire de Rayleigh-Ritz

C-C	Poutre encastrée aux deux extrémités
C-S	Poutre encastrée en extrémité et articulée en autre
S-S	Poutre articulée aux deux extrémités
C-F	Poutre encastrée en extrémité et libre en autre
ω_n	Fréquence propre
$\overline{\omega}_n$	Fréquence propre adimensionnelle
$w_s(L/2)$	Déflexion statique à mi-portée de la poutre
$w_d(L/2, t)$	Déflexion dynamique à mi-portée de la poutre
v_{cr}	Vitesse critique
α	Paramètre de vitesse adimensionnelle
D(t)	Déflexion dynamique transversale adimensionnelle
D_{max}	Déflexion dynamique transversale maximale adimensionnelle

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Tableau des grandeurs, et la science associée.....	6
Tableau I.2: Applications des nanotechnologies en fonction des secteurs d'activité..	17
Tableau IV. 1 : Divers fonction de gauchissement de la poutre	55
Tableau IV. 2: Indice des fonctions admissibles pour différent condition aux limites.....	58
Tableau V.1: Propriétés mécaniques du FGM nano-poutre.....	66
Tableau V.2: Etude de convergence pour une FGM nano-poutre	68
Tableau V.3: Comparaison de la première fréquence propre (ω_1).....	69
Tableau V.4: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis C-C	69
Tableau V.5: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis C-S	70
Tableau V.6: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis S-S	70
Tableau V.7: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis C-F	71
Tableau V.8: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis C-C	73
Tableau V.9: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis C-S	73
Tableau V.10: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis S-S	74
Tableau V.11: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis C-F	74
Tableau V.12: Convergence des réponses dynamiques	76
Tableau V.13: Validation de la déflexion dynamique transversale maximale (Dmax) dans l'échelle nanométrique.....	77
Tableau V.14: Validation de la déflexion dynamique transversale maximale (Dmax) dans l'échelle nanométrique.....	77

Liste des figures

Figure I.1 : Revenu mondiale généré par les nanotechnologies.....	5
Figure I.2 : Zone du nanomonde	6
Figure I.3 : Exemple d'un nanopoutre intégré avec son électronique	8
Figure I.4 : Principe de fonctionnement du capteur de gaz	9
Figure. I.5 : Image en coupe d'un nanotube multiparois montrant clairement un amincissement.....	10
Figure I.6: Schéma montrant la grande flexibilité des nanotubes de carbone.....	12
Figure I.7 : Vue au microscope électronique a transmission de la microstructure d'un acier fortement tréfilés.....	13
Figure. I.8 : a)Essai de traction sur un nanotube individuel à l'aide d'un AFM b) Forêt de nanofils d'une cellule photovoltaïque.....	14
Figures I.9 : Les approches « bottom-up » et « top-down » utilisées dans l'élaboration des nanomatériaux.....	15
Figure I.10 : Importance et fonctionnement du revêtement hydrophobe sur les matériaux.....	18
Figure I.11 : Poutres de formes diverses.....	19
Figure I.12 : Image des nanopoutres pour divers mode d'appuis.....	20
Figure I.13 : a) Nanopont en Aluminium développé à l'INL pour des essais en traction, b) Exemple d'un anneau de Guckel	20
Figure I.14 : a) Vue en coupe de l'anneau, b) Champ des déformations résultant de la contrainte initiale en compression.....	21
Figure II.1 : Structure d'un Matériau composite.....	23
Figure II.2 : Types de matrice.....	23
Figure II.3 : Organigramme illustrant les principaux matériaux de renfort.....	26
Figure II.4 : Moulage au contact.....	28
Figure II.5 : Méthode de projection simultanée.....	28
Figure II.6: Méthode de moulage par compression.....	29
Figure II.7: Méthode du moulage sous vide.....	29
Figure II.8 : Principe du moulage par injection de résine.....	30

Figure II.9 : Structure d'un matériau monocouche.....	32
Figure II.10 : Constitution d'un stratifié.....	33
Figure II.11: Matériau composite sandwich.....	34
Figure II.12 : Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites.....	36
Figure II.13 : Modèles analytiques d'une couche en FGM.....	36
Figure II.14 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.....	38
Figure III.1 : Cinématique d'Euler Bernoulli.....	42
Figure III.2 : Cinématique de Timoshenko.....	44
Figure III.3 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	46
Figure III. 4 : a) Distribution des différentes fonctions de cisaillement transversal le long de l'épaisseur de la poutre. b) La dérivée de diverses fonctions de cisaillement transversal dans le sens de l'épaisseur.....	49
Figure IV.1: Schéma d'une FGM nano-poutre bi-articulée sous une charge mobile dynamique.....	52
Figure IV.2: Variation de la loi de mélange (V_u) à travers l'épaisseur de FGM nano- poutre.....	53
Figure V.1: Schéma de programmation.....	65
Figure V.2: Courbe de convergence d'une nano-poutre en FGM.....	68
Figure V.3 : Variation de la fréquence propre (ω_1) pour différent mode d'appuis.....	72
Figure V.4: Profile de la première fréquence fondamentale (ω_1) pour différent mode d'appuis.....	75
Figure V.5: Historique temporel des déplacements à mi-travée.....	79
Figure V.6: Variation de la déflexion dynamique transverse maximale (D_{max}).....	81

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La nanotechnologie est l'une des technologies les plus intéressantes, qui a beaucoup influencé de nombreux domaines de la science et de l'industrie tels que la science de la santé humaine, l'industrie aérospatiale, ainsi que le génie civil et la mécanique [Launois et al, 2004]. De nombreux efforts ont été faits pour améliorer les performances physiques, électriques et mécaniques des nano-dispositifs et des nanostructures. A cet égard, certains types de nanostructures comme les nano-poutres, les nano-plaques et les nanotubes ont été développés. Récemment, ces éléments de structure ont été largement utilisés dans les technologies modernes et innovantes tels que les systèmes nano électromécaniques.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) ont été un sujet intéressant de grande importance au cours des dernières décennies. L'intensité et l'évolution rapide de la recherche dans cette classe de matériaux sont en fait dues à leurs propriétés mécaniques, ce qui donne de grands avantages par rapport aux matériaux classiques homogènes et stratifiés. Les FGMs sont utilisés dans des applications très différentes de l'ingénierie telles que la défense, l'électronique, le biomédical et les transports.

La conception et la fabrication de tels systèmes (nano FGMs) avec une grande précision, est fortement affectée par une compréhension précise du comportement physique des nano-structures, qui jouent un rôle primordial dans la performance de ces systèmes. Par conséquent, de nombreux chercheurs s'intéressent au comportement moléculaire et à la mécanique des milieux continus. La théorie de l'élasticité non locale d'Eringen, [Eringen, 1972] ; [Eringen & Edelen, 1972]; [Eringen, 1983] a été largement utilisée pour prédire la dépendance de la taille des matériaux et des nano-structures. Des travaux basés sur la théorie non locale ont été publiés afin de développer des modèles de nano-poutre pour l'appliquer à la *flexion* [Reddy, 2007] ; [Wang & Liew, 2007]; [Wang et al, 2008] [Reddy & Pang, 2008]; [Aydogdu, 2009]; [Reddy, 2010]; [Civalek & Demir, 2011]; [Roque, Ferreira & Reddy, 2011], au *flambage* [Wang, Varadan, & Quek, 2006] ; [Kumar, Heinrich, & Waas, 2008]; [Murmu & Pradhan, 2009]; [Senthilkumar, 2010]; [Senthilkumar, Pradhan, & Prathap, 2010]; [Sahmani & Ansari, 2011] , ainsi que dans les *vibrations* [Zhang, Liu, & Xie, 2005] ; [Wang & Varadan, 2006]; [Wang, Zhang, & He,

2007]; [Aydogdu, 2008]; [Benzair et al, 2008]; [Aydogdu, 2009]; [Murmu & Pradhan, 2009]; [Janghorban & Zare, 2011]. Certaines équipes se sont intéressées à l'effet thermique sur les fréquences naturelles des nano-plaques orthopédiques, [Satish et al, 2012] tandis que d'autres ont étudié l'amortissement viscoélastique des nano-systèmes [Lei et al, 2013]; [Arani, et al, 2012]; [Pouresm, Ghavanloo & Fazelzadeh, 2013]; [Adhikari, Mrumu, & McCarthy, 2013].

Récemment, les études basées sur le comportement vibratoire forcé des nanostructures ont été un champ de recherche actif. [Kiani, 2010] a déterminé la réponse dynamique d'un nanotube de carbone à paroi unique sous une nanoparticule en mouvement basée sur la théorie non locale. [Simsek, 2010] a étudié la vibration forcée d'un nanotube de carbone à paroi simple sous une charge harmonique mobile. [Simsek, 2011] a examiné l'effet non local dans la vibration forcée d'un système nanotubes à double paroi en carbone sous une nanoparticule en mouvement. [Kiani & Wang, 2012] ont concentré leur travail sur l'interaction d'une nanoparticule en mouvement avec un nanotube de carbone. [Uymaz, 2013] a appliqué les vibrations forcées dans un point fixe de la nanopoutre en FGM. [Nasirshoabi et al, 2015] ont analysé les vibrations transversales forcées d'un système nanotubes fermés contenant un fluide avec la prise en compte de l'effet de la compression de la charge axiale. [Lei, Sun & Ou, 2016]; [Hosseini & Rahmani, 2017] ont étudié les réponses dynamiques des nano-poutres en FGM soumises à une charge constante en mouvement basée sur la théorie classique d'Euler Bernoulli. Les travaux de [Hashemi & Khaniki, 2018] ont porté sur l'étude de la vibration transversale de plusieurs systèmes nano-poutres sous une nano-particule en mouvement en utilisant le modèle classique de la poutre.

L'objectif principal de cette thèse est de présenter une analyse sur le comportement dynamique des nano-poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), sollicitées par une charge constante et ponctuelle, qui se déplace selon un mouvement transitoire, en tenant compte de l'effet de la déformation de cisaillement transversale. Pour ce faire, nous avons développé un modèle mathématique, basé sur la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen, en utilisant le principe d'Hamilton combiné avec l'introduction des formes faibles dans le système d'équations gouvernant le mouvement. Le comportement vibratoire est modélisé pour différentes fonctions de gauchissement, classique; premier ordre et d'ordre supérieur de la théorie des poutres, tout en incluant l'inertie rotative.

Les propriétés mécaniques des FGMs varient continuellement dans le sens de l'épaisseur de la poutre conformément à la loi de puissance (P-FGM). Les solutions de Rayleigh-Ritz sont employées pour discrétiser les dérivées partielles spatiales du système où les composantes de déplacement de la section transversale de la poutre sont exprimées dans une série polynômiale algébrique. Les fréquences fondamentales de l'analyse vibratoire libre sont déterminées en résolvant le système d'équations gouvernant les problèmes des valeurs propres et les réponses dynamiques de comportement vibratoire forcées sont également résolues numériquement en utilisant la méthode d'intégration temporelle de Newmark. Pour montrer la fiabilité et la précision de notre modèle analytique, les résultats numériques obtenus dans l'analyse dynamique convergent vers des valeurs satisfaisantes et validés par ceux disponibles dans la littérature. Plusieurs exemples sont traités et illustrés sous forme graphique et tabulaire. Dans cette investigation, les caractéristiques de la vibration libre sont examinées ainsi une étude paramétrique est aussi faite pour analyser en détails l'influence des différents paramètres tels que ; le paramètre non local, la distribution du matériau, l'effet de cisaillement transversal, le rapport d'élancement et la vitesse de la charge mobile sur les réponses dynamiques des nano-poutres en FGMs.

Ce manuscrit de la thèse s'articule autour deux parties essentielles qui reflètent toute notre démarche de recherche, à savoir les études:

- Bibliographique
- Analytique

La partie bibliographique comprend trois chapitres :

Dans le premier chapitre est consacré à la présentation d'une manière générale sur les nanotechnologies ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre nous avons présenté une vision globale sur les matériaux d'étude tous en définissant leurs concepts et leurs caractéristiques.

Dans le troisième chapitre, les différentes théories des poutres ont été définies et étudiées.

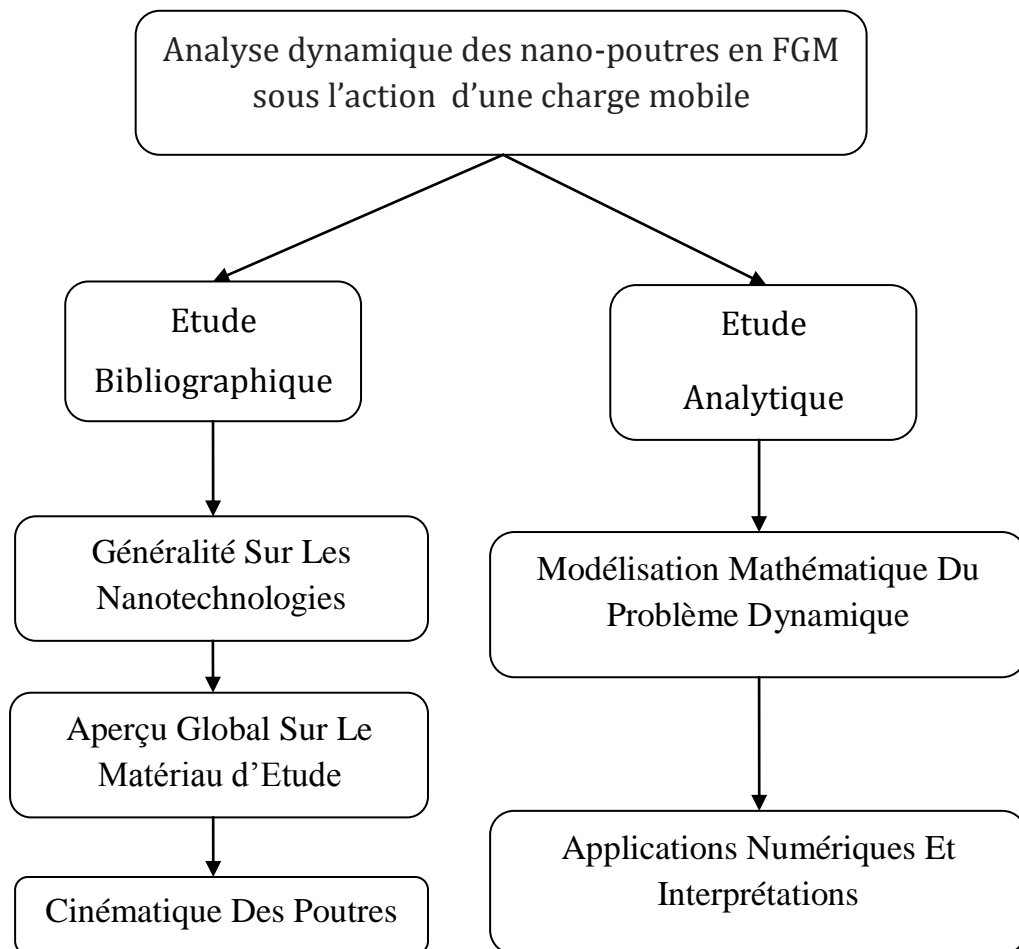
La partie analytique est scindée en deux chapitres :

Au quatrième chapitre, une modélisation mathématique est développée pour analyser le problème dynamique, avec un programme de calcul a été élaboré à cette fin.

Le cinquième chapitre est réservé pour commenter les résultats numériques trouvée a partir de notre model développé. Une étude paramétrique a été aussi abordée.

En fin, ce travail se termine par une conclusion générale recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les développements théoriques et expérimentaux futurs.

L'organisation générale de cette thèse est illustrée par l'organigramme suivant :



CHAPITRE I

Généralité Sur Les Nanotechnologies

I.1. Introduction

Les nanotechnologies font depuis plus de vingt-ans l'objet de travaux nombreux, au sein et à l'interface des disciplines scientifiques multiples, comme la physique, la chimie, la biologie, les sciences de l'ingénieur ou les sciences humaines et sociales. Les recherches sur les nano-technologies suscitent des espoirs importants en raison des propriétés particulières de la matière à l'échelle nano-métrique qui permettent d'envisager de nouvelles fonctions jusqu'ici inimaginables. Fabriquer, observer et manipuler des nano-objets, étudier et comprendre leurs propriétés et leurs interactions avec leur environnement, en particulier avec le vivant, les modéliser et les simuler, les intégrer dans des systèmes communicants, tels ont été et sont encore les grands défis scientifiques indispensables à relever pour développer des applications nombreuses et considérables, mais de façon maîtrisée et contrôlée.

Les nanosciences et les nanotechnologies connaissent depuis une quinzaine d'années un formidable essor, grâce au développement de nouveaux outils d'élaboration, d'observation et d'analyse (figure I.1).

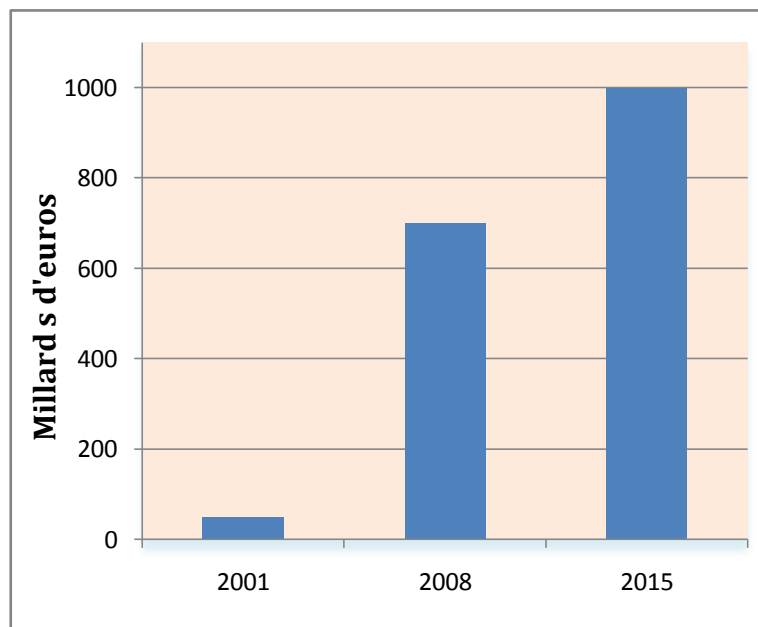


Figure I.1 : Revenu mondiale généré par les nanotechnologies

Les nanotechnologies sont la formalisation des concepts et des procédés issus des nanosciences c'est à dire des sciences qui visent à étudier et à comprendre les propriétés de la matière à l'échelle de l'atome et de la molécule.

Pour mieux comprendre les différentes échelles, les chercheurs ont divisé la zone de recherche comme montré dans la figure I.2.

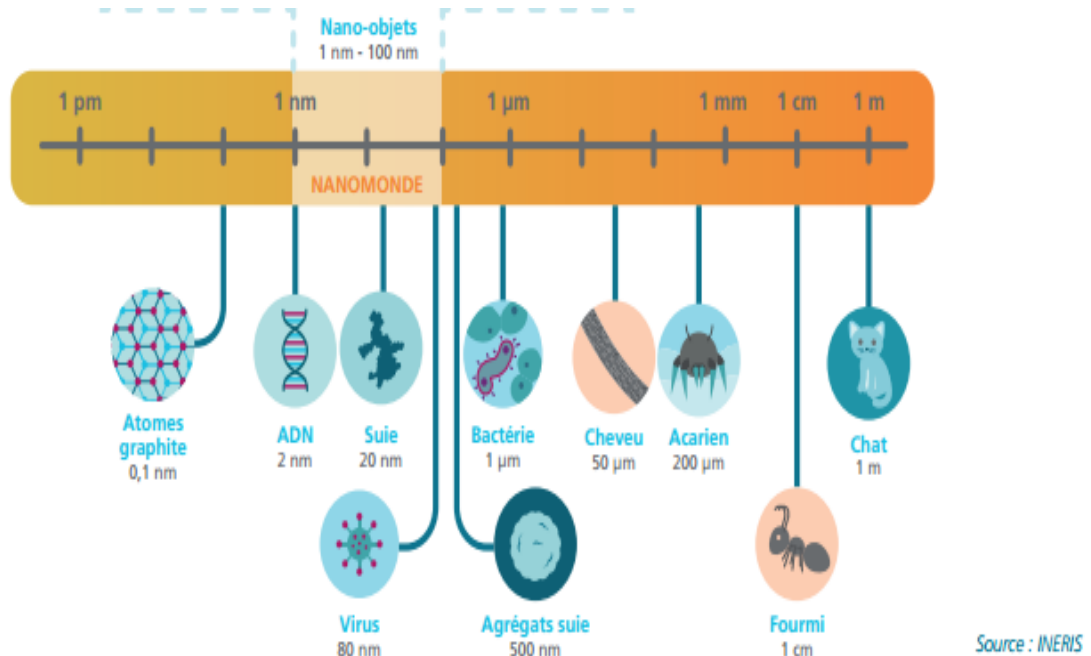


Figure I.2 : Zone du nanomonde [Obadia et al. 2008]

L'unité de référence du nanomonde est le nanomètre (noté en abrégé *nm*). Le préfixe nano vient du grec nanos qui signifie nain. Aux très petites échelles, de nouveaux phénomènes apparaissent comme l'effet de taille, l'effet quantique, etc..., tableau I.1.

Tableau I.1 : Tableau des grandeurs, et la science associée

<i>Grandeur</i>	<i>Science associée</i>
10^{-12}	Physique quantique
10^{-9}	Nanotechnologie, nanoscience
10^{-6}	Micro science

I.2. Intérêts de la réduction d'échelle vers les dimensions nanométriques

Avec le développement des microsystèmes depuis les années 80, l'étude mécanique des éléments et des matériaux composant ces dispositifs s'avère nécessaire. Cette nécessité est, actuellement, amplifiée par la tendance actuelle à la réduction des échelles des systèmes électromécaniques vers les nanosystèmes.

Les nanotechnologies conduisent donc à l'élaboration de matériaux dont les propriétés fondamentales (chimiques, mécaniques, optiques, biologiques, etc.) peuvent être modifiées. Par exemple, l'or est totalement inactif à l'échelle micrométrique alors qu'il devient un excellent catalyseur de réactions chimiques lorsqu'il prend des dimensions nanométriques.

Toutefois, la taille de ces nanostructures est adaptée aux phénomènes à l'échelle de molécules, de la cellule,... En effet, la réduction des échelles, au-delà d'un éventuel gain d'encombrement, permet surtout d'obtenir des nanostructures dont les masses et les rigidités sont très faibles. Ainsi, ces structures ont une meilleure sensibilité aux très faibles forces et des fréquences de résonance très élevées (de quelques centaines de MHz à plusieurs GHz).

De plus, ces nanostructures présentent de très faibles inerties permettant de diminuer leurs temps de réponse de quelques microsecondes à quelques nanosecondes. Il faut ajouter à cela, également, une réduction de la puissance consommée et de faibles dissipations d'énergie [Piguet et al, 2004].

Ce type de dispositif est donc tout particulièrement adapté pour la réalisation de capteurs ultrasensibles, pour des capteurs de phénomènes rapides, des résonateurs hautes fréquences,...

Le passage de la matière à des dimensions nanométriques fait apparaître des propriétés inattendues et souvent totalement différentes de celles des mêmes matériaux à l'échelle micro ou macroscopique, notamment en terme de résistance mécanique (plus la taille des particules constituant un matériau diminue, plus la dureté du matériau augmente), de réactivité chimique, de conductivité électrique et de fluorescence.

Depuis les années 90, on a vu émerger des dispositifs de taille submicronique et connus sous le nom de « Nano Electro Mechanical Systems » (NEMS). Ces NEMS incluent donc des structures mécaniques autoportées de dimensions latérales dans la gamme du nanomètre à la fraction de micromètre. Ces nanostructures, dans un NEMS, sont associées à un actionnement et/ou une détection intégrée et à une électronique associée permettant leur actionnement et/ou la détection de leurs déformations, de leurs mouvements ou d'un changement de leurs propriétés (voir la figure I.3).

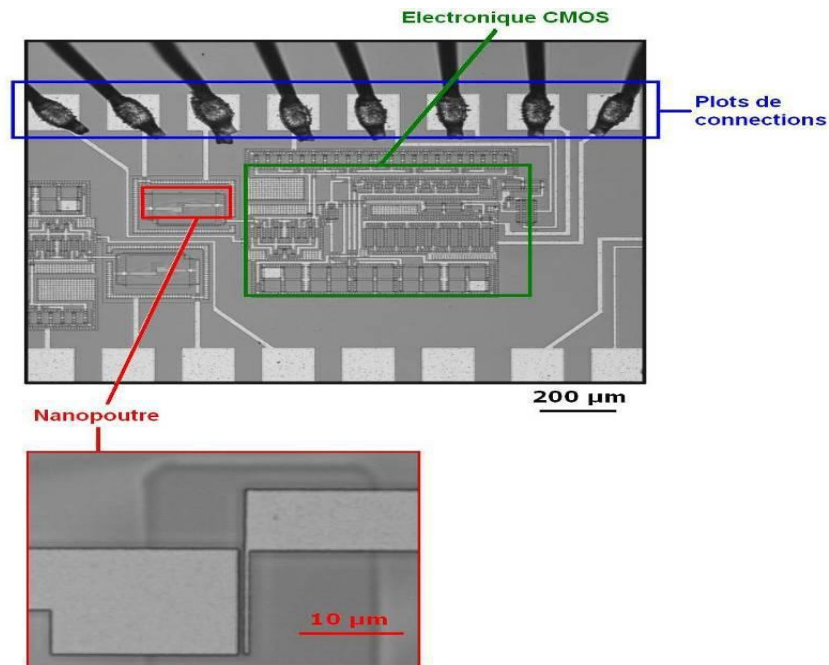


Figure I.3 : Exemple d'un nanopoutre intégré avec son électronique [Arcamone et al, 2007].

Dans le domaine des capteurs, la réduction de taille mène également à un gain de sensibilité important. C'est le rapport surface/volume des objets qui est exploité, l'utilisation d'objet de très faible dimensions permettant d'obtenir un rapport masse adsorbée/masse du capteur très important. Pour des objets présentant une masse très faible, il est ainsi possible de détecter de très faibles concentrations de gaz.

La figure I.4 illustre les effets des contraintes qui peuvent détériorer dramatiquement les performances de tels systèmes lorsque l'on cherche à atteindre de grandes sensibilités en diminuant l'épaisseur du corps d'épreuve. Le principe de ce nouveau type de capteur de gaz a été breveté par la société SINTEF.

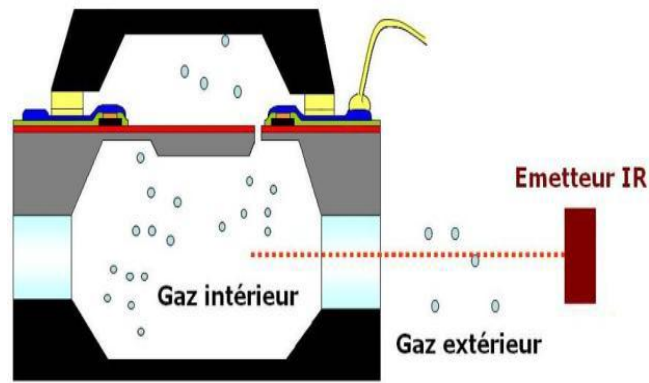


Figure I.4 : Principe de fonctionnement du capteur de gaz [Martins et al, 2007]

I.3. Définition des nanomatériaux

La Commission européenne a proposé en octobre 2011 [Obadia, 2008], dans le cadre d'une recommandation, une définition pour le terme « nanomatériau ». Un nanomatériau est un matériau naturel, formé accidentellement ou manufacturé contenant des particules libres, sous forme d'agrégat ou sous forme d'agglomérat, dont au moins 50 % des particules, dans la répartition numérique par taille, présentent une ou plusieurs dimensions externes se situant entre 1 nm et 100 nm. Selon la norme ISO TS 80004-1, [Obadia, 2008] un nanomatériau est un matériau dont au moins une dimension externe est à l'échelle nanométrique c'est-à-dire comprise approximativement entre 1 et 100 nm ou qui possède une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique.

Il existe des nanomatériaux produits de façon intentionnelle par l'homme à des fins d'applications précises et possédant des propriétés spécifiques et sont nommés « nanomatériaux manufacturés ».

Parmi ces nanomatériaux manufacturés, certains sont produits depuis déjà de nombreuses années dans des capacités importants tels que le dioxyde de titane, l'alumine, le carbonate de calcium ou la silice amorphe, d'autres plus récents sont fabriqués dans des quantités moindres tels que les nanopoutres en matériau composite (figure I.5).

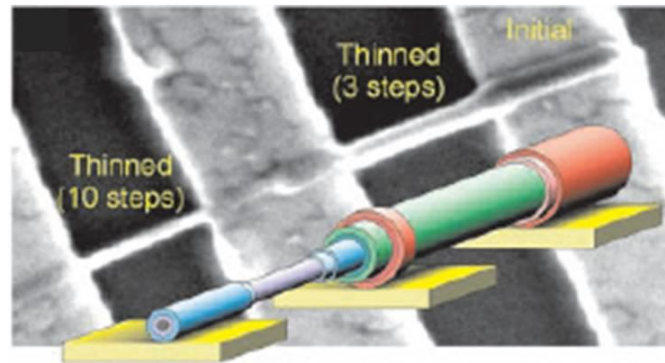


Figure. I.5 : Image en coupe d'un nanotube multiparois montrant clairement un amincissement [Collins et al. 2001]

Il existe également des nanomatériaux produits par l'homme de façon non intentionnelle, appelés parfois particules ultrafines, issus de certains procédés thermiques et mécaniques tels que les fumées de soudage ou de projection thermique, les émissions de moteurs à combustion, etc.

Enfin, des particules ultrafines naturelles sont présentes dans notre environnement, à l'image des fumées volcaniques ou des virus.

I.4. Les différents types de nanomatériaux

Il existe deux grandes familles de nanomatériaux :

1. Les nano-objets qui sont des matériaux dont une, deux ou trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique c'est-à-dire approximativement entre 1 et 100 nm. Parmi les nano-objets, il est possible de distinguer trois catégories :
 - les nanoparticules qui désignent des nano-objets dont les trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique : nanoparticules de latex, d'oxyde de zinc, de fer et de cérium, d'alumine, de dioxyde de titane, de carbonate de calcium, etc ;
 - les nanopoutre, nanotubes, nanofilaments ou nanobâtonnets qui se rapportent à des nano-objets dont deux dimensions externes sont à l'échelle nanométrique et la troisième dimension significativement supérieure (nanotubes de carbone, nanofibres de polyester, nanotubes de bore, etc.). Ces termes désignent des nano-objets longilignes de section comprise entre 1 et quelques dizaines de nm et de longueur comprise entre 500 et 10 000 nm ;
 - les nanofeuillets, nanoplats ou nanoplaquettes qui définissent des nanoobjets dont une dimension externe se situe à l'échelle nanométrique et les deux autres

dimensions sont significativement supérieures (nano-feuillets d'argile, nano-plaquettes de sélénure de cadmium, etc.).

- Les nano-objets peuvent être utilisés en tant que tels sous forme de poudre, de suspension liquide ou de gel.
2. Les matériaux nanostructurés qui possèdent une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique. Parmi les matériaux nanostructurés, il est possible de distinguer plusieurs familles parmi lesquelles :
- les agrégats et agglomérats de nano-objets. Les nano-objets peuvent se présenter soit sous forme individuelle (c'est-à-dire sous forme de particules primaires) ou soit sous forme d'agrégats ou d'agglomérats dont la taille est sensiblement supérieure à 100 nm.
 - les nanocomposites. Ces matériaux sont composés pour tout ou partie de nano-objets qui leur confèrent des propriétés améliorées ou spécifiques de la dimension nanométrique. Les nano-objets sont incorporés dans une matrice ou sur une surface afin d'apporter une nouvelle fonctionnalité ou de modifier certaines propriétés mécaniques, magnétiques, thermiques, etc. Les polymères chargés de nanotubes de carbone utilisés dans le secteur des équipements sportifs, afin d'améliorer leur résistance mécanique et de diminuer leur poids, constituent un exemple de nanocomposites.
 - les matériaux nanoporeux. Ces matériaux possèdent des pores de taille nanométrique. Les aérogels de silice sont des matériaux nanoporeux qui présentent d'excellentes propriétés d'isolation thermique.

I.5. Propriétés des matériaux à l'échelle nanométrique

Les nanomatériaux, présentent de nombreuses propriétés particulières dont les principales sont les suivantes :

I.5.1. Propriétés mécaniques :

L'effet de la nanostructure peut se traduire par un phénomène de superplasticité. Les nanomatériaux peuvent ainsi permettre d'améliorer la résistance des matériaux sans compromettre leur ductilité, car la taille des nanoparticules limite les concentrations de contraintes (figure I.6). Il faut également noter l'effet de renfort dans les composites (absorption d'énergie, déviation des fissures, etc.).

I.5.2. Propriétés thermique :

L'ajout de nanoparticules peut permettre d'améliorer certaines propriétés avec de faibles fractions volumiques. Par exemple, l'ajout de nanoparticules d'alumine ou d'oxyde de zinc peut modifier la conductivité thermique de fluides caloporteurs (nanofluides).

I.5.3. Propriétés électriques :

L'introduction de nanoparticules et/ou de nanopoutres peut modifier de façon drastique la conductivité électrique de matériaux réputés isolants, et ce à des taux de charges extrêmement faible, notamment lors de l'utilisation de nanopoutres de carbone (NPC).

I.5.4. Propriétés optiques :

Les nanoparticules ont des dimensions inférieures aux longueurs d'onde de la lumière visible (380 - 780 nm), ce qui permet d'améliorer les propriétés optiques de certains matériaux (transparence).

I.5.5. Propriétés de barrière :

Dans les nanocomposites à matrice polymère, l'incorporation d'argile par exemple augmente les propriétés de barrière vis-à-vis de l'eau et des gaz du fait de l'augmentation de la distance à parcourir pour les molécules qui diffusent.

I.5.6. Propriétés magnétiques :

L'influence de la dimension des domaines cristallins a un effet très important sur le comportement magnétique des matériaux.

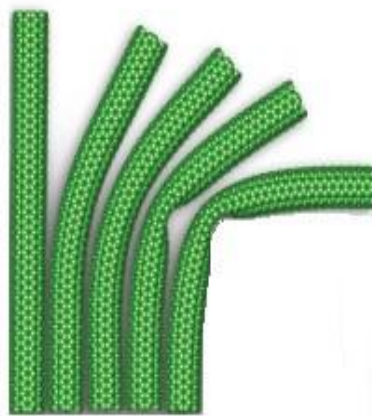


Figure I.6: Schéma montrant la grande flexibilité des nanotubes de carbone

I.6. Méthodes d'observation et de manipulation à l'échelle nanométrique

L'émergence des nanosciences et des nanotechnologies doit beaucoup aux progrès spectaculaires des techniques d'observation et de manipulation. Les microscopes optiques créés en 1605, ne peuvent observer des objets de taille inférieure au micromètre. De nouveaux microscopes, utilisant des techniques différentes, se sont développés depuis plusieurs décennies et requiert notamment un degré de technicité avancé pour préparer les échantillons d'observation. Le développement des microscopes électroniques à transmission (1931, 1970) a permis de donner des images à l'échelle atomique (1/10 nm) mais nécessite une préparation complexe des échantillons (figure I.7). Le microscope électronique à balayage (1965), bien que moins sensible permet de visualiser rapidement la présence, la forme et la disposition de nano-objets.

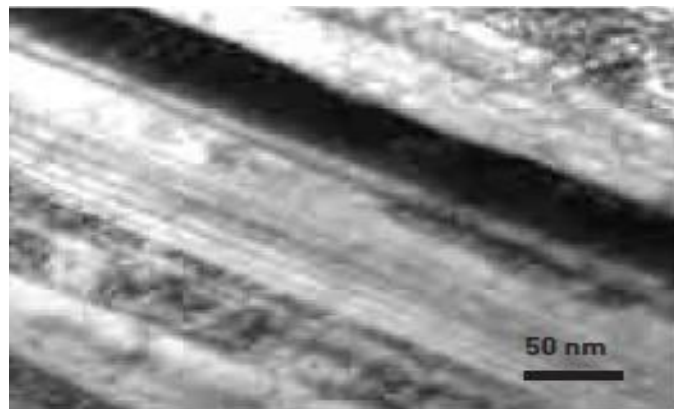


Figure I.7 : Vue au microscope électronique à transmission de la microstructure d'un acier fortement tréfilés

L'invention au début des années 1980 du microscope à effet tunnel (STM) a fait prendre conscience que le « nanomonde » était à notre portée. Ce microscope utilise une pointe métallique extrêmement fine qui se déplace à quelques nanomètres de la surface. Les variations du courant électrique - appelé « courant tunnel » - qui franchit l'espace séparant la pointe de la surface, sont enregistrées par traitement informatique pour en déduire la topologie et certaines propriétés (chimiques, électroniques, magnétiques) des surfaces. Le microscope à force atomique (AFM) est basé sur une architecture similaire mais mesure une force de contact au lieu d'un courant électrique (figure I.8).

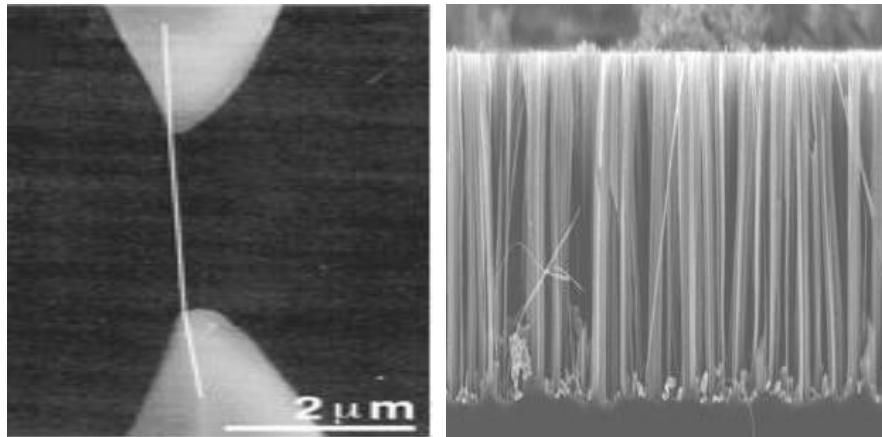
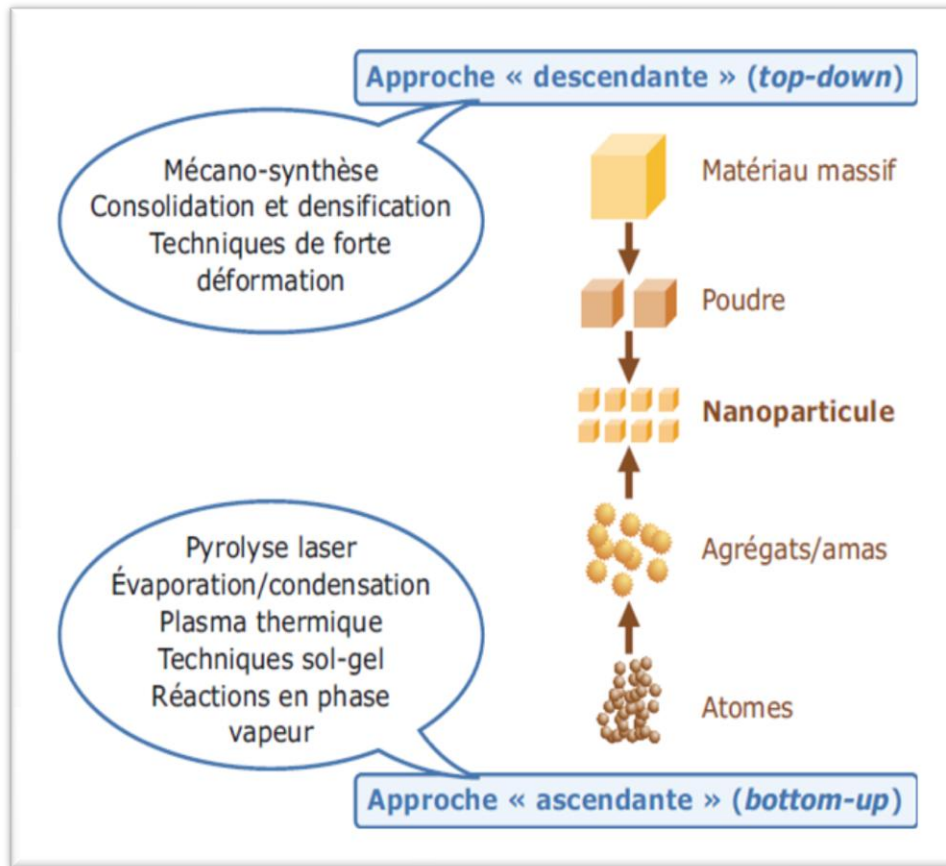


Figure. I.8 : a) Essai de traction sur un nanotube individuel à l'aide d'un AFM [Yu et al. 2000]. b) Forêt de nanofils d'une cellule photovoltaïque

I.7. Procédés de fabrication des nanomatériaux

Les nanomatériaux manufacturés et destinés à des usages industriels peuvent être synthétisés selon deux approches différentes. On différencie la méthode dite « ascendante » (en anglais bottom-up) de la méthode dite « descendante » (top-down).

- L'approche « ascendante » vient des laboratoires de recherche et des nanosciences. Elle consiste à construire les nanomatériaux atome par atome, molécule par molécule ou agrégat par agrégat. L'assemblage ou le positionnement des atomes, des molécules ou des agrégats s'effectue de façon précise, contrôlée et exponentielle, permettant ainsi l'élaboration de matériaux fonctionnels dont la structure est complètement maîtrisée.
- L'approche « descendante » est issue de la microélectronique. Elle consiste à réduire et plus précisément à miniaturiser les systèmes actuels en optimisant les technologies industrielles existantes. Les dispositifs ou les structures sont ainsi graduellement sous-dimensionnés ou fractionnés jusqu'à atteindre des dimensions nanométriques. Le broyage à haute énergie est l'une des principales techniques utilisées dans cette approche actuellement.



Figures I.9 : Les approches « bottom-up » et « top-down » utilisées dans l'élaboration des nanomatériaux [Obadia et al, 2008].

Les deux approches tendent à converger en termes de gamme de tailles des objets. L'approche « bottom-up » semble néanmoins plus riche en termes de type de matière, de diversité d'architecture et de contrôle de l'état nanométrique alors que l'approche « top-down » permet d'obtenir des quantités de matière plus importantes mais le contrôle de l'état nanométrique s'avère plus délicat.

Les procédés actuels permettant la fabrication de nanomatériaux sont classés en trois grandes catégories :

I.7.1. Procédés par voie physique :

- l'évaporation/condensation,
- l'ablation laser,
- la décharge électrique,

- les flammes de combustion,
- la pyrolyse laser,
- les micro-ondes,
- l'irradiation ionique ou électronique,
- la décomposition catalytique,
- les dépôts physiques en phase vapeur regroupés sous le terme de PVD (Physical Vapor Deposition), etc.

I.7.2. Procédés par voie chimique :

- les réactions en phase vapeur regroupées sous le terme de CVD (Chemical Vapor Deposition),
- les réactions en milieu liquide : Co-précipitation chimique, hydrolyse, etc.,
- les réactions en milieu solide,
- les fluides supercritiques avec réaction chimique,
- les techniques sol-gel : sol-gel à base de silice, alkoxyde de métal, etc.

I.8.3. Procédés par voie mécanique :

- le broyage à haute énergie ou mécano-synthèse,
- la consolidation et la densification,
- les techniques de forte déformation : torsion, friction, laminage, etc.

L'approche « ascendante » fait appel à des procédés d'élaboration chimiques et physiques alors que l'approche « descendante » induit, principalement, l'utilisation de méthodes mécaniques.

I.8. Domaine Applications

Du fait de leurs propriétés variées et souvent inédites, les nanomatériaux recèlent de potentialités très diverses et leurs utilisations ouvrent de multiples perspectives. Les nanomatériaux permettent ainsi des innovations incrémentales et de rupture dans de nombreux secteurs d'activité tels que la santé, l'automobile, la construction, l'agroalimentaire ou encore l'électronique.

Tableau I.2: Applications des nanotechnologies en fonction des secteurs d'activité

SECTEURS D'ACTIVITÉ	EXEMPLES D'APPLICATIONS ACTUELLES ET POTENTIELLES
Automobile, aéronautique et aérospatial	Matériaux renforcés et plus légers ; peintures extérieures avec effets de couleur, plus brillantes, anti-rayures, anti-corrosion et anti-salissures ; capteurs optimisant les performances des moteurs ; détecteurs de glace sur les ailes d'avion ; additifs pour diesel permettant une meilleure combustion ; pneumatiques plus durables et recyclables...
Electronique et communications	Mémoires à haute densité et processeurs miniaturisés ; cellules solaires ; bibliothèques électroniques de poche ; ordinateurs et jeux électroniques ultra-rapides ; technologies sans fil ; écrans plats...
Agroalimentaire	Emballages actifs ; additifs : colorants, anti-agglomérants, émulsifiants...
Chimie et matériaux	Pigments ; charges ; poudres céramiques ; inhibiteurs de corrosion ; catalyseurs multi-fonctionnels ; textiles et revêtements anti-bactériens et ultra-résistants...
Construction	Ciments autonettoyants et anti-pollutions, vitrages autonettoyants et anti-salissures ; peintures ; vernis ; colles ; mastics...
Pharmacie et santé	Médicaments et agents actifs ; surfaces adhésives médicales anti-allergènes ; médicaments sur mesure délivrés uniquement

	à des organes précis ; surfaces bio-compatibles pour implants ; vaccins oraux ; imagerie médicale...
Cosmétique	Crèmes solaires transparentes ; pâtes à dentifrice abrasives ; maquillage avec une meilleure tenue...
Énergie	Cellules photovoltaïques nouvelle génération ; nouveaux types de batteries ; fenêtres intelligentes ; matériaux isolants plus efficaces ; entreposage d'hydrogène combustible...
Environnement et écologie	Diminution des émissions de dioxyde de carbone ; production d'eau ultrapure à partir d'eau de mer ; pesticides et fertilisants plus efficaces et moins dommageables ; analyseurs chimiques spécifiques...
Défense	Détecteurs d'agents chimiques et biologiques ; systèmes de surveillance miniaturisés ; systèmes de guidage plus précis ; textiles légers et qui se réparent d'eux-mêmes...

I.9. Les avantages et risques liés à la nanotechnologie

La nanotechnologie a beaucoup d'avantages, on peut en citer quelques-uns comme l'utilisation des nano-particules, carbone nano-tubes et nano-fibres pour améliorer la durabilité et la résistance des matériaux, réduit la pollution, permet d'économiser de l'énergie et une meilleure utilisation des matières premières Figure I.10.

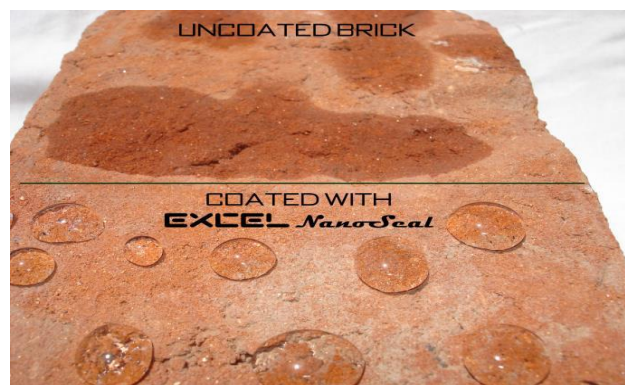


Figure I.10 : Importance et fonctionnement du revêtement hydrophobe sur les matériaux.

En revanche, la nanotechnologie est une épée à double tranche, qui présente des risques importants directement liés à la santé pour ceux qui manipulent et travaillent avec les matériaux à l'échelle nanométrique, le premier danger serait que ces nanoparticules puissent entrer dans les cellules de l'organisme, quelle que soit la voie de pénétration : voies respiratoire, cutanée, digestive ou par inhalation, les particules ultrafines pourraient se retrouver directement au contact du cerveau, par cette dernière voie, mais des réglementations rigoureuses et une grande sont prises en compte pour utiliser la nanotechnologie sans danger.

I.10. Quelques exemples de structures autoportées appliquées aux études mécaniques

A travers la littérature, on rencontre divers types de structures telles que des nanopoutres avec des géométries différentes. Ainsi, nous avons pu voir le cas des poutres rectangulaires et triangulaires mais on trouve également des poutres à forme cylindrique ou bien encore en forme de V (Figure I.11) [Finot et al, 2008] ; [Florando et al, 2005].

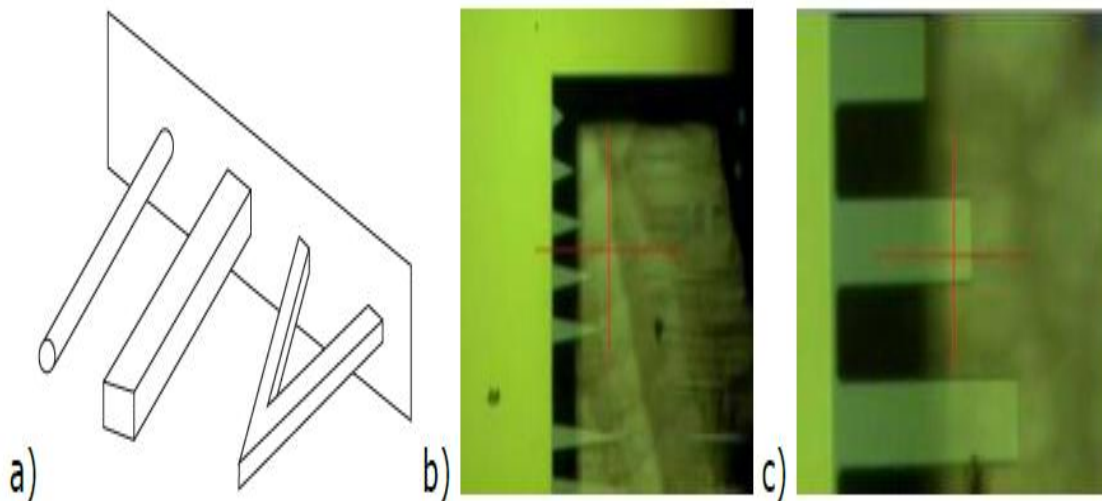


Figure I.11 : Poutres de formes diverses (cylindrique, rectangulaire et en forme de V) étudiées par [Finot et al, 2008].

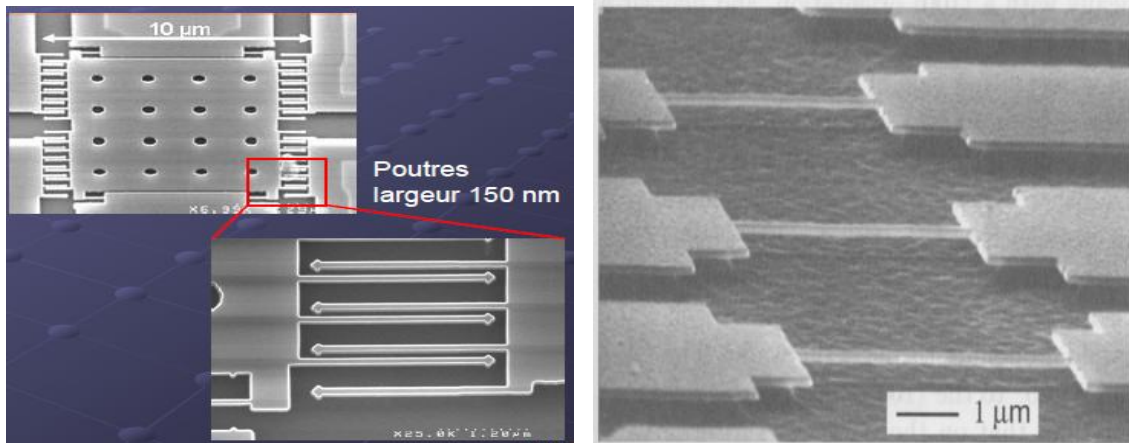


Figure I.12 : Image des nanopoutres pour divers mode d'appuis

L'étude des déformations de ces structures avec ou sans sollicitations extérieures permet de remonter à leurs paramètres mécaniques (E , ν , σ_0 ,...) [Boesseboeuf et al, 2001]. Les nanopoutres, à double encastrement (ou nanoponts), sont régulièrement utilisées aussi pour l'étude des paramètres mécaniques (Figure I.11). Les mêmes types d'études peuvent être appliquées à ces structures (observation des déformations, application d'une force, vibrométrie,...) [Boesseboeuf et al, 2001 ; Huang et Zhang, 2006]. Ces structures peuvent également être étirées afin d'observer les déformations induites par les forces de traction afin de remonter, par exemple, au module d'Young, au coefficient de Poisson, à la résistance à la traction,... [Seguineau et al. 2008 ; Sharpe et al. 1997].

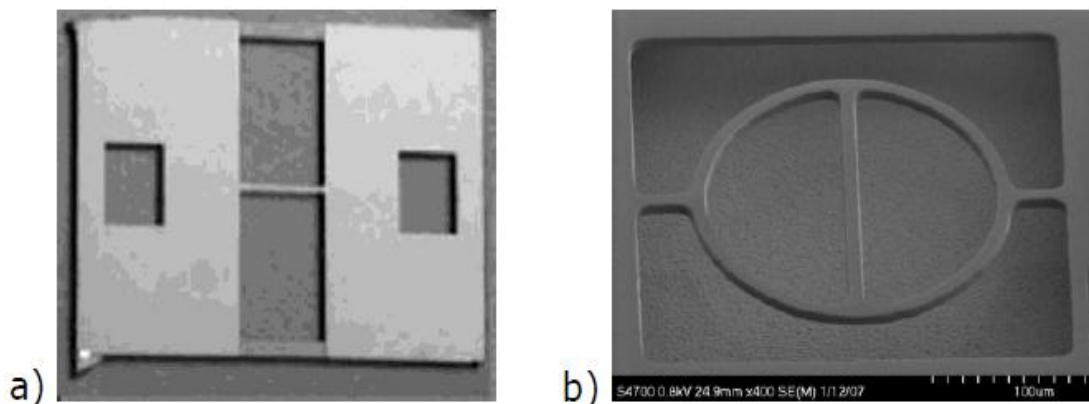


Figure I.13 : a) Nanopont en Aluminium développé à l'INL pour des essais en traction
b) Exemple d'un anneau de Guckel développée par [Foulds et al, 2008]

On observe, aussi, le développement de structures plus originales pour l'étude de propriétés mécaniques. Citons l'exemple de l'étude proposé par T. Kramer qui utilise un anneau, dont la périphérie extérieure est encastrée au substrat (Illustré dans la figure I.14). Ce type de structure s'applique à l'étude mécanique de films précontraints en compression. L'étude du champ des déformations de l'anneau permet de remonter aux propriétés mécaniques du matériau [Kramer et Paul, 2001].

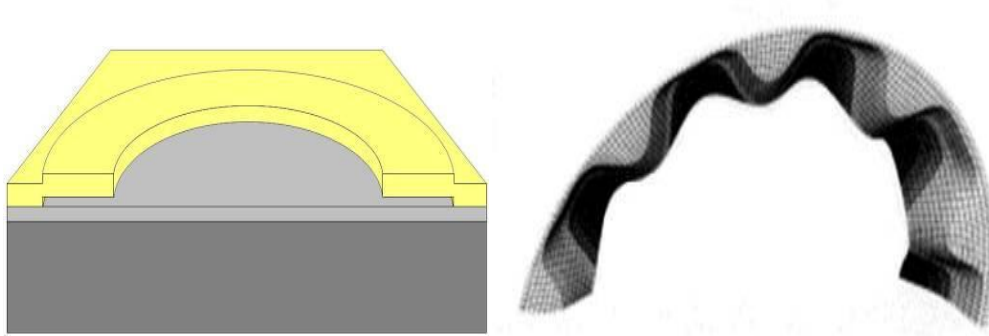


Figure I.14 : a) Vue en coupe de l'anneau développé par [Kramer et Paul, 2001].
b) Champ des déformations résultant de la contrainte initiale en compression.

I.11. Conclusion

A travers ce chapitre nous avons pu voir l'importance grandissante des nanotechnologies dans l'ingénierie actuelle ainsi que l'intérêt de réduire leurs dimensions pour aller vers les nanosystèmes. Le développement de ces dispositifs offre de nouvelles perspectives dans de nombreux domaines d'application. Toutefois, ce développement doit s'accompagner de nouvelles études afin de palier aux modifications liées aux faibles dimensions, le but étant d'optimiser et de fiabiliser le comportement de ces dispositifs avec la réduction d'échelle. Cette optimisation passe par l'étude mécanique des matériaux qui composent les nanostructures.

CHAPITRE II

Aperçu Global Sur Le Matériau d'Etude

II.1. Introduction

Les matériaux composites contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

Les composites est généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de nature différentes, et disposée sous forme stratifié dont l'association aboutir a un assemblage avec des performances supérieures a celles des composants pris séparément.

En effet, les matériaux composites ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement à deux facteurs. Le premier facteur résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième facteur dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal [Tafla, 2007].

II.2. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est une combinaison d'au moins deux composants non miscibles (qui ne mélangent pas de façon homogène) mais possédant une forte capacité de pénétration et dont les propriétés se complètent. Les plus répandus et possédant des propriétés mécaniques exceptionnelles sont ceux constitués de deux phases : la matrices et les renforts [Dorlot, 1986].

Exemples : un gilet par balle = résine souple + kevlar ; le béton armé = béton + armature en acier.

Effectivement, il existe différents types de matériaux composites, les matériaux composites à matrice organique (CMO), les matériaux composites à matrice céramique (CMC) et les matériaux composites à matrice métallique.

II.3. Eléments constitutifs d'un matériau composite

Le matériau composite est constitué d'une protection appelée « matrice » et de l'ossature appelée « renfort » (Figure II.1). Entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée « interface ». Cette zone assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif.

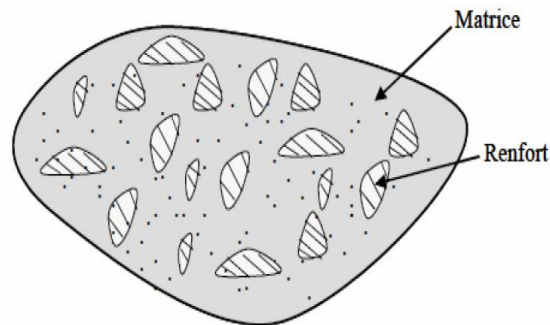


Figure II.1 : Structure d'un Matériau composite

II.3.1. La matrice

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, répartir les contraintes sollicitées (résistance à la compression ou à la flexion), la tenue chimique de la structure et de donner la forme désirée au produit. La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres. On peut retrouver les différentes familles des matrices dans l'organigramme présenté ci-dessous, figure II.2 :

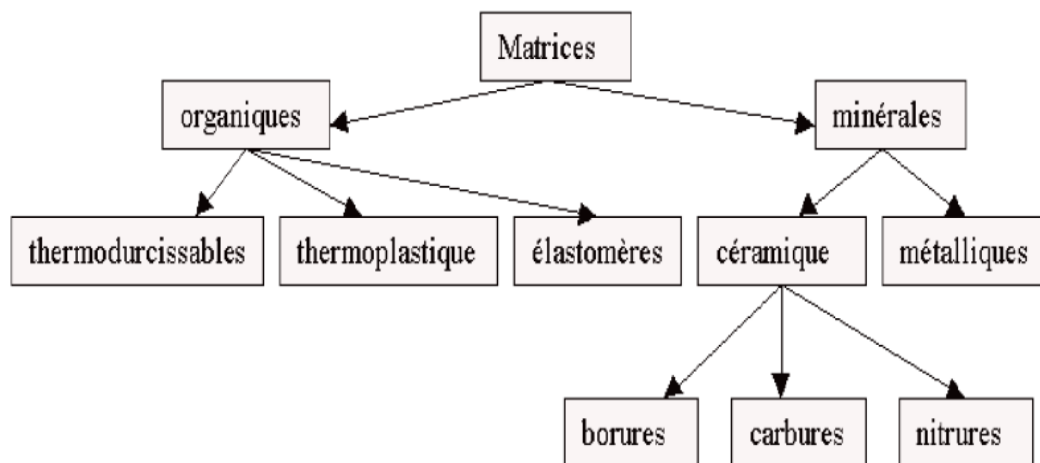


Figure II.2 : Types de matrice

II.3.1.1. Matrice organique

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas (200 à 300°C). Parmi ces familles de résines, on distingue deux types de résines qui sont, actuellement, les plus utilisées:

- a) **Résines thermodurcissables** : les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters, très largement utilisés, les résines époxydes et les résines phénoliques. Les composites à matrice thermodurcissables représentent environ 70 % des composites transformés en Europe.
- b) **Résines thermoplastiques** : les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques.

II.3.1.2. Matrice minérales

Les matériaux composites à matrice minérales sont utilisés au-delà de 600°C pour une matrice métallique et 1000°C pour une matrice céramique.

- a) **Matrice métallique** : pour des applications plus haute température, on fait appel aux composites à matrice métallique (C.M.M). Les métaux ou alliages métalliques, utilisées dans la fabrication des (C.M.M.), sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé ainsi , l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utiliser, les (C.M.M.) présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en températures et au chocs thermiques.
- b) **Matrice céramique** : les matrices céramiques se caractérisent par une grande résistance à la chaleur même en atmosphère oxydante, leur température de fusion étant en général supérieure à 1500°C. Elles présentent une grande dureté, une grande rigidité mais aussi une grande fragilité. Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en

carbone, en silice ou en carbure de silicium. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

II.3.2. Le renfort

Les renforts (fibres) peuvent être utilisés sous différentes formes : particules ou fibres. Une particule ne possède aucune dimension privilégiée, elle est utilisée généralement pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Les fibres se présentent sous plusieurs formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes, etc.) et c'est leur arrangement et leur orientation qui permettent de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites. Parmi les fibres les plus connues, on peut citer :

II.3.2.1. Les fibres de verre

Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2 mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés selon la proportion de chaque composant (SiO_2 , Al_2O_3 , B_2O_3 , CaO , MgO), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).

II.3.2.2. Les fibres de carbone

Les fibres de carbone ont un haut module d'élasticité, de 200 à 800 GPa. L'allongement ultime est de 0,3 à 2,5 %. Les fibres de carbone n'absorbent pas l'eau et elles résistent à plusieurs solutions chimiques. Elles présentent une résistance excellente à la fatigue, et une faible relaxation comparée à celle des aciers extensibles précontraints. La fibre de carbone est un conducteur électrique et, par conséquent, peut donner la corrosion galvanique si elle est en contact direct avec l'acier. Il faut signaler également le mauvais comportement au choc et à l'abrasion des stratifiés renforcés par des fibres de carbone. Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité. On

trouvera des fibres dites « A Haute Résistance » HR et des fibres « à haut module » HM ou même « à très haut module » THM, et des fibres intermédiaires [Chatain, 2001].

II.3.2.3. Les fibres d'aramides

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis, etc...).

II.3.2.4. Les fibres de céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques ; fibres de Carbone de Silicium, fibres de Bore et fibres de Bore carbure de silicium.

Les principaux matériaux de renfort ont présenté comme suit (Figure II.3):

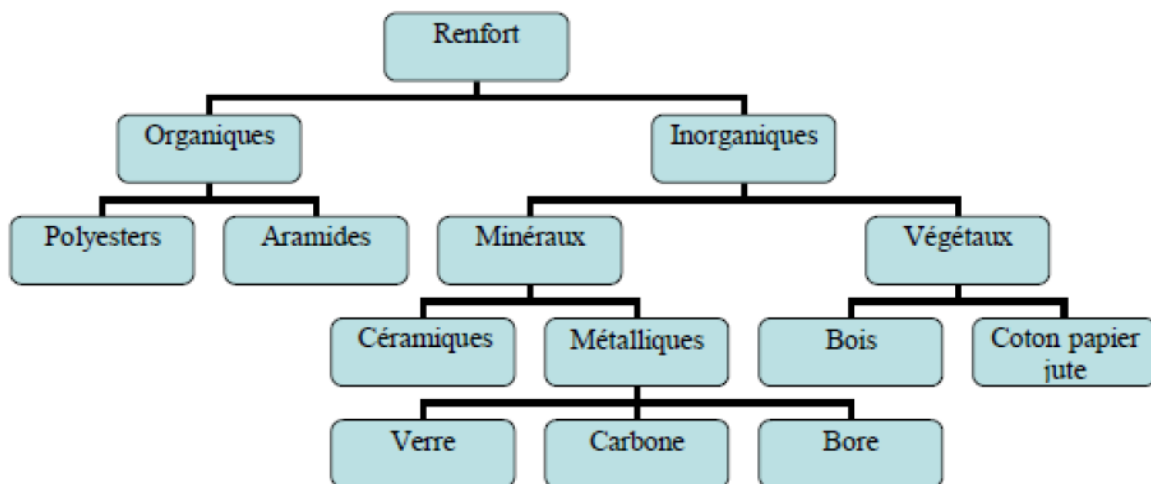


Figure II.3 : Organigramme illustrant les principaux matériaux de renfort

II.4. Type de matériaux composites

Les composites sont classés en deux grandes classes: les composites à grande diffusion [*GD*] et les composites hautes performances [*HD*].

II.4.1. Les composites à grande diffusion [GD]

Ils occupent une portion de 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort est de 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters avec des fibres de verre. Dans ce cas le renfort et la matrice sont à des coûts voisins.

II.4.2. Les composites hautes performances [HD]

Ils sont principalement utilisés dans l'aéronautique et sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux composites à grande diffusion. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les composites hautes performances.

II.5. Mise en œuvre des composites

La plupart des méthodes de mise en œuvre consiste à élaborer les pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort. Cette technique générale appelée stratification.

II.5.1. Moulage au contact

C'est la méthode la plus simple qui demande le moins d'équipements (figure II.4). On utilise des moules en bois vernis, en métal, etc., sur lesquels on dépose successivement : un agent de démoulage, une couche de surface (optionnelle) et des couches successives de renforts imprégnés au rouleau d'une résine polymérisant à l'ambiante.

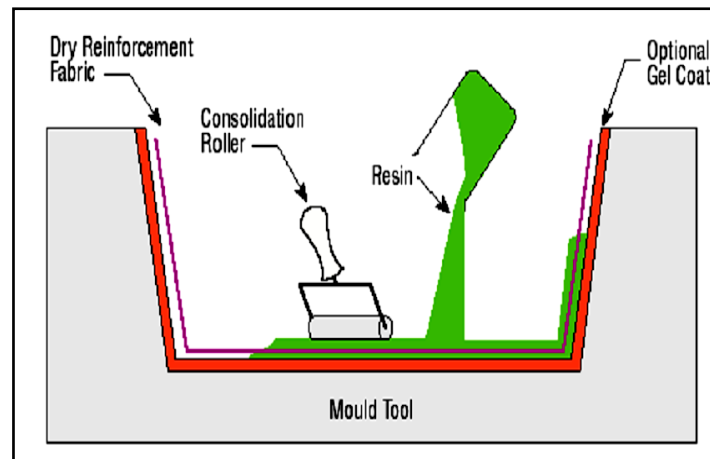


Figure II.4 : Moulage au contact

II.5.2. Moulage par projection

Dans cette méthode, la résine et les fibres de renfort coupées sont projetées simultanément au moyen d'un pistolet sur une forme (figure II.5).

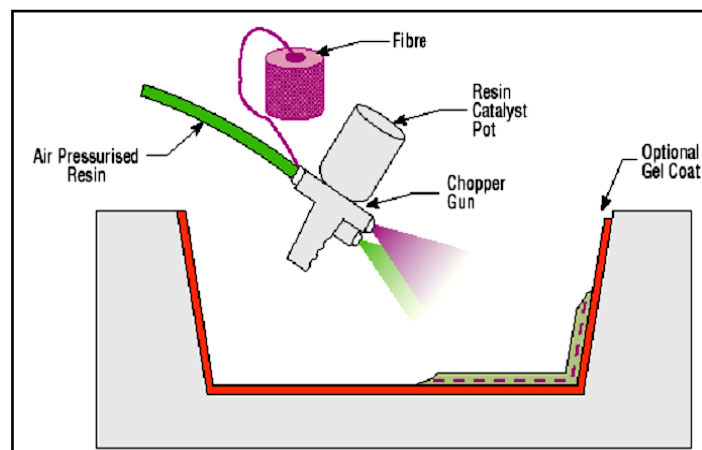


Figure II.5 : Méthode de projection simultanée

II.5.3. Moulage par compression

Le moulage par compression est l'un des procédés les plus économiques pour la production de grandes séries de pièces de petites et de moyennes dimensions. Dans ce procédé, on place une préforme de compound de moulage (résine, renfort, catalyseur et additifs déjà pré-mélangés dans des proportions optimales) dans la cavité d'un moule chauffé, et ensuite on la presse aux dimensions finales (figure II.6). On utilise des pressions qui vont de 0.5 à 15 MPa.

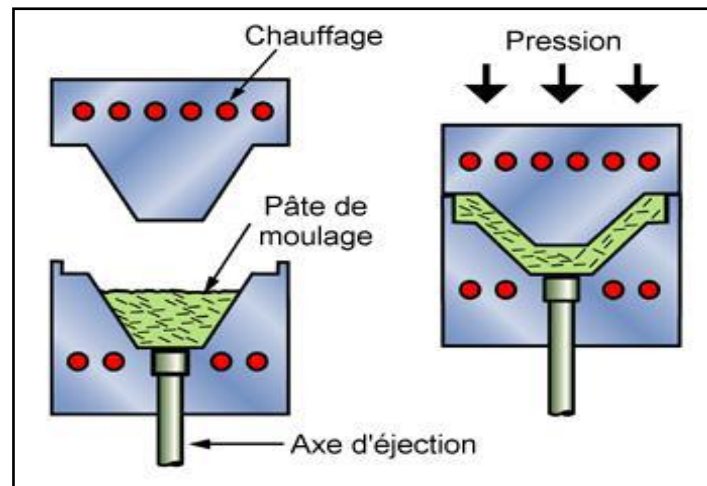


Figure II.6: Méthode de moulage par compression

II.5.4. Moulage sous vide

Les renforts fibreux sont placés à sec sur un film démoulant qui épouse les formes du moule. Une membrane souple joue le rôle de contre-moule et assure l'étanchéité. Le vide créé permet à la résine de se diffuser dans les renforts fibreux et cavités (figure II.7). Cette méthode pourrait être combinée avec un système de chauffage qui servirait à polymériser la résine. Aux conditions ambiantes, la pression qui fait couler la résine est égale à la pression atmosphérique de 1 atm.

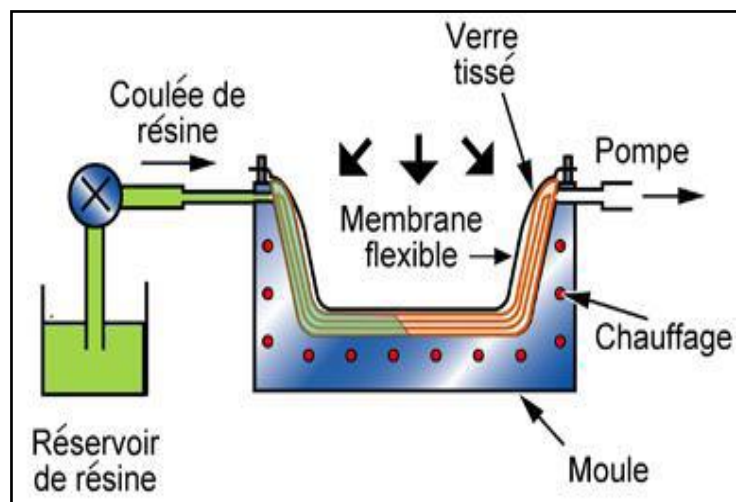


Figure II.7 Méthode du moulage sous vide

II.5.5. Moulage par transfert de résine (RTM- Resin Transfert Molding)

Le moulage par transfert de résine consiste à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé. L'alimentation des résines est réalisée par le vide ou par l'injection de la résine (figure II.8). Cette méthode permet d'atteindre des taux volumiques élevés des fibres, d'où l'obtention de pièces à caractéristiques mécaniques élevées. Ce procédé de moulage convient à la réalisation de pièces profondes et de formes complexes.

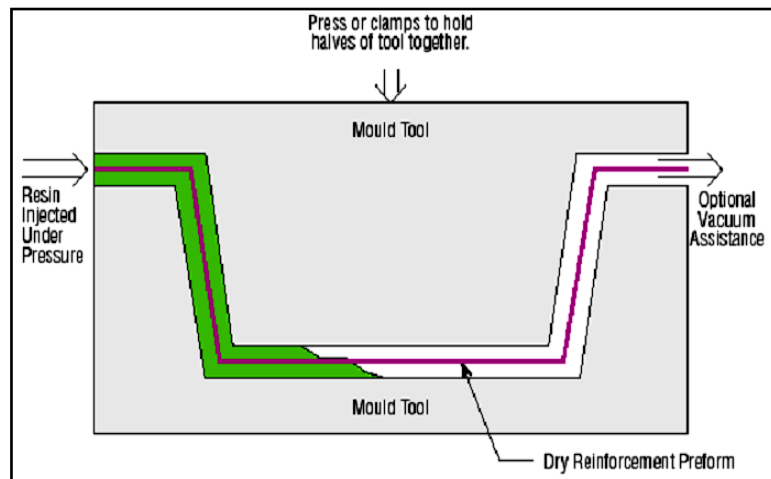


Figure II.8 : Principe du moulage par injection de résine

II.6. Secteurs d'application des composites

Construction aéronautique : les composites de haute performance ont été longtemps confinés dans l'aéronautique civile à des pièces de structure secondaire (habillage intérieur, volets), plus rarement primaire et jamais à la voilure, car il se posait deux difficultés :

- des coûts élevés par rapport à l'aluminium,
- des risques de délaminage les interdisant de vol sur les structures aérodynamiques chargées.

Construction automobile : l'utilisation des composites dans le secteur automobile remonte à des origines relativement anciennes (fin des années 1980), mais ne s'est généralisé que très récemment, comme le montrent les décisions récentes de grands

constructeurs étrangers (Volvo, Mercedes) de développer des coffres et hayons. Les composites à matrice thermoplastique sont, par contre, de plus en plus fréquents.

Secteur du bâtiment : mis à part la fourniture de renforcement des structures en béton, les composites ont relativement peu pénétré le secteur du BTP, notamment du fait :

- d'un prix élevé comparé aux matériaux traditionnels
- d'une relative méconnaissance des architectes et bureaux d'études vis-à-vis des composites,
- d'un manque d'information sur le cycle de vie (recyclabilité, durabilité).

Loisirs et sport : les constructeurs de matériels de sport et loisirs ont depuis longtemps adopté les composites, développés notamment par Shappe Technique et Ems Chimie (Suisse) ; ces nouveaux matériaux leur ont permis de faire preuve d'une grande créativité, tout en présentant des propriétés mécaniques intéressantes qui ont, dans une large mesure, été à l'origine du développement récent des sports de glisse modernes.

D'autres domaines d'utilisation des composites tel que :

Les matériels ferroviaires : présentent de nombreuses possibilités d'utilisation pour les matériaux composites, comme le montrent :

- les développements récents de l'entreprise allemande d'équipements de trains pendulaires, Comtas (Allemagne), secteur d'excellence où les acteurs européens font maintenant front commun,
- le projet de Bombardier-ANF de réaliser des wagons en structure composite.

L'équipement industriel (boîtes de stockage, isolation) et **l'équipement électronique**, représentent déjà 26% du marché des composites à matrice organique. Le potentiel plurifonctionnel des composites (alliant par exemple étanchéité et propriétés électriques) y est important. En électronique, les boîtiers céramiques pour microprocesseurs d'Agide, récemment introduite au Nouveau Marché, sont utilisées dans le monde entier.

Les composites jouent un rôle croissant dans le *secteur dentaire* (implants) et *biomédical* (matériaux prothétiques), en dépit de fortes contraintes de bio compatibilité.

II.7. Architecture des matériaux composites

II.7.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes (figure II.9).

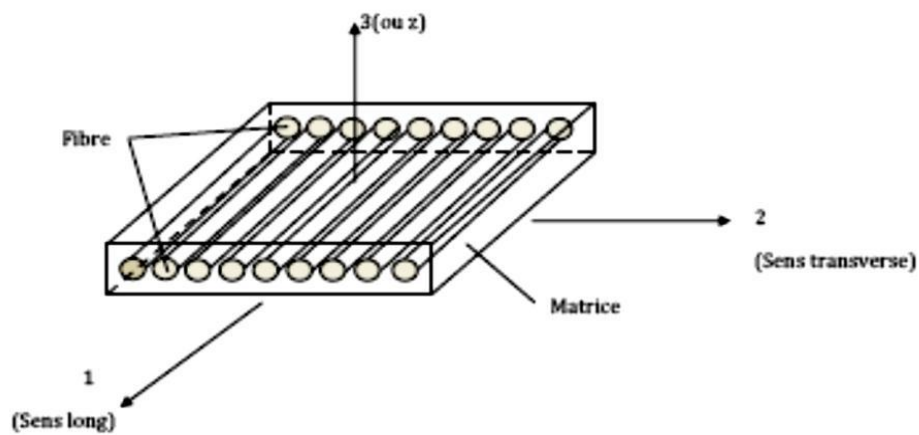


Figure II.9 : Structure d'un matériau monocouche

II.7.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure II.10).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+0^\circ$ que de couches orientées suivant la direction -0° .

2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

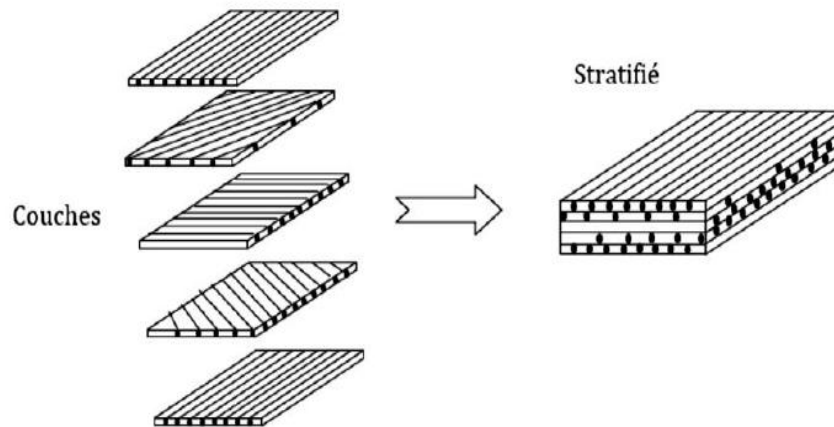


Figure II.10 : Constitution d'un stratifié

II.7.3. Sandwich

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppent une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance (Figure II.11). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion c'est un excellent isolant thermique.

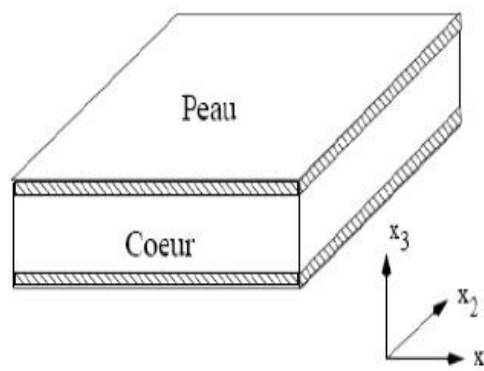
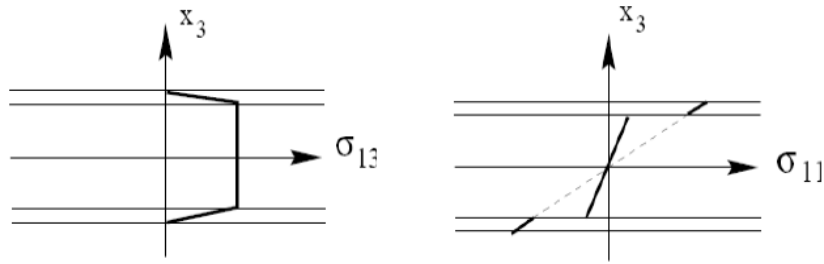


Figure II.11.a: Structure d'un matériau sandwich.

Figure II.11.b: Profil σ_{11} , σ_{13} pour une poutre sandwich.**Figure II.11:** Matériau composite sandwich.

II.8. Avantages et inconvénients des matériaux composites

II.8.1. Au titre des avantages

- Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids (gain de masse), donc une faible consommation d'énergie.
- Ils sont bien sûr insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques...
- Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.
- On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande. Ils offrent de grandes possibilités de maniement.
- Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale. Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion...

II.8.2. Au titre des inconvénients

- Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts. Une petite faille peut engendrer de grosses déformations. .
- La détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.

- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe
- Une Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches.

II.9. Matériaux composites intelligents (FGMs)

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

II.9.1. Définition du concept des matériaux fonctionnellement gradué (FGM)

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux dans un profil prédéterminé. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non – uniformes avec des macros propriétés graduées dans l'espace (Figure II.12).

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. Il est conçu pour améliorer et optimiser les caractéristiques thermo-électro-mécaniques des structures à l'échelle micro et nano [Nguyen, 2004].

Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Nguyen, 2004]. Dans certains cas, on peut voir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

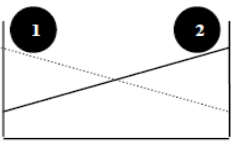
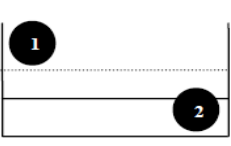
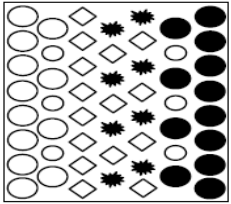
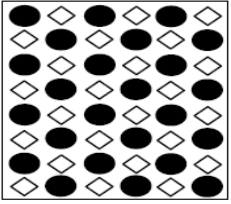
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure II.12 : Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites

II.9.2. Modélisation de la couche FGM

Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des couches FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, Nous avons deux approches possibles pour modéliser une couche FGM.

- Pour la première approche, une variation par tranche de la fraction volumique des deux matériaux extrêmes est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes (figure II.13.a).
- Pour la deuxième approche, une variation continue de la fraction volumique des deux matériaux extrêmes est assumée, et la fraction de volume peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) (figure II.13.b):

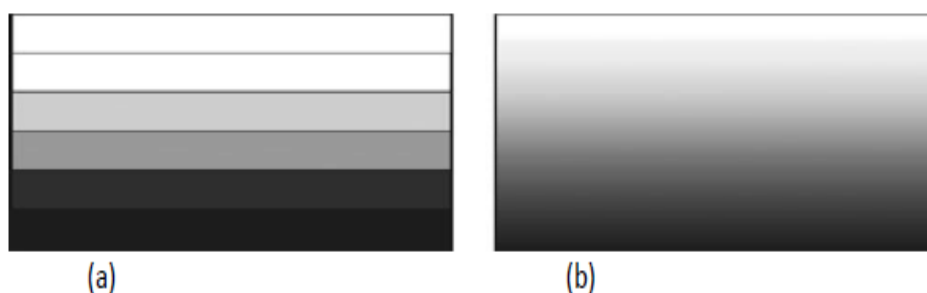


Figure II.13 : Modèles analytiques d'une couche en FGM.

II.9.3. Historique des matériaux à gradient de propriétés (FGM)

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
2. Ténacité du matériau côté basse température;
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Abdizadeh, 1997].

En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surface maximales de 2000 K (1727 °C) et à un gradient de températures de 1000 K (727 °C). Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure II.14 [Yin et al. 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

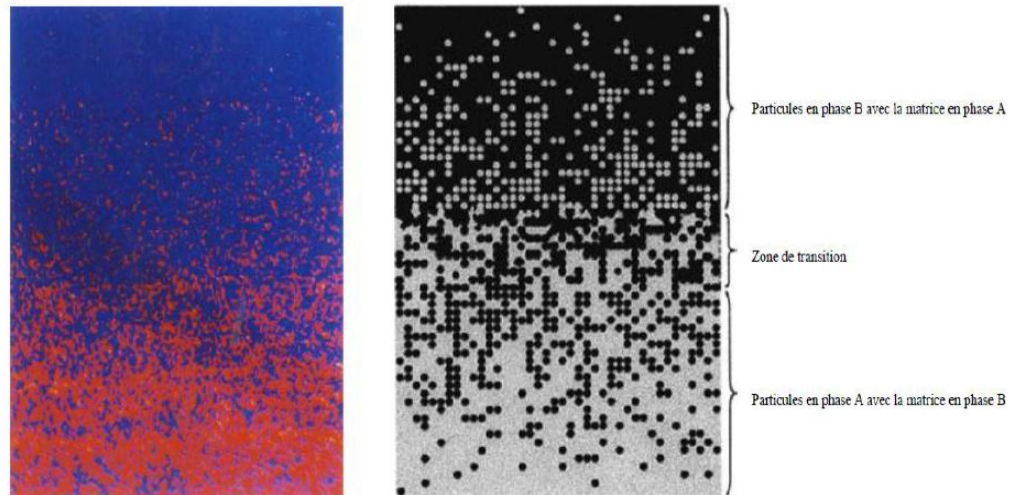


Figure II.14 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [Yin et al. 2004].

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de taille plus grandes et des formes plus complexe. A partir de 1990 les FGM ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédical, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

II.9.4. Secteurs d'application des FGM

Aéronautique : le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Possédant deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau, il permet de produire le poids-léger et des matériaux solides. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGM sont également applicables à un mur externe de l'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

Matières industrielles : de nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité ; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de

haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

Dans la médecine : parmi les applications pour les FGM, les implants médicaux semblent un fort champ de la recherche. Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradués avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations.

Dans la défense : l'une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient de propriétés est la capacité à empêcher la propagation de fissure. Un FGM en métal et céramique est utilisé dans les structures comme les portes incombustibles et matériaux résistants à la pénétration pour les plaques de blindage et les gilets pare-balles. Une des compositions disponibles de matériaux à gradient de propriétés est la combinaison entre le titane et le titane diborure, combinant la céramique capable d'absorber l'énergie avec la ténacité du métal- idéal pour les solutions de blindage du véhicule [Hopkinson.2006 ; Saiyathibrahim.2015].

Optoélectronique : Les outils de communication utilisant les fibres optiques ont besoin de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction pour le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence. Avec le filtre, la réflexion inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application des FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

Autres : divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriquées pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités.

Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces de came [Hopkinson. 2006 ; Saiyathibrahim. 2015].

II.10. Conclusion

L'arrivée des matériaux composites a ouvert de nouvelles voies en augmentant la performance des pièces industrielles grâce à leurs qualités intrinsèques telles que la légèreté (associée à des caractéristiques de résistance élevée) et la bonne tenue à la corrosion. Le spectre d'utilisation de ces structures s'est élargi grâce au développement de matériaux intelligents (FGMs), élaborés à partir de nouvelles philosophies de conception et de fabrication. Le chapitre suivant va porter sur la modélisation des poutres en FGM tous en définissant les différentes théories des poutres.

CHAPITRE III

Cinématique Des Poutres

III.1. Introduction

La cinématique des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité des corps solides. Elle peut être envisagée lorsque la structure déformable possède une dimension bien plus grande que les deux autres. La théorie des poutres fournit des solutions en déplacements et en contraintes qui ne sont pas nécessairement valables en tout point. Mais loin des points d'application de chargements, des liaisons (blocage cinématique) et des variations brusques de section, elle est tout à fait suffisante [Génevaux et al, 2011].

L'analyse d'une poutre en matériaux hétérogènes est plus complexe que celle d'une poutre en matériaux conventionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres [Kessas, 2009].

III.2. Historique de la théorie des poutres

Le terme de < poutre > désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de la théorie des poutres est attribuée à « Galilée », mais des études récentes indiquent que « Léonard de Vinci » l'aurait précédé. « De Vinci » avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne put pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de « Hooke ». De son côté, « Galilée » était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est « Antoine Parent » qui obtint la distribution correcte.

Ce sont « Leonhard Euler » et « Jacques Bernoulli » qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que « Daniel Bernoulli », le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas

reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques pussent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle. [Jean-Louis Fanchon, 2001].

III.3. Les différents modèles des poutres

Résoudre un problème d'élasticité revient à trouver une fonction qui satisfait aux différentes équations de mécanique et d'équilibre. Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [Sallai, 2011].

L'obtention d'une théorie de poutre nécessite l'introduction de certaines hypothèses, qui représentent des simplifications acceptables de la réalité. Plusieurs théories jouent sur la prise en compte ou non de l'effet du cisaillement. Dans ce qui suit, on abordera les différents modèles les plus célèbres dans la littérature.

III.3.1. Modèle d'Euler Bernoulli - Classical Beam Theory (CBT) -

Il est bien connu aussi au nom de la théorie classique des poutres, il est basé sur la théorie élémentaire de la flexion des poutres qui ne tient pas compte de l'effet de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle est applicable qu'aux poutres minces (Figure III.1).

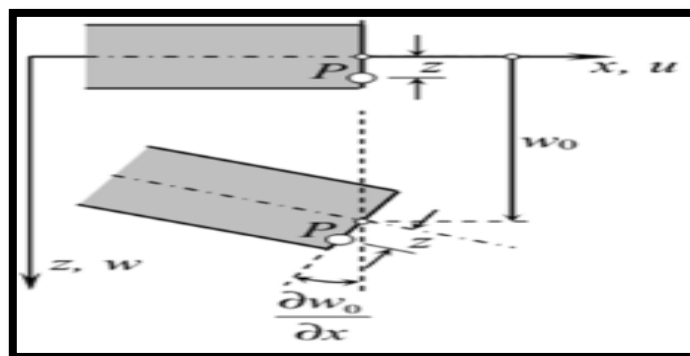


Figure III.1 : Cinématique d'Euler Bernoulli

Dans cette théorie, le modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur de la poutre. L'hypothèse dans cette théorie:

- Après déformation, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre).
- La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot w_{0,x}(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (III-1)$$

$u(x, z, t)$: C'est le déplacement suivant « X »

$w(x, z, t)$: C'est le déplacement dans la direction de « Z » ou bien la flèche.

$u_0(x, t)$ et $w_0(x, t)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes « X » et « Z ».

La rotation autour de l'axe « Y », provoquée par la flexion est:

$$w_{0,x}(x, t) = \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \quad (III - 2)$$

Par définition, la distorsion est définie par la relation suivante:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (III - 3)$$

Cela veut dire que la distorsion est nulle et par conséquent la contrainte de cisaillement est nulle puisque,

$$\sigma_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} \quad (III - 4)$$

Lorsque cette théorie est utilisée pour résoudre numériquement le problème des poutres, les solutions sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de cisaillement transversal.

III.3.2. Modèle de Timoshenko ou bien la Théorie de premier ordre (FSDBT)

Le modèle de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure III.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko en 1921, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses [Timoshenko.et al, 1972].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

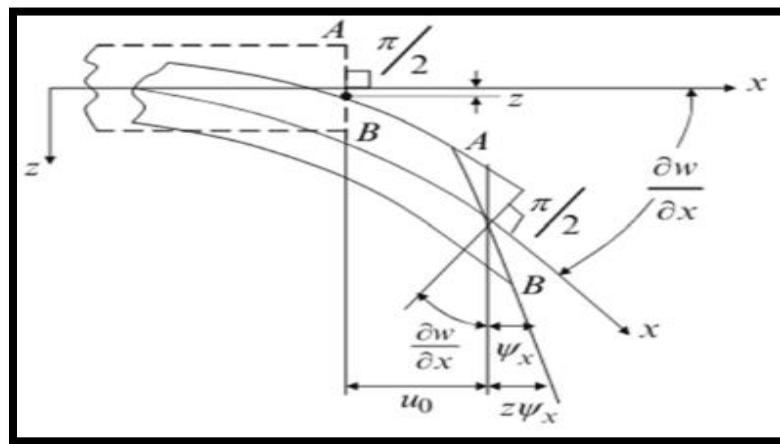


Figure III.2 : Cinématique de Timoshenko

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot w_{0,x}(x, t) + z \cdot \varphi_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{III-5a})$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) + z \cdot \Psi_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{III-5b})$$

$\varphi_0(x, t)$: C'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\Psi_0(x, t) = \varphi_0(x, t) - w_{0,x}(x, t) \quad (\text{III-6})$$

$\Psi_0(x, t)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = \varphi_0(x, t) \quad (\text{III} - 7)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \varphi_0(x, t) \quad (\text{III-8})$$

G_{xz} ; est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction (ks) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mindlin et Deresiewicz]. « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « ks » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

III.3.3. Modèle d'Ordre Supérieur-HSDBT-

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure III.3). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

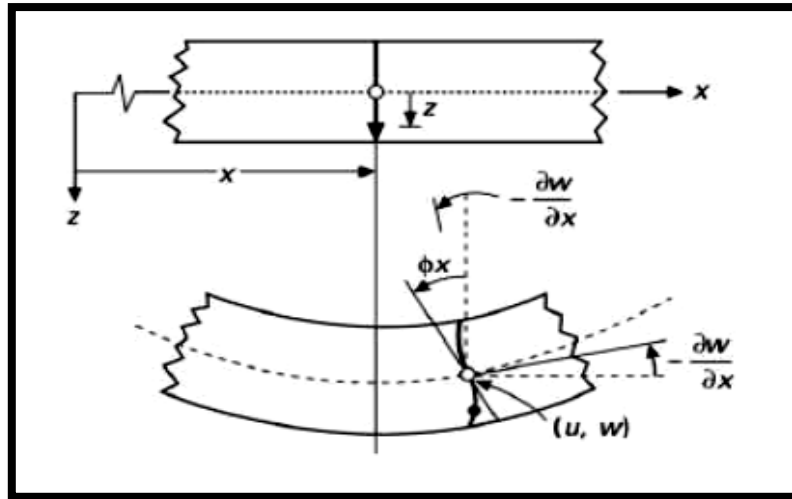


Figure III.3 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen, 2004], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [Lo & Christensen, 1977]:

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z \psi(x) + z^2 \zeta(x) + z^3 \phi(x) \quad (\text{III-9})$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement" il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction $f(z)$.

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot w_{0,x}(x, t) + f(z) \cdot \varphi_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = f'(z) \varphi_0(x, t) \quad (\text{III} - 11)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z) \Big|_z = f' \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (\text{III-12})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (III.12).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons par ordre chronologique :

L'approche de [Reissner, 1945] :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$$

L'approche d' [Ambartsumyan, 1969] :

$$f(z) = \frac{1}{2} z \left(\frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} z^2 \right)$$

L'approche de [Levinson, 1980] & [Reddy, 1984] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$$

Dans ce modèle polynomiale, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de [Touratier, 1991] avec :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1}$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

L'approche de [Soldatos, 1993] :

$$f(z) = -h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

L'approche de [Karama, 2003]:

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$$

[Aydogdu, 2009] propose un nouveau modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \cdot \alpha^{-2(z/h)^2 / \ln \alpha} ; \alpha = 3$$

L'approche de [Mantari, 2012] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} z \right]$$

L'approche de [T-Kien Nguyen et al, 2015] :

$$f(z) = \cot^{-1} \left(\frac{h}{z} \right) - \frac{16z^3}{15h^3}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable "z" alors que la fonction "sinus" ne permet qu'un développement en puissances impaires.

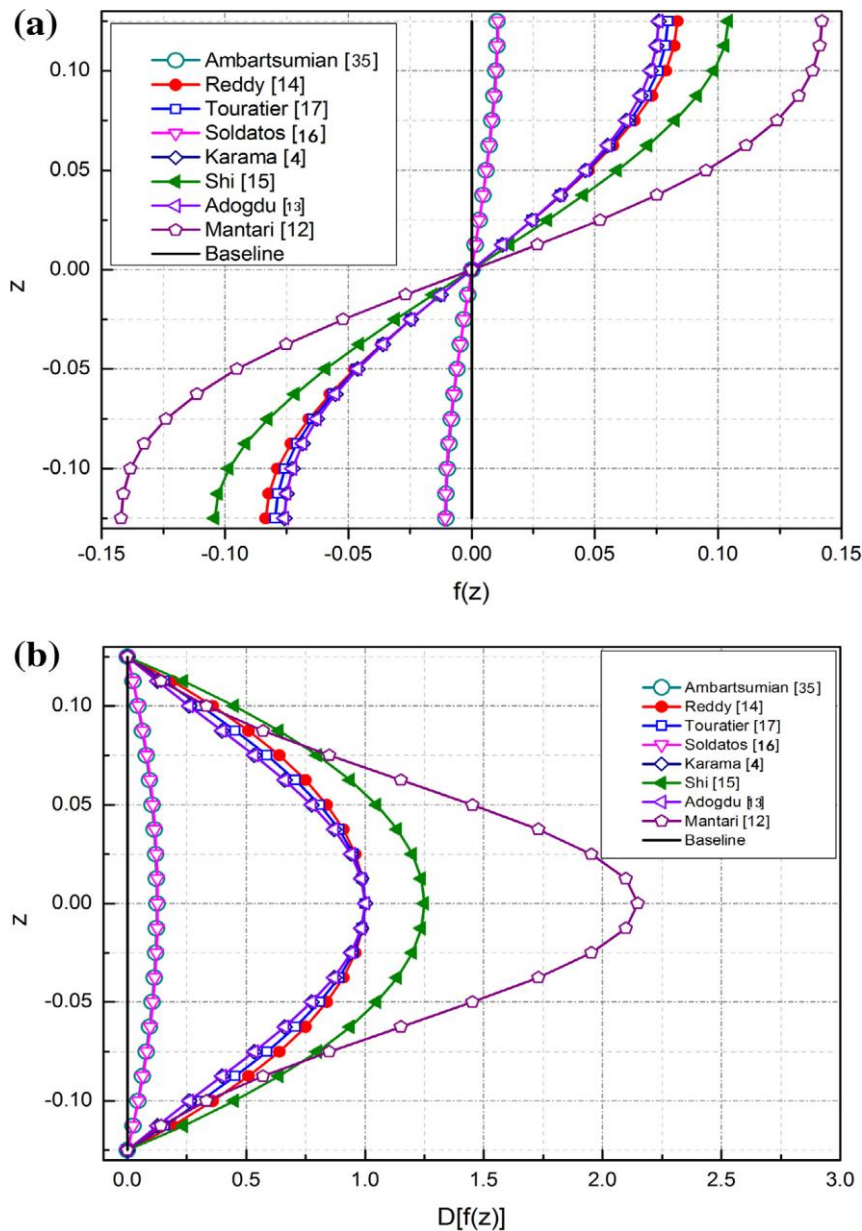


Figure III.4 : (a) Distribution des différentes fonctions de cisaillement transversal le long de l'épaisseur de la poutre. (b) La dérivée de diverses fonctions de cisaillement transversal dans le sens de l'épaisseur.

III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la cinématique des poutres en commençant par l'historique de la théorie des poutres puis nous avons défini les différents modèles proposés dans la littérature, à savoir la théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (Timoshenko) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé, avec une approche monocouche équivalente qui est mieux adaptée pour notre matériau d'étude (FGM) car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

CHAPITRE IV

Modélisation Mathématique Du Problème

Dynamique

IV.1. Introduction

L'analyse vibratoire libre des éléments structuraux est une étude commune aussi importante que parmi tous les problèmes d'ingénierie et la connaissance des fréquences naturelles suggèrent que le concepteur évite les résonances maximales qui se produisent à proximité des fréquences naturelles [Leissa, 1978]. De plus, les systèmes dynamiques sont souvent soumis à des forces externes dépendant du temps conduisant à la vibration forcée dont l'amplitude dépend du rapport de fréquence. Si la fréquence de la force externe coïncide avec l'une des fréquences naturelles de l'élément considéré, comme les cordes, les baguettes, les membranes, les poutres, les plaques et les coques, il se produit une résonance qui entraîne des oscillations dangereusement grandes. Par conséquent, dans le cas d'une vibration forcée, il est important de connaître le comportement de l'élément considéré à proximité de la condition de résonance. Cette vue constitue l'objet principal de cette étude.

L'étude dynamique des structures à l'échelle nanométrique (nano) sont plus complexe que celle des structures a grand échelle (macro). Depuis la découverte des nanotubes de carbone par Iijima, [Iijima, 1991], les nanostructures sont de plus en plus utilisées en raison de leurs bonnes propriétés mécaniques (grand module de Young, de leur limite élastique, de leur flexibilité et de leur conductivité) [Zhang et al. 2009], ils sont très appropriés pour la conception de petits instruments comme les capteurs et les actionneurs. Les nanostructures peuvent être modélisées en utilisant la dynamique moléculaire ou continue. Comparée à l'approche atomistique, la théorie non locale d'Eringen [Eringen, 1972 ; Eringen, 1977, Eringen, 1992 ; Eringen, 2002], qui est l'un des modèles de la mécanique continue dépendant de la taille, est largement utilisée en raison de son efficacité et de sa simplicité de calcul. En outre, cette théorie fournit à la solution de problèmes qui comprennent les grandes structures à l'échelle nanométrique.

L'objectif visé dans ce chapitre est de transformer le concept physique d'une FGM nanopoutre soumis à un chargement mobile en un modèle mathématique qui varie selon les critères d'analyse. Pour ce faire, dans un premier temps on détermine le champ de déplacement d'après les expressions de la théorie générale des poutres. Dans un deuxième temps les équations d'équilibre seront obtenues en appliquant le principe du Hamilton basé sur la théorie de l'élasticité nonlocal. Dans un troisième temps on arrive à

la forme finale d'équations gouvernementales de mouvement après l'introduction des formes faibles dans le modèle proposé. Finalement on trouve les solutions mathématiques de système vibratoire libre et forcée.

IV.2. Modélisation du système dynamique

Considérons une nano-poutre en FGM de longueur « L », largeur « b » et d'épaisseur « h », soumise à une force concentré et transversale « P » qui se déplace dans un mouvement transitoire défini par une vitesse « v_p ». On suppose que la nano-poutre a un comportement élastique linéaire avec système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) comme indique la Figure IV.1 et les effets inertiels de la nanoparticule sont négligeables.

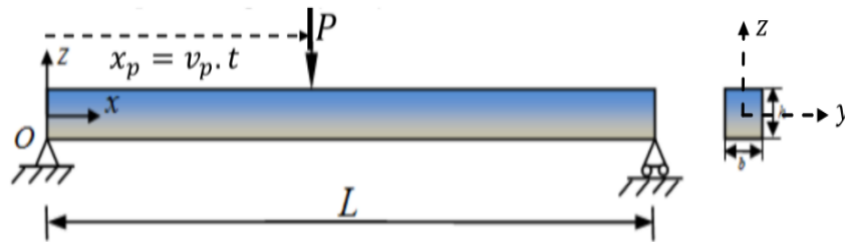


Figure IV.1: Schéma d'une FGM nano-poutre bi-articulée sous une charge mobile dynamique

L'étude sera menée dans l'hypothèse des petites perturbations, les déplacements suivant les axes « x », « y » et « z » d'un point arbitraire dans la poutre et noté respectivement par $u(x, z, t)$, $v(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$.

IV.2.1. Propriétés matérielles des FGM nano-poutres

Le FGM est composé de deux matériaux extrême différents. Les propriétés matérielles: le module de Young (E), le coefficient de Poisson (ν) et la densité (ρ) varient de façon continue dans le sens de l'épaisseur « h », selon une fonction des fractions volumiques. Sur la base de la règle du mélange, les propriétés matérielles effectives (P) peuvent être écrites comme :

$$P = P_U V_U + P_L V_L \quad (IV. 1)$$

P_U, P_L, V_U et V_L sont les propriétés du matériau et les fractions volumique correspondantes de la surface supérieure et inférieure du nano-poutre liées par:

$$V_U + V_L = 1 \quad (IV. 2)$$

Dans notre étude, le profil FGM de la fraction volumique supérieur est supposé suivre la forme de loi de puissance qui est écrit par [Wakashima et al. 1990]:

$$V_U = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \quad (IV.3)$$

k : Indice de la fonction de puissance, c'est une constante non négative ($0 \leq k \leq \infty$), qui détermine la variation de la loi de mélange le long de l'épaisseur du nano-poutre, comme indiqué dans la Figure IV.2.

Utilisant l'équation (IV.1), (IV.2) et (IV.3), les propriétés matérielles effectives (P) du FGM nano-poutre sont exprimées comme suit:

$$P(z) = (P_U - P_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + P_L \quad (IV.4)$$

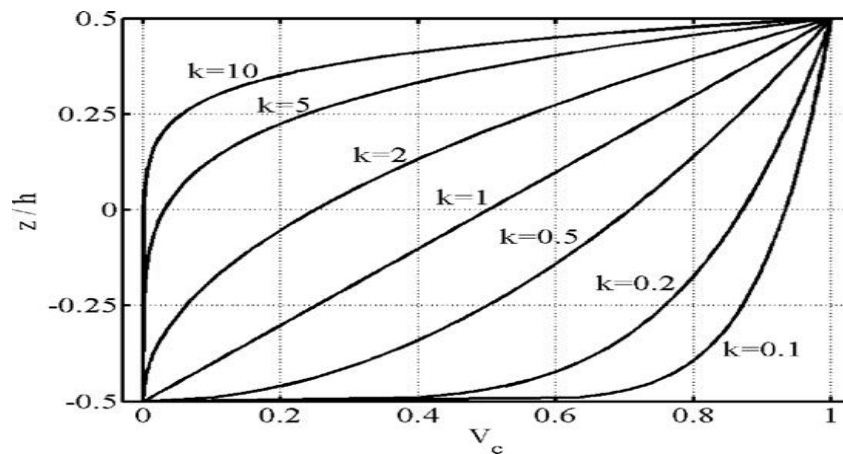


Figure IV.2: Variation de la loi de mélange (V_u) à travers l'épaisseur de FGM nano-poutre

IV.2.2. Théorie Non local des FGM nano-poutres

La réponse des structures à l'échelle nanométrique est différente de la théorie classique. Selon la théorie de l'élasticité non locale, le champ de contrainte à un point arbitraire « x » dans un continuum élastique dépend non seulement du champ de contrainte au même point, mais aussi des contraintes à tous les autres points du corps [Eringen and Edelen, 1972]. Cette hypothèse peut être exprimée comme suit:

$$[1 - \mu \nabla^2] \bar{\sigma} = \bar{C} : \bar{\varepsilon} \quad (IV.5)$$

Ou $\mu = (e_0 a)^2$ est le paramètre non local, ' e_0 ' est une constante appropriée à chaque matériau, ' a ' est la longueur caractéristique interne [Simsek and Reddy, 2013]. Lorsque ' a ' est nulle, on peut dériver la relation constitutive de la théorie classique. ∇^2 est l'opérateur de Laplace. $\bar{\sigma}$ est le tenseur de contrainte, ":" Indique le produit à double point. \bar{C} est le tenseur d'élasticité Hookean, $\bar{\varepsilon}$ est le tenseur de déformation. La relation constitutive non locale pour les FGM nano-poutres est rédigée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 6})$$

σ_{xx} , σ_{yy} , et σ_{zz} sont les contraintes normale axiale, σ_{xy} , σ_{yz} et σ_{xz} sont les contraintes de cisaillement. ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{zz} sont les déformations axiale, γ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz} sont les déformations de cisaillement. Dans notre étude on supposant que la déformation est négligeable dans le sens de l'épaisseur « h » de la poutre. Le coefficient d'échelle μ est proposé entre 0 et 4 [Aydogdu, 2009].

IV.2.3. Développement mathématique

Sur la base de la théorie générale de la déformation du cisaillement, le champ de déplacement de n'importe quel point du FGM nano-poutre est donné comme suit:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f(z) \cdot \varphi_0(x, t) \\ v(x, z, t) = 0 \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{IV. 8})$$

u_0 et w_0 sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne du nano-poutre, respectivement le long des axes « x » et « z ». φ_0 est la distorsion mesurée aussi sur la ligne moyenne du nano-poutre. (t) indice de temps. $f(z)$ est la fonction qui caractérise la répartition transversale du cisaillement le long de l'épaisseur du nano-poutre. Plusieurs ordres de la théorie des poutres sont utilisés dans la présente étude comme indiquant le tableau IV. 1.

Tableau IV. 1 : Divers fonction de gauchissement de la poutre

Theories des poutres	Abréviation	Fonction
Théorie classique	CBT	$f(z) = 0$
Théorie de premier ordre	FSDBT [Timoshenko, 1921]	$f(z) = z$
Théorie d'ordre supérieur	PSDBT [Reddy, 1984]	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
	TSDBT [Touratier, 1991]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
	HSDBT [Soldatos, 1993]	$f(z) = -h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
	ESDBT [Karama, 2003]	$f(z) = z e^{-2(z/h)^2}$
	ASDBT [Aydogdu, 2009]	$f(z) = z \alpha^{-2(z/h)^2 / \ln \alpha} ; \alpha = 3$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur de déformations s'écrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi_0(x, t)}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x, z, t)}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, z, t)}{\partial x} \\
 \gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = f'(z) \varphi_0(x, t) \\
 \gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial y}
 \end{array} \right. \quad (IV.9)$$

Les équations d'équilibre seront obtenues à partir du principe de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta S - \delta K + \delta V) dt = 0 \quad (IV.10)$$

t_1 et t_2 sont le temps initial et finale, respectivement ; δS est la variation virtuelle de l'énergie de déformation ; δK est la variation virtuelle de l'énergie cinétique; et δV est la variation virtuelle du travail effectué par des forces extérieures.

L'énergie de déformation virtuelle δS :

$$\delta S = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{IV. 11 - a})$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV + \int_V \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} dV + \int_V \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} dV + \int_V \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} dV + \int_V \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} dV \\ & + \int_V \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} dV \end{aligned} \quad (\text{IV. 11 - b})$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^L N^c \cdot \delta u_{0,x} \cdot dx - \int_0^L M^c \cdot \delta w_{0,xx} \cdot dx + \int_0^L M^{sd} \cdot \delta \varphi_{0,x} \cdot dx \\ & + \int_0^L Q \cdot \delta \varphi_0 \cdot dx \end{aligned} \quad (\text{IV. 12})$$

N^c, M^c, M^{sd} et Q sont les résultats des contraintes définis par:

$$(N^c, M^c, M^{sd}) = \int_A \sigma_{xx} (1, z, f(z)) dA \text{ et } Q = \int_A \sigma_{xx} f'(z) dA \quad (\text{IV. 13})$$

Les résultats indiqués avec un exposant 'c' sont les conventionnels de la théorie classique des poutres; tandis que les autres avec de l'exposant 'sd' sont des quantités supplémentaires incorporant les effets de déformation du cisaillement. En substituant les relations contraintes-déformations aux définitions de la force et au moment résultant de la théorie actuelle, on obtient les équations constitutives suivantes:

$$\begin{bmatrix} N^c \\ M^c \\ M^{sd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & E_{11} \\ B_{11} & D_{11} & F_{11} \\ E_{11} & F_{11} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ -w_{0,xx} \\ \varphi_{0,x} \end{bmatrix} \text{ et } Q = [A_{55}][\varphi_0] \quad (\text{IV. 14})$$

Les rigidités de cisaillement, de couplage, de flexion et de cisaillement transversal sont données comme suit:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2) dz \quad (\text{IV. 15})$$

$$(E_{11}, F_{11}, H_{11}) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11} f(z) (1, z, f(z)) dz \quad (\text{IV. 16})$$

$$A_{55} = k_s \cdot b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{55} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^2 dz \quad (k_s: \text{Facteur de correction de cisaillement}) \quad (\text{IV. 17})$$

Les constants élastiques réduits sont définies comme suit:

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{(1 - \nu(z)^2)}; \quad Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (\text{IV. 7})$$

Tel que $E(z)$ et $\nu(z)$ sont le module de Young et le coefficient de Poisson respectivement de nano-poutre, qui varie continuellement dans le sens de l'axe « z » conformément à la loi de puissance P-FGM.

Y compris l'effet de l'inertie rotative et l'inertie axiale, l'énergie cinétique virtuelle δK peut être exprimée comme:

$$\delta K = \int_V \rho(z) \cdot \dot{u} \cdot \delta \dot{u} \cdot dV + \int_V \rho(z) \cdot \dot{w} \cdot \delta \dot{w} \cdot dV \quad (\text{IV. 18})$$

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_0^L (I_1 \cdot \ddot{u}_0 - I_2 \cdot \ddot{w}_{0,x} + I_3 \cdot \ddot{\varphi}_0) \cdot \delta u_0 \cdot dx - \int_0^L (I_2 \cdot \ddot{u}_0 - I_4 \cdot \ddot{w}_{0,x} + I_5 \cdot \ddot{\varphi}_0) \cdot \delta w_{0,x} \cdot dx \\ & + \int_0^L (I_3 \cdot \ddot{u}_0 - I_5 \cdot \ddot{w}_{0,x} + I_6 \cdot \ddot{\varphi}_0) \cdot \delta \varphi_0 \cdot dx + \int_0^L I_1 \cdot \ddot{w}_0 \cdot \delta w_0 \cdot dx \end{aligned} \quad (\text{IV. 19})$$

Tel que :

$(I_{1..6})$ sont les coefficients d'inerties définies par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_A \rho(z) \cdot (1, z, f(z), z^2, zf(z), f(z)^2) \cdot dA \quad (\text{IV. 20})$$

L'énergie potentielle virtuelle δV de la force transversale en mouvement à tout instant 't' est donné ci-dessous :

$$\delta V = \int_0^L P(x, t) \cdot \delta w_0 \cdot dx \quad (\text{IV. 21})$$

Le chargement mobile $P(x, t)$ exprimé comme suit:

$$P(x, t) = -P \cdot \delta(x - v_p \cdot t) \quad (\text{IV. 22})$$

Où $\delta(\cdot)$ est la fonction Dirac-delta, P est l'amplitude de la charge ponctuelle, v_p est la vitesse de la charge mobile.

En remplaçant les équations. (IV.12), (IV.19) et (IV.21) dans l'équation (IV.10), en intégrant par parties et en obtient les équations d'équilibres suivantes:

$$\frac{\partial N^c}{\partial x} = I_1 \cdot \ddot{u}_0 - I_2 \cdot \ddot{w}_{0,x} + I_3 \cdot \ddot{\varphi}_0 \quad (IV.23)$$

$$\frac{\partial^2 M^c}{\partial x^2} = I_2 \cdot \ddot{u}_{0,x} - I_4 \cdot \ddot{w}_{0,xx} + I_5 \cdot \ddot{\varphi}_{0,x} + I_1 \cdot \ddot{w}_0 + P \cdot \delta(x - v_p \cdot t) \quad (IV.24)$$

$$\frac{\partial M^{sd}}{\partial x} - Q = I_3 \cdot \ddot{u}_0 - I_5 \cdot \ddot{w}_{0,x} + I_6 \cdot \ddot{\varphi}_0 \quad (IV.25)$$

La solution de Rayleigh-Ritz est adopté pour discrétiser les dérivées partielles des composantes de déplacement du système vibratoire forcé et les fonctions de forme sont développées en termes des séries polynomiales algébriques comme indiquent les formules suivants:

$$u_0(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \cdot u_j(t) \quad ; \quad w_0(x, t) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \cdot w_k(t) \quad ; \quad \varphi_0(x, t) = \sum_{p=1}^n \phi_p(x) \cdot \varphi_p(t)$$

$$\varphi_j(x) = (1 - x)^{q_0} \cdot x^{(j+p_0)-1}$$

$$\psi_k(x) = (1 - x)^{q_0} \cdot x^{(k+p_0)-1}$$

$$\phi_p(x) = (1 - x)^{q_0} \cdot x^{(p+p_0)-1}$$

Où $u_j(t)$, $w_k(t)$ et $\varphi_p(t)$ sont les coefficients temporelle de Ritz. $\varphi_j(x)$, $\psi_k(x)$ et $\phi_p(x)$ sont les approximations de Ritz, qui doivent satisfaire aux conditions aux limites. (n) est le nombre de polynômes impliqués dans les fonctions admissibles. (p_0, q_0) sont les indices de la fonction de test de Rayleigh–Ritz, ils dépend des conditions aux limites [Elmeiche et al. 2016].

Tableau IV. 2: Indice des fonctions admissibles pour différent condition aux limites

BCs	p_0	q_0
C–C	2	2
C–S	2	1
C–F	2	0
S–S	1	1
S–F	1	0
F–F	0	0

En introduire les équations d'équilibres (23, 24, 25) dans la relation constitutive non-locale d'Eringen (6), on obtient les équations différentielles suivante :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot \left(I_1 \cdot \ddot{u}_0 - I_2 \cdot \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_3 \cdot \ddot{\phi}_0\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{11} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + E_{11} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV. 26})$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot \left(I_1 \cdot \ddot{w}_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \cdot \ddot{u}_0 - I_4 \cdot \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_5 \cdot \ddot{\phi}_0\right)\right) \\ & \quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_{11} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + F_{11} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right) \\ & = - \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot (P \cdot \delta(x - v_p \cdot t)) \end{aligned} \quad (\text{IV. 27})$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot (I_3 \cdot \ddot{u}_0 - I_5 \cdot \ddot{w}_{0,x} + I_6 \cdot \ddot{\phi}_0) - \frac{\partial}{\partial x} \left(E_{11} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{11} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + H_{11} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right) + A_{55} \cdot \phi_0 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV. 28})$$

Après avoir effectué l'intégration par partie sur les équations (26), (27) et (28) avec les fonctions pondérée respectivement $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ et $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), qui doit satisfaire aux conditions aux limites, les formes faible des équations gouvernementales du mouvement, qui équivaut à la fois aux équations différentielle ordinaire, peuvent être écrite dans la forme finale suivante:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \varphi'_i(x) \cdot \left(A_{11} \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x) \cdot u_j(t) - B_{11} \sum_{k=1}^n \psi''_k(x) \cdot w_k(t) + E_{11} \sum_{p=1}^n \phi'_p(x) \cdot \phi_p(t) \right) \cdot dx \\ & \quad + \int_0^L \varphi_i(x) \cdot \left(I_1 \sum_{j=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi_j(x) \cdot \ddot{u}_j(t) \right. \\ & \quad \left. - I_2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi'_k(x) \cdot \ddot{w}_k(t) \right. \\ & \quad \left. + I_3 \sum_{p=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2}\right) \phi_p(x) \cdot \ddot{\phi}_p(t) \right) \cdot dx - [N^c \cdot \varphi_i(x)]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV. 29})$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \psi''_i(x) \cdot \left(-B_{11} \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x) \cdot u_j(t) + D_{11} \sum_{k=1}^n \psi''_k(x) \cdot w_k(t) - F_{11} \sum_{p=1}^n \varphi'_p(x) \cdot \varphi_p(t) \right) \cdot dx \\
 & + \int_0^L \psi'_i(x) \cdot \left(-I_2 \sum_{j=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi_j(x) \cdot \ddot{u}_j(t) \right. \\
 & + I_4 \sum_{k=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi'_k(x) \cdot \ddot{w}_k(t) - I_5 \sum_{p=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi_p(x) \cdot \ddot{\varphi}_p(t) \left. \right) \cdot dx \\
 & + \int_0^L \psi_i(x) \cdot \left(I_1 \sum_{j=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi_k(x) \cdot \ddot{w}_k(t) \right) \cdot dx + [M^c \cdot \psi'_i(x)]_0^L \\
 & - [V^c \cdot \psi_i(x)]_0^L = - \int_0^L \psi_i(x) \cdot \left(\left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot (P \cdot \delta(x - v_p \cdot t)) \right) \cdot dx \quad (\text{IV. 30})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \varphi'_i(x) \cdot \left(E_{11} \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x) \cdot u_j(t) - F_{11} \sum_{k=1}^n \psi''_k(x) \cdot w_k(t) + H_{11} \sum_{p=1}^n \varphi'_p(x) \cdot \varphi_p(t) \right) \cdot dx \\
 & + \int_0^L \varphi_i(x) \cdot \left(A_{55} \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \cdot \varphi_p(t) \right) \cdot dx \\
 & + \int_0^L \varphi_i(x) \cdot \left(I_3 \sum_{j=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \cdot \varphi_j(x) \cdot \ddot{u}_j(t) \right. \\
 & - I_5 \sum_{k=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi'_k(x) \cdot \ddot{w}_k(t) + I_6 \sum_{p=1}^n \left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi_p(x) \cdot \ddot{\varphi}_p(t) \left. \right) \cdot dx \\
 & + [M^{sd} \cdot \varphi_i(x)]_0^L = 0 \quad (\text{IV. 31})
 \end{aligned}$$

Les coefficients des fonctions de test dans les intégrales limitées sont appelés les variables secondaires, leurs spécifications constituent les conditions de frontières. La fonction Dirac-delta du chargement mobile dans l'équation (30) est définie par [Fryba, 1972]:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \delta^{(n)}(x - x_p) \cdot dx = \begin{cases} -(1)^n \cdot f^{(n)}(x_p) & \text{si } x_1 < x_p < x_2 \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases}$$

Où $\delta^{(n)}$ représente la nième dérivée de la fonction Dirac-delta. Les variables secondaires sont tournées vers zéro, le système d'équation différentielle gouvernementale du FGM nano-poutre s'écrit sous la forme générale suivante :

$$[K]\{q(t)\} + [M]\{\ddot{q}(t)\} = \{F(t)\} \quad (IV.32)$$

$[K]$ et $[M]$ sont les matrices rigidité et masse respectivement, leur ordre est $[3n \times 3n]$, $\{q(t)\}$ est le vecteur colonne des coefficients temporaire inconnus, de l'ordre $[3n \times 1]$. $\{F(t)\}$ est le vecteur généralisée produit par la charge transversale en mouvement de l'ordre $[3n \times 1]$. Les termes des matrices et vecteurs de l'équation (IV.32) sont données dans l'annexe à la fin de thèse.

IV.2.4. Résolution mathématique du problème dynamique

a) *Système dynamique libre :*

En l'absence de sollicitation dans le l'analyse vibratoire libre, l'équation (IV.32) du système dynamique devient :

$$[K]\{q(t)\} + [M]\{\ddot{q}(t)\} = \{0\}$$

Dont la solution générale est harmonique et s'écrit :

$$\{q(t)\} = \{\bar{q}\}. e^{i\omega t}$$

En injectant la forme de la solution générale dans l'équation de la dynamique, on voit que la pulsation ω est solution du problème de valeurs propres suivant :

$$[K]\{\bar{q}\} = \omega^2 [M]\{\bar{q}\}$$

Ce qui conduit à :

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (IV.33)$$

On obtient ainsi les ' n ' valeurs propres $\omega_1, \dots, \omega_n$, où ' n ' est la taille du système.

On trouve également les 'n' vecteurs $\{\bar{q}_i\}$ appelés modes propres du système et que l'on norme par rapport à la masse, i.e. tels que :

$$\{\bar{q}_i\}^T [M] \{\bar{q}_i\} = 1 \quad \forall i \in [1, n]$$

Pour déterminer les vecteurs propres on passe par les transformations suivantes :

$$[H]\{X\} = \lambda\{X\}$$

Où $[H]$ est une matrice définie positive. On se sert pour cela de la décomposition de Cholesky de $[K]$, i.e. en l'écrivant à partir d'une matrice triangulaire inférieure $[L]$ sous la forme $[K] = [L]^T [L]$. L'équation du déterminant conduit a une écriture équivalente du problème :

$$[L]^{-1} [M] [L]^{-T} [L]^T \{\bar{q}\} = \frac{1}{\omega^2} [L]^T \{\bar{q}\}$$

Et l'on obtient la forme cherchée en posant :

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

$[H] = [L]^{-1} [M] [L]^{-T}$; Où $[H]$ est bien symétrique définie positive.

$$\{X\} = [L]^T \{\bar{q}\}$$

b) Système dynamique forcé :

La méthode de Newmark (1959) permet de résoudre numériquement des équations différentielles du second ordre. Elle convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non-linéaires avec une matrice de masse et une force appliquée qui peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Dans ce second cas, le calcul nécessite à chaque pas une boucle d'itération. L'idée générale c'est de chercher à estimer les valeurs des dérivées (premières, secondes...) à l'instant ' $t + \Delta t$ ' à partir des informations disponible à l'instant précédent ' t ' (Δt représentant le pas de temps).

On fait un développement en série de Taylor du vecteur de déplacement $\{q(t)\}$, on trouve:

$$\{q(t + \Delta t)\} = \{q(t)\} + \Delta t\{\dot{q}(t)\} + \frac{\Delta t^2}{2}((1 - 2\beta)\{\ddot{q}(t)\} + 2\beta\{\ddot{q}(t + \Delta t)\})$$

$$\{\dot{q}(t + \Delta t)\} = \{\dot{q}(t)\} + \Delta t((1 - \gamma)\{\ddot{q}(t)\} + \gamma\{\ddot{q}(t + \Delta t)\})$$

En utilisant cette méthode, le système d'équation différentielle du mouvement (IV.32) peut être réduit à un ensemble d'équations algébriques linéaires, qui s'écrit encore sous la forme modifiée :

$$[\widehat{K}]\{q\}_{s+1} = \{\widehat{F}\}_{s,s+1} \quad (\text{IV.34})$$

Où les indices 's' et 's + 1' indiquent le temps effective à l'instant 't' et 't + Δt' respectivement. $[\widehat{K}]$ et $\{\widehat{F}\}_{s,s+1}$ sont appelé la matrice de rigidité effective et le vecteur de charge active, qui peut être exprimé comme :

$$[\widehat{K}] = [K] + a_0[M]$$

$$\{\widehat{F}\}_{s,s+1} = \{F\}_s + [M](a_0\{q\}_s + a_1\{\dot{q}\}_s + a_2\{\ddot{q}\}_s)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}; a_1 = \frac{1}{\beta\Delta t}; a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

Une fois le système d'équation (34) résolue pour le vecteur de déplacement $\{q\}_{s+1}$ à la station 's + 1', le nouveau vecteur d'accélération $\{\ddot{q}\}_{s+1}$ et le nouveau vecteur de vitesse $\{\dot{q}\}_{s+1}$ sont calculés par les relations suivantes:

$$\{\ddot{q}\}_{s+1} = a_0(\{q\}_{s+1} - \{q\}_s) - a_1\{\dot{q}\}_s - a_2\{\ddot{q}\}_s$$

$$\{\dot{q}\}_{s+1} = \{\dot{q}\}_s + a_3\{\ddot{q}\}_s + a_4\{\ddot{q}\}_{s+1}$$

Tell que :

$$a_3 = (1 - \gamma)\Delta t \text{ et } a_4 = \gamma\Delta t$$

Après le vecteur de déplacement $\{q\}_{s+1}$, le vecteur d'accélération $\{\ddot{q}\}_{s+1}$ et le vecteur de vitesse $\{\dot{q}\}_{s+1}$ sont calculés, qui correspondent à l'instant ' $t = t + \Delta t$ ', toutes ces étapes sont répétitives pour le pas de temps suivant. Le calcul de Newmark se déroule donc comme suit :

- 1) Définir les solutions initiale à $t = 0$, qui sont $\{q\}_0, \{\dot{q}\}_0$ et $\{\ddot{q}\}_0$;
- 2) construire la matrice de rigidité effective $[\widehat{K}]$ et la triangulariser ;
- 3) À chaque pas de temps ' $t = t + \Delta t$ ' :
 - ✓ calculer le résidu $\{\widehat{F}\}$;
 - ✓ résoudre l'équation de la dynamique discrétisée, qui nous fournit $\{q\}_{t+\Delta t}$;
 - ✓ puis obtenir $\{\dot{q}\}_{t+\Delta t}$ et $\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t}$ par le schéma de Newmark adopté qui correspondent à des valeurs particulières de β et γ ;

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle mathématique qui étudie le comportement dynamique libre et forcé des nano-poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), sous l'utilisation de plusieurs ordre de la théorie des poutres. En basant sur les relations constitutives d'Eringen, les équations gouvernementales de mouvement sont dérivées par le principe de Hamilton combiné avec l'introduction des formes faibles dans l'analyse vibratoire, tout en incluant l'inertie rotative. Les propriétés matérielles des nano-poutres varient continuellement dans la direction de l'épaisseur selon la forme de loi de puissance (P-FGM). Le chargement mobile est défini par la fonction Dirac-delta et les fonctions de Rayleigh-Ritz sont employées pour séparer les variables de système d'équations. Les solutions mathématiques de la vibration libre sont déterminées en résolvant le système d'équations gouvernant aux problèmes des valeurs propres et les réponses modales de comportement vibratoire forcé sont également résolues numériquement en utilisant la méthode d'intégration temporelle de Newmark.

Les résultats numérique présentés au chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de ces développements théoriques en examinent en détails plusieurs paramètres de modèle.

CHAPITRE V

Applications Numériques Et Interprétations

V.1. Introduction

Dans cette partie de la thèse, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution de programme de calcul Matlab, qui est basé sur le développement mathématique de modèle vibratoire, actionné par un chargement mobile des FGM nanopoutres sous différents paramètres physiques et géométriques. L'organigramme suivant montre les différentes étapes de programmation du problème dynamique:

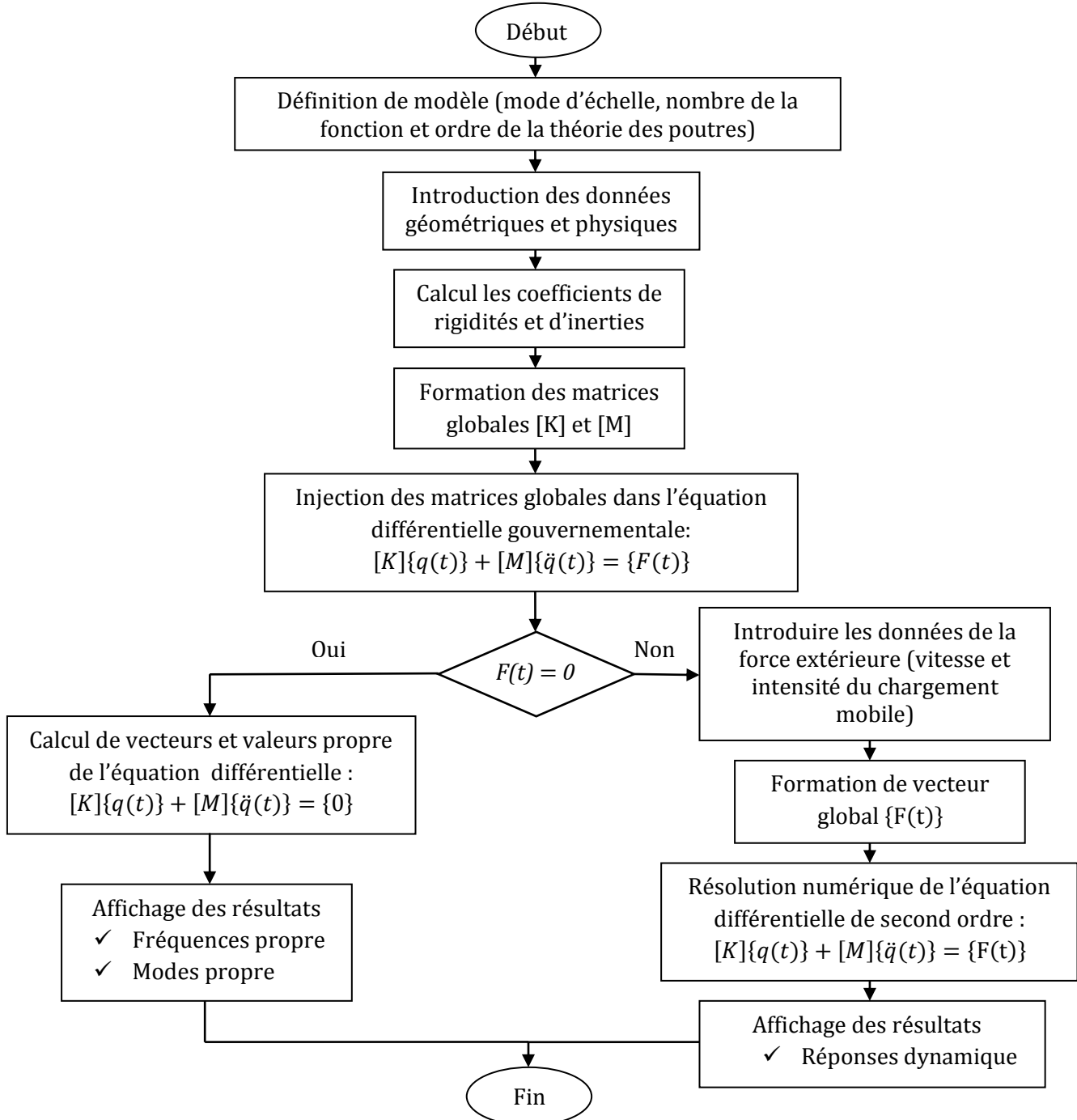


Figure V.1: Schéma de programmation

V.2. Applications numériques et interprétations

Dans cette étude, le matériau à gradient de propriété (FGM) est constitué d'un mélange de céramique et de métal dont les propriétés varient continuellement à travers l'épaisseur selon la loi de puissance. La partie supérieure du nano-poutre ($z = + h / 2$) est purement céramique ($P_U = 100\%$ Alumine), tandis que la partie inférieure du nano-poutre ($z = - h / 2$) est purement métal ($P_L = 100\%$ Aluminium). Les propriétés mécaniques de ces deux extrêmes matériaux sont données dans le tableau 2 où l'épaisseur (h) du FGM nano-poutre est de 1 nm. Le facteur de correction du cisaillement est considéré comme $k_s = 5/6$ pour FSDBT et $k_s = 1$ pour les théories d'ordre élevé.

Tableau V.1: Propriétés mécaniques du FGM nano-poutre.

Propriétés	Unité	Aluminium (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)
E	GPa	70	380
ρ	kg/m ³	2700	3800
ν	-	0.23	0.23

Pour des raisons pratiques, les résultats numériques sont présentés en termes adimensionnelles. Les fréquences propres de l'analyse vibratoire libre sont défini par :

$$\varpi = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_U A}{E_U I}} \quad (V.1)$$

$I = \frac{bh^3}{12}$ est le moment d'inertie de la section transversale d'une nanopoutre.

La déflexion dynamique transversale non-dimensionnel $D(t)$ de l'analyse vibratoire forcé est indépendant du matériau, grandeur de la charge mobile (P) ainsi les propriétés géométriques des FGM nano-poutres, elle est exprimées par la relation suivante:

$$D(t) = \frac{w_d(L/2,t)}{w_s(L/2)} \quad (V.2)$$

La déflexion dynamique transversale maximale adimensionnelles (D_{max}) est défini selon par:

$$D_{max} = \max(D(t)) = \max\left(\frac{w_d(L/2,t)}{w_s(L/2)}\right) \quad (V.3)$$

$w_s(L/2)$ c'est la déflexion statique d'une FGM nano-poutre calculé avec la propriété matériel de la surface inferieur (E_L) et sollicité par la charge « P » agissant à mi-portée. Pour une FGM nano-poutre simplement articulée, $w_s(L/2)$ est décrire par :

$$w_s\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{P.L^3}{48.E_L.I} \quad (V.4)$$

L'effet de la vitesse et du temps de passage de la charge mobile sont tracées par les paramètres sans dimension (α) et (t^*) respectivement, comme suit :

$$\alpha = \frac{v_p}{v_{cr}} \quad (V.5)$$

$$t^* = \frac{v_p t}{L} \quad (V.6)$$

Où v_{cr} est la grandeur critique définie comme [Fryba, 1972] :

$$v_{cr} = \frac{\omega_1 L}{\pi} \quad (V.7)$$

ω_1 : C'est la première fréquence fondamentale du FGM nano-poutre.

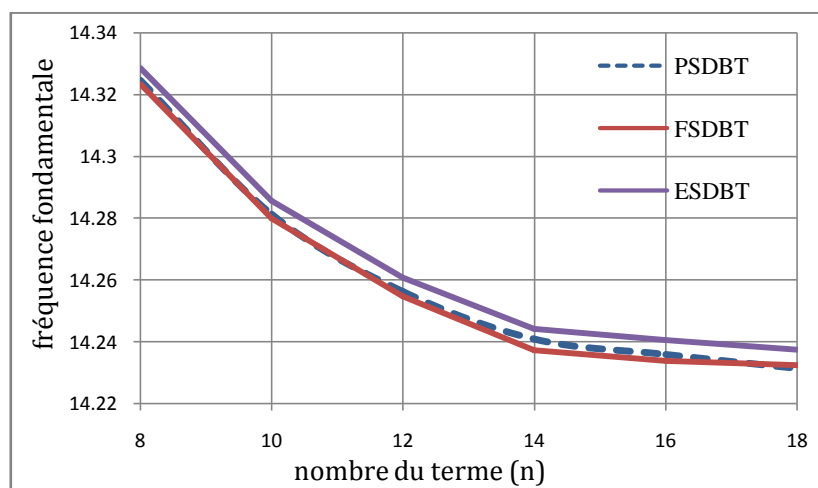
Par conséquent, quand $t^* = 0$, la charge ponctuel (P) est dans le support gauche du nano-poutre ($x_p = 0$) et quand $t^* = 1$, la charge ponctuel(P) est arrivée au support droit du nano-poutre ($x_p = L$).

V.2. 1. Résultats numériques du problème dynamique libre

Dans le comportement vibratoire libre, la poutre est soumis aux différents ensembles de modes d'appuis, c.-à-d., une nanopoutre encastree aux deux extrémités (C-C), une deuxième nanopoutre encastree en extrémité et articulée en autre (C-S), une troisième nanopoutre articulée aux deux extrémités (S-S), et une quatrième nanopoutre encastree en extrémité et libre en autre (C-F). Les fréquences fondamentales du FGM nano-poutre sont présentés en faisant varier le paramètre non local (μ), la distribution du matériau (k), l'hypothèse de la théorie des poutres, le rapport d'élancement (L / h) et les conditions aux limites.

Tableau V.2: Etude de convergence pour une FGM nano-poutre

<i>n</i>	<i>CBT</i>	<i>FSDBT</i>	<i>PSDBT</i>	<i>ESDBT</i>
2	16.3237	16.3237	16.3237	16.3237
4	15.1393	14.6080	14.6087	14.6120
6	15.0045	14.4087	14.4096	14.4134
8	14.9450	14.3235	14.3246	14.3286
10	14.9147	14.2800	14.2814	14.2856
12	14.8971	14.2548	14.2564	14.2608
14	14.8860	14.2374	14.2410	14.2443
16	14.8785	14.2338	14.2360	14.2406
18	14.8732	14.2325	14.2315	14.2375

**Figure V.2 :** Courbe de convergence pour une FGM nano-poutre

Dans le tableau V.2 et la figure V.2, les études de convergence de la première fréquence fondamentale de la nano-poutre en FGM en C-C sont effectuées avec un certain nombre de polynômes (n) utilisant différentes théories de poutres avec $k = 1$ et $\mu = 3$ pour $L/h = 10$.

On voit que dans la méthode de Rayleigh-Ritz, l'augmentation du nombre (n) dans les fonctions de déplacement joue un rôle majeur dans la convergence des fréquences. La précision numérique de la fréquence fondamentale est satisfaisante lorsque le nombre de termes dans les fonctions de déplacement est fixé à 16.

Tableau V.3: Comparaison de la première fréquence propre (ω_1)

μ (nm ²)	Source	CBT	FSDBT	PSDBT	ASDBT
0	[Uymaz, 2013]	9.8290	9.7159	9.6938	9.6948
	[Thai, 2012]	9.8293	9.7075	9.7075	-
	Présent	9.8293	9.7134	9.7138	9.7147
2	[Uymaz, 2013]	8.9822	8.8791	8.8588	8.8594
	[Thai, 2012]	8.9826	8.8713	8.8714	-
	Present	8.9826	8.8769	8.8773	8.8781
4	[Uymaz, 2013]	8.3222	8.2267	8.2079	8.2085
	[Thai, 2012]	8.3228	8.2196	8.2197	-
	Présent	8.3228	8.2250	8.2253	8.2261

La fréquence fondamentale non-dimensionnelle des nano-poutres en FGM simplement appuyée (S-S) est calculée et comparée à celles d'Uymaz [Uymaz, 2013] et de Thai [Thai, 2012], basé sur différent ordre de la théorie des poutres (CBT, FSDBT, PSDBT et ASDBT) pour les paramètres non locaux ($\mu = 0, 2, 4$) avec $L/h = 10$, $k = 0$ et $\nu=0.3$. Les comparaisons sont présentées dans le tableau 4 sans tenir compte le rôle du coefficient de Poisson dans l'expression du coefficient de rigidité réduit (Q11). Un bon accord a été observé pour toutes les valeurs de comparaisons.

Tableau V.4: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis C-C

Théorie	μ	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$	$k = \infty$
CBT	0	22.8726	19.3912	17.4932	15.0858	14.5083	11.6462
	1	21.5521	18.2703	16.4795	14.2079	13.7359	10.9738
	2	20.4321	17.3198	15.6203	13.4647	13.1627	10.4035
	3	19.4674	16.5012	14.8805	12.8249	12.4184	9.9123
	4	18.6254	15.7868	14.2351	12.2668	11.8789	9.4836
	5	17.8825	15.1566	13.6659	11.7751	11.3984	9.1053
FSDBT	0	21.6181	18.4319	16.6708	14.2348	13.6883	11.0065
	1	20.4058	17.3948	15.7297	13.4322	12.9200	10.3894
	2	19.3714	16.5103	14.9275	12.7482	12.2633	9.8629
	3	18.4760	15.7451	14.2338	12.1562	11.6944	9.4070
	4	17.6916	15.0750	13.6266	11.6377	11.1973	9.0077
	5	16.9973	14.4822	13.0895	11.1793	10.7582	8.6543
PSDBT	0	21.6217	18.4507	16.6753	14.0866	13.5237	11.0056
	1	20.4088	17.4113	15.7331	13.2957	12.7691	10.3888
	2	19.3740	16.5252	14.9302	12.6210	12.1243	9.8625
	3	18.4782	15.7587	14.2360	12.0368	11.5657	9.4068
	4	17.6934	15.0876	13.6285	11.5250	11.0760	9.0076
	5	16.9990	14.4939	13.0911	11.0722	10.6425	8.6542

Tableau V.5: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis C-S

Theorie	μ	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$	$k = \infty$
CBT	0	15.7675	13.4245	12.2069	10.5824	10.1607	8.0284
	1	14.9239	12.7068	11.5540	10.0161	9.6169	7.5989
	2	14.2006	12.0911	10.9943	9.5305	9.1506	7.2306
	3	13.5718	11.5559	10.5076	9.1084	8.7453	6.9104
	4	13.0188	11.0852	10.0796	8.7372	8.3889	6.6288
	5	12.5275	10.6673	9.6994	8.4075	8.0723	6.3787
FSDBT	0	15.2720	13.0400	11.8779	10.2352	9.7782	7.7611
	1	14.4657	12.3513	11.2497	9.6947	9.2637	7.3515
	2	13.7726	11.7592	10.7099	9.2301	8.8212	7.0006
	3	13.1689	11.2436	10.2398	8.8255	8.4354	6.6939
	4	12.6370	10.7893	9.8258	8.4691	8.0947	6.4241
	5	12.1639	10.3856	9.4577	8.1521	7.7929	6.1838
PSDBT	0	15.2688	13.0466	11.8776	10.1750	9.7192	7.7811
	1	14.4626	12.3574	11.2493	9.6390	9.2086	7.3697
	2	13.7697	11.7647	10.7096	9.1781	8.7694	7.0163
	3	13.1661	11.2487	10.2396	8.7764	8.3865	6.7084
	4	12.6345	10.7942	9.8256	8.4224	8.0488	6.4372
	5	12.1614	10.3902	9.4575	8.1075	7.7486	6.1961

Tableau V.6: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis S-S

Théorie	η	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$	$k = \infty$
CBT	0	10.1000	8.8090	8.2582	7.3049	6.8045	5.1427
	1	9.6357	8.4039	7.8780	6.9683	6.4913	4.9063
	2	9.2301	8.0499	7.5459	6.6743	6.2177	4.6997
	3	8.8717	7.7372	7.2526	6.4147	5.9761	4.5172
	4	8.5520	7.4584	6.9910	6.1831	5.7606	4.3545
	5	8.2646	7.2076	6.7559	5.9750	5.5668	4.2081
FSDBT	0	9.9811	8.7109	8.1641	7.1987	6.7014	5.0821
	1	9.5224	8.3104	7.7884	6.8671	6.3930	4.8486
	2	9.1216	7.9604	7.4602	6.5775	6.1237	4.6445
	3	8.7675	7.6513	7.1702	6.3216	5.8857	4.4642
	4	8.4516	7.3756	6.9116	6.0935	5.6735	4.3034
	5	8.1677	7.1277	6.6792	5.8884	5.4827	4.1588
PSDBT	0	9.9815	8.7127	8.1645	7.1786	6.6823	5.0824
	1	9.5228	8.3121	7.7887	6.8480	6.3748	4.8488
	2	9.1220	7.9621	7.4605	6.5591	6.1062	4.6447
	3	8.7678	7.6528	7.1705	6.3040	5.8690	4.4644
	4	8.4520	7.3771	6.9119	6.0765	5.6574	4.3035
	5	8.1680	7.1291	6.6794	5.8720	5.4671	4.1589

Tableau V.7: Variation de la fréquence propre (ω_1) pour un mode d'appuis C-F

Théorie	μ	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$	$k = \infty$
CBT	0	3.6059	3.0586	2.7614	2.3836	2.3047	1.8360
	1	3.6213	3.0717	2.7732	2.3938	2.3145	1.8439
	2	3.6372	3.0851	2.7854	2.4043	2.3247	1.8520
	3	3.6534	3.0989	2.7978	2.4150	2.3350	1.8602
	4	3.6700	3.1131	2.8106	2.4260	2.3457	1.8687
	5	3.6871	3.1276	2.8237	2.4374	2.3566	1.8774
FSDBT	0	3.5858	3.0434	2.7483	2.3698	2.2898	1.8258
	1	3.6004	3.0558	2.7596	2.3793	2.2989	1.8333
	2	3.6155	3.0686	2.7710	2.3891	2.3084	1.8409
	3	3.6308	3.0817	2.7828	2.3991	2.3180	1.8487
	4	3.6466	3.0951	2.7949	2.4093	2.3279	1.8568
	5	3.6628	3.1089	2.8073	2.4199	2.3381	1.8650
PSDBT	0	3.5858	3.0436	2.7484	2.3671	2.2869	1.8258
	1	3.6005	3.0561	2.7596	2.3765	2.2960	1.8333
	2	3.6155	3.0689	2.7711	2.3862	2.3053	1.8409
	3	3.6309	3.0820	2.7829	2.3961	2.3148	1.8488
	4	3.6467	3.0955	2.7951	2.4063	2.3247	1.8568
	5	3.6629	3.1093	2.8075	2.4168	2.3347	1.8651

Dans les Tableaux V.4 à V.7, l'effet du changement de l'exposant de puissance (k) et du paramètre non local (μ) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle pour différentes conditions aux limites est rapporté avec $L / h = 10$ en utilisant différentes ordre de la théorie des poutres (CBT, FSDBT et PSDBT). Ces tableaux indiquent que les fréquences fondamentales diminuent avec l'augmentation de l'exposant de puissance (k), les plus basses fréquences sont données par un métal pur ($k \rightarrow \infty$) et les valeurs les plus élevées sont données par une céramique pure ($k = 0$). Donc en peut dire que l'augmentation de la valeur de l'exposant de loi de puissance (k) produit une diminution de la rigidité en flexion.

Les fréquences propres sont inversement proportionnelle au paramètre non local (μ) pour les conditions aux limites C-C, C-S et S-S, comme indiqué dans les Tableaux 5 et 7; sauf pour C-F, sont légèrement proportionnelle au paramètre non local (μ), comme le confirme le tableau 8.

On voit aussi que les fréquences fondamentale calculée par la théorie classique des poutres (CBT) est relativement supérieure à celle calculée par la théorie du premier et

d'ordre supérieur des poutres à cause de la prise en considération l'effet de la déformation de cisaillement, alors que les deux dernières théories (FSDBT et PSDBT) donnent sensiblement les mêmes fréquences lorsque l'exposant de puissance (k) prend des valeurs très faibles ou très grandes ($k \leq 1$ ou $k \rightarrow \infty$).

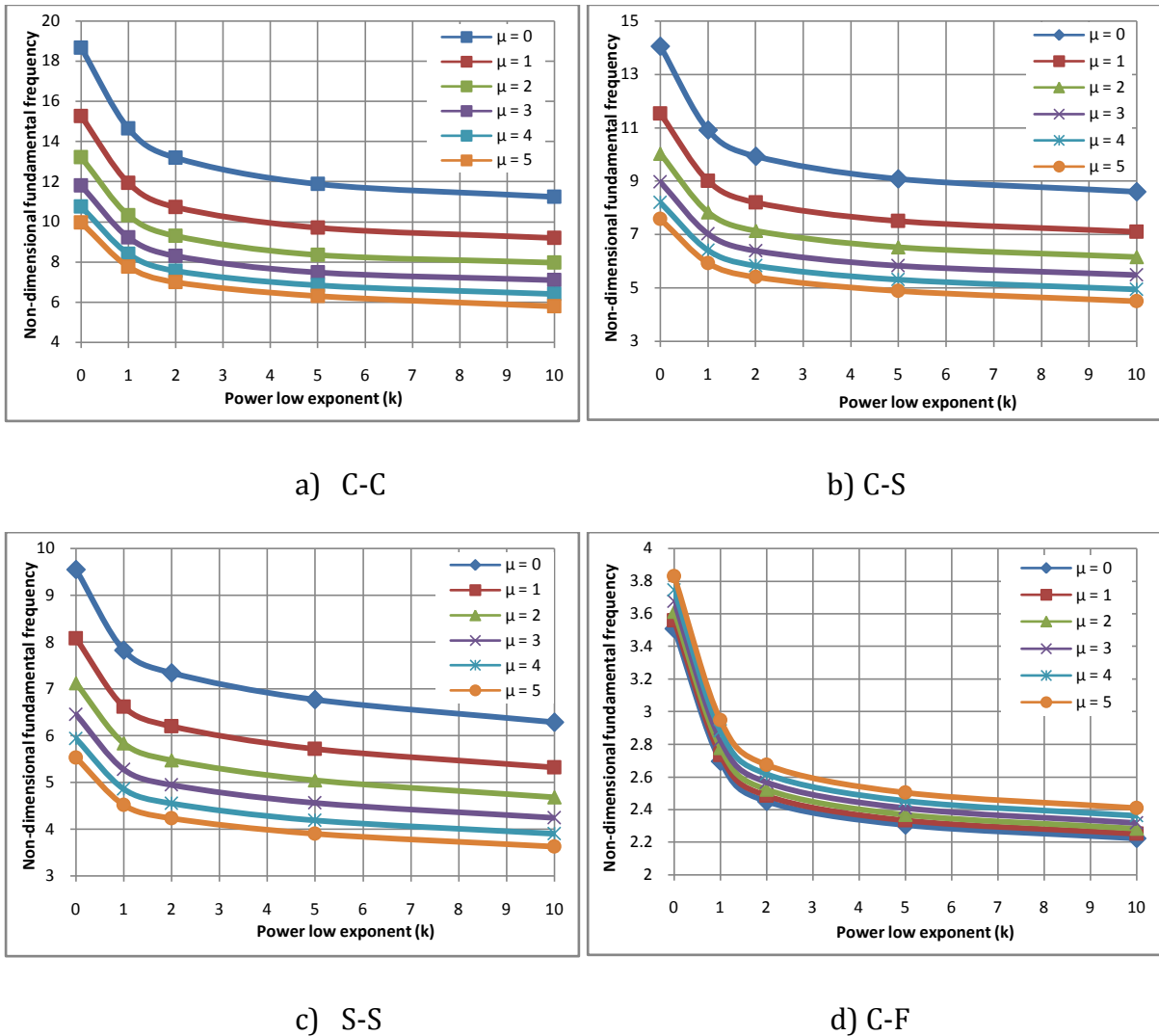


Figure V.3 : Variation de la fréquence propre (ω_1) pour différent mode d'appuis

la Figure V.3 illustre la variation des fréquences fondamentales en fonction de la distribution du matériau (k) pour différentes valeurs de paramètres non locale (μ), dans divers conditions aux limites avec un rapport d'élancement constant $L/h = 10$.

On observe que pour un paramètre non locale (μ) constant, les fréquences fondamentale décroît rapidement lorsque l'exposant de puissance (k) est compris entre 0 et 2, la diminution est moyenne pour (k) entre 2 et 5 et elle est faible pour (k) supérieur à 5. L'influence de l'exposant de puissance (k) sur le rapport de la variation des fréquences

est importante pour les nanopoutres à grande rigidité. Par exemple, à $\mu = 5$ lorsque l'exposant de puissance (k) passe de 0 à 10, le taux de variation des fréquences est réduit de 41,98% pour C-C, 40,56% pour C-S et 34,32% pour S-S. L'effet nonlocal est plus significatif quand le paramètre μ varie de 0 à 3 que le paramètre (μ) dans l'intervalle compris entre 3 et 5. En prend l'exemple de S-S à $k = 10$, la fréquence fondamentale diminue avec 77.11% de 0 à 3 et 22,89% où μ varie de 3 à 5.

Tableau V.8: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis C-C

L/h	μ	<i>CBT</i>	<i>FSDBT</i>	<i>PSDBT</i>	<i>HSDBT</i>	<i>TSDBT</i>	<i>ESDBT</i>	<i>ASDBT</i>
5	0	12.0153	10.7980	10.9197	10.9189	10.9117	10.9310	10.8978
	1	9.8847	8.9477	9.0461	9.0468	9.0425	9.0555	9.0342
	2	8.5869	7.8131	7.8841	7.8849	7.8822	7.8922	7.8765
	3	7.6926	6.9650	7.0760	7.0766	7.0748	7.0831	7.0712
	4	7.0289	6.3719	6.4730	6.4737	6.4722	6.4795	6.4700
	5	6.5114	5.8577	6.0012	6.0017	6.0006	6.0071	5.9994
20	0	12.2558	12.1684	12.1689	12.1687	12.1641	12.1694	12.1693
	1	12.0829	11.9973	11.9977	11.9976	11.9930	11.9982	11.9981
	2	11.9169	11.8330	11.8333	11.8332	11.8288	11.8339	11.8338
	3	11.7575	11.6751	11.6755	11.6754	11.6711	11.6760	11.6759
	4	11.6041	11.5232	11.5236	11.5235	11.5194	11.5241	11.5240
	5	11.4565	11.3770	11.3774	11.3773	11.3703	11.3779	11.3778

Tableau V.9: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis C-S

L/h	μ	<i>CBT</i>	<i>FSDBT</i>	<i>PSDBT</i>	<i>HSDBT</i>	<i>TSDBT</i>	<i>ESDBT</i>	<i>ASDBT</i>
5	0	17.2192	14.6324	14.6649	14.6647	14.6734	14.6927	14.6917
	1	13.8454	11.9819	11.9992	11.9990	12.0039	12.0165	12.0161
	2	11.8882	10.3706	10.3819	10.3818	10.3854	10.3948	10.3946
	3	10.5754	9.2647	9.2732	9.2730	9.2758	9.2837	9.2835
	4	9.6176	8.4475	8.4542	8.4541	8.4563	8.4633	8.4632
	5	8.8796	7.8126	7.8183	7.8182	7.8203	7.8264	7.8263
20	0	17.5730	17.3446	17.3453	17.3454	17.3456	17.3465	17.3466
	1	17.3063	17.0833	17.0839	17.0840	17.0842	17.0851	17.0852
	2	17.0510	16.8331	16.8336	16.8337	16.8340	16.8348	16.8349
	3	16.8064	16.5933	16.5937	16.5938	16.5941	16.5949	16.5950
	4	16.5717	16.3631	16.3635	16.3636	16.3639	16.3647	16.3647
	5	16.3463	16.1420	16.1423	16.1424	16.1427	16.1435	16.1435

Tableau V.10: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis S-S

L/h	μ	<i>CBT</i>	<i>FSDBT</i>	<i>PSDBT</i>	<i>HSDBT</i>	<i>TSDBT</i>	<i>ESDBT</i>	<i>ASDBT</i>
5	0	8.1596	7.8221	7.8264	7.8264	7.8278	7.8303	7.8303
	1	6.9044	6.6200	6.6235	6.6235	6.6247	6.6267	6.6267
	2	6.0931	5.8427	5.8457	5.8457	5.8467	5.8485	5.8485
	3	5.5137	5.2875	5.2901	5.2901	5.2910	5.2926	5.2926
	4	5.0733	4.8654	4.8678	4.8677	4.8686	4.8701	4.8701
	5	4.7240	4.5305	4.5327	4.5327	4.5335	4.5348	4.5348
20	0	8.2834	8.2590	8.2590	8.2590	8.2591	8.2592	8.2592
	1	8.1830	8.1589	8.1589	8.1589	8.1590	8.1591	8.1591
	2	8.0861	8.0624	8.0624	8.0624	8.0624	8.0626	8.0626
	3	7.9927	7.9692	7.9692	7.9692	7.9692	7.9694	7.9694
	4	7.9023	7.8791	7.8791	7.8792	7.8792	7.8793	7.8793
	5	7.8150	7.7921	7.7921	7.7921	7.7921	7.7923	7.7923

Tableau V.11: Fréquence fondamentale (ω_1) pour un mode d'appuis C-F

L/h	μ	<i>CBT</i>	<i>FSDBT</i>	<i>PSDBT</i>	<i>HSDBT</i>	<i>TSDBT</i>	<i>ESDBT</i>	<i>ASDBT</i>
5	0	2.7443	2.6947	2.6949	2.6949	2.6951	2.6953	2.6953
	1	2.7911	2.7325	2.7336	2.7336	2.7339	2.7343	2.7343
	2	2.8430	2.7747	2.7768	2.7768	2.7772	2.7778	2.7778
	3	2.9014	2.8227	2.8256	2.8256	2.8262	2.8269	2.8269
	4	2.9681	2.8779	2.8816	2.8816	2.8823	2.8832	2.8832
	5	3.0460	2.9428	2.9472	2.9472	2.9480	2.9491	2.9491
20	0	2.7657	2.7624	2.7624	2.7624	2.7624	2.7624	2.7624
	1	2.7687	2.7653	2.7653	2.7653	2.7653	2.7653	2.7653
	2	2.7717	2.7683	2.7683	2.7683	2.7683	2.7683	2.7683
	3	2.7747	2.7712	2.7712	2.7712	2.7712	2.7713	2.7713
	4	2.7777	2.7742	2.7742	2.7742	2.7742	2.7742	2.7742
	5	2.7807	2.7772	2.7772	2.7772	2.7772	2.7772	2.7772

Les tableaux V.8-V.11 montrent la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle des nano-poutres en FGM avec différents ensembles de supports (C-C, C-F, SS et C-S) tout en faisant varier le paramètre non local (μ) et l'élanement rapport (L/h). Cette variation est une fonction de toutes les théories de poutres, CBT, FSDBT, PSDBT, HSDBT, TSDBT, ESDBT et ASDBT à l'exposant de puissance $k = 1$.

On note que la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente lorsque la valeur du rapport d'élanement (L / h) est augmentée pour les trois conditions de support C-C, C-S

et S-S (Tab. V.8-V.10), cette augmentation est importante lorsque le paramètre non local (μ) prend des valeurs supérieures. Par exemple, la différence entre la fréquence fondamentale de la FGM nanopoutres en C-S avec $L/h = 5$ et $L/h = 20$ par TSDBT est de 11,48% pour $\mu = 0$, 50,07% pour $\mu = 2$ et 89,47% pour $\mu = 5$. De plus, L'effet du rapport d'élanement (L/h) sur la fréquence fondamentale est très important dans le cas des nano-poutre en C-C par rapport à d'autres conditions aux limites. Par exemple, la variation de la fréquence fondamentale en FGM nano-poutre avec L/h variant de 5 à 20 par ESDBT et $\mu = 3$ est de 78,75% pour C-C, 64,84% pour C-S, 50,58% pour S-S et 01,97% pour C-F.

La différence entre les fréquences fondamentales de la théorie classique des poutres et celles d'ordre supérieur de la théorie des poutres est remarquable lorsque le rapport de dimension (L/h) diminue. Nous déduisons que l'effet de gauchissement est considérable pour les courts FGM nano-poutres.

Les fréquences propres des théories d'ordre supérieur sont un peu plus grande que celles de premier ordre (FSDBT), pour tout paramètre non local (μ), et devient presque identique pour les FGM nano-poutres lente. Dans le cas des FGM nanopoutres à faible rigidité (C-F), les solutions numériques convergent vers les mêmes valeurs des fréquences naturelles (voir le tableau V.11).

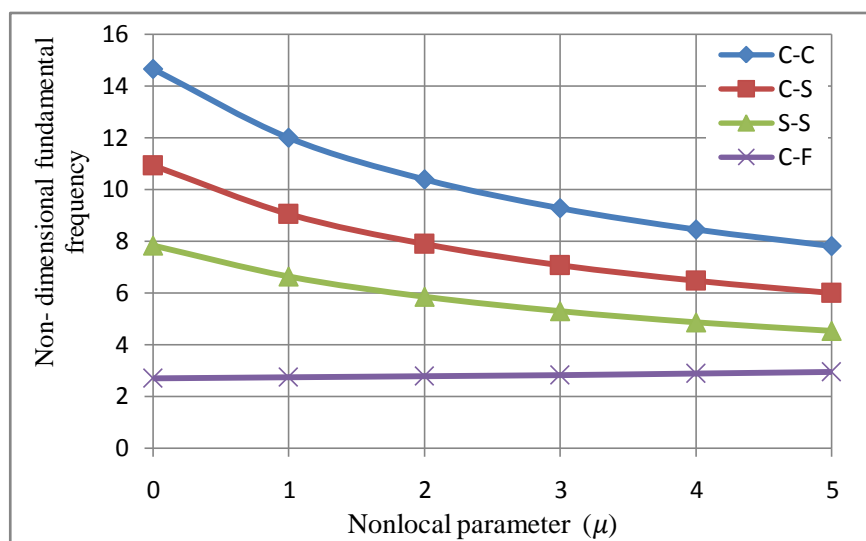


Figure V.4 : Profile de la première fréquence fondamentale (ω_1) pour différent mode d'appuis

La figure V.4 décrit le mode variationnelle des fréquences fondamentale en fonction de paramètres nonlocal (μ) dans différentes conditions aux limites avec $k = 1$ et $L/h = 5$. Il est à noter que l'effet d'échelle (μ) est significatif pour les FGM nano-poutres qui présentent les raideurs les plus élevées; comme μ est varié de 0 à 5, les fréquences fondamentales ont diminué de 46,69% pour C-C, de 45,03% pour C-S, de 42,08% pour S-S et de 9,36% pour C-F.

V.2. 2. Résultats numériques du problème dynamique forcé

L'analyse dynamique des FGM nano-poutres simplement appuyée soumis aux vibrations forcées sont examiné dans cette étude avec des paramètres variant: non local (μ), distribution du matériau (k), ordre de la théorie des poutres, rapport d'élanement (L/h) et la vitesse de la charge mobile (v_p). Les réponses modales sont calculées numériquement dans le domaine temporel en utilisant la méthode d'accélération moyenne de Newmark [Newmark, 1959], qui est celui qui est utilisé généralement pour l'analyse dynamique des structures, avec $\beta = 0.25$ et $\gamma = 0.5$. Pour une précision souhaitée à nous calcul, le temps est subdivisé en 400 stations avec un incrément de temps (Δt) uniforme.

Tableau V.12: Convergence des réponses dynamiques

Nombre du terme (n)	Modèle Classique			Modèle Nonlocal		
	CBT	FSDBT	PSDBT	CBT	FSDBT	PSDBT
2	0.4029	0.4029	0.4029	0.4290	0.4290	0.4290
3	0.5582	0.5621	0.5626	0.6262	0.6313	0.6319
4	0.5582	0.5629	0.5635	0.6262	0.6323	0.6331
5	0.5636	0.5680	0.5685	0.6280	0.6340	0.6346
6	0.5636	0.5681	0.5686	0.6280	0.6348	0.6363
7	0.5649	0.5691	0.5696	0.6324	0.6364	0.6372
8	0.5649	0.5691	0.5696	0.6324	0.6374	0.6393

Dans le tableau V.12, une étude de convergence pour la déflexion dynamique transversale maximale (D_{max}) de FG nano-poutre s'effectue en faisant varier le nombre de polynômes (n) dans la fonction de déplacement pour divers fonctions de gauchissement (CBT, FSDBT et PSDBT), en utilisant deux théories différentes, locale ($\mu=0$) et non-locale ($\mu=4$) avec $k = 3$, $\alpha=0.3$ et $L/h = 20$.

Nous voyons que l'augmentation de nombre de termes(n) de polynômes de Ritz est importante dans la convergence de D_{max} . On peut dire que la précision numérique de la déflexion dynamique transversale maximale est satisfaisante lorsque le nombre (n) est fixé sur 8 dans la fonction de déplacement.

Tableau V.13: Validation de la déflexion dynamique transversale maximale (D_{max}) dans l'échelle nanométrique

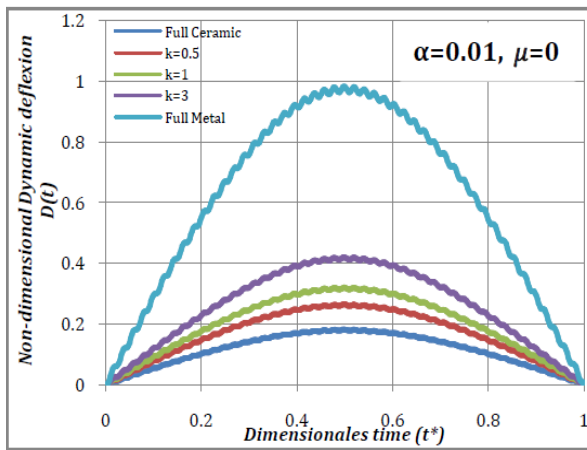
$\mu(\text{nm}^2)$	Source	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.5$	$\alpha=1$
$\mu = 0$	Présent			
	CBT	1.0952	1.7043	1.5513
	FSDBT	1.1258	1.7520	1.5882
	PSDBT	1.1257	1.7518	1.5881
	[Simsek, 2010]			
	CBT	1.0970	1.7081	1.5481
$\mu = 4$	Présent			
	CBT	1.5833	2.4113	2.1688
	FSDBT	1.6790	2.4519	2.3096
	PSDBT	1.6779	2.4528	2.3088
	[Simsek, 2010]			
	CBT	1.6024	2.4146	2.1655

Tableau V.14: Validation de la déflexion dynamique transversale maximale (D_{max}) dans l'échelle classique

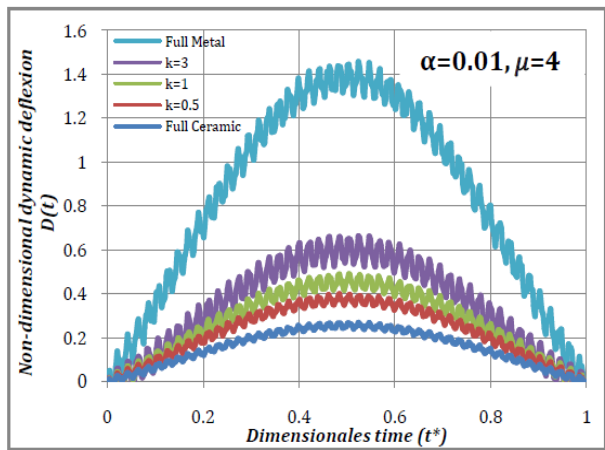
Source	Céramique pure ($v_p = 252 \text{ m/s}$)	$k=0.2$ ($v_p = 222 \text{ m/s}$)	$k=0.5$ ($v_p = 197 \text{ m/s}$)	Métal pure ($v_p = 131 \text{ m/s}$)
Présent CBT	0.9328	1.0311	1.1304	1.7323
[Simsek et al., 2009]	0.9328	1.0344	1.1444	1.7324
Présent FSDBT	0.9382	1.0370	1.1367	1.7425
[Nguyen et al., 2017]	0.9380	1.0402	1.1505	1.7420
Présent PSDBT	0.9382	1.0370	1.1367	1.7424

À fin de voir l'efficacité de présent modèle mathématique dans l'analyse vibratoire forcé , la déflexion dynamique transversale maximale (D_{max}) des FGM poutres simplement appuyée est calculée avec les vitesses correspondantes par rapport aux différents ordres des théories des poutres (CBT, FSDBT et PSDBT), et comparé dans les tableaux 13 et 14 avec celui obtenu par le modèle de [Simsek et al., 2009], [Simsek, 2010] et [Nguyen et al., 2017], avec les même paramètres géométrique de la poutre dans le

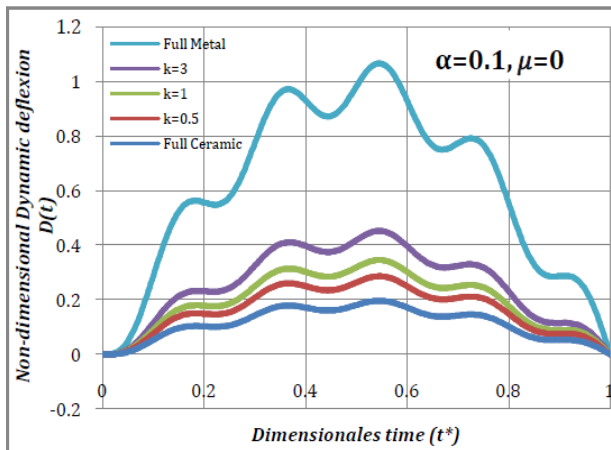
coefficient de Poisson (ν) est pris comme 0.3. Les résultats de ces tableaux sont présentés sans tenir compte l'effet du coefficient de Poisson (ν) dans l'expression du coefficient de rigidité réduite (Q_{11}). Les comparaisons montrent un excellent accord entre les résultats qui valident la précision de notre modèle développé. Cependant, dans l'échelle nanométrique, les déflexions dynamique transversale maximale (D_{max}) calculent en considérant l'effet de gauchissement (FSDBT et PSDBT) sont relativement plus élevées par rapport à celle calculées avec de la théorie classique d'Euler-Bernoulli (CBT), cette différence est supérieur lorsque le nano-poutre est modalisé avec la théorie de l'élasticité nonlocal ($\mu = 4$), tandis que les deux théories FSDBT et PSDBT donnent sensiblement les mêmes D_{max} , pour différent paramètre non-local (μ). Cela implique que l'effet de la déformation du cisaillement doit être pris en compte dans le calcul de La déflexion dynamique des nano-poutres en FGM.



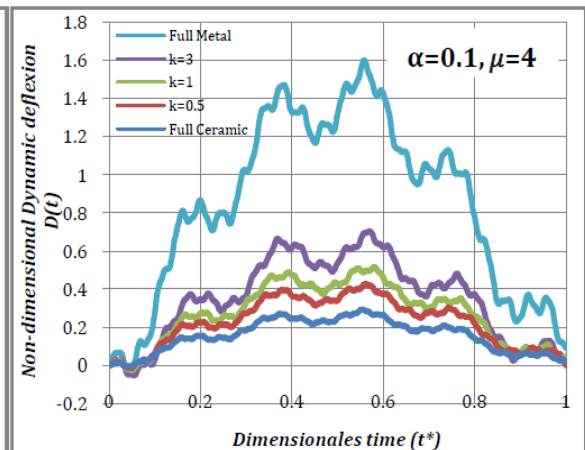
(a-1)



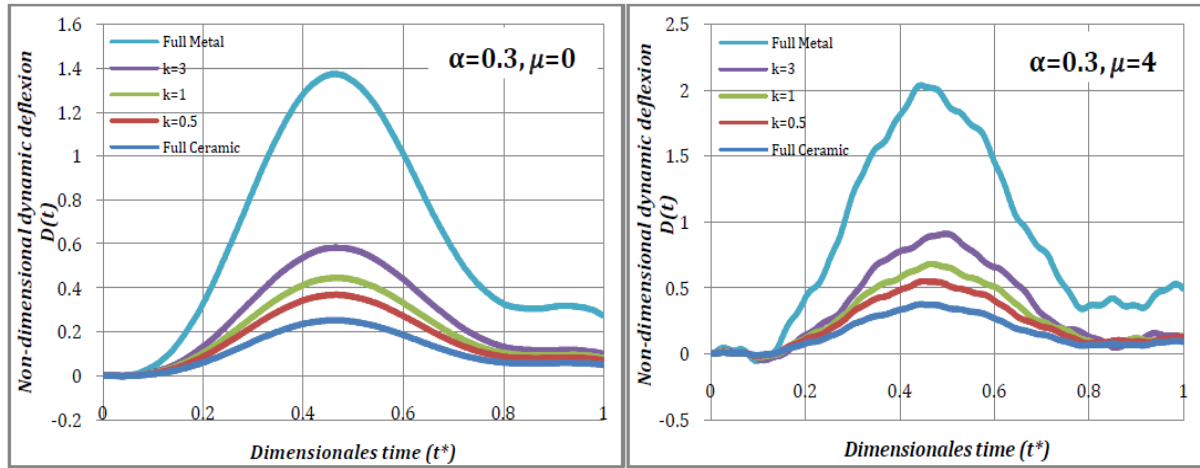
(a-2)



(b-1)

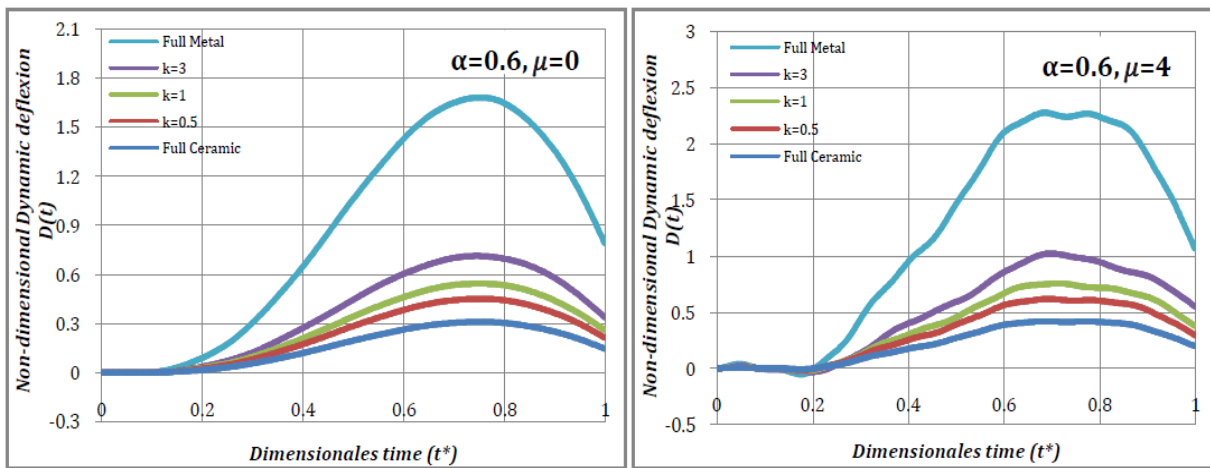


(b-2)



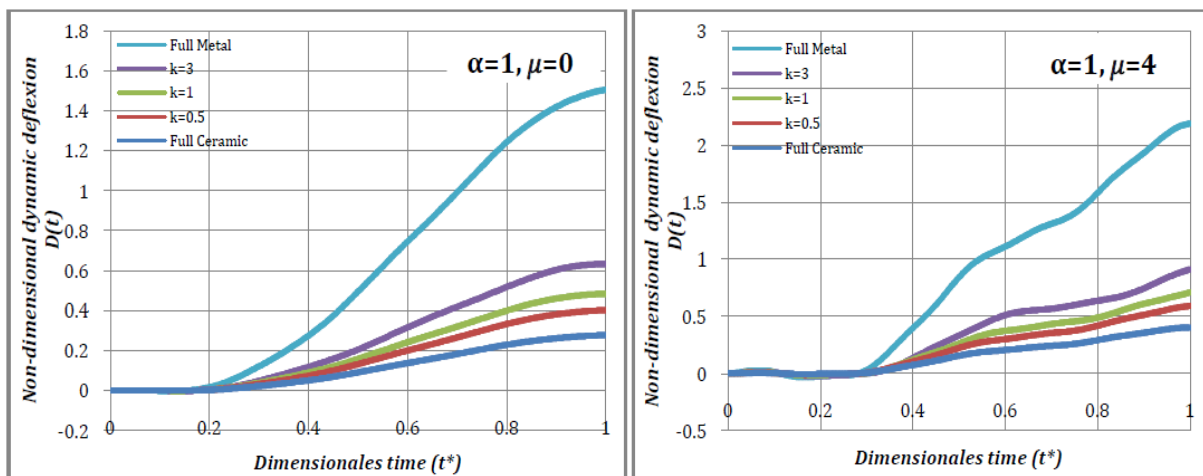
(c-1)

(c-2)



(d-1)

(d-2)



(e-1)

(e-2)

Figure V.5: Historique temporel des déplacements à mi-travée

Ces figures montrent l'historique temporel de la déflexion dynamique transversale non dimensionnel de la portée moyenne d'une poutre en FGM pour différentes valeurs du paramètre (k) en utilisant deux théories différentes, locale (classique) et non-locale. Cette déflexion est tracé sous diverses vitesse de la charge en mouvement ($\alpha=0.01, 0.1, 0.3, 0.6$ et 1).

À partir de ces figures en remarque que la déflexion dynamique est proportionnel a l'exposant de puissance (k), ces valeurs devenu maximale lorsque le FGM poutre est en métal pure ($k \rightarrow \infty$), cette augmentation de la réponse est due à l'accroissement de quantité de métal dans le mélange qui entraîne une diminution du module de Young et la rigidité de flexion. On remarque aussi que les déflexions dynamiques obtenues en utilisant la théorie non-locale sont beaucoup plus grande que celle de théorie classique en raison de l'effet de petite échelle.

On peut également observer que la vitesse de la charge mobile joue un rôle crucial sur le comportement vibratoire de la poutre en FGM, l'emplacement critique de la force en mouvement qui ne donne une déflexion dynamique maximale change avec l'augmentation de la vitesse, il est bien significatif quand α est sur la marge de $0,3$ jusqu'au 1 où la déflexion maximale se déplace au milieu vers l'extrémité droite de la poutre. Pour les faibles vitesses ($\alpha= 0.01$), la déflexion dynamique réagisse comme une poutre quasi-statique (figure a).

Par conséquence, la diminution de la vitesse de la charge mobil donne une souplesse à la poutre qui engendre lui même une instabilité sur la forme de réponses dynamiques (figures a et b), il est bien remarquable dans la théorie non-locale qui possède une faible rigidité de flexion. Par ailler, lorsque la force se déplace à une vitesse plus rapide, la poutre FGM n'a pas assez de temps pour répondre à la force qui nous donne une stabilité dans le système et les deux théories se convergent vers une seule manière de comportement vibratoire comme indiquent les figures c, d et e.

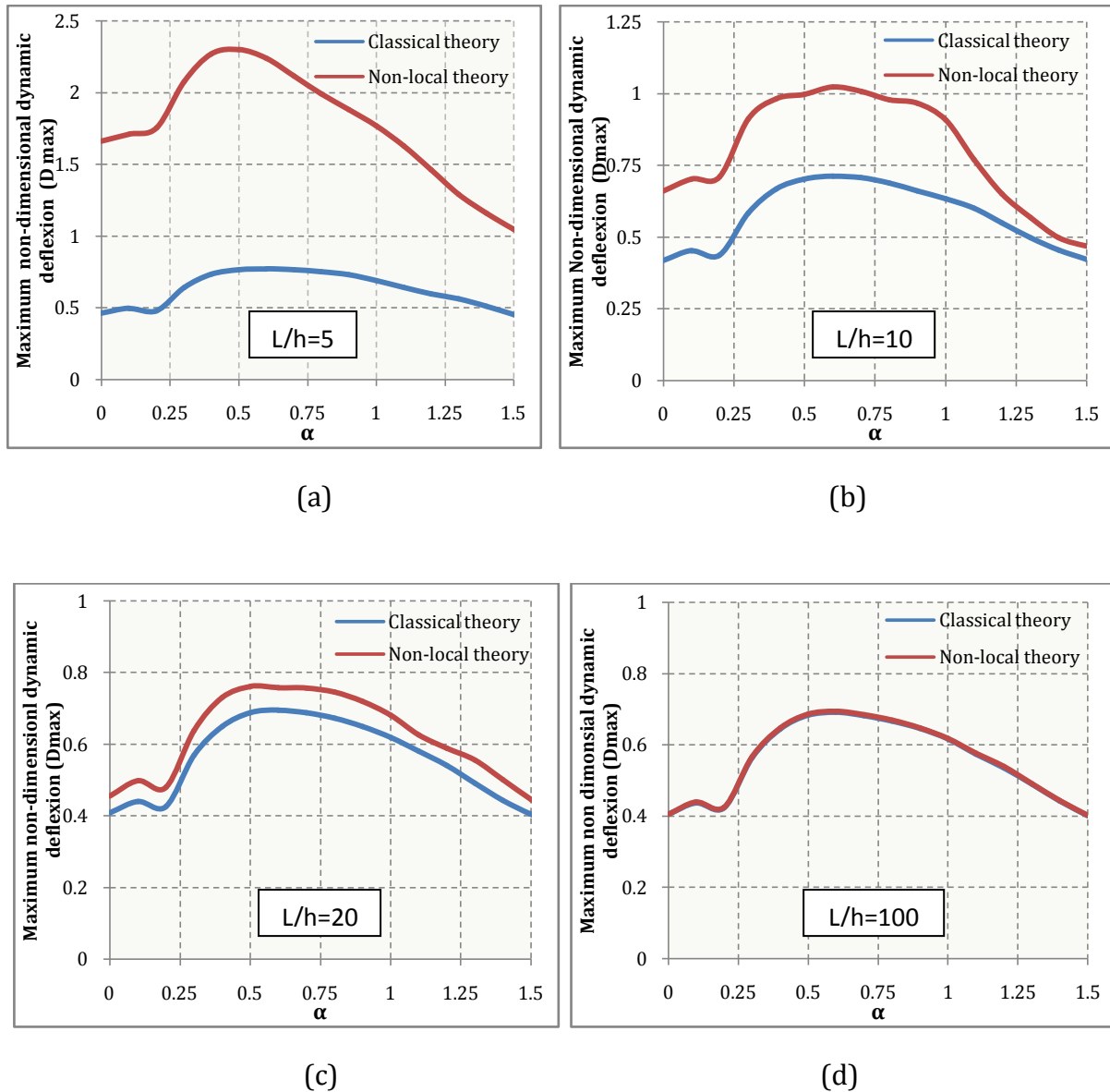


Figure V.6 : Variation de la déflexion dynamique transverse maximale (D_{max})

La Figure (V.6) présente la relation entre la vitesse de la charge mobile (α) et la déflexion dynamique maximale sans dimension (D_{max}) au centre de la poutre FGM avec l'exposant de puissance $k=3$, en utilisant deux théories, locale (classique) et non-locale, pour différentes valeurs de rapport d'élanement ($L/h=5, 10, 20$ et 100).

Il est tout fois observé que la vitesse de la charge affecte considérablement sur la déflexion dynamique maximale, l'amplitude atteint le taux le plus élevé lorsque la vitesse appliquée est sur la marge du 50% à 60% de la vitesse critique, après cette valeur, l'augmentation de la vitesse entraîne une réduction des déflexions dynamiques maximale. En outre, Pour un paramètre de vitesse (α) est mise à 0, c'est le cas de la déflexion statique chargé avec une force concentré au milieu de la poutre en FGM.

Il est clair que l'impact du rapport d'élanement (L/h) est inversement proportionnel sur la déflexion dynamique maximale, cette influence est plus significative quand l'effet nonlocal est inclus dans l'analyse vibratoire du FGM nano-poutre, par exemple, pour une augmentation de rapport d'aspect (L/h) du 5 à 20, le taux le plus élevé de la déflexion dynamique maximale (D_{max}) diminue de 66.86% pour la théorie nonlocal et une légère diminution de 09.76% pour la théorie classique.

Il convient de noter aussi que l'importance de l'effet d'échelle sur la déflexion dynamique maximale devient moins évidente lorsque les FGM nano-poutres commencent à prendre des rapports d'aspect supérieurs, par exemple, pour $L/h=5$, le taux le plus élevé de D_{max} modélisé par la théorie non-locale est 198.13% supérieur par rapport au taux le plus élevé de D_{max} modélisé par la théorie classique, 43.56% pour $L/h=10$, et 09.49% pour $L/h=20$. Pour les FGM nano-poutres très élancées (figure 4-d), l'effet nonlocal sur la déflexion dynamique maximale est négligeable.

V.3. Conclusion

Ce chapitre présente une analyse sur le comportement dynamique des nano-poutres en FGMs dans différentes conditions physique et géométrique, basée sur la relation constitutive d'Eringen. En premier lieu, nous avons étudié les fréquences fondamentales du problème vibratoire libre, pour différentes conditions aux limites en utilisant divers ordres des théories de poutres. En second lieu, nous avons concentré sur les solutions numériques obtenues à partir de la formulation mathématique de comportement vibratoire forcées. Une étude paramétrique a été faite pour analyser en détails l'effet des différents paramètres telle que ; le paramètre nonlocal, la distribution du matériau, la déformation du cisaillement, le rapport d'élanement et la vitesse de la charge mobile sur les réponses modales. Nous pouvons affirmer que toutes les études comparatives ont montré que le présent modèle est non seulement précis, mais est aussi efficace pour l'analyse dynamique libre et forcé des nano-poutres en FGMs.

CONCLUSION
GENERALE ET
PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives

Pour les pièces industrielles, dont la complexité s'est sans cesse accrue, la compréhension et le diagnostic des phénomènes vibratoires mis en jeu nécessitent des recherches de plus en plus fines de leur comportement.

Dans le cadre de ce travail, un modèle analytique est présenté pour étudier le comportement dynamique des nano-poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) traversés par une charge mobile, en se basant sur la relation constitutive d'Eringen, sous différentes hypothèses de la théorie des poutres. Les équations d'équilibres non locales sont définies par le principe de Hamilton en introduisant les formes faibles dans le système vibratoire. Les fonctions de forme indiquant les déplacements de la poutre sont exprimés dans une série polynômiale de Ritz. Les fréquences fondamentales sont déterminées en résolvant le système d'équations aux problèmes de valeurs propres et la méthode Newmark est adoptée pour résoudre numériquement les réponses modales du comportement dynamique forcé. Les résultats numériques sont validés avec ceux disponibles dans la littérature. Les effets de différents paramètres sont également examinés en détails. Les principales conclusions de cette recherche sont :

- L'augmentation du nombre (n) de la fonction de déplacement joue un rôle majeur dans la convergence des solutions numériques qui avantagent le polynôme de Rayleigh-Ritz dans la programmation des structures et nano-structures, en raison de sa rapidité et efficacité dans le calcul.
- L'influence de l'exposant de puissance, du paramètre non local, de la déformation de cisaillement et du rapport d'élançement sur la valeur des fréquences propres est importante pour les nano-poutres qui présentent une faible flexibilité.
- A cause de l'effet à petite échelle, les déflexions dynamiques obtenues en utilisant la théorie non locale sont toujours plus grandes que celles obtenues par la théorie classique (local).

- Les réponses dynamiques sont proportionnelles à l'exposant de puissance (k) qui est lui-même inversement proportionnelle au module de Young et à la rigidité de la nano-poutre en FGM.
- Les déflexions dynamiques calculées en considérant l'effet de cisaillement transversal sont relativement plus élevées par rapport à celles calculées avec la théorie classique d'Euler-Bernoulli.
- La position critique de la charge ponctuelle en mouvement qui correspond à la valeur maximale des déflexions dynamiques est influencée de manière significative par la vitesse appliquée.
- La diminution de la valeur des vitesses d'une charge mobile génère une instabilité sur la forme du comportement dynamique du système vibratoire, ces oscillations sont très dangereuses dans les structures qui possèdent une grande flexibilité avec la prise en compte de l'effet à petite échelle.
- Les déflexions dynamiques trouvées par la théorie classique (local) sont quasiment indépendantes du rapport d'élanement contrairement à la théorie non locale.
- L'effet nonlocal affecte grandement les déflexions dynamiques des nano-poutres qui contiennent un rapport d'élanement très petit.
- Le paramètre nonlocal, la déformation du cisaillement, la distribution du matériau, le rapport d'aspect et la vitesse de la charge mobile ont des effets décisifs dans l'analyse dynamique des nano-poutres en FGM soumis aux vibrations forcées.

Comme perspective, nous allons :

- Appliquer le modèle de la réponse dynamique pour d'autres modes d'appuis tel que le cas encastré-encastré, encastré-appuyée et encastré-libre.
- Prendre en compte l'effet de l'amortissement interne dans la modélisation.
- Excité les nano-poutres en FGM par des charges harmonique mobile.
- Améliorer le modèle analytique afin d'introduire le phénomène de stabilité dynamique dans les poutres tournantes.
- Sollicité la poutre par plusieurs chargements mobiles avec des vitesses aléatoires.

Globalement, ce travail est une contribution efficace à la compréhension du comportement dynamique dans différentes échelles de la structure.

ANNEXE

L'équation de mouvement (IV. 32) peuvent être écrites sous une forme explicite comme suit:

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uw}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{wu}] & [K_{ww}] & [K_{w\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi w}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u(t)\} \\ \{w(t)\} \\ \{\phi(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M_{uu}] & [M_{uw}] & [M_{u\phi}] \\ [M_{wu}] & [M_{ww}] & [M_{w\phi}] \\ [M_{\phi u}] & [M_{\phi w}] & [M_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\ddot{w}(t)\} \\ \{\ddot{\phi}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Abréviations de matrice [K]:

$$[K_{uu}] = A_{11} \int_0^L [\varphi'_i(x)]^T \cdot [\varphi'_j(x)] \cdot dx$$

$$[K_{uw}] = -B_{11} \int_0^L [\varphi'_i(x)]^T \cdot [\psi''_k(x)] \cdot dx$$

$$[K_{u\phi}] = E_{11} \int_0^L [\varphi'_i(x)]^T \cdot [\phi'_p(x)] \cdot dx$$

$$[K_{wu}] = [K_{uw}]^T$$

$$[K_{ww}] = D_{11} \int_0^L [\psi''_i(x)]^T \cdot [\psi''_k(x)] \cdot dx$$

$$[K_{w\phi}] = -F_{11} \int_0^L [\psi''_i(x)]^T \cdot [\phi'_p(x)] \cdot dx$$

$$[K_{\phi u}] = [K_{u\phi}]^T$$

$$[K_{\phi w}] = [K_{w\phi}]^T$$

$$[K_{\phi\phi}] = H_{11} \int_0^L [\phi'_i(x)]^T \cdot [\phi'_p(x)] \cdot dx + A_{55} \int_0^L [\phi_i(x)]^T \cdot [\phi_p(x)] \cdot dx$$

Abréviations de matrice [M]:

$$[M_{uu}] = I_1 \int_0^L [\varphi_i(x)]^T \cdot ([\varphi_j(x)] - \mu \cdot [\varphi''_j(x)]) \cdot dx$$

$$[M_{uw}] = -I_2 \int_0^L [\varphi_i(x)]^T \cdot ([\psi'_k(x)] - \mu \cdot [\psi'''_k(x)]) \cdot dx$$

$$[M_{u\phi}] = I_3 \int_0^L [\varphi_i(x)]^T \cdot ([\phi_p(x)] - \mu \cdot [\phi''_p(x)]) \cdot dx$$

$$[M_{wu}] = [M_{uw}]^T$$

$$[M_{ww}] = I_1 \int_0^L [\psi_i(x)]^T \cdot ([\psi_k(x)] - \mu \cdot [\psi''_k(x)]) \cdot dx + I_4 \int_0^L [\psi'_i(x)]^T \cdot ([\psi'_k(x)] - \mu \cdot [\psi'''_k(x)]) \cdot dx$$

$$[M_{w\phi}] = -I_5 \int_0^L [\psi'_i(x)]^T \cdot ([\phi_p(x)] - \mu \cdot [\phi''_p(x)]) \cdot dx$$

$$[M_{\phi u}] = [M_{u\phi}]^T$$

$$[M_{\phi w}] = [M_{w\phi}]^T$$

$$[M_{\phi\phi}] = I_6 \int_0^L [\phi_i(x)]^T \cdot ([\phi_p(x)] - \mu \cdot [\phi''_p(x)]) dx$$

Abréviations des vecteurs $\{q(t)\}$ et $\{\ddot{q}(t)\}$:

$$\{q(t)\} = \{\{u(t)\}, \{w(t)\}, \{\phi(t)\}\}^T ;$$

$$\{\ddot{q}(t)\} = \{\{\ddot{u}(t)\}, \{\ddot{w}(t)\}, \{\ddot{\phi}(t)\}\}^T$$

$$\{u(t)\} = \{u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots, u_j(t)\}^T ;$$

$$\{\ddot{u}(t)\} = \{\ddot{u}_1(t), \ddot{u}_2(t), \ddot{u}_3(t), \dots, \ddot{u}_j(t)\}^T$$

$$\{w(t)\} = \{w_1(t), w_2(t), w_3(t), \dots, w_k(t)\}^T ;$$

$$\{\ddot{w}(t)\} = \{\ddot{w}_1(t), \ddot{w}_2(t), \ddot{w}_3(t), \dots, \ddot{w}_k(t)\}^T$$

$$\{\phi(t)\} = \{\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots, \phi_p(t)\}^T ;$$

$$\{\ddot{\phi}(t)\} = \{\ddot{\phi}_1(t), \ddot{\phi}_2(t), \ddot{\phi}_3(t), \dots, \ddot{\phi}_p(t)\}^T$$

Abréviations de vecteur $\{F(t)\}$:

$$\{F(t)\} = \{\{0\}_{1 \times n}, \{P(t)\}_{1 \times n}, \{0\}_{1 \times n}\}^T$$

$$\{P(t)\}_{1 \times n} = -P \cdot ([\psi_i(v_p t)] - \mu \cdot [\psi''_i(v_p t)])$$

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [Adhikari et al. 2013]: Adhikari, S., Murmu, T., & McCarthy, M. A. (2013). Dynamic finite element analysis of axially vibrating nonlocal rods. *Finite Elements in Analysis and Design*, 63, 42-50.
- [Ambartsumyan, 1969]: Ambartsumyan, S. A. (1969). Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression. *MTT*, 3, 51-61.
- [Arani et al. 2012]: Arani, A. G., Shiravand, A., Rahi, M., & Kolahchi, R. (2012). Nonlocal vibration of coupled DLGS systems embedded on Visco-Pasternak foundation. *Physica B: Condensed Matter*, 407(21), 4123-4131.
- [Arcamone et al. 2007]: Arcamone, J., Misischi, B., Serra-Graells, F., van den Boogaart, M. A., Brugger, J., Torres, F., ... & Pérez-Murano, F. (2007). A compact and low-power CMOS circuit for fully-integrated NEMS resonators. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*
- [Aydogdu, 2008]: Aydogdu, M. (2008). Vibration of multi-walled carbon nanotubes by generalized shear deformation theory. *International Journal of Engineering and Science*, 50, 837-844.
- [Aydogdu, 2009]: Aydogdu, M. (2009). A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending buckling and vibration. *Physica E*, 41, 1651-1655.
- [Aydogdu, 2009]: Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 89(1), 94-101.
- [Benzair et al. 2008]: Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N., & Boumia, L. (2008). The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 41, 225404.
- [Bosseboeuf et al. 2001]: Bosseboeuf, A., Yahiaoui, R., & Petitgrand, S. (2001). Méthodes de caractérisation mécanique des films minces avec des micropoutres et des microponts. *Le Vide*, 56(301), 581-593.
- [Civalek & Demir, 2011]: Civalek, O., & Demir, C. (2011). Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 2053-2067.
- [Collins et al. 2001]: Collins, P. G., Arnold, M. S., & Avouris, P. (2001). Engineering carbon nanotubes and nanotube circuits using electrical breakdown. *science*, 292(5517), 706-709.
- [Dufort et al. 2001]: Dufort, L., Drapier, S., & Grédiac, M. (2001). Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending. *Composite Structures*, 52(2), 233-246.

- [Elmeiche et al. 2016] : Elmeiche, A., Megueni, A., & Lousdad, A. (2016). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Nanobeams Based on Different Order Beam Theories Using Ritz Method. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 60(4), 209-219.
- [Eringen, 1972]: Eringen, A. C. (1972). Nonlocal polar elastic continua. *International Journal of Engineering Science*, 10, 1–16.
- [Eringen & Edelen, 1972]: Eringen, A. C., & Edelen, D. G. B. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3), 233-248.
- [Eringen, 1983]: Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54(9), 4703-4710.
- [Eringen, 1992] : Eringen, A. C. (1992). Vistas of nonlocal continuum physics. *International Journal of Engineering Science*, 30(10), 1551-1565.
- [Eringen, 2002] : Eringen, A. C. (2002). *Nonlocal continuum field theories*. Springer Science & Business Media.
- [Florando et al. 2005]: Florando, J. N., & Nix, W. D. (2005). A microbeam bending method for studying stress–strain relations for metal thin films on silicon substrates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(3), 619-638.
- [Finot et al. 2008]: Finot, E., Passian, A., & Thundat, T. (2008). Measurement of mechanical properties of cantilever shaped materials. *Sensors*, 8(5), 3497-3541.
- [Foulds et al. 2008]: Foulds, I. G., Johnstone, R. W., Tsang, S. H., Hamidi, M., & Parameswaran, M. (2008). Polydimethylglutarimide (PMGI) as a structural material for surface micromachining. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18(4), 045026.
- [Fryba, 1972] : Frýba, L. (1972). *Vibration of solids and structures under moving loads* . Noordhoff International, Groningen, The Netherlands.
- [Génevaux, 2011] : Génevaux, J. M. (2011). *Petits exercices avec résultats: théorie des poutres (résistance des matériaux), dynamique des structures, incertitudes, mathématiques, mécanique des solides déformables, modélisation des solides*.
- [Hashemi & Khaniki, 2018]: Hashemi, S. H., & Khaniki, H. B. (2018). Dynamic response of multiple nanobeam system under a moving nanoparticle. *Alexandria engineering journal*, 57(1), 343-356.

- [Hosseini & Rahmani, 2017]: Hosseini, S. A. H., & Rahmani, O. (2017). Exact solution for axial and transverse dynamic response of functionally graded nanobeam under moving constant load based on nonlocal elasticity theory. *Meccanica*, 52(6), 1441-1457.
- [Huang et al. 2005]: Huang, B., & Zhang, T. Y. (2005). Microbridge tests: II. On buckled thin gold films. *Journal of micromechanics and microengineering*, 16(1), 134.
- [Ijjima, 1991] : Ijjima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature* 1991; 354:56–8.
- [Janghorban & Zare , 2011]: Janghorban, M., & Zare, A. (2011). Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes with variable thickness by differential quadrature method. *Physica E*, 43, 1602–1604.
- [Karama et al. 2003]: Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures*, 40(6), 1525-1546.
- [Kessas, 2010] : Kessas, S. (2010). Etude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites. Thèse Magister en génie civil de l'université Mentouri, Constantine.
- [Kiani & Eslami , 2010]: Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2010). Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(3), 229-238.
- [Kiani & Wang, 2012]: Kiani, K., & Wang, Q. (2012). On the interaction of a single-walled carbon nanotube with a moving nanoparticle using nonlocal Rayleigh, Timoshenko, and higher-order beam theories. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 31(1), 179-202.
- [Kramer et Paul, 2001]: Kramer, T., & Paul, O. (2001). Surface micromachined ring test structures to determine mechanical properties of compressive thin films. *Sensors and Actuators A: Physical*, 92(1-3), 292-298.
- [Kumar et al. 2008]: Kumar, D., Heinrich, C., & Waas, A. M. (2008). Buckling analysis of carbon nanotubes modeled using nonlocal continuum theories. *Journal of Applied Physics*, 103, 073521.
- [Launois, 2004] : Launois, P., Benisty, H., Berthoz, A. et al.: *Nanosciences et nanotechnologies, Rapport de conjoncture*, 2004.

- [Lei et al. 2013]: Lei, Y., Adhikari, S., & Friswell, M. I. (2013). Vibration of nonlocal Kelvin–Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 66, 1-13.
- [Lei et al. 2016]: Lei, D.X, Sun, D.Y, and Ou, Z.Y. (2016). Dynamic analysis of simply supported functionally graded nanobeams subjected to a moving force based on the nonlocal euler-bernoulli elasticity theory, *Advances in Materials Science and applications*, 5,1, pp.1–11.
- [Leissa, 1978] : Leissa, A. W. (1978). A direct method for analyzing the forced vibrations of continuous systems having damping. *Journal of Sound and Vibration*, 56(3), 313-324.
- [Levinson, 1980]: Levinson, M. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6), 343-350.
- [Lo & Christensen, 1977]: Lo, K. H., Christensen, R. M., & Wu, E. M. (1977). A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates. *Journal of applied mechanics*, 44(4), 663-668.
- [Mantari et al. 2012]: Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- [Martins et al. 2007]: Martins, P., Beclin, S., Brida, S., Metivet, S., Stojanovic, O., & Malhaire, C. (2007). Design of bossed silicon membranes for high sensitivity microphone applications. *Microsystem Technologies*, 13(11-12), 1495-1500.
- [Murmu & Pradhan, 2009]: Murmu, T., & Pradhan, S. C. (2009). Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM. *Physica E*, 41, 1232–1239.
- [Murmu & Pradhan , 2009]: Murmu, T., & Pradhan, S. C. (2009). Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science*, 46, 854–859.
- [Nasirshoaibi et al. 2015]: Nasirshoaibi, M., Mohammadi, N., & Nasirshoaibi, M. (2015). Forced transverse vibration of a closed double single-walled carbon nanotube system containing a fluid with effect of compressive axial load. *Shock and Vibration*, 2015.
- [Newmark, 1959]: Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94.
- [Nguyen, 2004] : Nguyen, V. T. (2004). Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque (Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech).

- [Nguyen et al. 2015]: Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., & Thai, H. T. (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 76, 273-285.
- [Nguyen et al. 2016]: Nguyen, D. K., Nguyen, Q. H., Tran, T. T., & Bui, V. T. (2017). Vibration of bi-dimensional functionally graded Timoshenko beams excited by a moving load. *Acta Mechanica*, 228(1), 141-155.
- [Obadia , 2008]: Obadia, M. A. (2008). Les nanotechnologies 2008. *Journal officiel-république française avis et rapports du conseil économique et social*, 21.
- [Piguet et al. 2004]: Piguet, C., Gautier, J., Heer, C., O'Connor, I., & Schlichtmann, U. (2004, February). Extremely low-power logic. In *Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe-Volume 1* (p. 10656). IEEE Computer Society.
- [Pouresmaeeli et al. 2013]: Pouresmaeeli, S., Ghavanloo, E., & Fazelzadeh, S. A. (2013). Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium. *Composite structures*, 96, 405-410.
- [Reddy, 2007] : Reddy, J. N. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8), 288-307.
- [Reddy & Pang, 2008]: Reddy, J. N., & Pang, S. D. (2008). Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103, 023511.
- [Reddy, 2010]: Reddy, J. N. (2010). Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. *International Journal of Engineering Science*, 48, 1507–1518.
- [Roque et al. 2011]: Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M., & Reddy, J. N. (2011). Analysis of Timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method. *International Journal of Engineering Science*, 49, 976–984.
- [Sahmani & Ansari, 2011]: Sahmani, S., & Ansari, R. (2011). Nonlocal beam models for buckling of nanobeams using state-space method regarding different boundary conditions. *Journal of Mechanics, Science and Technology*, 25, 2365–2375.
- [Sallai, 2011] : Sallai, B. O. (2011). Etude et analyse des structures en FGM: comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM (Doctoral dissertation).

- [Satish et al. 2012]: Satish, N., Narender, s., and Gopalakrishnan, S. (2012). Thermal vibration analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal continuum mechanics, *physica E*, 44, 1950–1962.
- [Seguineau et al. 2008]: Seguineau, C., Ignat, M., Malhaire, C., Brida, S., Lafontan, X., Desmarres, J. M., ... & Debove, L. (2008, April). Micro-tensile tests on micromachined metal on polymer specimens: Elasticity, plasticity and rupture. In *Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, 2008.
- [Senthilkumar, 2010]: Senthilkumar, V. (2010). Buckling analysis of a single-walled Carbon nanotube with nonlocal continuum elasticity by using differential transform method. *Advanced in Science Letters*, 3, 337–340.
- [Senthilkumar et al. 2010]: Senthilkumar, V., Pradhan, S. C., & Prathap, G. (2010). Buckling analysis of Carbon nanotube based on nonlocal Timoshenko beam theory using differential transform method. *Advanced in Science Letters*, 3, 415–421.
- [Sharpe et al. 1997]: Sharpe, W. N., Yuan, B., Vaidyanathan, R., & Edwards, R. L. (1997, January). Measurements of Young's modulus, Poisson's ratio, and tensile strength of polysilicon. In *Proceedings of the Tenth IEEE International Workshop on Microelectromechanical Systems*, Nagoya, Japan (Vol. 429).
- [Soldatos & Timarci, 1993]: Soldatos, K. P., & Timarci, T. (1993). A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171.
- [Simsek & Kocatürk, 2009] : Şimşek, M., & Kocatürk, T. (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*, 90(4), 465-473.
- [Şimşek, 2010]: Şimşek, M. (2010). Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(1), 182-191.
- [Şimşek, 2011]: Şimşek, M. (2011). Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle. *Computational Materials Science*, 50(7), 2112-2123.

- [Simsek and Reddy, 2013] : Şimşek, M., & Reddy, J. N. (2013). A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory. *Composite Structures*, 101, 47-58.
- [Thai, 2012]: Thai, H. T. (2012). A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 52, 56-64.
- [Timoshenko, 1921]: Timoshenko, S. P. (1921). LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746.
- [Timoshenko, 1972]: Timoshenko, S.P. et Gere, J.M. (1972). *Mechanics of Materials*. New York:D.Van Nostrand Company.
- [Touratier, 1991]: Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916.
- [Uymaz, 2013]: Uymaz, B. (2013). Forced vibration analysis of functionally graded beams using nonlocal elasticity. *Composite Structures*, 105, 227-239.
- [Wang et al. 2006]: Wang, Q., Varadan, V. K., & Quek, S. T. (2006). Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models. *Physics Letters A*, 357, 130-135.
- [Wang & Varadan , 2006]: Wang, Q., & Varadan, V. K. (2006). Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics. *Smart Materials and Structures*, 15, 659-666.
- [Wang et al. 2007]: Wang, C. M., Zhang, Y. Y., & He, X. Q. (2007). Vibration of nonlocal Timoshenko beams. *Nanotechnology*, 18, 105401.
- [Wang & Liew, 2007]: Wang, Q., & Liew, K. M. (2007). Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro-and nano-structures. *Physics Letters A*, 363(3), 236-242.
- [Wang et al. 2008]: Wang, C. M., Kitipornchai, S., Lim, C. W., & Eisenberger, M. (2008). Beam bending solutions based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 134, 475-481.
- [Wakashima et al. 1990]: Wakashima, K., Hirano, T., Niino, M. (1990). Space applications of advanced structural materials. *ESA SP 303*, 97.
- [Yu et al. 2000]: Yu, M. F., Lourie, O., Dyer, M. J., Moloni, K., Kelly, T. F., & Ruoff, R. S. (2000). Strength and breaking mechanism of multiwalled carbon nanotubes under tensile load. *Science*, 287(5453), 637-640.

[Zhang et al. 2005]: Zhang, Y. Q., Liu, G. R., & Xie, X. Y. (2005). Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Physics Reviews B*, 71, 195404.