



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique



THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique des Matériaux et Structures

Présentée par Monsieur :

CHITOUR Mourad

ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICH

Soutenue le : / / devant le jury composé de :

Président :

M. BOUCHAM Belhadj Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

Directrice de Thèse :

Mme BENGUEDIAB Soumia Maître de Conférences Classe A, Université de Saida

Co-Directeur de Thèse :

M. TOUNSI Abdelouahed Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

Examineurs :

M. CHERIEF Mohammed Nadhir Djamel Eddine Maître de Conférences Classe A, Université de Sidi Bel Abbès.

M. BOUMIA Lakhdar Maître de Conférences Classe A, Université de Tissemsilt

M. BOURADA Fouad Maître de Conférences Classe A, Université de Tissemsilt

Invité :

M. BOUHADRA Abdelhakim Maître de Conférences Classe A Université de Khenchela

2022-2023

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

À ma chère mère et mon cher père,

À ma femme et mes enfants,

À mes sœurs et mes frères,

A tous mes amis

*À tous ceux qui m'ont encouragé tout au
long de ce travail.*

Remerciements

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement à Allah tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance, qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon encadreur M. **BENGUEDIAB Mohamed** Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi et Madame **BENGUEDIAB Soumia**, Maître de conférences classe A, qui a été attentif à l'évolution de ma recherche et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement mon Co-encadreur, le Professeur Mr. **TOUNSI Abdelouhed**.

J'exprime également toute ma reconnaissance à **Dr. BOUHADRA Abdelhakim** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur **BOUCHAM Belhadj**, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **Dr BOURADA Fouad**, e de Conférences Classe A, Université, de Tissemsilt, **Dr BOUMIA Lakhdar** Maître de Conférences Classe A, Université de Tissemsilt et **Dr CHERIEF Mohammed Nadhir Djamel Eddine**, Maître de Conférences Classe A, Université de Sidi Bel Abbès, de m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbès et aux personnels des départements de Génie Civil et Génie mécanique de l'Université de Abbès Laghrour de Khenchela qui m'ont aidé à titres divers et également aux membres de ma petite famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو اقتراح نظريات لتحليلات الثبات الحراري لهياكل الساندويتش المتدرجة وظيفيا القائمة على أسس مرنة بالإضافة إلى مشكلة عزم الانحناء باستخدام نماذج تشوه القص عالية الترتيب.

من خلال هذا العمل وضعنا هدفين رئيسيين ، الهدف الرئيسي الأول لهذا العمل هو تحديد نموذج تحليلي قائم على نظرية تشوه القص لدراسة الانحناء الحراري لألواح الساندويتش في المواد ذات التدرج الوظيفي تحت توزيعات درجات الحرارة المختلفة من خلال السمك. استنادًا إلى أساس مرن ثنائي المعلمات (**Winkler-Pasternak**) ، باستخدام نظرية عالية الترتيب (**HSDT**) ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع نتائج نماذج الألواح الأخرى المقترحة في الاعمال الأخرى.

الهدف الثاني هو اقتراح نظرية تشوه القص شبه ثلاثية الأبعاد وثنائية الأبعاد لألواح سندويتش **FG** مع أربعة مجاهيل لتحليل الانحناء لألواح سندويتش، **FG**

يتم اشتقاق معادلات التوازن في الروافد والألواح **FG** باستخدام مبدأ الأعمال الافتراضية. يتم الحصول على الحلول التحليلية وعلاقات التشتت من خلال حل مشكلة القيمة الذاتية باستخدام حل **Navier**.

تم إجراء دراسة بارامترية من أجل تحديد العوامل التي تحكم السلوك الميكانيكي لهذا النوع من هياكل تشويه الهياكل المتدرجة وظيفيا، ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك المتوفرة في أرشيف الاعمال الأخرى.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيًا ، نظرية الترتيب العالي ، الأساس المرن ، الانحناء الحراري للألواح ، نظريات شبه ثنائية الأبعاد وشبه ثلاثية الأبعاد ، روافد **FG** ، مبدأ الأعمال الافتراضية

Abstract

Abstract

The aim of this thesis is to propose theories for thermal stability analyzes of FGM sandwich structures resting on elastic foundations as well as the problem of bending of FGM sandwich beams using high order shear deformation models.

Through this work we set two main objectives, The first main objective of this work was to define an analytical model based on the theory of shear deformation for the study of thermal buckling of sandwich plates in materials with assessed gradient under various temperature distributions through the thickness, based on a two-parameter elastic foundation (Winkler-Pasternak), using a high-order theory (HSDT) and to compare the results obtained with the results of the other proposed plate models in the literature.

The second objective is the proposal of a quasi-3D and 2D shear deformation theory of FG sandwich beams with four unknowns for the bending analysis of FG sandwich beams.

The governing equations in the beam and the FG plate are derived using the principle of virtual works. Analytical solutions and dispersion relations are obtained by solving an eigenvalue problem using the Navier solution.

A parametric study was made in order to quantify the factors governing the mechanical behavior of this type of FGM structures and to compare the results obtained with those available in the literature.

Keywords:

Functionally graded materials, High order theory, Elastic foundation, Thermal buckling of plates, Quasi-2D and quasi-3D theories, Sandwich FG beams, Principle of Virtual Works.

Résumé

Le but de cette thèse est de proposer des théories pour les analyses de stabilité thermique des structures sandwich FGM reposant sur des fondations élastique ainsi le problème de la flexion des poutres sandwich en FGM en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

A travers ce travail on s'est fixé deux objectifs principaux, Le premier objectif principal de ce travail a été de définir un modèle analytique basé sur la théorie de déformation de cisaillement pour l'étude de flambement thermique des plaques sandwiches en matériaux à gradient évalué sous diverses distributions de température à travers l'épaisseur, reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak), en utilisant une théorie d'ordre élevé (HSDT) et de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles des plaques proposés dans la littérature.

Le deuxième objectif est la proposition d'une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D des poutres FG sandwich à quatre inconnus pour l'analyse de la flexion des poutres FG sandwich.

Les équations d'équilibre dans la poutre et la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels. Les solutions analytiques et les relations de dispersion sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

Une étude paramétrique a été faite afin de quantifier les facteurs régissant le comportement mécanique de ce type de structures FGM, et de comparer les résultats obtenues à ceux disponibles dans la littérature.

Mots-clés : Matériaux fonctionnellement gradués, Théorie d'ordre élevé, Fondation élastique, Flambement thermique des plaques, Théories quasi-2D et quasi-3D, Poutres FG sandwich, Principe des Travaux virtuels.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Aperçu général sur les matériaux composites et les structures sandwich	
I.1	Introduction..... 4
I.2	Définition d'un matériau composite 4
I.3.	Classification des matériaux composites: 5
I.4	domaine d'application des matériaux composites 6
I.5	Constituent des matériaux composites 6
I.5.1	Les renforts 6
I.5.1.1	Fibres de verre..... 7
I.5.1.2	Fibres de carbone : 7
I.5.1.3	Fibres aramides (Kevlar)..... 8
I.5.1.4	Fibres céramiques 8
I.5.1.5	Autres types des Fibres 8
I.5.2.	Matrices..... 9
I.5.2.1.	Les thermoplastiques 10
I.5.2.2.	Les thermodurcissable..... 10
I.5.3.	Charges – additif 11
I.5.3.1.	Charges augmentant la résistance mécanique 11
I.5.3.2.	Charges ayant un rôle secondaire 11
I.5.3.3.	Additifs 11
I.6.	Architecture des matériaux composites 12
I.6.1.	Monocouches 12
I.6.2.	Stratifié..... 13
I.6.3.	Sandwichs 13
I.6.3.1.	Eléments constituant les matériaux sandwichs 14
I.6.3.2.	Mode d'endommagement et ruine des structures sandwichs..... 15
	a- Flambement généralisé des peaux 15
	b- Rupture des peaux en traction ou en compression 16
	c- Modes locaux de rupture 16
	d- Rupture de l'âme en cisaillement 16
	e- Flambement généralisé de l'âme ou « crimping » 17
	f- Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling » : 17
	g- Dégradation de l'adhésive..... 8

I.7.	Les avantages et les inconvénients des matériaux composites	18
I.7.1.	les avantages	18
I.7.2.	les inconvénient	19
I.8.	Conclusion	19

Références bibliographiques chapitre.I.....20

Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

II.1	Introduction.....	23
II.2.	Définition et Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	23
II.3.	Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels	25
II.4.	Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	26
II.4.1.	Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	27
II.4.2.	Frittage et infiltration (Sintering)	27
II.4.3.	Compaction sèche des poudres.....	28
II.4.4.	Projection plasma (Plasma projection)	28
II.4.5.	La métallurgie des poudres (Powder metallurgy) PM.....	29
II.4.6.	Dépôts physique ou chimique en phase vapeur (C.V.D / P.V.D).....	29
II.4.7.	Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	30
II.5.	Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel.....	30
II.6.	Lois régissant la variation des propriétés effectives des FGMs (homogénéisation) ..	31
II.6.1.	Distribution des fractions volumiques.....	33
II.6.1.1.	Loi de mélange en puissance P-FGM	33
II.6.1.2.	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	35
II.6.1.3.	Loi de mélange exponentielle E-FGM.....	37
II.6.2.	Modèles micromécaniques des FGM (homogénéisation)	38
II.6.2.1.	Modèle de Mori-Tanaka	38
II.6.2.2.	Modèle de Voigt (la loi des mélanges).....	39
II.6.2.3.	Autres modèles micromécaniques des FGM	39
II.10.	Conclusion.....	41

Références bibliographiques chapitre.II.....42

Chapitre III : Analyse des structures FGM par les théories de l'élasticité

III.1	Introduction.....	46
III.2.	Les théories classiques de déformations (Classical Theory).	46

III.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	46
III.2.2. La théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT) :.....	46
III.3. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT -First Shear Deformation Theory) :	47
III.3.1. Théorie des plaques du premier ordre	47
III.3.2. Théorie des poutres du premier ordre (Timoshenko TBT)	48
III.4. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT. High Shear deformation Theory) :	49
III.4.1. Théorie des plaques d'ordre élevé.....	49
III.4.2. Théorie des poutres d'ordre élevé :.....	50
III.4.3. Les différentes théories (fonction de cisaillement $f(z)$).....	52
III.4.4. Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D).....	56
III.4. II.5. Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT):	56
II.6. Conclusion	58
Références bibliographiques chapitre.III.....	59

**Chapitre IV : Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en
FGM sur des fondations élastiques**

IV.1 Introduction.....	63
IV.2. Configuration géométrique	63
IV.3. Propriétés matérielles de la plaque FGM	64
IV.4. Cinématique et équations constitutives.....	65
IV.4.1. Champs de déplacement.....	65
IV.4.2. Champs de déformation	66
IV.4.3. Équations constitutives	67
IV.5. Équations d'équilibres.....	68
IV.6. Solution analytique exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée.	71
IV.7. Flambement thermique des plaques sandwich FG:.....	72
IV.7.1. Variation uniforme de la température	72
IV.7.2. Variation linéaire de la température	72
IV.7.3. Variation non linéaire de température.....	73
IV.8. Résultats et Discussions	73
IV.8.1. Etudes comparatives et validation des résultats	74
IV.8.2. Étude des paramètres d'une plaque (P-FGM) simplement appuyée.....	81

IV.8.2.1 : Influence du rapport géométrique (b/a) et fondations élastique sur la température critique de flambement.....	81
IV.8.2.2 : Influence du rapport (a/h) sur la température critique de flambement	82
IV.8.2.3 : Influence de l'indice matériel (k) sur la température critique de flambement.....	84
IV.8.2.4 : Influence du paramètre de Pasternak (k_g) sur la température critique de flambement.....	86
IV.8.2.5 : Influence du paramètre de Winkler (k_w) sur la température critique de flambement.	87
IV.9. Conclusion	89
Références bibliographiques chapitre.IV.....	90
Chapitre V : Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM	
V.1 Introduction.....	92
V.2. Configuration géométrique.....	92
V.3. Cinématique et équations constitutives	92
V.3.1. Champs de déplacement.....	92
V.3.2. Champs de déformation.....	93
V.3.3. Équations constitutives.....	93
V.4. Équations d'équilibres	94
V.5. Solution analytique pour les poutres sandwich FGM simplement appuyées.....	96
V.6. Résultats et discussions	98
V.6.1. Etude comparative	98
V.6.2. Etude paramétrique.....	102
V.6.2.1 : Influence du rapport des modules d'élasticité E_c/E_m sur la variation des flèches adimensionnelles	102
V.6.2.2 : Influence du rapport L/h sur la variation des flèches adimensionnelles	103
V.6.2.3 : Influence de l'indice matériel sur la variation des flèches adimensionnelles	105
V.7. Conclusion.....	106
Références bibliographiques chapitre.V.....	107
Conclusion Générale et perspectives	108

Liste des notations

Liste des notations

P	Propriétés mécaniques
V	Fraction volumique
T	Température
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
α	Coefficient de dilatation thermique
P_i	Propriétés mécaniques du constituant i
V_i	Fraction volumique du constituant i
P_c	Propriétés mécaniques de la céramique
V_c	Fraction volumique de la céramique
P_m	Propriétés mécaniques du métal
V_m	Fraction volumique du métal
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
$E(z)$	Module de Young en fonction de z
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de z
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de z
p	Paramètre matériel
h	Épaisseur de la plaque
a	Largeur de la plaque
b	Longueur de la plaque
$P(z)$	Propriétés mécaniques en fonction de z
G	Module de cisaillement
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ou poutre.
ϕ_x, ϕ_y	Rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$g(z)$	Première dérivée de la fonction $f(z)$
$g'(z)$	Première dérivée de la fonction $g(z)$
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement

Liste des notations

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Contraintes normales
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations transversales
ρ	Masse volumique
$K, k_1, k_2, \alpha, \beta$	coefficients dépendent de la géométrie
A, B	Coefficients dépendent de la solution de Navier
C_{ij}, Q_{ij}	Coefficient de rigidité élastique
i et j	Nombres naturels
k_w	Paramètre de Winkler
k_g	Paramètre de pasternak
δU	variation de l'énergie de déformation
δV	variation du travail externe
δU_f	Variation du travail de la fondation élastique
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$	Variation du champ de déplacements
$N_{xx}, N_{yy}, N_{zz}, N_{xy}$	Efforts normaux
$N_{xx}^T, N_{yy}^T, M_{xx}^T, M_{yy}^T, P_{xx}^T, P_{yy}^T$	Les efforts et les moments dus au chargement thermique
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion dans la plaque
P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}	Moments supplémentaires dus au cisaillement transverse
Q_{yz}, Q_{xz}	Effort de cisaillement
q	Charge mécanique
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
F_{ii}	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
T_c	Température de la face supérieure (céramique)

Liste des notations

T_m	Température de la face inférieure (métallique)
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	Paramètres arbitraires
q_{mn}	Charge transversale
L_{ij}, S_{ij}	Composants de la matrice de rigidité
$\{ \}$	Vecteur
$[]$	Matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
E_c/E_m	Rapport d'orthotropie de la poutre
a/h	Rapport de la longueur sur l'épaisseur de la plaque ou poutre.
a/b	Rapport de la longueur sur la largeur de la plaque.

Liste Des Figures

Chapitre I : Aperçu général sur les matériaux composites et les structures sandwichs

Figure I.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite.....	4
Figure I.2 : Classification des matériaux composites.	5
Figure I.3 : Les différents types des renforts	6
Figure I.4 : Fibre de verre.	7
Figure I.5 : Fibre de carbone.....	7
Figure I.6 : Fibres d'aramides.	8
Figure I.7 : Différentes familles de matrices	9
Figure I.8 : Matériau composite monocouche.....	12
Figure I.9 : Schéma illustratif d'un matériau composite stratifié	13
Figure I.10 : Matériaux sandwichs à âmes pleines.....	15
Figure I.11 : Matériaux sandwichs à âmes creuses	15
Figure I.12 : Flambement généralisé des peaux du sandwich	16
Figure I.13 : Rupture des peaux en traction ou en compression	16
Figure I.14 : Modes locaux de rupture par indentation.....	16
Figure I.15 : Rupture de l'âme en cisaillement	17
Figure I.16 : Flambement généralisé de l'âme du sandwich	17
Figure I.17 : Flambement localisé « wrinkling »	17
Figure I.18 : Flambement localisé «damppling»	18
Figure I.19 : Type de dégradation de l'adhésif	18

Chapitre II : généralités sur les matériaux a gradient de propriété

Figure II.1 : Schéma de la variation continue de la microstructure.....	23
Figure II.2 : séparation de l'interface Céramique-Métal due aux contraintes thermiques	24
Figure II.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	25
Figure II.4 : La distribution composante des matériaux.	26
Figure II.5 : Protection thermique.	26
Figure II.6 : Principe de la méthode coulage en bande.....	27
Figure II.7 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma.....	28
Figure II.8 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres	29
Figure II.9 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	29

Figure II.10 : Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel	31
Figure II.11 : Géométrie d'une structure FGM : (a). Plaque, (b). Poutre).....	32
Figure II.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	34
Figure II.13 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	36
Figure II.14 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	38
Figure II.15 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière	38

Chapitre III : I 'analyse des structures FGM par les théories d'élasticité

Figure III.1 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté: Des Plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) [6] Des poutres selon les hypothèses de la théorie classique d'Euler-Bernoulli (CBT)	47
Figure III.2 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté : Des Plaques selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin [18] - Des poutres selon l'hypothèse de la théorie du premier ordre de Timoshenko (TBT).....	49
Figure III.3 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté - Des Plaques et des poutres selon l'hypothèse de la théorie d'ordre élevé.....	51
Figure III.4 : Comparaison des différentes théories d'ordre élevé (HSDT) avec (FSDT) et (CPT).....	55
Figure III.5 : Comparaison entre différentes théories (Variation de $f(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur).....	55
Figure III.6 : Comparaison entre différentes théories (Variation de $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur).....	55
Figure III.7 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.	56

Chapitre IV : Etude analytique de la stabilité thermique des plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Figure IV.1 : Géométrie de la plaque sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique.....	64
Figure IV.2 : Effet du rapport géométrique (b/a) et des paramètres des fondations élastiques sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich a trois couches (2-1-2) FGM ($k=2$, $a/h=50$)..	82
Figure IV.3 : Variation de la température critique de flambement en fonction du rapport côté-épaisseur a/h de différents types de plaques sandwich FGM sous chargement thermique (uniforme, linéaire et non linéaire).....	84

Figure IV.4 : Variation de la température critique de flambement en fonction de l'indice matériel k pour différents types de plaques sandwich FGM sous chargement thermique (uniforme, linéaire et non linéaire) ($a/h=10$). 86

Figure IV.5 : Effet des paramètres de la fondation élastique (Paramètre de Pasternak) sur la température critique de flambement de la plaque sandwich FGM pour divers chargements thermiques ($a/h=50$).. 87

Figure IV.6 : L'effet des paramètres de la fondation élastique (Paramètre de Winkler) sur la température critique de flambement de la plaque sandwich FGM pour divers chargements thermiques ($a/h=50$).. 88

Chapitre V : Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

Figure V.1 : Géométrie et coordonnées de la poutre sandwich FG. 90

Figure V.2 : Influence du rapport des modules d'élasticité E_c/E_m sur les flèches adimensionnelles des poutres FG sandwich simplement sur appuyées pour différentes valeurs de l'indice matériel k 103

Figure V.3 : Influence du rapport (L/h) sur les flèches adimensionnelles des poutres sandwich FG simplement appuyées pour différentes valeurs de E_c/E_m , $k=2$ 105

Figure V.4 : Variation de la flèche transversale adimensionnelle w par rapport à l'indice matériel k pour différent types des poutres sandwich FG ($L/h=20$). 106

Liste Des Tableaux

Chapitre I : aperçu général sur les matériaux composites et les structures sandwichs

Tableau I. 1 : Caractéristiques des résines thermoplastiques 10
Tableau I. 2 : Caractéristiques des résines thermodurcissables 10
Tableau I. 3 : Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable . 11

Chapitre II : généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Tableau II. 1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal..... 24
Tableau II. 2 : Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM.. 40

Chapitre III : I ‘analyse des structures FGM par les théories d’élasticité

Tableau III. 1 : Quelques modèles de fonction de forme $f(z)$ présentées par la littérature pour la théorie HDST.. 54

Chapitre IV : Etude analytique de la stabilité thermique des plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Tableau IV.1 : Comparaison de la température critique de flambement non dimensionnelle d’une plaque sandwich FGM sous variation uniforme de température sans fondation élastique par rapport au rapport (a/h) et l’indices de gradient k 75
Tableau IV.2 : Comparaison de la température critique de flambement non dimensionnelle d’une plaque sandwich FGM sous variation non-linéaire de température sans fondation élastique par rapport au rapport (a/h) et de gradient k 76
Tableau IV.3 : Comparaison de la température critique de flambement non dimensionnelle d’une plaque sandwich FGM sous variation linéaire de température sans fondation élastique par rapport au rapport (a/h) et l’indices de gradient k 77
Tableau IV.4 : L’effet des paramètres de la fondation élastiques sur la différence de température critique de flambement T_{cr} , des plaques sandwich en FGM sous chargement thermique ($k=2, a/h=50$)..... 78
Tableau IV.5 : effets de fondation sur la variation de la température critique de flambement T_{cr} d’une plaque FGM carrée simplement appuyée sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l’indice de puissance « k » et du rapport côté / épaisseur..... 79
Tableau IV.6 : Effets de fondation sur la variation de la température critique de flambement T_{cr} d’une plaque FGM carrée simplement appuyée sous élévation linéaire de température pour différentes valeurs de l’indice de puissance « k » et du rapport côté / épaisseur..... 80
Tableau IV.7 : Température critique de flambement T_{cr} d’une plaque sandwich FGM sous variation de température (uniforme, linéaire et non linéaire) pour différentes valeurs de l’indice de loi de puissance k et du rapport d’aspect a/b . ($a/h=10$)..... 81

Chapitre V : Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

Tableau IV.1 : Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z = 0$). 99

Tableau IV.2 : Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle σ_x d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z = 0$) 100

Tableau IV.3: Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle w d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$) 101

Tableau IV.4 : Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle σ_x d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$). 101

Tableau IV.5 : Comparaison de la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$) 101

INTRODUCTION GENERALE

L'allègement des structures constitue un enjeu majeur compte tenu des conséquences induites en termes d'économie d'énergie. L'utilisation de matériaux nouveaux permet ces gains de masse, mais les structures ainsi fabriquées sont rayonnantes et peu isolantes. La réduction de masse et le comportement mécanique dans un environnement à haute température sont ainsi difficiles à concilier.

Les matériaux composites constituent une alternative aux matériaux conventionnels, principalement en raison de leur haute résistance et rigidité spécifique, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions. Cette configuration fournit à la structure résultante à la fois une extrême légèreté et de bonnes propriétés mécaniques, ce qui explique l'emploi croissant de ce type de matériaux dans des secteurs industriels de pointe tels que le domaine des transports où l'allègement des structures constitue un enjeu majeur. Cependant, du fait de la présence d'éléments minces et/ou élancés (peaux, renforts, ...), de tels matériaux sont sensibles aux chargements de compression (qui mènent au flambement) et de manière générale aux phénomènes de vibration, qui peuvent s'exprimer de manière globale mais aussi locale.

Pour ces raisons, les experts avaient prévu depuis les années 70 une généralisation rapide de leur emploi par des remplacements principaux des matériaux métalliques traditionnels. Ainsi on utilise le plus souvent ces matériaux composites dans les domaines de l'aérospatial, du naval. Du fait que les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines, puisque leur tenue aux contraintes thermiques est très limitée. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température. Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués qui constituent une solution au problème de discontinuité dû à la transition brutale de la température.

Deux objectifs seront visés à travers ce travail.

Le premier objectif principal de ce travail a été de définir un modèle analytique basé sur la théorie de déformation de cisaillement pour l'étude de flambement thermique des plaques sandwiches en matériaux à gradient évalué sous diverses distributions de température à travers l'épaisseur, reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak), en utilisant une théorie d'ordre élevé (HSDT) et de confronter les

résultats obtenus aux résultats des autres modèles des plaques proposés dans la littérature..

La seconde partie de cette thèse traite de l'analyse de la flexion des poutres FG sandwich afin de vérifier l'exactitude de la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D des poutres FG sandwich actuelle dont le nombre des inconnus est seulement quatre. L'influence des différents paramètres tels que le paramètre d'inhomogénéité (indice matériel), le rapport longueur-épaisseur (L/h) et le rapport contraste de phase (module de Young) sur le comportement en flexion des poutres sandwich fonctionnellement graduées sont présentés.

La présente thèse est articulée autour de cinq chapitres :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux composites FGM ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse, le premier chapitre est consacré à un aperçu général sur les matériaux composites et les structures sandwichs. Ce chapitre traite de deux volets : Un premier volet où les matériaux composites sont présentés d'une manière générale, la deuxième partie présente les structures sandwichs ainsi que les modes de dégradation de ces structures.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une revue globale sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs évolutions, leurs techniques d'élaboration et les domaines d'utilisation, ensuite une synthèse bibliographique donnant un aperçu général des méthodes de la détermination de leurs caractéristiques mécaniques, basant sur les aspects fondamentaux du comportement des matériaux hétérogènes

Le chapitre trois concerne l'état de l'art sur les différentes théories étendues à l'analyse des plaques et poutres en FGM et leurs modèles, une lecture critique de leurs principes de base et leurs hypothèses sont aussi discutés. On trouve également une présentation détaillée des théories d'ordre supérieur. Bien évidemment, le nombre de variables dépend de la théorie adaptée, ce qui augmente considérablement le taux de calculs. Une source de nombreux travaux récents et complémentaires introduisant l'effet de la déformation normale est présentée à la fin de ce chapitre.

Le quatrième chapitre un modèle analytique basé sur la théorie de déformation de cisaillement pour l'étude de flambement thermique des plaques sandwichs en FGM sous diverses distributions de température à travers l'épaisseur, reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak), en utilisant une théorie d'ordre élevé est présenté.

Le cinquième chapitre, plusieurs exemples numériques concernant l'analyse de la flexion des poutres FG sandwich sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de

la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D des poutres FG sandwich proposée. Enfin, une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

***CHAPITRE I : APERÇU GENERAL SUR LES
MATERIAUX COMPOSITES ET LES
STRUCTURES SANDWICH***

I.1.Introduction

La technologie moderne nécessite l'emploi de matériaux innovants, caractérisés par les exigences en termes de performances techniques, d'économie d'élaboration, de fiabilité, de durabilité et d'impact environnemental (légers, résistants, rigides et surtout adaptables à des utilisations spécifiques), les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. La naissance de produits nouveaux tels que les matériaux composites ouvre un large éventail d'application, et répond à des utilisations bien spécifiques (l'élaboration du matériau se réalise selon la fonction avancée) [1]. Les matériaux composites sont une classe de matériaux avancés, constitués d'un ou plusieurs matériaux combinés dans des états solides avec des propriétés physiques et chimiques distinctes [2].

L'utilisation des matériaux composites est devenue indispensable dans des nombreux secteurs tel que l'aéronautique, l'industrie automobile, le domaine de réalisation et réhabilitation des constructions et les constructions navales.

I.2.Définition d'un matériau composite

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs, (figure I.1). On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements des renforts qui sont noyés dans une matrice, entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée interface. Ces matériaux composites sont la plupart du temps hétérogènes et anisotropes [3].

La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces.

Les composites trouvent leurs principales applications dans le transport aérien (civil et militaire), maritime et ferroviaire, le bâtiment, l'aérospatial ainsi que les sports et loisirs.

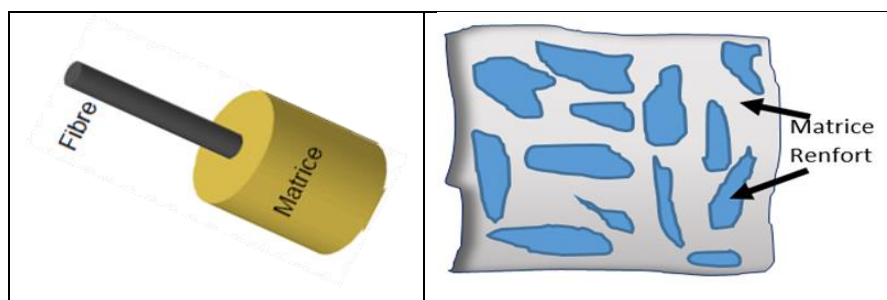


Figure. I.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite [4].

I.3. Classification des matériaux composites

La nature du matériau constituant la matrice permet de répertorier trois grandes classes de composites, considérées ici par ordre croissant de tenue en température : les composites (CMP), les composites (CMM) et les composites (CMC) (figure I.2). Il est alors possible d'associer à ces trois types de matrice soit des renforts discontinus, dont toutes les dimensions sont très inférieures aux dimensions de la pièce, soit des renforts continus, dont au moins une dimension est du même ordre de grandeur qu'une dimension de la pièce.

La fabrication des composites (CMP) emploie deux types de matrices : les résines thermodurcissables qui représentent 75% des (CMP) actuels (époxyde, polyester, vinylester, polyuréthane...), et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide...) qui sont moins utilisées. L'utilisation des (CMP) reste limitée au domaine de températures inférieures à 200°C. Pour des applications plus haute température, on fait appel aux composite (CMM) jusqu'à 600°C. Les métaux ou alliages métallique utilisés dans la fabrication des (CMM) sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé. Ainsi, l'aluminium le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utilisés [3].

Enfin, lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composites à matrice céramique. Dans ce type de comporte, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium assemblées par tissage multidimensionnel. Ce renfort poreux est infiltré par la matrice (silice, carbone, carbure de silicium) qui se trouve soit en phase gazeuse soit en phase liquide

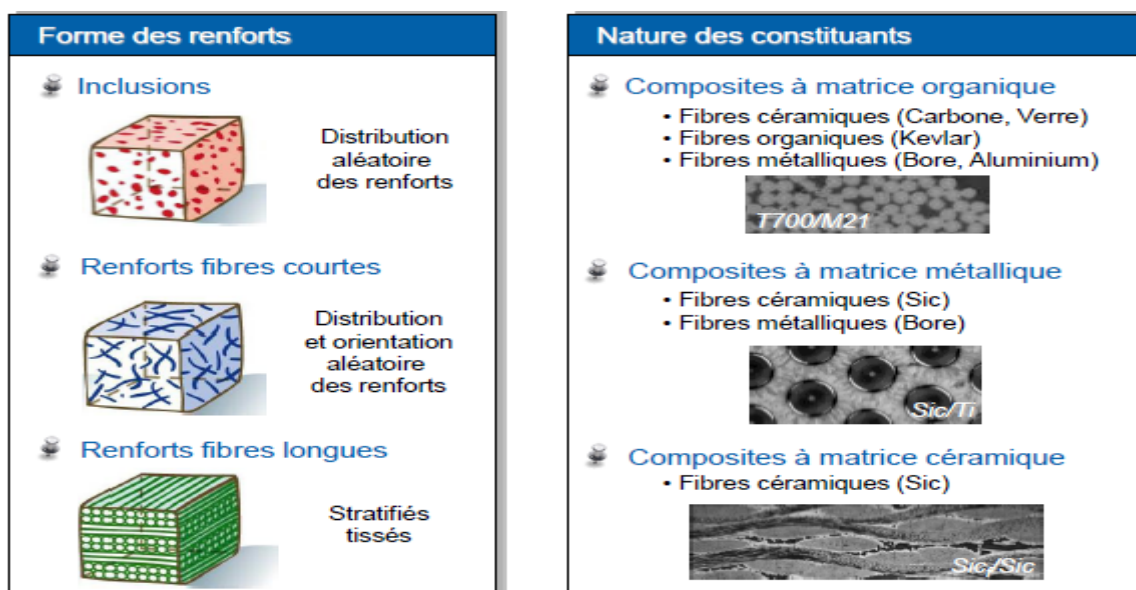


Figure I.2 : Classification des matériaux composites

I.4. domaine d'application des matériaux composites

Les matériaux composites sont actuellement très utilisés dans l'industrie et particulièrement dans les domaines aérospatial et aéronautique, où les gains de masse sur structures sont stratégiques. On notera toutefois que, même si l'industrie aéronautique reste un acteur majeur du développement des structures hautes performances, les matériaux composites sont également très utilisés dans le domaine du sport, du génie civil, du domaine naval, du secteur automobile, du domaine éolien (principal consommateur actuel de fibres de carbone) et du domaine pétrolier off-shore (réalisation de risers composites) [5].

I.5. Constituent des matériaux composites

Le matériau composite : est constitué d'une matrice appelée "matrice" et de l'ossature appelée "renfort". Les renforts fibreux sont disposés de façon judicieuse dans la matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations [6-7].

I.5.1. Les renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite se présentent sous les formes suivantes linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [8].

Les différents types de renforts sont cités dans l'organigramme ci-dessous :

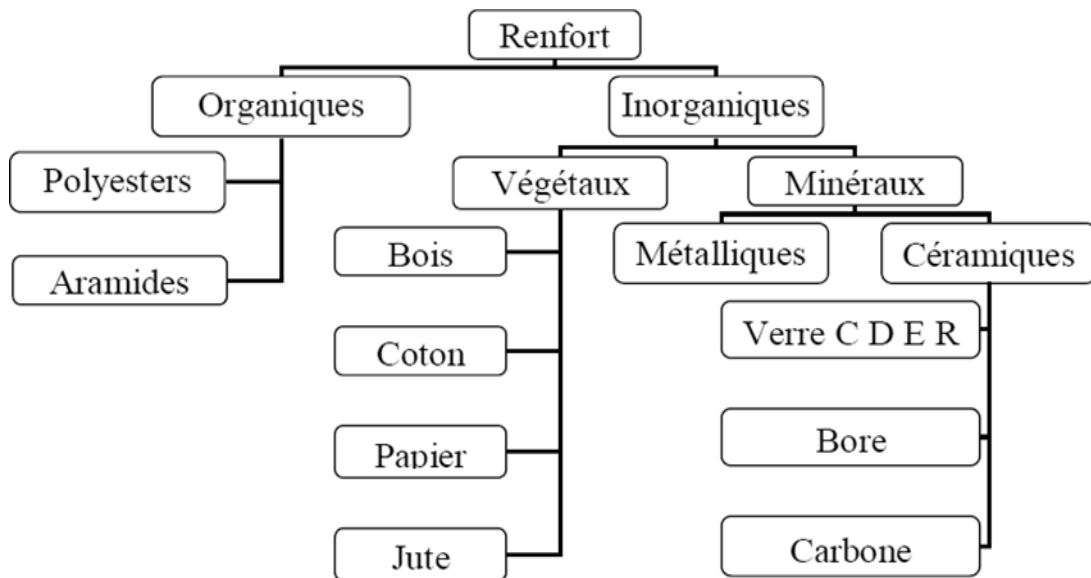


Figure I.3 : Les différents types des renforts [6].

Les fibres se présentent sous plusieurs formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes, etc.) et c'est leur arrangement et leur orientation

qui permettent de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites [9].

I.5.1.1. Fibres de verre

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites. La fibre de verre est un filament de verre extrêmement fin (de l'ordre de 10 micromètres) [10]. Elle est obtenue à partir de silice (SiO_2) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore) (figure I.4). On distingue trois types de fibres de verre :

Verre E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes.

Verre R : pour les composites hautes performances.

Verre D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).

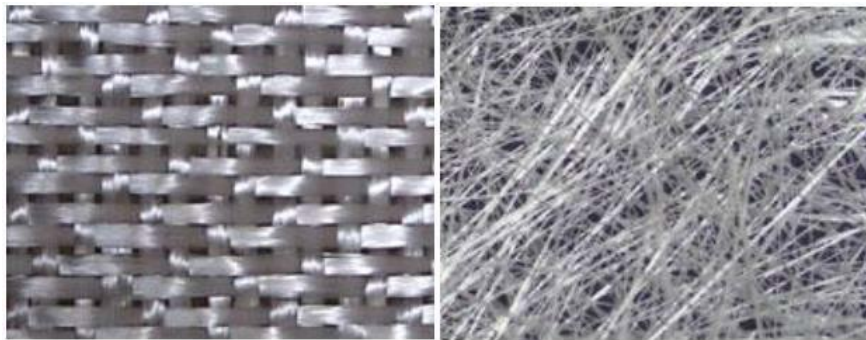


Figure I.4 : Fibre de verre

I.5.1.2. Fibres de carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances. Les fibres de carbone particulièrement fines (de 5 à 10 μm de diamètre) ont un coefficient d'élasticité élevé de 200 à 800 GPa [4]. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile) (figure I.5).

Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres de carbone [11].

- Fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C.
- Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.



Figure I.5 : Fibre de carbone

I.5.1.3. Fibres aramides (Kevlar)

On la nomme souvent « Kevlar », qui est la marque de son créateur, Dupont d'où est issue la chimie des polyamides aromatiques à liaisons amides dont les propriétés sont différentes des polyamides aliphatiques (figure I.6).

Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes [12]



Figure I.6 : Fibres d'aramides

- Les fibres à faible module d'élasticité (70 GPa) : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles.
- Les fibres à haut module d'élasticité (130 GPa) : utilisées pour les composites HP.

I.5.1.4. Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres ont des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Les fibres céramiques les plus utilisées sont [13] :

- fibres de Carbure de Silicium.
- fibres de Bore.
- fibres de Bore carbure de silicium.

I.5.1.5. Autres types de fibres

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement ont des faibles valeurs du module d'élasticité et de la contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques [14].

Généralement, leur utilisation est réservée à une recherche de :

- produits à bas prix de revient,

- produits à haute isolation thermique,
- produits à bonne conductibilité thermique ou électrique,
- produits à haute absorption acoustique, etc.

Parmi ces fibres nous avons :

1. Les fibres d'origine végétale, telles que le bois utilisé sous forme de fibres orientées, le sisal, le jute, le lin, etc.
2. Les fibres synthétiques, telles les fibres polyester (tergal, dacron, térylène), les fibres polyamides, les fibres polyéthylène, les fibres polypropylène, etc.
3. Les fibres métalliques, comme les fibres d'acier, de cuivre, d'aluminium. Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermique et électrique et leurs caractéristiques thermomécaniques élevées.

I.5.2. Matrices

La matrice est l'un des composants de base des matériaux composites. C'est un matériau organique léger, facilement déformable, elle a pour rôle de : lier les fibres renforts, de garantir une répartition spatiale homogène des renforts, transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir, fournir la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit. La matrice doit avoir une masse volumique faible afin de conserver au composite des caractéristiques mécaniques élevées [15-16].

La figure I.7 représente les différentes familles de matrices :

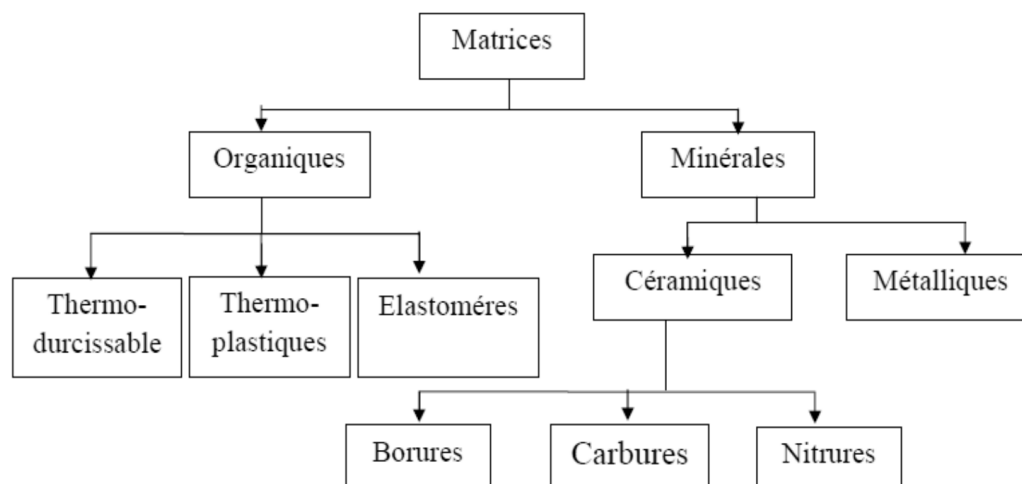


Figure I.7 : Différentes familles de matrices.

I.5.2.1. Les thermoplastiques

Les matrices (résines TP) ont des propriétés mécaniques faibles. Les thermoplastiques sont des chaînes de polymères interconnectées qui sont recyclables. Ces résines sont dures et solide et nécessitent une transformation à très hautes températures. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polystyrène, polypropylène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau I.1 [13].

Tableau I.1 : Caractéristiques des résines thermoplastiques

résines	T°(C)	ρ (Kg/m ³)	σ_f^R (MPa)	E (MPa)
Polyamide	65 à 100	1140	60 à 85	1.2 à 2.5
Polypropylène	900	1200	20 à 25	1.1 à 1.4

I.5.2.2. Les thermodurcissables

Les matrices (résines TD) ont des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées par rapport aux thermoplastiques. Ces résines ont la particularité d’être mises en forme qu’une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. On retrouve dans cette famille les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, aminoplastes, furaniques) et les résines époxydes qui sont des résines thermodurcissables. Leurs caractéristiques sont présentées dans le tableau I.2.

Tableau I.2 : Caractéristiques des résines thermodurcissables [13].

Résines	T°(C)	ρ (Kg/m ³)	ε_f^R (%)	σ_f^R (MPa)	E (MPa)
Polyesters	60 à 100	1120	2 à 5	50 à 85	2.8 à 3.6
Phénoliques	120	1140	2. 5	40	3 à 5
Epoxyde	290	1100 à 1500	2 à 5	60 à 80	3 à 5

Le tableau I.3 montre les principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable.

Tableau I.3 : Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable

Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TD
Etat de base liquide	Solide prêt à l'emploi	Visqueux à polymériser
Stockage	Illimité	Réduit
Mouillabilité renforts	difficile	Aisée
Moulage	Chauffage + refroidissement	Chauffage continu
Cycle	Court	Long
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	Propreté	Emanation pour méthode humide

I.5.3. Charges – additifs

Des produits (substances inerte), minérale ou végétale qui peuvent être incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçantes). Des charges non renforçantes peuvent être également utilisées pour diminuer le coût des matrices en résine, ou des additifs, de type colorant ou agent de démoulage sont largement utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

I.5.3.1. Charges augmentant la résistance mécanique

L'objectif de l'incorporation des charges augmentant la résistance mécanique est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en [17-18] :

- Charges sphériques ;
- Charges non sphériques.

I.5.3.2. Charges ayant un rôle secondaire

Les charges ayant un rôle secondaire ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines, soit d'améliorer certaines propriétés secondaires des résines telle que la viscosité [18].

I.5.3.3. Additifs

Les additifs sont ajoutés en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage,

- Pigments et colorants,
- Agents anti-retrait,
- Agents anti-ultraviolets.

I.6. Architecture des matériaux composites

L'ensemble des procédés de mise en œuvre montre la prépondérance d'une conception des pièces en matériaux composites :

- Par surface : coques, plaques.
- Par stratification de couches successives.

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches;
 - Les stratifiés ;
 - Les sandwichs.
- Autres structures (structures 3D).

I.6.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres courtes, à fibres tissées, à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement). Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (Figure. I.8). Taux de déséquilibre très grand [19].

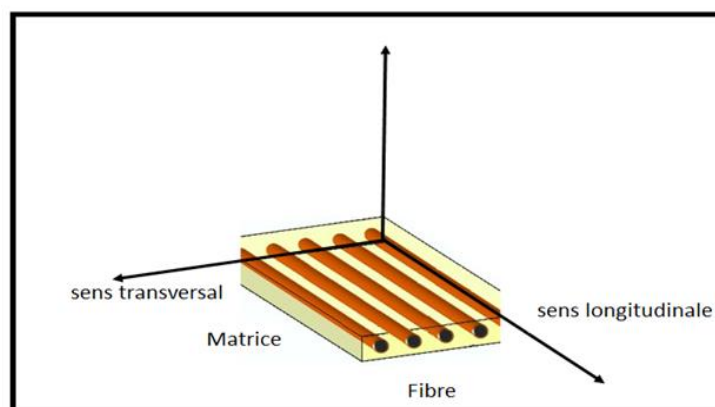


Figure I. 8 : Matériau composite monocouche

I.6.2. Stratifié

Un stratifié est constitué de l'empilement de deux ou plusieurs couches (appelées également plis) entreposées successivement, et se comportant comme une seule entité structurale. Chaque couche est formée de fibres de faible section imprégnées de résine, et est désignée par son orientation, qui est l'angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui est généralement la direction des fibres unidirectionnelles orientées à 0°) [20].

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant:

- Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents ;
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique ;
- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre ;
- Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

La désignation dépend du système d'axes choisi. Un exemple est donné à la figure I.9.

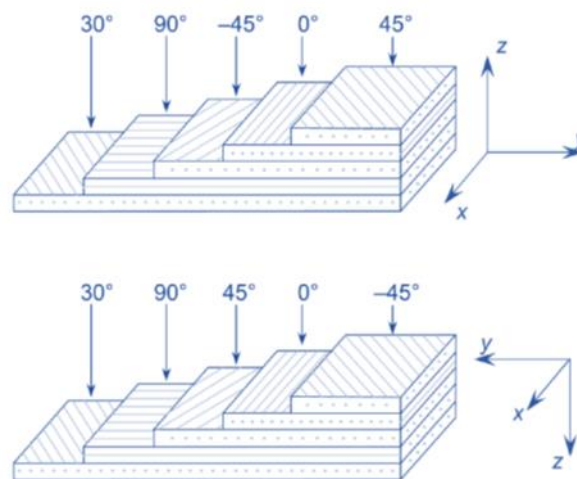


Figure I.9 : Schéma illustratif d'un matériau composite stratifié.

I.6.3. Sandwichs

Matériaux composés sont principalement constitués de deux composants nommés : deux semelles (ou peaux) constituées de matériaux à haute résistance, résister aux moments de flexion, de grande rigidité et de faible épaisseur, enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur de faible densité et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande résistance en flexion et c'est un excellent isolant thermique [21].

Dans les sandwichs, les peaux sont souvent identiques en matériaux et épaisseur. Ces structures sont appelées des sandwichs symétriques. Cependant dans certain cas spéciaux les deux peaux peuvent avoir deux épaisseurs ou deux matériaux différents, ils sont variés suivant

les conditions des chargements ou l'environnement du travail. Ces structures sont appelées des sandwichs asymétriques.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

I.6.3.1. Eléments constituant les matériaux sandwichs

A. Les peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

B. L'âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. Son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement. Les matériaux d'âme les plus utilisés se présentent principalement sous deux formes (figure I.10-I.11) [22] :

* Pour les âmes pleines :

- le balsa ou bois cellulaire ;
- diverses mousses cellulaires ;
- des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques ; - etc.

* Pour les âmes creuses, essentiellement nid d'abeilles et profilés :

- des alliages métalliques légers ;
- du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
- du papier polyamide, type papier Nomex ;

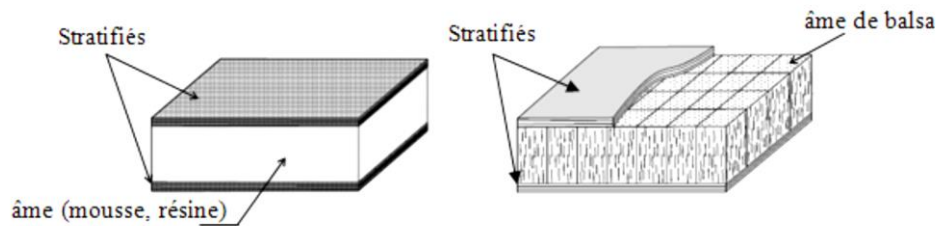


Figure I.10 : Matériaux sandwichs à âmes pleines.

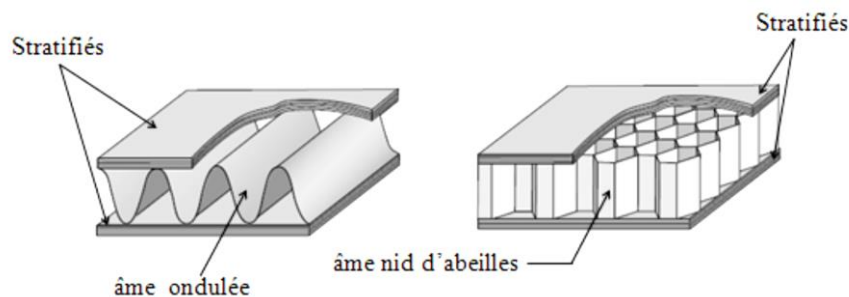


Figure I.11 : Matériaux sandwichs à âmes creuses.

C. L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage, lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

I.6.3.2. Mode d'endommagement et ruine des structures sandwichs

Les modes d'endommagement et ruine des structures sandwichs ont été étudiés par plusieurs chercheurs dans le domaine [23,24, 25, 26, et 27]. Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécanique de ces structures.

a- Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure. I.12).

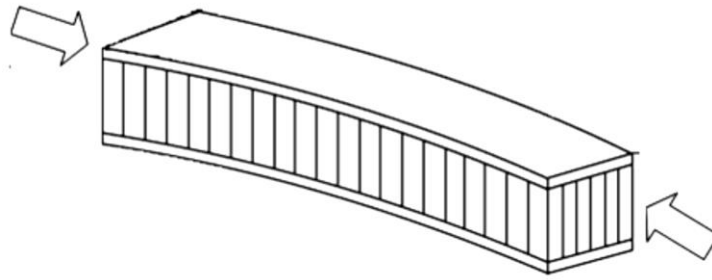


Figure I.12 : Flambement généralisé des peaux du sandwich

b- Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Figure. I.13).



Figure I.13 : Rupture des peaux en traction ou en compression [20-28]

c- Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure. I.14)

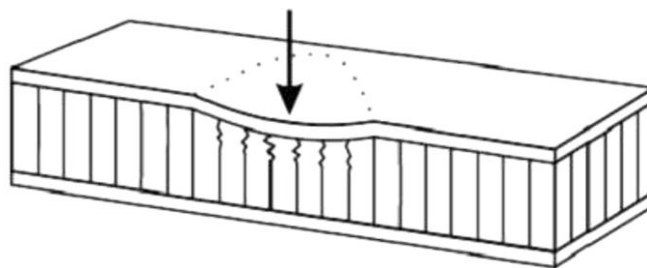


Figure I.14 : Modes locaux de rupture par indentation [20-28]

d- Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au

cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure. 1.15).

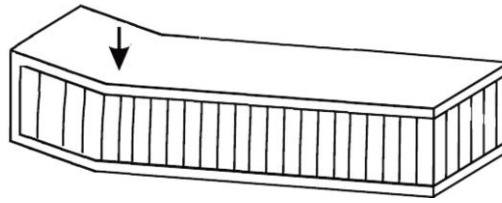


Figure I.15 : Rupture de l'âme en cisaillement [20-28]

e- Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme (Figure. 1.16).

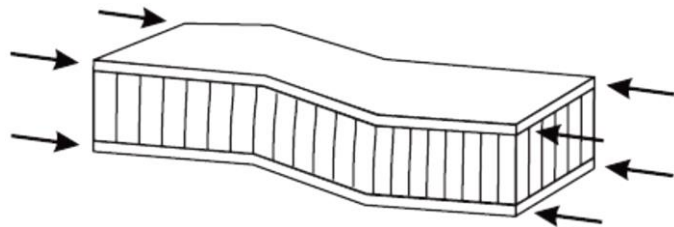


Figure I.16 : Flambement généralisé de l'âme du sandwich [20-28]

f- Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement. Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Figure. I.17), se produit.

Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Figure. I.18)

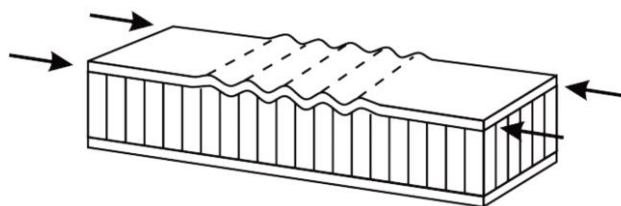


Figure I.17 : Flambement localisé « wrinkling » [20-28]

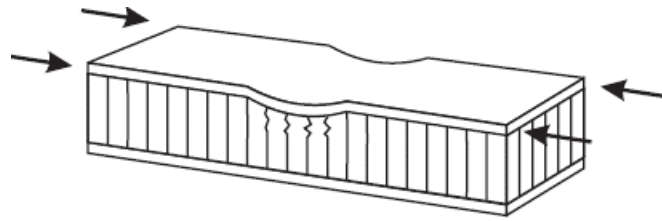


Figure I.18 : Flambement localisé «damping» [20-28]

g- Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types

- dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure. 1.19 illustre les modes de dégradation de l'adhésif.

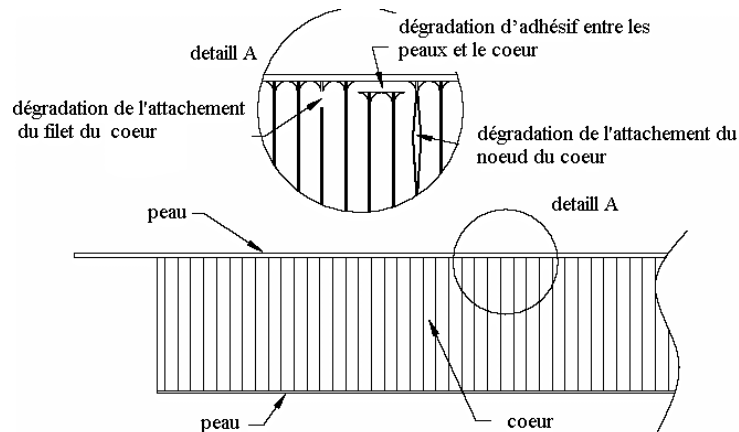


Figure I.19 : Type de dégradation de l'adhésif

I.7. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites

Les matériaux composites présentent des avantages et inconvénients.

I.7.1.les avantages

- Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit, l'avion consomme donc moins de carburant
- Ils sont bien sur insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides

- Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.
- On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande.
- Ils offrent de grandes de maniement.
- Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale.
- Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion

I.7.2.les inconvénient

- Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts.
- Une petite faille peut engendrer de grosses déformations.
- La détection de ses problèmes est difficile ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait une présentation détaillée sur les matériaux composites. Dans un premier temps, nous avons présenté leurs différents constituants (matrice, fibre), ainsi que leurs différents types, leurs propriétés, et leurs domaines d'application. Leurs inconvénients leurs avantages. Ensuite, nous avons défini les structures sandwiches : les types, leurs constituants, les sollicitations et les modes de dégradations des sandwiches. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés « FGM » tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Références bibliographiques

- [1] **Benachour Abdelkader (2010)** « Analyse des contraintes d'interface dans les poutres renforcées par des plaques composites collées sous précontrainte », *Thèse de Doctorat de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [2] **Boukhelif Zoulikha. (2020)** « Modélisation analytique de la vibration libre des plaques FGM posées sur fondation élastique », *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [3] **Brek Samir (2012)** « Modélisation numérique de la propagation de l'endommagement et de la rupture dans les matériaux composites stratifiés sous sollicitations thermomécaniques et cycliques », *Thèse de Doctorat de l'Université Hadj Lakhdar de Batna, Algérie.*
- [4] **Rebai Billel (2021)** « Contribution à l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques sandwichs en FGM en utilisant un nouveau champ de déplacement » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [5] **Ait Taleb Souad (2016)** « Analyse du comportement des poutres non – homogènes renforcées par des plaques composites » *Thèse de Doctorat de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou.*
- [6] **Menasria Abderrahmane (2018)** « Etude de l'effet de la Microstructure Sur le Flambement Thermique des Plaques Fonctionnellement Graduées » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [7] **Berthelot J.M. (1999)** « Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures».
- [8] **Laurent. G. (2008)** « Généralités sur les matériaux composites », ECN, Centre Nantes.
- [9] **Sehoul Mohammed (2017)** « Etude du comportement mécanique des plaques composite en utilisant des théories de déformations de cisaillement non-bpolynomiales » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [10] **Benahmed Abdelkrim (2018)** « Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variables » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [11] « Glossaire des matériaux composites» - carma –Actualisation octobre 2006.
- [12] **V. Reynaud, G. Subra, M. calderini (1993)** « Les matériaux composites », ENSCM.
- [13] **Saidani Kamal (2014)** « Analyse des composites sandwichs et qualification de leur intégrité vis-à-vis de la ruine » *Thèse de l'université mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.*

- [14] **Mehala Tewfik (2021)** « Contribution à l'étude des caractéristiques vibratoires des structures épaisses en matériaux composites » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [15] **Haudin J.M., (1995)** « Structures et morphologies des polymères semi-cristallins », Introduction à la mécanique des polymères », éd. C. G'Sell, J.M. Haudin, Institut National Polytechnique de Lorraine, p. 97-115.
- [16] **Kelly A., Zweben C. (2000)** « Comprehensive composite materials: polymer matrix composites », volume 2, Elsevier.
- [17] **M.I. Giannotti, M.J. Galante, P.A. Oyanguren and C.I. Vallo. (2003)** « Role of intrinsic flaws upon flexural behavior of a thermoplastic modified epoxy resin », Polymer testing, 22: 429–437
- [18] **Hami Brahim (2018)** « Elaboration et caractérisation physico-mécanique d'une structure sandwich multicouches » *Thèse de l'université M'hamed Bougara de Boumerdes.*
- [19] **Bouamama Mohamed (2019)** « Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [20] **Boussoula Abderrafik (2021)** « Modélisation du comportement thermomécanique des plaques sandwichs FGM en utilisant des théories d'ordre élevé avancé » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [21] **Bennai Riadh (2016)** « Contribution à l'étude de la vibration et la stabilité des structures fonctionnellement graduées » *Thèse de Doctorat de Université Hassiba Ben Bou Ali de Chlef.*
- [22] **Refrafi Salah (2020)** « Etude des effets des conditions hygrothermiques sur la réponse mécanique des plaques sandwichs fonctionnellement graduées en utilisant une théorie avancée des plaques » *Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.*
- [23] **Triantafillou T. C, Gibson L. J. (1987)** « Failure mode maps for foam core sandwich beams » Materials Science and Engng, 95:37-53,
- [24] **Jin Dai, Hahn H. (2003)**, « Flexural behavior of sandwich beams fabricated by vacuum-assisted resin transfer molding » composite structure, 61: 247-253,.
- [25] **Avila A. F. (2007)**, « Failure mode investigation of sandwich beams with functionally graded core » composite structures, 81: 323-330.
- [26] **Yoshi A. (1992)**, « Optimum design of advanced sandwich composite using foam core » Advanced Composite Materials, 2(4): 289-305.
- [27] **Thomesen O. T. (1995)**, « Theoretical and experimental investigation of local bending effects in sandwich plates » Composite structures, 30: 85-101.

- [28] **Kar, V.R. and Panda, S.K, (2016)** « Nonlinear thermomechanical behaviour of FGM cylindrical / hyperbolic/ elliptical shell panel with TD and TID properties », J. Press. Vessel Technol. ASME, 138(6), 061206.

***CHAPITRE II : GENERALITES SUR LES
MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES***

II.1. Introduction :

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques aux différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau à haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème d'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (functionally graded material). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [1]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales [2].

II.2. Définition et Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure II.1) ou discrète à travers l'épaisseur. Avec lesquels, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes thermiques et mécaniques au niveau des interfaces (provoquant délaminage et décollement).

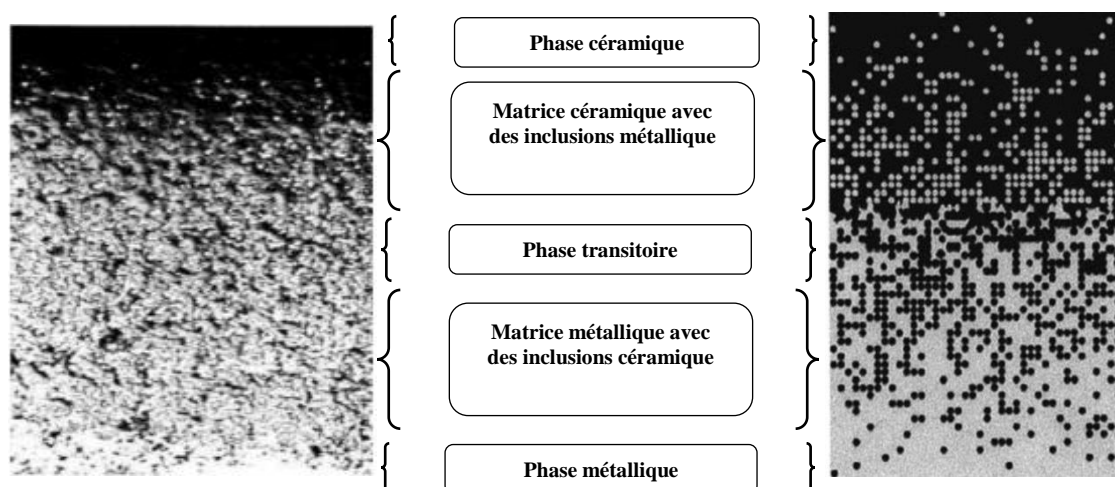


Figure. II.1. Schéma de la variation continue de la microstructure

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Le matériau à gradient de propriété (FGM) peut être élaboré en faisant varier le pourcentage de deux ou plusieurs composants (matériaux), ou en variant la microstructure d'un composant, de telles sortes, que le nouveau matériau possèdera les propriétés voulues suivant la direction désirée. C'est donc un composite, un hétérogène à caractéristiques inhomogènes à l'échelle macroscopique [3] et homogènes à l'échelle microscopique.

L'association de ces deux matériaux permet d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces, de réduire les contraintes thermiques résiduelles et de résister contre les extrêmes conditions de service. En effet, la performance de la céramique à température élevée est plus attractive que celle des métaux, ainsi différentes qualités sont requises simultanément [3].

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau II.1

Tableau II.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal. [4]

La face a haute température	Céramique	-bonne résistance thermique -bonne résistance à l'oxydation, -faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaire »	Céramique-métal	-Elimination des problèmes de l'interface. -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	métal	-bonne résistance mécanique -conductivité thermique élevée. -Très bonne ténacité

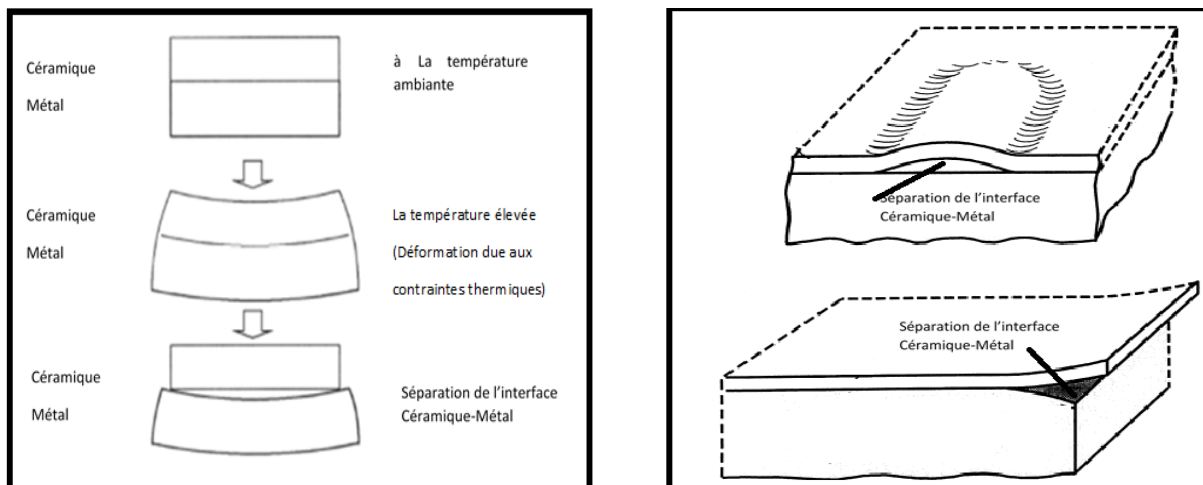


Figure II.2 : séparation de l'interface Céramique-Métal due aux contraintes thermiques.

II.3. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

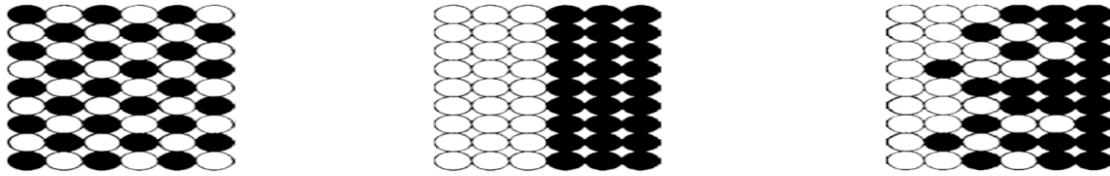
Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure II.3) [5].

Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [6].

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure. II.3. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [7]

Koizumi. M [8] à établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure II.4) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



A – Matériau composite B – Matériau composite laminaire C – Matériau à gradient de propriété

Figure II.4 : La distribution composante des matériaux [5].

La figure II.5. Montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

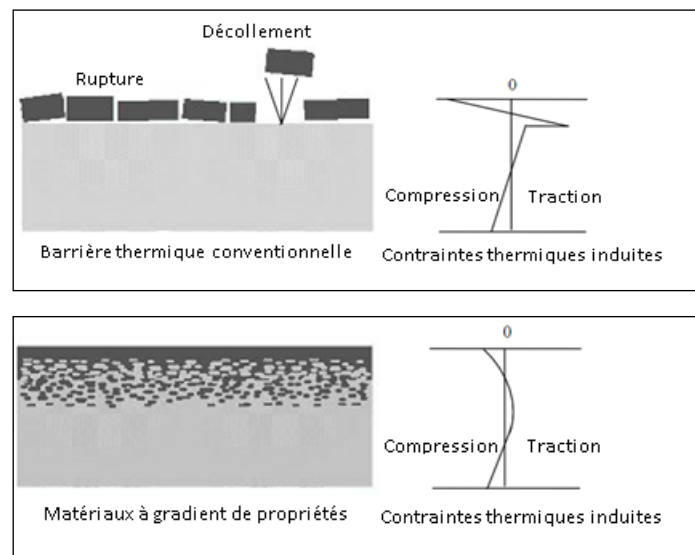


Figure II.5 : Protection thermique.

II.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication est l'un des études les plus importantes de la recherche sur les FGM. Plusieurs travaux ont été consacrés au développement des techniques de production et traitement des FGM. Les méthodes de traitement des FGM peuvent être classées en deux grandes catégories basées sur le traitement constructif et le transport de masse [9].

Dans la première catégorie, le FGM est construite couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement construits dans l'espace. L'avantage de cette technique est de fabriquer un nombre illimité de gradients. Pendant ce temps, dans la deuxième catégorie, les gradients au sein d'un composant

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

dépendent de phénomènes de transport naturel tels que l'écoulement d'un fluide, la diffusion d'espèces atomiques ou la conduction thermique. En général, les procédés d'élaboration les plus utilisés incluent le coulage centrifuge [10-11], le coulage par barbotine, le coulage en bande [11-12], le frittage et la projection plasma. Le choix de la méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matière, du type de la loi de mélange requise et de la géométrie de la composante souhaitée.

Les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales procédés d'élaboration des FGMs utilisées dans l'industrie :

II.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

La méthode de coulage en bande (Tape casting) est favorisée, du fait de faire coller facilement de grands nombres de feuilles minces d'une épaisseur uniforme entre eux. D'une manière générale, ce procédé a été effectué dans un système non aqueux [13-15].

Le processus de coulage en bande a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse Figure II.6, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM Al_2O_3-TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composants en céramique [15,16].

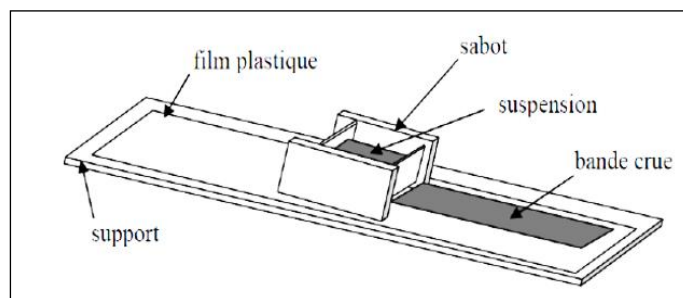


Figure II.6 : Principe de la méthode coulage en bande [17]

II.4.2. Frittage et infiltration (Sintering)

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce [18].

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [19]. Ce procédé peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

II.4.3. Compaction sèche des poudres

Dans cette technique, les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Généralement, ce procédé est suivi par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [20-21].

II.4.4. Projection plasma (Plasma projection)

Un gaz soumis à une forte température, se transforme en état ionisé. Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [21-22].

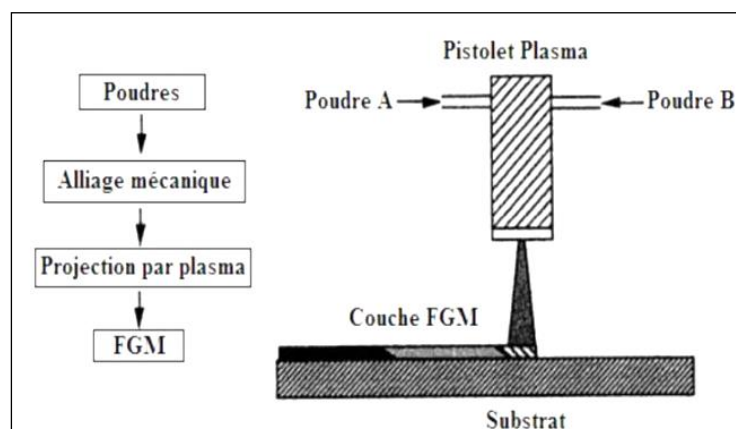


Figure II.7 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [22].

II.4.5. La métallurgie des poudres (Powder metallurgy) PM

La métallurgie en poudre est une technique pour fabriquer les matériaux fonctionnellement gradués, par trois étapes de base notamment (Figure II.8): la pesée et le mélange de la poudre (a, b), le jalonnement de la poudre pré-mélangée (c) et finalement le frittage(d) [24].

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [25-27].

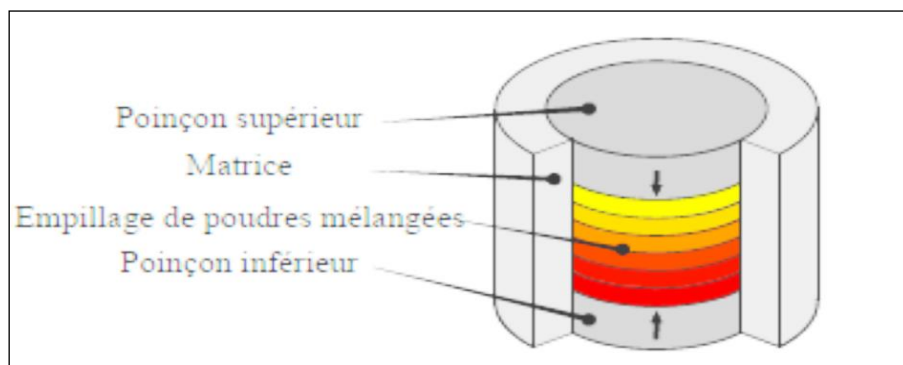


Figure II.8 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres [28]

II.4.6. Dépôts physique ou chimique en phase vapeur (C.V.D / P.V.D)

Les dépôts C.V.D ou P.V.D sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat (Figure II.9). C.V.D et P.V.D peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées, [27,28].

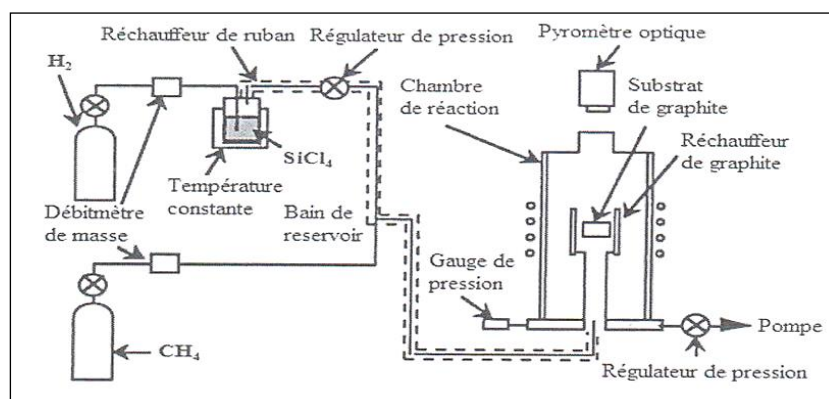


Figure II.9 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

II.4.7. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- formation du tesson ou « prise » ;
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet de :

- pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [31-32].
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

II.5. Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel

Les caractéristiques performantes des matériaux à FGM permettent plusieurs utilisations dans la technologie et l'industrie et autres domaines qui exigent une conception optimale de leurs structures. Les matériaux FGM présentent aussi une bonne résistance aux phénomènes de dégradations matérielles tels que la fatigue, l'usure, et la corrosion. L'utilisation des matériaux FGM est sans la solution la plus adéquate, d'une part pour éliminer la concentration des contraintes thermiques ou mécanique et d'autre part pour des raisons fonctionnelles telles que : l'isolation thermique et l'hygrothermique dans le matériau. La figure II.10 illustre les différents domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés selon Jha et al. [33].

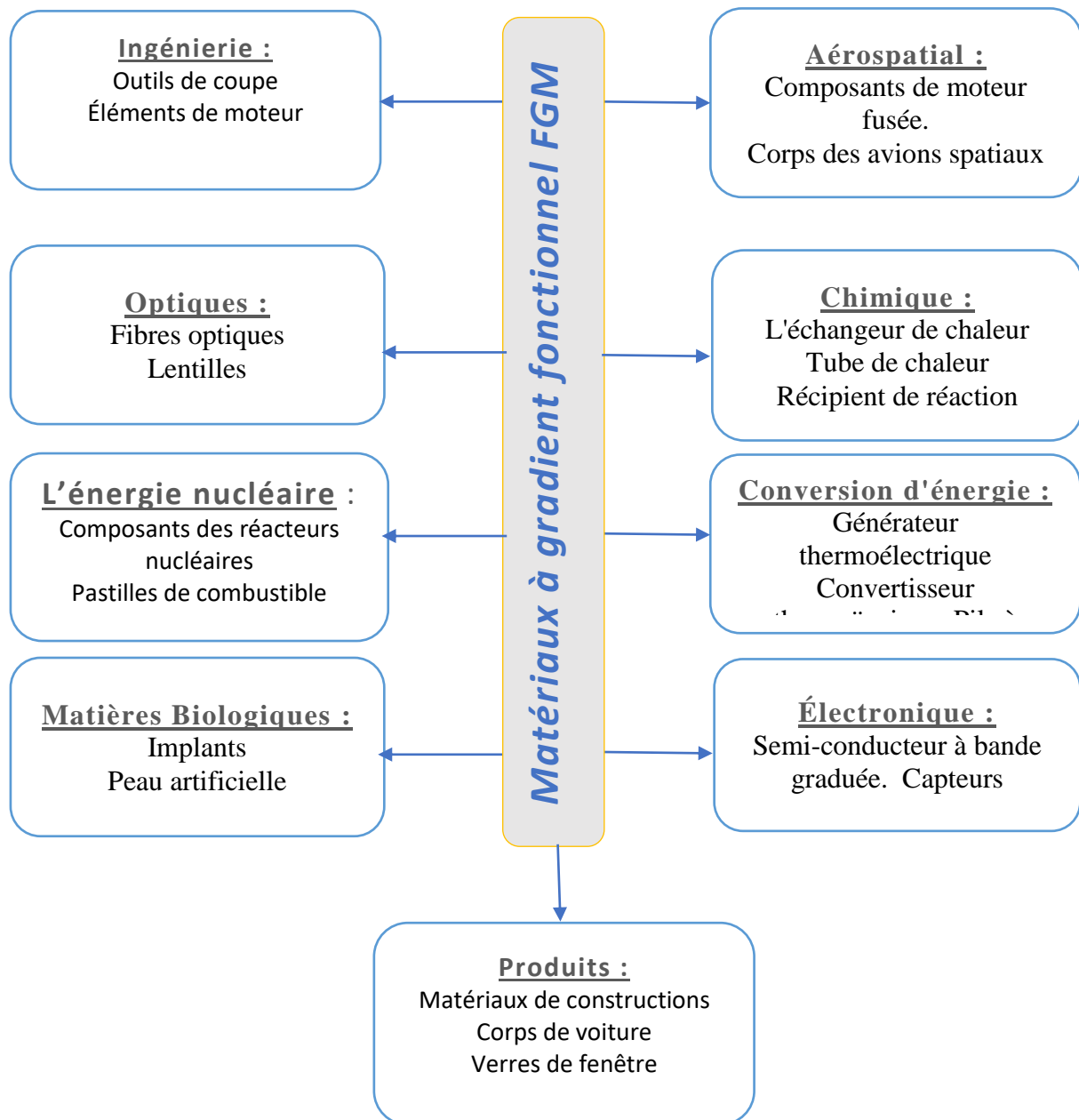


Figure II. 10 : Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel

II.6. Lois régissant la variation des propriétés effectives des FGMs (homogénéisation)

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [34].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{II.1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{II.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures en matériaux à gradient fonctionnel FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général (Fig.II.11). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{II.3a})$$

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{II.3b})$$

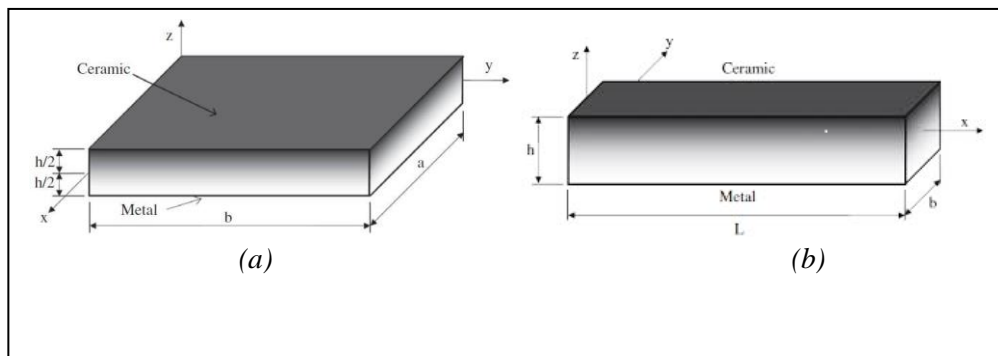


Figure.II.11 Géométrie d'une structure FGM : (a). Plaque, (b). Poutre

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Ces lois de mélange sont pratiques et simples à

utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. De ce fait plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales ont été développés, on peut citer le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka [35] ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill (self-consistent method) [36].

II.6.1. Distribution des fractions volumiques

On peut déterminer les propriétés matérielles sur la base de la distribution des fractions volumiques de différents matériaux. Il y a trois fonctions courantes pour décrire les fractions de volume (loi de puissance, loi exponentielle et loi sigmoïde).

II.6.1.1. Loi de mélange en puissance P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance [37-38] sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{II.4})$$

Où h est l'épaisseur de la plaque et k est un paramètre matériel ($0 \leq k \leq \infty$). Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$P(z) = P_1 + (P_2 - P_1)V(z) \quad (\text{II.5})$$

Où P_1 et P_2 sont respectivement les propriétés matérielles de la surface supérieure ($z = h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la structure FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la structure P-FGM est représentée sur la figure II.12, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

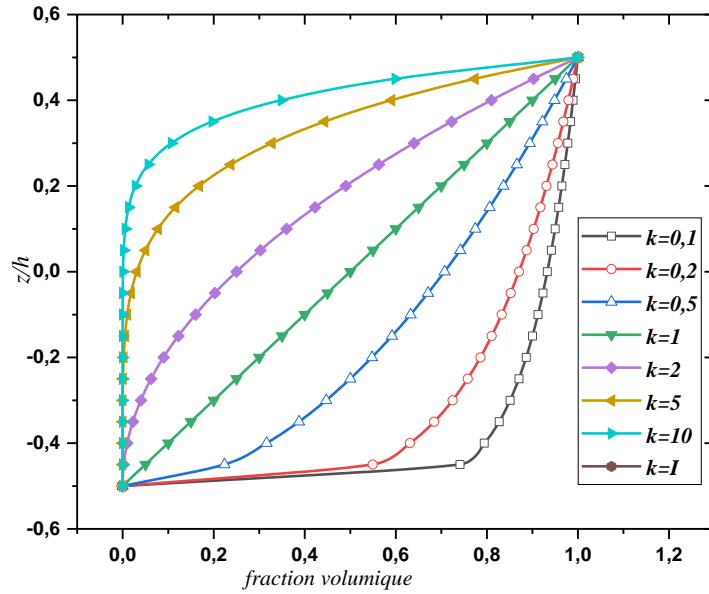


Figure II.12. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

Cas des sandwichs

- a- Type A :** Le sandwich est composé de trois couches, un cœur isotrope et deux couches de faces en P-FGM. Les couches de faces sont graduées du métal à la céramique tandis que le cœur est en céramique.

$$\begin{aligned}
 V(z)^{(1)} &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^k & h_0 \leq z \leq h_1 \\
 V(z)^{(2)} &= 1 & h_1 \leq z \leq h_2 \\
 V(z)^{(3)} &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^k & h_2 \leq z \leq h_3
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

- b- Type B :** Dans ce type de plaques sandwich, la couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique.

$$\begin{aligned}
 V(z)^{(1)} &= 0 & h_0 \leq z \leq h_1 \\
 V(z)^{(2)} &= \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^k & h_1 \leq z \leq h_2 \\
 V(z)^{(3)} &= 1 & h_2 \leq z \leq h_3
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

II.6.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [39]. Par conséquent, Chi [40] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.8a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.8b})$$

En utilisant la loi de mélanges, les propriétés de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$P(z) = V_1(z)P_1 + [1 - V_1(z)]P_2 \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.9a})$$

$$P(z) = V_2(z)P_1 + [1 - V_2(z)]P_2 \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.9b})$$

La figure II.13 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations précédentes représente les distributions sigmoïdes.

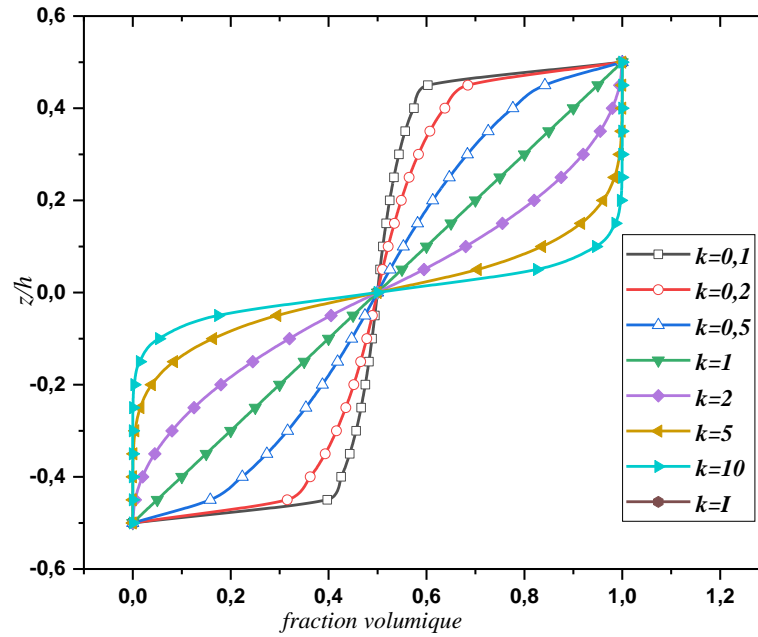


Figure II.13 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

Cas des sandwichs

a- **Type A** : Les couches de faces en S-FGM et le cœur est en céramique.
La fraction volumique varie à travers l'épaisseur comme suit [21].

$$\begin{aligned}
 V_1(z)^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_0}{h_m - h_0} \right)^k & h_0 \leq z \leq h_m \\
 V_2(z)^{(1)} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_1}{h_m - h_1} \right)^k & h_m \leq z \leq h_1 \\
 V(z)^{(2)} &= 1 & h_1 \leq z \leq h_2 \\
 V_2(z)^{(3)} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_2}{h_n - h_2} \right)^k & h_2 \leq z \leq h_n \\
 V_1(z)^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_3}{h_n - h_3} \right)^k & h_n \leq z \leq h_3
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

Où $h_m = (h_0 + h_1)/2$ et $h_n = (h_2 + h_3)/2$ désigne les positions de la surface moyenne de la couche inférieure et la couche supérieure, respectivement.

b- Type B : La couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique selon une fonction sigmoïde (S-FGM).

$$\begin{aligned}
 V(z)^{(1)} &= 0 & h_0 \leq z \leq h_1 \\
 V_1(z)^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_1}{h_s-h_1} \right)^k & h_1 \leq z \leq h_s \\
 V_2(z)^{(2)} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z-h_2}{h_s-h_2} \right)^k & h_s \leq z \leq h_2 \\
 V(z)^{(2)} &= 1 & h_2 \leq z \leq h_3
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

Où $h_s = (h_1 + h_2)/2$ désigne la position de la surface moyenne du cœur.

II.6.1.3. Loi de mélange exponentielle E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [41-42].

$$P(z) = P_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{II.12}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \tag{II.13}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est donnée par la figure II.14 :

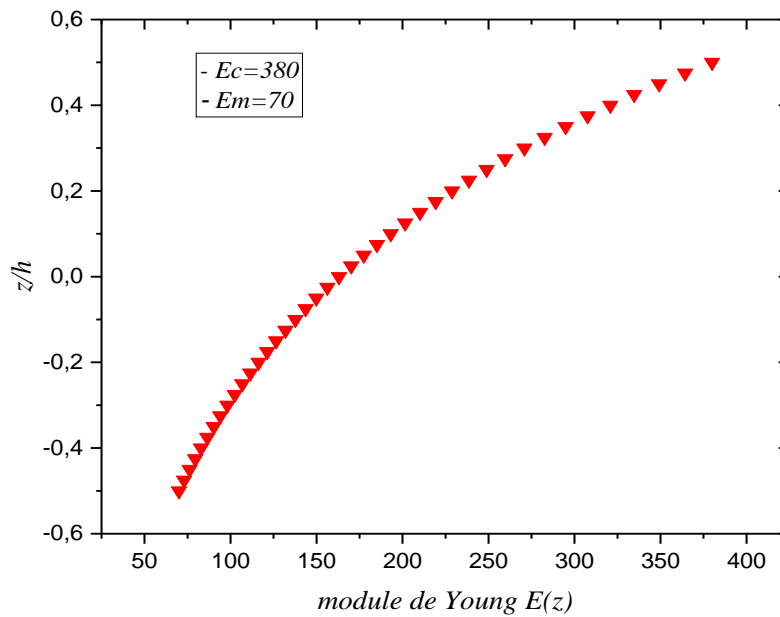


Figure II.14 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

II.6.2. Modèles micromécaniques des FGM (homogénéisation)

Bachir Bouiadjra et al. [43], Mahmoudi et al. [44] ont étudié la réponse des plaques FG en utilisant cinq modèles micromécaniques (Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka). Les expressions mathématiques des modèles micromécaniques sont comme suite :

II.6.2.1. Modèle de Mori-Tanaka

Les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka [35], pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par Vel et Batra [45], Shen [34] Figure II.15 :



Figure II.15 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire [35]

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + 4/3G_1)} \quad (\text{II.14a})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad (\text{II.14b})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (\text{II.14c})$$

Avec
$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} \quad (\text{II.14d})$$

Où V la fraction volumique, K le module de compressibilité, G le module de cisaillement et α le coefficient de dilatation thermique.

II.6.2.2. Modèle de Voigt (la loi des mélanges)

Le schéma de Voigt (la loi des mélanges) est le modèle le plus populaire et le plus couramment utilisé pour estimer les propriétés mécaniques dépendant de l'épaisseur des FGM

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \quad (\text{II.15})$$

$V(z)$: est la fraction volumique

II.6.2.3. Autres modèles micromécaniques des FGM

Les expressions mathématiques des autres modèles micromécaniques des FGM sont données comme suite :

Modèle de Reuss

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_m V(z) + E_c (1 - V(z))} \quad (\text{II.16})$$

a- Modèle de Tamura

$$E(z) = \frac{(1 - V(z))(q - E_c)E_m + V(z)(q - E_m)E_c}{(1 - V(z))(q - E_c) + V(z)(q - E_m)E_c} \quad (\text{II.17})$$

Le paramètre q représente le transfert de contrainte/déformation suivant l'expression suivante

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (\text{II.18})$$

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Si les éléments constitutifs se déforment de manière identique dans la direction de chargement, le paramètre q tend vers l'infini ($q=\infty$). Dans ce cas, le modèle de Tamura se réduit à l'estimation de Voigt. Tandis que, si les éléments constitutifs subissent le même niveau de contrainte ($q=0$), on aura le modèle de Voigt [46].

b- Modèle par représentation local des éléments de volume (LRVE)

$$E(z) = E_m \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right) \quad (\text{II.19a})$$

$$FE = \frac{1}{1 - (E_m / E_c)} \quad (\text{II.19b})$$

Bachir Bouiadjra et al. [43], Mahmoudi et al. [44] ont noté que quel que soit le modèle micromécanique utilisé la densité de masse effective ρ est obtenue par la règle de mélange suivante :

$$\rho(z) = \rho_c V(z) + (1 - V(z)) \rho_m \quad (\text{II.20})$$

Tableau II.2 : Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM. [47]

matériaux		Module d'élasticité E(GPa)	Coefficient de dilatation thermique α (10^{-6} 1/K)	Densité (10^3 Kg/m³)
Céramique	Zircon	100-250	1.7-2.7	5-6.15
	Alumine	215-413	4.5-10.9	3.5-3.98
	Silicium	140-180	7-8	2.28-2.38
	Carbure de tungstène	600-686	28-88	15.25-15.88
	Carbure de bore	362-472	17-42	2.35-2.55
métal	Fers	80-150	11-13	6.9-7.35
	Alliages d'aluminium	68-82	21-24	2.5-2.9
	Alliages de zinc	68-95	23-28	4.95-7
	Alliages de nickel	150-245	9-16	7.75-8.65
	Acier	189-203	16-18	7.85-8.1

II.7. Conclusion

Le changement continu des propriétés dans les matériaux à gradient de propriétés « FGM » a pour but d'améliorer les performances structurelles. La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et la concentration des contraintes. Dans ce chapitre, nous avons défini dans un premier temps les matériaux à gradient de propriétés « FGM », leurs principales méthodes d'élaboration, et leurs domaines d'application.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles, tel que (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) du matériau FGM suivant l'épaisseur de la structure. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance.

Références bibliographiques

- [1] **C. Baron., S. Naili, (2008)** « Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide », *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.
- [2] **Z. Zhong., T. Yu, (2007)** « Analytical solution of cantilever functionally graded beam », *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488.
- [3] **Soltani kheira, (2019)** « Etude du comportement mécanique des structures épaisses en matériaux non homogènes », *thèse de doctorat en sciences : Université djillali liabes de sidi bel abbes.*
- [4] **Nasser-Eddine bouida, (2019)** « Modélisation numérique des plaques en FGM fissurées » *thèse de doctorat en sciences, Université djillali liabes de sidi bel abbes.*
- [5] **Koizumi M. The (1992)** « concept of FGM .ceramic transaction, functionally graded materials» (1992)34,3-10.
- [6] **P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, (1986)** «Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites », *J. Am. Ceram. Soc* ; 69 (8) :191-192.
- [7] **Zarga Djaloul (2020)** « analyse élastique de la déformation thermomécanique des plaques épaisses non homogène », *thèse de doctorat en sciences : université djillali liabes de sidi bel abbes, laboratoire des matériaux et hydrologie.*
- [8] **Koizumi. M, (1997)** « FGM activities in Japan », Department of Materials Chemistry. Ryukokuvil University, Ohtsu 520- 21. Japan.
- [9] **J.F. GrovesH.N. G.Wadley (1997)** « Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition », *Composites Part B: Eng* .28, (1997)57-69.
- [10] **Torii S., Tanaka S., Yano, T., Watanabe, Y., J Trans. Phenomena, 6 189, 2004.**
- [11] **Benbakhti Abdeldjalil(2017)** «Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials) », *thèse de doctorat en sciences : université abdelhamid ibn badis mostaganem.*
- [12] **Yeo J, Jung Y., Choi S. (1998).** « Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting », *J Europ. Ceram. Soci.* 18 1281.
- [13] **Kawasaki A., and Watanabe R.(1990).** « Fabrication of sintered functionally gradient materials by powder spray forming process», In Proc. 1st. Int. symp. FGM. Edited by: Yamanouchi M., Koizumi M., 1990, 197-202.
- [14] **Takemura M., and Tamura M. et al. (1990).** « Mechanical and thermal properties of FGM fabricated by thin sheet lamination method », In Proc. 1st. Int. symp. FGM, edited by : Yamanouchi. M., Koizumi M. 1990, 97-100
- [15] **Benahmed Abdelkrim(2018)** « Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable », *thèse de doctorat : universite djillali liabes.*

- [16] **Zeng Y.P., Jiang D.L., Watanabe T. (2000).** « Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials », *Journal of the American Ceramic Society.*, Vol. 83, N° 12, 2999-3003.
- [17] **Na, K.-S. and Kim, J.-H. (2004),** « Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials », *Compos. Part B, Eng.*, 35(5), 429-437.
- [18] **Boukhelif Zoulikha (2020)** « Modélisation analytique de la vibration libre des plaques FGM posées sur fondation élastique » *thèse de doctorat .université djillali liabes de sidi bel abbes.*
- [19] **Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H. (1990),** « Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique », in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1990, 129-34
- [20] **A.M. Bishop, C.Y. Lin, M. Navaratnam, R.D. Rawlings, H.B. McChane, (1993).** « A functionally graded material produced by a powder metallurgical process », *journal of materials science letters* 12, 1516–1518]
- [21] **Daikh Ahmed Amine, (2018)** « vibration libre et flambement des structures sandwichs en FGM » *Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes.*
- [22] **H.D. Steffens, M. Dvorak, M. Wewel, (1990)** « Plasma sprayed functionally Gradient materials – Processing and application », *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan, 1990, 139–143.*
- [23] **Younsi Abderahman, (2019),** « Proposition d’une théorie de déformation de cisaillement 2D et 3D pour l’étude du comportement mécanique des plaques » *thèse de doctorat. Université djillali liabes.*
- [24] **Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi Member, IAENG, Mukul Shukla and Sisa Pityana, (2012)** « Functionally Graded Material: An Overview », *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III, WCE 2012, July 4 - 6, London, U.K.*
- [25] **Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. (2015),** « Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication », *Engineering and Technology*, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.
- [26] **El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed. A. Hassan. (2012),** « Preparation and Mechanical Properties of Zirconia/Nickel Functionally Graded materials », *Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications*, 45(2), 435-446.
- [27] **Saiyathi brahim, A. Mohamed, Nazirudeen, (2015),** « S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication », *Enginnering and technology.*

- [28] **Bennoun Mohammed (2017)**, « Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses posées sur des fondations élastiques », *thèse de doctorat, université djillali liabes -sidi bel abbes.*
- [29] **Kawai C, Wakamatsu S, Sakagami S, & Igarashi T (1990)** « Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD » , in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, p. 77-82.
- [30] **Boulefrakh Laid (2020)** « Etude Du Comportement Mécanique Des Structures Posées Sur Des Fondations Viscoélastique » *thèse de doctorat, université djillali liabes -sidi bel abbes.*
- [31] **Bouderba, B., Houari, MSA, Tounsi, A., Mahmoud, SR (2016)**, « Stabilité thermique des plaques sandwich fonctionnelles à l'aide d'une théorie simple de déformation de cisaillement », *Structural Engineering and Mechanics.*, 58 (3), 397- 422.
- [32] **Houari Tarek (2018)** « comportement mécanique des structures épaisses sur fondations élastiques » *thèse de doctorat, université djillali liabes de sidi bel abbes.*
- [33] **Jha D.K., Kant T., Singh R.K., (2013)**, « A critical review of recent research on functionally graded plates », *Compos. Struct.* 96, 833–849.
- [34] **Shen, H.-S. (2009)** « Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells », New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [35] **Mori, T. et Tanaka, K. (1973)** « Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions », *Acta Metall*, 571–574.
- [36] **Hill, R. (1995)** « A self-consistent mechanics of composite materials », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 213-222.
- [37] **Suresh S, Mortensen A. (1998)** « Fundamentals of functionally graded materials » 1st ed. London: IOM Communications.
- [38] **Asmaa Fahsi (2018)** « Analyse Du Flambement Des Plaques FGM Sous Différents Chargements » *thèse de doctorat, université djillali liabes - sidi bel abbes.*
- [39] **G. Bao., L. Wang 1995** « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- [40] **Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003)**, « Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings », *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- [41] **Delale, F, Erdogan, F. (1983)**, « The crack problem for a nonhomogeneous plane », *ASME J Appl Mech*, 50, 609 – 614.) :
- [42] **Ali Rachedi Mohamed (2021)** « Approche mathématique pour l'étude des structures non homogènes reposant sur fondation élastique variable » *thèse de doctorat, université djillali liabes sidi bel abbes.*

- [43] **Bachir Bouiadjra, R., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bernard, F., (2018),** « Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical models » *Structural-Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 3 (2018) 317-328.
- [44] **Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., E.A Adda Bedia., (2018),**« On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation » *Earthquakes and Structures.*, 14(2), 117-128.
- [45] **Vel, S.S. et Batra, R.C (2004)** « Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates », *Journal of Sound and Vibration*, 703-730.
- [46] **Mekerbi Mohamed (2021)** « Développement d'une approche analytique et étude de l'impact des fondations élastiques Winkler/Pasternak/Kerr sur la réponse globale des structures en matériaux composites avancés » *thèse de doctorat, université djillali liabessidi bel abbes.*
- [47] **Swaminathan. K, Sangeetha. D.M (2016)** « Thermal Analysis of FGM Plates – A Critical Review of Various Modelling Techniques and Solution Methods » *Composite Structures.*

***CHAPITRE III : I 'ANALYSE DES
STRUCTURES FGM PAR LES THEORIES
D'ELASTICITE***

III.1. Introduction

L'utilisation des structures isotropes et des structures composites est très répandue en génie mécanique, car elles font partie de nombreuses structures, notamment, les coques des automobiles, les tubes de transport d'eau ou du gaz, les réservoirs, etc. L'utilisation intensive de ces structures (plaque ou poutre) a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement mécanique.

La plupart des théories développées ont pour but le calcul des déformations et des contraintes dans une structure soumise à des charges et la réduction du problème 3D à un problème 2D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées seront exposées.

III.2. Les théories classiques de déformations (Classical Theory).

III.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Ce modèle est le plus simple et est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [1]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [2] où les contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après Déformation (Figure III.1).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.1c})$$

Avec : $(u_0 = v_0 = w_0)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

III.2.2. La théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT) :

Ce modèle basé sur la théorie classique des poutres (CBT) satisfait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite

perpendiculaire à l'axe moyen avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion. Une description détaillée de ces modèles, est donnée par Timoshenko et Woinowsky-Kreiger [3], Reddy [4,5].

Le champ de déplacement de ce modèle (CBT) est donné par l'équation suivante :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (\text{III.2a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{III.2b})$$

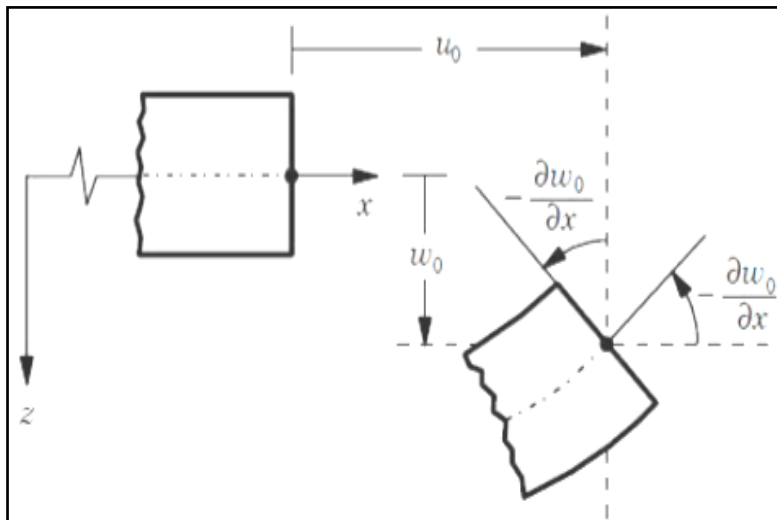


Figure III.1 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté: Des Plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) [6] Des poutres selon les hypothèses de la théorie classique d'Euler-Bernoulli (CBT) [3]

Les résultats obtenus par ce modèle pour les poutres épaisses sont imprécis du fait que ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse. Cependant, en raison de sa simplicité, ce modèle classique reste une bonne approche en premier.

III.3. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT -First Shear Deformation Theory) :

III.3.1. Théorie des plaques du premier ordre

Contrairement au modèle classique, les théories de premier ordre [7,8] tiennent en compte l'effet de cisaillement transversal, mais elles nécessitent d'introduire des facteurs de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal, à la surface supérieure et inférieure de la plaque [9]. La théorie de

déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est basée sur les hypothèses de Reissner et Mindlin [10,8] :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes.
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (figure III-2).
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

Plusieurs auteurs [11-15] ont analysé le comportement mécanique des plaques en utilisant la théorie de cisaillement de premier ordre.

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement est exprimé sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.3c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et ϕ_x et ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

III.3.2. Théorie des poutres du premier ordre (Timoshenko TBT)

Ce modèle prend en compte les déformations de cisaillement transversales, qui sont constantes dans l'épaisseur de la plaque. Les études sur ce modèle ont fait l'objet des travaux de Timoshenko et Woinowsky-Kreiger [3], Reddy [4] et Miara et Podio-Guidugli [16]. La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses et restrictions que la théorie classique, mais la poutre est à l'état de normalité détendue [17].

$$u(x, z) = u_0(x) + z\phi(x) \quad (\text{III.4a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{III.4b})$$

Avec : (u_0, w_0) et $\phi(x)$ sont respectivement les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y (figure III.3). Le champ de déplacement défini dans

l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des poutres (CBT) décrite dans la dernière section par le remplacement : $\phi(x) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$.

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique

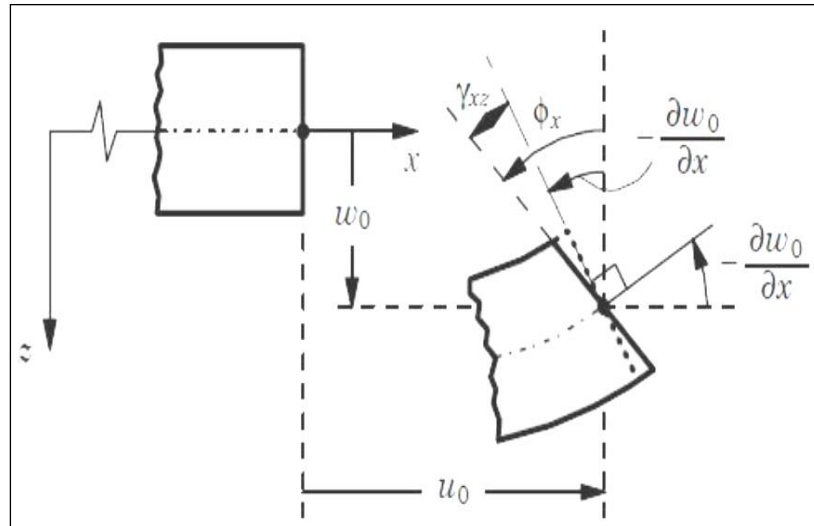


Figure III.2 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté : Des Plaques selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin [18] - Des poutres selon l'hypothèse de la théorie du premier ordre de Timoshenko (TBT)

Les résultats obtenus par la théorie de premier ordre sont globalement satisfaisants, mais elle nécessite toujours l'appel aux facteurs de correction pour présenter correctement les contraintes de cisaillement. Pour des situations générales, et dans le cas des plaques épaisses.

Pour éviter les difficultés de la correction de cisaillement, des théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des poutres ont été développées.

III.4. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT. High Shear deformation Theory) :

III.4.1. Théorie des plaques d'ordre élevé :

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction et franchir les limites de la théorie classique (CPT) et celle du premier ordre (FSDT), plusieurs auteurs ont proposé des théories d'ordre supérieur (HSDT).

Le concept des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé est basé sur une distribution non linéaire de champ de déplacement dans l'épaisseur (figure III.4), en tenant compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Plusieurs auteurs [19-28] ont développé des modèles basés sur la théorie de déformation d'ordre élevée et ont montré l'exactitude des résultats.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{III.5a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{III.5b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.5c})$$

Avec : u_0, v_0, w_0 et φ_x, φ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement.

$$\text{On pose aussi : } \varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \quad \text{et} \quad \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y .$$

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue pour $f(z) = z$.

III.4.2. Théorie des poutres d'ordre élevé :

Contrairement à la CBT et TBT avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie de la déformation de cisaillement des poutres à ordre élevé est basée sur une distribution non-linéaire des champs dans la section. Par conséquent, l'effet de la déformation de cisaillement transversal est pris en compte.

Comme la théorie des plaques, ces modèles ne nécessitent pas de facteurs de correction. Les références sur ces modèles peuvent être trouvées dans [19-22] et [29-31].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x) \quad (\text{III.6a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{III.6b})$$

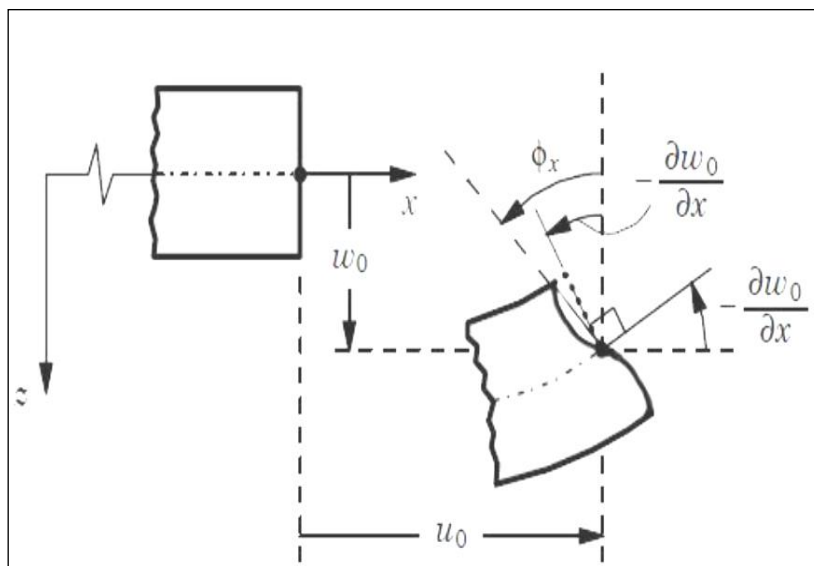


Figure III.3 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté - Des Plaques et des poutres selon l'hypothèse de la théorie d'ordre élevé

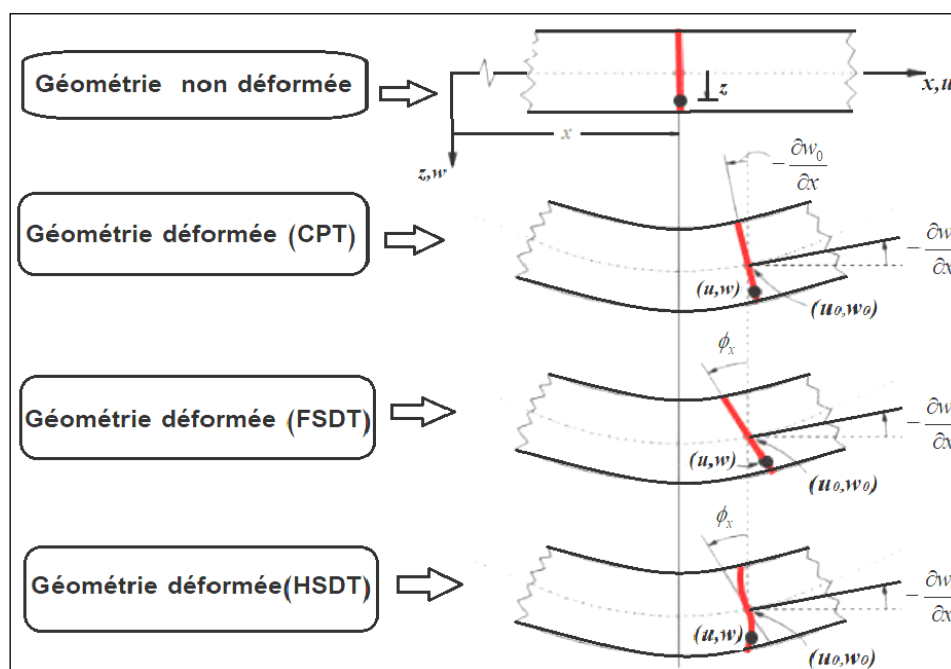


Figure III.4 : Comparaison des différentes théories d'ordre élevé (HSDT) avec (FSDT) et (CPT)

III.4.3. Les différentes théories (fonction de cisaillement $f(z)$) :

Nous présentons dans cette section quelques modèles de fonctions de cisaillement transverse utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés :

- *Approche de Reddy [25] :*

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (\text{III.7})$$

La théorie du troisième ordre de cisaillement (TSDT), qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme quadratique dans l'épaisseur de la poutre, a été proposée par Reddy [4,5]. Cette théorie a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs [32-34].

- *Approche de Touratier [26] :*

Dite la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (*Sinusoidal Shear Déformation Theory SSDT*), Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{z}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre.

- *Approche de Karama et al. [35]*

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (*The exponential shear deformation plate theory ESDPT*) développée par Karama et al. [35] est obtenue avec la fonction :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.9})$$

- Approche de Ambartsumyan [36] :

Une approche proposée par Ambartsumyan [36] pour écrire le champ des déplacements de la théorie de déformation d'ordre supérieur est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III.10})$$

* Certains auteurs [37-41] proposent une théorie raffinée à quatre variables pour analyser la flexion thermoélastique des plaques sandwich FGM, la vibration libre, le flambement thermique des plaques en matériau à gradient de propriété FGM sous des sollicitations hydro-thermo-mécaniques. La fonction utilisée dans ces travaux est donnée comme suit :

$$f(z) = z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{III.11})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (*The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT*) a été développée par Ait Atmane et al. avec la fonction [42, 43]:

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right]} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right]} \quad (\text{III.12})$$

Le champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé par l'utilisation d'une formule de forme polynomiale est donné par Kaczkowski [40] d'après Reissner [6]:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left[1 - \frac{5z^2}{3h^2} \right] \quad (\text{III.13})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en utilisant des différentes fonctions de cisaillement transverse. Le Tableau III.1 montre les différentes fonctions caractérisant chaque théorie.

Analyse des structures FGM par les théories de l'élasticité

Tableau III.1. Quelques modèles de fonction de forme $f(z)$ présentées par la littérature pour la théorie HDST

AUTEURS	FONCTIONS DE CISAILLEMENT
Reddy [25]	$f(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$
Ait Atmane et al. [42]	$f(z) = \frac{\cosh(\frac{\pi}{2})}{\cosh(\frac{\pi}{2}) - 1} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sinh(\frac{\pi z}{h})}{\cosh(\frac{\pi}{2}) - 1}$
* Tounsi et al. [37]	$f(z) = z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$
Ambartsumyan [36]	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Karama et al. [35]	$f(z) = z e^{-2(\frac{z}{h})^2}$
Touratier [26]	$f(z) = \frac{z}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Nguyen [44]	$f(z) = \left[\sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) \right] - z \left[\frac{6}{h\sqrt{13}} \right]$
Reissner [6]	$f(z) = \frac{5z}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Zenkour [45]	$f(z) = \left[h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \right] - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Refrafi [46]	$f(z) = (0.1212\pi z) \left[\pi - (0.135)^{1/3} \cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]$
Chikh et al. [47]	$f(z) = \frac{2z \sinh(\frac{z^2}{h^2})}{\left[2 \sinh(\frac{1}{4}) + \cosh(\frac{1}{4}) \right]}$

Analyse des structures FGM par les théories de l'élasticité

Dans les figures III.5 et III.6, on présente la variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur, et la variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur de la plaque, on observe que les deux approches de Ambartsumyan [32] et celle de Soldatos [48] sont notablement loin des autres fonctions de forme, mais elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse en 3D.

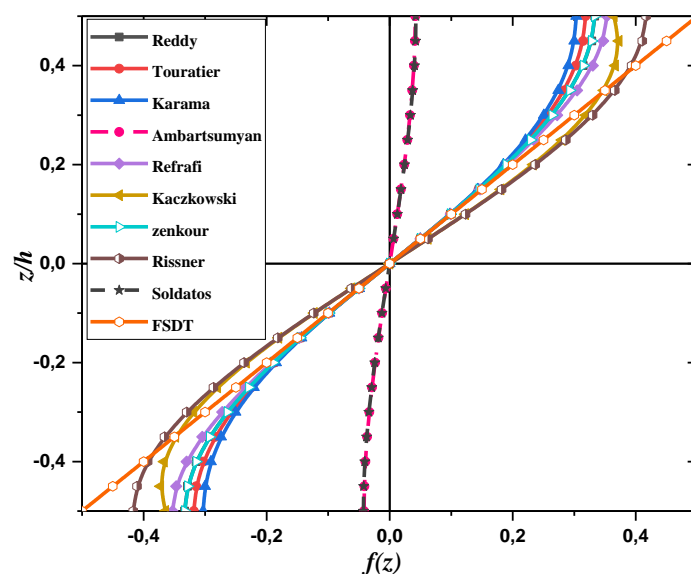


Figure III.5 : Comparaison entre différentes théories (Variation de $f(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur)

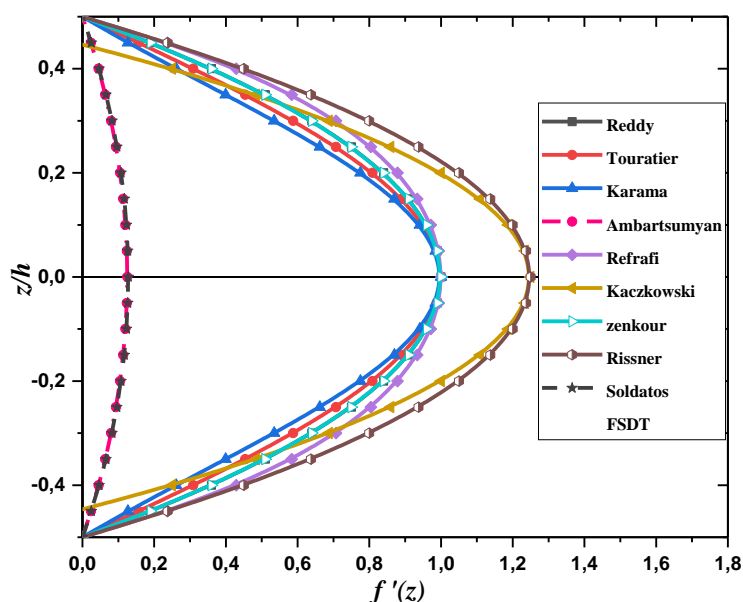


Figure III.6 : Comparaison entre différentes théories (Variation de $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur).

III.4.4. Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D)

Pour les plaques ou poutres épaisses où l'effet de l'étirement de l'épaisseur est plus prononcé, les théories bidimensionnelles 2D de déformation de cisaillement (HSDT) ne sont pas adoptées à ce type de structure. Pour cela, de nouvelles théories 3D et quasi-3D ont été développées pour pouvoir introduire l'effet de déformation normale et cela en modifiant le champ de déplacement dans l'équation (III.14), en ajoutant des termes d'ordre supérieur au déplacement transversal comme il est représenté dans le champ des déplacements suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad \text{(III.14a)}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad \text{(III.14b)}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y) \quad \text{(III.14c)}$$

Où $\theta(x, y)$ est une fonction de déplacement qui tient compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur; et $g(z)$ est une fonction de forme qui est déterminée à partir des conditions limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

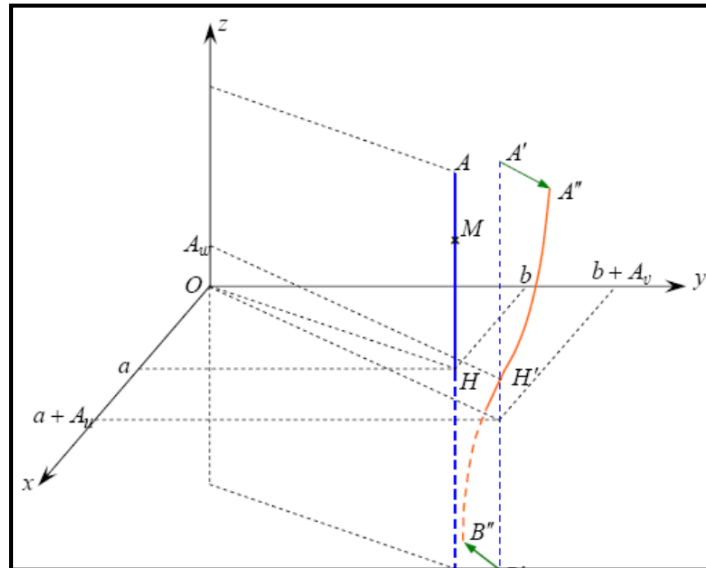


Figure III.7 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur [9]

II.5. Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi [49] a pu développer en 2002, un modèle nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory). Cette théorie est variationnelle, elle

n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur.

Le nombre des inconnues dans la présente théorie d'ordre élevé à deux variables est seulement quatre, par contre, égale à cinq ou plus pour les autres théories d'ordre élevé [25, 26, 35,42].

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{III.15a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{III.15b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.15c})$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de la flexion et du cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

- **Cas des Théorie de déformation des plaques quasi-3D**

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z) , alors la cinématique devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{III.16a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{III.16b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{III.16c})$$

Où φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec : $g(z) = 1 - f'(z)$

II.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques et des poutres ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ainsi que les différents modèles de fonction de cisaillement transverse qui vérifient les contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

Quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés FGM en ont été rapportés dans ce chapitre. Ces travaux montrent l'importance de l'utilisation des matériaux à gradient de propriété dans différents domaines.

Références bibliographiques chapitre III

- [1] **Reissner E & Y. Stavsky. (1961)** « Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plate ». *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408.
- [2] **Kirchhoff, G.R. (1850)**, « Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein », *J. Für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.
- [3] **Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. (1959)**. «Theory of plates and Shells ». McGraw-Hill, New York.
- [4] **Reddy, J. (1997)**. « Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis». CRC Press, Boca Raton.
- [5] **Reddy, J., (1999)**. « Theory and analysis of Elastic Plates. Taylor Francis, Philadelphia.
- [6] **Reddy J.N. (2007)**, « Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells ». CRC Press.
- [7] **Reissner, E. (1945)**, « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *J Appl Mech Trans ASME*, vol. 12, pp. A69–A77.
- [8] **R.D. Mindlin, (1951)** « Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates ». *ASME J Appl Mech* 18 (1951) 31–38.
- [9] **Belabed Zakaria, (2015)** « Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes » Thèse de doctorat en sciences - Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbas.
- [10] **Reissner, E. (1945)**, « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *J Appl Mech Trans ASME*, vol. 12, pp. A69–A77.
- [11] **Yan.. Yang, K.M.Liew, S. Kitipornchai. (2005)** « Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading ». *Int. J. Mech. Sci.* 47 (2005) 1519- 1541.
- [12] **Thai, H.T. and Kim, S.E. (2013)**, « A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates », *Compos. Struct. Int.J.* 99,172-180.
- [13] **Minwo Park, Dong-Ho Choi (2018)**, « A two-variable first-order shear deformation theory considering in-plane rotation for bending, buckling and free vibration analyses of isotropic plates », *Applied Mathematical Modelling* 61 (2018) 49–71.
- [14] **Nguyen, H.N., Hong, T.T., Vinh, P.V., Quang, N.D. and Thom,D.V. (2019)**, « A refined simple first-order shear deformation theory for static bending and free vibration analysis of advanced composite plates », *Materials*, 12(15), 2385.<https://doi.org/10.3390/ma12152385>.
- [15] **Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014)**, « An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates », *Composites: Part B*, 60, 274–283.

- [16] **Miara, B., & Podio-Guidugli, P. (2006).** « Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques », *Comptes rendus mathématique*, 343(10), 675-678
- [17] **Mouffoki Abderrahmane (2018)** « Etude du comportement mécanique des structures FGM à l'échelle nano-métrique. » Thèse de doctorat en sciences - Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès.
- [18] **Reddy .J .N. (2004).** « *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. 2nd Edition*». Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [19] **Hildebrand F.B., E. Reissner., G.G. Thomas (1949),** « Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells ». NACA T. N. N°:1833.
- [20] **Naghdi, P. M. (1957).** « On the theory of thin elastic shells ». *Quarterly Appl. Math.* 14, 369-380
- [21] **Kant T., K. Swaminathan, (2002)** « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory». *Composite. Structure*; 56 (4): 329- 344.
- [22] **Liberscu L. (1967),** « On the theory of anisotropic elastic shell and plates ». *Int J Solids Structures*. 1967, Vol. 3, pp. 53-68
- [23] **Reissner E. (1975).** « On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation ». *Int J Solids Struct* 1975; 11:569–73.
- [25] **Reddy J.N. (1984).** « Simple higher-order theory for laminated composite plates ». *J Appl Mech* 1984; 51:745–52.
- [26] **Touratier, (1991).** « An efficient standard plate theory ». *International Journal of Engineering*
- [27] **Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014),** « A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates ». *Meccanica*, 49(4), 795-810. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9827-3>.
- [28] **Whitney J.M., Sun C.T. (1973)** « A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *Journal of Sound and Vibration*». 1973, 30: 85-97.
- [29] **Nelson, R. B., Lorch, D. R., (1974).** « A refined theory for laminated orthotropic plates ». *J. Appl. Mech.* 41, 177-183.
- [30] **Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., (1977a).** « A high-order theory of plate deformation, Part I: Homogeneous plates ». *J. Appl. Mech.*, 663-668.
- [31] **Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., (1977b).** « A high-order theory of plate deformation, Part I: Laminated plates ». *J. Appl. Mech.*, 669-676.
- [32] **Reddy J.N. (2000).** « Analysis of functionally graded plates ». *Int. J. Num. Meth. Eng.* 47.663-684.
- [33] **Cheng, Z. Q., Batra, R. C., (2000b).** « Three-dimensional thermoelastic deformations of functionally graded elliptic plates ». *J. Sound Vibr.* 31, 97-106.

- [34] **Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, Martins, P. A. L. S., (2004).** « Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method ». *Compos. Struct.* 193, 705-725.
- [35] **M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, (2003).** « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity ». *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [36] **Ambartsumyan S.A.(1969).** « Theory of anisotropic plate ». Tech Publishing Co.
- [37] **Tounsi A., Houari Mohammed S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A., (2013).** « A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates ». *Aerosp. Sci. Technol.* 2013, Vol. 24, 209–220.
- [38] **Bourada M., Tounsi A., Houari, M.S.A., Adda Bedia E.A., (2012).** « A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates ». [éd.] *J. Sandw. Struct. Mater.* 2012, Vol. 14, 1, pp. 5-33.
- [39] **Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., and Ahmed M.S., 2011.** « A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient ». *Composite: Part B.* 2011, Vol. 42, 1386-1394.
- [40] **Khalfi Y., Houari M.S.A., Tounsi A., (2014).** « A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation ». *Int. J. Comput. Methods.* 2014, Vol. 11, (5), p. 1350077
- [41] **Zidi M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia E.A., and Anwar Bég O., (2014).** « Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory ». *Aerospace Science and Technology.* 2014, Vol. 34, pp. 24-34
- [42] **Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A. (2010),** « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory ». *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- [43] **Benahmed Abdelkrim (2018).** « Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable » Thèse de doctorat en sciences - Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.
- [44] **Nguyen .T. K , Sab K, G. Bonnet, (2007).** « Shear correction factors of functionally graded plates ». *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575.
- [45] **Zenkour, A. M., (2003).** « Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermomechanical loading ». *Compos. Struct.* 65, 367-379.
- [46] **S. Refrafi et al., (2020).** « Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations ». *Computers and Concrete, An International Journal* 25(4), 311-325.
- [47] **Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017),** «Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT », *Smart Struct. Syst., Int. J.*, **19**(3), 289-297.

- [48] **Soldatos, K., (1992)** « A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates », *Acta Mech.*, 94, 3, pp 195–220.
- [49] **Shimpi R. P.(2002)**, « Refined plate theory and its variants », *AIAA Journal*,**40** (1) 137-146.

*CHAPITRE IV : ETUDE ANALYTIQUE DE LA
STABILITE THERMIQUE DES PLAQUES
SANDWICH EN FGM SUR DES FONDATIONS
ELASTIQUES*

*« Résultats, Validation Et
Interprétations »*

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

IV.1. Introduction

L'utilisation des structures comme poutres, plaques et coques, fabriqués à partir des matériaux FGM, est en augmentation constante en raison de la variation continue et graduée de leurs propriétés. Cette variation permet une répartition continue des contraintes dans les structures FGM, tandis que la répartition des contraintes discontinues apparaît dans un autre type de matériaux avancés. La mécanique des milieux continus permet de développer des théories ayant pour objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées en se basant sur le système des équations de stabilité, d'équilibre, de compatibilité, des conditions aux limites sur les bords, complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations.

Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour l'étude de flambement thermique des plaques sandwichs en matériaux à gradient évalué sous diverses distributions de température à travers l'épaisseur, reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak), en utilisant une théorie d'ordre élevé (HSDT). Dans cette étude on suppose que les propriétés mécaniques de la plaque varient graduellement à travers l'épaisseur selon une loi de puissance (P-FGM). La couche intermédiaire est homogène et constituée d'un matériau purement céramique. Le principe des travaux virtuels est utilisé pour l'obtention des équations de stabilité et d'équilibre. La solution de Navier est utilisée pour la résolution de ces équations. La comparaison des résultats obtenus à partir de la présente théorie avec les résultats disponibles dans la littérature montrent que la validité et l'efficacité du modèle proposé.

IV.2. Configuration géométrique

Dans cette étude, nous considérons une plaque FG rectangulaire simplement appuyée de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur h reposant sur une fondation élastique (Winkler-Pasternak). Les coordonnées x , y et z sont prises selon la longueur, la largeur, et l'épaisseur, respectivement et le plan x - y coïncide avec le plan médian de la plaque et utilisé pour décrire des déformations infinitésimales de cette plaque élastique.

La couche intermédiaire est homogène est constituée d'un matériau purement céramique. La géométrie de la plaque sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique est donnée par la figure IV.1. Les propriétés matérielles varient doucement à travers l'épaisseur de la plaque.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Le domaine de la plaque est défini comme :

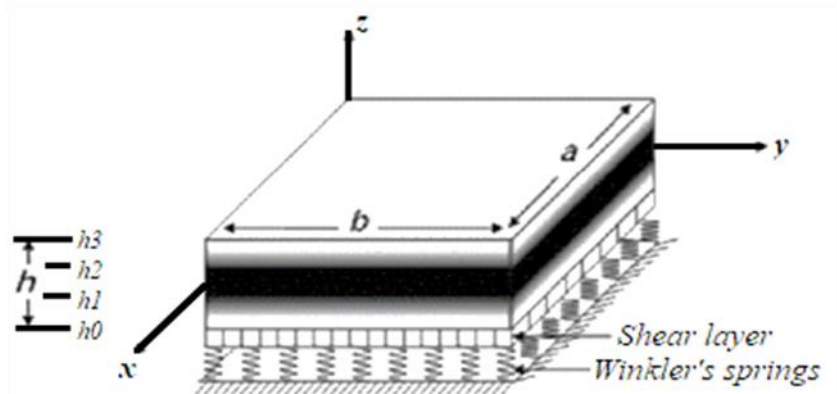
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \\ -h/2 \leq z \leq h/2 \end{cases}$$


Figure IV.1 : Géométrie de la plaque sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique [1]

IV.3. Propriétés matérielles de la plaque FGM

Selon la forme de la loi de puissance les propriétés matérielles de la plaque en FGM représentée sur la figure. IV.1 sont telles que : le module de Young (E), le coefficient de Poisson (ν), la densité massique(ρ), le coefficient de dilatation thermique (α), et le module de cisaillement (G) peuvent être calculées par la relation IV.1 [2-5] :

$$P^{(n)}(z) = P_m V^{(n)} + P_c V^{(n)} \quad (IV.1)$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n ($n=1, 2, 3$). P_m et P_c désignent la propriété de la face inférieure et la face supérieure, respectivement. Les fractions volumiques des phases céramique et métal sont liées par :

$$V_c + V_m = 1 \quad (IV.2)$$

Avec

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (IV.3)$$

Les propriétés matérielles effectives non locales de la plaque sandwich FGM, peuvent être exprimées sous la forme suivante :

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

$$E^{(n)}(z) = E_m + (E_c - E_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.4a})$$

$$\rho^{(n)}(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.4b})$$

$$\alpha^{(n)}(z) = \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.4c})$$

$$G^{(n)}(z) = G_m + (G_c - G_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.4d})$$

On suppose que la fraction volumique $V^{(n)}$ des plaques sandwich FG obéit à une fonction de loi de puissance à travers l'épaisseur, peut s'écrire comme suit [6-7] :

$$\begin{aligned} V^{(1)}(z) &= \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k && \text{pour } h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) &= 1 && \text{pour } h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) &= \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k && \text{pour } h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

(k) est l'indice de gradient, qui est positif. La couche centrale est indépendante de la valeur de k , qui est une couche entièrement en céramique.

IV.4. Cinématique et équations constitutives

IV.4.1. Champs de déplacement

La théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT) classique est modifiée en considérant quelques hypothèses simplificatrices permettant de réduire le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{IV.6a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{IV.6b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.6c})$$

$u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ sont cinq déplacements du plan médian de la plaque.

En supposant que :

$$\varphi_x(x, y) = \int \theta(x, y) dx \quad \text{et} \quad \varphi_y(x, y) = \int \theta(x, y) dy,$$

Le champ de déplacements est donné comme suit [8] :

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (IV.7a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (IV.7b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (IV.7c)$$

Les termes d'intégrale utilisée dans les expressions précédentes IV.7 peuvent être résolus en utilisant la procédure de Navier et peuvent être exprimé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.8)$$

Où k_1 et k_2 sont des coefficients dépendent de la géométrie de la plaque, les coefficients A et B sont adoptés selon le type de solution employée. Ainsi, A' et B' sont définie par :

$$A = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad B = -\frac{1}{\mu^2}, \quad k_1 = \lambda^2, \quad k_2 = \mu^2, \quad \lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{m\pi}{b} \quad (IV.9)$$

$f(z)$ représente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et les déformations transversales suivant l'épaisseur. La fonction de forme, $f(z)$ utilisée dans cette étude est une forme hyperbolique comme suit :

$$f(z) = (3/25) \pi z \left(\pi - \sqrt[3]{0.135} \cosh(\pi z / h) \right) \quad (IV.10)$$

IV.4.2. Champs de déformation

En utilisant la théorie d'élasticité, Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (IV.7), soit :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z k_x^1 + f(z) k_x^2 \quad (IV.11a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 + z k_y^1 + f(z) k_y^2 \quad (IV.11b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^1 + f(z) k_{xy}^2 \quad (IV.11c)$$

$$\gamma_{yz} = \partial f(z) / \partial z \quad \gamma_{yz} \quad (IV.11d)$$

$$\gamma_{xz} = \partial f(z) / \partial z \quad \gamma_{xz} \quad (IV.11e)$$

Ou :

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^1 \\ k_y^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (IV.12a)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^2 \\ k_y^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (k_1 A) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ (k_2 B) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A + k_2 B) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (k_1 A) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ (k_2 B) \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (IV.12b)$$

IV4.3. Équations constitutives

La relation de comportement élastique linéaire d'une plaque FG peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha^{(n)}(z)T \quad (IV-13)$$

Où $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. Les coefficients de rigidité, C_{ij} , exprimés comme suit :

$$C_{11}^{(n)} = C_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{(1-\nu^{(n)}(z))^2}, \quad C_{12}^{(n)} = \nu^{(n)}(z)C_{11}^{(n)} \quad (IV.14a)$$

$$C_{44}^{(n)} = C_{55}^{(n)} = C_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu^{(n)}(z))} \quad (IV.14b)$$

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

IV.5. Équations d'équilibres

La plaque est supposée reposer sur un modèle de fondation élastique à deux paramètres. Le principe des travaux virtuels est utilisé pour déterminer les équations d'équilibre du système (plaque sandwich FG / fondation élastique),

Le principe peut être énoncé sous la forme analytique suivante [9] :

$$V = U + U_F \quad (IV.15)$$

Dans cette expression U et U_F représentent, respectivement la variation de l'énergie de déformation de la plaque FGM, et la variation de l'énergie potentielle de la fondation élastique,

- La variation de l'énergie de déformation de la plaque FGM est donnée par :

$$U = 1/2 \int_V \left[\sigma_{xx}^{(n)} (\varepsilon_{xx} - \alpha^{(n)} T) + \sigma_{yy}^{(n)} (\varepsilon_{yy} - \alpha^{(n)} T) + \sigma_{xy}^{(n)} \gamma_{xy} + \sigma_{yz}^{(n)} \gamma_{yz} + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz} \right] dV \quad (IV.16)$$

- La variation de l'énergie potentielle de la fondation élastique est donnée par [10] :

$$U_F = 1/2 \left(\int_{\Omega} \left[K_w w_0^2 + K_g (w_{0,x}^2 + w_{0,y}^2) \right] d\Omega \right) \quad (IV.17)$$

En remplaçant les équations (IV.12) et (IV.13) dans l'équation (IV.16) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.15) peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[\begin{array}{l} N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xx} \delta k_x^1 \\ + M_{yy} \delta k_y^1 + M_{xy} \delta k_x^1 + P_{xx} \delta k_x^2 + P_{yy} \delta k_y^2 \\ + P_{xy} \delta k_x^2 + Q_{yz} \gamma_{yz}^0 + Q_{yz} \gamma_{xz}^0 \end{array} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[K_w w_0^2 + K_g (w_{0,x}^2 + w_{0,y}^2) \right] d\Omega = 0 \quad (IV.18)$$

Les résultantes des contraintes N , M , P et Q sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \quad N_y \quad N_{xy} \\ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \\ P_x \quad P_y \quad P_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})^{(n)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ f(z) \end{array} \right\} dz \quad (IV-19a)$$

$$(Q_{xz}, Q_{yz}) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz \quad (IV-19b)$$

Où h_n et h_{n+1} sont les coordonnées z inférieure et supérieure de la nième couche. En substitution l'équation (IV.11) et introduit dans l'équation (IV.13), et ensuite les résultats

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

trouvés dans l'équation (IV.19), les relations entre les résultantes des contraintes et les déformations sont exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & C_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & F_{66} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 & H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & F_{66} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ k_x^1 \\ k_y^1 \\ k_{xy}^1 \\ k_x^2 \\ k_y^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ 0 \\ M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ 0 \\ P_{xx}^T \\ P_{yy}^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-20a})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-20b})$$

Où A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , F_{ij} , H_{ij} , les composants de rigidité de la plaque sont définie par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & C_{11}^s & F_{11} & H_{11} \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & C_{12}^s & F_{12} & H_{12} \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & C_{66}^s & F_{66} & H_{66} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11} \left[1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{(1-\nu)}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.21a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, C_{22}, F_{22}, H_{22}) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, C_{11}, F_{11}, H_{11})$$

$$A_{44} = A_{55} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{44} [df(z)/dz]^2 dz \quad (\text{IV.21b})$$

Les efforts et les moments résultants : $N_x^T = N_y^T$, $M_x^T = M_y^T$, et $P_x^T = P_y^T$, dû au chargement thermique sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \\ P_x^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{(1-\nu^{(n)})} \alpha^{(n)}(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.22})$$

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Substituant les équations. (IV.11) et (IV.12) dans l'équation (IV.18) et en intégrant par partie et en collectant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$, on obtient les équations gouvernantes sont obtenues comme suit :

$$\delta u_0: \quad \frac{\partial N_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.23a})$$

$$\delta v_0: \quad \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^1}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.23b})$$

$$\delta w_0: \quad \frac{\partial^2 M_{xx}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^1}{\partial y^2} + \bar{N} - K_w w_0^1 + K_w \nabla^2 w_0^1 = 0 \quad (\text{IV.23c})$$

$$\delta \theta_0: \quad -(K_1 A) \frac{\partial^2 P_{xx}^1}{\partial x^2} - (K_1 A + K_2 B) \frac{\partial^2 P_{xy}^1}{\partial x \partial y} - (K_2 B) \frac{\partial P_{yy}^1}{\partial y^2} \\ + (K_1 A) \frac{\partial^2 Q_{xz}^1}{\partial x \partial z} + (K_2 B) \frac{\partial^2 Q_{yz}^1}{\partial y \partial z} = 0 \quad (\text{IV.23d})$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} \right] \quad (\text{IV.24})$$

Où les termes N_{xx}^0 et N_{yy}^0 sont les forces de pré-flambement résultantes obtenue comme :

$$N_{xx}^0 = N_{yy}^0 = - \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{(1-\nu^{(n)})} \alpha^{(n)}(z) T \quad (\text{IV.25})$$

IV.6. Solution analytique exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

Dans cette partie on s'intéresse à déterminer la solution exacte des équations (IV.23) pour une plaque sandwich rectangulaire simplement appuyée avec une longueur a et une largeur b sous une charge thermique.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

En utilisant la procédure de Navier, la solution des variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites ci-dessus peuvent être écrites dans les séries de Fourier suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Où : U, V, W et X sont des coefficients arbitraires à déterminer.

En substituant l'équation (IV.26) à l'équation (IV.23), On obtient :

$$[L]\{\Delta\} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

$$\{\Delta\} = \{U, V, W, X\}^T \quad (\text{IV.28})$$

$[L]$ C'est une matrice symétrique donnée par :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

Les éléments L_{ij} de la matrice symétrique $[L]$, sont données par :

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, \\ L_{12} &= (A_{12} + A_{66})\lambda\mu \\ L_{13} &= -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 \\ L_{14} &= C_{s11}K_1A\lambda^3 + (C_{s12}K_2B \\ &\quad + C_{s66}(K_1A + K_2B))\lambda\mu^2 \\ L_{22} &= A_{11}\mu^2 + A_{66}\lambda^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.30a})$$

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

$$\begin{aligned}
 L_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2\mu \\
 L_{24} &= (C_{s12}K_1A + C_{s66}(K_1A + K_2B))\lambda^2\mu + C_{s11}K_2B\mu^3 \\
 L_{33} &= -D_{11}\lambda^4 - D_{22}\mu^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 \\
 &\quad - N_{xx}^0\lambda^2 + N_{yy}^0\mu^2 - k_w - k_g(\lambda^2 + \mu^2) \\
 L_{34} &= F_{11}K_1A\lambda^4 + (F_{12} + 2F_{66})(K_1A + K_2B)\lambda^2\mu^2 \\
 &\quad + F_{22}K_2B\mu^4 \\
 L_{44} &= -(2H_{12}K_1AK_2B + H_{66}(K_1A + K_2B)^2)\lambda^2\mu^2 \\
 &\quad - H_{11}(K_1A)^2\lambda^4 - H_{22}(K_2B)^2\mu^4 + A_{44}((K_1A)^2\lambda^2 \\
 &\quad + (K_2B)^2\mu^2)
 \end{aligned} \tag{IV.30b}$$

IV.7. Flambement thermique des plaques sandwich FG

Dans cette section, pour examiner l'effet du type de variation de température considéré dans l'épaisseur sur la réponse de flambement de la plaque FG reposant sur une fondation élastique, trois types de chargement thermique dans l'épaisseur de la plaque sont pris

IV.7.1. Variation uniforme de la température

Pour les plaques FG, on suppose que la température est uniformément élevée d'une température de référence (température ambiante) T_i à la température finale T_f . On peut alors obtenir la variation de température [11] :

$$T(z) = T_f - T_i = \Delta T \tag{IV.31}$$

IV.7.2. Variation linéaire de la température

Pour les plaques sandwich FGM, le changement de température n'est pas uniforme, la distribution de température est approximativement linéaire à travers l'épaisseur. La température est supposée varier linéairement à travers l'épaisseur comme suit [11, 12] :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + T_m, \quad \Delta T = T_c - T_m \tag{IV.32}$$

Où la différence de température de flambement $T = T_c - T_m$, T_c et T_m sont les températures de la surface supérieure, qui est riche en céramique, et de la surface inférieure, qui est riche en métal, respectivement.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

IV.7.3. Variation non linéaire de température

Nous supposons que la température varie de manière non linéaire de la surface céramique (surface supérieure) (T_c) à la surface métallique (surface inférieure) (T_m). La distribution non linéaire de température suivant l'épaisseur de la plaque sandwich FG est considérée :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + T_m, \quad \Delta T = T_c - T_m \quad (\text{IV.33})$$

Où p est l'exposant de température ($0 < p < \infty$). Notez que la valeur de p égale à l'unité représente une variation linéaire de température à travers l'épaisseur. Tandis que la valeur de p différente de l'unité représente une variation non linéaire de température à travers l'épaisseur.

IV.8. Résultats et Discussions

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour la vérification de l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle pour trouver la température critique de flambement des plaques sandwichs en FGM simplement appuyée soumise à différents types de chargement thermique. Cette section sera divisée en deux parties : validation des résultats et étude paramétrique. Les résultats obtenus sont comparés avec d'autres résultats disponibles dans la littérature.

La plaque sandwich FG est considérée comme étant constituée de Titane et de Zircone avec les propriétés matérielles suivantes [13] :

$$E_m = 66.2 \text{ GPa}, \alpha_m = 10.3 \times 10^{-6} \text{ 1/c}^\circ, K_m = 18.1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$E_c = 244.27 \text{ GPa}, \alpha_c = 12.766 \times 10^{-6} \text{ 1/c}^\circ, K_c = 1.7 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Le coefficient de Poisson de la plaque est considéré comme constant dans l'épaisseur et égale à 0,3 [11, 14, 15]

Les résultats numériques sont présentés en termes de flambement thermique adimensionnel. Les paramètres non-dimensionnels utilisés sont [16].

$$k_w = \frac{K_w a^4}{D_c}, \quad k_g = \frac{K_g a^2}{D_c}, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

IV.8.1. Etudes comparatives et validation des résultats :

Afin de valider la précision du modèle proposé, une comparaison a été effectuée avec les résultats obtenus par Bourada et al. [13], Zenkour et al. [17] Yaghoobi et al. [16], Zenkour et al. [18] et Yaghoobi et al. [19] basés sur les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Les résultats ont reportés dans les tableaux IV.1 a IV.6.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Tableau IV.1. Comparaison de la température critique de flambement non dimensionnelle d'une plaque sandwich FGM sous variation uniforme de température sans fondation élastique par rapport au rapport (a/h) et l'indices de gradient k .

a/h	k	Théorie	1-1-1	1-0-1	2-1-2	1-2-1	
05	0.5	Présent	2.83224	2.86962	2.82961	2.87095	
		Bourada et al [13]	2.83224	2.87074	2.83030	-	
		Zenkour et al [17]	2.80230	2.83507	2.79675	2.84659	
		HSDPT	2.83224	2.87073	2.83029	2.86971	
		SSDPT	2.83331	2.87276	2.83194	2.86992	
	2	Présent	2.35820	2.62851	2.39307	2.42912	
		Bourada et al [13]	2.36000	2.63018	2.39637	-	
		Zenkour et al [17]	2.31737	2.57355	2.34734	2.39541	
		HSDPT	2.35999	2.63018	2.39637	2.42873	
		SSDPT	2.36195	2.63459	2.39953	2.42899	
	5	Présente	2.21065	2.92612	2.34322	2.23838	
		Bourada et al [13]	2.21009	2.93446	2.34898	-	
		SSDPT	2.21327	2.94205	2.35401	-	
	10	FSDPT	2.16069	2.86226	2.28926	-	
		Présent	2.19000	3.29414	2.41453	2.17477	
		Bourada et al [13]	2.19469	3.30340	2.42186	-	
SSDPT		2.20150	3.31230	2.42733	-		
10	0.5	FSDPT	2.14099	3.23289	2.35529	-	
		Présent	0.79458	0.80306	0.79216	0.80936	
		Zenkour et al [17]	0.79456	0.80313	0.79220	0.80925	
		SSDPT	0.79463	0.80328	0.79232	0.80925	
	2	FSDPT	0.79223	0.80036	0.78959	0.80745	
		Présent	0.64226	0.71749	0.65051	0.66691	
		Zenkour et al [17]	0.64238	0.71783	0.65075	0.66687	
		SSDPT	0.64253	0.71815	0.65098	0.66689	
	25	0.5	FSDPT	0.63921	0.71357	0.64710	0.66436
			Présent	0.13164	0.13294	0.13115	0.13430
Zenkour et al [17]			0.13164	0.13294	0.13115	0.13430	
SSDPT			0.13164	0.13294	0.13116	0.13430	
50	0.5	FSDPT	0.13157	0.13286	0.13108	0.13425	
		Présent	0.10540	0.11788	0.10669	0.10972	
		Zenkour et al [17]	0.10541	0.11788	0.10670	0.10972	
		SSDPT	0.10540	0.11789	0.10671	0.10972	
50	2	FSDPT	0.10532	0.11776	0.10660	0.10966	
		Présent	0.03308	0.03340	0.03295	0.03375	
		Zenkour et al [17]	0.03308	0.03340	0.03295	0.03376	
		SSDPT	0.03308	0.03340	0.03295	0.03376	
50	2	FSDPT	0.03307	0.03339	0.03295	0.03375	
		Présent	0.02645	0.02958	0.02676	0.02754	
		Zenkour et al [17]	0.02645	0.02958	0.02676	0.02754	
		SSDPT	0.02645	0.02958	0.02677	0.02754	
50	2	FSDPT	0.02644	0.02957	0.02676	0.02754	

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Tableau IV.2. Comparaison de la température critique de flambement non dimensionnelle d'une plaque sandwich FGM sous variation non-linéaire de température sans fondation élastique par rapport au rapport (a/h) et de gradient k .

a/h	k	Théorie	1-1-1	1-0-1	2-1-2	1-2-1	
a/h=5	0.5	Présent	21.1247	21.6048	21.3330	20.8127	
		Bourada et al [13]	21.1243	21.6133	21.3382	-	
		Zenkour et al [17]	21.1243	21.6133	21.3382	20.8037	
		SSDPT	21.1324	21.6287	21.3507	20.8052	
		FSDPT	20.8990	21.3424	21.0830	20.6346	
	2	Présent	21.9657	22,9880	22.3216	21.5503	
		Bourada et al [13]	21.9830	23.0292	22.3527	-	
		Zenkour et al [17]	21.9830	23.0292	22.3527	21.5467	
		SSDPT	22.0015	23.0683	22.3825	21.5491	
		FSDPT	21.5817	22.5286	21.8905	21.2481	
	5	Présent	22.0271	23.6417	22.5598	21.5876	
		Bourada et al [13]	22.0631	23.7096	22.6148	-	
SSDPT		22.0953	23.7715	22.6638	-		
FSDPT		21.5644	23.1212	22.0336	-		
10		Présent	22.0600	23,9434	22.7434	21.5583	
	Bourada et al [13]	22.1070	24.0112	22.8131	-		
	SSDPT	22.1720	24.0763	22.8637	-		
	FSDPT	21.5599	23.4948	22.1795	-		
	a/h=10	0.5	Présent	5.79104	5.90994	5.83535	5.73613
Zenkour et al [17]			5.79091	5.90995	5.83566	5.73532	
SSDPT			5.79146	5.91108	5.83656	5.73535	
FSDPT			5.77339	5.88890	5.81584	5.72216	
2			Présent	5.81198	6.12150	5.89614	5.75400
		Zenkour et al [17]	5.81247	6.12449	5.89838	5.75368	
		SSDPT	5.81379	6.12734	5.90053	5.75380	
		FSDPT	5.78254	6.08684	5.86398	5.73116	
		a/h=25	0.5	Présent	0.80247	0.81981	0.80743
Zenkour et al [17]				0.80247	0.81982	0.80744	0.79933
SSDPT	0.80248			0.81985	0.80746	0.79933	
FSDPT	0.80199			0.81924	0.80689	0.79897	
2	Présent			0.75697	0.82100	0.77005	0.75947
	Zenkour et al [17]		0.75699	0.82107	0.77011	0.75946	
	SSDPT		0.75703	0.82115	0.77017	0.75946	
	FSDPT		0.75619	0.82005	0.76918	0.75885	
	a/h=50		0.5	Présent	0.06079	0.06380	0.06048
Zenkour et al [17]				0.06078	0.06380	0.06048	0.06402
SSDPT		0.06078		0.06380	0.06048	0.06402	
FSDPT		0.06075		0.06376	0.06044	0.06400	
2		Présent		0.01363	0.04051	0.01668	0.02279
		Zenkour et al [17]	0.01363	0.04052	0.01668	0.02279	
		SSDPT	0.01363	0.04051	0.01668	0.02279	
		FSDPT	0.01368	0.04044	0.01662	0.02275	

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Tableau IV.3. Comparaison de la température critique de flambement non dimensionnelle d'une plaque sandwich FGM sous variation linéaire de température sans fondation élastique par rapport au rapport (a/h) et l'indices de gradient k .

a/h	k	Théorie	1-1-1	1-0-1	2-1-2	1-2-1	
5	0.5	Présent	5.61458	5.68923	5.60932	5.69190	
		Bourada et al [13]	5.61449	5.69148	5.61059	-	
		Zenkour et al [17]	5.61448	5.69147	5.61059	5.68943	
		SSDPT	5.61662	5.69553	5.61388	5.68984	
		FSDPT	5.55460	5.62014	5.54350	5.64318	
	2	Présent	4.66632	5.20102	4.73615	4.80824	
		Bourada et al [13]	4.66999	5.21036	4.74275	4.80746	
		Zenkour et al [17]	4.66999	5.21036	4.74274	4.80799	
		SSDPT	4.67391	5.21919	4.74906	4.74083	
		FSDPT	4.58475	5.09711	4.64468	-	
	5	Présent	4.36303	5.80225	4.63645	4.42677	
		Bourada et al [13]	4.37017	5.81891	4.64797	-	
		SSDPT	4.37654	5.83411	4.65805	-	
		FSDPT	4.27139	5.65328	4.52851	-	
		10	Présent	4.33030	6.55680	4.77905	4.29999
	Bourada et al [13]		4.33937	6.55680	4.79372	-	
SSDPT	4.35224		6.57459	4.80638	-		
FSDPT	4.23198		6.41578	4.66058	-		
10	0.5		Présent	1.53915	1.55612	1.53432	1.56872
		Zenkour et al [17]	1.53912	1.55627	1.53440	1.56850	
		SSDPT	1.53926	1.55657	1.53464	1.56851	
		FSDPT	1.53446	1.55073	1.52919	1.56490	
		2	Présent	1.23452	1.38498	1.25103	1.28382
	Zenkour et al [17]		1.23477	1.38566	1.25150	1.28375	
	SSDPT		1.23506	1.38631	1.25196	1.28377	
	FSDPT		1.22842	1.37714	1.24420	1.27872	
	25		0.5	Présent	0.21328	0.21588	0.21230
		Zenkour et al [17]		0.21328	0.21588	0.21231	0.21860
SSDPT		0.21329		0.21589	0.21231	0.21860	
FSDPT		0.21315		0.21573	0.21216	0.21850	
2		Présent		0.16081	0.18576	0.16340	0.16945
		Zenkour et al [17]	0.16081	0.18576	0.16340	0.16944	
		SSDPT	0.16082	0.18578	0.16341	0.16944	
		FSDPT	0.16064	0.18553	0.16320	0.16931	
		50	0.5	Présent	0.01615	0.01680	0.01590
Zenkour et al [17]				0.01615	0.01680	0.01590	0.01751
SSDPT	0.01615			0.01680	0.01590	0.01751	
FSDPT	0.01614			0.01679	0.01589	0.01750	
2	Présent			0.00289	0.00916	0.00353	0.00508
	Zenkour et al [17]		0.00289	0.00917	0.00354	0.00508	
	SSDPT		0.00289	0.00916	0.00354	0.00508	
	FSDPT		0.00288	0.00915	0.00353	0.00507	

Les tableaux IV.1, IV.2 et IV.3 montrent les variations de la température critique de flambement d'une plaque sandwich en FGM reposant sur des fondations élastiques pour

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

différentes théories des plaques et trois chargements thermiques différents : uniforme, linéaire et non-linéaire. On note qu'il y a une bonne concordance entre les résultats obtenus par le modèle proposé et les résultats obtenus par Bourada et al. [13], Zenkour et al. [17] et Yaghoobi et al. [16]. En outre, il est observé que le type de chargement thermique a un impact important sur la température critique de flambement d'une plaque sandwich en FGM. Les températures critiques obtenues pour une variation non-linéaire de la température et sont les plus élevées comparativement aux autres chargements thermiques. Les valeurs les plus basses sont observées pour le chargement uniforme.

Dans le tableau IV.4 sont reportés les résultats des différences de température critique de flambement T_{cr} des plaques sandwichs en FGM sous chargement thermique ($k=2$, $a/h=50$) pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique **kw** et **kg**.

Table IV.4. L'effet des paramètres de la fondation élastiques sur la différence de température critique de flambement T_{cr} , des plaques sandwich en FGM sous chargement thermique ($k=2$, $a/h=50$)

Schéma kg=10	kw	10	50	100
(1-2-1)	Present	35.37540	35.37540	35.37540
	Yaghoobi [16]	35.37104	35.37104	35.37104
(1-2-1)	Present	35.38110	37.10400	39.25770
	Yaghoobi [16]	35.37592	37.09886	39.25252
(1-2-1)	Present	36.83370	38.77480	41.20120
	Yaghoobi [16]	36.82788	38.76898	41.19535
Schema kw=10	kg	5	10	25
(1-2-1)	Present	31.64790	35.37540	46.55790
	Yaghoobi [16]	31.64354	35.37104	46.55352
(1-2-1)	Present	31.12990	35.38110	48.13460
	Yaghoobi [16]	31.12475	35.37592	48.12944
(1-2-1)	Present	32.04420	36.83370	51.20210
	Yaghoobi [16]	32.03841	36.82788	51.19629

Les tableaux IV.5, IV.6 montrent l'effets de la fondation élastique sur la variation de la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FGM carrée simplement appuyée sous variation de température (uniforme et linéaire) pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et du rapport côté / épaisseur.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Table IV.5. effets de fondation sur la variation de la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FGM carrée simplement appuyée sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et du rapport côté / épaisseur.

k	Kw, Kg	a/h	Présente	Zenkor et al HSDT [18]	Zenkor et al FSDT [18]	Yaghoob et al [19]
0	(0, 0)	5	5.58344	5.58344	5.58069	5.58069
		10	1.61870	1.61868	1.61862	1.61862
		20	0.42153	0.42154	0.42153	0.42153
	(10, 0)	5	5.75900	5.75899	5.75622	5.75623
		10	1.66256	1.66257	1.66251	1.66251
		20	0.43250	0.43251	0.43251	0.43251
	(10, 10)	5	9.22400	9.22398	9.22123	9.22123
		10	2.52882	2.52882	2.52876	2.52876
		20	0.64906	0.64907	0.64907	0.64907
5	(0, 0)	5	2.27500	2.27501	2.35948	2.35948
		10	0.67931	0.67931	0.68678	0.68678
		20	0.17853	0.17854	0.17905	0.17905
	(10, 0)	5	2.50178	2.50179	2.58625	2.58625
		10	0.73600	0.73600	0.74348	0.74347
		20	0.19270	0.19271	0.19322	0.19322
	(10, 10)	5	6.97810	6.97810	7.06257	7.06257
		10	1.85509	1.85508	1.86255	1.86255
		20	0.47247	0.47248	0.47299	0.47299
10	(0, 0)	5	2.27679	2.27678	2.36822	2.36822
		10	0.69269	0.69269	0.70108	0.70108
		20	0.18314	0.18314	0.18373	0.18373
	(10, 0)	5	2.53272	2.53273	2.62417	2.62416
		10	0.75668	0.75668	0.76507	0.76507
		20	0.19914	0.19914	0.19972	0.19972
	(10,10)	5	7.58484	7.58483	7.67626	7.67626
		10	2.01971	2.01970	2.02809	2.02809
		20	0.51489	0.51490	0.51548	0.51548

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Table IV.6. Effets de fondation sur la variation de la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FGM carrée simplement appuyée sous élévation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et du rapport côté / épaisseur.

k	Kw, Kg	a/h	Présente	Zenkor et al HSDT [18]	Zenkor et al FSDT [18]	Yaghoob et al [19]
0	(0, 0)	5	11.15689	11.15688	11.15138	11.15138
		10	3.22736	3.22736	3.22725	3.22725
		20	0.83307	0.83307	0.83306	0.83307
	(10, 0)	5	11.50797	11.50796	11.50246	11.50246
		10	3.31513	3.31513	3.31502	3.31502
		20	0.85501	0.85501	0.85501	0.85501
	(10, 10)	5	18.43798	18.43797	18.43246	18.43246
		10	5.04763	5.04764	5.04752	5.04752
		20	1.28813	1.28814	1.28814	1.28814
5	(0, 0)	5	3.90735	3.90735	4.05274	4.05274
		10	1.16068	1.16069	1.17354	1.17354
		20	0.29870	0.29871	0.29959	0.29959
	(10, 0)	5	4.29769	4.29770	4.44308	4.44308
		10	1.25827	1.25827	1.27113	1.27113
		20	0.32310	0.32310	0.32399	0.32399
	(10, 10)	5	12.00275	12.00275	12.14816	12.14814
		10	3.18453	3.18453	3.19739	3.19739
		20	0.80466	0.80467	0.80555	0.80555
10	(0, 0)	5	4.02575	4.02576	4.18778	4.18778
		10	1.21863	1.21864	1.23350	1.23350
		20	0.31568	0.31568	0.31672	0.31672
	(10, 0)	5	4.47930	4.47930	4.64132	4.64132
		10	1.33202	1.33203	1.34688	1.34688
		20	0.34403	0.34403	0.34506	0.34506
	(10, 10)	5	13.43194	13.43194	13.59396	13.59396
		10	3.57018	3.57019	3.58504	3.58504
		20	0.90357	0.90357	0.90460	0.90460

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

IV.8.2. Étude des paramètres d'une plaque (P-FGM) simplement appuyée

Le tableau IV.7 montre l'effet de la dépendance de l'indice matériel et le rapport géométrique (a/b) sur la température critique du flambement des différentes plaques sandwich en FGM sans fondation élastique ($K_w=K_g=0$) sous différentes variations de température.

Table IV.7. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich FGM sous variation de température (uniforme, linéaire et non linéaire) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport d'aspect a/b . ($a/h=10$).

a/b	k	Uniforme			linéaire			Non- linéaire		
		2-1-2	1-1-1	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-0-1
0.5	0.5	0.50264	0.50432	0.50953	0.95527	0.95864	0.96905	3.63310	3.60688	3.67998
	1	0.79215	0.79457	0.80306	1.53434	1.53916	1.55612	5.83538	5.79102	5.90937
	2	1.86841	1.87204	1.89450	3.68682	3.69408	3.73900	14.0218	13.8988	14.1988
	3	3.41538	3.41656	3.46402	6.78078	6.78312	6.87806	25.7885	25.5214	26.1195
	5	6.96870	6.94595	7.07245	13.8873	13.8418	14.0950	52.8162	52.0794	53.5258
1	0.5	0.45183	0.45271	0.46884	0.85365	0.85542	0.88767	3.65460	3.61876	3.73542
	1	0.71370	0.71483	0.74047	1.37740	1.37968	1.43095	5.89682	5.83655	6.02156
	2	1.69765	1.69807	1.76048	3.34530	3.34618	3.47096	14.3217	14.1556	14.6062
	3	3.14151	3.13610	3.25543	6.23310	6.22218	6.46088	26.6845	26.3223	27.1882
	5	6.59529	6.55322	6.82289	13.1406	13.0563	13.5957	56.2565	55.2335	57.2120
5	0.5	0.39930	0.37539	0.50925	0.74861	0.70078	0.96850	3.64240	3.53798	3.94626
	1	0.63251	0.59475	0.80461	1.21503	1.13951	1.55924	5.91175	5.75291	6.35321
	2	1.52064	1.43093	1.91579	2.99128	2.81185	3.78158	14.5542	14.1959	15.4083
	3	2.85874	2.69313	3.55028	5.66744	5.33628	7.05060	27.5752	26.9404	28.7282
	5	6.23814	5.89348	7.47970	12.4262	11.7369	14.9094	60.4605	59.2549	60.7491
10	0.5	0.41190	0.37156	0.58288	0.77381	0.69314	1.11577	3.68256	3.53122	4.08601
	1	0.65239	0.58889	0.91908	1.25478	1.12778	1.78814	5.97147	5.74550	6.54827
	2	1.56764	1.41861	2.17164	3.08528	2.78724	4.29328	14.6827	14.1996	15.7222
	3	2.94487	2.67499	3.97994	5.83975	5.30010	7.90994	27.7914	27.0014	28.9666
	5	6.41396	5.88212	8.16946	12.7781	11.7152	16.2888	60.8097	59.6820	59.6511

IV.8.2.1 : Influence du rapport géométrique (b/a) et fondations élastique sur la température critique de flambement

L'influence de la fondation élastique sur la température critique de flambement des plaques sandwich FGM (2-1-2) pour des variations uniforme et linéaire est illustrée sur la figure IV.2. On remarque que pour les plaques avec ou sans fondation élastique, la température critique de flambement de la plaque sandwich diminue lorsque le rapport d'aspect b/a augmenté indépendamment des valeurs des constantes de la fondation élastique (k_w et k_g), et du type de chargement thermique. La température critique de flambement devient constante lorsque b/a devient supérieur à 2.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

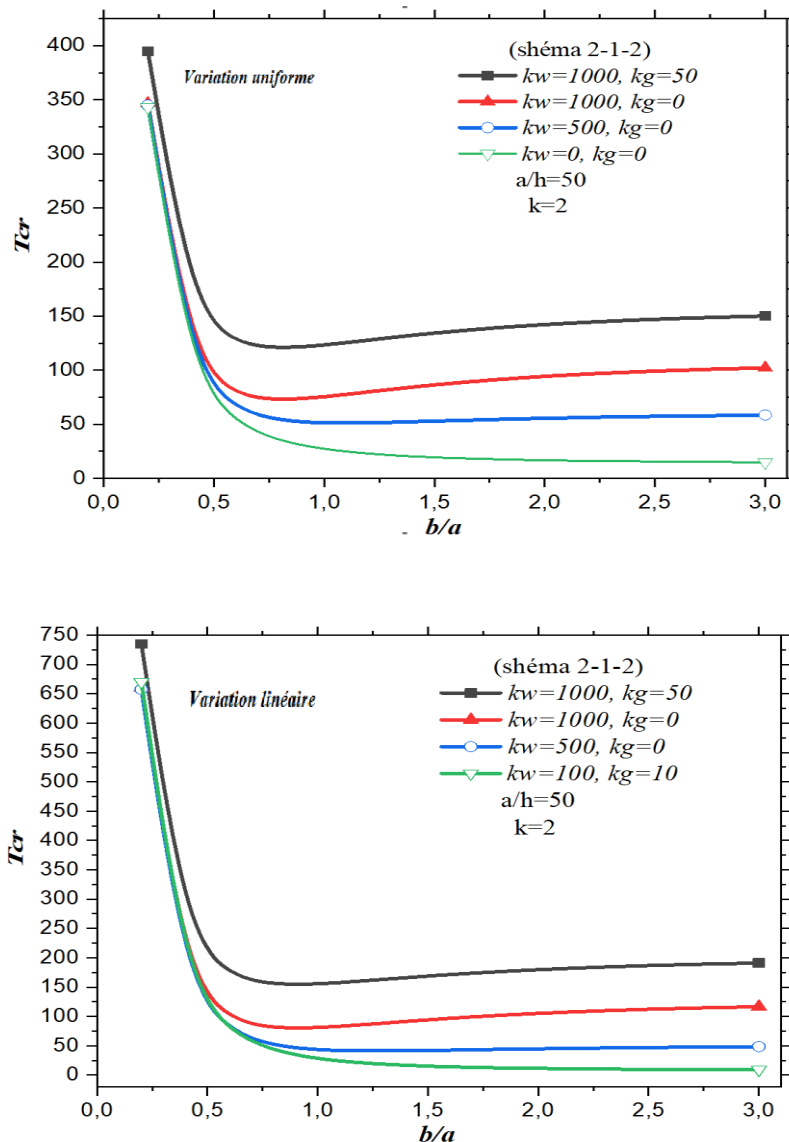
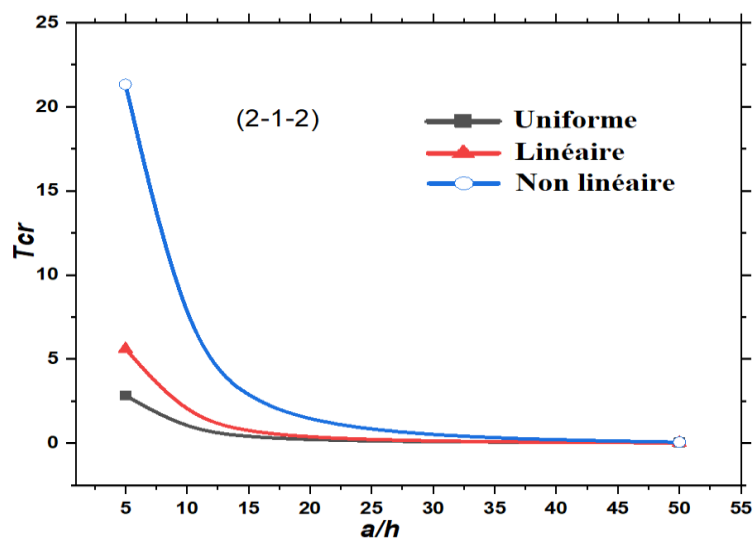
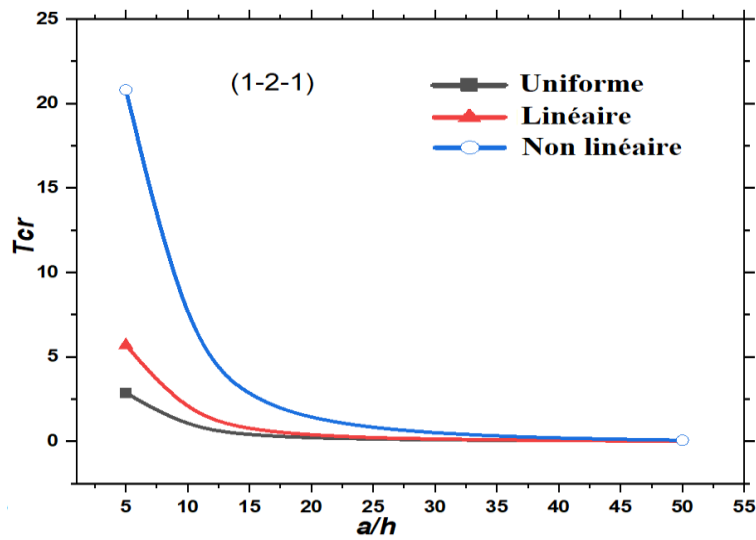
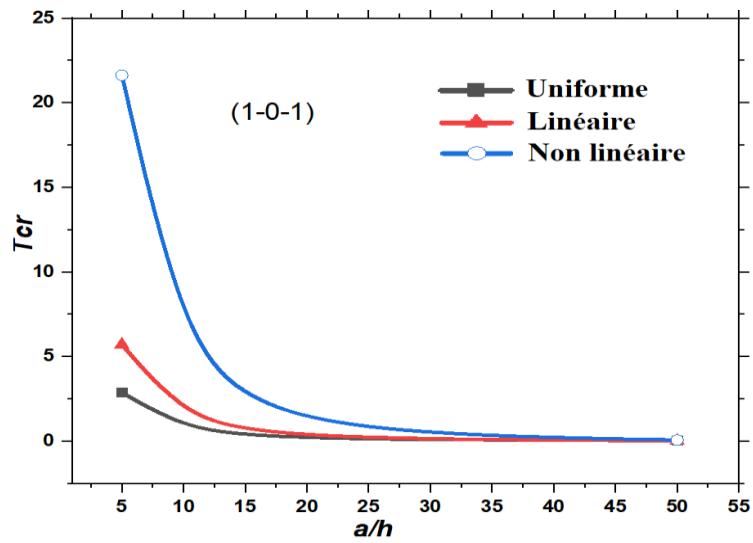


Figure IV.2. Effet du rapport géométrique (b/a) et des paramètres des fondations élastiques sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich a trois couches (2-1-2) FGM ($k=2, a/h=50$).

IV.8.2.2 : Influence du rapport (a/h) sur la température critique de flambement

La variation des températures critiques T_{cr} des plaques sandwich FGM soumises à différents types de chargement thermique (UTR, LTR et NTR) en fonction du rapport côté/épaisseur a/h et pour différentes configurations (1-0-1, 1-2-1, 2-1-2 et 1-1-1) est illustrée à la figure.IV.3 .

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques



Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

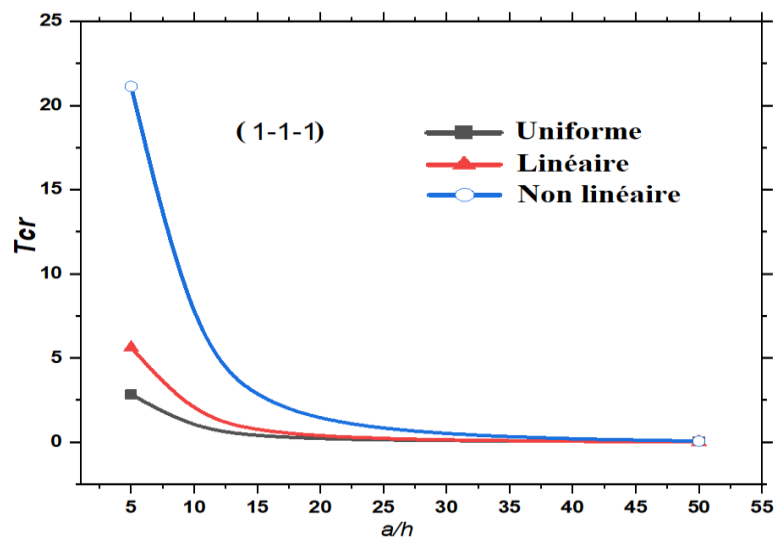


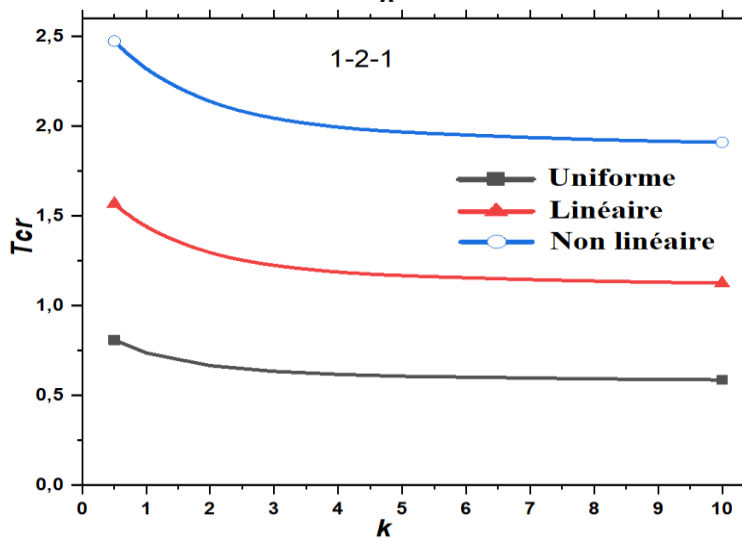
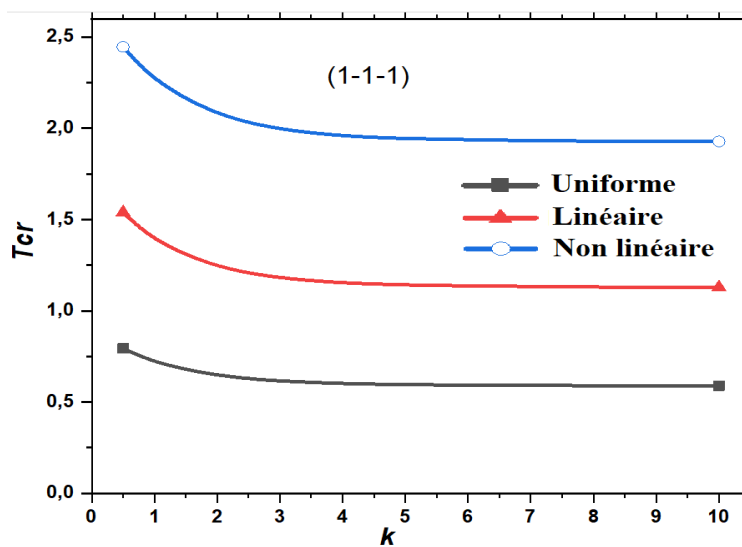
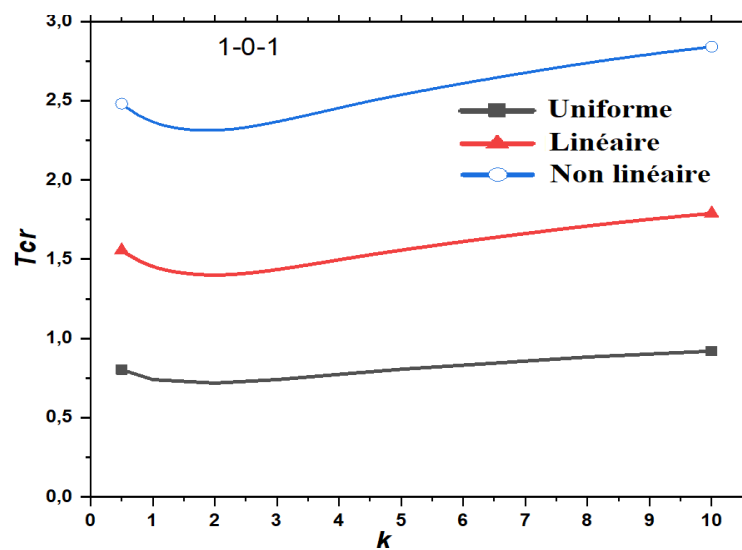
Figure IV.3. Variation de la température critique de flambement en fonction du rapport côté-épaisseur a/h de différents types de plaques sandwich FGM sous chargement thermique (uniforme, linéaire et non linéaire)

Pour les quatre types de plaques à faible rapport d'épaisseur, on observe des écarts considérables entre les résultats pour les différentes variations de température. Cependant, pour une valeur significative du rapport d'épaisseur, l'écart entre les valeurs critiques de température est faible. C'est clair, et ce quel que soit le type de chargement ou le type de plaque sandwich. On observe que la température critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport côté sur épaisseur a/h .

IV.8.2.3 : Influence de l'indice matériel (k) sur la température critique de flambement

La figure.IV.4 montre l'effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la température critique de flambement T_{cr} pour différents types des plaques sandwich FGM sous différents types de chargement thermique. On peut également voir que les températures critiques T_{cr} des plaques soumise à une charge uniforme (UTR) sont inférieures à celles de la plaque soumise à une charge linéaire (LTR), et ce dernier est inférieur à celle de la plaque soumise à une charge non linéaire (NTR).

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques



Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

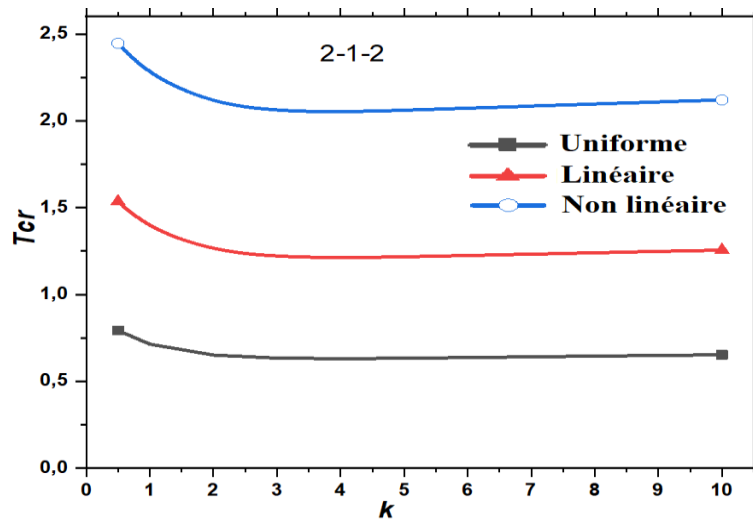
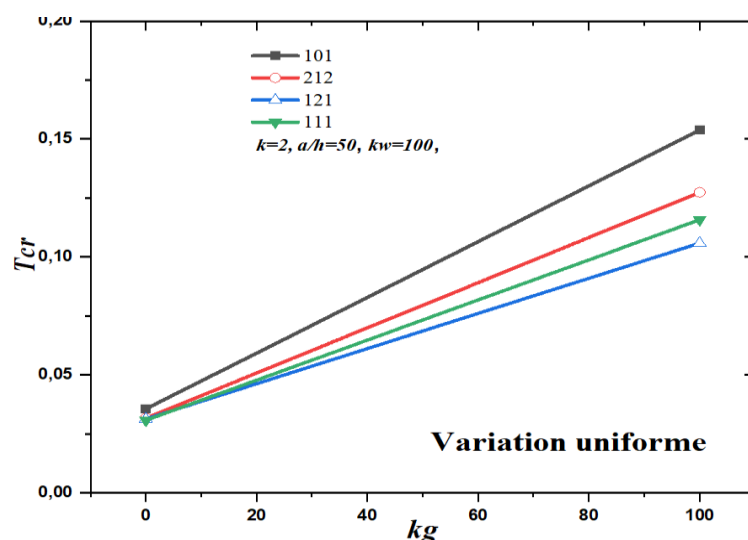


Figure IV.4. Variation de la température critique de flambement en fonction de l'indice matériel k pour différents types de plaques sandwich FGM sous chargement thermique (uniforme, linéaire et non linéaire) ($a/h=10$)

On note que pour la plaque sans âme où l'âme de la plaque est la moitié de l'épaisseur de la face dans le cas des sandwichs de configurations (1-0-1) et (2-1-2), la température critique de flambement T_{cr} diminue rapidement pour atteindre des valeurs minimales puis augmente progressivement avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité k . Par contre, pour les plaques sandwich FGM (1-1-1) et (1-2-1), l'augmentation de l'indice de loi de puissance k conduit à une diminution progressive de la température critique de flambement.

IV.8.2.4 : Influence du paramètre de Pasternak (kg) sur la température critique de flambement.



Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

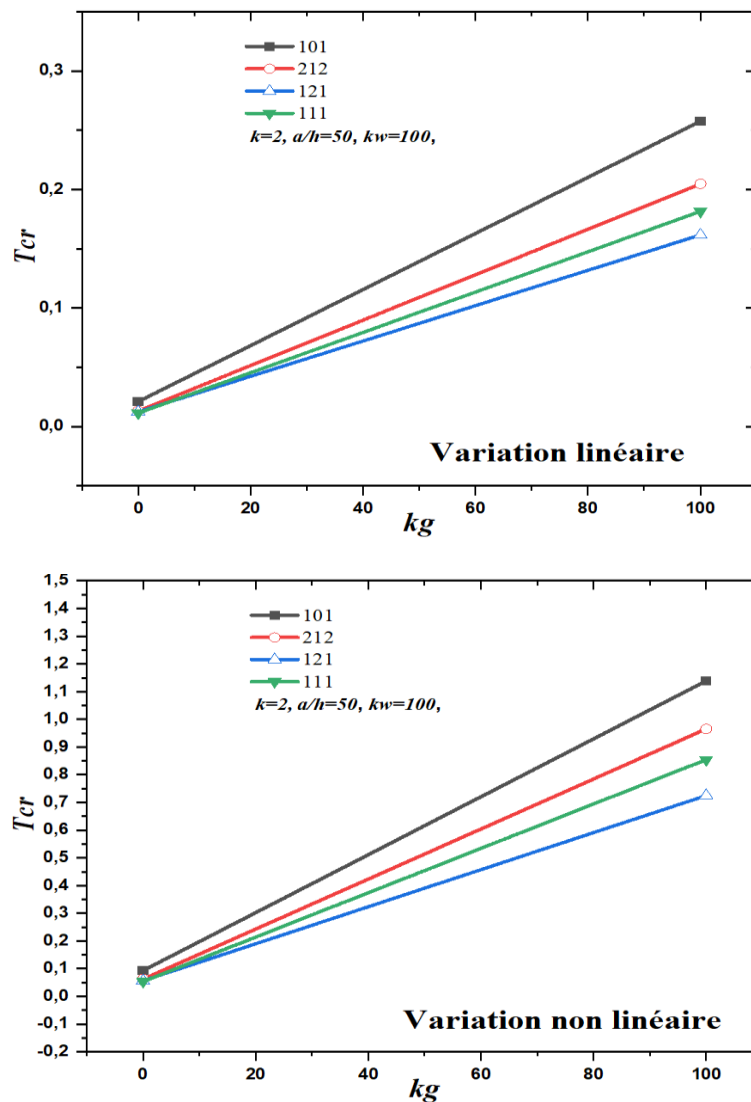


Figure IV.5. Effet des paramètres de la fondation élastique (*Paramètre de Pasternak*) sur la température critique de flambement de la plaque sandwich FGM pour divers chargements thermiques ($a/h=50$).

La figure IV.5 montre la variation de la température critique de flambement de la plaque FGM en fonction du paramètre de Pasternak pour différents chargement thermique uniformes linéaires et non linéaire

IV.8.2.5 : Influence du paramètre de Winkler (k_w) sur la température critique de flambement.

La figure IV.6 montrent la variation de la température critique de flambement de la plaque FGM par en fonction du paramètre de Winkler pour différents chargement thermique uniformes linéaires et non linéaire.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

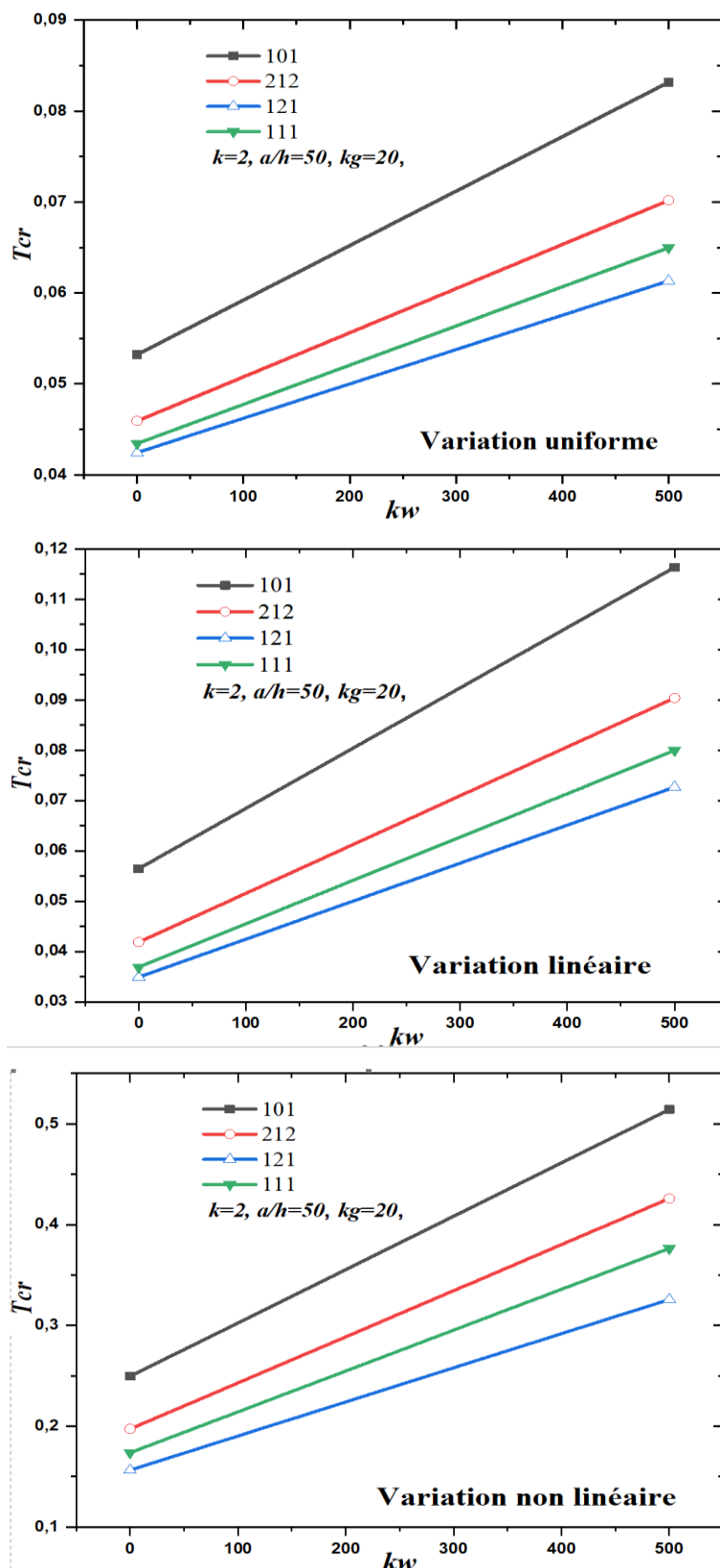


Figure IV.6. L'effet des paramètres de la fondation élastique (*Paramètre de Winkler*) sur la température critique de flambement de la plaque sandwich FGM pour divers chargements thermiques ($a/h=50$).

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

La température critique de flambement des plaques FGM augmente avec l'augmentation des paramètres de Winkler et Pasternak pour tous les types de plaques (configurations des couches). On note que l'inclusion du paramètre Pasternak (K_p) donne des résultats de plus grande amplitude de T_{cr} que ceux avec l'inclusion de paramètre de Winkler (K_w).

IV.9. Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilité au flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées soumises aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur a été étudiée sur la base de la théorie hyperbolique de déformation de cisaillement, le nombre d'inconnus et des équations d'équilibre a été réduit à quatre. Les propriétés matérielles de la plaque ont été considérées comme variant selon l'épaisseur suivant une simple loi de puissance.

Une étude paramétrique a été menée pour l'influence de certains paramètres tels que le rapport géométrique, le rapport d'aspect, les paramètres de la fondation élastique sur la variation de la température critique de flambement. Sur la base des résultats obtenus, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Le type de chargement thermique influence de manière significative la température critique de flambement des plaques sandwich FGM avec ou sans fondation élastique.
- la différence de température critique de flambement des plaques sandwich FGM diminue lorsque le rapport côté/épaisseur a/h augmente
- La rigidité de la fondation a un effet significatif sur la température de flambement des plaques sandwich. L'effet de k_g sur la température critique de flambement est plus prononcé que k_w .
- En augmentant la valeur de l'indice de matériau, la température critique diminue initialement puis augmente dans le cas des structures sandwich pour $h_{âme} < h_{face}$, mais pour les structures où $h_{âme} \geq h_{face}$ la température critique T_{cr} diminue progressivement jusqu'à des valeurs minimales.

La comparaison des résultats obtenus par le modèle développé aux résultats obtenus à partir d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur montre qu'il y a une bonne corrélation.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

Références bibliographiques

- [1] **Ait Amar. M, Abdelaziz. H. and Tounsi. AO, (2014).** «An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions », *Journal of Sandwich Structures and Materials* 16, 293-318.
- [2] **Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015),** « A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations », *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1215-1240.
- [3] **Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015),** « A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities », *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(2), 369-384.
- [4] **Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015),** « A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates », *Appl. Math. Model.*, 39 (9), 2489-2508.
- [5] **Meksi,R, Benyoucef .S, Mahmoudi. A, Tounsi. AO. Bedia .AE and Mahmoud .SR, (2017)** « An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich platesInt. », *J; Journal of Sandwich Structures and Materials*; 21 No 2, 727-757.
- [6] **Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015),** « A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations», *J. Sandw. Struct. Mater*, 17(2), 99-129.
- [7] **Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016),** « A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates», *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423- 431.
- [8] **Refrafi, S Bousahla, A, Bouhadra, A, Menasria A, Bourada F, Tounsi A, Adda Bedia EA, Mahmoud .SR, Benrahou .KH, Tounsi AO (2020)** « Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations »: *Computers and Concrete, An International Journal*, V25.N4. (311-325).
- [9] **Kiani, Y. Eslami, M.R. (2012)** « Thermal buckling and post-buckling response of imperfect emperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation » *Arch Appl Mech* 82, 891–905.
- [10] **Aiello .M. A. Ombres. L, (1999).** «Buckling and vibrations of unsymmetric laminates resting on elastic foundations under in-plane and shear forces, » *Compos. Struct*: 44(1), 31–41.

Etude analytique de la Stabilité Thermique des Plaques sandwichs en FGM sur des fondations élastiques

- [11] **Yaghoobi. H, Torabi. M (2013).** «Thermal buckling and vibration of functionally graded sinusoidal micro beams incorporating nonlinear temperature distribution using DQM » *Journal of Thermal Stresses*, 36 No 9, 869-894.
- [12] **A. Bouhadra, S. Benyoucef, OA. Tounsi, F. Bernard, RB. Bouiadjra and MS. Houari, (2015).** « Thermal Buckling Response of Functionally Graded Plates with Clamped Boundary Conditions » *Journal of Thermal Stresses*, 38 No 6, 630-650.
- [13] **Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012),** « A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates», *J. Sandw. Struct. Mater.* 14(1), 5-33.
- [14] **Duc, N.D., Tung, H.V. (2011)** « Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations», *Composite Structures*, 93, 2874–2881.
- [15] **Asmaa Fahsi (2018)** « Analyse Du Flambement Des Plaques FGM Sous Différents Chargements » thèse de doctorat université djillali liabes - sidi bel abbes, algerie.
- [16] **Yaghoobi. H., Yaghoobi. P. (2013).** « Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach» *Meccanica* 48:2019–2035.
- [17] **AM. Zenkour, M. Sobhy, (2010).** «Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates », *Compos Struct*; 93, 93–102,
- [18] **Zenkour.A. M. & Sobhy. M. (2011)** «Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting On Elastic Foundations Using the Trigonometric Theory », *Journal of Thermal Stresses*, 34:11, 1119-1138,
- [19] **H. Yaghoobi and M. Torabi, (2013)** « Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions », *J. Therm. Stresses*, vol. 36, pp. 869–894.

***CHAPITRE V : ANALYSE DE LA FLEXION
DES POUTRES SANDWICHES FGM***

***« Résultats, Validation
et Interprétations »***

V.1. Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour l'analyse de la flexion des poutres FG sandwich et vérifier l'exactitude de la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D et 2D des poutres FG sandwich actuelle dont le nombre des inconnus est seulement quatre.

En outre, l'influence des différents paramètres tels que le paramètre d'inhomogénéité (indice matériel), le rapport longueur-épaisseur (L/h) et du rapport des modules d'élasticité E_c/E_m sur le comportement en flexion des poutres sandwich fonctionnellement graduées seront discutés.

Pour valider la précision et l'efficacité de la présente théorie, des comparaisons sont faites avec des solutions obtenues en utilisant d'autres théories de déformation du cisaillement issues de la littérature.

V.2. Configuration géométrique

La Figure. V.1 présente la géométrie de la poutre P-FGM dont les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z est l'origine à la surface du milieu de la poutre dans le sens de l'épaisseur.

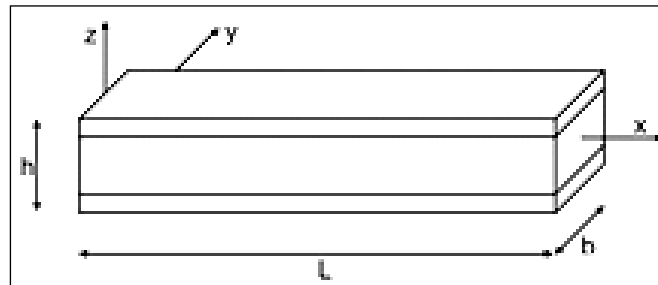


Figure.V.1 .Géométrie et coordonnées de la poutre sandwich P-FGM.

V.3. Cinématique et équations constitutives

V.3.1. Champs de déplacement

Le champ de déplacement des poutres P-FGM selon la théorie d'ordre élevé s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + K f(z) \int \theta(x) dx \quad (\text{V.1a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) + g(z) \varphi_z(x) \quad (\text{V.1b})$$

Où

u_0 , w_0 , θ , φ_z sont les déplacements du plan médian de la plaque, K est le coefficient dépendant de la géométrie de la plaque. Dans cette étude, la théorie de la plaque de déformation en cisaillement quasi-3D est proposée en considérant :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right), \quad g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{V.2})$$

$$\int \theta dx = A \frac{\delta \theta}{\delta x} \quad A = -1/\lambda^2, \quad K = \lambda^2 \quad (\text{V.3})$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la méthode de Navier et le champ de déplacement peut être réécrit comme suit

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + K A f(z) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (\text{V.4a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) + g(z) \varphi_z(x) \quad (\text{V.4b})$$

V.3.2. Champs de déformation

Les déformations associées aux déplacements sont données par :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 + f(z) \varepsilon_{xx}^2 \quad (\text{V.5a})$$

$$\varepsilon_{zz} = g'(z) \varepsilon_{zz}^0 \quad (\text{V.5b})$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (\text{V.5c})$$

Avec

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x}, \quad \varepsilon_{xx}^2 = K A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{V.6a})$$

$$\varepsilon_{zz}^0 = \varphi_z \quad (\text{V.6b})$$

$$\gamma_{xz}^0 = K A \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \quad (\text{V.6c})$$

V.3.3. Équations constitutives

Les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$7 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{V.7})$$

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{33}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2}, \quad (\text{V.8a})$$

Avec

$$Q_{13}^{(n)} = \nu^{(n)} Q_{11}^{(n)}, \quad (\text{V.8b})$$

$$Q_{55}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \nu^{(n)})}, \quad (\text{V.8c})$$

V.4. Équations d'équilibres

En vue d'établir l'ensemble des équations d'équilibre la poutre sandwich en FGM, le principe des travaux virtuels est utilisé. Le principe des travaux virtuels est donné par sa forme analytique comme suit :

$$\delta V_{tot} = \int_V [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV - \int_{\Omega} q \delta w(x) d\Omega = 0 \quad (\text{V.9})$$

La variation de l'énergie de déformation U de la poutre peut s'écrire :

$$\delta U = \int_V [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \quad (\text{V.10a})$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \left(\sigma_{xx}^{(n)} (\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1 + f(z) \delta \varepsilon_{xx}^2) + \sigma_{zz}^{(n)} \delta (g'(z) \delta \varepsilon_{zz}^0) + \tau_{xz}^{(n)} \delta (g(z) \delta \gamma_{xz}^0) \right) dV \\ &= b \int_0^l \left(N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + P_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^2 + N_{zz} \delta \varepsilon_{zz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 \right) dx \end{aligned} \quad (\text{V.10b})$$

Où : N_{xx} , M_{xx} , P_{xx} , N_{zz} et Q_{xz} sont les résultantes de contrainte, définies par :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{xx} dz, & M_{xx} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{xx} z dz, \\ P_{xx} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{xx} f(z) dz, & N_{zz} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{zz} g'(z) dz, \\ Q_{xz} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \tau_{xz} g(z) dz, \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée par :

$$\delta U_q = - \int_A q \delta w(x) dx = - \int_A q \delta w_0(x) + q g(z) \delta \varphi_z dx \quad (\text{V.12})$$

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

Où : q est la charge transversale distribuée.

En substituant les expressions δU et δU_q des équations (V.10) et (V.12) dans Le principe des travaux virtuels l'équation (V.9) et faisant l'intégration par parties, et en recueillant les coefficients δu_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_z$, on obtient les équations d'équilibre et suivantes :

$$\delta u_0: \quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (V.13a)$$

$$\delta w_0: \quad -\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - q = 0 \quad (V.13b)$$

$$\delta \theta: \quad KA \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} - KA \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (V.13c)$$

$$\delta \varphi_z: \quad N_{zz} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - q g(z) = 0 \quad (V.13d)$$

En substituant l'équation (V.5) et l'équation (V.6) dans l'équation (V.7) et les résultats dans l'équation (V.11). Les résultantes des contraintes et des moments peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \\ N_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} As & Bs & Cs & L \\ & Ds & Fs & La \\ & & Hs & R \\ Sym & & & Ra \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx}^0 \\ \mathcal{E}_{xx}^1 \\ \mathcal{E}_{xx}^2 \\ \mathcal{E}_{zz}^0 \end{Bmatrix} \quad (V.14a)$$

$$\{Q_{xz}\} = [Gs] \{\gamma_{xz}^0\} \quad (V.14b)$$

Avec

$$As = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} dz, \quad Bs = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} z dz, \quad (V.15a)$$

$$Ds = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} z^2 dz, \quad Cs = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} f(z) dz, \quad (V.15b)$$

$$Fs = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} z f(z) dz, \quad Hs = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} f(z)^2 dz \quad (\text{V.15c})$$

$$L = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{13}^{(n)} g'(z) dz, \quad La = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{13}^{(n)} z g'(z) dz, \quad (\text{V.15d})$$

$$R = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{13}^{(n)} f(z) g'(z) dz, \quad Ra = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{13}^{(n)} g'(z)^2 dz, \quad (\text{V.15e})$$

$$Gs = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{55}^{(n)} g(z)^2 dz, \quad (\text{V.15f})$$

En remplaçant les contraintes résultantes de l'équation (V.14) dans l'équation (V.13), les équations d'équilibre peuvent être exprimées en termes de déplacements ($u_0, w_0, \theta, \varphi_z$) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0: \quad & As (\partial^2 u_0 / \partial x^2) - Bs (\partial^3 w_0 / \partial x^3) \\ & + KA Cs (\partial^3 \theta / \partial x^3) + L (\partial \varphi_z / \partial x) = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.16a})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0: \quad & -Bs (\partial^3 u_0 / \partial x^3) + Ds (\partial^4 w_0 / \partial x^4) \\ & - Fs KA (\partial^4 \theta / \partial x^4) - La (\partial^2 \varphi_z / \partial x^2) - q = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.16b})$$

$$\begin{aligned} \delta \theta: \quad & -Cs KA (\partial^3 u_0 / \partial x^3) + Fs KA (\partial^4 w_0 / \partial x^4) \\ & - (KA)^2 (Hs (\partial^4 \theta / \partial x^4) - Gs (\partial^2 \theta / \partial y^2)) \\ & + (KA) (R - Gs) (\partial^2 \varphi_z / \partial x^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.16c})$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_z: \quad & L (\partial u_0 / \partial x) - La (\partial^2 w_0 / \partial x^2) + Ra \varphi_z \\ & + K_1 A (\partial^2 \theta / \partial x^2) (R - Gs) - Gs (\partial^2 \varphi_z / \partial x^2) - q = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.16d})$$

V.5. Solution analytique pour les poutres sandwich FGM simplement appuyées

Dans cette partie nous intéressons à la solution exacte des équations (V.16) pour une poutre simplement appuyée en FGM. La solution de Navier est employée afin de déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables du déplacement sont écrites comme produit de paramètres arbitraires et fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(\lambda x) \quad (\text{V.17a})$$

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin(\lambda x) \quad (\text{V.17b})$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(\lambda x) \quad (\text{V.17c})$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin(\lambda x) \quad (\text{V.17d})$$

Où : U_n, W_n, X_n and ϕ_n sont des paramètres arbitraires à déterminer, λ exprimés comme :

$$\lambda = m\pi / l$$

La charge transversale q est également développée dans la série des doubles sinus de Fourier comme [1] :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\lambda x) \quad (\text{V.18})$$

Q_n est l'amplitude de charge calculée à partir de :

$$Q_n = 2 / l \int_0^l q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (\text{V.19})$$

Pour une charge typique, les coefficients Q_n sont donnés par :

$$Q_n = \begin{cases} q_0(n=1) & \text{cas d'une charge sinusoïdale} \\ 4q_0 / n\pi(n=1,3,5,\dots) & \text{cas d'une charge uniformément} \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

Où : q_0 représente l'intensité de la charge sur la poutre.

En substituant les extensions de u, w, θ, φ et q des équations (V.17) et (V.18) dans les équations (V.16), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ W_n \\ X_n \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ 0 \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{V.21})$$

Où :

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= -A_s \lambda^2, \quad L_{12} = B_s \lambda^3, \quad L_{13} = -C_s KA \lambda^3 \\
 L_{14} &= L \lambda, \quad L_{22} = D_s \lambda^4, \quad L_{23} = -F_s KA \lambda^4, \\
 L_{24} &= La \lambda^4, \quad L_{33} = -(KA)^2 (H_s \lambda^2 + G_s) \lambda^2 \\
 L_{34} &= -(KA)(R - G_s) \lambda^2, \quad L_{44} = Ra + G_s \lambda^2
 \end{aligned} \tag{IV.22}$$

V.6. Résultats et discussions

Dans cette section, un certain nombre d'exemples numériques sont analysés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie, et étudier la flexion des poutres sandwich FG. Les poutres sandwich FG sont constituées d'un mélange de céramique isotrope (Al_2O_3) et de métal (Al). Les propriétés matérielles de Al_2O_3 sont : $E_c=380 \text{ GPa}$, $\nu_c=0.3$, et celles de Al sont : $E_m=70 \text{ GPa}$, $\nu_m=0.3$. Pour l'analyse de la flexion, une poutre soumise à une charge sinusoïdale est considérée. Pour plus de commodité, les formes sans dimension suivantes sont utilisées [2] :

$$\bar{w} = 100 \frac{Emh^3w}{q_0L^4} \quad (x = L/2), \tag{V.23a}$$

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{h}{q_0L} \right) \sigma \quad (x = L/2, z = h/2), \tag{V.23b}$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \left(\frac{q_0L}{h} \right) \tau_{xz} \quad (x = 0, z = 0). \tag{V.23c}$$

V.6.1. Etude comparative :

Dans un premier temps, nous avons étudié la variation de la flèche adimensionnelle et les contraintes axiales et tangentielles non dimensionnelles d'une poutre sandwich FG carrée simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z = 0$). Les résultats obtenus sont comparés avec la théorie de déformation de cisaillement 2D développée par Osofero et al. [3], Thanh Trung et al [4] et la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D développée par Thuc P. Vo et al [5]. Les tableaux V.1 et V.2 regroupent l'ensemble des résultats de la variation de la flèche centrale adimensionnelle et de la contrainte normale adimensionnelle d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z = 0$). Les résultats obtenus montrent que pour un indice matériel $k=0$, la flèche centrale adimensionnelle est sensiblement la même pour toutes les configurations étudiées. Lorsque l'indice matériel k augmente, la flèche centrale adimensionnelle augmente, les valeurs les plus élevées de la flèche sont observées pour une configuration (2-1-2) et les plus basses valeurs où la couche centrale est huit fois plus grande que les couches des faces. La même tendance est observée concernant

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

la variation de la contrainte normale adimensionnelle.

Tableau V.1. Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20$, $\varepsilon_z = 0$)

k	Théorie	1-1-1	2-2-1	2-1-2	1-8-1	1-2-1	2-1-1
0	Osofero[3]	2.896	2.896	2.896	2.896	-	-
	Thanh [4]	2.896	2.896	2.896	2.896	-	-
	Thuc P. Vo [5]	2.896	2.896	-	-	2.896	2.896
	Present	2.896	2.896	2.896	2.896	2.896	2.896
1	Osofero[3]	5.940	5.516	6.584	3.679	-	-
	Thanh [4]	5.942	5.518	6.587	3.680	-	-
	Thuc P. Vo [5]	5.940	5.516	-	-	5.100	6.197
	Present	5.940	5.515	6.583	3.679	5.100	6.197
2	Osofero[3]	8.031	7.207	9.285	4.017	-	-
	Thanh [4]	8.035	7.211	9.292	4.017	-	-
	Thuc P. Vo [5]	8.031	7.208	-	-	6.427	8.500
	Present	8.031	7.208	9.288	4.017	6.427	8.500
5	Osofero[3]	10.837	9.412	12.756	4.394	-	-
	Thanh [4]	10.844	9.417	12.765	4.395	-	-
	Thuc P. Vo [5]	10.837	9.412	-	-	8.164	11.378
	Present	10.838	9.412	12.756	4.394	8.164	11.379
10	Osofero[3]	12.159	10.453	14.137	4.577	-	-
	Thanh [4]	12.167	10.458	14.149	4.578	-	-
	Thuc P. Vo [5]	12.159	10.452	-	-	9.047	12.528
	Present	12.159	10.452	14.136	4.558	9.047	12.529

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

Tableau V.2. Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle σ_x d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z = 0$)

k	Théorie	1-1-1	2-2-1	2-1-2	1-8-1	1-2-1	2-1-1
0	Osofero[3]	14.988	14.988	14.988	14.988	-	-
	Thanh [4]	15.030	15.030	15.030	15.030	-	-
	Thuc P. Vo [5]	15.012	15.012	-	-	15.012	15.012
	Present	15.012	15.012	15.012	15.012	15.012	15.012
1	Osofero[3]	5.672	4.925	6.288	3.510	-	-
	Thanh [4]	5.693	4.943	6.310	3.521	-	-
	Thuc P. Vo [5]	5.685	4.936	-	-	4.8800	5.4960
	Present	5.684	4.936	6.301	3.513	4.8799	5.4959
2	Osofero[3]	7.673	6.273	8.874	3.832	-	-
	Thanh [4]	7.702	6.297	8.908	3.845	-	-
	Thuc P. Vo [5]	7.691	6.288	-	-	6.1532	7.3227
	Present	7.691	6.288	8.893	3.8345	6.1530	7.3220
5	Osofero[3]	10.360	7.990	12.197	4.193	-	-
	Thanh [4]	10.400	8.022	12.242	4.208	-	-
	Thuc P. Vo [5]	10.383	8.010	-	-	7.8194	9.5508
	Present	10.383	8.010	12.222	4.198	7.8194	9.5508
10	Osofero[3]	11.626	8.788	13.519	4.368	-	-
	Thanh [4]	11.670	8.823	13.568	4.384	-	-
	Thuc P. Vo [5]	11.651	8.810	-	-	8.6665	10.4357
	Present	11.650	8.809	13.546	4.3621	8.6662	10.4352

Les tableaux V.3, V.4 et V.5 présentent respectivement les résultats de la variation de la de la flèche centrale adimensionnelle w , de la contrainte normale adimensionnelle σ_x et de la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D développée par Thuc P. Vo et al [5]. On note que lorsque l'indice matériel k augmente la flèche centrale adimensionnelle w augmente pour les différentes configurations sauf pour $p=0$ où la flèche est sensiblement la même quel que soit la configuration. Lorsque l'indice matériel k augmente les contraintes normales diminuent, tandis que les contraintes de cisaillement augmentent. Les valeurs les plus élevées de la contrainte normale sont obtenues pour un indice matériel $k=0$ c'est-à-dire pour une poutre en céramique, par contre les contraintes de cisaillement sont les plus basses.

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

Tableau V.3. Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle w d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$).

k	Théorie	1-1-1	1-2-1	2-1-1	2-2-1
0	Thuc P.Vo [5]	2.8947	2.8947	2.8947	2.8947
	Present	2.8973	2.8973	2.8973	2.8973
1	Thuc P.Vo [5]	5.9364	5.0975	6.1810	5.5040
	Present	5.9417	5.1017	6.1941	5.5116
2	Thuc P.Vo [5]	8.0262	6.4235	8.4572	7.1790
	Present	8.0331	6.4288	8.4975	7.1998
5	Thuc P.Vo [5]	10.8309	8.1589	11.2886	9.3498
	Present	10.8406	8.1662	11.3979	9.4081
10	Thuc P.Vo [5]	12.1519	9.0413	12.4206	10.3715
	Present	12.1629	9.0500	12.5675	10.4576

Tableau V.4. Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle σ_x d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$).

k	Théorie	1-1-1	1-2-1	2-1-1	2-2-1
0	Thuc P.Vo [5]	15.0125	15.0125	15.0125	15.0125
	Present	15.0128	15.0128	15.0128	15.0128
1	Thuc P.Vo [5]	5.6845	4.8797	5.4955	4.9360
	Present	5.6844	4.8796	5.4805	4.9238
2	Thuc P.Vo [5]	7.6904	6.1526	7.3220	6.2882
	Present	7.6905	6.1527	7.2850	6.2580
5	Thuc P.Vo [5]	10.3824	7.8185	9.5498	8.0100
	Present	10.3824	7.8186	9.4925	7.9560
10	Thuc P.Vo [5]	11.6500	8.6655	10.4346	8.8094
	Present	11.6502	8.6656	10.3799	8.7470

Tableau V.5. Comparaison de la contrainte de cisaillement adimensionnelle d'une poutre FG sandwich simplement supportée pour différentes valeurs de l'indice matériel k et différentes configurations de couches ($L/h=20, \varepsilon_z \neq 0$).

k	Théorie	1-1-1	1-2-1	2-1-1	2-2-1
0	Thuc P.Vo [5]	0.7432	0.7432	0.7432	0.7432
	Present	0.7481	0.7481	0.7481	0.7481
1	Thuc P.Vo [5]	0.8657	0.8193	0.9166	0.8552
	Present	0.8712	0.8245	0.9196	0.8583
2	Thuc P.Vo [5]	0.9316	0.8556	1.0212	0.9142
	Present	0.9377	0.8610	1.0229	0.9156
5	Thuc P.Vo [5]	1.0194	0.8986	1.1826	0.9927
	Present	1.0266	0.9045	1.1840	0.9926

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

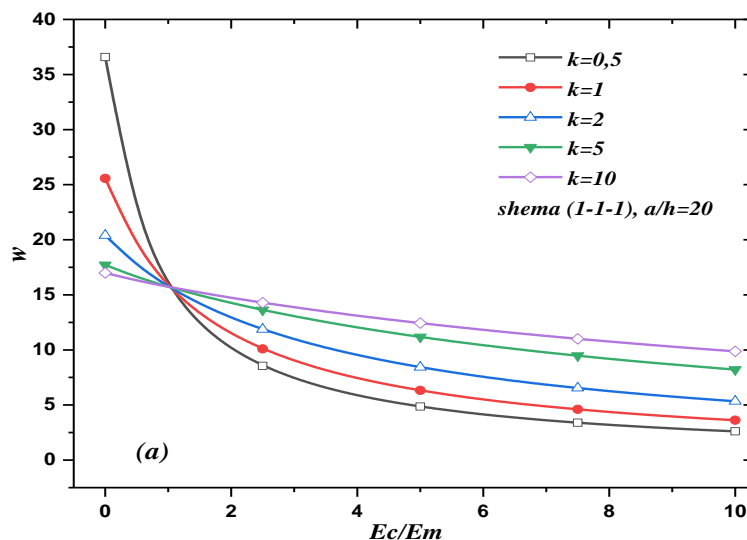
10	Thuc P.Vo [5]	1.0736	0.9214	1.2969	1.0405
	Present	1.0814	0.9276	1.2994	1.0402

V.6.2. Etude paramétrique :

V.6.2.1 : Influence du rapport des modules d'élasticité E_c/E_m sur la variation des flèches adimensionnelles

Les figures V.2.a et V.2.b présentent la variation de la flèche en fonction d' E_c/E_m pour différentes valeurs de l'indice matériel k et pour deux configurations de sandwich (1-1-1) et (1-0-1). On constate que les valeurs les plus élevées de la flèche sont obtenues pour les plus petites valeurs de l'indice matériel k où le matériau est constitué entièrement de métal ($E_c=0$), les valeurs des flèches sont respectivement $w=36,586$ et $w=29,5867$ pour les configurations (1-1-1) et (1-0-1) et un indice matériel $k=0,5$. L'augmentation du module de Young de la céramique influe directement sur la variation de la flèche qui va diminuer jusqu'à ce que le matériau devienne isotrope ($E_c=E_m$) où la flèche présente un point pivot (Point d'intersection). Au-delà de ce point la flèche diminue avec l'augmentation du rapport des modules de Young.

La figure V.2.c présente la variation de la flèche en fonction d' E_c/E_m pour différentes configurations (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1) et (2-1-2) et deux valeurs de l'indice matériel $k=0,5$ et $k=2$. L'influence de la configuration du sandwich sur la flèche est minime comparativement à celle du rapport E_c/E_m . D'autre part, lorsque les couches intermédiaires en céramique sont plus grande, les valeurs de la flèche w observées pour un rapport $E_c/E_m=0$ sont plus importantes. La diminution de la couche intermédiaire pour différents indice matériel k entraîne une diminution de la flèche.



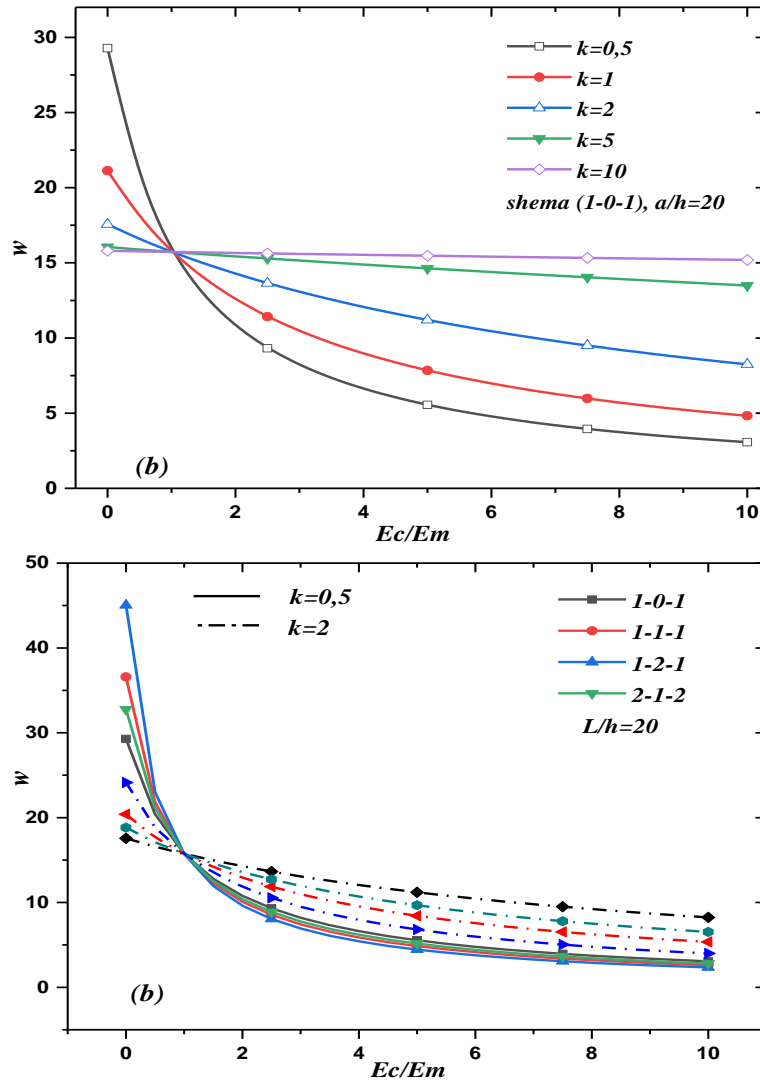


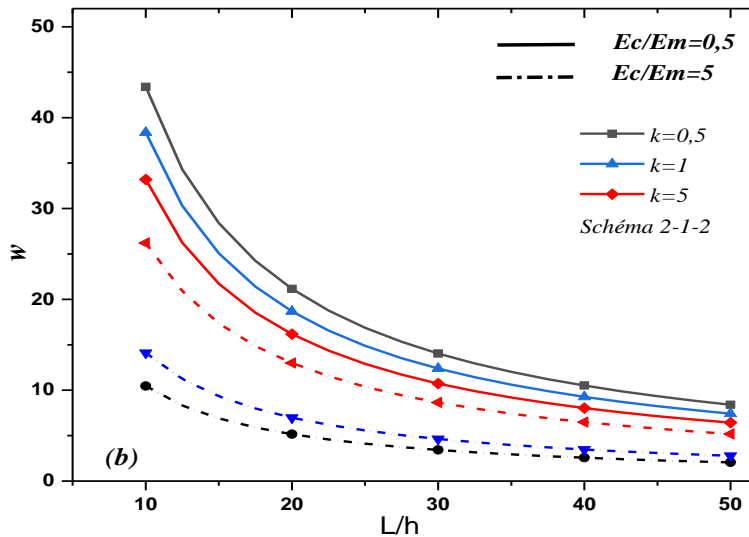
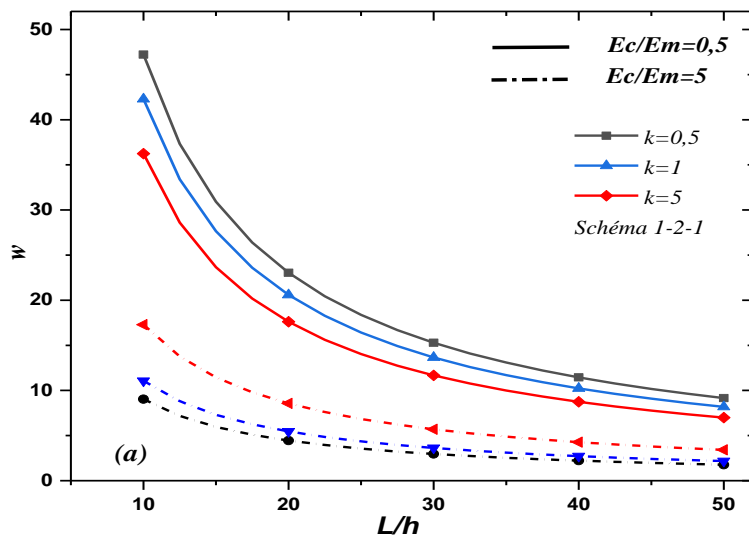
Figure.V.2. Influence du rapport des modules d'élasticité Ec/Em sur les flèches adimensionnelles des poutres FG sandwich simplement appuyées pour différentes valeurs de l'indice matériel k .

V.6.2.2 : Influence du rapport L/h sur la variation des flèches adimensionnelles

Les figures.V.3 a et V.3.b présentent la variation de la flèche w en fonction de L/h pour différentes valeurs de l'indice matériel k et deux rapports des modules d'élasticité $Ec/Em = 0,5$ et 2 pour différentes configurations des sandwichs FGM. On note que les valeurs de la flèche pour un indice matériel $k=0.5$ sont les plus élevées pour un rapport $L/h=10$ quel que soit la valeur du rapport des modules Ec/Em . Lorsque L/h , la flèche diminue progressivement pour atteindre une valeur constante pour un rapport $L/h=40$. L'influence du rapport Ec/Em sur la valeur de la flèche w est significative, où les valeurs de la flèche w les plus élevées sont obtenus dans le cas où $Ec/Em=0,5$. La figure V.3.c montre l'influence du rapport des modules d'élasticité Ec/Em et celle des configurations. En outre, la flèche diminue en fonction de L/h plus grand pour tous

Analyse de la flexion des poutres sandwichs FGM

types de poutre. La valeur la plus élevée de la flèche $w = 38,7423$ est obtenue pour une configuration (1-2-1) à $L/h=10$ pour un rapport des modules d'élasticité $E_c/E_m=0,5$, une légère diminution de cette valeur est observée pour les autres configurations. Comparativement aux valeurs observées pour un rapport $E_c/E_m=0,5$, les valeurs de la flèche w diminuent mais avec une même tendance inverse pour un rapport $E_c/E_m=5$. La valeur la plus élevée de la flèche w est égale à 22,6223 pour une configuration (1-0-1). Notons que pour un rapport $E_c/E_m=0,5$, la différence entre les différentes valeurs de la flèche est négligeable tout au long L/h pour les différentes configurations, par contre pour un rapport $E_c/E_m = 5$, la différence est plus accentuée.



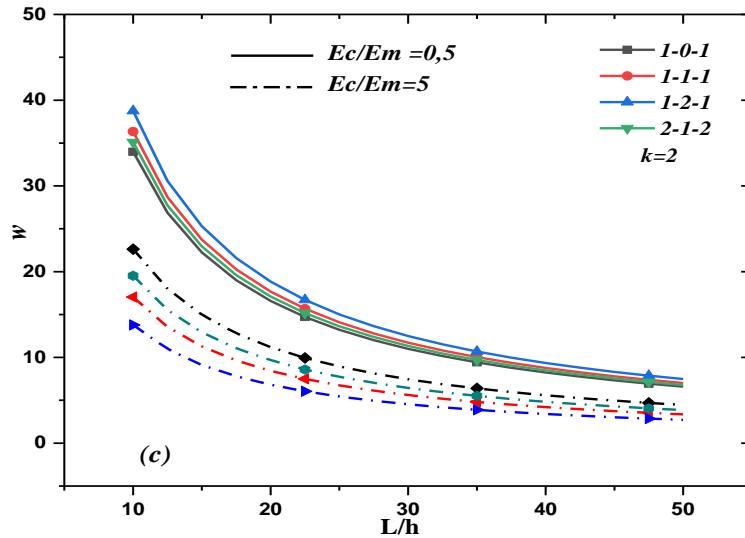
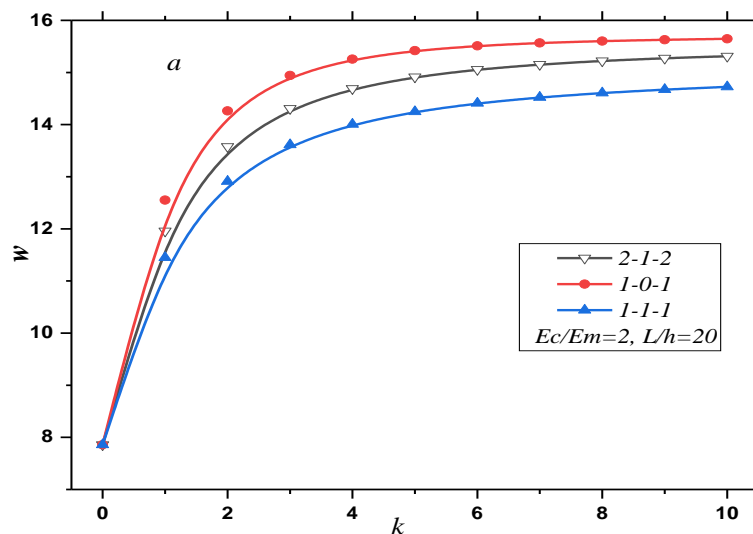


Figure.V.3. Influence du rapport (L/h) sur les flèches adimensionnelles des poutres sandwich FG simplement appuyées pour différentes valeurs de E_c/E_m , $k=2$.

V.6.2.3 : Influence de l'indice matériel sur la variation des flèches adimensionnelles

Les Figures V.4.a et V.4.b illustrent la variation de la déflexion centrale adimensionnelle w en fonction de l'indice matériel pour différents rapports des modules d'élasticité E_c/E_m et différents types de configuration de couches (h_{noy}/h_{face}) des poutres FG sandwich. Les résultats obtenus montrent que la flèche centrale adimensionnelle w augmente lorsque l'indice matériel augmente lorsque le rapport des modules d'élasticité $E_c/E_m=2$, les valeurs les plus élevées sont obtenues pour une configuration (1-0-1). Par contre pour les valeurs $E_c/E_m=0,25$, lorsque l'indice matériel augmente la flèche centrale adimensionnelle w diminue.



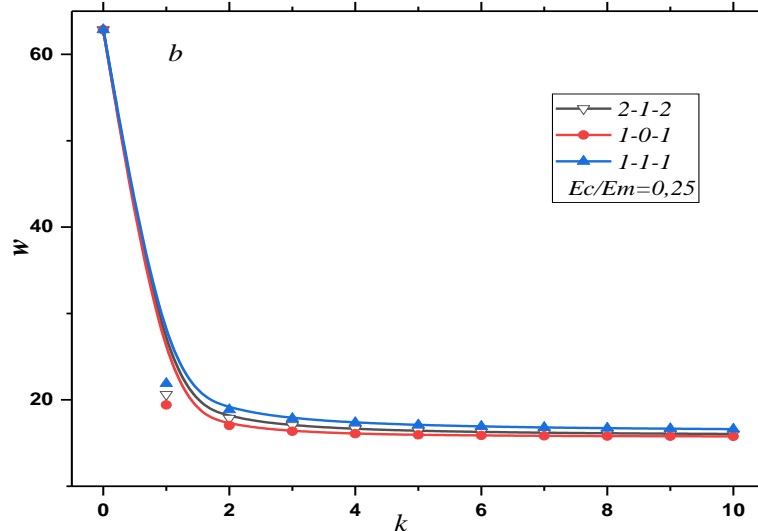


Figure.V.4. Variation de la flèche transversale adimensionnelle w par rapport à l'indice matériel k pour différents types des poutres sandwich FG ($L/h=20$)

V.7. Conclusion

Dans ce chapitre la flexion des poutres FG sandwich simplement supportée est étudiée en utilisant la théorie des poutres de déformation de cisaillement à quatre variables. L'effet de l'indice matériel, du rapport longueur-épaisseur L/h de la poutre et du rapport des modules d'élasticité E_c/E_m sur le comportement en flexion de la poutre est examiné. L'effet des propriétés matérielles (le module de Young) sur la déflexion centrale s'avère significatif ainsi que la mise en évidence de l'influence du type de configuration FGM sur le comportement mécanique des poutres. Les conclusions sont résumées comme suit :

- L'augmentation de de l'indice de fraction volumique k réduira la rigidité des poutres FG, et par conséquent, conduit à une augmentation des flèches. Cela est dû au fait que des valeurs plus élevées de l'indice de fraction volumique k correspondent à une proportion élevée de métal par rapport à la partie en céramique, ce qui rend ces poutres FG plus flexibles.
- La fleche w est inversement proportionnel avec les rapports E_c/E_m et L/h , où les valeurs de w sont maximales respectivement pour $k=0.5$ et E_c/E_m proche au zero.
- La fleche w diminue en fonction de l'augmentation de la longueur L par rapport à l'épaisseur h .
- L'épaisseur de la couche de céramique a une influence significative sur la valeur de fleche w .

Les résultats obtenus à partir de la présente théorie proposée comparés aux résultats issus de la littérature, ont montré qu'il y a une bonne corrélation. Ce qui démontre la précision, l'efficacité et la simplicité du modèle proposé pour l'analyse du comportement des poutres en flexion.

Références bibliographiques

- [1] **Chikh. A. (2019).** « Analysis of static behavior of a P-FGM Beam » Journal of materials and Engineering and Mechanics structures, 6, 513–524.
- [2] **Thai. H.T, Thuc. P.V. (2012).** « Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories » International Journal of Mechanical Sciences 62, 57–66.
- [3] **Osofero AI, Vo TP and Thai HT. (2014)** « Bending behavior of functionally graded sandwich beams using a Quasi-3D Hyperbolic shear deformation theory » J Eng Res; 19: 1–19.
- [4] **Tran.T.T., Nguyen.N.H., Do.T.V. Minh.P.V and. Duc.N.D. (2019)** « Bending and thermal buckling of unsymmetric functionally graded sandwich beams in high-temperature environment based on a new third-order shear deformation theory» Journal of Sandwich Structures & Materials, 0(0) 1–25.
- [5] **Thuc P. Vo , Huu-Tai Thai , Trung-Kien Nguyen , Fawad Inam , Jaehong Lee, (2014)** « Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory », Journal of Composites: Part B: engineering, 68, 59-74.

CONCLUSION GENERALE
ET PERSPECTIVES

Les structures sandwich FGM représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur théorie d'utilisation pour simplifiés la résolution des problèmes du comportement mécanique tel que les problèmes de flambement des plaques ou poutres ou l'analyse en flexion de ces structures.

Les travaux menés pour répondre à la problématique de la thèse ont été développés principalement autour de deux axes :

- Dans un premier temps à la proposition d'une théorie simple et efficace basée sur une théorie de déformation par cisaillement de plaque 2D contenant quatre inconnues, destinée à la détermination de la réponse au flambement thermique des plaques sandwich FGM reposant sur une fondation élastique.

Les résultats obtenus sous divers chargements thermiques comparés à des résultats issus de la littérature ont montré la validité de la théorie proposée. Cette étude a montré qu'un certain nombre de paramètres tels que l'épaisseur du noyau (couche de de céramique), le type de chargement thermique (uniforme, linéaire, non-linéaire) la géométrie de la plaque, l'indice matériel ainsi que les paramètres de la fondation élastique ont un effet significatif sur les températures critiques du flambement.

Dans un deuxième temps, l'analyse à la flexion des poutres FGB simplement appuyés a été réalisée en proposant une théorie de déformation par cisaillement de poutres 2D et 3D qui contient quatre inconnues. L'effet de l'indice matériel, du rapport longueur/épaisseur de la poutre et du rapport des modules d'élasticité sur le comportement de flexion de la poutre ont été examinés.

Perspectives

Ces travaux ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche :

- Les résultats présentés dans cette thèse ont permis de valider les théories de déformation par cisaillement des plaques 2D et celle des poutres 2D contenant quatre inconnues.
- La réalisation d'essais expérimentaux sur les poutres FGM permet de valider les résultats obtenus par les différentes théories,
- La modélisation numérique avec l'utilisation des codes de calcul. Il serait souhaitable de développer un élément fini de type coque cylindriques multicouches dans le domaine linéaire, et des coques sphériques de forme arbitraire en tenant compte des courbures, afin de modéliser des structures en FGM de géométrie plus complexe.
- Le développement de modèles d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures en matériaux FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, hygrothermique, pression distribué sur la

face supérieure de la plaque et la force centrifuge) pour continuer la recherche dans le domaine de l'aérodynamique,

- En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des structures en matériaux FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.