

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présentée par

ACHOURI Fatima

Intitulé de la thèse

**Réponse dynamique des structures non homogènes sur fondations
élastiques non linéaires**

Soutenu le : 01 / 06 / 21 Composition du jury :

Président	M. TOUNSI Abdelouahed	Pr	U de Sidi Bel Abbés
Directeur de thèse	M. BENYOUCEF Samir	Pr	U de Sidi Bel Abbés
Examineur	M. BOURADA Mohamed	Pr	U de Sidi Bel Abbés
Examineur	M. YEGHNEM Redha	Pr	U de Saida
Examineur	M. HEBALI Habib	MCA	U de Mascara
Examineur	M. CHIKH Abdelbaki	MCA	U de Tiaret

Année universitaire 2020-2021

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord « Allah » le tout puissant qui m'a guidé et qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail de recherche.

Je remercie profondément mon directeur de thèse Samir BENYOUCEF, Professeur au département de Génie Civil de la Faculté de technologie à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, qui a su me diriger tout au long de cette thèse avec patience, rigueur, enthousiasme et bonne humeur. Sans lui, la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Sa patience et ses approches toujours à la fois scientifique et pratique ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

Mes remerciements iront ensuite aux membres de Jury qui nous font l'honneur de juger cette thèse.

Je tiens également à remercier toute l'équipe du laboratoire de recherche Matériel et Hydrologie de l'université de Sidi Bel Abbès où j'ai eu l'occasion de travailler ou d'échanger des idées avec des personnes avec qui, permanents, thésards ou stagiaires, tant du point de vue personnel que scientifique.

J'exprime toute ma reconnaissance au Docteur MAHMOUDI Abdelkader, Maître de conférences à l'université d'ADRAR et au Docteur SEKKAL Mohamed, Membre du laboratoire Matériel et Hydrologie de l'université de Sidi Bel Abbès, qui ont accepté de m'aider pour finaliser ce travail. Je leur suis très reconnaissant d'y avoir consacré une partie de leur temps si précieux.

Je tiens remercier tous ceux de près ou de loin, qui m'ont aidé lors de la réalisation de cette thèse.

Pour couronner ces remerciements, je rends un hommage à :

- mon Père et ma Mère pour la confiance, pour leur irremplaçable et inconditionnel soutien et leurs encouragements qui m'ont été d'une aide précieuse.
- mon cher époux Zakaria pour son soutien inlassable aux moments opportuns, pour avoir été patient et de m'avoir aussi tenu la main jusqu'aux dernières lignes de ce travail.
- mes enfants (Lina, Serine, Yousra et Racha) qui ont supporté mon absence et surtout mes manques chroniques de disponibilité pendant toute la durée de mes travaux.

Merci à Toutes et à Tous !

Résumé

Ce travail vise en premier lieu, à développer une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D pour l'étude de la flexion, du flambement et des réponses vibratoires libres des plaques sandwich épaisses graduellement fonctionnelles (FG). Pour cela dans la théorie actuelle, les composants de la déformation normale et de la déformation de cisaillement sont inclus. Le champ de déplacement du modèle proposé contient des termes d'intégrales indéterminés et n'implique que quatre fonctions inconnues avec notamment un effet d'étirement. En d'autre part, cette recherche tend également à étudier le comportement thermodynamique des poutres sandwich FG avec reposant sur différentes types de fondation. A cet effet, une poutre sandwich FG avec des propriétés matérielles qui varient suivant l'épaisseur, a fait l'objet d'une étude selon plusieurs configurations. En utilisant la technique de Navier, la solution des problèmes est dérivée pour les structures étudiées. Ensuite, une étude paramétrique détaillée est présentée pour chaque cas afin de démontrer l'effet des différents paramètres sur la flexion et le flambement pour les plaques et l'influence du type de fondations sur les réponses en flexion, la flèche, les contraintes normales et tangentielles des poutres étudiées. Enfin, nos résultats numériques ont été comparés par rapport à ceux disponibles dans la littérature ouverte où un excellent accord a été observé.

Mots clés: Solution quasi 3D; Plaque sandwich FG; Poutre sandwich FG ; fondations non linéaires, flambement; vibration; effet d'étirement.

Abstract

This work aims firstly, to develop a theory of quasi-3D shear strain for the study of bending, buckling and free vibratory responses of gradually functional thick sandwich plates (FG). For this in the current theory, the components of normal strain and shear strain are included. The displacement field of the proposed model contains indeterminate integer terms and involves only four unknown functions with in particular a stretching effect. On the other hand, this research also tends to study the thermodynamic behavior of FG sandwich beams resting on different types of foundation. To this end, an FG sandwich beam with material properties which vary according to the thickness, has been the subject of a study in several configurations. Using Navier's technique, the problem solution is derived for the studied structures. Then, a detailed parametric study is presented for each case in order to demonstrate the effect of the different parameters on bending and buckling for the plates and the influence of the type of foundation on the bending responses, deflection, normal stresses and tangential of the studied beams. Finally, our numerical results were compared with those available in the open literature where excellent agreement was observed.

Keywords: Quasi 3D solution; FG sandwich plate; FG sandwich beam; non-linear foundations, buckling; vibration; stretch effect.

ملخص

يهدف هذا العمل أولاً إلى تطوير نظرية إجهاد القص شبه ثلاثية الأبعاد لدراسة الانحناء والانبعاث والاستجابات الاهتزازية الحرة لصفائح الساندويتش السميكة المتعددة الوظائف (FG) في النظرية الحالية، يتم تضمين مكونات التشوه الناظمي وتشوه القص. يحتوي مجال الإزاحة للنموذج المقترح على تكاملات غير محددة ويتضمن فقط أربع مجاهيل غير معروفة لها تأثير تمدد بشكل خاص. من ناحية أخرى، يميل هذا البحث أيضاً إلى دراسة السلوك الديناميكي الحراري لعازلة سندويتش FG. تحقيقاً لهذه الغاية، عازلة سندويتش FG مع خصائص المواد التي تختلف وفقاً للسّمك أخذت محل دراسة في العديد من الأشكال. باستخدام تقنية نافير (Navier)، يتم اشتقاق حل المشكلة للهياكل المدروسة. بعد ذلك، يتم تقديم دراسة المتغيرات بشكل مُفصل لكل حالة من أجل توضيح تأثير العوامل المختلفة وكذلك تأثير نوع الأساسات على استجابات الانحناء والاهتزازات الحرة و انبعاث الهياكل المدروسة. أخيراً، تمت مقارنة نتائجنا العددية مع تلك المتوفرة في الأبحاث المتاحة حيث لوحظ توافق ممتاز.

الكلمات المفتاحية: حل شبه ثلاثي الأبعاد ؛ لوحة سندويتش متعددة الوظائف ؛ عازلة سندويتش متعددة الوظائف ؛ الانحناء؛ اهتزاز؛ تأثير تمدد؛ أساسات غير خطية؛ انبعاث.

Sommaire

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	ii
ملخص	iii
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Liste des abréviations et notations	x
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	
I.1 Introduction	5
I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués	5
I.3 Histoire et Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)	7
I.4 Avantages et inconvénients des FGMs	9
I.4.1 Avantages des FGM	9
I.4.2 Inconvénients des FGM	10
I.5 Domaines d'application des matériaux fonctionnellement gradués	11
I.5.1 Dans l'aérospatiale et l'automobile	11
I.5.2 Dans l'industrie	11
I.5.3 Dans les biomatériaux	11
I.5.4 Dans la défense	12
I.5.5 Dans les capteurs et les applications énergétiques	12
I.5.6 Dans l'optoélectrique	12
I.5.7 Dans les articles de sports	12
I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	12
I.6.1 La loi des mélanges en puissance P-FGM	14
I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	15
I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	16
I.7 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs	16
I.7.1 Méthodes basées sur les dépôts	17
I.7.2 Méthodes à l'état solide	19
I.7.3 Méthodes à l'état liquide	22
I.8 Conclusion	25

IV.2.3 Type C: plaques sandwich avec faces FG	56
IV.2.4 Cinématique et déformations	57
IV.2.5 Équation de mouvement	59
IV.2.6 Solutions de Navier	64
IV.3. Résultats numériques et discussion	65
IV.3.1 Analyse de flexion	66
IV.3.2 Analyse des vibrations libres	73
IV. 3.3 Analyse de flambement	77
IV. 4. Conclusion	81

Chapitre V : Comportement thermodynamique des poutres sandwich FG reposant sur différents types de fondations

V.1 Introduction	82
V.2 Modèles de fondations	82
V.2.1 Modèle linéaire de Winkler.	83
V.2.2 Modèle de Pasternak	84
V.2.3 Modèle Kelvin – Voigt	85
V.2.4 Modèle Kerr	85
V.2.5 Fondation élastique variable	87
V.3 Formulation du problème	88
V.4 Cinématique et équation constitutives	90
V.4.1 Champ de déplacements	90
V.4.2 Equations constitutives	91
V.4.3 Equations de mouvement	91
V.5 La solution Navier pour les poutres simplement appuyées	95
V.6 Résultats numériques et discussion	96
V.7 Conclusion	106
Conclusion générale	107
Références bibliographiques	112

Liste des tableaux

Tableau I.1. Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisée dans les FGM	6
Tableau II.1. Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM	40
Tableau IV.1. Propriétés des matériaux (métal et céramique).	66
Tableau IV.2. Comparaison de la contrainte non dimensionnelle et des déplacements des plaques carrées Al/Al_2O_3 ($a/h = 10$, type A)	67
Tableau IV.3. Comparaison de la contrainte non dimensionnelle et des déplacements des plaques sandwiches $Al / Al_2 O_3$ ($a/h = 10$, Type B)	68
Tableau IV. 4. Déformations centrales non dimensionnelles (\hat{W}) des plaques sandwich carrées Al/Zr_2O_2 ($a/h = 10$, type C)	69
Tableau IV.5. Contrainte axiale non dimensionnelle $\hat{\sigma}_{xx}$ ($h/2$) des plaques sandwich carrées Al/Zr_2O_2 ($a/h = 10$, type C)	70
Tableau IV.6. Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) de plaques carrées Al^*/ZrO_2 (Type A).	74
Tableau IV.7. Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) de plaques sandwich carrées Al/Al_2O_3 (Type B).	75
Tableau IV.8. Fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques sandwich carrées ($\hat{\omega}$) Al/Al_2O_3 ($a/h = 10$, Type C).	76
Tableau IV.9. Comparaison de la charge critique de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques Al/Al_2O_3 (Type A).	78
Tableau IV.10. Charges critiques de flambement non dimensionnelles des plaques sandwich carrées soumises à des charges de compression biaxiales ($\gamma = 1$, $a/h = 10$, Type C).	79
Tableau IV.11. Charges non dimensionnelles critiques de flambement (Ncr) des plaques sandwich carrées Al/Al_2O_3 soumises à des charges de compression biaxiales ($\gamma = 1$, Type B).	80
Tableau V.1. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$, non-dimensionnelles des poutres sandwich P-FGM (Al/Al_2O_3), pour $\alpha = 0.1$	98
Tableau V.2. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ adimensionnelles des poutres sandwich P- FGM (Al/Al_2O_3) reposant sur fondation Pasternak, pour $p = 1$, (1-1-1).	99
Tableau V.3. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$, non-dimensionnelle des poutres sandwich E- FGM (Al/Al_2O_3), reposant sur fondation variable, pour $p = 1$, (2-1-2).	100
Tableau V.4. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ non-dimensionnelle des poutres sandwich P- FGM (Al/Al_2O_3), reposant sur fondation Kerr, pour $p = 1$, et une configuration de type : (1-1-1) .	101
Tableau V.5. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ non-dimensionnelle des poutres sandwich P- FGM (Al/Al_2O_3), reposant sur fondation Kelvin-Voigt, pour $p = 1$, et une configuration de type : (1-1-1).	102

Liste des figures

Figure I.1. Protection thermique.	5
Figure I.2. Quelques exemples de FGM des structures naturels aux propriétés graduées.	6
Figure I.3. Concept des matériaux à gradient de propriétés.	7
Figure I.4. Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées	8
Figure I.5. Géométrie d'une plaque en FGM.	13
Figure I.6. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	14
Figure I.7. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	15
Figure I.8. Variation de la fraction du module de Young dans une plaque E-FGM.	16
Figure I.9. (a) : diagramme schématique du processus PVD (b) : diagramme schématique du processus CVD.	17
Figure I.10. (a) : diagramme schématique du processus (EPD) ; (b) : Concept du processus pour fabrication du FGM(EPD)	18
Figure I.11. diagramme schématique du processus de projection thermique	19
Figure I.12. Principales étapes de la métallurgie des poudres pour produire des MGF	20
Figure I.13. Concept de fabrication des FGMs par la méthode additive	20
Figure I.14. (a) fabrication additive fil et arc (WAAM) , (b) unités d'alimentation à deux fils.	21
Figure I.15. (1) : Concept de processus FSAM pour la fabrication des FGM (2) : (a) pièce 3D sans fusion produite par le procédé FSAM	21
Figure I.16. (a) Machine horizontale de coulée centrifuge (b) Concept de ségrégation des particules pendant la production de FGM	22
Figure I.17. Illustrations schématiques : (a) de la méthode de suspension centrifuge. (b) de la méthode de coulée centrifuge de suspension.	22
Figure I.18. Concept des méthodes de pressurisation centrifuge pendant la production des FGMs	23
Figure I.19. Illustration schématique du processus de coulée de bande	24
Figure I.20. Illustration schématique du processus d'infiltration (a) méthode de coulée sous pression, (b) méthode sous pression.	24
Figure I.21. Illustration schématique de la méthode de Langmuir-Blodgett.	25
Figure II.1. Cinématique d'Euler Bernoulli.	27
Figure II.2. Cinématique Timoshenko	29
Figure II.3. Cinématique de la théorie d'ordre élevé	30
Figure II.4. Géométrie d'une plaque rectangulaire	32
Figure II.5. Modèle de Love- Kirchhoff	34
Figure II.6. Déformations dans le plan (XZ) selon la théorie du premier ordre	35
Figure II.7. Illustration de la plaque d'ordre élevé	37
Figure III.1. Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique	45
Figure III.2. Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse	46
Figure III.3. Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$)	47

Liste des figures

Figure IV.1. Géométrie des plaques fonctionnellement graduées.	57
Figure IV.2. Déplacements et contraintes non dimensionnels dans la direction de l'épaisseur pour différentes valeurs de plaques carrées soumises à une charge sinusoïdale ($a/h=10$, Type A)	72
Figure IV.3. Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de plaques sandwich carrées soumises à une charge sinusoïdale ($a/h=10$, Type B)	73
Figure IV.4. Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de plaques sandwich carrées soumises à une charge sinusoïdale ($a/h=10$, Type C)	73
Figure IV.5. Effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\hat{\omega}$) des plaques sandwich carrées ($a/h=10$, Type C).	77
Figure IV.6. Effet de l'indice de loi de puissance sur la charge critique de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques sandwich carrées ($a/h=10$, Type C).	80
Figure V.1. Géométrie d'une poutre sandwich fonctionnellement graduées.	86
Figure V.2. Fondation variable Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de poutres sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4$)	98
Figure V.3. Fondation variable Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de poutres sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4$)	99
Figure V.4. Fondation variable Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de poutres sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4$)	99
Figure V.1. Modèle de Winkler	83
Figure V.2. Approximation de Winkler	84
Figure V.3. Modèle de Pasternak	85
Figure V.5. Modèle de Kelvin-Voigt	86
Figure V.6. Représentation de paramètre variable de Winkler	87
Figure V.7. Géométrie de la poutre sandwich FG posée sur fondation élastique : (a) fondation Winkler, (b) Fondation Pasternak, (c) Fondation Kerr.	88
Figure V.8. Variation de la flèche \bar{w} et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4, \xi = 20$) posé sur fondation variable.	103
Figure V.9. Variation de la flèche \bar{w} et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4$) posé sur fondation Kelvin-Voigt.	104
Figure V.10. Variation de la flèche \bar{w} et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique, posée sur fondation variable, fondation Kerr, fondation Kelvin-Voigt.	105

Liste des abréviations et notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
c	Amortissement des éléments visqueux (viscosité du sol)
k_w	Rigidité du sol (paramètre de fondation Winkler)
k_p	Rigidité de la couche de cisaillement (paramètre de fondation Pasternak)
k_s	le module de cisaillement
k_u	le module élastique de la couche supérieure
k_l	le module élastique de la couche inférieure
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformation dans la direction x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de cisaillement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	variation du travail
δK	variation de l'énergie cinétique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{xy}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion dans la plaque
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion dans la plaque
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire dus au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage

Liste des abréviations et notations

D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
{ }	Vecteur colonne
[]	Matrice
CPT	Théorie classique des plaques minces
ESDT	Théorie exponentielle de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory)
FSDT	Théorie de déformation de cisaillement du premier degré
HSDT	Théorie hyperbolique de déformation de cisaillement d'ordre élevé
SSDT	Théorie sinusoidal de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The sinusoidal shear deformation theory)
ISS	Interaction Support Structure
PRT	Théorie raffiné des plaques (Refined Plate Theory)
PM	Métallurgie des poudres (Powdered metallurgy)
CSPM	Méthode particule-solide centrifuge
FGM	Les matériaux fonctionnellement gradués (Functionnally Graded Materials)

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Dans le passé, des matériaux d'ingénierie ont été développés afin de fabriquer des produits avec des caractéristiques homogènes qui présentent peu ou pas de variation de propriété une fois finis et peuvent fournir des performances optimales pour des applications industrielles dans de nombreux domaines.

Les matériaux disponibles tels que les métaux purs, les alliages et les composites conventionnels ne peuvent plus répondre aux propriétés nécessaires appropriées pour de nombreuses applications. La plupart des applications industrielles telles que l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical et la défense nécessitent des caractéristiques spécifiques qui nécessitent un changement progressif de composition et de structure sur l'ensemble du matériau dans une certaine direction. Néanmoins, en raison des contraintes d'application de matériaux homogènes traditionnels, y compris les métaux purs, les alliages, les céramiques, les polymères et les composites conventionnels, il a été nécessaire de développer de nouveaux matériaux aux propriétés similaires avec une structure graduée pour répondre aux exigences des applications issues du développement industriel.

L'évolution des sciences et de la technologie jour après jour a permis d'améliorer les caractéristiques des matériaux. La catégorie avancée des matériaux composites hétérogènes, connus sous le nom de matériaux à graduation fonctionnelle (FGM), présente des caractéristiques multifonctionnelles sur une partie par composition ou structure changeante graduellement et convient très bien aux applications d'ingénierie nécessitant des propriétés contradictoires dans un composant.

Le concept de FGM a vu le jour pour la première fois en 1984 comme un matériau résistant à la chaleur et depuis lors il a été utilisé pour la conception spéciale d'applications à haute température comme l'aérospatiale, les boucliers thermiques de fusée, les tubes d'échangeur de chaleur, le revêtement de barrière thermique, le réacteur nucléaire, etc.

Dans les FGMs, les propriétés du matériau subissent une variation progressive et régulière d'une surface à l'autre selon une direction prédéterminée. La variation de la fraction

volumique élimine le problème d'interface en atténuant la concentration des contraintes thermiques dans un environnement à haute température.

La littérature contient diverses études qui comprennent des analyses dynamiques et statiques de plaques et de poutres à gradation fonctionnelle. De plus, Il existe plusieurs études portant sur les structures en anneau et en arc, en particulier celles développées par [Li et al., 2008] dans les dernières années.

Les structures en plaques et en poutre sont les principaux éléments porteurs de charge en mécanique des structures, à la fois en aéronautique, sur terre et en génie naval. Ces structures sont souvent soumises à des forces de compression, de flambement, et/ou de cisaillement importantes dans le plan. Diverses théories sont disponibles pour décrire le comportement statique et dynamique de ces structures. En fonction de la géométrie et des propriétés du matériau, il est intéressant d'utiliser une théorie par rapport à une autre.

Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs différences entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées. Comprendre les différences entre les théories et leur application intéresse beaucoup les ingénieurs travaillant dans le domaine des structures.

Depuis le milieu du 19^è siècle, la recherche et le développement se poursuivent des théories des plaques et des poutres. Cette recherche s'est déroulée dans trois catégories principales dans le domaine des théories:

- Les théories classiques
- Les théories de premier ordre
- Les théories d'ordre élevé

Récemment, pour prendre en compte des phénomènes complexes et pour réduire le nombre d'inconnus et ainsi alléger le calcul, d'autres théories ont été développées, telles que la théorie quasi-3D et la théorie raffinée.

L'objectif principal de cette contribution est de :

- *Etudier la pertinence et la validation de la théorie quasi-3D en adoptant un nouveau champ de déplacement pour des plaques en FGM.*
- *Donner une formulation analytique générale des problèmes des poutres FGM posées sur différents types de fondations : variables (linéaire, parabolique, sinusoïdale), Kerr et Kelvin-Voigt, soumises à une charge thermodynamique ;*
- *Présenter des résultats numériques de la flèche, des contraintes et de la charge critique de flambement pour différentes configurations de plaques et de poutres sandwich, pour que les chercheurs puissent bénéficier de ces résultats.*

Les plaques et les poutres sandwich sont composées de trois couches, selon plusieurs configurations : les peaux en FGM et cœur homogène en métal, les peaux en FGM et le cœur en céramique, une des deux peaux en métal et l'autre en céramique avec un cœur en FGM

Les plaques et les poutres sont supposées isotropes à n'importe quel point dans leur volume. Le module de Young et le coefficient de dilatation thermique varient à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques des structures en FGM simplement appuyées. Les effets de la variation de la fraction volumique des matériaux constituants et du rapport épaisseur-longueur sur les flèches, les distributions de la contrainte axiale et tangentielle et le flambement sont étudiés en détail. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie en tenant en compte l'effet d'étirement.

Ainsi, l'étude que nous présentons dans cette thèse comprend cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, sont présentés des généralités sur les matériaux FGMs, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication ainsi que leurs domaines d'application et les lois régissant la gradation des propriétés à travers l'épaisseur.

Nous exposons ensuite dans le deuxième chapitre, d'une façon chronologique les différentes théories de plaque et de poutre pour décrire le comportement statique et dynamique de ces structures et une revue bibliographiques sur les travaux antérieurs sur les structures en FGM dans le troisième chapitre.

Le quatrième chapitre comporte une formulation théorique du comportement dynamique des plaques sandwich en se basant sur la théorie quasi-3D où la solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques des plaques en FGM simplement appuyées.

Aussi pour vérifier la validité de la présente solution quasi 3D, les résultats obtenus dans ce chapitre sont comparés avec les données disponibles dans la littérature. Puis, une étude paramétrique est effectuée pour montrer les influences de nombreux facteurs sur la flexion, le flambement et la vibration libre des différentes plaques étudiées.

Le cinquième chapitre est consacré à la description du comportement thermodynamique des poutres sandwich en FGM en se basant sur la théorie quasi-3D où la solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques des poutres en FGM posées sur plusieurs types de fondation. L'influence de plusieurs paramètres est aussi étudiée dans ce chapitre.

Enfin, nous achevons notre thèse par une conclusion générale relative aux résultats obtenus dans ce travail de recherche.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1 Introduction

La conception des matériaux avancés qui allient plusieurs propriétés à la fois en les assemblant par couche, fait naître les matériaux composites. Malgré leurs qualités, les matériaux composites présentent une fragilité flagrante, précisément dans un environnement à température élevée, à cause du changement soudain des propriétés matérielles à travers l'interface, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface. De ce fait, une nouvelle génération des matériaux composites appelée « matériaux à gradient de propriétés » (Functionally Graded Material FGM), qui font l'objet d'importantes recherches, ont vu le jour pour lesquels des propriétés matérielles tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement à travers une direction préférée.

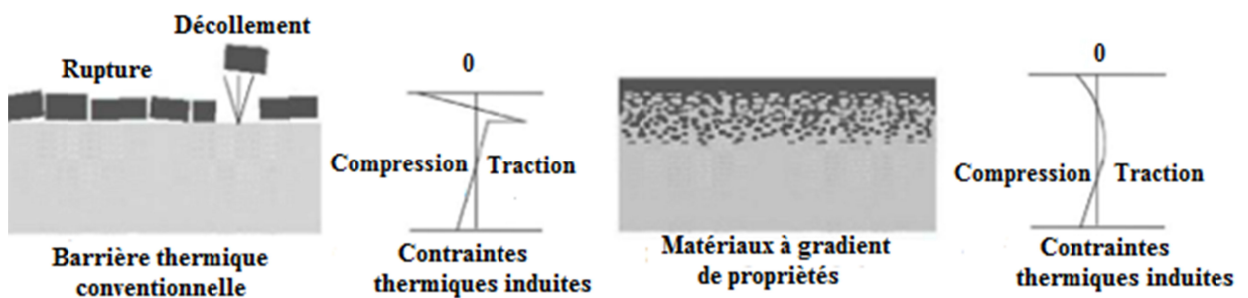


Figure I.1. Protection thermique.

I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept ingénierie que présentent les FGMs n'est pas nouveau. Il est omniprésent dans la nature. La figure I.2 donne une illustration sur la graduation fonctionnelle du cartilage. On peut citer aussi : les os, la peau, le bambou ...etc.

Les FGM sont des matériaux composites avancés dans lesquels la composition change progressivement par rapport à l'épaisseur. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé.

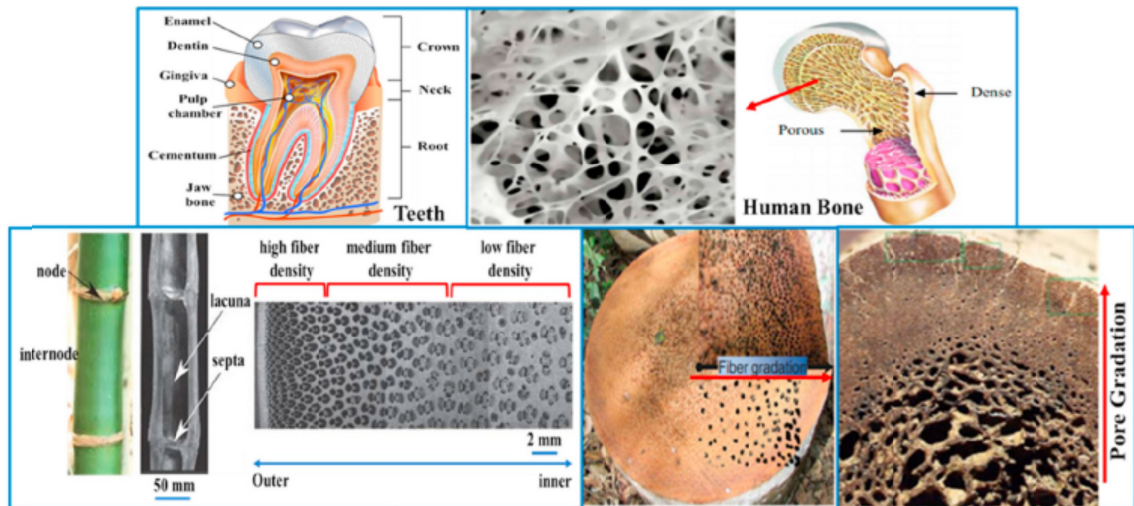


Figure I.2. Quelques exemples de FGM des structures naturels aux propriétés graduées. Dent, os humain, bambou, tronc de palmier, os de Dinosaur [Ramírez-Gil FJ et al., 2016] et [Dentin. n.d., 2003]

Le concept des FGMs a été appliqué avec succès dans plusieurs secteurs, notamment ceux en confrontation avec un dégagement important de chaleur tel que les générateurs d'énergie solaire, échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires, les revêtements de barrière thermique où l'amélioration de la résistance thermique à l'oxydation et à la corrosion est un objectif ciblé. Les matériaux souvent utilisés sont : les alliages de magnésium, aluminium, cuivre, titane, tungstène, acier, etc..., et les céramiques d'une structure avancée comme : zircon, alumine, carbure de silicium et carbure de tungstène...etc.

Tableau I.1. Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM. [Swaminathan et al., 2016].

	Matériaux	Module d'élasticité E (GPa)	Coefficient de dilatation thermique α $10^{-6}1/K$	Densité (10^3 Kg/m^3)
Céramique	Zircone	100-250	1.7-2.7	5-6.15
	Alumine	215-413	4.5-10.9	3.5-3.98
	Silicium	140-180	7-8	2.28-3.38
	Carbure de tungstène	600-686	28-88	15.25-15.88
	Carbure de bore	362-472	17-42	2.35-2.55
	Métal	Fers	80-150	11-13
Alliages d'aluminium		68-82	21-24	2.5-2.9
Alliages de zinc		68-95	23-28	4.95-7
Alliage de nickel		150-245	9-16	7.75-8.65
Aciers		189-203	16-18	7.85-8.1

La figure I.3 illustre le changement graduel dans la composition à une échelle microscopique soit dans la microstructure d'un matériau «FGM». Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des «FGMs». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].

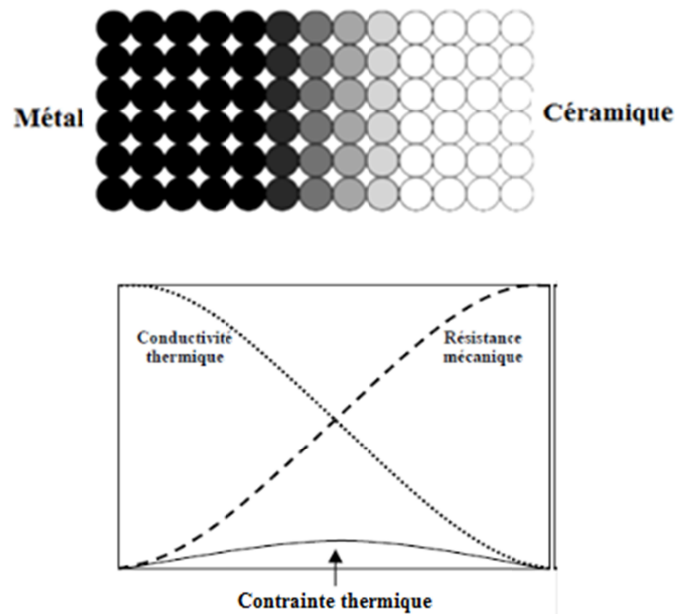


Figure I.3. Concept des matériaux à gradient de propriétés.

I.3 Histoire et Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Historiquement, Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été proposé pour la première fois par le japonais M. Niino et ses collègues [Koizumi M., 1993] en 1984 à Sendai dans une université Japonaise. Dans le but de concevoir un matériau qui répond parfaitement à des exigences environnementales sévères (haute température) et qui possède d'excellentes propriétés mécaniques, du moment qu'il n'existe aucun matériaux monolotique qui réponds à ces exigences. Le résultat est l'obtention d'un matériau combiné entre céramique et métal de tel façon que la face exposée à très haute température possèderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, soit en céramique, et la face intérieure serait en métal connu comme très bon conducteur de la chaleur et possèderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, le passage d'une face à l'autre devait se faire en douceur et d'une façon continu, car un simple alliage de ces deux matériaux risque la délamination due à des contraintes interlaminaire, l'initiation et la propagation des fissures en raison de grandes déformations plastiques au niveau des interfaces et ainsi de suite.

En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau, et les recherches sont poussées plus loin.

Le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques", en 1987, dans le cadre du développement de son programme aérospatiale, dont l'intérêt été de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. Aucun matériau connu jusqu'à là qu'il soit naturel ou industriel ne pouvait supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi, 1992].

A la fin de l'année 1989, en incrustant des particules sphériques ou presque sphériques dans une matrice isotrope, les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (de moins de 10mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) qui pouvait résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.4 [Yin *et al.*, 2004]. Cette réussite a marqué la fin de la première étape, allant de 1987 à 1989, et a lancé le commencement d'une nouvelle étape.

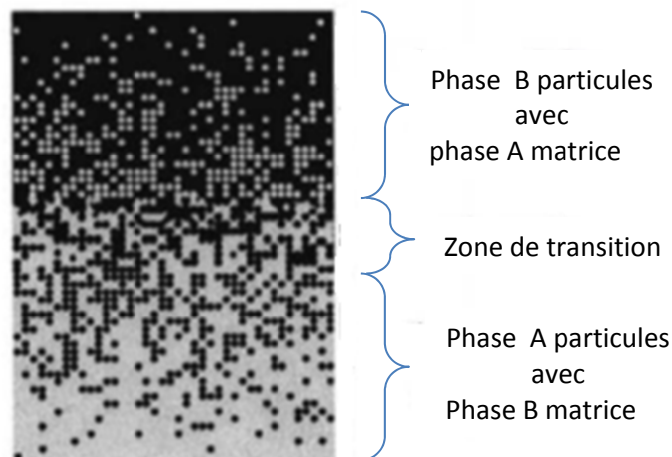


Figure I.4. Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin *et al.*, 2004].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant

les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM qui sont développés pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température mais se sont aussi élargis à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique [Okamura, 1991].

En 1992, c'est la période qui a connu amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation des énergies : photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [Kieback et al., 2003]. Un nouveau projet intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure», communément dénommé «FGM partiel, a été lancé en 1993, à partir de ces résultats, pour la promotion de la science et technologie. Dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique, ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM.

Entre 1995 et 1996, plusieurs programmes de recherche ont été lancés en Allemagne et au Japon. Dans le programme allemand, pour développer des applications en FGM pendant le 21ème siècle, 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts. A son tour, le programme Japonais a été pris en charge par les universités, qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM. Une nouvelle technologie des matériaux gradués non homogènes est née comme conséquence du développement des applications pratiques et des recherches pendant le 21ème siècle, grâce à la continuité et la communication entre les chercheurs et la recherche en groupe qui s'impose et qui devient d'une grande importance pour développer l'architecture des FGM.

I.4 Avantages et inconvénients des FGMs

Comme tous matériaux qu'il soit naturel ou fabriqué par l'homme, les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients.

I.4.1 Avantages des FGM

Divers avantages supplémentaires de la FGM, outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui pourrait être réalisé par un simple revêtement, ont été soulignés par [Narottam et al., 2011] ainsi que beaucoup d'autres. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- La diminution des contraintes thermiques causées par la différence entre les coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- L'absence d'une interface nette conduit à un contrôle meilleur des contraintes d'ensemble.
- La meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- L'extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- La suppression de délaminage.
- L'augmentation de la ténacité à la rupture.
- L'élimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les coins, les surfaces libres, les racines de fissures, etc.

1.4.2 Inconvénients des FGM

La fabrication compliquée des FGMs est le principal obstacle à leur application plus large, en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, notamment, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc.

Donnons comme exemple un mélange d'une céramique avec une température de fusion (T_1) et un métal avec la température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \gg T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_2) alors la céramique est restée intacte et ne fond pas et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Ce qui conduit à l'apparition d'une très grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants, dans la structure, et son application générale est limitée.

Cependant, pour des applications spéciales, il devient souhaitable la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide.

D'autre part, travailler autour (T_1) va certainement entraîner une oxydation rapide du métal et certains métaux risquent l'évaporation. Ce qui engendre la formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam et al., 2011].

I.5 Domaines d'application des matériaux fonctionnellement gradués

I.5.1 Dans l'aérospatiale et l'automobile

Grâce au programme de développement de la NASA, les matériaux à gradient de propriété sont en évolution constante dans le domaine de l'aérospatiale. Néanmoins, le coût de la fabrication des navettes spatiales est très élevé, cela est à cause leur poids important. À cet effet, et afin de réduire ce cout très élevé, d'où la nécessité d'élaborer une conception optimale qui induit de créer un équilibre entre le poids et la performance de ces navettes spatiales en utilisant des plaques FGM. Plusieurs travaux présentés par [Arnold, 2001] appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales [Hopkinson et al., 2006; Saiyathibrahim et al., 2015].

I.5.2 Dans l'industrie

Dans le domaine de l'industrie, qui a une relation avec l'économie, il est nécessaire d'investir au maximum étant donné que l'industrie exige des pièces récentes avec des paramètres qui admettent des résistances à l'usure et la ténacité. L'innovation de l'outil est primordiale, elle induit la réduction des coûts des composants ce domaine. De ce fait, la solution à cette problématique est l'utilisation des matériaux à gradient de propriété. Les matériaux à gradient à matrice d'aluminium font partie des matériaux à gradient de propriété qui ont été utilisés dans des applications importantes. Ces dernières ont été utilisées dans l'industrie à une étendue échelle telle que les emballages électroniques et des matériaux de blindage [Saiyathibrahim et al., 2015].

I.5.3 Dans les biomatériaux

Plusieurs recherches expérimentales ont montré que les matériaux à gradient de propriété ont une capacité de résistance et de durabilité très importante, étant donné la sensibilité du domaine du biomatériau, les matériaux à gradient de propriété sont l'innovation du siècle qui peut répondre à ses exigences, pour éclaircir mieux on prend l'exemple de la réparation de l'os et ligaments humains ou son remplacement en cas de fissuration, plusieurs chercheurs ont travaillé sur cette thématique comme Miao et Sun [Xigeng Miao et al., 2010].

1.5.4 Dans la défense

Le sabre japonais traditionnel, arme de haute technicité, est fabriqué essentiellement par Les matériaux à gradient de propriété. Il est fabriqué par plusieurs plaques d'acier de forge avec une teneur en carbone qui permet de se présenter dans la surface extérieure en grande quantité par rapport à la partie intérieure, ce qui induit à une résistance élevée et une dureté remarquable [Misra et al., 2011].

1.5.5 Dans les capteurs et les applications énergétiques

Les matériaux à gradient de propriété sont utilisés dans les procédés de changement d'énergie, protection des aubes de turbine comme revêtement. Grâce aux matériaux à gradient de propriété qui leur procurent une variété de fonction (par exemple le thermoélectrique gradué), les matériaux piézoélectriques sont appliqués dans les ultrasonores à large bande et les électrodes composites graduées pour les combustibles à base d'oxydes solides [Müller et al., 2003].

1.5.6 Dans l'optoélectronique

En utilisant des matériaux à gradient de propriété, il est devenu possible de réaliser des procédés photoniques qui pourraient fonctionner dans une large gamme spectrale [Wo et al., 2005]. Par conséquent, on remarque une nette amélioration dans le coût des productions suite à l'introduction des propriétés des matériaux à gradient de propriété. Il existe aussi plusieurs domaines d'application des FGM comme les revêtements, les composants des moteurs, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires etc. [Rasheedat et al., 2012; Bohidar et al., 2014].

1.5.7 Dans les articles de sports

Dans le même concept de réduction d'usure, les articles de sport de haute performance telle que les chaussures de baseball et les outils d'escalade sur glace (crampons et piolets) les matériaux à gradient de propriété sont devenues un composant dans leur production [Hopkinson et al., 2006; Saiyathibrahim et al., 2015].

1.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

L'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue a donné naissance aux matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistant, tout en tenant compte de la structure et de la

distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Des microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace sont les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume, dont la plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour la décrire. Pour résister à la rupture, les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur, et également assez dures à l'extérieur, pour empêcher l'usure.

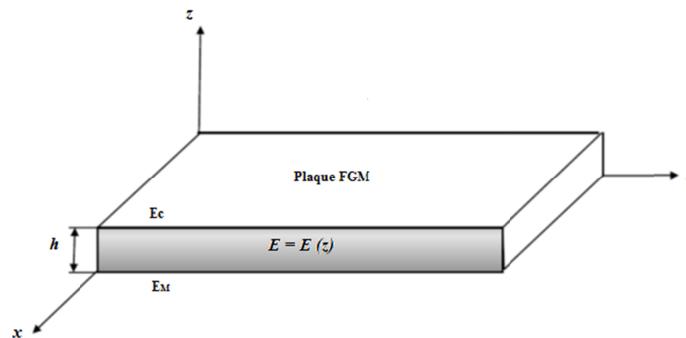


Figure I.5. Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur (figure I.5). Selon les demandes d'exécution, Le module de Young et le coefficient de Poisson seront différents sur les surfaces supérieures et inférieures. De ce fait, le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit :

$$E = E(z), \quad \nu = \nu(z).$$

En fonction des lois de mélange, dans le sens de l'épaisseur d'une plaque FGM, Le module de Young varie d'où on peut désigner des plaques E-FGM, des plaques P-FGM, ou même des plaques S-FGM selon les fonctions utilisées.

Ces lois de mélange ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure même si elles sont pratiques et simples à utiliser. Cependant, plusieurs modèles qui permettent d'évaluer les propriétés globales ont été développés par exemple le modèle basé sur le schéma de [Mori et Tanaka, 1973] ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill (self-consistent method) [Hill, 1965].

1.6.1 La loi des mélanges en puissance P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^P \quad (1.1)$$

Où :

P : paramètre matériel

h : épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang, 1995].

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1.2)$$

Où : E_m : Le module de Young de la surface inférieure ($z=-h/2$) de la plaque FGM.

E_c : Le module de Young de la surface supérieure ($z=+h/2$) de la plaque FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $P < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $P > 1$.

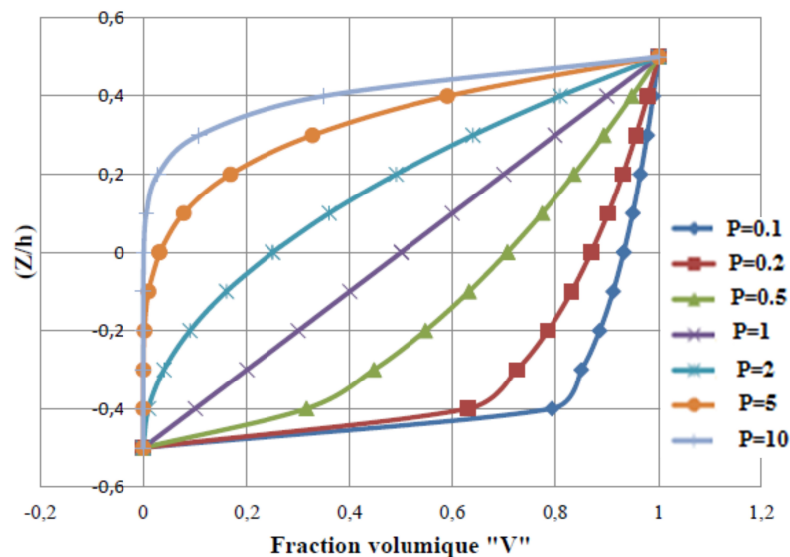


Figure I.6. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

1.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Pour définir la fraction de volume de la plaque FGM, deux fonctions de loi de puissance ont été utilisées pour assurer une bonne distribution des contraintes à travers toutes les interfaces [Chung et chi, 2003].

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^P, \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.3.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^P, \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.3.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2, \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.4.a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_2 + [1 - V_2(z)]E_1, \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.4.b)$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (1.4.a) et (1.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

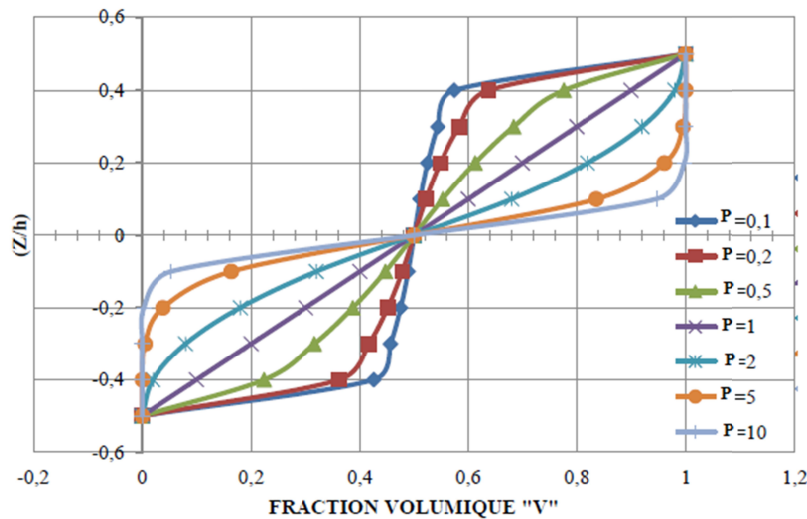


Figure I.7. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

1.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, cette idéalisation particulière pour la modélisation est très répandue dans les études de mécanique de la rupture [Suresh et al., 1998]. Pour une structure faite de FGM, les propriétés typiques des matériaux, notamment le module de Young, à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par:

$$E(z) = E_2 e^{B\left(\frac{z+h}{2}\right)} \quad (1.5.a)$$

$$\text{avec } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (1.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.

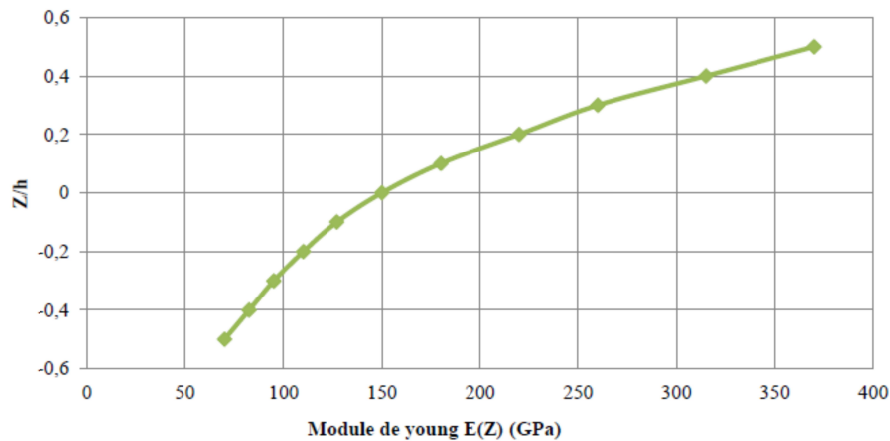


Figure I.8. Variation de la fraction du module de Young dans une plaque E-FGM.

1.7 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs

Probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGMs à ce moment-là, les travaux de [Shen, 2009] et [Kieback, 2003] où l'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée, n'ont eu qu'un effet limité.

Il a fallu 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que, dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGMs au Japon, la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée. Et depuis, une partie de la recherche sur les FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux où une grande variété de méthodes de production a été développée [Hirai, 1996].

Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM sont :

- **Méthodes basées sur les dépôts;**
- **Méthodes à l'état solide ;**
- **Méthodes à l'état liquide.**

Ces techniques sont brièvement expliquées ci-après.

1.7.1 Méthodes basées sur les dépôts

Les méthodes les plus fréquentes pour produire des FGM minces à l'échelle microscopique pour les applications de revêtement sont des méthodes basées sur le dépôt telles que les méthodes de dépôt en phase vapeur, les méthodes de pulvérisation thermique et le dépôt électrophorétique [Malinina M et al., 2005].

1.7.1.1 Méthodes de dépôt en phase vapeur

La méthode de dépôt en phase vapeur décrit un processus par lequel des matériaux sont condensés en un matériau solide pendant le cycle de vapeur [Lian Y et al, 2013]. Le dépôt de vapeur est généralement classé en deux groupes: dépôt physique en phase vapeur (PVD), et dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (figure I.9) [Salah B. et al., 2020] .

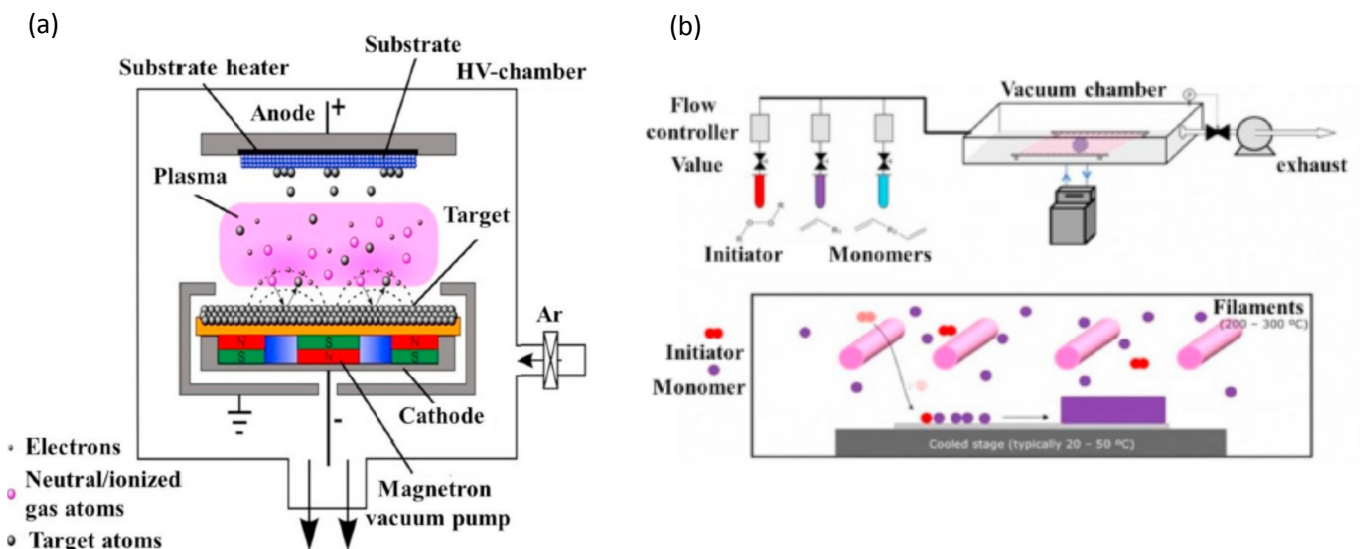


Figure I.9. (a) : diagramme schématisé du processus PVD ;
(b) : diagramme schématisé du processus CVD.
[Bassiouny S. et al., 2020]

1.7.1.2 Méthodes d'électrodéposition

Sous l'action de l'électrolyse ou de la réaction chimique, différentes particules actives subissent en même temps des réactions de réduction chimique et se déposent à la surface du substrat pour former un revêtement [Kaya C et al, 2003]. Dans un premier temps, l'interaction avec le solvant et les sels est utilisée pour charger les particules dans ce processus. Ensuite, les particules chargées passent sous le contrôle du champ électrique appliqué. Finalement, les particules forment une accumulation élargie de l'électrode de dépôt, comme le montre la figure I.10.

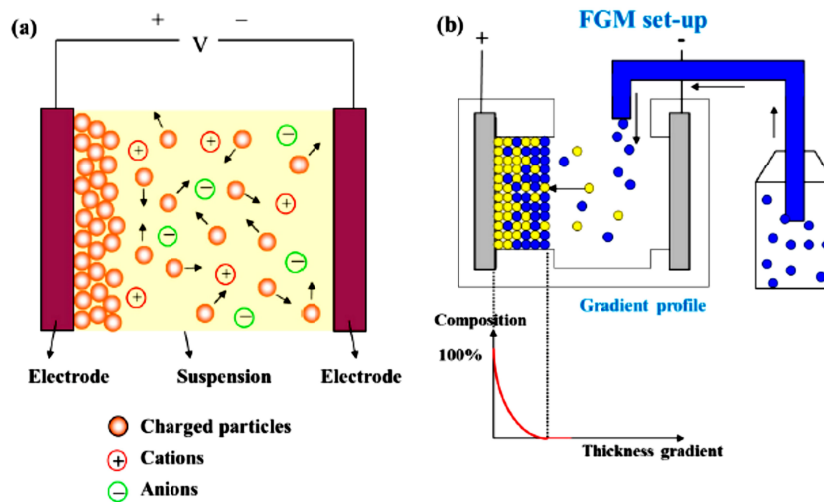


Figure I.10. (a) : diagramme schématique du processus (EPD) ;
 (b) : Concept du processus pour fabrication du FGM(EPD).
 [Put S, et al., 2003]

1.7.1.3 Méthode de projection thermique

La méthode de pulvérisation thermique est l'une des méthodes essentielles utilisées dans la production de MGF [Majumdar JD, 2015]. La couche de surface nivelée protège les composants car leur surface nécessite une protection appropriée [Metco Sulzer, 2013]. Au début de ce processus, la source de chaleur est utilisée pour faire fondre les matières premières pour le revêtement, puis en traitant les gaz et en les pulvérisant sur un matériau de base, ces matières fondues ou liquides sont poussées jusqu'à ce qu'elles se solidifient et forment une couche solide comme indiqué sur la figure I.11.

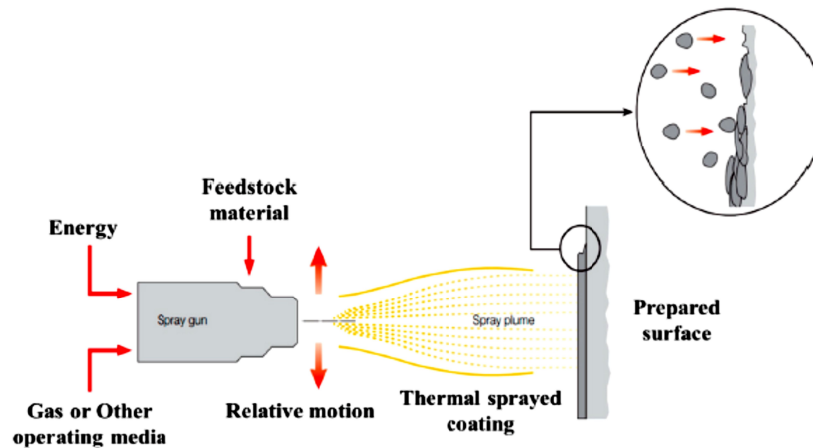


Figure I.11. diagramme schématique du processus de projection thermique.
[Metco S., 2013]

1.7.2 Méthodes à l'état solide

Les méthodes de production à l'état solide des FGM, telles que la métallurgie des poudres, la fabrication additive et le processus de fabrication additive par friction malaxage, sont les méthodes les plus prometteuses de production de ces matériaux.

Bien que ces techniques créent un gradient discontinu, la gradation peut être contrôlée à un degré élevé en utilisant ces méthodes pour les rendre disponibles à plusieurs applications industrielles [El-Galy Islam M et al, 2019].

1.7.2.1 Méthode de métallurgie des poudres

La méthode de la métallurgie des poudres (PM) a été l'une des techniques les plus anciennes de production de composants et est récemment utilisée pour la production de MGF [Kawasaki A. et al., 1997]. C'est l'une des méthodes à l'état solide les plus importantes pour produire des MGF en vrac avec des caractéristiques de gradient discontinu [Kırmızı G. et al., 2019] [Strojny A, et al., 2016]. Cette méthode utilise quatre étapes essentielles pour produire les MGF: mélange, empilement, pressage et frittage, comme illustré à la figure I.12 [Watanabe Y. et al., 2015].

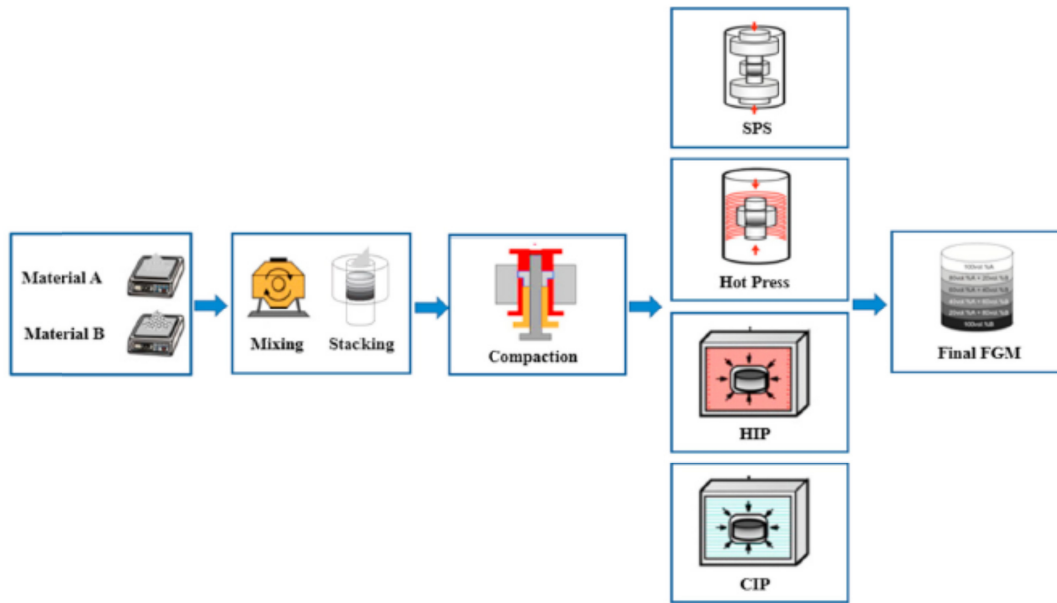


Figure I.12. Principales étapes de la métallurgie des poudres pour produire des MGF [Watanabe Y. et al., 2015]

I.7.2.2 Méthodes de fabrication additive

Les méthodes de FA dépendent souvent de la conception du produit et de la technologie utilisée pour obtenir des performances plus élevées et une meilleure qualité. Ces méthodes varient radicalement, même pour la même classe de matériaux, et le choix de la méthode dépend de la conception et de la forme (figure I.13), on peut citer :

- Méthodes basées sur le laser ;
- Processus de stéréolithographie ;
- Processus de projection de matière ;
- Modélisation des filaments fondus.

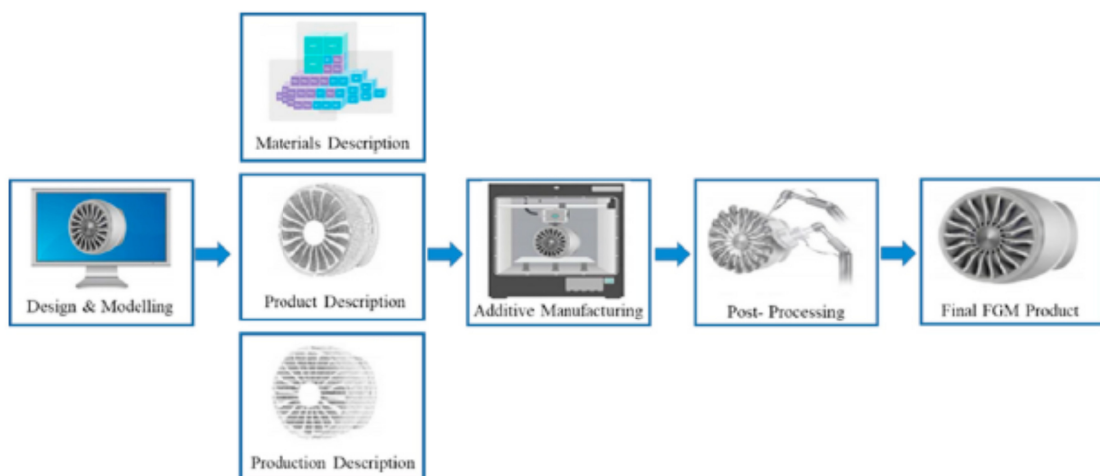


Figure I.13. Concept de fabrication des FGMs par la méthode additive. [Loh GH. et al., 2018].

1.7.2.3 Méthodes hybrides avec fabrication additive

- Méthode de fabrication additive par fil et arc : la méthode de soudage à l'arc a été utilisée avec la méthode de fabrication additive pour les avantages énormes qui produisent des structures graduées avec de grands composants métalliques à faible coût et de petites périodes de production [Rodrigues TA. et al., 2019]. (figure I.14) [Wang J. et al., 2018].

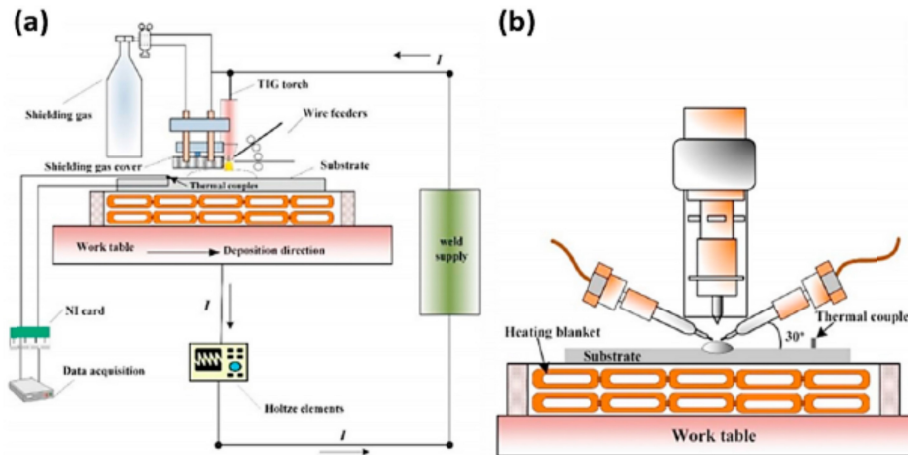


Figure I.14. (a) fabrication additive fil et arc (WAAM) , (b) unités d'alimentation à deux fils.

[Loh GH. et al., 2018], [Wang J. et al., 2018].

- Méthode de fabrication additive par friction-malaxage : La nouvelle technique de fabrication des MGF est le procédé de fabrication additive par friction-malaxage (FSAM). Les FGM développées par FSAM sont plus faciles à gérer et offrent le plus d'avantages par rapport aux techniques traditionnelles la figure I.15. [Palanivel S. et al., 2015].

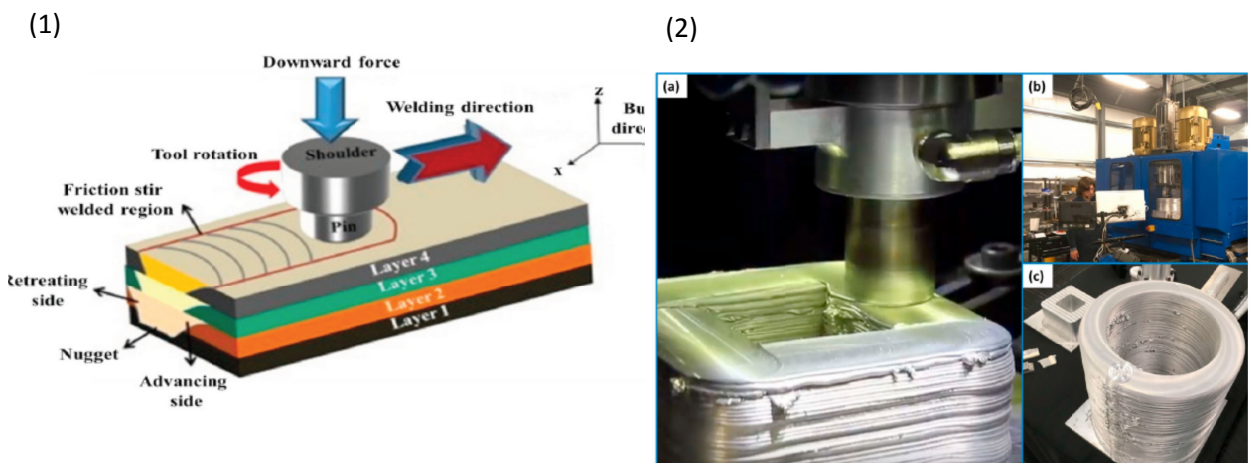


Figure I.15. (1) : Concept de processus FSAM pour la fabrication des FGM. [Palanivel S., et al. 2015]

(2) : (a) pièce 3D sans fusion produite par le procédé FSAM, [Bassiony S., 2020]

(b) la machine FSAM utilisée pour la fabrication des pièces FGM,

(c) Pièce en aluminium de 18 pouces de diamètre fabriquée selon le procédé FSAM

1.7.3 Méthodes à l'état liquide

Il existe de nombreuses méthodes telles que les méthodes de force centrifuge, la coulée de barbotine, la coulée de bande et l'infiltration qui peuvent être classées sous le principe de l'état liquide de production de MGF avec des propriétés de gradient [Pai BC. et al., 2009]. Ces méthodes peuvent produire des matériaux calibrés avec des propriétés continues, et la plupart Mais les défauts de ces méthodes sont la difficulté de contrôler la gradation et la mouillabilité entre les matériaux en plus des problèmes de métal fondu [Saleh B. et al., 2020].

1.7.3.1 Méthodes de force centrifuge

En raison de la force centrifuge créée par la rotation du moule, la répartition inégale se produit entre deux ou plusieurs phases des matériaux suivant la direction radiale [Watanabe Y. et al., 1996]. Les productions FGM dépendent directement de la caractéristique de la force centrifuge telle que la méthode de coulée centrifuge (figure I.16), la méthode de suspension centrifuge (figure I.17) et la méthode de pressurisation centrifuge (figure I.178).

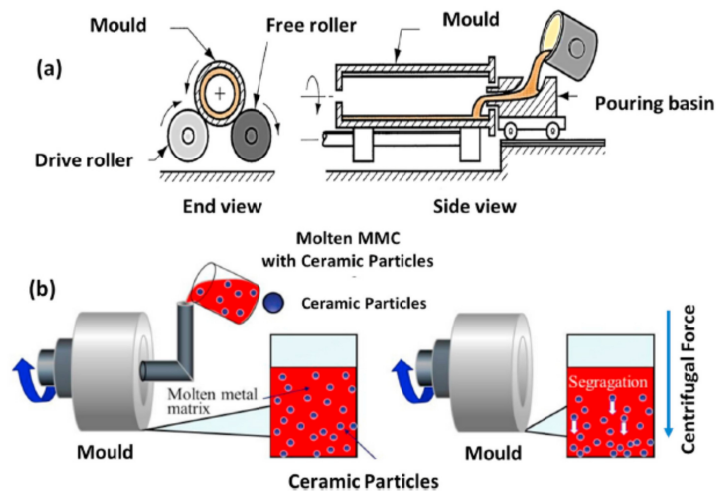


Figure I.16. (a) Machine horizontale de coulée centrifuge [El-Galy Islam M., et al. 2019].
(b) Concept de ségrégation des particules pendant la production de FGM [Jamian S., et al. 2018]

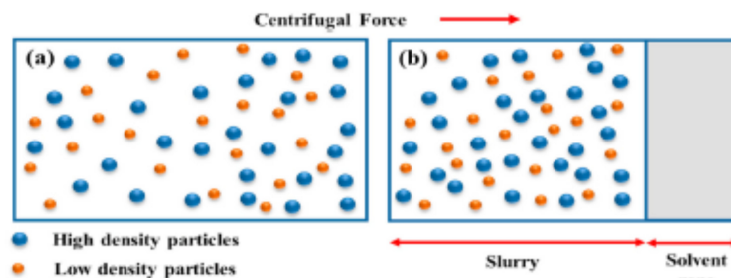


Figure I.17. Illustrations schématiques : [Watanabe Y., et al. 2011]
(a) de la méthode de suspension centrifuge.
(b) de la méthode de coulée centrifuge de suspension.

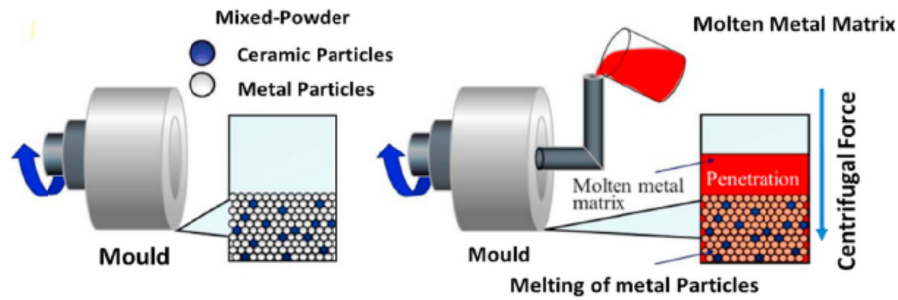


Figure I.18. Concept des méthodes de pressurisation centrifuge pendant la production des FGMs [Jamian S., et al. 2018].

1.7.3.2 Slip Casting : coulage séquentiel en barbotine :

La surface est évacuée par capillarité dans un moule perméable, où la matrice est drainée de la barbotine. Les parois du moule restent dans une couche d'argile. Le fluide restant est évacué du moule une fois que l'épaisseur de paroi appropriée a été obtenue. Le moulage est retiré du moule une fois qu'il est sec. Les énormes avantages du coulage glissant ont été utilisés dans la fabrication des MGF, comme la capacité de produire des formes complexes et la possibilité de réaliser des dégradés continus [Andertová J. et al., 2007]

1.7.3.3 Tape casting : Coulage en bande

La coulée en bande est une autre méthode de production pour les MGF minces (avec une couche dégradée de 50 à 1000 μm), fonctionnant initialement dans les céramiques conventionnelles, mais qui a atteint un haut niveau de complexité des céramiques modernes [Bulatova R. et al., 2015].

Les méthodes de coulage de bandes sont utilisées en particulier pour en faire des circuits intégrés et des structures multicouches utilisées dans les circuits intégrés et les condensateurs multicouches. Le Doctor Blading est un procédé courant de coulage de bandes [Cheng L. et al., 2018]

Ce procédé comprend la suspension de poudre céramique versée en continu sur une couche de support mobile constituée d'un matériau plat non adhérent tel que le Téflon, qui contient un solvant organique tel que l'éthanol et divers autres additifs (par exemple un liant polymère) [Rafael A. et al., 2018]. Un tranchant plat étire la suspension jusqu'à une épaisseur particulière, évapore le solvant et fait tomber le fil sur un disque de traitement supplémentaire comme le montre la figure I.19 [Jabbari M. et al., 2016].

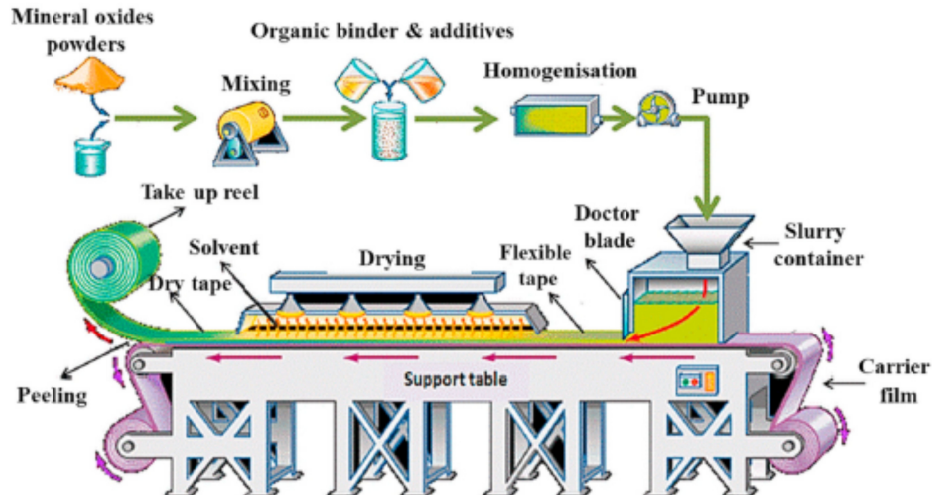


Figure I.19. Illustration schématique du processus de coulée de bande. [Bassiouny S., 2020]

1.7.3.4 Méthode d'infiltration

L'infiltration est un processus à l'état liquide de production des MGF qui trempent dans un espace de matrice fondue qui remplit l'espace entre les étages dispersés contient une phase dispersée préformée (particules céramiques) [Chmielewski M. et al., 2016]. La méthode d'infiltration avec le métal liquide peut être réalisée sans pression (action capillaire) ou par pression (action gazeuse ou mécanique) comme illustré à la figure I.19. La préforme réagit avec le matériau par un effet chimique à l'interface, qui produit la structure FG. Le procédé présente les avantages d'une courte période de préparation et la formulation proche des tailles [Pai BC. et al., 2009], comme le montre la figure I.19.

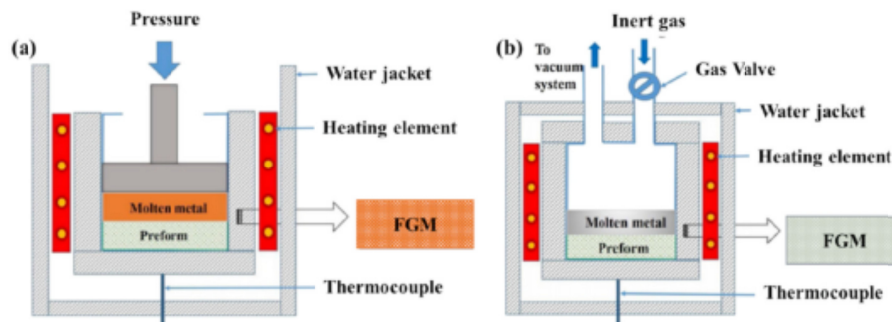


Figure I.20. Illustration schématique du processus d'infiltration [Arunachalam R., et al. 2019]
 (a) méthode de coulée sous pression, (b) méthode sous pression.

1.7.3.5 Méthode Langmuir-Blodgett

L'idée principale de la méthode LB est de façonner un matériau amphiphile à la surface de l'eau sous la forme d'un revêtement monomoléculaire, puis de le déplacer vers un substrat solide. Les molécules amphiphiles sont disposées à l'interface air-eau pendant l'étape aqueuse. La couche superficielle est comprimée par une membrane spéciale pour

créer une seule couche superficielle monomoléculaire, comme le montre la figure I.20.(a). La compression isotherme séquentielle affecte la structure de film monomoléculaire, qui est transmise via un ensemble d'états bidimensionnels, traditionnellement appelés eau, cristal liquide et cristal solide [Hagedorn S. et al., 2015], comme le montre la figure I.20.(b).

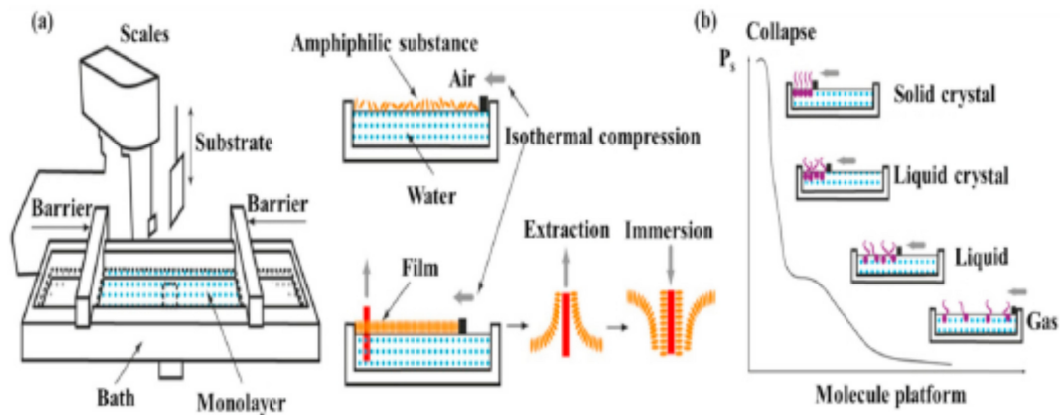


Figure I.21. Illustration schématique de la méthode de Langmuir-Blodgett. [Bassiouny S., 2020]

I.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » comme des matériaux issus de la combinaison des matériaux d'ingénierie avancée sous forme de particules, de fibres ou de plaquettes, dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume et cela afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles et améliorer des propriétés spécifiques dans une direction préférée, les rendant ainsi meilleurs que les matériaux homogènes constitués de composants similaires. Nous avons aussi présenté l'histoire de leur développement et des domaines de leurs applications.

En second lieu, nous avons évoqué les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des FGM, à savoir la loi de puissance, la loi sigmoïde ou la loi de exponentielle à travers l'épaisseur par la variation des propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de poisson et la masse volumique). Les différentes méthodes de fabrication ont aussi été mises en évidence.

Chapitre II

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

II.1 Introduction

Poutres, plaques et coques, ce sont des sous-ensembles aux géométries diverses qui constituent les structures complexes que l'on étudie couramment. Selon des considérations liées à leurs dimensions, elles peuvent être qualifiée de minces ou épaisses. Cependant, pour analyser le comportement et la conception de ces structures, plusieurs modèles théoriques ont été développés, afin de prédire les réponses globales de ces structures sous chargement mécanique et thermique. Ainsi, la formulation de la théorie de l'élasticité ou de plasticité pour chacun de ces constituant fait ressortir des modèles théoriques à savoir la théorie des poutres et celle des plaques et coques.

II.2 Les poutres

II.2.1 Définition d'une poutre

Par définition, on désigne par le terme « poutre » un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Cet élément de structure est utilisée principalement pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et aussi dans la fabrication de machines. En effet, le modèle des poutres peut être utilisé pour différentes pièces selon certaines conditions. Ce type d'élément est appelé "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé aussi "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.

II.2.2 Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres

Le modèle cinématique le plus courant est le modèle de Navier-Bernoulli, qui permet de décrire les déformations d'une poutre par la déformation de sa fibre moyenne uniquement. Dans cette hypothèse, les sections planes normales à la fibre moyenne avant transformation restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la transformation. Il faut noter aussi, que l'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle. En revanche, cette hypothèse n'est plus valable lorsque les déformations liées à l'effort tranchant sont trop importantes.

Cependant, le modèle de Timoshenko est considéré plus général que celui de Navier-Bernoulli. Son hypothèse énonce donc, que la section droite de la poutre est indéformable et ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement dans ce cas n'est pas nul et pris en compte.

II.2.3 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)

La théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est bien connu que cette théorie n'est applicable qu'aux poutres fines.

Ainsi, le nombre d'équations dans cette approche, ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, et de ce fait, elle est considérée comme une seule couche. A noter aussi, que dans cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées du fait qu'il y a pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre alors la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

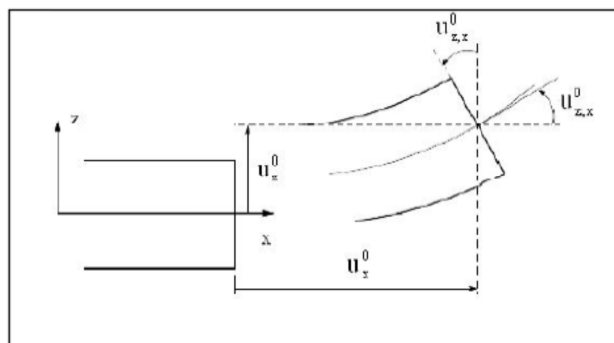


Figure II.1. Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre s'écrit:

$$f(z) = 0 \quad (II.1)$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_{,x}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.2)$$

$u(x, z)$: représente le déplacement suivant X

$w(x, z)$: Le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est telle que:

$$w_{,x}^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (II.3)$$

Où $u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes x et z.

A noter aussi, que lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

II.2.4 Modèle de Timoshenko (FSDBT)

Le modèle de Timoshenko est plus général et plus riche que celui basé sur la théorie élémentaire des poutres. Pour prendre en compte les déformations liées à l'effort tranchant, Timoshenko a introduit un nouveau paramètre dans la transformation : à abscisse curviligne fixée, il s'agit de l'angle entre la normale à la section - toujours supposée plane - et la fibre moyenne. Malgré que cette théorie a permis d'affiner des solutions analytiques issues de la théorie classique mais ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation avec présence des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Cette théorie s'applique sur des poutres courtes se basant sur le principe qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2) qui est dû au cisaillement transversal sur l'épaisseur de la poutre. Dans le cas des plaques épaisses, la théorie de Timoshenko est analogue à la celle de "Reissner-Mindlin" [Timoshenko, 1972].

Dans le cas d'un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z. D'où, il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

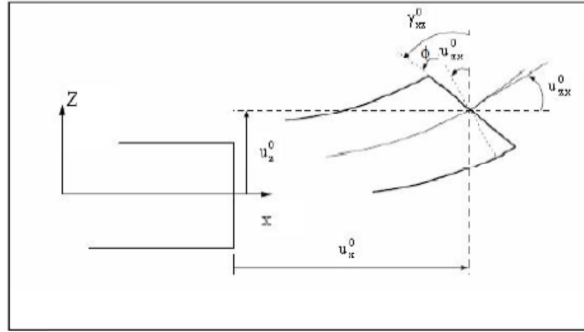


Figure II.2. Cinématique Timoshenko [Dufort,2001].

Selon Timoshenko, le déplacement s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) + z\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.4)$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.5)$$

γ_{xz}^0 : est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = \varphi^0(x) - w'_{,x}(x) \quad (II.6)$$

$\varphi^0(x)$: est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_{,x}(x) + \gamma_{xz}^0(x) + \varphi^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (II.7)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale à :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\varphi^0(x) \quad (II.8)$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Dans cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre. Malgré qu'il n'y ait aucun chargement qui induit le cisaillement, ces contraintes existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre.

Cependant, cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ($k = 5/6$) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé par [Mindlin et Deresiewicz, 1953] pour la variété de sections de poutres. [Cowper, 1966] et [KrishnaMurty, 1970] ont donné aussi de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.

Ainsi, le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont poussé d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie d'ordre élevé (HSDT) qui tient en compte de ces facteurs.

II.2.5 Théorie d'Ordre Elevé (HSDBT)

La distribution des champs de déplacement dans cette théorie est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est considérée plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce dernier apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.3). Ainsi, la fonction (z) représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

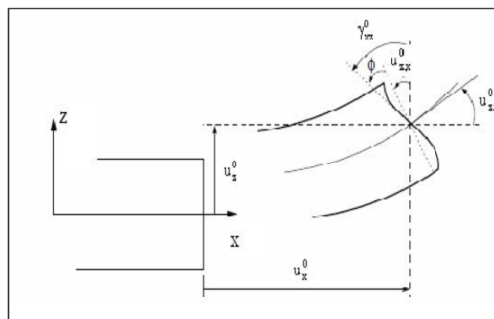


Figure II.3. Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

Cependant, la déformation transverse joue un grand rôle dans ces théories qui sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor (Nguyen, 2004) où la précision augmente avec l'ordre de développement. Ainsi, le champ de déplacement approché pour le troisième ordre est de la forme [Lo et Christensen, 1977]:

$$u^0(x, z) = x^0(x) + zw(x) + z^2\zeta(x) + z^3\phi(x) \quad (II.9)$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement" il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction $f(z)$.

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Ainsi, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) + f(z)\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.10)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_{,x}(x) + f'(z)\varphi^0(x) + w'_{,x}(x) \quad (II.11)$$

$$\gamma_{xz}(x) = f'(z)\varphi^0(x) \quad (II.12)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z) \Big|_z = f' \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (II.13)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (II.13).

II.3 Les plaques

II.3.1 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions, appelée «épaisseur», est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques. Les plaques peuvent être de formes rectangulaires, circulaires, polygonales, ou de forme quelconque. Dans une plaque, on définit les termes suivants (Figure II.4):

- **Le plan moyen (plan médian):** plan situé à équidistance entre les faces.
- **La fibre neutre :** élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y), avec $z = 0$.
- **Une fibre normale :** ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .
- **L'épaisseur h :** l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

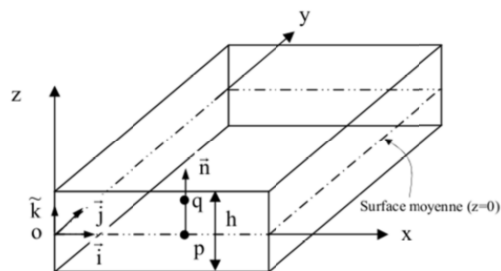


Figure II.4. Géométrie d'une plaque rectangulaire.

En 1888, Love a utilisé les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. Par la suite, la théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de [Rayleigh, 1877], [Timoshenko, 1921], [Reissner, 1945] et [Uflyand, 1948].

II.3.2 Les théories des plaques monocouches (ESL)

Dans la littérature, de nombreuses approches bidimensionnelles (2D) simplifiées ont été développées pour une modélisation plus raffinée des structures multicouches, tenant en compte l'effet de cisaillement transversal notamment aux interfaces entre les couches. En effet, l'approche de la monocouche équivalente (ESL) (l'approximation globale) est parmi les

approches les plus fréquemment utilisées, ainsi que celle par couche (LW) (l'approximation locale).

Le principe de base de l'approche par couche consiste à considérer chaque couche comme étant une plaque indépendante possédant son propre champ d'inconnues. Ainsi, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche.

Aussi dans l'approche monocouche équivalente, des modèles en déplacement sont adoptés le plus souvent, en prenant une forme du champ de déplacement comme une combinaison des fonctions inconnues et des coordonnées concernant l'épaisseur. Ainsi, La théorie de la monocouche équivalente se scinde en trois grandes familles à savoir :

- La Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT),
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT),
- Théories de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT).

II.3.2.1 Théorie de Love-Kirchhoff (CPT)

Cette théorie considérée comme la plus simple est la plus générale est basée sur un modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner, 1961]. Cette théorie classique des plaques [Kirchhoff, 1850], est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes (figure II.5) :

Hypothèse 1 : Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

Hypothèse 2 : La contrainte normale $\sigma(z)$ est négligeable devant les autres composantes.

Hypothèse 3 : Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation.

Hypothèse 4 : L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

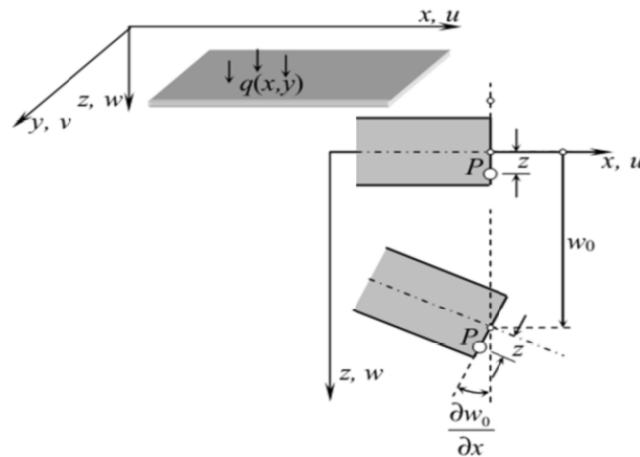


Figure II.5. Modèle de Love- Kirchhoff.

La principale limitation de la théorie classique de Kirchhoff est que les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation sont négligés. Or dans la pratique, les plaques ont des épaisseurs significatives. D'où, la nécessité de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique. Le champ de déplacement s'écrit alors sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.21.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.21.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.21.c})$$

Avec : $(u_0 = v_0 = w_0)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

II.3.2.2 Théorie de Reissner-Mindlin (FSDT)

Cette Théorie connue sous le nom de Reissner-Mindlin est la théorie des plaques qui permet la prise en compte du cisaillement transversal. Dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transversal vu que les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation (figure II.6.).

Pour ce qui est des plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie des plaques retenue dépend des caractéristiques géométriques. Ainsi, nous admettons généralement :

- Les hypothèses de Mindlin si $1/20 \leq H/L \leq 1/4$
- Et celle de Kirchhoff si $H/L < 1/20$

Où L : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y).

H : est l'épaisseur de la plaque.

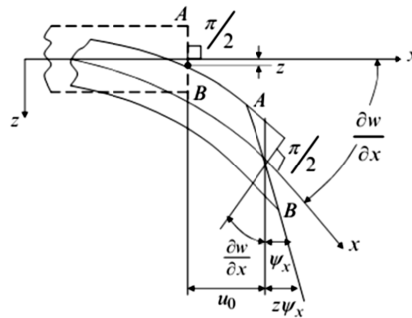


Figure II.6. Déformations dans le plan (XZ) selon la théorie du premier ordre (Reissner-Mindlin).

En outre, les déformations dues au cisaillement transversal représentent l'un des intérêts principaux des plaques épaisses composites. Malgré qu'il existe plusieurs théories des plaques stratifiées, qui incluent des contraintes de cisaillement transversales mais la théorie la bien connue est le modèle de Reissner. Ce dernier est connu comme étant la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT). Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.22.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.22.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.22.c})$$

Avec : $(u_0 = v_0 = w_0)$ sont les déplacements en membrane et (ϕ_x, ϕ_y) les rotations autour des axes x et y, respectivement donnée par :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (\text{II.22.d})$$

II.3.2.3 Le modèle de la plaque basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT)

Ces dernières années, les théories à ordre élevé de la déformation de cisaillement des plaques ont été développées non seulement pour l'analyse de plusieurs problèmes isothermes mais aussi pour comprendre les phénomènes physiques induits dans la plaque.

Aussi, la théorie de la déformation de cisaillement des plaques à ordre élevé est basée sur une distribution non-linéaire des champs dans la section contrairement aux théories CPT et FSDT avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur. Par conséquent, les effets de la déformation de cisaillement transversal et la déformation normale transversale sont pris en compte. Or, ces modèles ne nécessitent pas de facteurs de correction.

Plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par [Reddy, 1984], [Reddy et Phan, 1985], [Reddy, 1999;2000], [Iyengar, Chadrashekhara et al., 1974], [Iyengar et Pandya, 1982], [Krishna Murty, 1977 ; 1986; 1987], [Krishna Murty et Vellaichamy , 1987]. Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur selon [Reddy 1990 ; Mallikarjuna et Kant, 1993]. Or, le développement de ces théories est basé sur les hypothèses suivantes :

- Les sections transversales ne restent pas nécessairement planes et normales au plan moyen après déformation.
- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable,
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est pas en générale négligeable.

Or, la plupart des théories d'ordre supérieur (HSDPT) sont basées sur les approches de Reissner, de Henchy-Mindlin et d'Ambartsumyan. En effet, de nouvelles théories d'ordre supérieur ont aussi été proposées récemment par [Ait Atmane, 2010] ; [El Meiche et al., 2011] ; [Mantari et al, 2012 et 2014] ; [Nguyen, 2014] et [Čukanović et al., 2018].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \quad (\text{II.23.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \quad (\text{II.23.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.23.c})$$

Avec :

(u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes

x et y, respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$.

La fonction $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

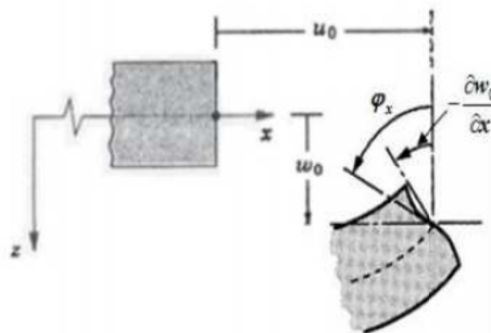


Figure II.7. Illustration de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

II.3.3 La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

En 2002, le chercheur Shimpi a développé un modèle raffiné de déformation des plaques nommé RPT (Refined Plate Theory) pour les plaques isotropes dans un but de réduire le nombre de variables par rapport aux théories d'ordre élevé existante [Shimpi, 2002].

Cette théorie RPT présente une similitude par rapport à la théorie classique des plaques (CPT) et ne nécessite pas de coefficient de correction de cisaillement.

En effet, plusieurs chercheurs ont démontré la fiabilité de cette théorie tels que Kim et Thai [Kim et al., 2009] et [Ait Atmane et al., 2010]. Elle a été appliquée dans le cas de la flexion des plaques FGM, dans le cas statique ainsi que dans d'autres travaux de Thai et Kim [Thai et al., 2011] et [Hadji et al., 2011] dans le cas du flambement des plaques orthotropes et aussi, dans la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.28.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.28.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.28.c})$$

Où :

(u_0, v_0) : sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

(w_b, w_s) : sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal respectivement et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

II.3.4 La théorie de déformation des plaques quasi-3D

Dans ce type de théorie de déformation des plaques quasi-3D, le déplacement transversal est composé de trois constituantes à savoir la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque « stretching effect ».

En effet, plusieurs chercheurs ont travaillé sur ce type de théorie où [Kim et al., 2009] avaient proposé une théorie à cinq variables pour la déformation au cisaillement de premier ordre au lieu des théories d'ordre élevé à six variables. D'autres chercheurs ont proposé par le biais de plusieurs fonctions des théories quasi-3D à cinq variables [Hebali et al., 2014], [Bennoun et al., 2016], [Abdelaziz et al., 2017], [Benchohra et al., 2018], [Bouhadra et al., 2018], [Meksi et al., 2018] et [Abualnour et al., 2018] contrairement à six pour les théories conventionnelles à ordre élevé.

Par la suite, des théories quasi-3D à quatre variables en vue le jour est cela grâce à l'introduction de nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six inconnues dont les travaux de Zenkour. Ce dernier a développé une nouvelle théorie quasi-3D à quatre inconnues pour différents types de plaques FGM [Zenkour, 2013a], pour les plaques sandwich [Zenkour, 2013b] et les plaques composite stratifiées [Zenkour, 2015]. A noter aussi, les chercheurs [Mantari et al., 2014a ; 2014b] ont développé une théorie quasi -3D à quatre inconnues en combinant à l'aide d'une fonction hyperbolique l'effet de cisaillement et l'effet de l'étirement du déplacement transversal.

Dans cette théorie, le champ de déplacement s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.29.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.29.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \quad (\text{II.29.c})$$

Où:

(μ_0, v_0) : sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.

φ : est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement).

$f(z)$ et $g(z)$: sont des fonctions de cisaillement transverse définies par :

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{II.30})$$

Ainsi, dans le tableau II.1 est présenté par ordre chronologique quelques fonctions de formes citées dans la littérature.

Tableau II.1. Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des FGM.

Théorie	Fonction de forme ($f(z)$)	Année
Reissner	$\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right)$	1945
Ambartsumyan	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right)$	1958
Reddy	$z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right)$	1984
Touratier	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	1991
Soldatos [129]	$\sinh\left(\frac{z}{h}\right), \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$	1992
Karama et al.	$z e^{-2(z/h)^2}$	2003
Aydogdu	$z \alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$	2009
Akavci et Tanrikulu	$z \operatorname{sech}\left(\frac{\pi z^2}{h^2}\right) - z \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$	2010
Ait Atmane	$\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$	2010
Elmeiche et al.	$\frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$	2011
Mantari et al.	$\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)}$	2012
Mantari et al	$\tan\left(\frac{\pi z}{2h}\right) m^{\sec\left(\frac{\pi z}{2h}\right)}$	2014
Nguyen	$h \arctan\left(\frac{rz}{2h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}$	2014
Čukanović et al.	$z \left(\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - 1.388\right)$	2018

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur les différents modèles théoriques des poutres et des plaques où une lecture a été établie sur les différents travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ces deux domaines. En effet, dans le domaine de la poutre, nous avons cité la théorie classique (CBT) basée sur le modèle d'Euler-Bernoulli, la théorie de cisaillement de premier ordre de Timoshenko (FSDBT) et les théories d'ordre élevé (HSDBT). Alors que dans celui de la plaque, plusieurs théories ont été présentées à savoir: la théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT) et enfin, la nouvelle théorie de déformation des plaques quasi-3D qui permet de réduire le nombre d'inconnus réduisant ainsi le temps de calcul, et qui prend aussi en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque.

Chapitre III

Revue bibliographique sur les travaux antérieurs

III.1 Introduction

Depuis leur parution, les matériaux à gradient fonctionnel ont fait l'objet de beaucoup de travaux de recherche. L'étendue de ces études est liée aux problèmes des vibrations, mécaniques, thermiques ainsi qu'au problème de flambement (thermique et mécanique) des structures en FGM. Comme tout domaine scientifique, en répondant à une problématique donnée, chaque nouvelle recherche pose de nouveaux problèmes à résoudre ainsi d'autres axes de recherche sont dégagés. Dans ce chapitre, le but est de donner un aperçu général sur les travaux réalisés antérieurement sans rentrer dans les détails exhaustifs.

III.2 Etudes sur les contraintes résiduelles

Durant leur vie, les structures FGM seront appelées à affronter des températures plus ou moins élevées. De ce fait, il est impératif d'estimer les contraintes résiduelles d'origine thermique, que ces structures vont subir, surtout du fait de la non-homogénéité qu'elles présentent, et des différents coefficients de dilatation thermique des matériaux monolithiques de base. La distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées dans les structures en FGM, soumises à des environnements à températures élevées, affectent à deux niveaux macromécaniques et micromécaniques, la distribution des contraintes à vie, et donnent naissance à la propagation des fissures.

Ces contraintes résiduelles nées doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique, soumis à un environnement de haute-température. Dans le but de l'étude de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis, Drake et al. (Drake et al., 1993) ont mené les premières investigations dans ce domaine, en considérant un spécimen en FGM (Al₂O₃-Ni) dans trois configurations différentes. Le comportement des structures FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques a été examiné par [Giannakopoulos et al., 1995] qui ont constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles, d'où la nécessité d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. Dans un

FGM discret, [Hill et Lin, 2002] ont choisi des plaques FGM borure titane-titane pour mener une étude expérimentale et numérique afin d'étudier les contraintes résiduelles.

III.3 Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Pour la résolution du problème de transfert de chaleur transitoire, dans une bande en FGM dont les surfaces sont soudainement refroidies à des températures différentes et ayant des propriétés matérielles variables dans l'épaisseur, [Jin, 2002] a présenté une solution analytique. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes.

[Sladek et al., 2003] ont utilisé La méthode Petrov-Galerkin pour analyser la conduction thermique transitoire dans des solides axisymétriques 3D avec des propriétés de matériau continuellement inhomogènes et anisotropes. Un corps axisymétrique en 3D a été créé par rotation d'une section transversale autour d'un axe de symétrie. La symétrie axiale de la géométrie et les conditions aux limites ont réduit le problème de valeur original 3D en un problème 2D. La section transversale est couverte par de petits sous-domaines circulaires entourant les nœuds répartis aléatoirement sur le domaine analysé. Les variations spatiales de la température et du flux thermique (ou de leurs transformées de Laplace) à des instants de temps discrets sont approximées sur la frontière locale et à l'intérieur du sous-domaine au moyen de la méthode des moindres carrés.

Peu de temps après, [Ootao et Tanigawa, 2004] ont étudié le transfert de chaleur transitoire dans une structure FGM épaisse soumise à une source non uniforme de chaleur volumétrique où ils ont pu estimer les contraintes et la distribution de la température.

III.4 Analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement

En 2001, [Sankar, 2001] a étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces où il a comparé les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli). Dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur, [Sankar et Tzeng, 2002] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques.

Ainsi, les résultats de ces deux travaux montrent que :

- La théorie classique des poutres donne des résultats acceptables si la poutre est élancée ;
- Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par la théorie classique des poutres ;
- Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge ;
- Les concentrations de contraintes qui se produisent sur la surface de chargement sont plus élevées dans une poutre en FGM par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa ;
- Les concentrations de contraintes sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

En utilisant la méthode des éléments finis développée par la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur, [Chakraborty, 2003] a pu résoudre les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en introduisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement.

En ce qui concerne les plaques, [Ootao et Tanigawa, 1999] ont développé en 1999 des solutions exactes aux problèmes de contraintes thermiques pour des plaques FGM simplement appuyées. Ensuite, [Reddy, 2000] a étudié la réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM, en utilisant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement. En 2001, pour résoudre les problèmes thermoélastiques, [Reddy et Cheng, 2001] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques.

Par la suite, une analyse des déformations suivant une non-linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par [Woo et Meguid, 2001].

En 2002, [Vel et Batra, 2002] ont présenté la solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée, où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur des fractions de volume de matériau, étaient supposées suivre une loi de puissance. Par contre, l'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par [Javaheri et Eslami, 2002].

En 2003, [Shen et al., 2003], ont analysé de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et/ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy, pour les conditions aux limites indiquées. Ceci, afin d'avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique. La Figure III.1 illustre un exemple de cette analyse.

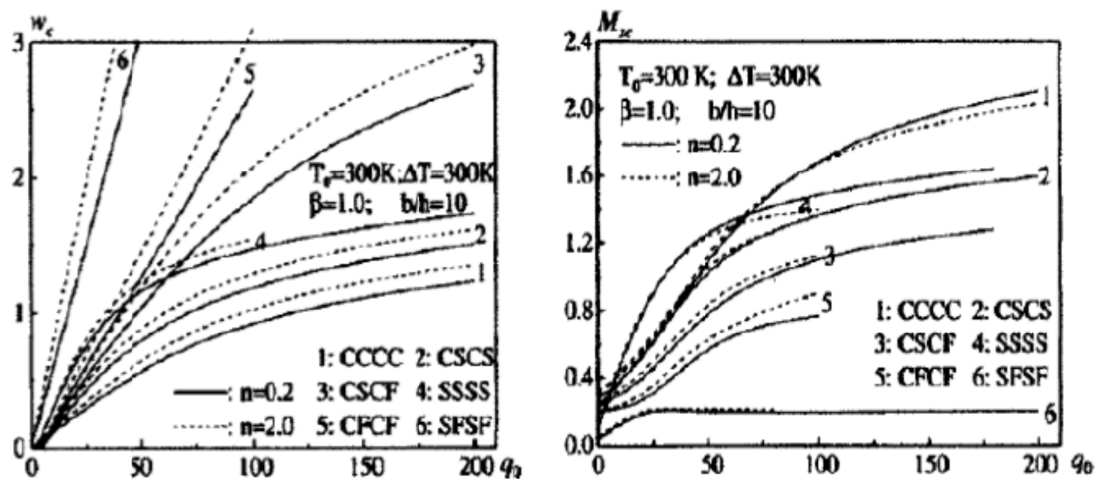


Figure III.1. Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique [J.Yang. J. et al., 2005].

En 2004, [Kashtalyan, 2004] a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyse des milieux isotropes non homogènes, afin de présenter la solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec un coefficient de Poisson constant, et une variation exponentielle du module d'élasticité à travers l'épaisseur.

En 2005, [Zenkour, 2005] en adoptant la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement et la version «sinusoïdale» de la théorie de

déformation de cisaillement a étudié les problèmes de la flexion, du flambement et la vibration libre des plaques sandwich en FGM (céramique/métal).

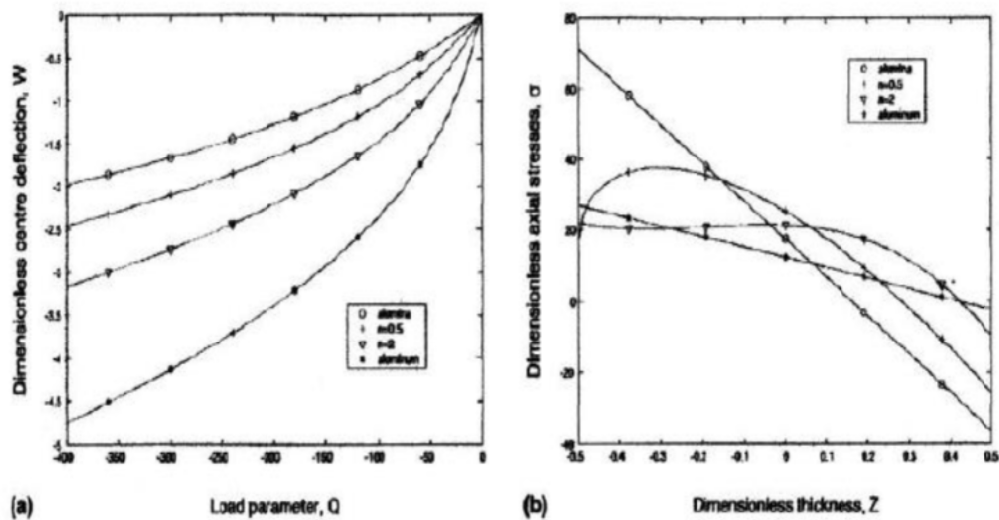


Figure III.2. Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse [Woo et al., 2001].

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique, en métal et en FGM est illustrée sur la figure III.2. On remarque que pour une faible valeur de paramètre de matériau ($n = 2$), la flèche dans une plaque FGM, est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique suit une évolution linéaire en fonction de l'épaisseur. Tandis que dans le cas d'une plaque en FGM, la distribution des contraintes devient non linéaire, cela est justifié par la gradation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur.

En utilisant la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, [Na et Kim, 2004] ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Les chercheurs [Yang et al., 2005], qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes, ont pu résoudre le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak.

En 2006, [Chi et Chung, 2006] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

Pour le flambement des plaques FGM, [Fuchiyama et Noda, 1995] ont étudié le flambement d'une plaque FGM (ZrO₂/ Ti-6Al-4V) sous un chargement thermique, tandis que [Matsunaga, 2009] a employé la théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur. L'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre a été présentée par [Zhao et al., 2009] en utilisant la méthode de Ritz.

Pour étudier le flambement des plaques sandwiches en FGM, [Zenkour, 2005] a utilisé la version sinusoidale de déformation de cisaillement alors que [Park et Kim, 2005] ont analysé l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique. La figure III.3 représente un exemple qui illustre l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque FGM simplement appuyée.

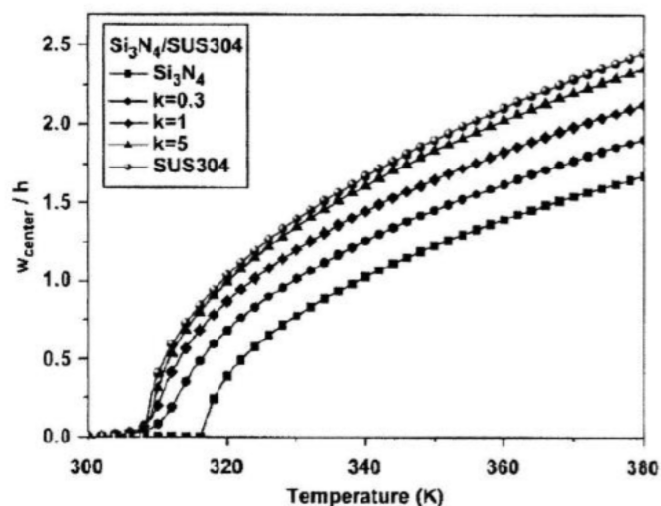


Figure III.3. Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM (Si₃N₄/SUS304) [J.Yang. J. et al., 2005].

Pour analyser les problèmes de vibration des plaques annulaire épaisses en FGM avec des couches piézoélectriques intégrés. [Hashemi Sh-H et al., 2010] ont employé une méthode analytique. La plaque avec différentes conditions aux limites sur les bords est modélisée sur la base de la théorie de troisième ordre de Reddy « TSDT ». Deux ans plus tard, dans le but de développer un modèle qui peut décrire le comportement vibratoire de plaques FGM avec couche piézoélectrique, pour différentes conditions aux limites et en utilisant la théorie de premier ordre de «Reissner et Mindlin». Les mêmes auteurs [Hashemi Sh-H et al., 2012] ont développé une solution exacte de la vibration libre des plaques épaisses piézoélectriques couplés circulaires / annulaires. Les effets de couplage entre les déplacements dans le plan transversal et sur les paramètres de fréquence sont avérés être significatifs dans cette étude.

Quant à [Shen et Wang, 2012], ils envisagent deux types de modèles micromécaniques des FGM pour présenter les petites et grandes vibrations d'amplitude d'une plaque rectangulaire en FGM, reposant sur une fondation élastique de type Pasternak dans des environnements thermiques.

Pour comprendre l'effet de l'application de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT et du troisième ordre TSDT sur la vibration des plaques non [Khorramabadi et al., 2008] ont étudié la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées

Par ailleurs, les chercheurs Tounsi et ses collègues à savoir [Mechab et al., 2010]; [Houari et al., 2011]; [Ameur et al., 2011]; [El Meiche et al., 2011]; [Benachour et al., 2011]; [Hadji et al., 2011] et [Tounsi et al., 2013] ont développé de nouvelles théories des plaques avec quatre inconnues seulement, qui ressemblent à la théorie d'ordre élevé et qui tiennent en compte des déformations de cisaillement. Afin de réduire les équations d'équilibres pour les plaques à gradient de propriétés, ces théories utilisent seulement quatre fonctions inconnues à quatre équations. Ces théories ne nécessitent pas de facteur de correction de cisaillement, et satisfait une distribution parabolique des déformations de cisaillement transversales, et satisfait les conditions aux limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces.

Les plaques FGM ont été analysées en négligeant l'étirement d'épaisseur z , dans ces théories des plaques de quatre variables et d'autres théories de déformation de cisaillement, le déplacement transversal considéré comme indépendant de coordonnées de l'épaisseur. [Carrera et al., 2011] ont étudié l'effet de la déformation normale dans les plaques FGM en utilisant une approximation par éléments finis.

III.5 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM

Les structures FGMs, sous diverses sollicitations, étaient traitées par de nombre important de recherches étudiant leurs comportements statiques et thermomécaniques. Peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. A partir de l'an 2000, des chercheurs ont commencé à s'intéresser sérieusement aux comportements dynamiques des FGMs.

[Praveen et Reddy, 1998] ont analysé, par élément fini, une plaque céramique-métal dans un champ thermique, soumise à des charges dynamiques transversales afin de prédire ses réponses statique et dynamique.

De même que pour ses prédécesseurs, [Reddy, 2000] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis dans le but d'étudier la réponse dynamique non linéaire des plaques FGM épaisses sous l'effet d'une pression uniforme, et en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT).

Alors que [Yang et Shen, 2001] ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élancement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane sur la réponse dynamique des plaques FGM.

L'étude paramétrique de [Yang et Shen, 2001] a montré l'effet de l'indice de la rigidité du support élastique du rapport d'élancement (h/a et/ou h/b), de la fraction volumique, de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM mince.

Aussi, [Kant et Swaminathan, 2001] ont utilisé une théorie de déformation trigonométrique raffinée pour l'analyse de la flexion thermo-élastique de plaques sandwiches à gradient fonctionnel. Leur modèle théorique incorpore les déformations du stratifié qui tiennent compte des effets de la déformation de cisaillement transversal, de la déformation, d'une contrainte normale transversale et d'une variation non linéaire des déplacements dans le plan par rapport à la coordonnée d'épaisseur, modélisant ainsi le gauchissement des sections transversales plus précisément et en éliminant le besoin de coefficients de correction de cisaillement.

En se reposant sur le transfert matricielle, [Reddy et Chen, 2002] ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle, l'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

Par ailleurs, [Huang et Shen, 2004] ont obtenu des solutions analytiques grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations en incluant la conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température. Ils ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples où ils ont couplé entre les équations de Von-Karman et la théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur.

Pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples, [Vel et Batra, 2004] ont développé une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D). Ils ont employé la méthode des séries en puissances pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. L'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (h/a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles a été mis en évidence. Ensuite, cette étude a été exploitée par [Qian, Batra et al., 2004], en incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse.

Deux ans plus tard, [Ferreira et al., 2006] ont déterminé les fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites.

A partir de 2007, la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en FGM a commencé à prendre de la place.

En se basant sur la théorie linéaire des petites déformations sous différentes conditions aux limites, [Uymaz et Aydogdu, 2007] ont examiné l'influence de l'indice de la fraction volumique et de la géométrie (a/h et a/b) sur les fréquences naturelles des plaques FGMs minces et épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz. Cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses, étant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur.

Les plaques en FGM sandwiches avec revêtements supérieur et inférieur en FGM et une âme homogène, ou avec des revêtements homogènes et une âme en FGM, ont fait l'objet d'une étude faite par [Li et al., 2008]. La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. L'étude paramétrique basée sur l'indice des fractions volumiques, sur la géométrie (h/a et a/b), et sur les épaisseurs relatives des couches, a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse. L'étude de la convergence a montré que les termes de la sommation dépendent principalement de l'épaisseur de la plaque dans la direction de l'épaisseur alors qu'il est en fonction des conditions aux limites dans les autres directions.

En se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles, [Matsunaga, 2008] a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM où les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. Matsunaga a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire les fréquences propres et les charges critiques de flambage, et la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM avec une précision considérable.

En utilisant la méthode de Navier, [Ait Atmane et al., 2010] ont étudié la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé.

[Baferani et al., 2011] ont présenté les solutions des vibrations libres en étudiant une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique, où les deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les deux autres sont soit tous libres, soit encastés, soit en appuis simples.

Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak ainsi que l'indice de la fraction volumique ont un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. L'augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration.

[Hadji et al., 2011] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwiches. [Benachour et al., 2011] ont utilisé cette même théorie pour l'étude de la vibration des plaques FGM où ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité.

En 2013, les chercheurs [Tounsi et al., 2013] ont présenté des formulations analytiques et des solutions pour les fréquences naturelles de plaques composites et sandwiches simplement appuyées sur la base d'une théorie raffinée d'ordre supérieur. Pour étudier la vibration et le flambement de la plaque sandwich exponentielle reposant sur des fondations élastiques avec différentes conditions d'appuis, [Ait Amar Meziane et al., 2014] ont présenté une théorie de déformation de cisaillement raffinée efficace et simple

Deux ans plus tard, [Mahiet al., 2015] ont développé une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour la flexion et l'analyse des vibrations libres des plaques isotropes, plaques fonctionnellement gradués, plaques sandwiches et plaques stratifiées. La réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwich FGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres, a été étudié par [Taibi et al., 2015].

En utilisant une nouvelle théorie de cisaillement transverse d'ordre élevé à quatre variables, [Hadji et al., 2017] ont présenté une étude dynamique des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriété type FGM, cette théorie proposée s'est révélée efficace dans la résolution du comportement dynamique des plaques sandwiches à gradient de propriété type FGM.

Récemment, [Ali RACHEDI et al., 2020] ont présenté une recherche théorique sur la réponse de la flexion thermomécanique des plaques FGM sur une fondation élastique variable. Une théorie de déformation quasi-3D à quatre variables, en prenant en considération la déformation par cisaillement ainsi que l'effet d'étirement de l'épaisseur. Les plaques FGM sont supposées simplement appuyées avec des propriétés de matériau dépendant de la température et soumises à une élévation de température non linéaire. Divers modèles d'homogénéisation sont utilisés pour estimer les propriétés efficaces des matériaux. Les résultats numériques pour les déformations et les contraintes des plaques FGM avec des propriétés de matériau dépendant de la température sont étudiés.

III.6 Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénieries avec de nombreuses applications pratiques. L'évaluation des contraintes résiduelles a pris beaucoup d'intention dès l'innovation de ces matériaux. Certains chercheurs se sont intéressés au transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés du moment que ces derniers sont susceptible de supporter de fortes charges thermiques. L'analyse de la flexion, de la vibration et de l'instabilité élastique des structures en FGM sous différents types de chargement a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. L'influence des conditions aux limites et des types de fondation sur le comportement des structures en FGM constitue un autre volet des recherches que dégagent les FGMs.

Chapitre IV

**Solution quasi 3D pour la réponse
mécanique des plaques sandwich FG**

IV.1 Introduction

Les structures en sandwich composées d'un noyau lié à deux feuilles faciales sont couramment utilisées dans différents structures tel que les véhicules aérospatiaux en raison de leur rigidité en flexion exceptionnelle, de leur faible poids spécifique, de leurs excellentes caractéristiques de vibration et de bonnes propriétés de fatigue. Grâce à la variation uniforme et continue des propriétés des FGMs, la concentration de contrainte qui se trouve dans les structures sandwich stratifiées est éliminée dans les structures sandwich FG [Thai et al, 2014].

Certains chercheurs ont étudié la flexion, le flambement et les vibrations libres des plaques à gradient fonctionnel en utilisant les théories des plaques. La théorie de la déformation la plus fondamentale est la théorie classique des plaques (CPT) qui suppose que la normale au plan médium avant flexion reste perpendiculaire à ce dernier après flexion. Il néglige l'effet de toutes les contraintes transversales et est moins précise. Par conséquent, elle donne des résultats précis pour les plaques minces seulement. L'inconvénient du CPT a été surmonté par la théorie de la déformation de cisaillement (FSDT) de premier ordre proposée par [Reissner, 1945] et [Mindlin, 1951]. Cette théorie ne satisfait pas les conditions aux limites des contraintes sur les surfaces de la plaque et nécessite un facteur de correction de cisaillement.

Pour éviter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement, plusieurs théories de plaques de déformation par cisaillement (HSDTs) ont été proposées. La théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre (TSDT) de [Reddy, 1984] qui est exempte de tout facteur de correction du cisaillement et qui satisfait l'état de la contrainte de cisaillement transversale nulle aux parties supérieures et inférieures de la plaque.

Différentes théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur sont développées en utilisant cinq fonctions inconnues, la théorie présentée par [Hadji, et al, 2011], [Houari et al, 2011], [Abdelaziz et al, 2011], [Merdaci et al, 2011], [Bourada, et al, 2012] et [Bennoun et al, 2016] est une théorie dite la théorie raffinée des plaques pour la réponse au flexion, le flambement et la vibration libre de la plaque sandwich FGM simplement appuyé avec seulement quatre fonctions inconnues.

Récemment, Tounsi et ses collègues [Meksi et al.,2019; Sekkal et al., 2017, Menasria et al., 2017; Bouhadra et al., 2018 ; Ait Sidhoum et al., 2017 et 2018; Bourada et al., 2016; Mahmoudi et al., 2018] ont proposé un nouveau champ de déplacement qui utilisant une intégrale indéterminée. Cette nouvelle cinématique réduit le nombre d'inconnues et les équations du mouvement par rapport à d'autres théories de la même nature.

Ce chapitre vise à améliorer cette théorie en incluant les effets d'étirement pour étudier la flexion, le flambement et la vibration libre de la plaque épaisse sandwich FG. Le point culminant de la théorie proposée est qu'elle n'implique que quatre inconnues qui est un nombre réduit de variables et d'équations gouvernantes que les théories conventionnelles comparée avec les solutions 3D et quasi-3D. De plus, ça ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement comme dans le cas du FSDT et sa portée est plus large que celle du CPT puisque le CPT ne s'applique qu'au cas des plaques minces. Les équations de mouvement sont obtenues à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques des plaques sandwich FG simplement appuyés sont présentées. Pour vérifier la validité de la présente solution quasi 3D, les résultats obtenus sont comparés avec les données disponibles dans la littérature. L'étude paramétrique est effectuée pour montrer les influences de nombreux facteurs sur la flexion, le flambement et la vibration libre des plaques sandwich FGM.

IV.2 Formulation du problème

Considérons une plaque rectangulaire de longueur « a », de largeur « b » et d'épaisseur uniforme « h ». La plaque est supposée être soumise à une charge mécanique transversale à la surface supérieure et une charge de compression sur le plan médian de la plaque. A cet effet, trois types différents de plaques FG sont envisagés:

IV.2.1 Type A: plaques FG isotropes

La plaque de type A est graduée du métal à sa surface inférieure à la céramique à la partie supérieure (Figure IV.1.(b).). La fraction volumique du matériau céramique V_c est donnée [Bourada et al., 2018 ; Attia et al., 2018; Bousahla et al., 2016] comme suit:

$$V_c = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (IV.1)$$

Où p est l'indice de loi de puissance qui est positif et $z \in [-h/2, h/2]$.

IV.2.2 Type B: plaques sandwich avec noyau FG

Le noyau de ce type est gradué du métal à la céramique. La face inférieure est en métal isotrope, tandis que la partie supérieurele visage est en céramique isotrope. Les positions verticales du surfaces inférieure et supérieure et de deux interfaces entre le les couches sont désignées par $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 , $h_3 = h/2$. Respectivement. h_1 , h_2 varient selon le rapport d'épaisseur des couches. Les fonctions de fraction volumique de la phase céramique $V_c^{(j)}$ définies par [Nguyen et al., 2014] comme suit :

$$\begin{cases} V_c^{(j)}(z) = 0 & \text{pour } z \in [h_0, h_1] & \text{(IV.2a)} \\ V_c^{(j)}(z) = \left(0.5 + \frac{z - h_1}{h_2 - h_1}\right)^p & \text{pour } z \in [h_1, h_2] & \text{(IV.2b)} \\ V_c^{(j)}(z) = 1 & \text{pour } z \in [h_2, h_3] & \text{(IV.2c)} \end{cases}$$

La variation du matériau céramique à travers l'épaisseur de la plaque de (1-2-1) la plaque sandwich de type B est montrée dans la figure IV.1.(c).

IV.2.3 Type C: Plaques sandwich avec faces FG

Les faces de ce type sont classées du métal à la céramique. Le noyau est en céramique isotrope. Les fonctions de la fraction volumique de la phase céramique $V_c^{(j)}$ sont données par [Nguyen et al., 2014]:

$$\begin{cases} V_c^{(j)}(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0}\right)^p & \text{for } z \in [h_0, h_1] & \text{(IV.3a)} \\ V_c^{(j)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_1, h_2] & \text{(IV.3b)} \\ V_c^{(j)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3}\right)^p & \text{for } z \in [h_2, h_3] & \text{(IV.3c)} \end{cases}$$

La variation du matériau céramique à travers l'épaisseur de la plaque sandwich de type C (1-2-1) est donnée dans la figure IV.1(d).

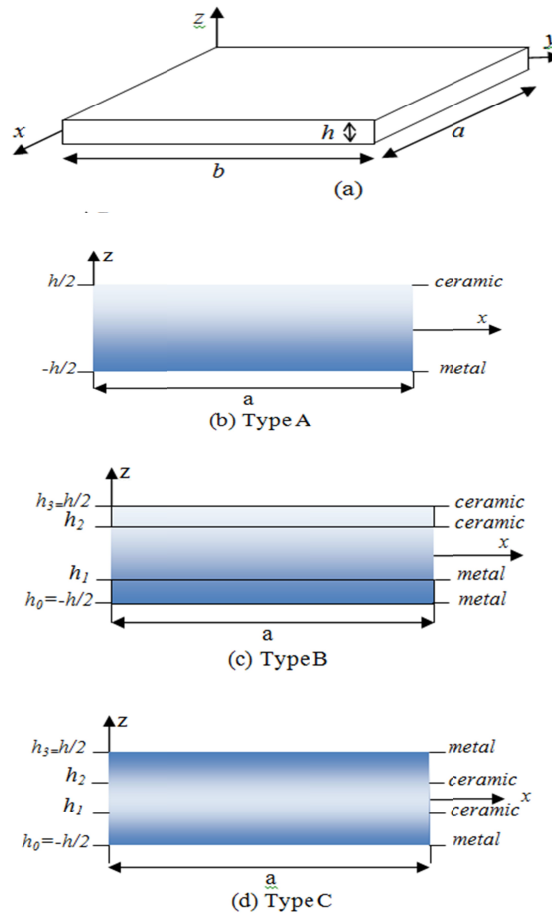


Figure IV. 1. Géométrie des plaques fonctionnellement graduées.

IV.2.4 Cinématique et déformations

Une théorie originale de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D est proposée dans ce travail. La théorie considère à la fois les influences de la déformation de cisaillement et l'étirement de l'épaisseur par une distribution hyperbolique de tous les déplacements dans l'épaisseur, et respecte les conditions aux limites des contraintes de cisaillement transversales et par conséquent ceux des déformations, qui sont nulles sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre ($z = \pm h/2$) sans utiliser de coefficient de correction de cisaillement. Le champ de déplacement [Ait Sidhoum et al., 2018] s'écrit comme suit:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{IV.4a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{IV.4b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \theta(x, y, t) \quad (\text{IV.4c})$$

Où : $u_0; v_0; w_0; \theta$; sont quatre déplacements inconnus du plan médian de la plaque.

Le coefficient k_1 et k_2 dépend de la géométrie. La cinématique dans l'équation (IV.4) introduit seulement quatre inconnues $u_0; v_0; w_0$ et θ en considérant l'effet d'étirement de l'épaisseur.

$f(z)$ représente la fonction de gauchissement définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur. $f(z)$ est exprimée comme suit [Nguyen et al., 2014]:

$$f(z) = h \arctan\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)} \quad (\text{VI.5})$$

Les expressions déformation-déplacement, basées sur la formulation, sont écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.7a})$$

$$g(z) = \frac{1}{9} \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \theta \quad \text{and} \quad g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{IV.7b})$$

Les intégrales présentées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être exprimés comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.8})$$

Où : les coefficients A' et B' sont considérés selon le type de solution employée, dans ce cas via la méthode de Navier. Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = -\alpha^2, \quad k_2 = -\beta^2 \quad (\text{IV.9})$$

Où : α et β sont définis dans l'expression (IV.27). Les relations de constitution linéaires sont données ci-dessous :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

avec : C_{ij} sont les constantes élastiques tridimensionnelles Défini par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{IV.11a})$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+2\nu)}, \quad (\text{IV.11b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.11c})$$

IV.2.5 Équation de mouvement

L'équation du mouvement s'écrit de la forme suivante :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{IV.12})$$

Où : δU est la variation de l'énergie de déformation, δV est la variation du travail externe effectué par charge externe appliquée au lieu, et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque s'exprime par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right. \\ &\quad \left. + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[\begin{aligned} &N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 \\ &+ M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\ &+ M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 \\ &+ Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1 \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Où : A est la surface supérieure et les résultantes de la contrainte N , M , S et Q sont définies par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy); \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (\text{IV.14a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad (\text{IV.14b})$$

$$(Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f'(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz,$$

La variation du travail effectué par les charges planes est donnée par :

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta w dA - \int_A q \delta w dA \quad (\text{IV.15})$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (\text{IV.16})$$

Où (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont des charges appliquées dans le plan.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + J_1^{st} (\dot{w}_0 \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{w}_0) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA \\ &\quad + K_2^{st} \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Où : la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ est la masse volumique et (I_i, J_i, K_i) sont des inerties massiques du métal et matériaux céramiques exprimés respectivement par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV.18a})$$

$$(J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st}) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, g, zf, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV.18b})$$

En remplaçant les équations (IV.13), (IV.15) et (IV.17) par l'équation (IV.12), l'équation de mouvement suivante peut être obtenue:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial y^2} \right) - I_2 \nabla^2 \dot{w}_0 + J_1^{ts} \dot{\theta} \\ \delta \theta : \quad & - k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \\ & + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - N_z + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} \\ & + g(0) \left[N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = \\ & - J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ & - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_1^{st} \ddot{w}_0 + K_2^{st} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Les propriétés matérielles effectives à la j-ème couche des plaques FG de sont exprimées par la loi de puissance selon la forme:

$$P^{(j)}(z) = P_m + (P_c - P_m) V_c^{(j)}(z) \quad (\text{IV.20})$$

Où : P_m et P_c sont le module de Young (E) et le coefficient de Poisson (ν) des matériaux métalliques et céramiques pour les plaques FG élastiques et isotropes respectivement.

En remplaçant l'équation (IV.7) dans l'équation (IV.10) et les résultats ultérieurs dans l'équation (IV.14), les résultantes de contrainte sont obtenues en termes de déformations comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \varepsilon^0 \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.21a})$$

$$N_z = L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s) + R^a \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV.21b})$$

Dans le quel :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV.22a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV.22b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22d})$$

$$Q = \{Q_{xz}^s, Q_{yz}^s\}^t, S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad (\text{IV.22e})$$

$$\gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, \gamma^1 = \{\gamma_{xz}^1, \gamma_{yz}^1\}^t$$

$$F^s = \begin{bmatrix} F_{55}^s & 0 \\ 0 & F_{44}^s \end{bmatrix}, X^s = \begin{bmatrix} X_{55}^s & 0 \\ 0 & X_{44}^s \end{bmatrix}, A^s = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22f})$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{IV.22g})$$

Les composantes de rigidité sont données comme suit:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_z \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.23a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV.23b})$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left([f'(z)]^2, f'(z)g(z), g^2(z) \right) dz \quad (\text{IV.23c})$$

$$(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s) = (F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) \quad (\text{IV.23d})$$

En substituant l'équation (IV.21) à l'équation (IV.19), l'équation du mouvement peut être exprimée en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées prendront la forme suivante:

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_2 B') d_{122} \theta \\ & + B_{11}^s k_1 A' d_{111} \theta + L d_1 \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \dot{w}_0 + J_1 k_1 A' d_1 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.24a})$$

$$\begin{aligned} & A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 \\ & - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\ & + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A') d_{112} \theta \\ & + B_{22}^s k_2 B' d_{222} \theta + L d_2 \theta = I_0 \dot{v}_0 - I_1 d_2 \dot{w}_0 \\ & + J_1 k_2 B' d_2 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.24b})$$

$$\begin{aligned} & B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - \\ & 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} \theta + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B') \\ & + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} \theta + L^a (d_{11} \theta + d_{22} \theta) + N_x^0 d_{11} w + 2N_{xy}^0 d_{12} w + N_y^0 d_{22} w \\ & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_1^{ts} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.24c})$$

$$\begin{aligned} & -k_1 A' B_{11}^s d_{111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 \\ & - (B_{12}^s k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 - B_{22}^s k_2 B' d_{222} v_0 \\ & + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} w_0 + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} w_0 \\ & + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} w_0 - H_{11}^s (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - H_{22}^s (k_2 B')^2 d_{2222} \theta \\ & - (2H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta \\ & + ((k_1 A')^2 F_{55}^s + 2k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s) d_{11} \theta + \\ & ((k_2 B')^2 F_{44}^s + 2k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s) d_{22} \theta \\ & - 2R(k_1 A' d_{11} \theta + k_2 B' d_{22} \theta) - L(d_1 u_0 + d_2 v_0) \\ & + L^a (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) - R^a \theta + g(0) (N_x^0 d_{11} w + \\ & 2N_{xy}^0 d_{12} w + N_y^0 d_{22} w) = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) \\ & + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) \\ & - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) + J_1^{st} \ddot{w}_0 + K_2^{st} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.24d})$$

Où : d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont le différentiel des opérateurs suivant:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV.25})$$

IV.2.6 Solutions de Navier

La méthode des solutions de Navier est utilisée pour déduire les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont écrites comme le produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter l'équation du mouvement et la condition aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Où : ω est la fréquence de vibration libre de la plaque, $i = \sqrt{-1}$ l'unité imaginaire avec

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \quad (\text{IV.27})$$

La charge transversale q est également étendue dans la série sinusoïdale double de Fourier comme:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{IV.28})$$

Où : $q_{mn} = q_0$ pour une charge distribuée sinusoïdalement. En supposant que la plaque est soumise à des charges de compression dans le plan déformé :

$$N_x^0 = -N_0, \quad N_y^0 = -\gamma N_0, \quad N_{xy}^0 = 0, \quad \gamma = N_y^0 / N_x^0$$

(où γ est un paramètre de charge non dimensionnel).

En remplaçant les équations (IV.26) et (IV.28) dans l'équation (IV.24), l'équation suivante est obtenue:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} + \eta & S_{34} + g(0)\eta \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} + g(0)\eta & S_{44} + [g(0)]^2 \eta \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

Où

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= (\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}), S_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\
 S_{13} &= -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\
 S_{14} &= \alpha((k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \beta^2 \\
 &+ k_1 A' B_{11}^s \alpha^2 - L), S_{22} = (\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}) \\
 S_{23} &= -\alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22} \\
 S_{24} &= \beta((k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \alpha^2 + k_2 B' B_{22}^s \beta^2 - L) \\
 S_{33} &= (\alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66})) \\
 S_{34} &= -(\alpha^4 k_1 A' D_{11}^s + 2\alpha^2 \beta^2 k_2 B' D_{12}^s + \beta^4 k_2 B' D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s) + L^a (\alpha^2 + \beta^2) \\
 S_{44} &= (k_1 A' \alpha^4 H_{11}^s + \beta^4 (k_2 B')^2 H_{22}^s + (2k_1 k_2 A' B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 \\
 &+ \alpha^2 ((k_1 A')^2 F_{55}^s + 2k_1 A' X_{55}^s + A_{55}^s) + \beta^2 ((k_2 B')^2 F_{44}^s + 2k_2 B' X_{44}^s + A_{44}^s) - 2R(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) + R^a \\
 \eta &= -N_0 (\alpha^2 + \gamma \beta^2)
 \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Et

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= I_0, m_{13} = -\alpha I_1, m_{14} = J_1 k_1 A' \alpha, \\
 m_{22} &= I_0, m_{23} = -\beta I_1, m_{24} = k_2 B' \beta J_1, \\
 m_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), m_{34} = -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) + J_1^s, \\
 m_{44} &= K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2) + K_2^{st}
 \end{aligned} \tag{IV.31}$$

L'équation (IV.29) est une forme générale d'analyse de flexion, de flambement et de vibration libre de plaques sandwich isotropes et FG sous des charges planes et transversales. Afin de résoudre le problème de flexion, la charge de compression dans le plan N_0 et la matrice de masse M sont mises à zéro. Les charges critiques de flambement (N_{cr}) peuvent être obtenues à partir du problème de stabilité $|K_{ij}|=0$ tandis que le problème des vibrations libres est obtenu en omettant à la fois les charges planes et transversales.

IV.3 Résultats numériques et discussion

Dans cette section, divers exemples numériques utilisant la présente solution quasi-3D sont présentés pour la flexion, le flambement et la vibration libre des plaques sandwich FG simplement appuyées. Les résultats de la présente solution seront d'abord comparés aux données existantes disponibles dans la littérature pour vérifier leur exactitude. Pour cela, les plaques sandwich FG sont composées de céramique et de métal (voir tableau IV.1). Pour plus de commodité, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad w = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \\ \hat{w} &= \frac{10hE_0}{aq_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \hat{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{10h^2}{a^2 q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \sigma_{xy}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_{xy}(0, 0, z), \\ \bar{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_{mh}^3}, \\ \hat{N}_{cr} &= \frac{N_{cr} a^2}{100E_0 h^3}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega ab}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_c^2 \rho c)}{E_c}} \\ \hat{\omega} &= \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3, \quad E_0 = 1 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Tableau IV.1. Propriétés des matériaux (métal et céramique).

Matériaux	Module de Young (GPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Coefficient de poisson
Aluminium (Al*)	70	2702	0.3
Aluminium (Al)	70	2702	
Zirconium(ZrO ₂)	151	3000	
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	

IV.3.1 Analyse de flexion

Afin de prouver la validité de la présente théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé (HSDT), des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir de cette théorie et ceux obtenus par [Nguyen et al., 2014 ; Carrera et al., 2008 ; Wu et Chui, 2011; Zenkour, 2006; Mantari et al., 2012] et [Thai et Kim, 2013 ; Zenkour, 2006; Neves et al., 2013; et Bessaim et al., 2013].

Comme premier exemple, une plaque carrée de type A (Al/Al₂O₃) soumise à une charge sinusoïdale est étudiée. Dans le tableau IV.2, les résultats de déplacement, les contraintes axiales et transversales sont comparés par rapport à la HSDT de [Nguyen et al., 2014] la solutions quasi-tridimensionnelles (3D) de [Carrera et al., 2008] et [Wu et Chui, 2011], la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDT) de Zenkour (2006), la HSDT de [Mantari et al., 2012] et la théorie du troisième ordre de déformation par cisaillement (TSDT)

de [Thai et Kim, 2013]. Il est clair que les résultats de la solution quasi 3D actuelle sont en très bon accord avec les différentes théories de déformation de cisaillement.

Tableau IV.2. Comparaison de la contrainte adimensionnelle et des déplacements des plaques carrées Al/Al_2O_3 ($a/h = 10$, type A).

P	Théorie	$\bar{u}(-h/4)$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xx}(h/6)$
1	présente	0.6269	0.6110	1.5859	0.6013	0.3536
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.6413	0.5890	1.4897	0.6111	0.2611
	Quasi-3D [Carrera et al., 2008]	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D [Wu and Chui, 2011]	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SSDT [Zenkour, 2006]	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT [Mantari et al., 2012]	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT [Thai and Kim, 2013]	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2608
2	présente	0.8792	0.7874	1.4760	0.5362	0.3353
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.8982	0.7573	1.3959	0.5442	0.2742
	Quasi-3D [Carrera et al., 2008]	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D [Wu and Chui, 2011]	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT [Zenkour 2006]	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT [Thai and Kim, 2013]	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2737
4	présente	1.0409	0.8402	1.2285	0.5657	0.2677
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.0500	0.8816	1.1792	0.5669	0.2546
	Quasi-3D [Carrera et al., 2008]	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D [Wu and Chui, 2011]	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT [Zenkour 2006]	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TSDT [Thai and Kim, 2013]	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
8	présente	1.0853	0.9411	0.9842	0.5945	0.2066
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.0759	0.9746	0.9473	0.5857	0.2094
	Quasi-3D [Carrera et al., 2008]	1.0830	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D [Wu and Chui, 2011]	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	SSDT [Zenkour, 2006]	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT [Thai and Kim, 2013]	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088

Le deuxième exemple est réalisé pour les réponses de flexion d'une plaque sandwich carrée Al/Al_2O_3 de type B. Les résultats du déplacement et des contraintes sont donnés pour les cinq valeurs de l'indice de puissance « p » comme indiqué dans le tableau IV.3. D'après les résultats présentés dans ce tableau, on peut voir que les résultats du présent modèle amélioré sont en très grand accord avec ceux des différentes solutions.

Tableau IV.3. Comparaison de la contrainte adimensionnelle et des déplacements des plaques sandwich Al/Al_2O_3 ($a/h = 10$, Type B).

P	Théorie	$\bar{u}(-h/4)$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xx}(h/6)$
0	Présente	0.3033	0.3653	1.4906	0.9518	0.3050
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.3247	0.3247	1.4761	1.0130	0.2161
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	-	0.3711	-	-	0.2227
0.5	Présente	0.5002	0.5031	1.5677	0.6343	0.3402
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.5542	0.5245	1.5750	0.6965	0.2509
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	-	0.5238	-	-	0.2581
1	Présente	0.6532	0.6022	1.5451	0.4896	0.3429
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.7337	0.6345	1.5691	0.5447	0.2733
	FSDT [Brischetto 2009]	-	0.6337	-	-	0.2458
	Quasi-3D [Carrera et al., 2011]	-	0.6324	-	-	0.2594
	Quasi-3D [Neves et al., 2012]	-	0.6305	-	-	0.2788
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	-	0.6305	-	-	0.2789
4	Présente	0.9317	0.7811	1.1858	0.5013	0.2405
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.0550	0.8331	1.2539	0.5614	0.2697
	FSDT [Brischetto, 2009]	-	0.8191	-	-	0.1877
	Quasi-3D [Carrera et al., 2011]	-	0.8307	-	-	0.2398
	Quasi-3D [Neves et al., 2012]	-	0.8202	-	-	0.2778
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	-	0.8199	-	-	0.2747
10	Présente	0.9618	0.8287	0.8679	0.5193	0.1524
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.0798	0.8807	0.9258	0.5758	0.1982
	FSDT [Brischetto, 2009]	-	0.8556	-	-	0.1234
	Quasi-3D [Carrera et al., 2011]	-	0.8740	-	-	0.1944
	Quasi-3D [Carrera et al., 2011]	-	0.8650	-	-	0.2059
	Quasi-3D [Carrera et al., 2011]	-	0.8645	-	-	0.2034

Dans le troisième exemple, une plaque sandwich de type C est examinée. Le tableau IV.4 montre les effets de l'indice de loi de puissance « p » sur les déplacements adimensionnels et les contraintes pour différentes configurations de la plaque sandwich. Les présents résultats sont comparés aux résultats de la HSDT de [Nguyen et coll., 2014], la TSDT et la SSDT de [Zenkour et coll., 2005a], et les solutions quasi 3D de [Zenkour et al., 2013 ; Neves et al., 2013] et [Bessaim et al., 2013] respectivement. Il ressort clairement de ce tableau que quel que soit le cas de la plaque sandwich étudiée et quelle que soit la valeur de l'indice « p » les résultats de ce modèle sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

Tableau IV. 4. Déformations centrales adimensionnelles (\hat{W}) des plaques sandwich carrées Al/Zr_2O_2 ($a/h = 10$, type C).

P	Théorie	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente	0.19344	0.19344	0.19344	0.19344	0.9344	0.19344
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.19597	0.19597	0.19597	0.19597	0.19597	0.19597
	TSDT [Zenkour, 2005a]	0.19606	0.19606	–	0.19606	0.19606	0.19606
	SSDT [Zenkour, 2005a]	0.19605	0.19605	–	0.19605	0.19605	0.19605
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	0.19487	0.19487	–	0.19487	0.19487	0.19487
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	0.19490	0.19490	0.19490	0.19490	0.19490
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486	0.19486
1	Présente	0.31463	0.29750	0.28854	0.28377	0.27331	0.26394
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.32348	0.30622	0.29666	0.29191	0.28077	0.27086
	TSDT [Zenkour, 2005a]	0.32358	0.30632	–	0.29199	0.28085	0.27094
	SSDT [Zenkour, 2005a]	0.32349	0.30624	–	0.29194	0.28082	0.27093
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	0.32001	0.30275	–	0.28867	0.27760	0.26815
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	0.30700	0.29750	0.29290	0.28200	0.27220
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	0.30430	0.29448	0.29007	0.27874	0.26915
2	Présente	0.36232	0.34055	0.32699	0.32174	0.30610	0.29330
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.37322	0.35221	0.33769	0.33279	0.31608	0.30255
	TSDT [Zenkour, 2005a]	0.37335	0.35231	–	0.33289	0.31617	0.30263
	SSDT [Zenkour, 2005a]	0.37319	0.35218	–	0.33280	0.31611	0.30260
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	0.36891	0.34737	–	0.32816	0.31152	0.29874
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	0.35190	0.33760	0.33290	0.31640	0.30320
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	0.35001	0.33495	0.33068	0.31356	0.30060
5	Présente	0.39895	0.37827	0.36072	0.35769	0.33724	0.32296
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.40911	0.39170	0.37295	0.37134	0.34950	0.33472
	TSDT [Zenkour, 2005a]	0.40927	0.39183	–	0.37145	0.34960	0.33480
	SSDT [Zenkour, 2005a]	0.40905	0.39160	–	0.37128	0.34950	0.33474
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	0.40532	0.38612	–	0.36546	0.34361	0.32966
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	0.39050	0.37220	0.37050	0.34900	0.33470
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	0.38934	0.36981	0.36902	0.34649	0.33255
10	Présente	0.40915	0.39069	0.37218	0.37110	0.34911	0.33538
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.41754	0.40393	0.3843	0.38540	0.36202	0.34815
	TSDT [Zenkour, 2005a]	0.41772	0.40407	–	0.38551	0.36215	0.34824
	SSDT [Zenkour, 2005a]	0.41750	0.40376	–	0.38490	0.34916	0.34119
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	0.41448	0.39856	–	0.37924	0.35577	0.34259
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	0.40260	0.38350	0.38430	0.36120	0.34800
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	0.40153	0.38111	0.38303	0.35885	0.34591

Une autre comparaison des résultats de cette méthode est présentée dans ce qui suit. Le tableau IV.5 présente la contrainte axiale $\hat{\sigma}_{xx}$ des plaques sandwich Al/ZrO₂ type C pour $p = 0, 1, 2, 5$ et 10 et différentes configurations de la plaque sandwich. Ainsi, comme on peut le voir sur ces tableaux, il existe un bon accord entre toutes les solutions.

Tableau IV.5. Contrainte axiale adimensionnelle $\hat{\sigma}_{xx}$ ($h / 2$) des plaques sandwich carrées Al/Zr₂O₂(a/ h = 10, type C).

P	théorie	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente	2.05448	2.05448	2.05448	2.05448	2.05448	2.05448
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.99482	1.99482	1.99482	1.99482	1.99482	1.99482
	TSDT [Zenkour, 2005a]	2.04985	2.04985	–	2.04985	2.04985	2.04985
	SSDT [Zenkour, 2005a]	2.05452	2.05452	–	2.05452	2.05452	2.05452
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	2.00773	2.00773	–	2.00773	2.00773	2.00773
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	2.00660	2.00640	2.00660	2.00650	2.00640
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524	1.99524
1	Présente	1.60902	1.52551	1.41084	1.45341	1.33931	1.34511
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.54441	1.46297	1.35703	1.39406	1.28852	1.29174
	TSDT [Zenkour, 2005a]	1.57923	1.49587	–	1.42617	1.32062	1.32309
	SSDT [Zenkour, 2005a]	1.58204	1.49859	–	1.42892	1.32342	1.32590
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	1.57004	1.48833	–	1.41781	1.30907	1.31204
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	1.48130	1.37680	1.41370	1.30920	1.31330
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	1.46131	1.35053	1.39243	1.28274	1.29030
2	Présente	1.85971	1.76303	1.59352	1.66669	1.49720	1.51163
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.78383	1.68682	1.52988	1.59393	1.43693	1.44707
	TSDT [Zenkour, 2005a]	1.82167	1.72144	–	1.62748	1.47095	1.47988
	SSDT [Zenkour, 2005a]	1.82450	1.72412	–	1.63025	1.47387	1.48283
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	1.81509	1.72030	–	1.62591	1.46372	1.47421
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	1.69940	1.54560	1.60880	1.45430	1.46590
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	1.68472	1.52101	1.59170	1.42887	1.44497
5	Présente	2.02673	1.96180	1.74878	1.86542	1.64438	1.68005
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.95031	1.87709	1.67895	1.78159	1.57620	1.60459
	TSDT [Zenkour, 2005a]	1.99272	1.91302	–	1.81580	1.61181	1.63814
	SSDT [Zenkour, 2005a]	1.99567	1.91547	–	1.81838	1.61477	1.64106
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	1.97912	1.91504	–	1.82018	1.60953	1.63906
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	1.88380	1.69090	1.79060	1.58930	1.61950
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	1.87516	1.66856	1.77919	1.56627	1.60203
10	Présente	2.05479	2.01933	1.79924	1.93603	1.69875	1.74982
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.98382	1.93431	1.72890	1.84933	1.62840	1.67019
	TSDT [Zenkour, 2005a]	2.03036	1.97126	–	1.88376	1.66660	1.70417
	SSDT [Zenkour, 2005a]	2.03360	1.97313	–	1.88147	1.61979	1.64851
	Quasi-3D [Zenkour, 2013]	2.00692	1.97075	–	1.89162	2.18558	1.67350
	Quasi-3D [Neves et al., 2013]	–	1.93970	1.74050	1.85590	1.63950	1.68320
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	–	1.93266	1.71835	1.84705	1.61792	1.66754

Après ces comparaisons, on peut conclure que la solution quasi 3D actuelle avec seulement quatre inconnues est non seulement précise mais aussi efficace pour prédire les réponses en flexion des plaques sandwich FG.

Sur la figure IV.2, nous présentons respectivement les variations des contraintes de déplacement transversal dans le plan et hors plan à travers l'épaisseur de la plaque FG de type A avec $a / h = 10$ et les différentes valeurs de « p ». À partir de ces figures, nous pouvons voir que:

- Le déplacement transversal augmente à mesure que l'indice de loi de puissance « p » augmente.
- Pour la contrainte axiale adimensionnelle, on peut voir que c'est une contrainte de traction à la surface supérieure et une contrainte de compression à la surface inférieure.
- La contrainte tangentielle dans le plan est une traction à la surface inférieure et une compression à la surface supérieure des plaques FG.
- La répartition de la contrainte de cisaillement transversale sur l'épaisseur de la plaque n'est pas parabolique sauf dans le cas de $p = 0$ (plaque isotrope).

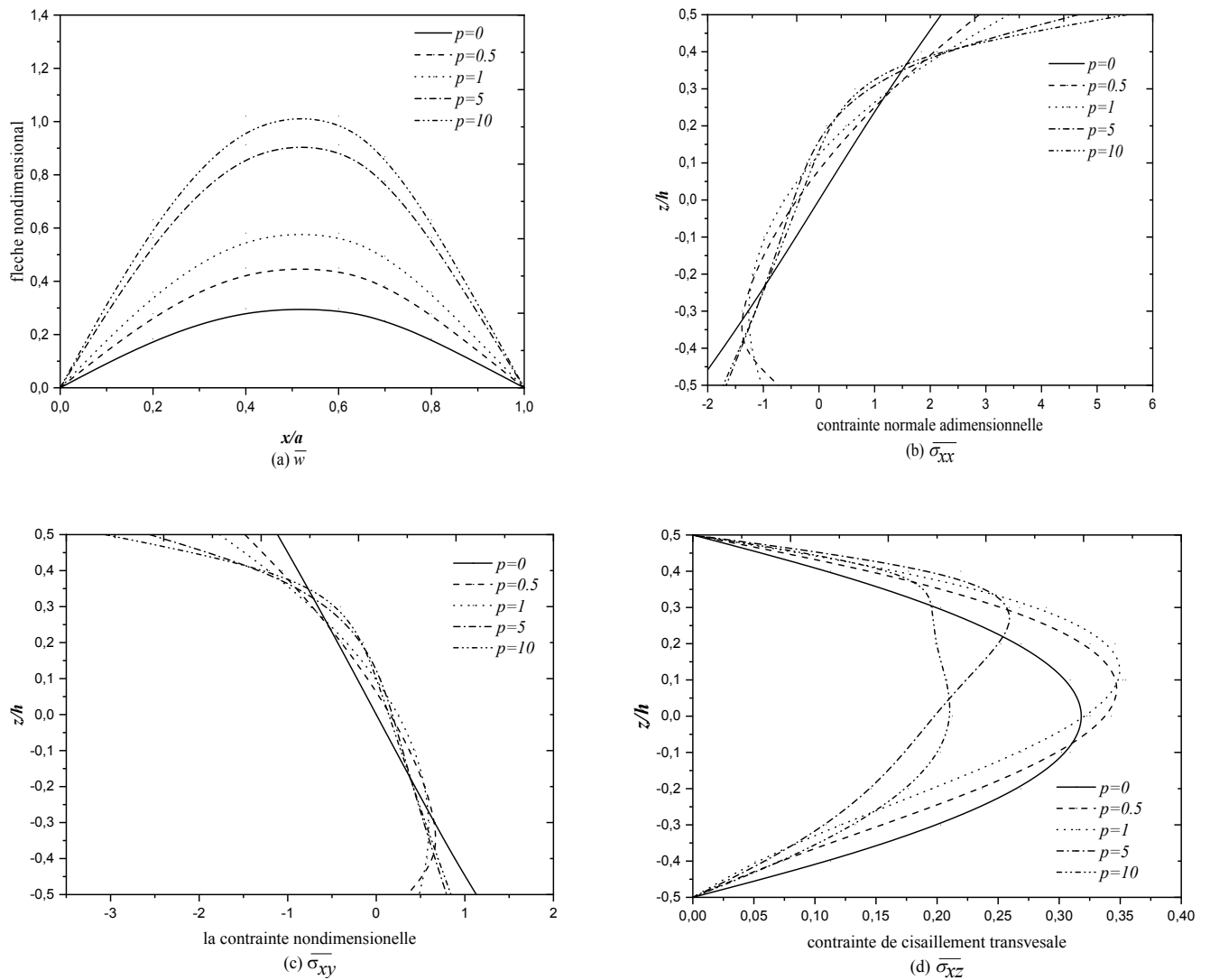


Figure IV.2. Déplacements et contraintes adimensionnels dans la direction de l'épaisseur pour différentes valeurs de p des plaques carrées Al/Al_2O_3 soumises à une charge sinusoïdale ($a/h=10$, Type A).

Les figures IV.3 et IV.4 représentent respectivement la variation des contraintes dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de p des plaques sandwich carrées Al/Al_2O_3 (type B) et Al/ZrO_2 (type C) soumises à une charge sinusoïdale avec $a/h=10$. Comme on peut le voir dans le cas de la plaque sandwich type C (figure IV.4), les contraintes maximales sont situées au niveau de la couche d'interfaces sauf le cas de la plaque sandwich 1-2-1 où le maximum est situé dans le plan médian.

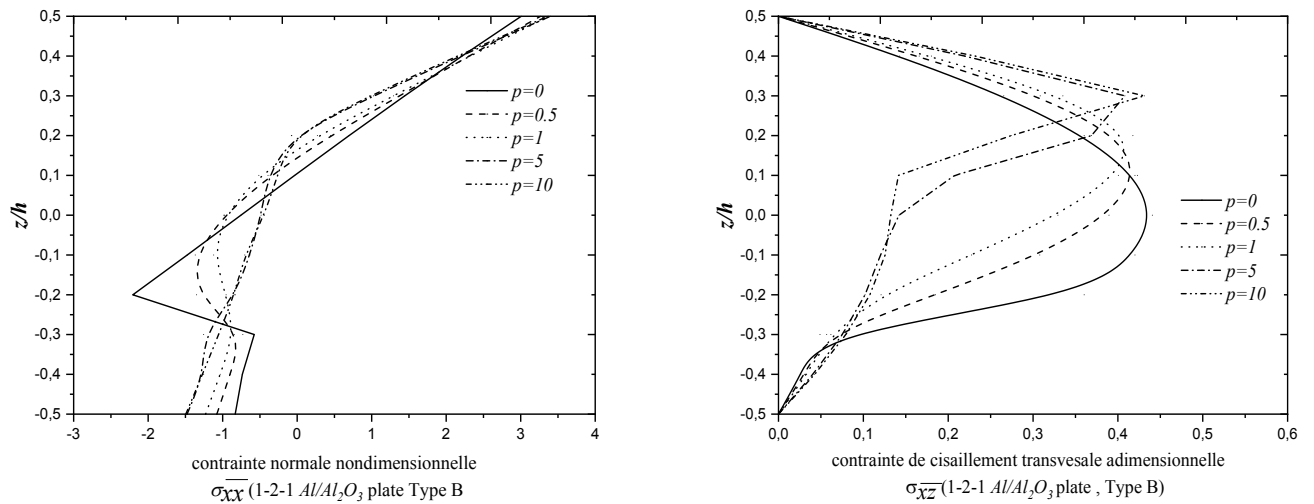


Figure IV.3. Contraintes adimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de plaques sandwich carrées Al/Al_2O_3 soumises à une charge sinusoïdale avec ($a/h=10$, Type B).

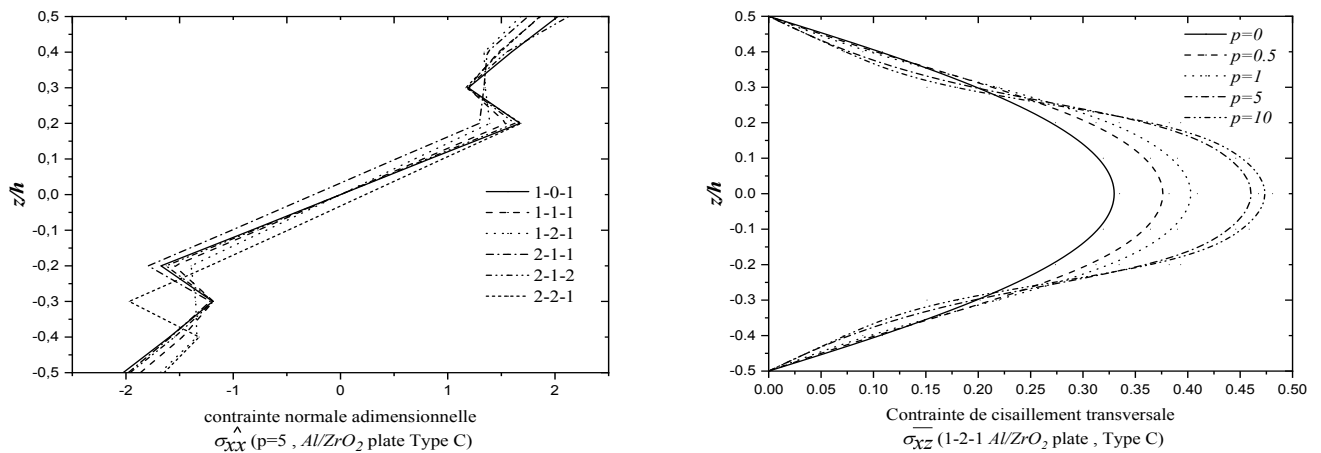


Figure IV.4. Contraintes non dimensionnelles dans le sens de l'épaisseur pour différentes valeurs de plaques sandwich carrées Al/ZrO_2 soumises à une charge sinusoïdale avec ($a/h=10$, Type C)

IV.3.2 Analyse des vibrations libres

D'autres exemples pour vérifier la précision de la solution de calcul quasi 3D actuelle dans la prédiction de la fréquence naturelle de la plaque FG et de la plaque sandwich FG sont rapportés dans les tableaux IV.6, IV.7 et IV.8.

Le tableau IV.6 présente une comparaison de la fréquence non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque FG carrée de type A entre les solutions présentes et celles de [Nguyen et al., 2014] et la solution 3D de [Uymaz et Aydogdu, 2007]. En effet, un excellent accord est observé.

Tableau IV.6. Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$) de plaques carrées Al/ZrO₂(Type A).

a/h	Théorie	Indice de loi de puissance P							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	présente	1.2671	1.2383	1.2134	1.1570	1.0998	1.0425	0.9840	0.9580
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.2454	1.2162	1.1913	1.1356	1.0784	1.0234	0.9685	0.9435
	3D [Uymaz and Aydogdu, 2007]	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
5	présente	1.7830	1.7369	1.6982	1.6149	1.5392	1.4762	1.4175	1.3786
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.7683	1.7208	1.6818	1.5974	1.5212	1.4601	1.4058	1.3690
	3D [Uymaz and Aydogdu, 2007]	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
10	présente	1.9388	1.8861	1.8424	1.7503	1.6708	1.6108	1.5575	1.5139
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.9317	1.8773	1.8332	1.7393	1.6583	1.5986	1.5492	1.5083
	3D [Uymaz and Aydogdu, 2007]	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066
20	présente	1.9853	1.9303	1.8849	1.7902	1.7100	1.6520	1.6012	1.5561
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.9821	1.9254	1.8797	1.7827	1.7003	1.6415	1.5943	1.5521
	3D [Uymaz and Aydogdu, 2007]	1.9570	1.9261	1.8788	1.7827	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
50	présente	1.9989	1.9431	1.8972	1.8017	1.7215	1.6642	1.6143	1.5687
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.9971	1.9397	1.8935	1.7956	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
	3D (Uymaz and Aydogdu, 2007)	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
100	présente	2.0009	1.9450	1.8990	1.8033	1.7231	1.6659	1.6162	1.5705
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.9993	1.9418	1.8955	1.7975	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	3D [Uymaz and Aydogdu, 2007]	1.9974	1.9418	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652

Le tableau IV.7 compare la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) obtenue par la présente théorie pour une plaque sandwich carrée (Al/Al₂O₃, type B) avec celles données par [Nguyen et al., 2014] et les deux HSDT donnés par [Natarajan et Manickam, 2012]. Les résultats sont donnés pour trois valeurs du rapport a / h et trois configurations de la plaque sandwich. D'après les résultats présentés dans ce tableau IV.7, il y a une légère différence.

Cela peut s'expliquer par le fait que les HSDT négligent l'effet d'étirement qui est prise en compte par la présente solution 3D.

La fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) pour une plaque sandwich FG rectangulaire de type C prédite par Nguyen et al. (2014) utilisant la HSDT, Zenkour (2005b) utilisant la TSDT et la SSDT, Bessaim et al. (2013) utilisant une solution quasi 3D, Li et al. (2008) utilisant un modèle 3D et la présente théorie sont comparés dans le tableau IV.8. Une excellente concordance est observée.

Tableau IV.7. Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) de plaques sandwich carrées Al/Al_2O_3 (Type B).

a/h	théorie	1-1-1				1-2-1			2-2-1		
		0	0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	présente	1.2985	1.2412	1.2121	1.1635	1.2818	1.2326	1.1545	1.2022	1.1791	1.1383
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.1147	1.1414	1.1561	1.1996	1.1574	1.1827	1.2569	1.1916	1.2268	1.3160
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.1021	1.1449	1.1639	1.2113	1.1597	1.1884	1.2644	1.1965	1.2350	1.3249
	HSDT [Natarajan and Manickam, 2012]	1.0893	1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
10	présente	1.3744	1.3217	1.2964	1.2625	1.3665	1.3209	1.2650	1.2895	1.2757	1.2638
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.2172	1.2359	1.2478	1.2883	1.2567	1.2763	1.3466	1.2827	1.3187	1.4130
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.2138	1.2373	1.2506	1.2921	1.2578	1.2785	1.3492	1.2846	1.3216	1.4161
	HSDT [Natarajan and Manickam, 2012]	1.2087	1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
100	présente	1.3934	1.3482	1.3269	1.3030	1.3937	1.3529	1.3114	1.3221	1.3144	1.3174
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.2617	1.2752	1.2853	1.3238	1.2984	1.3147	1.3824	1.3198	1.3558	1.4518
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.2617	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	HSDT [Natarajan and Manickam 2012]	1.2616	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519

Tableau IV.8. Fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques sandwich carrées ($\hat{\omega}$) Al/Al_2O_3 ($a/h=10$, Type C).

P	Théorie	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	présente	1.83452	1.83452	1.83452	1.83452	1.83452	1.83452
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489
	TSDT [Zenkour 2005b]	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
	SSDT [Zenkour 2005b]	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	1.82682	1.82682	–	1.82682	1.82682	1.82682
	3D [Li et al., 2008]	1.82682	1.82682	–	1.82682	1.82682	1.82682
0.5	présente	1.46638	1.50645	1.52819	1.54086	1.56800	1.59425
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.44348	1.48355	1.50597	1.51885	1.54680	1.57437
	TSDT [Zenkour 2005b]	1.44424	1.48408	1.51253	1.51922	1.55199	1.57451
	SSDT [Zenkour 2005b]	1.44436	1.48418	1.51258	1.51927	1.55202	1.57450
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	1.44621	1.48611	–	1.52130	1.55016	1.57670
	3D [Li et al., 2008]	1.44614	1.48608	–	1.52131	1.54926	1.57668
1	présente	1.27115	1.32941	1.36216	1.38183	1.42324	1.46496
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.24332	1.30024	1.33352	1.35345	1.39579	1.43948
	TSDT [Zenkour 2005b]	1.24320	1.30011	1.34888	1.35333	1.40789	1.43934
	SSDT [Zenkour 2005b]	1.24335	1.30023	1.34894	1.35339	1.40792	1.43931
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	1.24495	1.30195	–	1.35527	1.39987	1.44143
	3D [Li et al., 2008]	1.24470	1.30181	–	1.35523	1.39763	1.44137
5	présente	0.97167	1.01844	1.06756	1.08337	1.14760	1.21055
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.94611	0.98193	1.03067	1.04473	1.10905	1.17403
	TSDT [Zenkour 2005b]	0.94598	0.98184	1.07432	1.04466	1.14731	1.17397
	SSDT [Zenkour 2005b]	0.94630	0.98207	1.07445	1.04481	1.14741	1.17399
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	0.94716	0.98311	–	1.04613	1.11723	1.17579
	3D [Li et al., 2008]	0.94476	0.98103	–	1.04532	1.10983	1.17567
10	présente	0.94693	0.97831	1.02814	1.03476	1.10038	1.16140
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	0.92854	0.94305	0.99219	0.99558	1.06114	1.12320
	TSDT [Zenkour 2005b]	0.92839	0.94297	1.03862	0.99551	1.10533	1.12314
	SSDT [Zenkour 2005b]	0.92875	0.94332	1.04558	0.99519	1.04154	1.13460
	Quasi-3D [Bessaim et al., 2013]	0.92952	0.94410	–	0.99684	1.07015	1.12486
	3D [Li et al., 2008]	0.92727	0.94078	–	0.99684	1.06104	1.12466

La figure IV.5 représente la variation de la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle d'une plaque sandwich FG simplement appuyée de type C en fonction de l'indice de loi de puissance.

Comme on peut le voir, l'augmentation de l'indice de puissance p réduit la fréquence. En revanche, les fréquences les plus basses et les plus grandes correspondent respectivement à des plaques sandwich de type 1-0-1 et 1-2-1. D'autre part, les fréquences les plus basses et les plus grandes correspondent respectivement pour les plaques sandwich de type 1-0-1 et 1-2-1 cela est dû au fait que ces plaques contiennent la plus basse et la plus grande fraction volumique de la céramique. Cette dernière joue un rôle très important pour rendre la plaque flexible ou rigide.

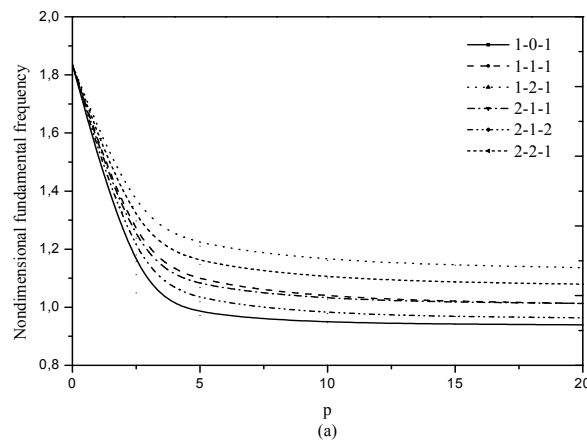


Figure IV.5. Effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\hat{\omega}$) des plaques sandwich carrées ($a/h=10$, Type C).

IV.3.3 Analyse du flambement

Pour des fins de vérification, les résultats calculés par la présente théorie quasi 3D sont comparés premièrement à ceux obtenus par différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (tableaux IV.9 et IV.10).

Dans le tableau IV.9 est présenté une comparaison des charge de flambement de la plaque FG «type A» obtenue à partir de la présente solution et celles de [Nguyen et al., 2014] et [thai et Choi, 2012].

Les résultats sont présentés pour différents indice de loi de puissance « p » et différent rapport de a/h et a/b . Aussi, deux cas de plaques soumises à une compression uniaxiale $\gamma=0$ et compression biaxiale $\gamma = 1$ sont étudiées. Il ressort de ce tableau qu'il y a un excellent accord entre les résultats.

Tableau IV.9. Comparaison de la charge critique de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques Al/Al_2O_3 (TypeA).

γ	a/b	a/h	Théorie	Indice de loi de puissance P					
				0	0.5	1	2	5	10
0	0.5	5	présente	6.7482	4.5091	3.5203	2.7412	2.2031	1.9419
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	6.7204	4.4221	3.4164	2.6450	2.1479	1.9210
			TSDT [Thai and Choi 2012]	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213
		10	présente	7.4335	4.9084	3.8315	3.0165	2.5043	2.2342
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	7.4053	4.8190	3.7111	2.8896	2.4163	2.1897
			TSDT [Thai and Choi 2012]	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896
	20	présente	7.6104	5.0050	3.9106	3.0930	2.5928	2.3214	
		HSDT [Nguyen et al., 2014]	7.5993	4.9298	3.7930	2.9581	2.4944	2.2692	
		TSDT [Thai and Choi 2012]	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	2.2690	
	1	5	présente	16.0518	10.8051	8.4448	6.5376	5.1456	4.5007
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	16.0216	10.6215	8.2247	6.3430	5.0513	4.4800
			TSDT [Thai and Choi 2012]	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807
10		présente	18.6639	12.3579	9.6441	7.5712	6.2404	5.5526	
		HSDT [Nguyen et al., 2014]	18.5786	12.1181	9.3391	7.2630	6.0346	5.4530	
		TSDT [Thai and Choi 2012]	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	
20	présente	19.3936	12.7656	9.9715	7.8783	6.5912	5.8969		
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	19.3528	12.5616	9.6675	7.5371	6.3446	5.7674		
	TSDT [Thai and Choi 2012]	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668		
1	0.5	5	présente	5.3986	3.6072	2.8162	2.1930	1.7624	1.5535
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	5.3763	3.5377	2.7331	2.1160	1.7183	1.5368
			TSDT [Thai and Choi 2012]	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
		10	présente	5.9468	3.9267	3.0652	2.4132	2.0034	1.7874
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	5.9243	3.8552	2.9689	2.3117	1.9330	1.7517
			TSDT [Thai and Choi 2012]	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517
	20	présente	6.0883	4.0040	3.1285	2.4744	2.0743	1.8571	
		HSDT [Nguyen et al., 2014]	6.0794	3.9438	3.0344	2.3665	1.9955	1.8153	
		TSDT [Thai and Choi 2012]	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152	
	1	5	présent	8.0259	5.4025	4.2224	3.2688	2.5728	2.2503
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	8.0108	5.3108	4.1124	3.1715	2.5256	2.2400
			TSDT [Thai and Choi 2012]	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403
		10	présente	9.3319	6.1789	4.8220	3.7856	3.1202	2.7763
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	9.2893	6.0590	4.6696	3.6315	3.0173	2.7265
			TSDT [Thai and Choi 2012]	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264
		20	présente	9.6968	6.3828	4.9857	3.9391	3.2956	2.9484
			HSDT [Nguyen et al., 2014]	9.6764	6.2808	4.8337	3.7686	3.1723	2.8837
			TSDT [Thai and Choi 2012]	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834

Une autre comparaison est présentée dans le tableau IV.10. Les charges critiques de flambement sont obtenues pour la plaque sandwich «type B» et pour les charges de compression biaxiales. La comparaison avec les différentes théories et pour les différentes configurations de plaques sandwich révèle que les résultats de la présente théorie sont en très grande concordance.

Tableau IV.10. Charges critiques de flambement non dimensionnelles des plaques sandwich carrées soumises à des charges de compression biaxiales ($\gamma = 1, a/h=10$, Type C).

P	théorie	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	présente	6.53239	6.53239	6.53239	6.53239	6.53239	6.53239
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566
	TSDT [Zenkour 2005b]	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	SSDT [Zenkour 2005b]	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266
	Quasi-3D [Neves et al.,	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652
0.5	présente	3.77542	4.06891	4.20890	4.31559	4.49937	4.69824
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	3.67832	3.96760	4.10999	4.21622	4.40304	4.60760
	TSDT [Zenkour 2005b]	3.68219	3.97042	4.11235	4.21823	4.40499	4.60841
	SSDT [Zenkour 2005b]	3.68284	3.97097	4.11269	4.21856	4.40519	4.60835
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	3.59354	3.87157	4.00853	4.11071	4.29073	4.48676
	Quasi-3D [Neves et al.,	3.58096	3.85809	3.99480	4.09641	4.27592	4.47110
1	présente	2.68780	3.03833	3.21593	3.35339	3.59508	3.86818
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	2.58410	2.92060	3.09759	3.23299	3.47544	3.75403
	TSDT [Zenkour 2005b]	2.58357	2.92003	3.09697	3.23237	3.47472	3.75328
	SSDT [Zenkour 2005b]	2.58423	2.92060	3.09731	3.23270	3.47490	3.75314
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	2.53913	2.86503	3.03679	3.16779	3.40280	3.67204
	Quasi-3D [Neves et al.,	2.53062	2.85563	3.02733	3.15750	3.39207	3.66013
5	présente	1.39547	1.63023	1.81826	1.91731	2.19255	2.50656
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.32948	1.52155	1.70203	1.79002	2.05633	2.36760
	TSDT [Zenkour 2005b]	1.32910	1.52129	1.70176	1.78978	2.05605	2.36734
	SSDT [Zenkour 2005b]	1.33003	1.52203	1.70224	1.79032	2.05644	2.36744
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.32331	1.50935	1.68594	1.77072	2.03078	2.33036
	Quasi-3D [Neves et al.,	1.31829	1.50409	1.68128	1.76507	2.02534	2.32354
10	présente	1.28686	1.47198	1.65311	1.71918	1.98553	2.27897
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.24406	1.37341	1.54622	1.59758	1.85403	2.14020
	TSDT [Zenkour 2005b]	1.24363	1.37316	1.54595	1.59736	1.85376	2.13995
	SSDT [Zenkour 2005b]	1.24475	1.37422	1.56721	1.59728	1.57287	2.19087
	HSDT [Nguyen et al., 2014]	1.24090	1.36547	1.53468	1.58421	1.83573	2.10897
	Quasi-3D [Neves et al.,	1.23599	1.36044	1.53036	1.57893	1.83083	2.10275

A partir du tableau IV.11, on constate aussi que pour la même configuration de plaque sandwich l'augmentation de l'indice de puissance et le rapport a/h a augmenté la valeur critique de la charge de flambement.

Tableau IV.11. Charges non dimensionnelles critiques de flambement (N_{cr}) des plaques sandwich carrées Al/Al_2O_3 soumises à des charges de compression biaxiales ($\gamma = 1$, Type B).

a/h	configuration	P				
		0	0.5	1	5	10
5	1-1-1	3.0420	2.6861	2.5170	2.2326	2.1832
	1-2-1	3.4979	2.8840	2.5985	2.1504	2.077
	1-2-2	2.7574	2.4480	2.3000	2.0337	1.9788
10	1-1-1	3.3232	2.9675	2.8044	2.5630	2.5324
	1-2-1	3.8448	3.1993	2.9100	2.5229	2.4835
	1-2-2	3.0163	2.7437	2.6255	2.4579	2.4294
100	1-1-1	3.3801	3.0522	2.9026	2.6945	2.6740
	1-2-1	3.9095	3.2918	3.0175	2.6763	2.6530
	1-2-2	3.0814	2.8494	2.7525	2.6367	2.6208

La figure IV.6 représente la variation de la charge critique de flambement par rapport à l'indice de loi de puissance et pour différentes configurations de plaque sandwich. On peut voir une diminution rapide de la valeur critique des charges de flambement jusqu'à une valeur de $p = 5$. Une fois cette valeur est dépassée, les charges critiques de flambement ont tendance à prendre une forme plus ou moins constante et cela quelle que soit la plaque sandwich utilisée.

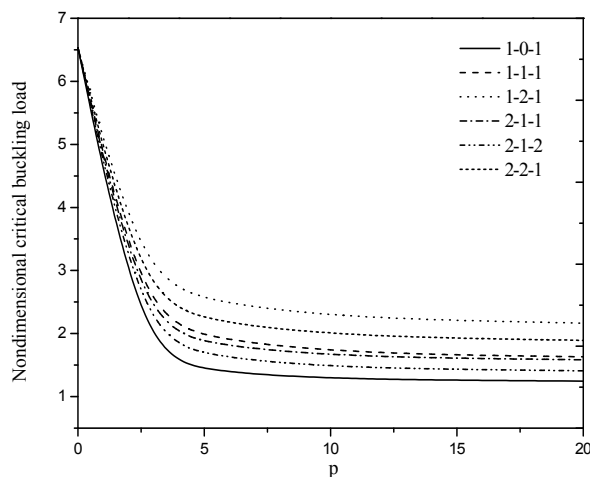


Figure IV.6. Effet de l'indice de loi de puissance sur la charge critique de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques sandwich carrées ($a/h = 10$, Type C).

IV.4 Conclusion

Dans ce présent chapitre, l'analyse de flexion, le flambement et la vibration de la plaque sandwich graduée sont réalisées par une théorie quasi 3D. Trois différentes plaques sandwich ont été étudiées. Les résultats générés dans le présent travail pour trois cas analysés à savoir le flambement, la flexion et les vibrations libres ont été comparés aux résultats de diverses théories de la littérature. Cette comparaison a révélé que la théorie actuelle est très précise. Une étude paramétrique détaillée a été présentée pour mettre en évidence les différents facteurs influençant le comportement des plaques sandwich.

Sur la base de la section résultats numériques de cette recherche, les considérations suivantes sont mises en valeurs:

- Le déplacement transversal augmente avec l'augmentation de la puissance p .
- La contrainte axiale non dimensionnelle est une contrainte de traction à la partie supérieure et une contrainte de compression à la partie inférieure des plaques FG.
- La contrainte tangentielle dans le plan est une contrainte de traction à la partie inférieure et une contrainte de compression à la partie supérieure des plaques FG.
- La répartition de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque n'est pas parabolique sauf dans le cas de $p = 0$ (plaque isotrope).
- L'augmentation de l'indice de puissance p réduit la fréquence.
- L'augmentation de l'indice de puissance p et du rapport a/h augmentent la valeur critique de la charge de flambement.

Chapitre V

**Comportement thermodynamique
des poutres sandwich FG reposant
sur différents types de fondations**

V.1 Introduction

Chaque théorie utilisée pour résoudre un problème de la mécanique des milieux continus a pour objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité et des conditions aux limites complétés par une loi de comportement représentant les matériaux et reliant les contraintes aux déformations.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement thermodynamique des poutres FGM sandwich poreuses reposant sur différents types de fondations en utilisant une théorie quasi-3D. L'avantage de la théorie Quasi-3D utilisée est qu'elle contient un nombre réduit de variables et d'équations gouvernantes par rapport aux théories quasi-3D conventionnelles. Les effets de la charge thermodynamique, les différents types de fondation sur la réponse globale des poutres ainsi que l'influence de la porosité seront discutés en détail par une étude paramétrique.

V.2 Modèles de fondations

Les fondations jouent un rôle central pour préserver le système structurel sous quelconques chargements. L'un des principaux objectifs des chercheurs est d'étudier le comportement dynamique des fondations. Par conséquent, trois critères principaux doivent être pris en compte par les ingénieurs et les chercheurs lorsqu'ils conçoivent un système sous n'importe quel type de sollicitations [Davood Y. et al., 2019]:

- Développer un modèle continu pour la structure;
- Développer un modèle mathématique du système de fondation;
- Développer un modèle complet de l'ensemble qui considère l'interaction entre la fondation et la structure.

L'interaction de divers types de fondations avec des structures a été largement adoptée par de nombreux chercheurs pour interpréter différents problèmes de conception. Par la suite, divers types de modèles ont été mis au courant pour appréhender l'effet de fondation par de nombreux scientifiques. Le développement des modèles pour résoudre ce problème complexe d'interaction sol-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques.

En fonction des applications du système structurel considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisations de fondations. La première et la plus simple présentation d'une fondation a été proposée par Winkler. Ce modèle est connu sous le nom du modèle élastique linéaire de Winkler [Winkler E., 1867].

V.2.1 Modèle linéaire de Winkler.

C'est le modèle le plus simple car il n'a qu'un paramètre. Winkler a d'abord modélisé une poutre Euler – Bernoulli sur une fondation élastique en tant que voie ferrée [Winkler E., 1867].

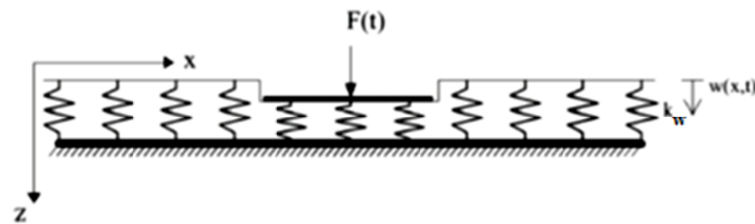


Figure V.1. Modèle de Winkler [Younesian D., 2019]

Ce modèle de fondation est basé sur l'hypothèse que la réaction de chaque point est proportionnelle au déplacement du point et que les ressorts sont linéaires et indépendants [Daikh. A, 2019].

$$R_f(x, t) = k_w \cdot w_0(x, t) \quad (V.1)$$

Où :

R_f est la densité de la réaction de la fondation.

$w_0(x, t)$ est le déplacement vertical.

k_w est la rigidité des ressorts linéaires.

Le principe de calcul proposé par Winkler est approximatif car il néglige d'une part, l'interaction inévitable de deux ressorts juxtaposés (l'effet de Poisson du sol) et d'autre part, la zone externe à la fondation qui influence le tassement global [Boulefrakh L. 2020]. Selon Winkler, seule la zone située sous la fondation se tasse (Figure V.2).

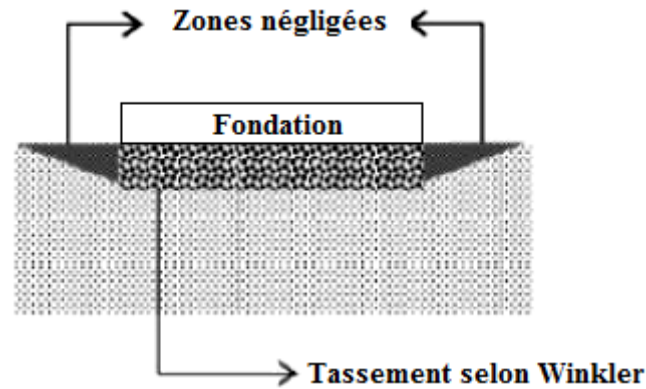


Figure V.2.Approximation de Winkler [Winkler, 1867].

Cependant, le principal inconvénient du modèle élastique linéaire est son échec dans la présentation du comportement viscoélastique des matériaux en raison des diverses propriétés des différents matériaux et sols (sols granulaires, sols argileux, sols humides, sols pressurisés, etc.). D'autres paramètres devraient être impliqués pour représenter le comportement des matériaux utilisés comme fondation. Par conséquent, un élément viscoélastique a été ajouté aux modèles de fondation proposés par Winkler. Différents arrangements peuvent être supposés pour les éléments élastiques et viscoélastiques d'une fondation, et en conséquence, le modèle original de Winkler a été amélioré par les chercheurs en proposant plusieurs nouveaux modèles de fondation.

V.2.2 Modèle de Pasternak

Dans ce modèle, Pasternak suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les éléments de ressort qui est réalisée en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque qui ne subit qu'une déformation de cisaillement transverse. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle k_p du sol en plus de la rigidité normale Winkler k_w . La relation charge-flèche est obtenue en considérant l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement (Dutta SC. 2002). La densité de la réaction de cette fondation est donnée par [Daikh. A. 2019] :

$$R_f(x, t) = k_w w_0(x, t) - k_p \nabla^2 w_0(x, t) \quad (\text{V.2})$$

Où : k_p est le module de cisaillement de la couche de cisaillement.

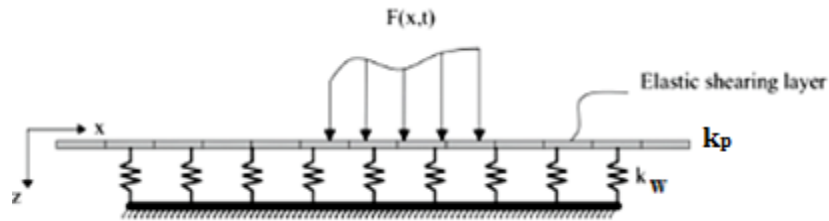


Figure V.3. Modèle de Pasternak [Younesian D., 2019]

V.2.3 Modèle Kelvin – Voigt

Pour remédier à la faiblesse du modèle Winkler, Kelvin – Voigt inclut le comportement viscoélastique et représente ce comportement par une série de ressorts discrets parallèles à des amortisseurs (Figure V.4).

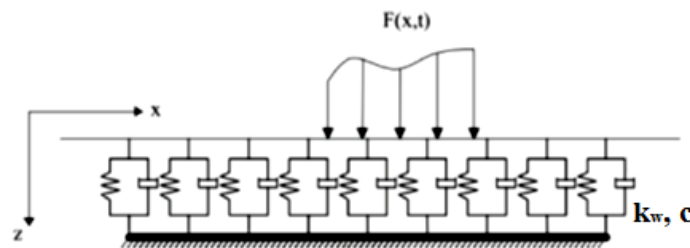


Figure V.4. Modèle de Kelvin-Voigt [Younesian D., 2019]

Autrement dit, Kelvin-Voigt tiens compte des effets de la viscoélasticité dans le modèle élastique de Winkler. La relation entre la force de réaction de la fondation et le déplacement est trouvée en utilisant la relation suivante [Younesian D., 2019]:

$$R_f(x,t) = k_w \cdot w_0(x,t) + c \cdot \dot{w}_0(x,t) \quad (V.3)$$

Où :

$w_0(x,t)$: est le déplacement vertical.

$c \cdot \dot{w}_0(x,t)$: est la 1ere dérivée de $w(x,t)$ par rapport au temps

k_w : est la rigidité des ressorts linéaires.

c : est l'amortissement des éléments visqueux.

V.2.4 Modèle Kerr

Kerr a suggéré un modèle à trois paramètres [Kerr A.D., 1965]. Il est également connu sous le nom de fondation de type Kerr. La fondation a été introduite comme le

développement du modèle Pasternak dans lequel la fondation est constituée d'une poutre encastrée dans un support élastique (Figure V.5.c). En utilisant ces trois paramètres, une large gamme de matériaux viscoélastiques peut être modélisée mathématiquement.

La réponse en flexion de la fondation peut être obtenue en résolvant l'équation suivante [Kerr A.D., 1965] :

$$R_f(x, t) = \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u} \right) w(x, t) - \left(\frac{k_s k_u}{k_1 + k_u} \right) \nabla^2 w(x, t) \quad (\text{V.4})$$

Avec :

k_s est le module de cisaillement,

k_u est le module élastique de la couche supérieure,

k_l le module élastique de la couche inférieure. La plupart des matériaux ont une réponse non linéaire avec respect à la charge de traction/compression; dans les petits déplacements. Les modèles linéaires peuvent fournir une précision acceptable. En général, le modèle non linéaire est plus pratique et plus réaliste [Yankelevsky D.Z. et al., 1989].

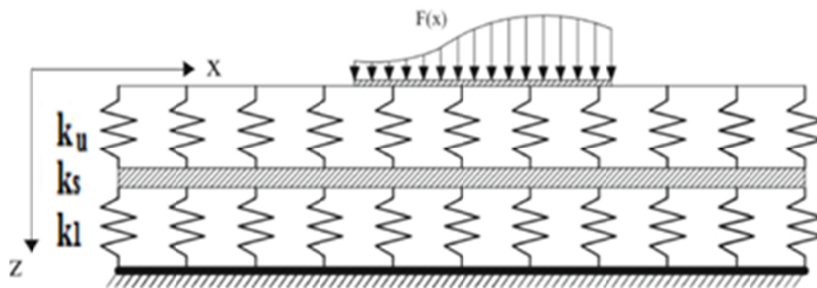


Figure V.5. Modèle de Kelvin-Voigt [Younesian D., 2019].

V.2.5 Fondation élastique variable

Le module de Winkler est variable et n'est pas fixe sur la longueur d'une structure à cause de la distribution des couches de sol qui n'est pas uniforme d'un point à un autre. De ce fait, la réaction de cette fondation peut être exprimée sous forme linéaire, parabolique ou sinusoïdale (Sobhy 2015, Attia et al. 2018, Pradhan et Murmu 2009):

$$R_f(x) = k_w(x)w + k_p \nabla^2 w \quad (V.5)$$

Avec :

$$k_w(x) = \frac{J_1 h^3}{a^4} \cdot \begin{cases} 1 + \xi \frac{x}{L} & (\text{linéaire}) \\ 1 + \xi \left(\frac{x}{L}\right)^2 & (\text{parabolique}) \\ 1 + \xi \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) & (\text{sinusoïdale}) \end{cases} \quad (V.6)$$

Où : R_f est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, J_1 est une constante et ξ un paramètre variable. k_p est la rigidité de la couche de cisaillement. ∇^2 est l'opérateur Laplacien en x et y , et w est le déplacement vertical de la structure. k_w est le paramètre Winkler dépendant de x seulement. Il peut être exprimé sous forme linéaire, parabolique ou sinusoïdale représenté sur la Figure V.6. (Sobhy 2015, Attia et al. 2018, Pradhan et Murmu, 2009) :

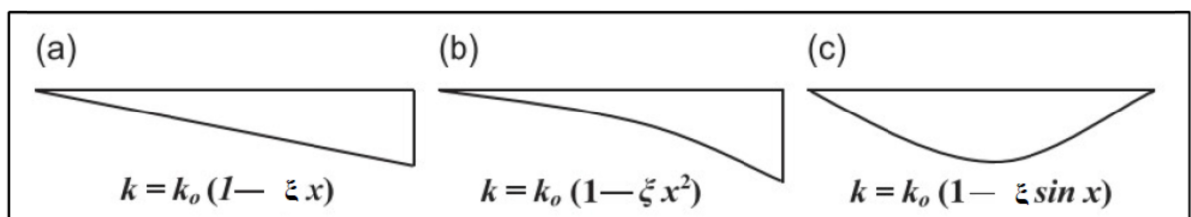


Figure V.6. Représentation de paramètre variable de Winkler [Pradhan, 2009]

Il est à noter que, si le paramètre variable $\xi = 0$, la fondation élastique devient celle de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient la fondation Winkler.

V.3 Formulation du problème

Considérons une des poutres FG sandwich à trois couches, d'épaisseur uniforme « h » et de longueur « L ». La poutre est supposée reposer sur fondation élastique. La géométrie et les dimensions de la poutre considérée sont représentées dans la Figure V.7 Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire des déformations infinitésimales de la poutre à trois couches occupant la région [0,L]x [-h/2,h/2]. Le plan médian de la poutre FG sandwich composée est défini par z= 0 et ses plans de délimitation externes étant défini par $z = \pm \frac{h}{2}$

Les positions verticales :

- de la surface inférieure est $h_0=-h/2$
- des deux interfaces entre l'âme et les couches de faces, respectivement : h_1, h_2
- de la surface supérieure : $h_3=h/2$.

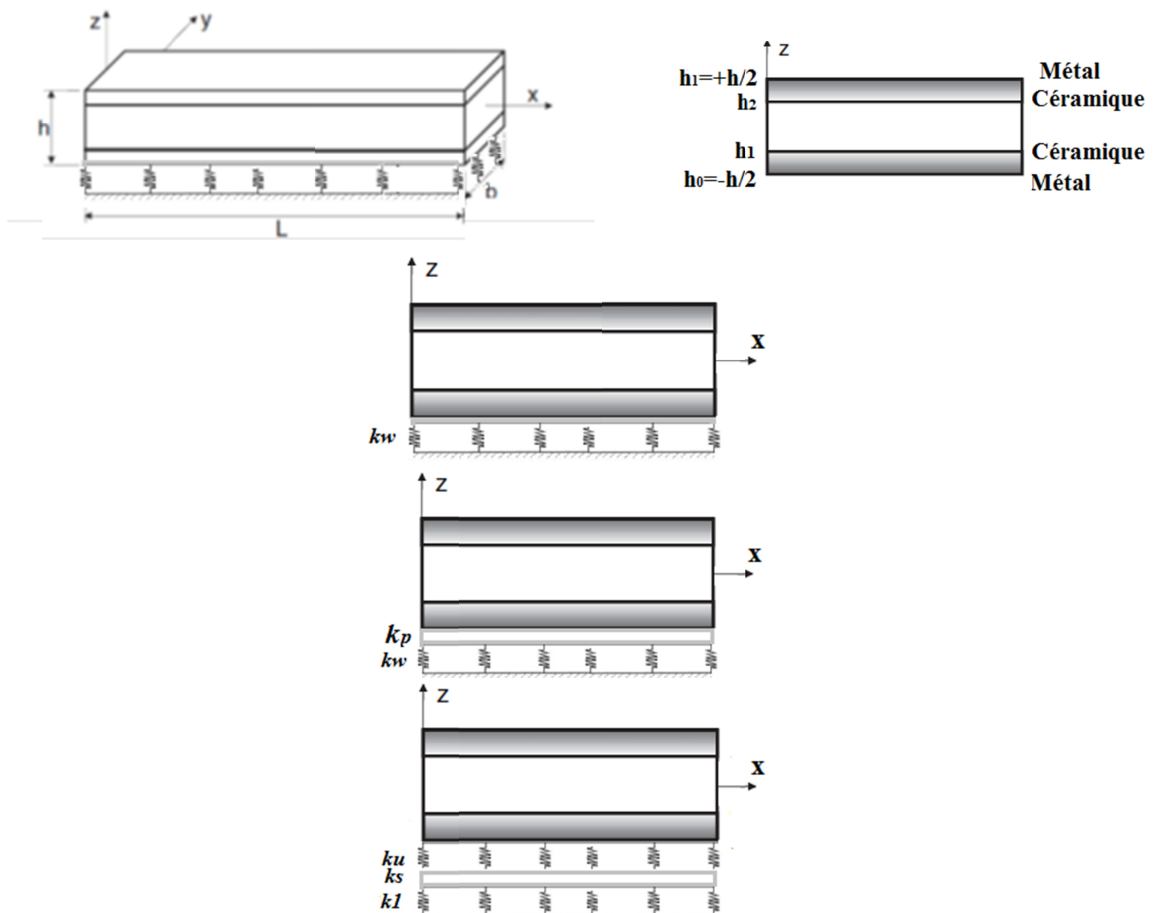


Figure V.7. Géométrie de la poutre sandwich FG posée sur fondation élastique :
 (a) fondation Winkler, (b) Fondation Pasternak, (c) Fondation Kerr.

La poutre sandwich est composée de trois couches élastiques : "couche 1", "couche 2" et "couche 3" du bas vers le haut de la poutre (Figure V.7). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et la face supérieure de la poutre sont notées par : $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 , $h_3 = h/2$ respectivement. Le volume et la surface supérieure qui est soumise à une charge transversale $q(x, y)$ sont notés par V et A respectivement.

Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la poutre est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple « 1-0-1 », « 1-1-3 » et ainsi de suite.

Les faces sont classées du métal à la céramique. Le noyau est en céramique isotrope rigide (Hardcore). Les fonctions de la fraction volumique sont données par [Nguyen et al., 2014]:

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (\text{V.7})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{V.8})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{V.9})$$

Où : $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$) désigne la fonction de fraction de volume de la couche n ; p est l'indice de fraction de volume ($0 \leq p \leq +\infty$), qui indique le profil de variation de matériau à travers l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young E , la densité ρ et le coefficient de dilatation thermique α , sont exprimées par la loi de mélange suivante [Ait Atmane, 2015]:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} - (P_c + P_m)\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right), \quad \text{cas P-FGM} \quad (\text{V.10.a})$$

$$P(z) = P_m e^{B V^{(n)}}, \quad B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right), \quad \text{cas E-FGM} \quad (\text{V.10.b})$$

Les indices m et c font référence au métal et à la céramique. Le coefficient de Poisson ν est supposé constant, cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young [Delale et Erdogan, 1983].

V.4 Cinématique et équations constitutives

V.4.1 Champ de déplacements

Le champ de déplacements proposé satisfait les conditions des contraintes de cisaillement transversales et par conséquent ceux des déformations, qui sont nulles sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre ($z \neq \pm h/2$) et prend en considération l'effet d'étirement d'épaisseur. Le champ de déplacement est donné comme suit [Bachir Bouiadjra R. et al.,2018] :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, t) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + g(z) \theta(x, t) \end{aligned} \quad (V.11)$$

$u_0, w_0,$ et ϕ_x sont les trois déplacements inconnus du plan médiane de la poutre.

En considérant que $\phi_x = \int \theta(x, t) dx$, les champs de déplacement mentionnés ci-dessus peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + g(z) \theta(x, t) \end{aligned} \quad (V.12)$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et les champs de déplacement peuvent être réécrits comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{dw_0}{dx} + k_1 A' f(z) \frac{d\theta}{dx} \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + g(z) \theta(x, t) \end{aligned} \quad (V.13)$$

Où

$$g(z) = \frac{1}{10} \frac{df}{dz} \quad k_1 = -\lambda^2; \quad A' = -\frac{I}{\lambda^2}; \quad \lambda = \frac{m\pi}{L} \quad (V.14)$$

On peut voir que le champ de déplacement dans les équations (V.11) et (V.12) ne contient que trois inconnues $u_0, w_0,$ et θ_x . La fonction de forme $f(z)$ [Reddy, 1997] est donnée par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad (V.15)$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - z k_x^b + f(z) k_x^\theta \\ \varepsilon_z &= g'(z) \varepsilon_z^0 \\ \gamma_{xz} &= (g(z) + k_1 A' f'(z)) \gamma_{xz}^s\end{aligned}\quad (\text{V.16})$$

Où

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{du_0}{dx} \\ k_x^b &= -\frac{d^2 w_0}{dx^2}; \\ k_x^\theta &= k_1 A' \frac{d^2 \theta}{dx^2}; \\ \gamma_{xz}^s &= \frac{d\theta}{dx}; \\ \varepsilon_z^0 &= \theta(x, t) \text{ and } g'(z) = \frac{dg}{dz}\end{aligned}\quad (\text{V.17})$$

V.4.2 Les équations constitutives

En supposant que le matériau de la poutre FG obéit à la loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha^{(n)} T \\ \varepsilon_z - \alpha^{(n)} T \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.18a})$$

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{(1-\nu^2)}; \quad Q_{13}^{(n)} = \nu Q_{11}^{(n)}, \quad Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{V.18b})$$

Où :

$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation.

$\alpha(z)$ est le coefficient de dilatation thermique et T est la distribution de la charge thermique.

La poutre est supposée reposer sur un modèle de fondation élastique.

V.4.3 Les équations de mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme suit:

$$\int_V (\delta U + \delta K - \delta T) dV = 0 \quad (\text{V.19})$$

Où : δU est la variation de l'énergie de déformation et δK est la variation de l'énergie potentielle de la fondation; δT est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est exprimée par:

$$\delta U = \int_0^L \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left[\sigma_x^{(n)} \delta \varepsilon_x + \sigma_z^{(n)} \delta \varepsilon_z + \tau_{xz}^{(n)} \delta \gamma_{xz} \right] dx dz \quad (V.20)$$

En remplaçant les équations (V.16) et (V.18) dans l'équation (V.20) et en intégrant à travers l'épaisseur de la poutre, l'équation (V.20) peut être réécrite comme suit :

$$\delta U = \int_0^L \left\{ N_x \frac{d\delta u_0}{dx} - M_x^b \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} + k_1 A' M_x^s \frac{d^2 \delta \theta}{dx^2} + N_z \delta \theta + Q \frac{d\delta \theta}{dx} \right\} dx \quad (V.21)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_x \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (V.22.a)$$

$$Q = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \tau_{xz} (g(z) - k_1 A' f'(z)) dz \quad (V.22.b)$$

$$N_z = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_z g'(z) dz \quad (V.22.c)$$

En posant l'équation (V.18) dans l'équation (V.22), les contraintes résultantes de la poutre peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^\theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{Bmatrix} \varepsilon_z^0, Q = A^s \gamma, \quad (V.23)$$

$$N_z = L \varepsilon_x^0 + L^a k_x^b + R k_x^\theta + R^a \varepsilon_z^0 \quad (V.24)$$

Où : A, B, D , etc., sont la rigidité de la poutre définie par :

$$\{A, B, B^s, D, D^s, H^s, R^a\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} \cdot \{1, z, f(z), z^2, z f(z), f(z)^2, g'(z)^2\} dz \quad (V.25.a)$$

$$\{L, L^a, R\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{13}^{(n)} \cdot \{g'(z), z g'(z), g'(z) f(z)\} dz \quad (V.25.b)$$

$$A_s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{66}^{(n)} \cdot (g(z) - k_1 A' f'(z))^2 dz \quad (V.25.c)$$

Les efforts et les moments résultants $N_x^T, M_x^{bT}, M_x^{sT}$ dues au chargement thermique sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} \alpha^{(n)} T dz \quad (V.26)$$

$$N_z^t = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{(1-\nu)} g'(z) \alpha^{(n)} T dz \quad (V.27)$$

La poutre est supposée être posée sur une fondation élastique, l'équation de réponse de cette fondation ainsi que l'énergie potentielle de la fondation et de la charge répartie sont exprimées comme suit:

$$R_f(x) = k_w(x)w + k_p \nabla^2 w + \bar{k}_w \cdot w(x,t) + c \cdot \dot{w}(x,t) + \bar{A}w(x,t) - \bar{B} \nabla^2 w(x,t) \quad (V.28.a)$$

$$\delta K = \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} R_f \delta(w_0(x) + g(z)\theta) - q \delta(w_0(x) + g(z)\theta) dx dz \quad (V.28.b)$$

Avec :

$$\bar{A} = \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u} \right), \quad \bar{B} = \left(\frac{k_s k_u}{k_1 + k_u} \right) \nabla^2 \quad (V.28.c)$$

En outre, la variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme suit :

$$\delta T = - \int_0^L \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left[\ddot{u} \delta u + (\ddot{w}_0 + g(z)\ddot{\theta}) \delta(w_0 + g(z)\theta) \right] \rho^{(n)}(z) dx dz \quad (V.29)$$

$$\delta T = - \int_0^L \left[\begin{aligned} & I_0(\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) + I_1(-\ddot{u}_0 \frac{dw_0}{dx} - \frac{d\ddot{w}_0}{dx} \delta u_0) + I_2(\frac{d\ddot{w}_0}{dx} \frac{d\delta w_0}{dx}) + J_0(\ddot{w}_0 \delta \theta + \ddot{\theta} \delta w_0) \\ & + J_1(K_1 A \ddot{u}_0 \frac{d\delta \theta}{dx} + K_1 A \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \delta u_0) \\ & + J_2(-K_1 A \frac{d\ddot{w}_0}{dx} \frac{d\delta \theta}{dx} - K_1 A \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \frac{d\delta w_0}{dx}) + K_0 \ddot{\theta} \delta \theta + K_2 (K_1 A)^2 \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \frac{d\delta \theta}{dx} \end{aligned} \right] dx \quad (V.30)$$

Où $\rho^{(n)}(z)$ est la masse volumique de la couche n; and $(I_0, I_1, J_0, J_1, I_2, J_2, K_0, K_2)$ sont des inerties de masse définies comme suit :

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \rho^{(n)}(z) (1, z, z^2) dz \quad (V.31.a)$$

$$(J_0, J_1, J_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \rho^{(n)}(z) (g(z), f(z), zf(z)) dz \quad (V.31.b)$$

$$(K_0, K_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \rho^{(n)}(z) (1, z, f, z^2, zf, f^2) dz \quad (V.31.c)$$

En remplaçant les expressions δU , Δk et δT des équations (V.21)-(V.28) et (V.30) dans l'équation (V.19) en intégrant par partie et en collectant les coefficients de δu_0 , δw_0 et $\delta \theta$, les équations de mouvement suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{dN_x}{dx} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_0}{dx} + J_1 K_1 A' \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \\ \delta w_0 : \frac{d^2 M_x^b}{dx^2} &+ q - k_w w_0 + k_w g(z)\theta - k_p w_{0,xx} + k_p g(z)\theta_{,xx} - k_p w_{0,xx} + k_p g(z)\theta_{,xx} + \bar{k}_w w_0 \\ &+ k_w g(z)\theta + c\dot{w} + cg(z)\dot{\theta} + c\dot{w}_0 g(z) + \bar{A}w_0 + \bar{B}w_{0,xx} + \bar{B}g(z)\theta_{,xx} \\ &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} + J_0 \ddot{\theta} + J_2 K_1 A' \frac{d^2 \ddot{\theta}}{dx^2} \end{aligned} \quad (V.32)$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : -K_1 A' \frac{d^2 M_x^s}{dx^2} &- N_z + qg(z) + k_w w_0 g(z) + k_w g^2(z)\theta + k_p w_{0,xx} g(z) + k_p g^2(z)\theta_{,xx} \\ &\bar{k}_w w_0 g(z) + \bar{k}_w g^2(z)\theta + c\dot{w}_0 g(z) + cg^2(z)\dot{\theta} + \bar{A}w_0 g(z) + \bar{A}g^2(z)\theta + \bar{B}w_{0,xx} g(z) \\ &+ \bar{B}g^2(z)\theta_{,xx} = J_0 \ddot{w}_0 - J_1 K_1 A' \frac{d\ddot{u}_0}{dx} + J_2 K_1 A' \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} + K_0 \ddot{\theta} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{d^2 \ddot{\theta}}{dx^2} \end{aligned}$$

En remplaçant les équations (V.23) et (V.24) dans l'équation (V.32), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, w_0, θ) comme :

$$\delta u_0 : A \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B \frac{d^3 w_0}{dx^3} + B^s (K_1 A') \frac{d^3 \theta}{dx^3} + L \frac{d\theta}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_0}{dx} + J_1 K_1 A' \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \quad (V.33.a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : B \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D \frac{d^4 w_0}{dx^4} + D^s (K_1 A') \frac{d^4 \theta}{dx^4} + L^a \frac{d^2 \theta}{dx^2} &- q - k_w w_0 + k_w g(z)\theta - k_p w_{0,xx} \\ &+ k_p g(z)\theta_{,xx} + \bar{k}_w w_0 + k_w g(z)\theta + c\dot{w} + cg(z)\dot{\theta} + c\dot{w}_0 g(z) + \bar{A}w_0 + \bar{B}w_{0,xx} + \bar{B}g(z)\theta_{,xx} \\ &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} + J_0 \ddot{\theta} + J_2 K_1 A' \frac{d^2 \ddot{\theta}}{dx^2} \end{aligned} \quad (V.33.b)$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : -K_1 A' \left(B^s \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D^s \frac{d^4 w_0}{dx^4} + H^s (K_1 A') \frac{d^4 \theta}{dx^4} + R \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) &- L \frac{d\theta}{dx} + L^a \frac{d^2 \theta}{dx^2} \\ &- RK_1 A' \frac{d^2 \theta}{dx^2} - R^a \theta + A^s \frac{d^2 \theta}{dx^2} + qg(z) + k_w w_0 g(z) + k_w g^2(z)\theta + k_p w_{0,xx} g(z) + k_p g^2(z)\theta_{,xx} \\ &\bar{k}_w w_0 g(z) + \bar{k}_w g^2(z)\theta + c\dot{w}_0 g(z) + cg^2(z)\dot{\theta} + \bar{A}w_0 g(z) + \bar{A}g^2(z)\theta + \bar{B}w_{0,xx} g(z) \\ &+ \bar{B}g^2(z)\theta_{,xx} = J_0 \ddot{w}_0 - J_1 K_1 A' \frac{d\ddot{u}_0}{dx} + J_2 K_1 A' \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} + K_0 \ddot{\theta} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{d^2 \ddot{\theta}}{dx^2} \end{aligned} \quad (V.33.c)$$

On suppose que la variation de température se produit dans le sens de l'épaisseur selon une forme de loi de puissance. La variation du champ de température à travers l'épaisseur est supposée être du type proposé par [Bachir Bouiadjra R. et al.,2018] :

$$T(x, z, t) = \hat{t}(z) \hat{T}(x, t) \quad (V.34.a)$$

Où

$$\hat{t}(z) = T^- e^{\gamma \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^\eta}, \quad \gamma = \ln\left(\frac{T^+}{T^-}\right), \quad 0 \leq \eta \leq \infty \quad (\text{V.34.b})$$

$$\hat{T}(x, z, t) = \bar{t} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \quad (\text{V.34.c})$$

Où \bar{t} est un paramètre arbitraire et T^+ and T^- sont la température supérieure et inférieure. Dans lequel η est l'exposant de température. À noter que $\eta = 0$ représente la température de la surface supérieure de la poutre tandis que $\eta = \infty$ représente la température de la surface inférieure.

V.5 La solution Navier pour les poutres sandwich FG

La méthode de la solution Navier est utilisée pour déduire les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont écrites comme le produit des paramètres arbitraires et les fonctions trigonométriques connus pour respecter l'équation du mouvement et les conditions aux limites.

Dans ce paragraphe, la solution Navier pour les poutres étudiées sera utilisée pour résoudre le problème. Les variables peuvent être écrites en supposant les variations suivantes:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_m e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \\ W_m e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \\ X_m e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \end{pmatrix} \quad (\text{V.35})$$

Où: U_m, W_m, X_m sont des paramètres arbitraires à déterminer, $i = \sqrt{-1}$, ω est la fréquence propre associée au m^{ieme} mode propre et $\frac{m\pi}{L}$. La charge transversale q est également étendue dans la série de Fourier telle que:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) e^{i\omega t} \quad (\text{V.36})$$

Où Q_m est l'amplitude de la charge calculée à partir de:

$$Q_m = \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) \quad (\text{V.37})$$

En remplaçant les équations(V.35) - (V.36) dans l'équation(V.33), les solutions analytiques peuvent être obtenues par:

- Pour le problème de vibration libre

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = 0 \quad (V.38)$$

- Pour le cas des problèmes statiques

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (V.39)$$

- Pour le cas de la thermodynamique

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{F\} \quad (V.40)$$

Où $[M]$ est la matrice de masse, $[K]$ est la matrice de rigidité, $\{\Delta\}$ est le déplacement de la valeur nodale, et $\{F\}$ est le vecteur de force distributive, et ω^2 sont les valeurs propres du système dynamique (fréquences propres).

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}; \quad (V.41.a)$$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{Bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} -\lambda A' \bar{t} \\ \lambda^2 B' \bar{t} + q_0 \\ -k_1 A' C' \bar{t} \lambda^2 + D' \bar{t} + q_0 g_0 \end{Bmatrix} \quad (V.41.b)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= A\lambda^2 \\ a_{12} &= -B\lambda^3 \\ a_{13} &= k_1 A' B^s \lambda^3 - L\lambda \\ a_{22} &= D\lambda^4 + k_p \lambda^2 + k_w - \bar{k} w_0 + ci\omega - \bar{A} + \bar{B}\lambda^2 \\ a_{23} &= -k_1 A' D^s \lambda^4 + L^a \lambda^2 \\ a_{33} &= (k_1 A')^2 H^s \lambda^4 + A^s \lambda^2 - 2k_1 A' R \lambda^2 + R^a \end{aligned} \quad (V.42.c)$$

Où: $g_0 = g(\pm h/2)$

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_0 \\ m_{12} &= -I_1 \lambda \\ m_{13} &= k_1 A' J_1 \lambda \\ m_{22} &= I_0 + I_2 \lambda^2 \\ m_{23} &= J_0 - k_1 A' J_2 \lambda^2 \\ m_{33} &= K_2 (k_1 A')^2 \lambda^2 + K_0 \end{aligned} \quad (V.42.d)$$

V.6 Résultats numériques et discussion

Une poutre sandwich de type Al/Al₂O₃, composée de couche de face en aluminium (métal) et âme en alumine (céramique) est étudiée. Pour l'analyse à la flexion, on considère que cette poutre est soumise à une charge thermodynamique sinusoïdale.

Les propriétés de matériau suivantes sont utilisées:

- Métal : $E_M = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho_M = 2702 \text{ Kg/m}^3$
- Céramique : $E_c = 200 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho_c = 5700 \text{ Kg/m}^3$

Plusieurs types de plaques sandwichs sont présentés en fonction de l'épaisseur de la couche centrale entièrement céramique tandis que la surface inférieure et supérieure de la plaque est riche en métal.

- La plaque sandwich (1-0-1) FGM: la plaque est symétrique et ne comporte que deux couches FGM à épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. Ainsi : $h_1 = h_2 = 0$.
- La plaque sandwich (1-1-1) FGM: ici la plaque est symétrique et est faite de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h / 6$, $h_2 = h / 6$.
- La plaque sandwich (2-1-2) FGM: la plaque est symétrique et on a: $h_1 = -h / 10$, $h_2 = h / 10$.
- La plaque sandwich (2-2-1) FGM: La plaque n'est pas symétrique et nous avons: $h_1 = -h / 10$, $h_2 = 3h / 10$

Pour plus de commodité, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$\bar{w} = -\text{Re} \frac{10D_0 w}{L^4} ; \quad \bar{\sigma}_{xx} = -\frac{0.001h^2 \text{Re}(\sigma_x)}{L^2} ; \quad \bar{\tau}_{xz} = -\frac{0.001h}{L} \tau_{xz}$$

$$\text{avec } D_0 = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Dans cette section sont présentés les résultats de l'analyse de la flexion thermodynamique des poutres FG sandwich. Ces résultats sont obtenus en utilisant une théorie de déformation de cisaillement type quasi-3D avec prise en considération de l'influence de l'effet d'étirement de l'épaisseur. Une étude paramétrique sera faite pour montrer l'effet de la porosité, de l'indice matériel, de la configuration de la poutre sandwich et de la variation des fondations. Trois types de fondation ont servi de support à la poutre étudiée à savoir : des fondations variables, fondation Kelvin-Voigt et la fondation Kerr.

Tableau V.1. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$, non-dimensionnelles des poutres sandwich P-FGM (Al/Al_2O_3), pour $\alpha = 0.1$

Configuration	indice p	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4
	variante					
1-0-1	\bar{w}	2.1339	4.7442	5.0930	5.1704	5.1924
	$\bar{\sigma}_{xx}$	16.2472	18.7818	18.7505	18.7511	18.7574
	$\bar{\tau}_{xz}$	2.4386	6.5083	7.1162	7.1204	7.0137
1-1-1	\bar{w}	2.1340	4.2340	4.6239	4.7730	4.8938
	$\bar{\sigma}_{xx}$	16.2469	18.8144	18.7655	18.7458	18.7330
	$\bar{\tau}_{xz}$	2.4403	5.8531	6.7710	7.1406	7.3836
2-1-2	\bar{w}	2.1339	4.4946	4.8997	5.0365	5.1566
	$\bar{\sigma}_{xx}$	16.2471	18.7941	18.7462	18.7313	18.7218
	$\bar{\tau}_{xz}$	2.4393	6.2500	7.1526	7.4369	7.6191
2-2-1	\bar{w}	2.1339	2.3915	2.1020	1.9509	-1.2466
	$\bar{\sigma}_{xx}$	16.2471	18.9639	18.9805	18.9905	19.2318
	$\bar{\tau}_{xz}$	2.4393	3.1902	2.9198	2.7443	-2.1374

Le tableau V.1 montre l'influence de l'indice de fraction de volume "p" pour différentes poutres sandwich P-FGM avec une porosité $\alpha = 0.1$. En effet, on constate visiblement que la flèche \bar{w} augmente graduellement à mesure que l'indice de fraction de volume "p" augmente sauf pour la poutre asymétrique (2-2-1) où la flèche a tendance à diminuer. En plus, la valeur la plus élevée de la flèche est toujours obtenue pour la configuration 1-0-1. Quant à la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, elle garde des valeurs sensiblement constante pour $p > 1$. Pour la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$, elle s'accroît en fonction de l'augmentation de la valeur de "p" sauf pour la poutre asymétrique où elle diminue.

Tableau V.2. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ adimensionnelles des poutres sandwich P- FGM ($A_1/A_2/O_3$) reposant sur fondation Pasternak, pour $p = 1$, (1-1-1).

	Porosité α	(k0 , k3)=(0,0)	(k0 , k3)=(10 ⁶ , 0)	(k0 , k3) =(0 , 10 ⁶)	(k0 , k3) =(10 ⁶ , 10 ⁶)
\bar{w}	0	4.3359	4.0345	2.3681	2.2485
	0.1	4.2340	3.9326	2.2859	2.1688
	0.2	4.1316	3.8307	2.2051	2.0908
$\bar{\sigma}_{xx}$	0	18.8074	19.0452	20.3598	20.4543
	0.1	18.8144	19.0468	20.3167	20.4069
	0.2	18.8216	19.0485	20.2743	20.3605
$\bar{\tau}_{xz}$	0	6.4278	1.7789	-23.9191	-25.7649
	0.1	5.8531	1.6167	-21.5313	-23.1766
	0.2	5.2981	1.4607	-19.2683	-20.7265

Le tableau V.2 illustre l'influence de la variation des paramètres de fondation (k0 et k3) pour une poutre sandwich P-FGM de configuration (1-1-1) ayant un indice matériel P=1. Cette étude est réalisée pour trois (03) cas de l'indice de porosité α (0, 0.1 ou 0.2). On constate que la flèche \bar{w} de la poutre diminue visiblement en fonction de la variation des paramètres de (K0 et K3). En outre, la flèche diminue quand la porosité augmente pour le même cas de fondation utilisée. Par contre, la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ de la poutre augmente avec l'augmentation des paramètres (K0 et K3) où elle garde des valeurs sensiblement constante quand la porosité augmente. Par ailleurs, pour la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$, elle diminue avec l'augmentation des paramètres (K0 et K3) et de l'indice de la porosité.

Tableau V.3. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$, non-dimensionnelle des poutres sandwich E-FGM (A_1/A_2O_3), reposant sur fondation variable, pour $p = 1$, (2-1-2).

Fondation	indice p	(k0, k1)=(1000,100)			(k0, k1)=(10 ⁶ ,10 ⁶)		
		\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
Linéaire	p=0	2.1696	16.2430	2.6587	1.1971	18.7308	-10.2647
	p=1	3.9881	18.8272	6.0353	1.4548	20.7744	-24.7160
	p=2	4.6555	18.7676	7.2719	1.4885	21.1265	-30.6062
Parabolique	p=0	2.1698	16.2419	2.6587	1.3008	18.2545	-10.2647
	p=1	3.9890	18.8260	6.0353	1.6584	20.4965	-24.7160
	p=2	4.6567	18.7661	7.2719	1.7219	20.8188	-30.6062
Sinusoïdale	p=0	2.1691	16.2466	2.6587	1.0213	19.9206	-10.2647
	p=1	3.9864	18.8311	6.0353	1.1355	21.3898	-24.7160
	p=2	4.6532	18.7728	7.2719	1.1290	21.7892	-30.6062

Le tableau V.3 montre l'influence du type de la fondation variable (linéaire, parabolique et sinusoïdale), et la variation de l'indice de « p » sur une poutre sandwich E-FGM de configuration (2-1-2) ayant une porosité α (0 , 0.1 ou 0.2).

Quel que soit le type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale), la flèche reste constante (variation insignifiante) pour la même valeur de l'indice p et cela pour les paramètres (k0, k1)=(1000,100). Quand ces deux derniers augmentent de l'ordre de 10⁶ l'influence de type de fondation devient plus significative. Cependant, la flèche augmente suite au passage d'une fondation linéaire à une fondation parabolique et elle diminue considérablement pour la fondation sinusoïdale en prenant une plus faible valeur.

De même et pour la même valeur de l'indice p, la contrainte normale reste constante (variation insignifiante) quel que soit le type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale) et cela pour les paramètres (k0, k1)=(1000,100). Quand ces deux derniers augmentent de l'ordre de 10⁶ l'influence de type de fondation devient plus significative. Lors du passage d'une fondation linéaire à une fondation parabolique, la contrainte normale diminue légèrement puis elle augmente pour la fondation sinusoïdale en prenant une plus grande valeur.

Constatons aussi que la contrainte tangentielle reste constante pour la même valeur de l'indice p et cela pour les paramètres $(k_0, k_1)=(1000,100)$ et cela quel que soit le type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale).

Malgré que l'augmentation des paramètres (k_0, k_1) de l'ordre de 10^6 ait engendré une baisse plus ou moins remarquable de la contrainte tangentielle, l'influence du type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale) reste insignifiante.

Quand la valeur de l'indice matériel « p » augmente, la flèche augmente pour les différents types de fondation et les différentes valeurs des paramètres (k_0, k_1) .

Pour les différentes valeurs de l'indice matériel « p », la contrainte normale augmente dans le cas des paramètres (k_0, k_1) de l'ordre de 10^6 . Tandis que dans le cas des paramètres $(k_0, k_1)=(1000,100)$, la contrainte normale augmente entre les valeurs de p (0 et 1) puis diminue légèrement pour $p=2$.

Remarquons aussi que la contrainte tangentielle augmente quand la valeur de l'indice matériel « p » augmente quel que soit le type de fondation variable et cela pour les paramètres $(k_0, k_1)=(1000,100)$. Alors que quand ces deux derniers augmentent de l'ordre de 10^6 , la contrainte tangentielle diminue considérablement lorsque la valeur de l'indice matériel « p » augmente.

Tableau V.4. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$, non-dimensionnelle des poutres sandwich P- FGM (Al/Al_2O_3), reposant sur fondation Kerr, pour $p = 1$, et une configuration de type : (1-1-1) .

	Porosité α	$k_u=0$ $k_s=10^6$	$k_u=100$ $k_s=10^6$	$k_u=200$ $k_s=10^6$	$k_u=300$ $k_s=10^6$	$k_u=400$ $k_s=10^6$
\bar{w}	0	4.3359	4.0895	4.0125	3.9748	3.9525
	0.1	4.2340	3.9876	3.9107	3.8732	3.8509
$\bar{\sigma}_{xx}$	0	18.8074	19.0017	19.0625	19.0922	19.1098
	0.1	18.8144	19.0045	19.0638	19.0927	19.1099
$\bar{\tau}_{xz}$	0	6.4278	2.6279	1.4397	0.8593	0.5154
	0.1	5.8531	2.3893	1.3083	0.7806	0.4680

Dans le tableau V.4 est illustré l'influence du type de la fondation Kerr sur une poutre sandwich P-FGM de configuration (1-1-1) ayant un indice matériel $p=1$ et une porosité α (0 ou 0.1).

On constate lorsque le paramètre K_u augmente la flèche \bar{w} et la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_{xz}$ de la poutre diminuent visiblement, par contre la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ augmente.

Pour les mêmes valeurs de K_u , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1, la flèche diminue considérablement, contre un changement insignifiant de la contrainte normale et une légère diminution de la contrainte tangentielle.

Tableau V.5. La flèche \bar{w} , la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$, la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$, non-dimensionnelle des poutres sandwich P-FGM (Al/Al_2O_3), reposant sur fondation Kelvin-Voigt, pour $p = 1$, et une configuration de type : (1-1-1).

	Porosité α	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
c=10	0	4.3357	18.8075	6.4245
	0.1	4.2338	18.8146	5.8501
c=20	0	4.3355	18.8077	6.4214
	0.1	4.2336	18.8148	5.8473
c=30	0	4.3353	18.8078	6.4184
	0.1	4.2334	18.8149	5.8445
c=40	0	4.3351	18.8080	6.4153
	0.1	4.2332	18.8151	5.8417

Le tableau V.5 montre l'influence du type de la fondation visco-élastique de Kelvin-Voigt et la variation de la viscosité du sol sur une poutre sandwich P-FGM de configuration (1-1-1) ayant une porosité α (0, 0.1). Il est clair à partir de ce tableau que l'augmentation de l'indice de viscosité c n'affecte guère la réponse de la poutre FG sandwich.

Pour la même valeur de c , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1, la flèche et la contrainte tangentielle diminuent de façon très minime alors que la contrainte normale augmente légèrement.

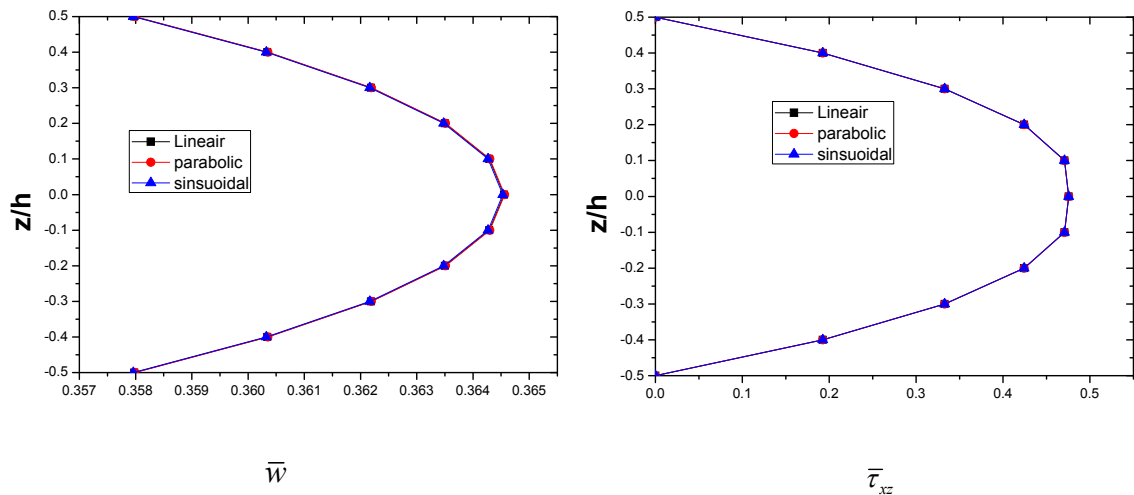


Figure V.8. Variation de la flèche \bar{w} et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4, \xi = 20$) posé sur fondation variable.

La superposition des trois graphes dans la figure V.8 implique que les valeurs de la flèche et de la contrainte de cisaillement ne changent pas à travers l'épaisseur de la poutre quel que soit le type de la fondation variable (linéaire, parabolique, sinusoidale). Il est clair aussi que le maximum de la flèche et de la contrainte tangentielle apparaissent au centre de l'épaisseur de la poutre et que la contrainte tangentielle est nulle aux extrémités.

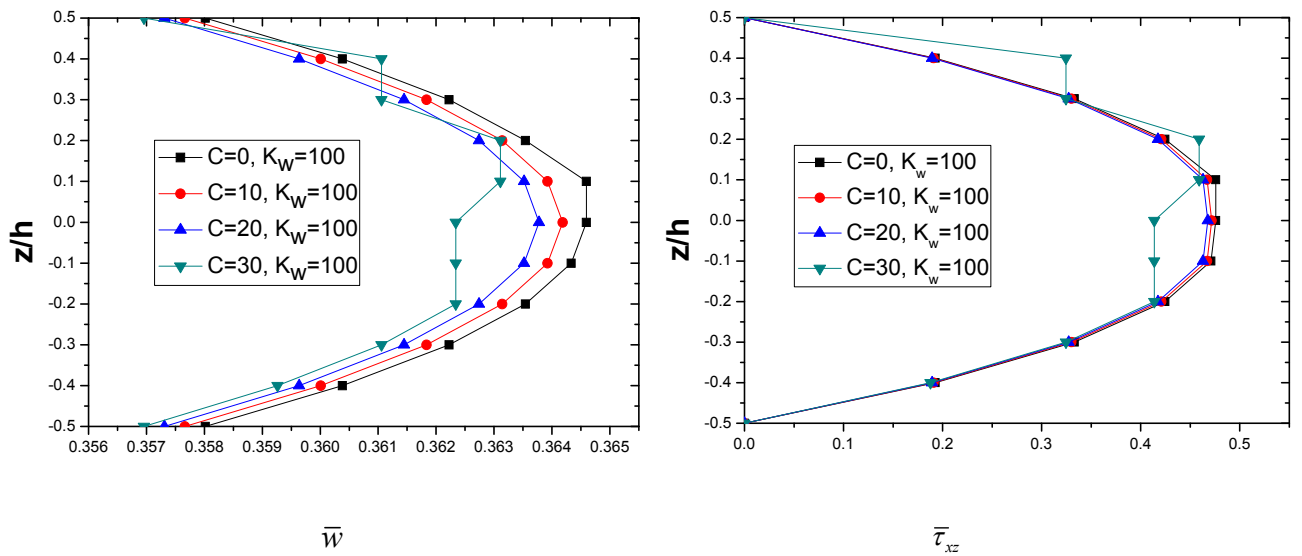


Figure V.9. Variation de la flèche \bar{w} et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique avec ($\alpha = 0.2, \omega = 4$) posé sur fondation Kelvin-Voigt.

Dans la figure V.9, Il est remarquable que la flèche et la contrainte tangentielle augmentent à travers l'épaisseur quand la viscosité diminue. On voit clairement que leur évolution prend une allure parabolique plus au moins parfaite pour une viscosité du sol prenant les valeurs de 0, 10 ou 20, tandis que pour la valeur de $c=30$ les courbes perdent cette allure parfaite et ont tendance à se briser et leur évolution devient anarchique.

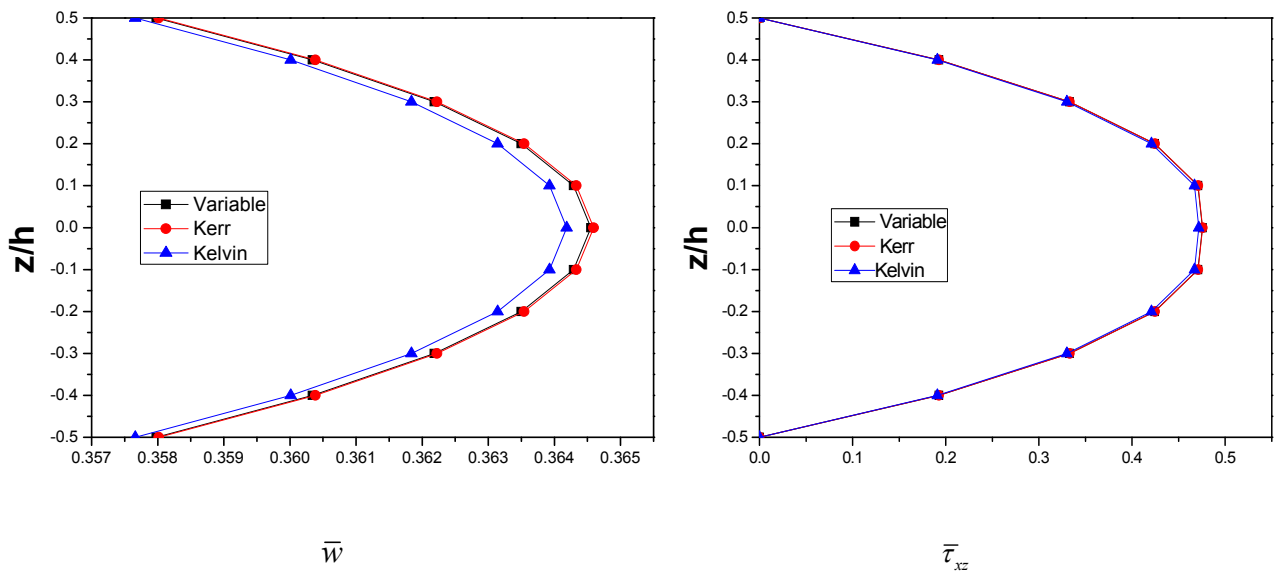


Figure V.10. Variation de la flèche \bar{w} et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich (1-1-1) Al/Al_2O_3 soumises à une charge thermodynamique, posée sur fondation variable, fondation Kerr, fondation Kelvin-Voigt.

La Figure V.10 illustre l'effet des différentes fondations (variable, Kelvin-Voigt, Kerr) sur l'évolution de la flèche et de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur de la poutre. Là aussi, l'allure parabolique dans les deux graphes sorte visiblement. Pour la contrainte tangentielle l'influence du type de fondation et presque insignifiante on remarque un léger retrait de la courbe de la fondation Kelvin-Voigt au centre de l'épaisseur, par rapport à celles des deux autres fondations, ce qui signifie que la contrainte tangentielle diminue très légèrement pour ce type de fondation. Constatons aussi la superposition presque parfaite des deux courbes des fondations variable et Kerr pour la flèche, par contre la fondation Kelvin-Voigt donne des valeurs un peu moins que les deux fondations précédentes à travers toute l'épaisseur.

V.7 Conclusion

Cette analyse avait pour objectif d'étudier le comportement des poutres sandwich FGM reposant sur différents types de fondation et exposées à des charges thermodynamique, sur la base d'une théorie quasi 3D. Les équations gouvernantes ont été résolues par la méthode de Navier pour l'analyse des poutres FGM simplement appuyées.

La pertinence du champ de déplacement a été prouvée au chapitre précédent à travers une validation des résultats comparés à d'autres études antérieures.

Une étude paramétrique détaillée est présentée pour mettre en évidence les effets de tous les paramètres influençant le comportement thermodynamique des poutres sandwich FG, notamment celles des fondations.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Le progrès de la science et de la technologie a permis le développement de nouveaux systèmes de matériaux capables de résister en toute sécurité aux exigences de performances toujours croissantes qui leur sont imposées. Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont des matériaux non homogènes du point de vue de la mécanique des milieux continus, c'est-à-dire que le module de Young (E), la masse volumique (ρ), la dilatation thermique (α) et éventuellement le coefficient de Poisson (ν), d'un FGM varient avec la position spatiale.

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont prometteurs pour les applications nécessitant des performances de matériaux ultra-élevées telles que les revêtements de barrière thermique, les implants osseux et dentaires, les dispositifs piézoélectriques et thermoélectriques, les matériaux optiques à indices de réflexion gradués et les structures de vol spatial hautes performances (y compris les moteurs). Nouvelles applications sont continuellement découvertes.

Dans cette recherche, l'objectif était double, à savoir l'étude du **comportement des structures non homogènes** (plaques et poutres en FGM) sous un chargement mécanique et thermodynamique, et l'influence des différents types de **fondations (linéaires et non-linéaire)** sur le comportement de ces structures, tout en étudiant l'évolution de la flèche, le flambement, les contraintes normales et tangentielles et en utilisant la théorie quasi-3D qui prend en compte l'effet de l'étirement.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, le chapitre quatre, a été consacré à l'étude de la flexion, du flambement et de la vibration libre d'une plaque épaisse sandwich FG avec des propriétés matérielles tel que le module de Young qui varie selon une loi de puissance (P-FGM), en fonction des fractions volumiques des constituants. Nous avons utilisé un modèle analytique basé sur la théorie quasi-3D à quatre variables pour l'analyse du comportement dynamique de la plaque sandwichs en FGM soumises à un chargement mécanique.

La théorie quasi-3D n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Ainsi, sur la base de la section résultats numériques du quatrième chapitre, les considérations suivantes ont été mises en valeurs:

- Le déplacement transversal augmente avec l'augmentation de la puissance p .
- La contrainte axiale non dimensionnelle est une traction à la partie supérieure et une compression à la partie inférieure des plaques FG.
- La contrainte tangentielle dans le plan est une traction à la partie inférieure et une compression à la partie supérieure des plaques FG.
- La répartition de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque n'est pas parabolique sauf dans le cas de $p = 0$ (plaque isotrope).
- L'augmentation de l'indice de puissance p réduit la fréquence.
- L'augmentation de l'indice de puissance p et du rapport a/h augmente la valeur critique de la charge de flambement.

Deuxièmement, dans le dernier chapitre, l'objectif étant d'étudier le comportement thermodynamique des poutres sandwich FG, avec des propriétés dépendantes de la température reposant sur différents types de fondation, en utilisant une théorie quasi-3D. En effet, une poutre sandwich FG avec des propriétés matérielles qui varient suivant l'épaisseur a fait l'objet d'une étude selon plusieurs configurations qui changent.

Cependant, les conclusions suivantes ont pu être tirées :

A propos de l'influence de l'indice de l'indice matériel " p " pour différentes poutres sandwich P-FGM avec une porosité $\alpha = 0.1$:

- La valeur la plus élevée de la flèche est toujours obtenue pour la configuration 1-0-1 ;
- la flèche augmente graduellement à mesure que l'indice matériel " p " augmente sauf pour la poutre asymétrique (2-2-1) où la flèche a tendance à diminuer ;
- La contrainte normale garde des valeurs sensiblement constantes pour $p > 1$;
- la contrainte tangentielle s'accroît en fonction de l'augmentation de la valeur de " p " sauf pour la poutre asymétrique où elle diminue.

A propos de l'influence de la variation des paramètres de fondation (k_0 et k_3) pour une poutre sandwich P-FGM de configuration (1-1-1) ayant un indice matériel $P=1$:

- La flèche de la poutre diminue visiblement en fonction de la variation des paramètres de (K_0 et K_3) ;
- la flèche diminue quand la porosité augmente pour le même cas de fondation utilisée ;
- la contrainte normale de la poutre augmente avec l'augmentation des paramètres (K_0 et K_3) où elle garde des valeurs sensiblement constante quand la porosité augmente ;
- la contrainte tangentielle diminue avec l'augmentation des paramètres (K_0 et K_3) et de l'indice de la porosité.

A propos de l'influence du type de la fondation variable (linéaire, parabolique et sinusoïdale), et la variation de l'indice de « p » sur une poutre sandwich E-FGM de configuration (2-1-2) ayant une porosité α (0 , 0.1 ou 0.2) :

- Quel que soit le type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale), la flèche reste constante (variation insignifiante) pour la même valeur de l'indice p et cela pour les paramètres (k_0, k_1)=(1000,100). Pour les paramètres (k_0, k_1) de l'ordre de 10^6 l'influence de type de fondation devient plus significative ;
- La flèche augmente suite au passage d'une fondation linéaire à une fondation parabolique et elle diminue considérablement pour la fondation sinusoïdale ;
- La contrainte normale reste constante (variation insignifiante) quel que soit le type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale) et cela pour les paramètres (k_0, k_1)=(1000,100) pour la même valeur de l'indice p, quand ces deux derniers augmentent de l'ordre de 10^6 l'influence de type de fondation devient plus significative.
- Lors du passage d'une fondation linéaire à une fondation parabolique, la contrainte normale diminue légèrement puis elle augmente pour la fondation sinusoïdale ;
- quel que soit le type de fondation variable (linéaire, parabolique ou sinusoïdale) leur influence reste insignifiante sur la contrainte tangentielle qui reste constante ou très peu changeante pour la même valeur de l'indice p.

- Quand la valeur de l'indice matériel « p » augmente, la flèche augmente pour les différents types de fondation et les différentes valeurs des paramètres (k_0, k_1).
- Pour les différentes valeurs de l'indice matériel « p », la contrainte normale augmente dans le cas des paramètres (k_0, k_1) de l'ordre de 10^6 .
- Dans le cas des paramètres (k_0, k_1)=(1000,100), la contrainte normale augmente entre les valeurs de p (0 et 1) puis diminue légèrement pour p =2.
- La contrainte tangentielle augmente quand la valeur de l'indice matériel « p » augmente quel que soit le type de fondation variable et cela pour les paramètres (k_0, k_1)=(1000,100) ;
- la contrainte tangentielle diminue considérablement lorsque la valeur de l'indice matériel « p » augmente pour les paramètres (k_0, k_1) de l'ordre de 10^6 ;

A propos de l'influence du type de la fondation Kerr sur une poutre sandwich P-FGM de configuration (1-1-1) ayant un indice matériel $p=1$ et une porosité α (0 ou 0.1):

- Lorsque le paramètre K_u augmente la flèche et contrainte tangentielle de la poutre diminuent visiblement, par contre la contrainte normale augmente.
- Pour les mêmes valeurs de K_u , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1, la flèche diminue considérablement ;
- Changement insignifiant de la contrainte normale pour les mêmes valeurs de K_u , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1 ;
- légère diminution de la contrainte tangentielle pour les mêmes valeurs de K_u , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1 ;

A propos de l'influence du type de la fondation visco-élastique de Kelvin-Voigt, et la variation de la viscosité du sol sur une poutre sandwich P-FGM de configuration (1-1-1) ayant une porosité α (0, 0.1) :

- L'augmentation de l'indice de viscosité c n'affecte gère la réponse de la poutre FG sandwich ;
- Pour la même valeur de c , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1, la flèche et la contrainte tangentielle diminuent très légèrement ;
- Pour la même valeur de c , en passant d'une poutre parfaite à une poutre de porosité 0.1, la contrainte normale augmente légèrement.

En perspective, il est recommandé de :

- Faire d'autres recherches et études sur les poutres sandwich en FGM posées sur d'autres types de fondation en proposant d'autres champs de déplacement plus récents, afin d'analyser leur comportement sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.
- Suivre l'actualité sur le plan d'analyse numérique, et profiter de l'évolution rapide de la technologie pour mettre à jours les outils de simulation numérique utilisés afin de faciliter d'avantage et de diversifier les outils de recherche et de validation des résultats.

Enfin, cette recherche s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient fonctionnel et précisément leur comportement thermodynamique sous fondations élastiques variables. Néanmoins, il est temps d'investir les résultats de ces travaux et l'effort considérable déployé dans ce laboratoire pour solliciter d'éventuels partenaires économiques tout en sensibilisant les décideurs locaux ou nationaux afin que ces travaux trouvent leurs applications sur le plan local et ainsi, contribuer au développement de l'économie national.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- Abdelaziz H.H., Ait Amar Meziane M., Bousahla A.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., and Alwabli A.S., 2017.** An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions. *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.
- Abdelaziz H.H., Atmane H.A., Mechab I., Boumia L., Tounsi A. and Adda Bedia E.A., 2011.** Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory. *Chin. J. Aeronaut.*, 24, 434-448. [https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(11\)60051-4](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(11)60051-4).
- Abualnour M., Houari M.S.A., Tounsi A., Adda Bedia E.A. and Mahmoud S.R., 2018.** A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- Afaq. K.S., 2003.** Développement d'ONU nouveau modèle verser les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des Effets de bord. Thèse PhD, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- Ahmed A., 2014.** Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory. *Int. J. Civil, Struct., Environ.*, 4(2), 59-64.
- Ait Amar Meziane M., Abdelaziz H.H. et Tounsi A., 2014.** Une théorie raffinée efficace et simple pour le flambement et la vibration libre de plaques sandwich à gradient exponentiel dans diverses conditions aux limites", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 2014, 16 (3), 293-318.
- Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A., 2010.** Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R., 2015.** A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities. *Steel and Composite Structures*, 19(2), 369-384.
- Ait Sidhoum I., Boutchicha D., Benyoucef S. and Tounsi A., 2017.** An original HSDT for free vibration analysis of functionally graded plates. *Steel Compos. Struct.*, Int. J., 25(6), 735-745.
- Ait Sidhoum I., Boutchicha D., Benyoucef S. and Tounsi A., 2018.** A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of simply supported functionally graded plates. *Smart Structures and Systems*, 22(3), 303-314.
- Akavci, S.S., 2010.** Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. *Mech. Compos. Mater.* Vol. 46, No. 2, 215–226.
- Akavci S.S., 2016.** Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation. *Compos. Part B.*, 96, 136-152.
- Ali Rachedi M., Benyoucef S., Bouhadra A., Bachir Bouiadjra R., Sekkal M. and Benachour A., 2020.** Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, Volume 22, Number 1, July10 2020, pages 65-80.
- Alipour M.M. and Shariyat M., 2014.** Analytical stress analysis of annular FGM sandwich plates with non-uniform shear and normal tractions, employing a zigzag elasticity plate theory. *Aerosp. Sci. Technol.*, 32(1), 235-259.

- Al-shujairi M. and Çağrı Mollamahmutoğlu., 2018.** Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich micro-beams resting on elastic foundation by using nonlocal strain gradient theory in conjunction with higher order shear theories under thermal effect. *Composites Part B*, 154, 292-312.
- Ambartsumyan, A.S., 1958.** On the Theory of Anisotropic Shells and Plates. In *Proceedings of the Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity: Symposium, Warsaw, Poland, 2–9 September 1958*; Olszak, W., Ed.; Pergamon Press: London, UK.
- Ameur M., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A., 2011.** A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations." *KSCE Journal of Civil Engineering.*, 15(8), 1405-1414
- Amnieh H.B., Zamzam M.S. and Kolahchi R., 2018.** Dynamic analysis of non-homogeneous concrete blocks mixed by SiO₂ nanoparticles subjected to blast load experimentally and theoretically. *Construct. Build. Mater.*, 174, 633-644.
- Andertová J, Tl'askal R, Maryška M, Havrda J. 2007,** Functional gradient alumina ceramic materials - heat treatment of bodies prepared by slip casting method. *J Eur Ceram Soc*;27:1325–31.
- Arunachalam R, Kumar P, Muraliraja R. 2019,** A review on the production of metal matrix composites through stir casting – furnace design, properties, challenges, and research opportunities. *J Manuf Process*; 42:213–45.
- Attia A., Bousahla A.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., Alwabli A.S., 2018.** A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations. *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464.
- Aydogdu M., 2009.** A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending buckling and vibration. *Physica E*, 41, 1651–1655.
- Aydogdu M., 2009.** A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 89(1), 94-101.
- Bachir Bouiadjra R., Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A. and Bernard F., 2018.** Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical models. *Struct. Eng. Mech*, 66(3), 317-328.
<https://doi.org/10.12989/sem.2018.66.3.317>.
- Baferani A.H., Saidi A. et Jomehzadeh E., 2012.** Exact analytical solution for free vibration of functionally graded thin annular sector plates resting on elastic foundation. *J Vib Control* 2012;18(2):246-267.
- Bao G. and Wang L., 1995.** Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), pp.2853-2871.
- Bassiouny S., Jinghua J., Reham F., Tareq A., Qiong X., Lisha W., Dan S., Aibin M., 2020.** 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges, *Composites Part B* 201 (2020) 108376.
- Bellifa H., Benrahou K.H., Bousahla A.A., Tounsi A. and Mahmoud S.R., 2017.** A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeam. *Struct. Mech. Eng.*, 62(6), 695-702.
- Benachour A., Daouadji H.T., Ait Atmane H., Tounsi A., Meftah S.A., 2011.** A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Composites Part B*, 42, 1386-1394.

- Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., Meftah S.A., 2011.** A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Composites: Part B*, 42, 1386–1394.
- Benchohra M., Driz H., Bakora A., Tounsi A., Adda Bedia E.A., Mahmoud S.R., 2018 .** A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Struct. Eng. Mech.*, 65(1), 19-31.
- Bennoun M., Houari M.S.A., and Tounsi A., 2016.** A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- Bessaim A., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R. and Adda Bedia E.A., 2013.** A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Sandw. Struct. Mater.*, 15(6), 671-703.
- Bilouei B.S., Kolahchi R. and Bidgoli M.R., 2016.** Buckling of concrete columns retrofitted with Nano-Fiber Reinforced Polymer (NFRP). *Comput. Concrete*, 18(5), 1053-1063.
- Boch P., Chartier T. and Huttepain M., 1986.** Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites. *Journal of the American Ceramic Society*. 69(8), C-191. doi:10.1111/j.1151-2916.1986.tb04836.x.
- Bohidar S. K., Sharma R. & Mishra P. R., 2014.** Functionally Graded Materials: A critical Review. *International journal of research*, 1(7), 289–301.
- Bouadi A., Bousahla A.A., Houari M.S.A., Heireche H. and Tounsi A., 2018.** A new nonlocal HSDT for analysis of stability of single layer graphene sheet. *Adv. Nano Res.*, 6(2), 147-162.
- Bouhadra A., Tounsi A., Bousahla A.A., Benyoucef S., Mahmoud S.R., 2018.** Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates. *Struct. Eng. Mech.*
- Boulefrakh L., 2020.** Etude Du Comportement Mécanique Des Structures Posées Sur Des Fondations Viscoélastique. Thèse de doctorat en Génie civil, Université de Sidi Belabès, 86p.
- Bourada F., Amara K., Bousahla A.A., Tounsi A. and Mahmoud S.R., 2018.** A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates. *Struct. Eng. Mech.*, 68(6), 661-675.
- Bourada F., Bousahla A.A., Bourada M., Azzaz A., Zinata A. and Tounsi A., 2019.** Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory. *Wind Struct.*, 28(1), 19-30.
- Bourada M., Tounsi A., Houari M.S.A. and AddaBedia E.A., 2012.** A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *J. Sandw. Struct. Mater.*,14(1), 5-33.
- Bourada. F., Amara. K. and Tounsi A., 2016.** Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory. *Steel Compos. Struct.*, 21(6), 1287-1306.
- Bousahla A.A., Benyoucef S., Tounsi A. and Mahmoud S.R., 2016.** On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion. *Struct. Eng. Mech.*, 60(2), 313-335.
- Bulatova R, Bahl C, Andersen K, Kuhn LT, Pryds N. 2015,** Functionally graded ceramics fabricated with side-by-side tape casting for use in magnetic refrigeration. *Int J Adv Ceram Technol*; 898:891–8.
- Carrera E, Brischetto S. and Robaldo A., 2008.** Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA J*, 46(1), 194–203.

- Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M., 2011.** Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites: Part B.*, 42, 123–133.
- Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J.N., 2003.** A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539.
- Cheng L, Sun M, Ye F, Bai Y, Li M, Fan S. 2018,** Structure design, fabrication, properties of laminated ceramics: a review. *Int J Light Mater Manuf*.
- Cheng Z.Q. and Batra R.C., 2000.** Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. *Arch. Mech.*, 52, 143-158.
- Chi S.H. & Chung Y. L., 2003.** Cracking in coatingsubstrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10, 1227 –1243.
- Chi S.H. & Chung Y.L., 2006.** Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures* 43, 3657-3674.
- Chmielewski M, Pietrzak K. 2016,** Metal-ceramic functionally graded materials-manufacturing, characterization, application. *Bull Pol Acad Sci Tech Sci*;64: 151–60.
- Cowper G. R.,1966.** The shear coefficients in Timoshenko beam theory. *J. Applied Mechanics, ASME*, 33(2):335–340.
- Čukanović D. , Radaković A. , Bogdanović G. , Milanović M. ,Redžović H. and Dragović D., 2018.** New Shape Function for the Bending Analysis of Functionally Graded Plate. *Materials*, 11, 2381.
- Delale F. et Erdogan F., 1983.** The crack problem for a nonhomogeneous plane. Vol. 50, n° %1 609 –614, 1983.
- Drake J.T., Williamson R.L. et Rabin B.H., 1993.** Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction. *Journal of Applied Physics*, 74, 1321-1326.
- Dufort L., Drapier S., & Grédiac M., 2001.** Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending. *Composite Structures*, 52(2), 233-246.
- Ebrahimi F. and Reza B.M., 2017.** Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. *Compos. Struct.*, 159, 433-444.
- El Meiche N., Tounsi A., Ziane N., Mechab I. et Adda Bedia A., 2011.** Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle. *International Journal of Mechanical Sciences* 53, 237–247.
- El-Galy Islam M, Saleh Bassiouny I, Ahmed Mahmoud H. 2019,** Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Appl Sci*;1:1378–401.
- Fakhar A. and Kolahchi R., 2018.** Dynamic buckling of magneto rheological fluid integrated by visco-piezo-GPL reinforced plates. *J. Mech. Sci.*, 144, 788-799.
- Ferreira A. J. M., Batra R. C., Roque C. M. C., Qian Martins P. A. L. S., 2004.** Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos. Struct.* 193, 705-725.
- Ferreira A., Batra R., Roque C., Qian L. and Jorge R., 2006.** Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Composite Structures*, 75, 593–600.
- Fuchiyama T. and Noda N., 1995.** Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, *JSAE Review*, 16, 263–268.

- Giannakopoulos A.E., Suresh S., Finot M. et Olsson M., 1995.** Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients. *Acta Metalurgica et Materialia*, 43, 1335-1354.
- Golabchi H., Kolahchi R. and RabaniBidgoli M., 2018.** Vibration and instability analysis of pipes reinforced by SiO₂ nanoparticles considering agglomeration effects. *Comput. Concrete*, 21(4), 431-440.
- Gupta A. and Talha M., 2017.** Nonlinear flexural and vibration response of geometrically imperfect gradient plates using hyperbolic higher-order shear and normal deformation theory. *Compos. Part. B Eng.*, 123, 241-261.
- Hadji L. et al., 2017.** Vibration des plaques sandwichées en FGM. 23^{ème} Congrès Français de Mécanique Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017.
- Hadji L., Atmane H.A., Tounsi A., Mechab I. et Adda Bedia E.A., 2011.** Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–94.
- Hagedorn S, Drolle E, Lorentz H, Srinivasan S, Leonenko Z, Jones L. 2015,** Atomic force microscopy and Langmuir-Blodgett monolayer technique to assess contact lens deposits and human meibum extracts. *J Optom*; 8:187–99.
- Hajmohammad M.H., Farrokhan A. and Kolahchi R., 2018a.** Smart control and vibration of viscoelastic actuator-multiphase nanocomposite conical shells-sensor considering hygrothermal load based on layerwise theory. *Aerosp.Sci. Technol.*, 78, 260-270.
- Hajmohammad M.H., Maleki M. and Kolahchi R., 2018b.** Seismic response of underwater concrete pipes conveying fluid covered with nano-fiber reinforced polymer layer. *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, 110, 18-27. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.04.002>.
- Hajmohammad M.H., Zarei M.S., Nouri A. and Kolahchi R., 2017.** Dynamic buckling of sensor/functionally graded carbon nanotube-reinforced laminated plates/actuator based on sinusoidal-visco-piezoelasticity theories. *J. Sandw. Struct. Mater.*,
- Hamidi A., Houari M.S.A., Mahmoud S.R. and Tounsi A., 2015.** A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 235-253.
- Hasani Baferani A., Saidi, A.R. et Ehteshami H., 2011.** Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*, 1842–1853.
- Hashemi Sh-H., Es'haghi M, Karimi M., 2010.** Closed-form vibration analysis of thick annular functionally graded plates with integrated piezoelectric layers. *Int J Mech Sci* 2010; 52:410–28.
- Hashemi Sh-H., Khorshidi K., Es'haghi M., Fadaee M., Karimi M., 2012.** On the effects of coupling between in-plane and out-of-plane vibrating modes of smart functionally graded circular/annular plates. *Appl Math Model* 2012; 36:1132–47.
- Hebali H., Tounsi A., Houari M.S.A., Bessaim A. and Adda Bedia E.A., 2014.** A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *ASCE J. Eng. Mech.*, 140(2), 374-383.
- Hill R. & Lin, W., 2002.** Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, 185-191.
- Hill R., 1965.** A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (4), 213-222.
- Hopkinson N., Hague R.J.M. and Dckens., 2006.** P.M. Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age. John Wiley and Sons, Ltd .

- Hosseini H. and Kolahchi R., 2018.** Seismic response of functionally graded-carbon nanotubes-reinforced submerged viscoelastic cylindrical shell in hygrothermal environment. *Physica E*, 102,101-109.
- Houari M.S.A., Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A. and Adda Bedia E.A., 2011.** Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J. Therm. Stresses*, 34(4), 315-334.
- Huang X.L. et Shen H.S., 2004.** Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2403–2427.
- Huang Z.Y., Lu C.F., Chen W.Q., 2008 :** Solutions de référence pour les plaques épaisses fonctionnellement graduées reposant sur Winkler-Pasternak fondations élastiques *Compos., Struct*8595-104.
- Iyengar S.N.R.K. et Pandya S.K., 1982.** Vibration of orthotropic rectangular thick plates. *Int J Solids Struct*, 149–156.
- Iyengar S.N.R.K., Chadrashekhara K. et Sebastian V.K., 1974.** On the analysis of thick rectangular plates. *Z Angew Math Mech*, 589–591.
- J. Yang J., K. M. Liew., Kitipornchai S., 2005.** Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Compos. Sci. Technol*; 65 (7-8):1165 1175.
- Jabbari M, Bulatova R, Tok AIY, Bahl CRH, Mitsoulis E, Hattel JH. 2016,** Ceramic tape casting: a review of current methods and trends with emphasis on rheological behaviour and flow analysis. *Mater Sci Eng B*;212:39–61.
- Jamian S, Watanabe Y, Sato H. 2018,** formation of compositional gradient in Al/SiC FGMs fabricated under huge centrifugal forces using solid-particle and mixed-powder methods. *Ceram Int*.
- Javaheri R., Eslami M.R., 2002.** Bouclage de plaques fonctionnellement classées sous chargement compressif dans le plan. *ZAMM*, 82, 277-83.
- Kant T. and Swaminathan K., 2001.** Estimation of Transverse/Interlaminar Stresses in Laminated Composites - A Selective Review and Survey of Current Developments, *Composite Structures*, 49(1): 65 -75.
- Karama M., Afaq K.S., Mistou S., 2003.** Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- Karami B. and Janghorban M., 2019.** On the dynamics of porous nanotubes with variable material properties and variable thickness. *J. Eng. Sci.*, 136(C), 53-66.
- Karami B., Janghorban M. and Li L., 2018a.** On guided wave propagation in fully clamped porous functionally graded nanoplates. *Acta Astronaut.*, 143, 380-390.
- Karami B., Janghorban M. and Tounsi A. (2018e.** Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory. *Thin-Walled Struct*,129, 251–264.
- Karami B., Janghorban M. and Tounsi A., 2018g.** Nonlocal strain gradient 3d elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles. *Steel Compos. Struct*, 27(2), 201-216.
- Karami B., Janghorban M. and Tounsi. A., 2018f.** Galerkin’s approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions. *Eng. Comput.*, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0664-9>.
- Karami B., Janghorban M., Shahsavari D. and Tounsi A., 2018h .**A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates. *Steel Compos. Struct.*, 28(1), 99-110.

- Karami B., Shahsavari D. and Li L., 2018b.** Temperature-dependent flexural wave propagation in nanoplate-type porous heterogenous material subjected to in-plane magnetic field. *J. Therm. Stresses*, 41(4), 483-499.
- Karami B., Shahsavari D., Janghorban M., Dimitri R. and Tornabene F., 2019.** Wave Propagation of Porous Nanoshells. *Nanomaterials*, 9(1), 1-19.
- Karami B., Shahsavari D., Li, L., Karami M. and Janghorban M., 2018c.** Thermal buckling of embedded sandwich piezoelectric nanoplates with functionally graded core by a nonlocal second-order shear deformation theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*, 233(1), 287-301.
- Karami B., Shahsavari D., Nazemosadat S.M.R., Li L., 2018d.** Thermal buckling of smart porous functionally graded nanobeam rested on kerr foundation. *Steel Compos. Struct.*, 29(3), 349-362.
- Kashtalyan M., 2004.** Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864.
- Kawasaki A. 1997,** Watanabe R. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceram Int*;8842:73–83.
- Khorramabadi M.K, Najafizadeh M.M, Shahraki A.J, Khazaeinejad P., 2008.** Effect of shear theories on free vibration of functionally graded plates. *World Acad Sci Eng Technol* 2008; 48:216–21.
- Kim S.E., Thai H.T., Lee J., 2009 .**A two variable refined plate theory for laminated composite plates”, *Composite Structures*, 89, 197–205.
- Kirchhoff G., 1850.** Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88.
- Kirmızı G, Arık H, Çinici H. 2019,** Experimental study on mechanical and ballistic behaviours of silicon carbide reinforced functionally graded aluminum foam composites. *Compos B Eng*;164:345–57.
- Koizumi M., 1992.** Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng.Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347.
- Kolahchi R. and Arani A.J., 2016.** Buckling analysis of embedded concrete columns armed with carbon nanotubes. *Comput. Concrete*, 17(5), 567-578.
- Kolahchi R. and Cheraghbak A., 2017.** Agglomeration effects on the dynamic buckling of viscoelastic microplates reinforced with SWCNTs using Bolotin method. *Nonlin.Dyn.*, 90(1), 479-492.
- Kolahchi R., 2017.** A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods. *Aerosp. Sci. Technol.*, 66, 235-248.
- Kolahchi R., Keshtegar B. and Fakhar M.H., 2017b.** Optimization of dynamic buckling for sandwich nanocomposite plates with sensor and actuator layer based on sinusoidal-viscopiezoelectricity theories using Grey Wolf algorithm. *J. Sandw. Struct. Mater.*
- Kolahchi R., Safari M. and Esmailpour M., 2016.** Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium. *Compos. Struct.*, 150, 255-265.
- Kolahchi R., Zarei M.S., Hajmohammad M.H. and Nouri A., 2017a.** Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory. *J. Mech. Sci.*, 130, 534-545.
- Krishna Murty A. V. , Vellaichamy S., 1987.** On higher order shear deformation theory of laminated composite panels *Composite Structures*. 8 (4). pp. 247-270. ISSN 0263-8223.

- Krishna Murty A.V., 1970.** Vibration of short beams, *AIAA J.* 8 (1970) 34–38.
- Krishna Murty, A.V., 1977.** Higher-order theory for vibrations of thick plates. *AIAA Journal*, 1823–1824.
- Krishna Murty, A.V., 1986.** Toward of consistent plate theory. *AIAA Journal*, 1047–1048.
- Krishna Murty, A.V., 1987.** Flexural of composite plates. *Composite Structures*, 161–177.
- Levinson, M., 1980 .** An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6), 343-350.
- Li D., Deng Z. and Xiao H., 2016.** Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Compos. Pt B.*, 106, 107-119.
- Li Q., lu V.P. et Kou K.P., 2008.** Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 498-515.
- Li Q., lu VP. & Kou KP., 2008.** Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib* 2008;311(1–2):498–515.
- Li X.F., 2008.** A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *J. Sound Vib.*, 318, 1210-1229.
- Lo K. H., Christensen R. M., & Wu E. M. , 1977.** A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates. *Journal of applied mechanics*, 44(4), 663-668.
- Loh GH, Pei E, Harrison D, Monz´on Mario D. 2018,** An overview of functionally graded additive manufacturing. *Addit Manuf*; 23:34–44.
- Madani H., Hosseini H. and Shokravi M., 2016 .**Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Steel Compos. Struct.*, 22(4), 889-913.
- Mahi A., Adda Bedia E.A, Tounsi A., 2015.** Une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique pour la flexion et l'analyse des vibrations libres des plaques composites isotropes, classées fonctionnellement, sandwiches et stratifiées. *Applied Mathematical Modeling*, 39, 2489-2508.
- Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A., Benachour A and Adda Bedia E.A., 2018.** On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation. *Struct. Eng. Mech.*, 14(2), 117-128.
- Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A., Benachour A., AddaBedia E.A and Mahmoud S.R., 2017.** A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *J. Sandw. Struct. Mater.*,
- Majumdar JD, Manna I. 2015,** Development of functionally graded coating by thermal spray deposition. *Therm. Sprayed Coatings their Tribol. Performances*: 121–62.
- Mallikarjuna, M. et Kant, T., 1993.** A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", 23(4).
- Mantari J. L., Oktem A. S., & Soares C. G., 2012.** A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- Mantari J.L & Soares C.G., 2014a.** A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014.
- Mantari J.L, Granados EV, Hinostroza MA, Guedes Soares C., 2014.** Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455–71, 2014.
- Mantari J.L. & Soares C.G., 2014b.** A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates. *Compos. Struct.*, 107, 396-405.

- Mantari J.L., Oktem A.S. and Soares C.G., 2012.** Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos Struct.*, 94, 714-723.
- Matsunaga H., 2008.** Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 499–512.
- Matsunaga H., 2009.** Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; 90 (1): 76–86.
- Mechab I., Ait Atmane H., Tounsi A., Belhadj H.A., Adda Bedia E.A., 2010.** A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. *Acta Mech Sin.*, 26, 941–949.
- Meksi A., Benyoucef S., Houari M.S.A. and Tounsi A., 2015.** A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations. *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1215-1240.
- Meksi R, Benyoucef S., Mahmoudi A., Tounsi A., Adda Bedia E.A. and Mahmoud S.R., 2019.** An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *J. Sandw. Struct. Mater.*, 21(2), 727-757.
- Meksi R, Benyoucef S., Mahmoudi A., Tounsi A., Adda Bedia E.A. and Mahmoud S.R., 2018.** An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *J. Sandw. Struct.Mater.*, 1099636217698443.
- Menasria A., Bouhadra A., Tounsi A., Bousahla A.A. and Mahmoud S.R., 2017.** A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates. *Steel Compos.Struct.*, 25(2), 157-175.
- Merdaci S., Tounsi A., Houari M.S.A., Mechab I., Hebali H., Benyoucef S., 2011.** Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates. *Arch. Appl. Mech.*, 81, 1507–1522.
- Metco Sulzer.** An introduction to thermal spray. 2013. p. 1–24.
- Mindlin R. D., and Deresiewicz H., 1953.** Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams. *National Congress of Applied Mechanics*, New York, USA.
- Mindlin R.D., 1951.** Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38.
- Misra, N., Kapusetti, G., Pattanayak, D. K., & Kumar, A., 2011.** Fabrication and characterization of epoxy/silica functionally graded composite material". *Indian journal of physics*.
- Miyamoto Y. Kaysser, W.A. Rabin B.H., Kawasaki A. and ford R.G., 1999.** *Functionally graded Material*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Mori, T. Tanaka, K., 1973.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574.
- Müller E., Drašar Č., Schilz J. & Kaysser W., 2003.** Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 17–39.
- Na K.S., Kim J.H., 2004.** Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials. *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437.
- Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi, 2011.** *Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions*" ; John Wiley & Sons; page 110, 4 août .
- Natarajan S. and Manickam G., 2012.** Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite. Elem. Anal. Des.*, 57, 32-42.

- Neves A., Ferreira A., Carrera E., Cinefra M., Jorge R. and Soares C., 2012.** Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *J. Appl. Math. Mech.*, 92(9), 749-766.
- Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N and Soares C.M.M., 2013.** Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos Part B: Eng.*, 44, 657-674.
- Nguyen T. K., K. Sab Bonnet G., 2007.** Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575.
- Nguyen V. T., 2004.** Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Thèse de Doctorat, Ecole National des Ponts et chaussées, 216 p.
- Nguyen V.H., Nguyen T.K., Thai H.T. and Vo T.P., 2014.** A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Compos. Pt. B Eng.*
- Okamura H., 1991.** State of the art of material design projects for severe service applications. *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9.
- Ootao Y., Tanigawa Y., 2004.** Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating, *journal of thermal stress*, Vol. 22 (35-55).
- Ootao Y., Tanigawa Y., 2004.** Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, *Compos. Struct*; 63 (2): 139–146.
- Pai BC, Rajan TPD.** 2009, Development in manufacturing processes of functionally graded materials. *IJAEA*;2:64–74.
- Palanivel S, Nelaturu P, Glass B, Mishra RS. 2015,** Friction stir additive manufacturing for high structural performance through microstructural control in an Mg based WE43 alloy. *Mater Des*;65:934–52.
- Park J.S., Kim J.H., 2005.** Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates. *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93.
- Petrov N.A., Gorbatikh L. and Lomov V.S., 2018.** A parametric study assessing performance of eXtended Finite Element Method in application to the cracking process in cross-ply composite laminates. *Compos. Struct.*,187, 498-508.
- Praveen G.N. and Reddy J.N., 1998.** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 4457-4476.
- Put S, Vleugels J, Anne G, Biest O Van Der, 2003,** Functionally graded ceramic and ceramic ´A metal composites shaped by electrophoretic deposition. *Colloids Surfaces A Physicochem Eng Asp*;222:223–32.
- Qian L.F., Batra R.C. and Chen L.M., 2004.** Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composite: Part B*, 685-697.
- Rachedi M. A., Benyoucef S., Bouhadra A., Bachir Bouiadjra R, Sekkal M., 2020.** Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation. *Geomechanics and Engineering* , 22 (1) Pages.65-80.
- Rafael A, Nishihora K, Rachadel PL. 2018,** Manufacturing porous ceramic materials by tape casting - A review. *J Eur Ceram Soc*;38:988–1001.
- Ramírez-Gil FJ, Murillo-Cardoso JE, Silva ECN, Montealegre-Rubio W., 2016,** Optimization of functionally graded materials considering dynamical analysis. In: Munoz-Rojas P, editor. *Comput. Model. Optim. Manuf. Simul. Adv. Eng. Mater. Adv. Struct. Mater. Cham: Springer.* p. 205–37.

- Rasheedat M., Mahamood E., Akinlabi T., Shukla M. & Pityana S., 2012.** Functional Graded Material An Overview. In proceeding of the world congress on engineering 2012 Vol III, London , U.K. proceedings of the world congress on engineering.
- Rayleigh L., 1877.** On progressive waves. *Proc. London Math. Soc.*, 9, 21-26.
- Rayleigh L., 1945.** Theory of sound. Dover Pub.
- Reddy J.N. et Phan N.D., 1985.** Analysis of laminated composite plates using a higher order shear deformation theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(7): 2201–2219.
- Reddy J.N., 1984.** A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 51, 745–752.
- Reddy J.N., 1990.** A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates. 22(7).
- Reddy J.N., 1997.** *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis.* CRC Press, Boca Raton.
- Reddy J.N., 1999.** *Theory and Analysis of Elastic plates.* Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- Reddy J.N., 2000.** Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Methods Eng*; 47: 663-684.
- Reddy J.N., Cheng Z.Q., 2002.** Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal plan form. *Int J Mech Sci*, 44(5), 967–985.
- Reddy J.N., Cheng Z.Q., 2011.** Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.
- Reissner E., 1945** .The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.
- Reissner E., 1961.** On finite pure bending of cylindrical tubes," *Osterr. Ing.-Arch.*, 15, pp. 165-172.
- Reissner E., 1975.** Sur flexion transversale de plaques, y compris les effets de déformation transversale de cisaillement. *Int. J. Solids Structures*; 25(5):495-502.
- Rodrigues TA, Duarte V, Miranda RM, Santos TG, Oliveira JP. 2019,** Current status and perspectives on wire and arc additive manufacturing (WAAM). *Materials*; 12:1121.
- Saiyathibrahim A., Mohamed N. S. S. and Dhanapal P., 2015.** Processing techniques of functionally graded materials—a review. In *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology* (pp. 98-105).
- Sankar B.V, 2001.** An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696.
- Sankar B.V., Tzeng J.T., 2002.** Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232.
- Sekkal M., Fahsi B., Tounsi A. and Mahmoud S.R., 2017.** A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate. *Steel Compos. Struct.*, 25(4), 389-401.
- Shahsavari D., Karami B., Faghham H.R. and Li L., 2018c.** On the shear buckling of porous nanoplates using a new size-dependent quasi-3d shear deformation theory. *Acta Mech.* 229(11), 4549-4573.
- Shahsavari D., Karami B., Janghorban M. and Li L., 2017.** Dynamic characteristics of viscoelastic nanoplates under moving load embedded within visco-Pasternak substrate and hygrothermal environment. *Mater. Res. Exp.*, 4(8), 085013.

- Shahsavari D., Karami B., Janghorban M. and Li L., 2018a.** Damped vibration of a graphene sheet using a higher-order nonlocal strain-gradient Kirchhoff plate model. *Comptes Rendus Mécanique*, 346 (12), 1216-1232.
- Shahsavari D., Karami B., Janghorban M. and Li L., 2018b.** A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerospace Science and Technology*, 72, 134-149.
- She G.L., Yuan F.G. and Ren Y.R. (2018),** “On wave propagation of porous nanotubes”, *Int. J. Eng. Sci.*, 130, 62-74. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.002>.
- She G.L., Yuan F.G., Karami B., Ren Y.R. and Xiao W.S., 2019.** On nonlinear bending behavior of fg porous curved nanotubes. *Int. J. Eng. Sci.*, 135, 58-74.
- She G.L., Yuan F.G., Ren,R.Y. and Xiao W.S., 2017.** On buckling and postbuckling behavior of nanotubes. *J. Eng. Sci.*, 121, 130-142.
- Shen H. S, Yang J., 2003.** Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, 2003.
- Shen H.S, Wang Z.X., 2012.** Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2012; 94 (7):2197–208.
- Shimpi R.P., 2002.** Théorie des plaques raffinée et ses variantes. *AIAA Journal*, 137–146.
- Sladek J., Sladek V., Zhang Ch., 2003.** Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Comput. Mater. Sci*; 28 (3-4): 494–504.
- Soldatos, K. P., 1992.** Transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *ActaMech.*, 94, 195–220.
- Stein M., 1986.** Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA J.*, 24, 1537–1544.
- Strojny A, et al. 2016,** The influence of Al₂O₃ powder morphology on the properties of Cu-Al₂O₃ composites designed for functionally graded materials (FGM). *J Mater Eng Perform*;25:3173–84.
- Suresh S., Mortensen A., 1998.** *Fundamentals of Functionally Graded Materials* , (IOM Communications Ltd., London).
- Swaminathan K., Sangeetha D., 2016.** Thermal Analysis of FGM Plates – A Critical Review of Various Modelling Techniques and Solution Methods. *Composite Structures*.
- Taibi F.Z, Benyoucef S., Tounsi A., BachirBouiadjra R., AddaBedia E.A. and Mahmoud S.R., 2015.** A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *J. Sandw. Struct. Mater.*, 17(2), 99-129.
- Thai H.T. & Choi D.H. (2012),** “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.*, 36, 1008-1022.
- Thai H.T. & Choi D.H., 2013.** A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.*, 101, 332-340.
- Thai H.T. & Kim S.E., 2013.** A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.*, 96, 165-173.
- Thai H.T. & Kim, S.E., 2011.** Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Composite Structures*, 1738–1746.
- Thai H.T., Nguyen T.K. and Vo T., 2014.** Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory. *Europ. J. Mech. A/Solids.*, 45, 211-225.

- Thorin A., Forêt G., 2013.** Calcul des structures : Introduction au calcul de structures élastiques linéaires. École d'ingénieur. (MEC441) MODAL - Génie Civil, Palaiseau, France, pp.56.
- Timoshenko S. P., 1921.** On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine, Series 6*, pp. 742–746.
- Tounsi A., Houari M.S.A. and Benyoucef S., 2013.** A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Tounsi A., Houari M.S.A., Benyoucef S. et Adda Bedia E.A., 2013.** Une théorie trigonométrique raffinée de la déformation du cisaillement pour le pliage thermoélastique des plaques sandwich classées fonctionnellement", *Aerospace Sci. Tech.*, 2013, 24, 209-220.
- Touratier M., 1991.** An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916.
- Uflyand Y.S., 1948.** The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech.*, Vol 12, p. 287-300.
- Uymaz B., Aydogdu M., 2007.** Three-Dimensional Vibration Analyses of Functionally Graded Plates under Various Boundary Conditions, *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26 (18), 1847-1863.
- Vel S.S. et Batra R.C., 2004.** Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J. Sound Vib.*, 272(3–5), 703–730.
- Vel. S.S, Batra R.C., 2002.** Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433.
- Wang J, Pan Z, Ma Y, Lu Y, Cuiuri D, Li H. 2018,** Characterization of wire arc additively manufactured titanium aluminide functionally graded material : microstructure, mechanical properties and oxidation behaviour. *Mater Sci Eng, A*;734: 110–9.
- Watanabe Y, Fukui Y. 1996,** Analysis of thermal residual stress in a thick-walled ring of duralcan-base Al-SiC functionally graded material. *Metall Mater Trans*;27: 4145–51.
- Watanabe Y, Sato H, Miura-fujiwara E., 2015.** Functionally graded metallic biomaterials. In: Niinomi M, Narushima TNM, editors. *Adv. Met. Biomater.* Springer ser. Biomater. Sci. Eng. Springer Berlin Heidelberg.
- Watanabe Y, Sato H. 2011,** Review fabrication of functionally graded materials under a centrifugal force. *Nanocomposites with Unique Prop. Appl. Med. Ind*: 133–50.
- Watremetz B., 2006.** Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères, Thèse de doctorat, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.
- Woo J., Meguid S.A., 2001.** Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.
- Wu C.P. and Chiu K.H., 2011.** RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos. Struct.* 93(5), 1433-1448.
- Xiang S., Jin Y., Bi Z., Jiang S. and Yang M., 2011.** A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos. Struct.*, 93, 2826-2832. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.05.022>.
- Xiang S., Kang G., Yang M. and Zhao Y., 2013.** Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core", *Compos. Struct.*, 96, 226-231.
- Xigeng Miao., Dan Sun., 2010.** Graded/Gradient Porous Biomaterials". *Materials*, 3, 26-47.

- Xiong H., Kawasaki A., Kang Y., 2005.** Watanabe R .Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, Surf & Coat. Technol. 194 203.
- Yang J., Shen H.S., 2001.** Dynamic response of initially stressed functionally graded. Composite Structures, 497-508.
- Yin H.M., Sun L.Z. and Paulino G.H., 2004.** Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions. Acta Materialia, 52, 3535–3543.
- Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E., 2019.** Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. Nonlinear Dyn (2019) 97:853–895. Springer Nature B.V. 2019.
- Zamanian M., Kolahchi R. and Bidgoli M.R., 2017.** Agglomeration effects on the buckling behaviour of embedded concrete columns reinforced with SiO₂ nano-particles. Wind Struct., 24(1), 43-57.
- Zarei M.S., Kolahchi R., Hajmohammad M.H. and Maleki M., 2017.** Seismic response of underwater fluid-conveying concrete pipes reinforced with SiO nanoparticles and fiber reinforced polymer (FRP) layer. Soil Dyn. Earthq. Eng., 103, 76-85.
- Zeng Y. P., Jiang D. L., Watanabe T., 2000.** Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials, Journal of the American Ceramic Society, 2000, vol. 83, no12, p. 2999-3003 (20 ref.)
- Zenkour A.M., 2005.** Analytical solutions for rotating exponentially-graded annular disks with various boundary conditions, International Journal of Structural Stability and Dynamics 5 (04), 557-577.
- Zenkour A. M., 2003.** Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermomechanical loading. Compos. Struct. 65, 367-379.
- Zenkour A. M., 2004a.** Bending of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plates theories. J. Eng. Math. 50, 75-93.
- Zenkour A. M., 2004b.** Thermal effects on the bending reponse of fiberreinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. Acta Mech. 171, 171-187.
- Zenkour A. M., 2005a.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses. Int. J. Solids Struc. 42. 5224-5242.
- Zenkour A. M., 2005b.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 2- buckling and free vibration. Int. J. Solids Struct. 42, 5243-5258.
- Zenkour A. M., 2006.** Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials. Appl. Math. Modelling 30. 67-84.
- Zenkour A. M., 2013a.** A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. Appl Math Model; 37(20–21):9041–51.
- Zenkour A. M., 2013b.** Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. J Sandwich Struct Mater; 15(6):629–656.
- Zenkour A. M., 2015.** Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four unknown shear and normal deformations theory. Compos Struct; 122:260–70.
- Zenkour A.M, Sobhy M., 2013.** Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations. Aerospace Science and Technology, Vol 29, 7-17.
- Zenkour A.M. & Alghamdi N.A., 2010.** Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. Mec. Ad. Mater. Struct., 17, 419-432.
- Zhao X., Lee Y.Y., Liew K.M., 2009.** Analyse mécanique et thermique du flambement des plaques à gradient fonctionnel". Compos. struct., 90 (2), 161-71.