

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT EN 3ème Cycle

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr : **MERAZI Mohamed**

Intitulé de la thèse

**Analyse mécanique des structures composites :
Etude comparative entre les différentes théories des
plaques**

Soutenu le :... /... /2015 Composition du jury :

TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA	Président
ADDA BEDIA El Abbas	Pr	UDL SBA	Directeur de thèse
MEFTAH Sid Ahmed	Pr	UDL SBA	Examineur
BACHIR BOUIADJRA Mohamed	MCA	UDL SBA	Examineur
KACI Abdelkrim	MCA	UMT SAIDA	Examineur
HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	UMS MASCARA	Examineur

Année universitaire 2014-2015

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

Je remercie profondément le professeur Monsieur A.ADDA Bedia qui a su me diriger tout le long de cette thèse avec patience, rigueur, enthousiasme et bonne humeur.

Sa patience et ses approches à la fois scientifiques et pratiques ainsi que ces qualités humaines m'ont énormément appris.

J'exprime également toute mon entière reconnaissance au professeur Monsieur Abdelouahed TOUNSI pour ses qualités humaines et pédagogiques suite à ses conseils qui m'ont permis d'aplanir bien des difficultés, ainsi qu'à l'important soutien scientifique qu'il m'a apporté durant toute cette période de labeur.

Pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, je ne sais comment lui exprimer mon profond respect et toute ma sincère gratitude.

Je voudrais remercier aussi tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès pour l'environnement fraternel et scientifique qu'ils ont toujours su imposer.

Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

A toute ma famille et en particulier ma fiancée, pour son aide, son écoute, et à tous mes collègues du département de Génie Civil, je dirai merci pour les encouragements et le soutien dont ils n'ont cessé de me donner.

Finalement je remercie cordialement tous ceux qui m'ont assisté de près ou de loin dans l'élaboration de cette œuvre par une bonne parole un intime conseil ou une pieuse prière.

Résumé

Dans cette thèse, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique de la plaque basée sur la position de la surface neutre est développée pour l'analyse statique des plaques fonctionnellement graduées (FGPS). La théorie représente la distribution hyperbolique des déformations de cisaillement transversale et qui satisfait aux conditions aux limites au niveau des surfaces de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. La position de la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée dans laquelle ses propriétés matérielles varient dans la direction de l'épaisseur est déterminée. Les propriétés mécaniques de la plaque sont supposées varier de manière continue dans la direction de l'épaisseur par une simple distribution de loi de puissance en termes de fractions de volume des constituants. Basé sur la présente nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique de la plaque et le concept de la surface neutre, les équations qui régissent l'équilibre sont dérivées du principe de déplacements virtuels. Les illustrations numériques concernent le comportement en flexion des plaques FG avec la composition de métal-céramique. Des études paramétriques sont effectuées pour faire varier la fraction volumique de la céramique, les profils de fraction de volume, les rapports d'aspect et les rapports longueur / épaisseur. La précision des solutions actuelles est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec les solutions existantes.

Mots-clés: propriétés mécaniques; Matériau Fonctionnellement gradué; Position de surface neutre; Déformation de cisaillement; Fraction de volume.

Abstract

In this paper, a new hyperbolic shear deformation plate theory based on neutral surface position is developed for the static analysis of functionally graded plates (FGPs). The theory accounts for hyperbolic distribution of the transverse shear strains and satisfies the zero traction boundary conditions on the surfaces of the beam without using shear correction factors. The neutral surface position for a functionally graded plate which its material properties vary in the thickness direction is determined. The mechanical properties of the plate are assumed to vary continuously in the thickness direction by a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. Based on the present new hyperbolic shear deformation plate theory and the neutral surface concept, the governing equations of equilibrium are derived from the principle of virtual displacements. Numerical illustrations concern flexural behavior of FG plates with Metal–Ceramic composition. Parametric studies are performed for varying ceramic volume fraction, volume fraction profiles, aspect ratios and length to thickness ratios. The accuracy of the present solutions is verified by comparing the obtained results with the existing solutions.

Keywords:

Mechanical properties; functionally graded material; neutral surface position; shear deformation; volume fraction.

الملخص

في هذه المذكرة، تم تطوير نظرية جديدة لتشوه القص القطعي على اساس وضعية السطح المحايد، من اجل تحليل ثابت للصفائح المتدرجة وظيفيا.

تمثل النظرية، التوزيع القطعي لتشوهات القص العرضية و التي تفي بشروط حدود على مستوى سطوح العوارض دون استخدام عوامل تصحيح القص. وضعية السطح المحايد للصفحة المتدرجة وظيفيا حيث خصائصها المادية تختلف في اتجاه السمك يتم تحديده. ويفترض أن الخواص الميكانيكية لها تختلف بشكل مستمر في اتجاه السمك مع توزيع بسيط لقانون الطاقة من حيث أجزاء حجم المكونات.

وبناء على هذه النظرية الجديدة المتعلقة بتشوه القص القطعي للصفحة ومفهوم السطح المحايد؛ تم اشتقاق المعادلات التي تحكم التوازن من مبدأ النزوح الظاهري. التوضيحات الرقمية تتعلق بسلوك انحناء الصفائح المتدرجة وظيفيا مع تركيبة المعادن والسيراميك. يتم تنفيذ دراسات معلمية لتغيير الجزء الحجمي للسيراميك، تشكيلات حجم الكسر، نسب المظهر ونسب الطول و السمك.

دقة الحلول الحالية يتم التحقق منها من خلال مقارنة النتائج المتحصل عليها مع الحلول القائمة.

الكلمات المفتاحية :

خصائص ميكانيكية، المواد المتدرجة وظيفيا , وضعية السطح المحايد تشوه القص، الجزء الحجمي

Sommaire

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
المخلص	iv
Sommaire	v
Liste des notations	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Introduction Générale.....	1

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

I.1 Introduction	3
I.2 Les composants du matériau composite.....	3
I.2.1 Les composites grandes diffusions (GD).....	4
I.2.2 Les composites hautes performances (HP).....	4
I.2.3 La matrice.....	4
I.2.3.1 Les résines thermodurcissables (TD).....	5
I.2.3.2 Les résines thermoplastiques (TP)	5
I.2.3.3 Les matrices métalliques	5
I.2.3.4 Les matrices céramiques	6
I.2.4 Le renfort	6
I.2.4.1 Les fibres de verre.....	6
I.2.4.2 Les fibres de carbone.....	7
I.2.4.3 Les fibres métalliques.....	7
I.2.4.4 Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation.....	7
I.2.4.5 Avantages et handicaps des différentes fibres.....	8
I.3 Les matériaux composites structuraux.....	9
I.3.1 Monocouches.....	9

I.3.2 Stratifiées.....	9
I.3.3 Sandwichs.....	9
I.4 Dynamisme et innovation des matériaux composites.....	10
I.5 Conclusion.....	11

CHAPITRE II: Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés FGM

II.1 Introduction.....	12
II.2 Définition du concept d'un matériau à gradient de propriétés (FGM).....	13
II.3 Aperçu sur l'histoire des FGM.....	13
II.4 Modélisation analytique des couches FGM.....	15
II.5 Propriétés matérielles des plaques FGM.....	16
II.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	17
II.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	18
II.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	19
II.6 Conclusion.....	20

CHAPITRE III : Les différentes théories des plaques

III.1 Historique et recherche bibliographique	21
III.2 Théories de déformations des plaques	24
III.2.1 Théorie classique des plaques minces (CPT).....	24
III.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT)	25
III.2.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT)	26
III.2.4 Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D)	27
III.3 Etudes des vibrations des plaques FGM	28
III.4 Synthèse de la recherche bibliographique	33
III.5 Conclusion	34

CHAPITRE IV : Etude analytique des plaques FGM

En se basant sur le concept de la surface neutre

IV.1 Introduction	35
IV.2 Formulations théoriques	36
IV.2.1 Concept physique de la surface neutre	36

IV.2.2 Hypothèses de base	38
IV.2.3 Équations cinématique et constitutive	40
IV.2.4 Equations de mouvement	41
IV.3 Solution analytique	44
IV.4 Conclusion	45

CHAPITRE V : Comparaison et validation des résultats

V.1 Résultats et discussion.....	46
V.2 Conclusion	54
Conclusion Générale.....	55
Références bibliographiques	56

Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
Σ	Sommation
z_{ms}	Position de la surface moyenne
z_{ns}	Position de la surface neutre
V_c	La fraction volumique
h	Hauteur de la plaque
n	Indice de la loi de puissance
C	La distance entre la surface neutre et la surface médiane
P	Indice de fraction volumique
E_1, E_2	Module de Young
P_M	Propriété du métal
P_C	Propriété de la céramique
ρ	Densité massique
ν	Coefficient de poisson
u	Déplacement suivant X
w	Déplacement transversale
u_s, v_s, w_s	Composantes de cisaillement
u_b, v_b, w_b	Composantes de flexion
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Composantes de déformation
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement
σ_x, σ_y	Contrainte normale
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$	Contraintes longitudinales
$\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{xz}$	Contraintes de cisaillement transversales
ε	Contrainte de déformation
Ω	La surface supérieure
q	La charge transversale appliquée

Q_{ij}	Coefficient de rigidité
M	Le moment de flexion
N	L'effort normal
N_x	Effort normal par unité de longueur
M_x	Moment de flexion par unité de longueur
q_0	L'intensité de la charge au centre de la plaque
$f(z)$	Fonction de cisaillement
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, H_{ij}$	Les composantes de rigidité

Liste des Figures

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

Figure I.1: <i>Matériau composite en général</i>	4
Figure I.2: <i>Les différents types de matrices</i>	5
Figure I.3: <i>Principaux matériaux de renfort</i>	6
Figure I.4: <i>Orientation des fibres à 90°.Essai de traction-compression</i>	8
Figure I.5: <i>Matériau composite monocouche</i>	9
Figure I.6: <i>Matériau composite stratifié</i>	9
Figure I.7.a: <i>Matériau composite sandwich</i>	10
Figure I.7.b : <i>Profil σ_{11}, σ_{13} pour une poutre sandwich</i>	10
Figure I.8 : <i>La part des marchés en Europe et les secteurs utilisateurs</i>	11

CHAPITRE II : Généralités sur les matériaux composites

Figure II.1 : <i>Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels</i>	13
Figure II.2 : <i>Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale</i>	15
Figure II.3 : <i>Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM</i>	15
Figure II.4 : <i>Modèles analytiques pour une couche FGM</i>	16
Figure II.5 : <i>Les dimensions de la plaque FGM.</i>	17
Figure II.6 : <i>La variation du module de Young dans une plaque P-FGM</i>	18
Figure II.7 : <i>La variation du module de Young dans une plaque S-FGM</i>	19
Figure II.8 : <i>La variation du module de Young de la plaque E-FGM</i>	20

CHAPITRE IV : Etude analytique des plaques FGM

En se basant sur le concept de la surface neutre

Figure IV.1 : La position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée37

Figure IV.2 : Variation du module de Young dans une plaque de P-FGM..... 37

Figure IV.3 : Géométrie de plaque rectangulaire composée de FGM.....39

CHAPITRE V : Comparaison et validation des résultats

Figure V.1 : La flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w}$ par rapport à l'indice de loi de puissance n pour une plaque FGM carrée simplement appuyées sous une charge sinusoïdale.49

Figure V.2 La flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w}$ par rapport au rapport d'aspect (a / b) d'une plaque FGM50

Figure V.3 : La flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w}$ en fonction du rapport épaisseur latérale (a / h) d'une plaque carrée FGM.....50

Figure V.4 : Variation des contraintes longitudinales $\bar{\sigma}_x$ dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur latérale (a / h) 51

Figure V.5 : Variation des contraintes longitudinales $\bar{\sigma}_y$ dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'aspect (a / b) 51

Figure V.6 : Variation dans le plan des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM Pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur latérale (a / h) 51

Figure V.7 : Variation des contraintes de cisaillement transversales $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'aspect (a / b)52

Figure V.8 : Variation des contraintes de cisaillement transversales $\bar{\tau}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'aspect (a / b)52

Liste des Tableaux

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

Tableau I.1: *Propriétés de quelques éléments de renfort.....7*

Tableau I.2: *Avantages et handicaps des différentes fibres8*

CHAPITRE II : Généralités sur les matériaux composites

Tableau II.1: *Exemple sur des FGM qui se composent de Métal-Céramique12*

CHAPITRE V : Comparaison et validation des résultats

Tableau V.1: *Effets de la fraction volumique exposant sur les déplacements adimensionnel d'un FGM.....47*

Tableau V2: *Effets de la fraction volumique exposant sur les contraintes adimensionnel d'une plaque carrée FGM soumis à une charge sinusoïdale ($a / h = 10$).....48*

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé jusqu'à nos jours que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique.

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels ; Ils apportent de nombreux avantages : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques.

L'inconvénient majeur des matériaux composites est de créer des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches en raison de changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

A la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés en concevant de nouveaux matériaux dits matériaux à gradients de propriétés (en anglais: **F**unctionally **G**raded **M**aterials « FGM »).

L'objectif de ce travail consiste à étudier le comportement statique des plaques en matériaux à gradients de propriétés « FGM ». Etude comparative entre les différentes théories. Pour ce fait, notre thèse s'articule autour de deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects:

- Théorique
- Analytique

Regroupés en cinq chapitres qui se résument comme suit :

L'aspect théorique comprend trois chapitres :

Dans le premier chapitre on a essayé de définir d'une manière générale les matériaux composites ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des matériaux à gradients de propriétés tout en définissant leurs concepts et leurs caractéristiques.

Dans le troisième chapitre, les différentes théories des plaques ont été étudiées et analysées.

L'aspect analytique est scindé en deux chapitres :

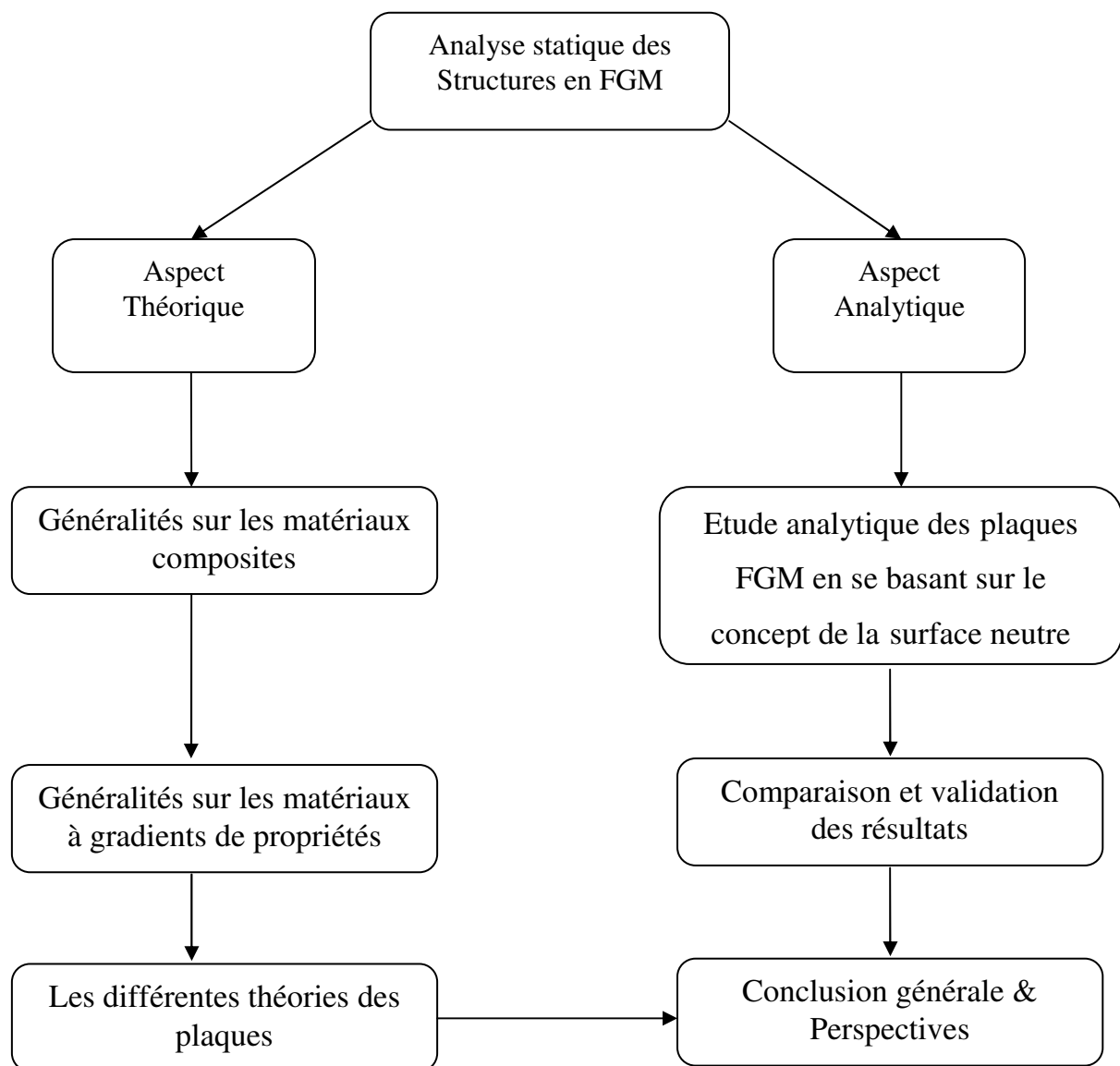
Au quatrième chapitre, une étude analytique des plaques FGM; composées de deux matériaux différents : céramique et aluminium en se basant sur le concept de la surface neutre.

Un programme de calcul a été élaboré à cette fin. Cette étude est basée sur l'établissement des équations d'équilibre des plaques FGM.

Le cinquième chapitre est réservé pour comparer, valider et commenter les résultats numériques élaborés pour les plaques précitées.

En fin, ce travail se termine par une conclusion générale et perspectives.

L'organisation générale de ce présent travail est illustrée par l'organigramme suivant :



CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre 1

Généralités sur les matériaux composites

I.1 INTRODUCTION

Un matériau composite est un matériau solide, constitué par l'association à l'échelle microscopique de plusieurs autres matériaux aux caractéristiques complémentaires [Bogdanovich, 1996].

Un matériau composite est donc un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Les plus répandus et possédant des propriétés mécaniques exceptionnelles sont ceux constitués de deux phases : la matrices et les renforts [Dorlot, 1986].

Les matériaux composites contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

Des processus nouveaux de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques, et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

En effet, les matériaux composites ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement à deux facteurs. Le premier facteur résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième facteur dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal. [Tafla, 2007].

I.2 LES COMPOSANTS DU MATERIAU COMPOSITE

Le matériau composite est constitué d'une protection appelée « matrice » et de l'ossature appelée « renfort » (Figure. I.1). Les renforts fibreux sont disposée de façon judicieuse dans la

matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations [Berthelot, 1996].

Entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée « interface ». Cette zone assure la compatibilité renfort- matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Suivant les caractéristiques de la matrice et des renforts, on distingue généralement deux grandes familles :

I.2.1 Les composites grandes diffusions (GD)

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

I.2.2 Les composites hautes performances (HP)

Principalement utilisés dans l'aéronautique, médical, sports et loisirs, sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD.

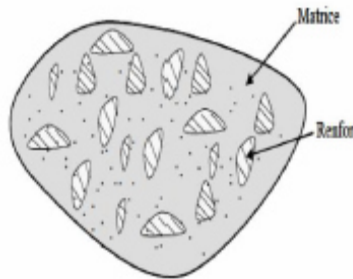


Figure I.1 *Matériau composite en général*

I.2.3 La matrice

Le rôle de la matrice; est de lier les fibres du renfort entre eux, les incorporer et leur donner une adhérence suffisante pour que la transmission des efforts et la répartition des contraintes soient assurées [Gornet, 2008].

Les différentes familles de matrice sont présentées par l'organigramme suivant (Figure. I.2):

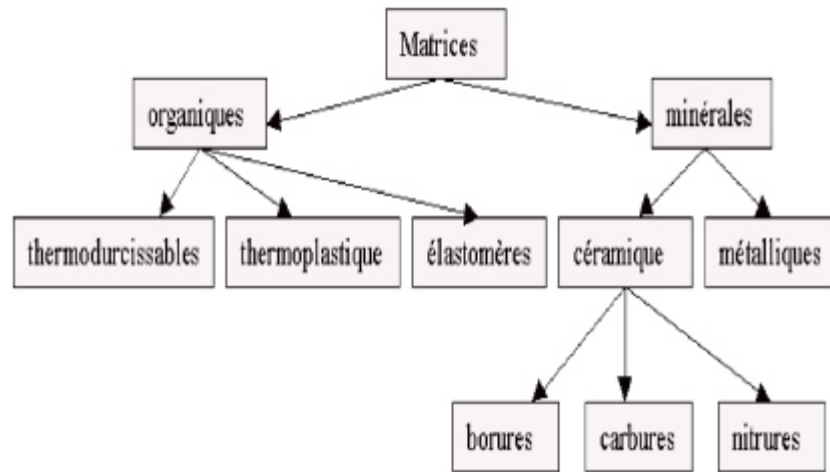


Figure I.2. Les différents types de matrice [Bahlouli, 1993].

Parmi ces familles de résines, on distingue deux types de résines qui sont, actuellement, les plus utilisées:

I.2.3.1 Les résines thermodurcissables (TD)

Qui sont, en général, associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables sont mis en forme par chauffage lors d'une transformation irréversible. Les principales résines thermodurcissables sont les polyester, très largement utilisés, les résines époxydes et les résines phénoliques. Les composites à matrice thermodurcissables représentent environ 70 % des composites transformés en Europe.

I.2.3.2 Les résines thermoplastiques (TP)

Les polymères thermoplastiques durcissent au cours du refroidissement. Le processus de transformation chimique qui les fabrique est réversible. Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont le polypropylène, les polyamides et le polyéther-éther-cétone.

I.2.3.3 Les matrices métalliques

Pour les applications à très hautes températures, on fait appel aux composites à matrice métallique (C.M.M.) jusqu'à 600 °C. Les métaux ou alliages métalliques, utilisées dans la fabrication des (C.M.M.), sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé ainsi, l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utiliser, les (C.M.M.) présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en températures et au chocs thermiques.

I.2.3.4 Les matrices céramiques

Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommages à très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

I.2.4 Le renfort

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par :

- la nature de la fibre, minérale ou organique.
- l'architecture du renfort.

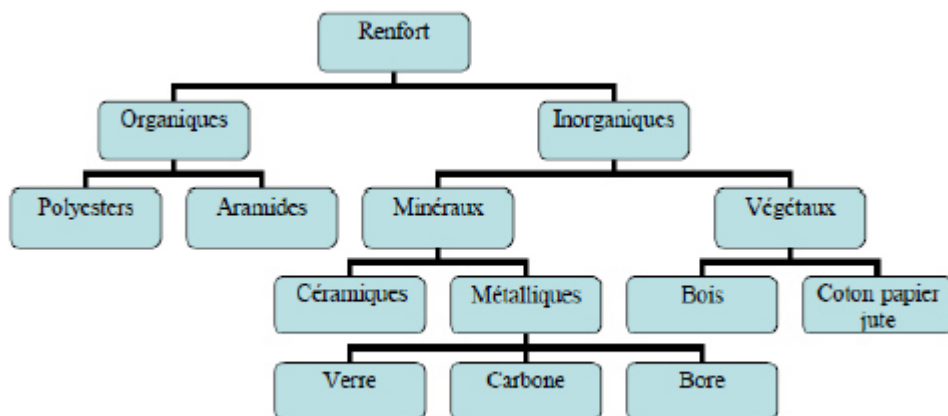


Figure I.3 Principaux matériaux de renfort.

I.2.4.1 Les fibres de verre

Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2 mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés selon la proportion de chaque composant (SiO_2 , Al_2O_3 , B_2O_3 , CaO , MgO), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).

I.2.4.2 Les fibres de carbone

Les fibres de carbone doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Leur prix décroît régulièrement, il est de l'ordre de 10 euros/kg. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple poly acrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 °C à 200 °C), puis pyrolyse (1500-2500 °C). Selon la température et le temps de cuisson, les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM).

Les fibres de polymère les plus connues sont des fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". De prix élevé (20 euros/kg), elles servent essentiellement à fabriquer des câbles.

I.2.4.3 Les fibres métalliques

Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100 °C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15 mm de diamètre.

Le diamètre résultant est de 100 à 200 μ m pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC).

<i>Matériau</i>	<i>Module de Young (GPa)</i>	<i>Résistance en traction (MPa)</i>	<i>Masse volumique (kg/m³)</i>	<i>Température d'utilisation max (°C)</i>	<i>Allongement à rupture (%)</i>
Verre R	80	2500	2500	650	3
Kevlar	130	3600	1450	200	2
Carbone	400	2000	1900	2500	/
Bore	400	3500	2650	700	0,8
Sic	480	2300	3200	900	0,5
Sic	840	21000	3200	1600	2,5

Tableau I.1 propriétés de quelques éléments de renfort.

I.2.4.4 Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression. Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement (Figure. I.4).

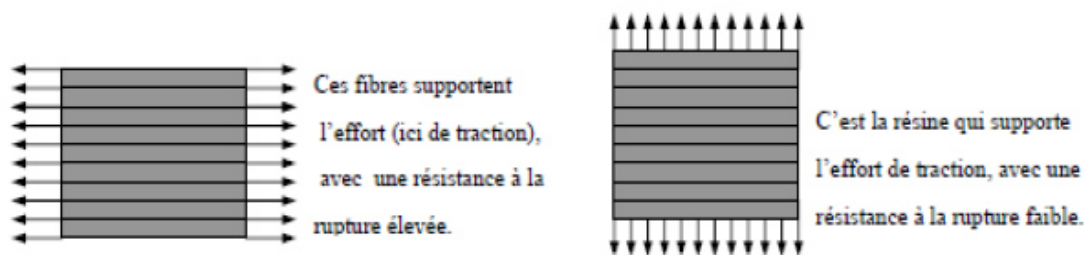


Figure I.4 Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression

I.2.4.5 Avantages et handicaps des différentes fibres

<i>Avantages</i>	<i>Handicaps</i>
<i>Les fibres de verre</i>	
-Bonne résistance spécifique (pour le verre R). -Une bonne adhérence entre fibres et résines. -Tenue a la température élevée. -Dilatation et conductivité thermique faible. -Bon rapport de performances mécanique/prix. -Bonnes propriétés diélectriques.	-Faible module (par rapport au carbone ou aramide). -Vieillissement au contact de l'eau.
<i>Les fibres de carbone</i>	
-Excellentes propriétés mécaniques, -Très bonne tenue en température (non oxydante), -Dilatation thermique nulle, -Bonne conductibilité thermique et électrique, - Bonne tenue à l'humidité, -Usinage aisé, -Faible densité.	-Prix très élevé, -Précautions à prendre dans la mise en œuvre (fibre cassantes) -Tenue limitée aux chocs et à l'abrasion -Difficile avec les résines. -Mauvais comportement chimique avec : - Oxygène : 400°C - Acides oxydants chauds - Métaux à corrosion galvanique
<i>Les fibres aramides</i>	
-bonne résistance spécifique à la traction -Faible densité. (1.45) -Dilatation thermique nulle, -Absorption des vibrations, amortissement - Excellente résistance aux chocs et à la fatigue -Bon comportement chimiques vis à vis des carburants.	-Prix élevé, -Faible tenue en Pression -Reprise d'humidité importante (4%) étuvage avant imprégnation -Faible adhérence avec les résines d'imprégnation - Usinage difficile -Tenue au feu, (décomposition à 400°C)

I.3 LES MATERIAUX COMPOSITES STRUCTURAUX

I.3.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (Figure. I.5). Taux de déséquilibre très grand.

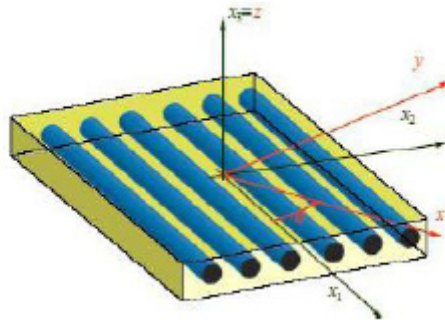


Figure I.5 *Matériau composite monocouche.*

I.3.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches (Figure. I.6) ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

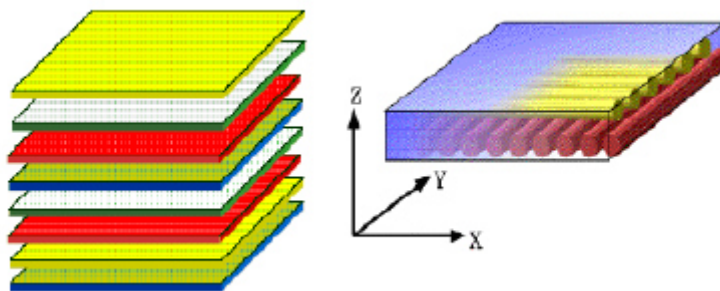


Figure I.6 *Matériau composite stratifié.*

I.3.3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppent une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance (Figure. I.7).

L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion c'est un excellent isolant thermique.

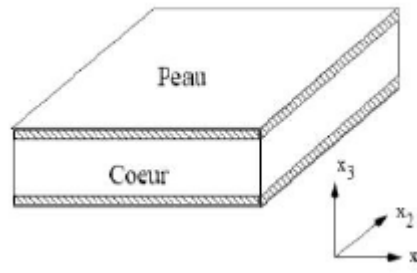


Figure I.7.a *Matériau composite sandwich.*

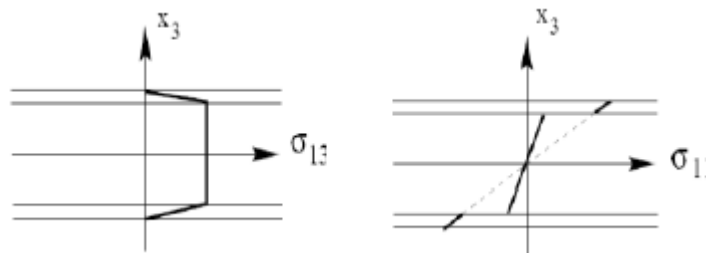


Figure I.7.b *Profil σ_{11} , σ_{13} pour une poutre sandwich.*

I.4 DYNAMISME ET INNOVATION DES MATERIAUX COMPOSITES

La production de matériaux composites se développe rapidement, en France comme partout dans le monde : environ + 6 % par an, en quantité. Ces matériaux associent matière plastique et renfort en fibres, généralement de verre ou de carbone. Bien que leur coût soit plus élevé que celui des matériaux traditionnels, ils apportent à leurs utilisateurs des avantages importants grâce à leurs propriétés, notamment de légèreté ou de résistance. Ces avantages leur ont ouvert des marchés importants dans la construction automobile, l'aéronautique, ou encore le bâtiment. Composé de petites entreprises dynamiques, ce secteur s'adapte, par l'innovation et le partenariat. Les voies du développement durable passent désormais par la maîtrise de l'ensemble du cycle du produit, de la conception au recyclage, et par une meilleure caractérisation des produits et de leurs performances. Le marché mondial des composites croît, en quantité, de 5,7 % par an depuis 1994. En 2000, sept millions de tonnes ont été produites, dont plus de 95 % sont des composites de grande diffusion. La croissance est plus favorable pour les composites thermoplastiques que pour les composites thermodurcissables respectivement 9 % et 3 % par an. Les composites thermoplastiques sont apparus au début des années quatre-vingt. Plus récents, ils sont aussi plus prometteurs. Cependant, les composites thermodurcissables représentent encore plus des deux tiers du marché. Le marché nord-américain, de loin le plus important, représente 47 % de la transformation mondiale de composites (3,4 Mt). Il est suivi par l'Europe (28 %, soit 2 Mt) et l'Asie (23 %, soit 1,6 Mt). La croissance du

marché est plus forte en Asie et en Europe qu'aux Etats-Unis (respectivement 7 % et 4,5 % par an). Le marché sud-américain est très dynamique, avec une augmentation annuelle de plus de 8 %. Il est néanmoins réduit (2 % de la consommation mondiale).

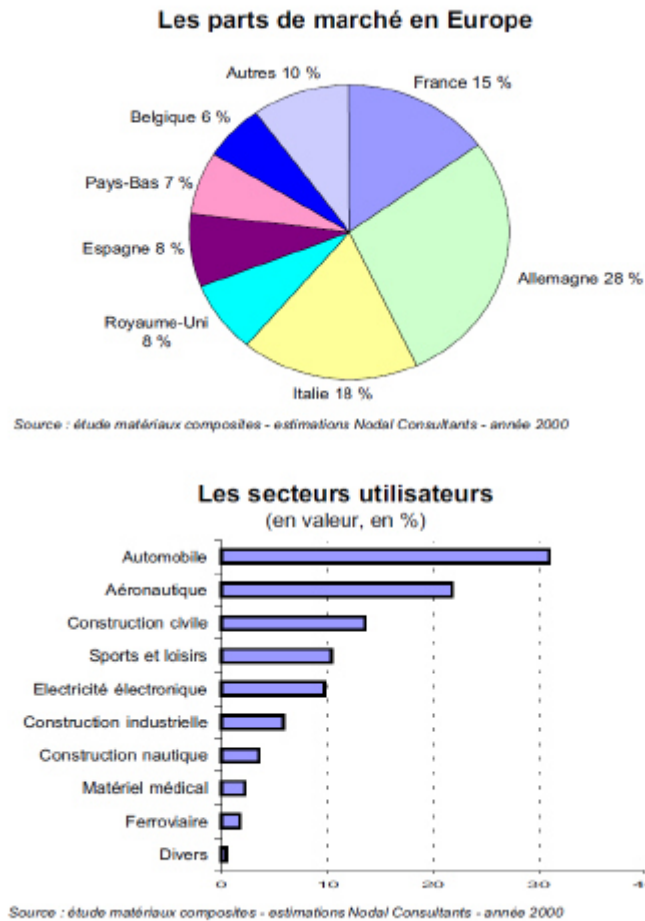


Figure I.8 La part des marchés en Europe et les secteurs utilisateurs.

I.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau composite. Dans un premier temps, nous avons présenté les différents constituants des matériaux composites, ainsi que les différents types de ces matériaux. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés « FGM » tout en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

CHAPITRE II

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés FGM

Chapitre 2

Généralités sur les matériaux à gradient De propriété FGM

II.1 INTRODUCTION

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques des différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque des propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une forte concentration de contraintes qui conduit à la déformation plastique ou de fissuration, c'est le cas des composites conventionnels (*non-FGM*), donc la solution d'une transition continue des propriétés recherchés par un gradient de composition permet de diminuer ces effets nuisibles, avec l'utilisation d'un matériau à gradient de propriété (en anglais: **F**unctionally **G**raded **M**aterials « *FGM* ») (tableau II.1).

Face à haute température	<i>Céramique</i>	- Bonne résistance thermique. - Haute Résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermique.
Couche intermédiaire	<i>FGM</i>	- Elimination des problèmes d'interfaces
Face à basse température	<i>Métal</i>	- Bon résistance mécanique. - Tenacité élevée. - Conductivité thermique élevée.

Tableau II.1 Exemple sur des FGM qui se composent de Métal - Céramique [Nguyen, 2008]

II.2 DEFINITION DU CONCEPT D'UN MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETES (FGM)

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux dans un profil prédéterminé. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non – uniformes avec des macros propriétés graduées dans l'espace (Figure II.1).

Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. Il est conçu pour améliorer et optimiser les caractéristiques thermo-électro- mécaniques des structures à l'échelle micro et nano. [Nguyen, 2008]

Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Nguyen, 2008]. Dans certains cas, on peut voir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente. [Boch, 1986]

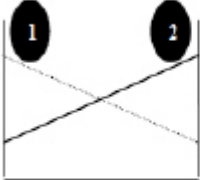
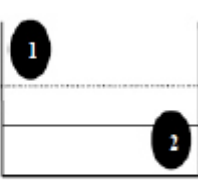
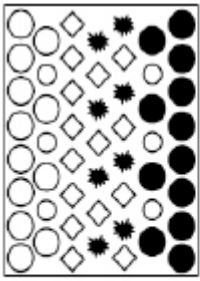
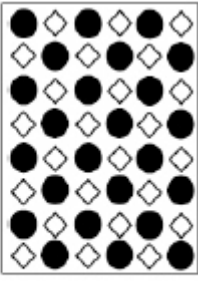
Propriétés	1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique		
Structure	Eléments constitutants: céramique ○ métal ● microporosité ○ fibre ◇		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure II.1 Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi, 1997]

II.3 APERÇU SUR L'HISTORIQUE DES FGM

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt (1980) dans le laboratoire national d'aérospatial au japon, qui fût suivi par d'autre pays : Allemagne, Etats Unis, Suisse, Chine et la Russie.

Chapitre II : Généralité sur les matériaux à gradient de propriété FGM

En 1984 M.Niino et ses collègues à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept FGM. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Hirai, 1999], [Chan, 2001], [Uemura, 2003].

La véritable lancée de ce matériau a commencé en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année- là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci était de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
2. Tenacité du matériau côté basse température;
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Abdizadeh, 1997].

En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surface maximales de 2000 K (1727 °C) et à un gradient de températures de 1000 K (727 °C). Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure II.2 [Yin 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

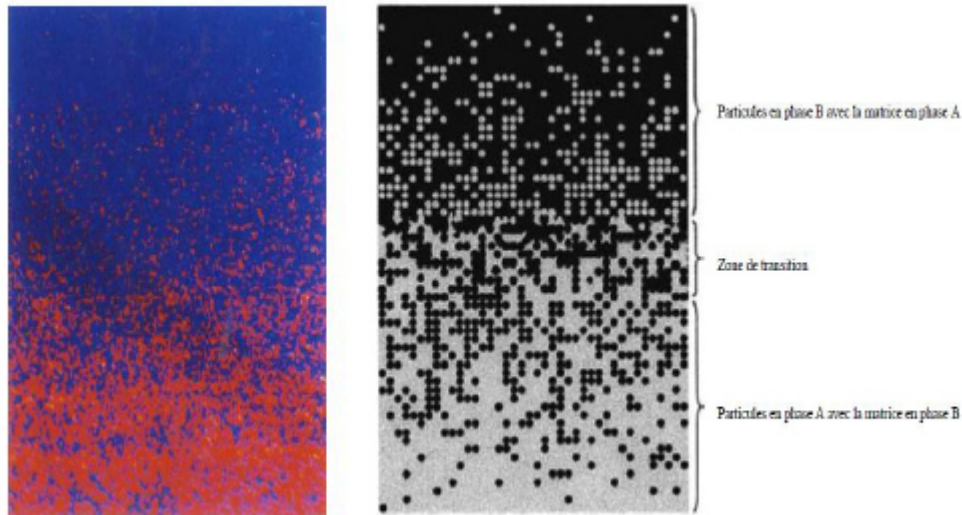


Figure II.2 *Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [Yin 2004].*

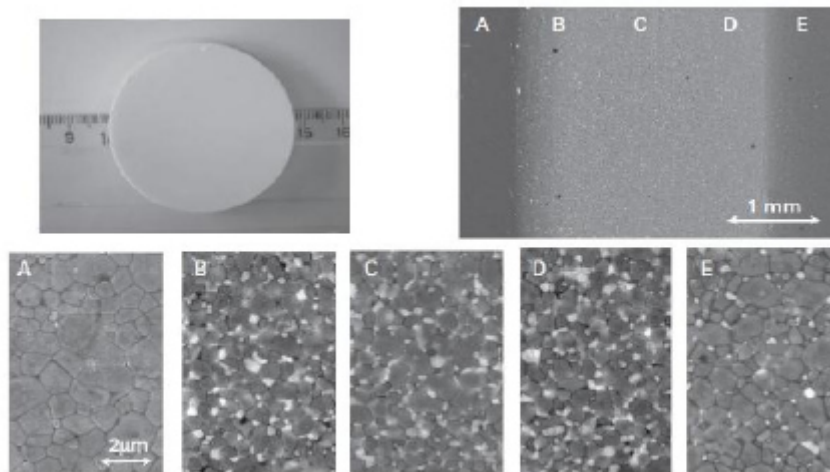


Figure II.3 *Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [Année 2006].*

II.4 MODELISATION ANALYTIQUE DES COUCHES FGM

Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des couches FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, Nous avons deux approches possibles pour modéliser une couche FGM.

- Pour la première approche, une variation par tranche de la fraction volumique des deux matériaux extrêmes est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes (figure II.4.a).

- Pour la deuxième approche, une variation continue de la fraction volumique des deux matériaux extrêmes est assumée, et la fraction de volume peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) (figure II.4.b):

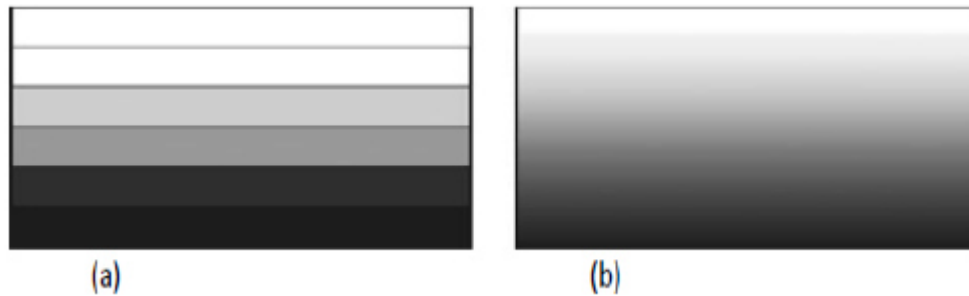


Figure II.4 Modèles analytiques pour une couche FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance, exponentielle et sigmoïde.

Jin et Batra [1996] ont montré que l'effet du coefficient de poisson « $\nu(z)$ » sur la déformation est moins que celui de module de Young « $E(z)$ ». Par conséquent, le coefficient de poisson de la plaque FGM est supposé constant « $\nu(z) = \nu$ ». Cependant, le module de Young de la plaque FGM varie dans la direction de l'épaisseur et suivant une fonction puissance, exponentielle, ou une fonction sigmoïde. [Batra, 1996]

II.5 PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM

Considérant une plaque élastique rectangulaire. Les coordonnées « x » et « y » définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe « z » lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans le sens de l'épaisseur (Figure II.5).

Les propriétés matérielles, module de Young, densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents, mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur.

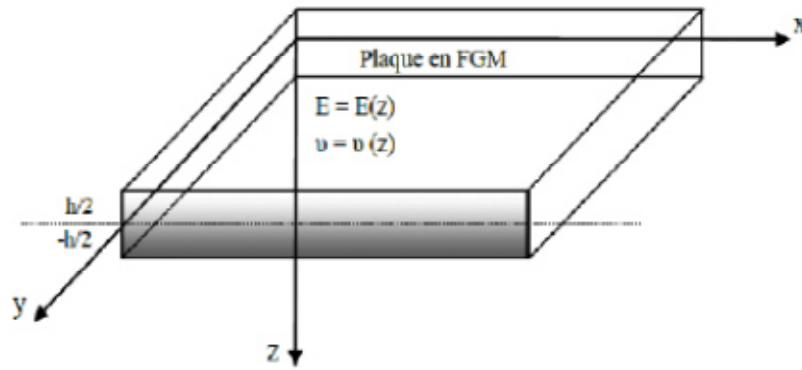


Figure II.5 Les dimensions de la plaque FGM.

II.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme:

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (II-1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges.

$$S(z) = g(z).S_1 + [1 - g(z)]S_2 \quad (II-2)$$

Où S_1 et S_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z=h/2$) et de la surface supérieure ($z=-h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.6, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p>1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p<1$.

Lorsque « $p = 1$ », la variation du module de Young devient linéaire.

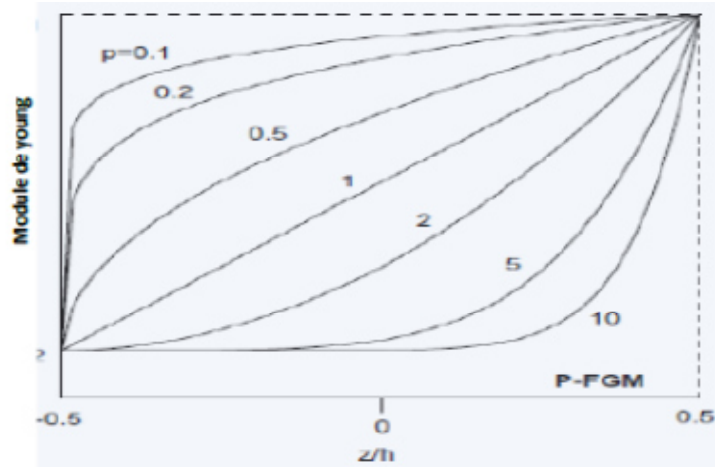


Figure II.6 La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la figure II.6, le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites (modèle de Voigt). Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemple, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité ρ et le coefficient de poisson ν peuvent alors être exprimés comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \quad (II.3)$$

Là où S_j et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (Figure.II.4.a), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \quad (II.4)$$

II.5.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une plaque FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi [2006] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Chapitre II : Généralité sur les matériaux à gradient de propriété FGM

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour} \quad 0 \leq z \leq +h/2 \quad (\text{II-3a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II-3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la plaque S-FGM peut être calculée par:

$$E(z) = g_1(z) \cdot E_1 + [1 - g_1(z)] E_2 \quad \text{Pour} \quad 0 \leq z \leq +h/2 \quad (\text{II-4a})$$

$$E(z) = g_2(z) \cdot E_1 + [1 - g_2(z)] E_2 \quad \text{Pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II-4b})$$

La figure II.7 démontre la variation du module de Young selon les équations (II.4.a) et (II.4.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

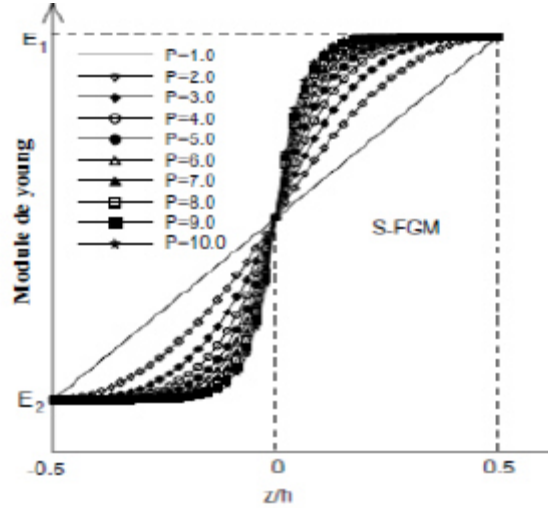


Figure II.7 La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.

II.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale, 1983] :

$$E(z) = A e^{\beta(z+h/2)} \quad (\text{II.6.a})$$

Avec $A = E_2$ et $\beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2}$ (II.6.b)

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.8.

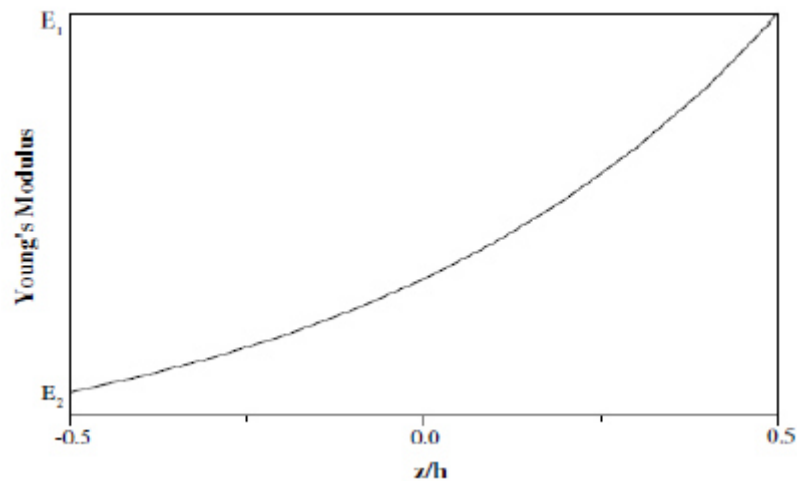


Figure II.8 *La variation du module de Young de la plaque E-FGM*

II.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM aux premiers pas de la naissance. Ensuite différentes méthodes ont été développées pour modéliser une couche FGM. A la fin nous avons conclu par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la plaque. Le chapitre suivant va porter sur la conception des plaques FGM tout en définissant les différentes théories des plaques.

CHAPITRE III

Les différentes théories des plaques

Chapitre 3

Les différentes théories des plaques

III.1 HISTORIQUE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto, Kaysser et al. 1999, Suresh et Mortenserr1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner, Murch et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Aux environs de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM,

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour être à même de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs énormes. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs.

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement vibratoire est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude des vibrations libres des poutres et des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques initiales (augmentation uniforme ou gradient de température à travers l'épaisseur). L'analyse des vibrations des structures a vu le jour lorsque Galilée (1564-1642) a résolu, par des moyens géométriques, la dépendance de la fréquence propre d'un pendule simple à la longueur du pendule. Il mit en place un procédé expérimental permettant l'observation du comportement vibratoire des cordes et des plaques mais n'a jamais pu établir le moindre traitement analytique. Il fût suivi par d'autres chercheurs tels que Mersenne (1588- 1648), Sauveur (1635-1716), Hooke (1635-1703), Newton (1642-1727), Taylor (1685-1731), Bernoulli (1700-1752), Euler (1707-1783), d'Alembert (1717-1783), Fourier (1768-1830) et bien d'autres, qui ont tous apporté des contributions de plus ou moins grande importance dans le domaine de l'analyse des vibrations. Aujourd'hui, il est impensable de procéder à l'étude d'une structure sans étudier son comportement vibratoire.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations des poutres et des plaques en FGM. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermomécanique du flambage. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette discipline. [Suresh et Mortensen 1998] ont publié une recherche bibliographique détaillée sur la technologie des matériaux à gradient fonctionnel en 1998. [Birman et Byrd 2007] ont également publié une recherche exhaustive sur les travaux dédiés au développement des FGM couvrant la période 1997-2007. Ce chapitre sera consacré aux recherches réalisées durant ces deux dernières décennies.

III.2 THEORIES DE DEFORMATIONS DES PLAQUES

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

III.2.1 Théorie classique des plaques minces (CPT)

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love (1888) sont les suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement h/a ou $h/b < 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. l'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élancement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements.

III.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT)

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (Rayleigh 1945). En 1877, Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de (Timoshenko 1921, 1922) montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonance calculées, en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement transverse est proposée par (Reissner en 1945) dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par (Uflyand en 1948). C'est cependant l'article de (Mindlin 1951), publié trois ans plus tard qui fera date. Vers 1970, (Whitney 1969), (Whitney et Sun 1973), (Pagano 1970) et (Srinivas et Rao 1970) ont montré, grâce à leurs travaux respectifs, que les effets du cisaillement sont plus importants pour les plaques stratifiées que pour les plaques isotropes.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature, trois approches d'approximation pour les plaques épaisses sont répertoriées (Mindlin 1951), (Reissner 1980), (Narasimhamurthy 1957), (Schmidt 1977), (Levinson 1980), (Ambartsumyan 1970). L'approche de Reissner suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin suppose un champ de déplacement alors que l'approche d'Ambartsumyan

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

III.2.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT)

Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par (Reddy 1984), (Reddy et Phan 1985), (Reddy 1999,2000), (Iyengar, Chaudrashekhara et al. 1974)], (Iyengar et Pandya 1982), (Kuznetsov et Kartashov 1981), (Vlasov 1957), (Krishna Murty 1977,1986,1987), (Krishna Murty et Vellaichamy 1987)]. Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur (selon Reddy 1990, Mallikarjuna et Kant 1993). Les hypothèses qui sont à la base du développement de ces théories sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable,
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

La plupart des théories d'ordre supérieur (HSDPT) sont basées sur les approches de Reissner, de Henchy-Mindlin et d'Ambartsumyan. Parmi ces théories, nous pouvons citer celles de: (Levinson 1980), (Reddy 1984), (Iyengar, Chaudrashekhara et al. 1974), (Iyengar et Pandya 1982)], (Kuznetsov et Kartashov 1981), (Vlasov 1957), (Krishna Murty 1977, 1986,1987), (Krishna Murty et Vellaichamy 1987), (Bhimaraddi et Stevens 1984), (Kant et Pandya 1988), (Librescu 1967), (Ren 1986), (Touratier 1988).

Les théories de (Whitney et Sun 1973), (Reddy 1984), (Kant 1982), (Karama, Afaq et al. 2003), (Karama, Harb et al. 1998), (Lo, Christensen et al. 1977), (Lo, Christensen et al. 1977), (Nelson et Lorch 1974), (Pagano et Soni 1983), (Prokopov 1965), (Sun et Whitney 1973) sont applicables aux FGM multicouches et aux plaques FGM métal-céramique monocouche. Elles

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

supposent que les déplacements sont continus à travers l'épaisseur. Dans le cas de la plaque FGM multicouche ceci implique une évaluation de la masse et de la rigidité effective de toute la plaque en termes de masse et de rigidité de chaque couche. Cette approche conduit à une évaluation incorrecte des contraintes bien que celle des fréquences soit bonne. Ceci est dû à la supposition d'un déplacement continu alors qu'en réalité le gradient des déplacements ou le cisaillement transverse et les contraintes normales peuvent être discontinus entre couches de la plaque FGM. Certains chercheurs ont contourné ces problèmes en supposant une approximation du déplacement pour chaque couche séparément tout en assurant une continuité des déplacements à l'interface des couches (théorie zigzag, Reddy 2004).

De nouvelles formulations et théories d'ordre supérieur ont vu le jour ces dernières années. Suite à des travaux remarquables de Carrera ce dernier a proposé une formulation compacte et unifiée des théories (Carrera et Petrolo 2010), (D'Ottavio et Carrera 2010). Cependant, les théories du premier ordre (FSDPT) et d'ordre supérieur (HSDPT) ne sont pas pratiques vu le nombre de termes d'ordre supérieur introduits dans la formulation. De nouvelles théories d'ordre supérieur ont aussi été proposées récemment par (Aydogdu 2009) et (El Meiche, Tounsi et al. 2011). Dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations existantes, (Shimpi 2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode sont qu'elle ne nécessite pas de coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La théorie RPT a été ensuite adaptée avec succès aux plaques orthotropes par (Shimpi et Patel 2006) et par (Kim, Thai et al. 2009) et à la flexion des plaques FGM par Atmane, (Tounsi et al. 2010). La fiabilité de cette méthode a été démontrée par (Kim, Thai et al. 2009) pour le cas de la flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment (Thai et Kim 2010, 2011), et (Hadji, Atmane et al. 2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

III.2.4 Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D)

L'avantage des solutions basées sur l'élasticité tridimensionnelle est que celle-ci ne nécessite aucune hypothèse restrictive. L'un des précurseurs dans ce domaine est (Pagano)

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

qui, en 1969, a analysé la flexion cylindrique des composites stratifiés et en 1970 la flexion des plaques rectangulaires sandwiches (Pagano 1970). En raison de la complexité relative à la formulation 3-D, peu d'articles l'utilisant ont été publiés dans le domaine des vibrations libres. Les chercheurs (Srinivas et Rao 1970), (Srinivas, Rao et al. 1969), (Srinivas, Rao et al. 1970) ont été les premiers à développer des solutions pour la flexion, la vibration et le flambage des plaques stratifiées en appuis simples. Grâce aux travaux des précédents auteurs, (Wittrick 1987) a présenté une solution analytique 3-D d'une plaque rectangulaire en appuis simples pour des problèmes de valeurs propres, de flambage et de vibration libre ainsi que pour des flexions statiques sous l'effet de charges latérales sinusoïdales. Récemment, Vel et (Batra 2004) ont présenté une solution 3-D exacte des vibrations libres et forcées de plaques rectangulaires FGM en appuis simples. D'autres solutions tridimensionnelles ont été proposées pour étudier les vibrations libres des plaques isotropes, composites stratifiées et FGM pour différentes conditions aux limites : (Cheung et Chakrabarti 1972), (Liew, Hung et al. 1993, 1994, 1995), (Liew et Yang 1999), (Liew et Teo 1999), (Liew, Teo et al. 1999), (Cheung et Zhou 1999), (Zhou, Cheung et al. 2002), (Zhou, Cheung et al. 2004), (Li, Iu et al. 2008, 2009), (Uymaz et Aydogdu 2007).

III.3 ETUDE DES VIBRATIONS DES PLAQUES FGM

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques. En 1998, (Praveen et Reddy 1998) ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. En 2000, (Reddy 2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

(Yang et Shen 2001) ont présenté en 2001, l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'index de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élancement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

FGM. Les solutions ont été obtenues grâce à l'utilisation conjointe de la méthode DQ et de la méthode de Galerkin. Seule la dépendance des propriétés du matériau à la température a été prise en compte.

En se basant sur la méthode des éléments finis, (He, Ng et al. 2001) ont analysé, en 2001, le contrôle actif de la réponse dynamique de plaques minces en FGM, auxquelles sont collés des actionneurs piézoélectriques et des capteurs. Le problème a été résolu en utilisant la théorie classique des plaques (CPT) et un modèle d'éléments finis, pour finalement analyser l'effet de la fraction volumique sur les réponses statiques et dynamiques pour différentes conditions aux limites. Le modèle du contrôle actif s'est avéré efficace car la réponse dynamique a montré que les amplitudes des vibrations ont été grandement atténuées pour des valeurs de gains appropriées. Une méthode similaire a été proposée par (Liew, He et al. 2001) en 2001 en se servant de la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) et en prenant en compte une variation de température. Toutes ces études ont été faites en considérant une température constante ($T = 300^{\circ}\text{K}$) exceptée celle de (Liew, He et al.)

C'est en 2002 qu'il y a eu prise en compte de l'effet de la température par (Yang et Shen 2002) qui étudièrent les caractéristiques vibratoires de la réponse transitoire d'une plaque FGM pour laquelle les propriétés thermomécaniques dépendent de la température. Le problème a été résolu par une méthode hybride DQM-Galerkin couplée à la procédure de superposition. Il faut souligner que ces auteurs n'ont pas considéré le cas d'une conduction thermique à travers l'épaisseur, par contre les propriétés thermomécaniques dépendent à la fois de la position et de la température. La raison évoquée était que le problème serait devenu bien plus complexe.

(Reddy et Chen 2003) ont étudié, en 2003, les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matriciel. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

En 2004, (Huang et Shen 2004) ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée en 2004 par (Vel et Batra 2004) pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (W_a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. (Qian, Batra et al. 2004) ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux réalisés en 2003 (Qian, Batra et al. 2003) relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur combinée à la méthode de Pétrov-Galerkin (Liew, Zhao et al. 2011).

En utilisant la méthode de (Ritz 1908) avec fonction poutre et en se servant de la théorie des plaques d'ordre supérieur de Reddy, (Kim 2005) a montré, en 2005, l'influence de la composition (concentrations des constituants), de la géométrie et de l'élévation de température sur les caractéristiques vibratoires d'une plaque FGM métal-céramique encastree dont les propriétés dépendent de la température. Cette dernière est supposée varier uniquement à travers l'épaisseur.

En 2006, les travaux de (Ferreira, Batra et al. 2006) ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. Ils ont utilisé la méthode globale de collocation associée à la théorie d'ordre supérieur de (Reddy 1984, 1990) et la technique de Mori-Tanaka (Benveniste 1987), (Mori et Tanaka 1973) pour approximer les solutions par la MRBF (multiquadratic radial basis functions). Selon ces auteurs, la méthode numérique utilisée est avantageuse par rapport à celle des éléments finis par le fait qu'elle ne nécessite ni la discrétisation du domaine en éléments bidimensionnelles ou tridimensionnelles ni la connexion entre les éléments discrétisés. Cette technique est appelée méthode sans maillage (meshless-method, Liu 2003). La méthodologie a permis d'avoir des fréquences très proches de celles calculées par (Vel et Batra 2004) obtenues par la méthode tridimensionnelle exacte.

C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. (Uymaz et Aydogdu 2007) ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'index de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Les déplacements ont été approximatés par des polynômes orthogonaux de Chebyshev. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

Les FGM sandwichs peuvent diminuer très sensiblement les concentrations de contraintes au niveau des interfaces grâce à la variation gradée des propriétés entre l'âme et le revêtement. C'est en 2005 que (Zenkour 2005) analysa le flambage et les vibrations libres des plaques FGM sandwichs. En utilisant la théorie des déformations sinusoïdales d'ordre supérieur, il a étudié l'influence du cisaillement transverse, de l'épaisseur de l'âme (relativement à l'épaisseur de la plaque) sur la charge critique de flambage et sur les fréquences propres. Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par (Li, Lu et al. 2008). La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM. Les déplacements ont été approximés par les polynômes orthogonaux de Chebyshev. L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'index des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse. Poursuivant leurs efforts, (Li, Lu et al. 2009) ont analysé, en 2009, les vibrations libres d'une plaque FGM céramique-métal en appuis simples puis encastree en incluant trois cas d'environnements thermiques : élévations uniforme, linéaire et non linéaire de la température. La théorie est basée sur l'élasticité tridimensionnelle.

(Matsunaga 2008) a analysé, en 2008, les vibrations libres et le flambage d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. Plusieurs théories d'approximation par troncature ont été appliquées pour résoudre le problème de la plaque FGM en appuis simples. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaques FGM. En 2009 (Zhao, Lee et al 2009) ont analysé les vibrations libres d'une plaque FGM en utilisant la méthode *kp*-Ritz (element-free kernel particle-Ritz method). Pour tenir compte du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, les auteurs ont utilisé la théorie de déformation des plaques du premier ordre. Les résultats trouvés ont montré que l'index de la fraction volumique compris entre 0 et 5 a une influence significative sur les fréquences et que les effets de la géométrie sur les fréquences sont indépendants de la fraction volumique. Les

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

auteurs ont aussi conclu que les différentes valeurs du coefficient de correction du cisaillement n'ont pas de véritables effets sur les fréquences naturelles lorsque le rapport d'élancement est très largement supérieur à 10.

En utilisant les polynômes orthogonaux Chebyshev et la méthode de Ritz, (Amini, Soleimani et al 2009) ont effectué en 2009 l'analyse des vibrations libres de plaques FGM reposant sur un support élastique et dont la formulation est basée sur la théorie de l'élasticité 3-D. grâce à une méthode semi-analytique hybride basée sur la DQM (Differential Quadratic Method) et en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, (Mlekzadeh 2009) a analysé durant la même année les vibrations d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions obtenues ont permis de montrer l'influence de la géométrie, des paramètres du support élastique et des conditions aux limites sur paramètres de fréquence. Le principal résultat concerne la méthode numérique utilisée. En effet, l'application de la DQM dans la direction de l'épaisseur permet de prendre en compte une distribution arbitraire des propriétés à travers l'épaisseur et d'implémenter les effets du support élastique en tant que conditions aux limites sur la surface inférieure, efficacement et d'une manière exacte. Par la suite (Lü, Lim et al 2009) ont présenté des solutions exactes d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique, obtenues par la méthode SSA (State Space Approach). En 2010 (Atman Tounsi et al 2010) ont étudié par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre supérieur, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

En 2011, (Huang, McGee III et al 2011) se sont penchés sur le comportement vibratoire libre d'une plaque FGM épaisse fissurée au bord. L'étude emploie la théorie (Reddy 1984,1999) et une nouvelle procédure de Ritz à base de fonctions admissibles spéciales, appelées « fonctions criques ». Celles-ci permettent de correctement tenir compte du comportement de la singularité des contraintes à l'extrémité de la crique en prenant en considération la discontinuité des déplacements et de leurs pentes à travers la crique. Les résultats ont permis de montrer qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, les paramètres de fréquence de la plaque FGM métal-céramique (Al/Al₂O₃) diminuent mais que ceux de la plaque (Al/ZrO₂) augmentent. L'utilisation de la loi de mélange de (Mori et Tanaka 1973) conduit à des paramètres de fréquence plus petits que ceux obtenus par la loi de mélange en puissance (P-FGM). Lorsque la longueur de la crique augmente, les paramètres de fréquence diminuent. Cette diminution n'est pas significative lorsque la crique est petite ($d/a < 0.1$). Selon ces auteurs, l'ensemble proposé des fonctions criques de Ritz peut être adapté aux cas de formulations basées sur la théorie de l'élasticité 3-D de corps FGM épais et fissurés.

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

Ces fonctions peuvent également être directement utilisées pour d'autres formes de plaques (circulaire, elliptique, polygonale, trapézoïdale) et dans d'autres méthodes numériques (Galerkin et méthode spectrale).

Durant la même année, (Hasani Baferani, Saidi et al. 2011) ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Les équations obtenues par le principe de Hamilton ont été découplées et résolues analytiquement par la méthode de (Levy 1899). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration.

III.4 SYNTHÈSE DE LA RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau, que depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire. Il est important de souligner que dans ce chapitre, la branche expérimentale et celle des méthodes et processus de fabrication n'ont pas été abordées et que là aussi l'intérêt est grandissant. De cette synthèse bibliographique, il ressort que :

1. La poutre FGM a été un élément structural négligé et donc peu étudié.
2. La plaque a bénéficié d'un grand intérêt. Elle a été largement étudiée.
3. Plusieurs théories des plaques ont été développées pour modéliser leur comportement mécanique et ramener le problème structural, initialement à trois dimensions, à un problème à deux dimensions de moindre difficulté. Ces théories considèrent le plan neutre (plan ne subissant aucune déformation) comme étant le plan moyen de l'élément structural considéré, ce qui n'est vrai que si ce plan moyen est un plan de symétrie élastique.

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

4. Les matériaux à gradient fonctionnel ont été conçus à la base pour servir de barrière thermique d'où l'importance d'étudier les éléments structuraux en FGM dans des environnements thermiques sévères et de prendre en considération les changements conséquents sur leurs propriétés thermoélastiques, ce que beaucoup de travaux publiés ont omis de faire.
5. Plusieurs méthodes d'approximation ont été utilisées dans la résolution des problèmes statiques et dynamiques des poutres et des plaques FGM dont la méthode de Ritz et la DQM (Differential Quadrature Method). Concernant la méthode de Ritz certaines classes de fonctions admissibles n'ont jamais été appliquées telles que les fonctions trigonométriques hiérarchiques, les polynômes orthogonaux de Legendre et les polynômes orthogonaux généraux générés par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Quant à la DQM, elle n'a pas été utilisée dans la résolution des équations des structures FGM non symétriques soumises à un gradient de température lorsque des théories d'ordre supérieur sont utilisées dans la formulation.
6. Le développement de méthodes analytiques étant très important pour la validation des méthodes d'approximation, quelques méthodes analytiques de résolution du problème des vibrations libres de structures FGM ont été publiées. Ces méthodes s'appliquent à des cas de structures simples et n'ont jusqu'ici jamais pris en charge l'environnement thermique.

III.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des plaques, telles que la théorie classique (CPT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDPT) et les théories d'ordre élevé HSDPT, Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D).

CHAPITRE IV

Etude analytique des plaques FGM en se
basant sur le concept de la surface neutre

Chapitre 4

Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

IV.1 INTRODUCTION

Les matériaux à gradient de propriétés (FGMs) sont une classe de matériaux composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre qui permet d'éliminer la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés. Un FGM typique est fabriqué à partir d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple, une céramique et un métal. La raison de l'utilisation croissante de FGMs dans une variété : aérospatiale, automobile, génie civil, et des structures de génie mécanique, résulte de leurs propriétés matérielles qui peuvent être adaptées à différentes applications et environnements de travail (Reddy, 2000; El Meiche et al, 2011; Talha et Singh, 2011; Jha et al, 2011; Ebrahimi, 2013; Houari et al 2013; Attia et al, 2014; Bachir Bouiadjra et al, 2013; Tounsi et al, 2013a; Saidi et al, 2013; Bessaim et al, 2013; Chakraverty et Pradhan, 2014; Hebali et al, 2014; Khalfiet al, 2014; Belabed et al, 2014; Swaminathan et Naveenkumar, 2014; Zidi et al, 2014; Hamidi et al, 2015). Maintenant, les FGMs sont élaborés pour une utilisation générale en tant que composants structuraux dans des environnements à très haute température. Plusieurs études ont été réalisées pour analyser la mécanique ou la thermique ou la réponse thermomécanique de plaques FG et coques. Reddy (2000) a analysé le comportement statique des plaques rectangulaires Fonctionnellement graduées basé sur sa théorie de la plaque de déformation de cisaillement de troisième ordre. Jha et al (2011) a présenté l'analyse statique et la réponse des contraintes des plaques de FG sur la base de cisaillement à ordre élevé et de la théorie de la déformation normale. Taj et al. (2013) ont mené une analyse statique de plaques FG utilisant la théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé. Des contraintes de cisaillement transversales sont représentées comme quadratique à travers l'épaisseur et par conséquent il ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. Benachour et al. (2011) ont étudié la vibration libre de plaques FG avec un gradient arbitraire. Un modèle de déformation de cisaillement à ordre supérieur pour FG a été examiné par Dharan et al (2010) en utilisant la théorie de déformation de cisaillement à zéro ordre (ZSDT).

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

Récemment, Tounsi et ses collègues (Hadji et al, 2011;. Houari et al, 2011;. El Meiche et al, 2011;. Bourada et al, 2012;. Bachir Bouiadjra et al, 2012; Fekrar et al., 2012; Fahsi et al, 2012;. Boudierba et al, 2013;. Kettaf et al, 2013; Klouche Djedid et al, 2014; Nedri et al, 2014; Ait Amar Meziane et al, 2014; Draiche et al, 2014; Sadoune et al, 2014; Ait Yahia et al, 2015; Belkorissat et al, 2015) ont développé de nouvelles théories de déformation de cisaillement des plaques impliquant seulement quatre fonctions inconnues.

Dans le présent article, Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique basée sur la position de la surface neutre est développée pour l'analyse statique des plaques Fonctionnellement graduées. Cette théorie à de nombreux avantages sur le CLPT et FSDPT. Il est possible de prendre en compte les effets d'ordre supérieur et encore garder la complexité à un niveau nettement inférieur. Dans la présente théorie, l'équation différentielle régissant est du quatrième ordre et seulement dans ces flèches latérales, les propriétés physiques de la plaque et le chargement latéral sont utilisés. Les équations d'équilibre régissant sont obtenues à partir du principe des déplacements virtuels, et des solutions de Navier pour flexion des plaques FG simplement appuyées sont présentés. La précision et l'efficacité de la théorie actuelle sont établies à travers des exemples numériques. Les résultats numériques sont présentés pour Céramique - métal des plaques fonctionnellement graduées.

IV.2. FORMULATIONS THEORIQUES

IV.2.1 Concept physique de la surface neutre

Les matériaux à gradient de propriétés sont un type particulier de composites dans lesquels les propriétés des matériaux peuvent varier de façon régulière et continue du fait de faire varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs le long de certaine dimension (généralement dans le sens de l'épaisseur). Dans cette étude, la plaque FG est faite à partir d'un mélange de céramique et de métal et les propriétés sont supposées variables à travers l'épaisseur de la plaque. En raison de la dissymétrie des propriétés des matériaux des plaques FG par rapport au plan médian, les équations de flexion et d'étirement (membrane) sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie de manière convenablement dans la direction d'épaisseur de la plaque FG de façon d' être la surface neutre, les propriétés de la plaque FG étant symétriques par rapport à cet axe. Pour indiquer la position de la surface neutre de plaques FG, deux plans différents sont considérés pour la mesure de Z , c'est-à-dire, z_{ms} et z_{ns} sont mesurées à partir de la surface médiane et

Chapitre IV: Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

la surface neutre de la plaque, respectivement, comme représenté sur la figure 1.

La fraction volumique de la céramique V_C est exprimée en se basant sur les coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_C = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad \text{IV} - (1)$$

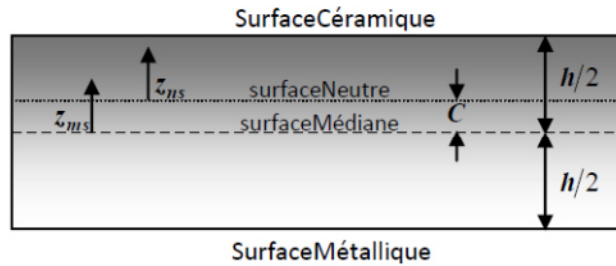


Figure IV.1 La position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.

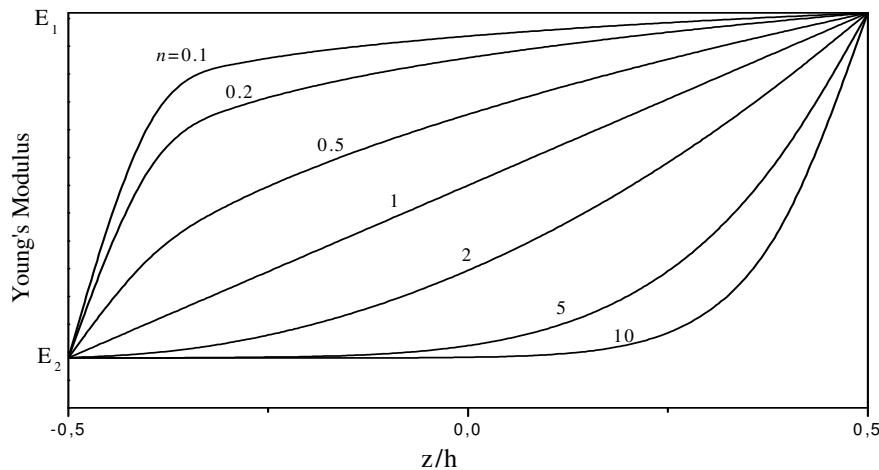


Figure IV.2 Variation du module de Young dans une plaque de P-FGM.

Où n est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro et C est la distance entre la surface neutre et la surface médiane.

Les propriétés matérielles non homogènes d'une plaque FGM peuvent être exprimées par la loi de mélange en puissance (Suresh et Mortensen 1998). En utilisant l'équation. (1), les propriétés matérielles non homogènes de la plaque P FGM, en fonction de coordonnées de l'épaisseur, devient

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, P_{MC} = P_C - P_M \quad IV - (2)$$

Où P_M et P_C sont les propriétés du métal et de céramique successivement. Dans ce chapitre, nous supposons que le module d'élasticité E et la densité de masse ρ sont décrits par l'équation. (2), tandis que le coefficient de Poisson ν , est considéré constant suivant l'épaisseur (Benachour et al. 2011, Larbi Chaht et al. 2014).

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Fig. 2, ce qui montre que le module de Young change rapidement à proximité de la surface la plus basse pour $n > 1$ et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $n < 1$.

La position de la surface neutre de la plaque FG est déterminée pour satisfaire en premier moment ce qui concerne le module d'Young étant égale à zéro comme suit (Bouremana et al. 2013, Ould Larbi et al. 2013, Fekrar et al. 2014, Bousahla et al. 2014).

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(Z_{ms})(Z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad IV - (3)$$

La position de la surface neutre peut être déterminée comme

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad IV - (4)$$

Il est clair que le paramètre C est nul pour les plaques homogènes et isotropes.

IV.2.2 Hypothèses de base

Considérons une plaque d'épaisseur totale h et composée de matériau fonctionnellement graduée à travers l'épaisseur (Fig. 3). Il est supposé que le matériau est isotrope et le classement est supposé être seulement à travers l'épaisseur.

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- ✓ L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque FG.
- ✓ Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

- ✓ Le déplacement transversal w contient deux composantes de flexion w_b et des composantes de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y seulement.

✓

$$w(x, z_{ns}, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad IV - (5)$$

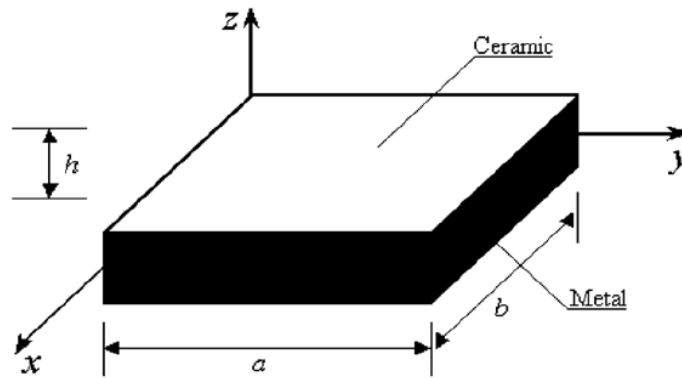


Figure IV.3 Géométrie de plaque rectangulaire composée de FGM.

- ✓ La contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- ✓ Le déplacement axial u dans la direction x est défini par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad IV - (6)$$

- ✓ Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être données comme suit:

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad IV - (7)$$

- ✓ Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent naissance, en conjonction avec w_s , au variation hyperbolique de déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc à des

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillements τ_{xz} , τ_{yz} sont égales à zéro au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque. L'expression de u_s et v_s peut être donnée comme suit:

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad IV - (8)$$

Où

$$f(z_{ns}) = (z_{ns} + C) \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z_{ns} + C}{h} \right) \quad IV - (9)$$

IV.2.3 Equations cinématique et constitutive

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (5) - (9) comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z_{ns}) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z_{ns}) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad IV - (10)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation. (10) sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z_{ns} k_y^b + f(z_{ns}) k_y^s \\ \gamma_{yz} &= g(z_{ns}) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v_0}{\partial x}(x, y) - 2 z_{ns} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2 f(z_{ns}) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad IV - (11)$$

$$\varepsilon_z = 0$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad IV - (12)$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}) \quad \text{et} \quad f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}}$$

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad IV - (13)$$

Où

$$Q_{11}(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{(1 - \nu^2)} \quad IV - (14a)$$

$$Q_{12}(z_{ns}) = \nu Q_{11}(z_{ns}) \quad IV - (14b)$$

$$Q_{44}(z_{ns}) = Q_{55}(z_{ns}) = Q_{66}(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)} \quad IV - (14c)$$

IV.2.4 Equations de mouvement

Les équations régissant l'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe de travail virtuel dans le cas présent est donnée comme suit:

$$\int_{-h/2-C}^{h/2-C} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad IV - (15)$$

Où Ω est la surface supérieure et q est la charge transversale appliquée.

En substituant les équations. (11) et (13) dans l'équation. (15) et l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (15) peut être réécrite comme suit:

$$\int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad IV - (16)$$

Où

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns} \quad IV - (17a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns} \quad IV - (17b)$$

Les équations régissant l'équilibre peuvent être dérivées de l'équation. (16) en intégrant les gradients des parties de déplacement et mise à zéro les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s séparément.

Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la nouvelle théorie actuelle de déformation de cisaillement hyperbolique.

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{dx^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{dy^2} + q &= 0 \end{aligned} \quad IV - (18)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{dx^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{dy^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0$$

En utilisant l'équation. (13) dans l'équation. (17), les résultantes des contraintes de la plaque peuvent être reliées à l'ensemble des déformations par:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad IV - (19)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad IV - (20a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad IV - (20b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix} \quad IV - (20c)$$

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

$$D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad IV - (20d)$$

Où A_{ij} , D_{ij} , etc., sont la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} \\ &= \int_{\frac{-h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} Q_{11}(1, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns}f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} 1 \\ v \\ 1-v \\ 2 \end{Bmatrix} dz_{ns} \end{aligned} \quad IV - (21a)$$

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad IV - (21b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{\frac{-h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} Q_{55} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns} \quad IV - (21c)$$

En substituant l'équation. (19) dans l'équation. (18), on obtient l'équation suivante:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad IV - (22a)$$

$$\begin{aligned} & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \\ &= -D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\ & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = q \end{aligned} \quad IV - (22b)$$

$$\begin{aligned} & -D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\ & -D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = q \end{aligned} \quad IV - (22c)$$

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

$$\begin{aligned}
 & -B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & -D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & -H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = q
 \end{aligned} \quad IV - (22d)$$

IV.3 SOLUTION ANALYTIQUE

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous sommes concernés ici par la solution exacte des équations. (22a) - (22d) pour une plaque FG simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées au niveau des bords latéraux

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{at} \quad x = -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \quad IV - (23a)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{at} \quad y = -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \quad IV - (23b)$$

Les équations du mouvement admettent les solutions de Navier pour les plaques simplement appuyées. Les variables u_0, v_0, w_b, w_s peut être écrit en supposant que les variations suivantes

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad IV - (24)$$

U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} , et W_{smn} Sont des paramètres arbitraires à déterminer, et $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$. plus, la charge transversale q est également élargie en double série de Fourier

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad IV - (25)$$

Dans le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons

Chapitre IV : Etude analytique des plaques FGM en se basant sur le concept de la surface neutre

$$m = n = 1 \quad \text{et} \quad q_{11} = q_0 \quad \text{IV} - (26)$$

où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Les équations. (24), (25) et Eq. (26) réduisent l'équation régissant (22) à la forme suivante:

$$[C]\{\Delta\} = \{P\} \quad \text{IV} - (27)$$

Où

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\} \quad \text{et} \quad \{f\}^T = \{0, 0, q_{mn}, q_{mn}\}$$

Où $[C]$ se réfère à la rigidité en flexion.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse statique des plaques FGM fonctionnellement graduées simplement appuyées sont examinées par une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique basée sur la position de la surface neutre.

On assume que le module d'élasticité de la plaque varie selon la loi de distribution de puissance en termes de fractions volumiques des constituants à travers l'épaisseur de la plaque. L'équation du mouvement pour la plaque FGM est obtenue par le principe des déplacements virtuels.

Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier.

Une étude comparative du travail réalisé avec les solutions existantes ont permis la validation des solutions acquise.

CHAPITRE V

Comparaison et validation des resultats

Chapitre 5

Comparaison et validation des résultats

V.1 Résultats et discussion

L'étude a été axée sur le comportement statique d'une plaque fonctionnellement graduée basée sur la nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique de la plaque et sur la base de la position de surface neutre.

Pour l'analyse statique, les plaques en FGM sont soumises à une charge transversale sinusoïdale formulée par :

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad V - (1)$$

Le matériau fonctionnellement gradué utilisé est constitué d'aluminium- Alumine, dont les propriétés matérielles utilisées dans le calcul des valeurs numériques sont les suivantes:

Ceramic (Alumine, Al₂O₃): $E_c = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$

Metal (Aluminum, Al): $E_m = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$

Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance. Les surfaces inférieures de la plaque FG sont riches en Aluminium, tandis que les surfaces supérieures de la plaque FG sont riches en Alumine.

Pour plus de convenance, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$\bar{u} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, \frac{-h}{4} - c \right)$$

$$\bar{v} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} v \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{-h}{6} - c \right) \quad V - (2)$$

$$\bar{w} = 10 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right),$$

Chapitre V : Comparaison et validation des résultats

Tableau V.1 Résultats obtenus des effets de la fraction volumique sur les déplacements adimensionnel d'une plaque carrée FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

n	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$
Céramique	ZSDT*	0.21805	0.14493	0.29423
	HSDT [#]	0.21805	0.14493	0.29423
	Présent	0.21815	0.144885	0.29604
0.2	ZSDT*	0.2818	0.1985	0.33672
	HSDT [#]	0.28172	0.19820	0.33767
	Présent	0.30479	0.21538	0.35988
0.5	ZSDT*	0.42135	0.31096	0.44387
	HSDT [#]	0.42131	0.31034	0.44407
	Présent	0.43859	0.32549	0.45369
1	ZSDT*	0.64258	0.49673	0.59059
	HSDT [#]	0.64137	0.49438	0.58895
	Présent	0.64112	0.49408	0.58893
2	ZSDT*	0.9022	0.71613	0.76697
	HSDT [#]	0.89858	0.71035	0.75747
	Présent	0.89793	0.70968	0.75733
5	ZSDT*	1.06786	0.84942	0.94325
	HSDT [#]	1.06297	0.84129	0.90951
	Présent	1.06620	0.84399	0.91171
métallique	ZSDT*	1.18373	0.78677	1.59724
	HSDT [#]	1.18373	0.78677	1.59724
	Présent	1.18428	0.78652	1.60709

Résultats de Réf (Reddy,2000)

* Résultats de Réf (Dharan et al, 2010)

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{hq_0} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} - c \right)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{h}{hq_0} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} - c \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xy} \left(0, 0, -\frac{h}{3} - c \right) \quad \mathbf{V} - (3)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, -c \right)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6} - c \right)$$

Chapitre V : Comparaison et validation des résultats

Les résultats obtenus sont affichés dans les tableaux 1 et 2.

Les tableaux font apparaître respectivement les flèches adimensionnelles et les différentes contraintes.

Les résultats obtenus sont comparés avec la théorie de déformation de cisaillement de Zeroth (ZSDT) (Dharan et al., 2010).

Le modèle actuel atteint, en bon accord avec le modèle le plus accepté de Reddy (2000), prédit de meilleures estimations que ZSDT.

Tableau V.2 Résultats obtenus des effets de la fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

n	Modèle	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Céramique	ZSDT*	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	HSDT [#]	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Présent	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
0.2	ZSDT*	2.1227	1.30962	0.6678	0.22557	0.2256
	HSDT [#]	2.12671	1.30958	0.66757	0.22532	0.18045
	Présent	2.26002	1.38706	0.72053	0.24805	0.22655
0.5	ZSDT*	2.60436	1.47175	0.66709	0.23909	0.23869
	HSDT [#]	2.61051	1.47147	0.66668	0.23817	0.19071
	Présent	2.61929	1.45863	0.69119	0.24945	0.24311
1	ZSDT*	3.0701	1.48935	0.61395	0.22705	0.23919
	HSDT [#]	3.08501	1.4898	0.61111	0.23817	0.19071
	Présent	3.08640	1.48954	0.611061	0.24406	0.26178
2	ZSDT*	3.58089	1.3968	0.54947	0.22705	0.22719
	HSDT [#]	3.60664	1.39575	0.54434	0.22568	0.1807
	Présent	3.60856	1.39561	0.54413	0.22427	0.27558
5	ZSDT*	4.19547	1.1087	0.57811	0.21792	0.21813
	HSDT [#]	4.24293	1.10539	0.57368	0.21609	0.17307
	Présent	4.24758	1.10329	0.57553	0.19919	0.24164
métallique	ZSDT*	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	HSDT [#]	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Présent	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289

Les résultats obtenus se basent sur HSDT de Reddy (2000)

* Les résultats de Ref (Dharan et al., 2010)

Chapitre V : Comparaison et validation des résultats

En étudiant les deux tableaux qui reflètent les effets de la fraction volumique (V_f) sur les contraintes, et les déplacements d'une plaque carrée fonctionnellement graduée avec un $a/h=10$, on constate que:

La plaque devient de plus en plus métallique résultant de la flèche $\bar{w}$ et la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ qui augmentent par rapport à la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ qui diminue.

Il est très intéressant de noter que les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que celles d'une plaque métallique pleine. Cela est dû au fait que dans ces deux cas, la plaque est totalement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité.

La figure V.1 montre la variation de la flèche centrale non dimensionnelle d'une plaque carrée avec l'indice de loi de puissance n .

Les figures V.2 et V.3 montrent la variation de la flèche centrale avec un rapport d'aspect (a/b) et le rapport d'épaisseur latérale (a/h). On observe que la flèche est maximale pour une plaque métallique et minimale pour une plaque de céramique. La différence augmente lorsque le rapport d'aspect augmente bien qu'il soit inchangé avec l'augmentation de rapport d'épaisseur latérale.

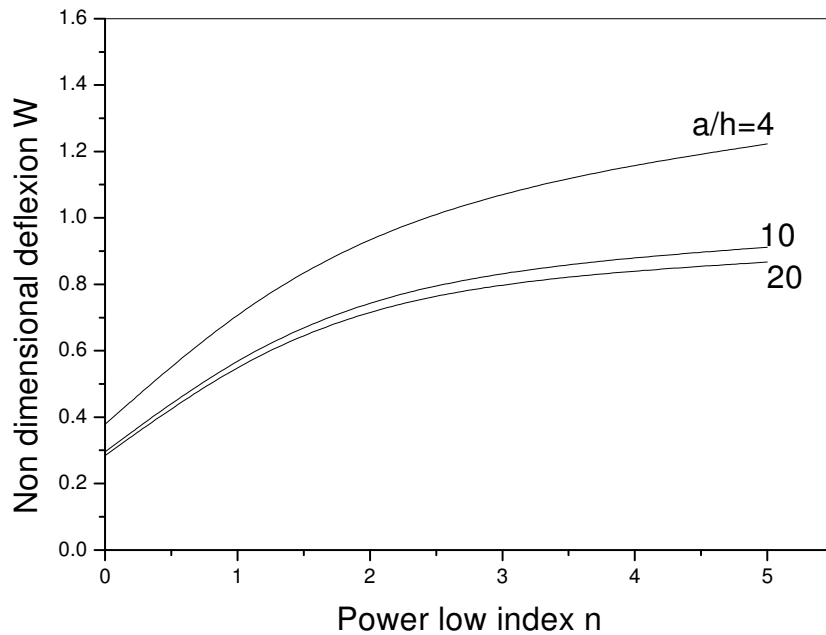


Figure V.1 La flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w}$ par rapport à l'indice de loi de puissance n pour une plaque FGM carrée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale.

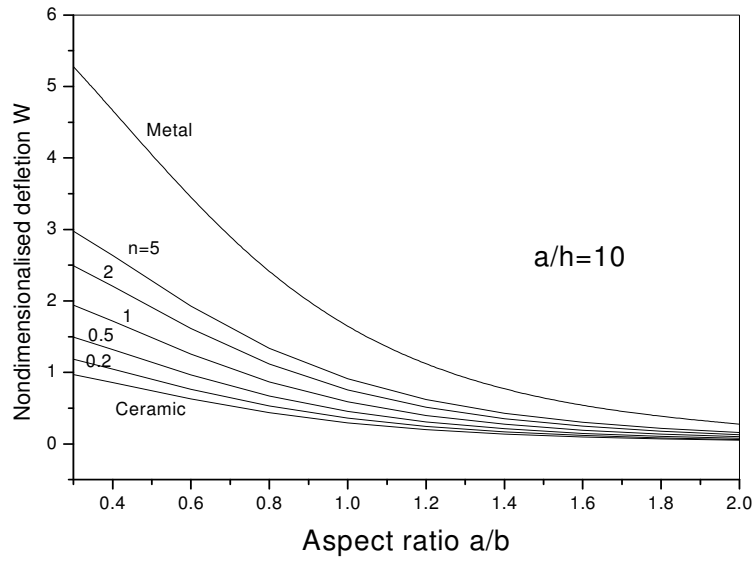


Figure V.2 la flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w}$ par rapport au rapport d'aspect (a / b) d'une plaque FGM.

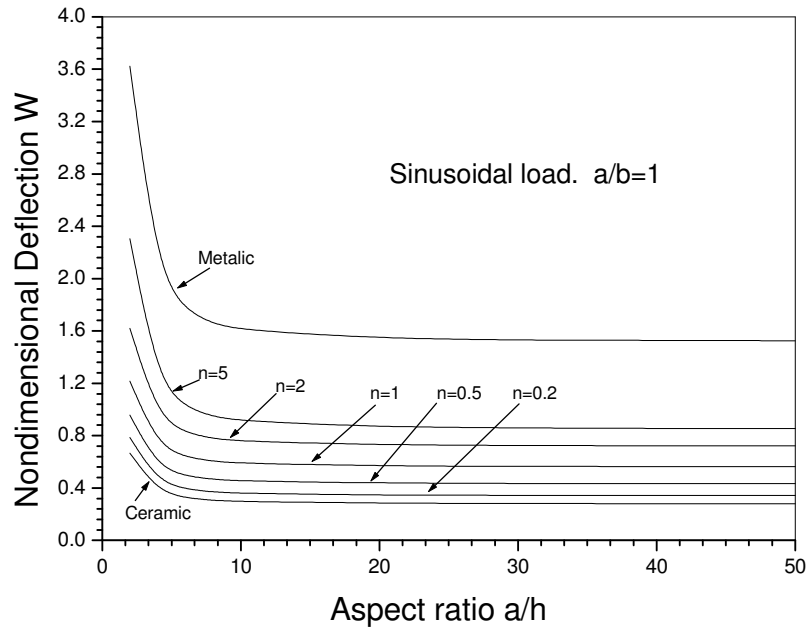


Figure V.3 la flèche centrale non dimensionnelle $\bar{w}$ en fonction du rapport épaisseur latérale (a / h).d'une plaque carrée FGM.

A partir de ces figures, il apparait clairement que la réponse des plaques FGM est intermédiaire à celle des plaques de céramique et de métal homogènes.

Les figures V.4 à V.8 montrent la répartition des contraintes normales et les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques FGM. L'exposant de la fraction volumique

Chapitre V : Comparaison et validation des résultats

considéré est égal à 2 pour ces résultats (figures).

On constate à partir des figures. V.4 et V.5 les contraintes normales σ_x et σ_y montrent que la plaque travaille à la compression jusqu'à $\bar{z} = 0,149$.

Puis, au delà de cette valeur, la plaque travaille uniquement à la traction.

Les valeurs maximales de ces contraintes (contraintes longitudinales), ainsi que les contraintes de cisaillement dans le plan, τ_{xy} se produisent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

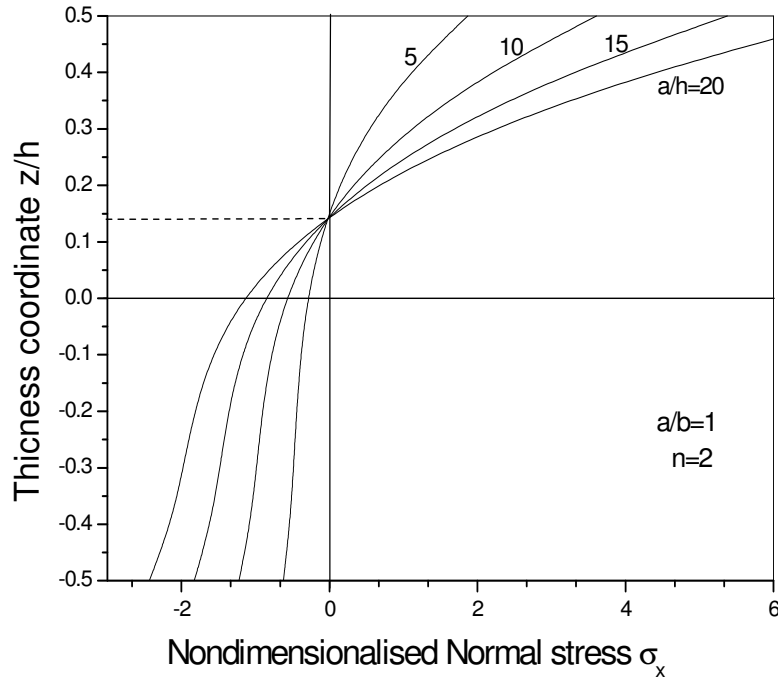


Figure V.4 Variation des contraintes longitudinales $\bar{\sigma}_x$ dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur latérale (a/h).

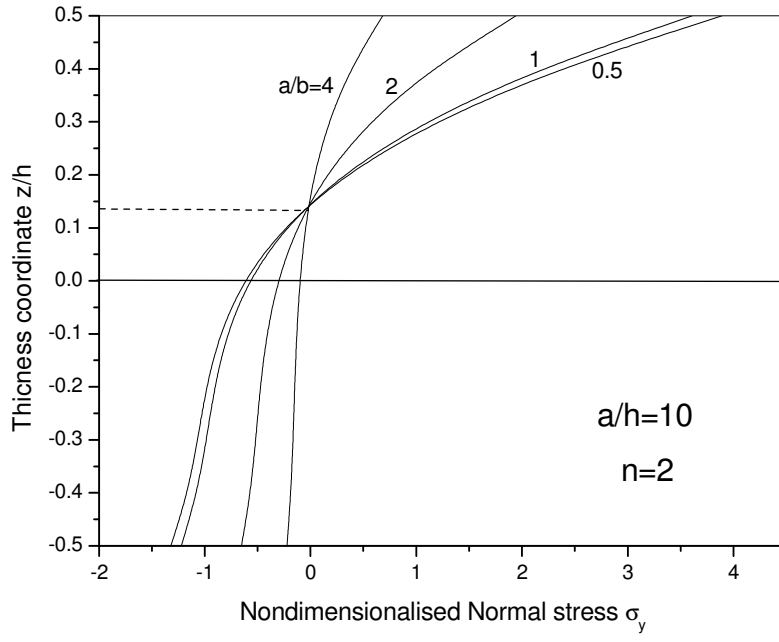


Figure V.5 Variation des contraintes longitudinales $\bar{\sigma}_y$ dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'aspect (a/b).

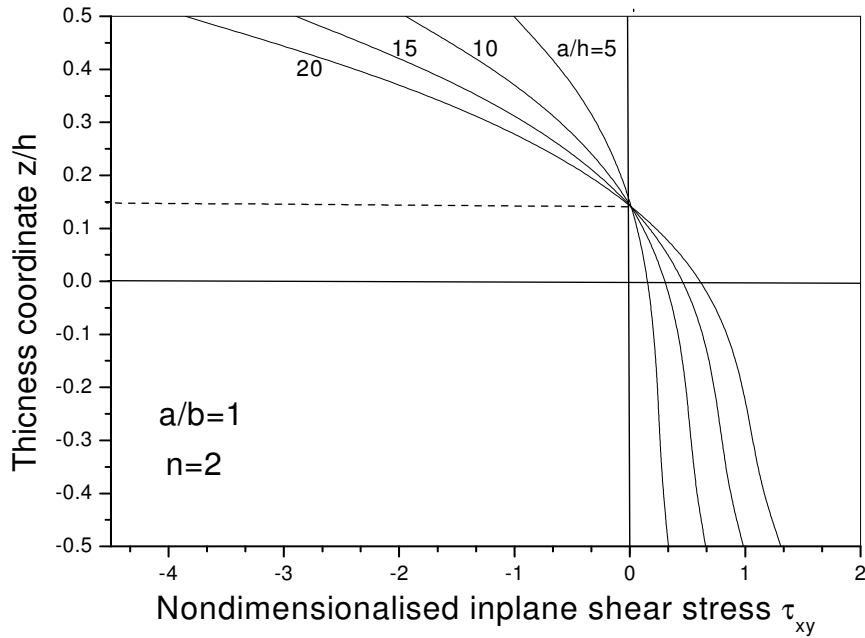


Figure V.6 Variation dans le plan des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM Pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur latérale (a/h).

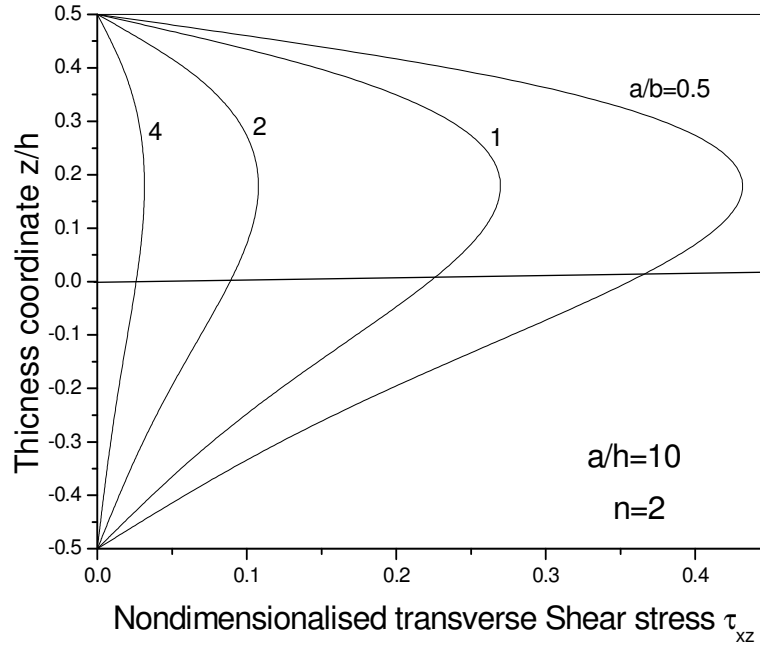


Figure V.7 Variation des contraintes de cisaillement transversales $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'aspect (a/b).

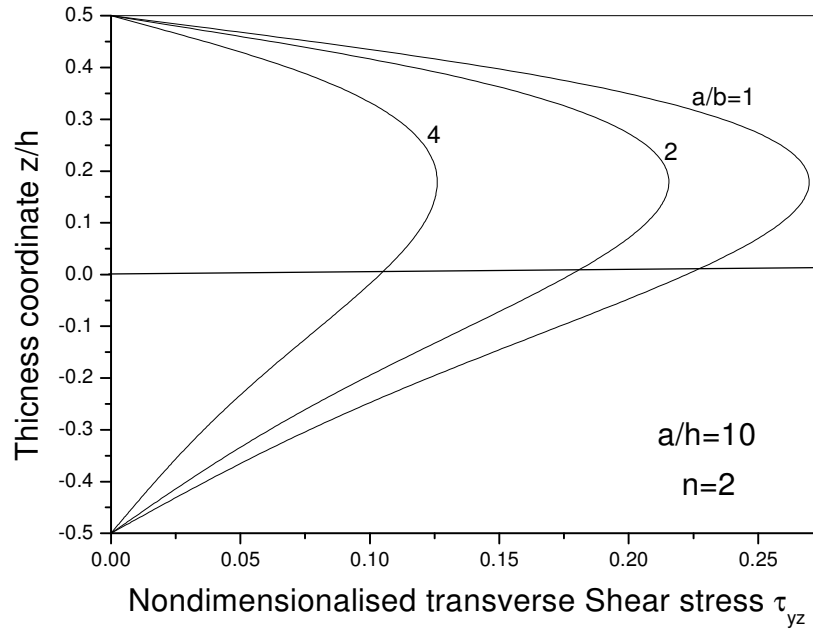


Figure V.8 Variation des contraintes de cisaillement transversales $\bar{\tau}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différentes valeurs du rapport d'aspect (a/b).

Chapitre V : Comparaison et validation des résultats

La différence entre les courbes des figures V.7 et V.8 est évidente. Lorsque les gradients de contraintes augmentent, les homogénéités jouent un plus grand rôle dans les calculs de distribution des contraintes. Les répartitions des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur τ_{yz} et τ_{xz} ne sont pas paraboliques et les contraintes augmentent au fur et à mesure que le rapport d'allongement diminue. Il est à noter que la valeur maximale se produit à $\bar{z}=0.2$, et non au centre de la plaque comme dans le cas homogène.

V.2 CONCLUSION

Dans la présente étude, une théorie raffinée de plaque de déformation de cisaillement trigonométrique basée sur la position de la surface neutre est proposée pour l'analyse statique des plaques fonctionnellement graduées. La théorie donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal et satisfait les conditions aux limites de zéro traction sur les surfaces de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Sur la base de la théorie des plaques, et le concept actuel de surface neutre, les équations de mouvement sont dérivées à partir du principe de Hamilton. Des exemples numériques montrent que la théorie proposée donne des solutions qui sont presque identiques à celles obtenues avec d'autres théories de déformation de cisaillement.

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives

Les études de recherche sur les matériaux composites en FGM, ont considérablement évolué à travers le monde, et ne cessent de s'améliorer nettement au fil du temps dans l'objectif d'avoir une résistance mécanique élevée dans le domaine des structures.

Dans cette perspective, le travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur l'Analyse mécanique des structures composites, s'est concentré essentiellement sur le développement d'une étude analytique des plaques FGM qui se base sur le concept de la surface neutre.

Dans ce travail, nous avons présenté une recherche théorique sur l'Analyse statique des structures fonctionnellement graduées « FGM » à base d'Al/AL₂O₃. On suppose que les propriétés matérielles varient suivant l'épaisseur de la plaque selon une distribution de puissance.

L'équation du mouvement est obtenue par l'application du principe des travaux virtuels et les solutions sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres.

On conclut que :

- Les contraintes normales d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que celles d'une plaque métallique pleine. c'est à dire la plaque est totalement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité.
- La flèche est maximale pour une plaque métallique et minimale pour une plaque de céramique. La différence augmente lorsque le rapport d'aspect augmente bien qu'il soit inchangé avec l'augmentation du rapport d'épaisseur latérale.
- La réponse des plaques FGM est intermédiaire à celle des plaques de céramique et de métal homogènes.
- Les valeurs maximales de ces contraintes (contraintes longitudinales), ainsi que les contraintes de cisaillement dans le plan, τ_{xy} se produisent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.
- Lorsque les gradients de contraintes augmentent, les homogénéités jouent un plus grand rôle dans les calculs de distribution des contraintes.

Globalement, ce travail se veut une contribution d'une manière efficace à l'exploitation des matériaux composites dans le domaine de la mécanique des milieux continus.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

[Abdizadeh, 1997] : Abdizadeh H, « *Elaboration et caractérisation de composites laminaires tri-couches à base d'alumine* » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997.

[Ait Amar Meziane et al 2014]: Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.

[Ait Yahia et al 2015]: Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165.

[Ambartsumyan, S.A., 1970]: "Theory of anisotropic plates", Stanford: Technomic Publishing Company, (1970).

[Amini, M.H et al 2009]: Amini, M.H., Soleimani, M. et Rastgoo, A., "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation", *Smart Mater Struct*, (2009), 18, 1-9.

[Atmane, H.A et al 2010]: Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, A.A., "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", (2010).

[Attia et al 2015]: Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212.

[Aydogdu, M. 2009]: Aydogdu, M., "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, (2009), 94-101.

[Bachir Bouiadjra et al 2012]: *Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A.(2012), "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory", J. Therm. Stress., 35(8), 677-694.*

[Bachir Bouiadjra et al 2013]: *Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory", Struct. Eng. Mech., Int. J., 48(4), 547-567.*

[Batra, 1996]: *Batra RC. «Some Basic Fracture Mechanics Concepts in Functionally Graded Material ». Mech.Phys.Solids, 1996.*

[Belabed et al 2014]: *Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", Compos: Part B, 60, 274-283.*

[Belkorissat et al 2015]: *Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", Steel Compos. Struct., Int. J., 18(5). [In press]*

[Benachour et al 2011]: *Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah. S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", Compos. Part B: Eng., 42(6), 1386-1394.*

[Benveniste 1987]: *Benveniste, Y., "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory of composite materials", Mech Mater, (1987), 147-157.*

[Berthelot, 1996] : *Berthelot J. M., « Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures », 4^{ème} édition, 1996.*

[Bessaim et al 2013] : *Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", J. Sandw. Struct. Mater., 15(6), 671-703.*

[Bhimaraddi et Stevens 1984]: Bhimaraddi, A. et Stevens, L.K., "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates", *Journal of applied mechanics, Trans ASME*, (1984), 195-198.

[Birman et Byrd 2007]: Birman, V. et Byrd, L.W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", *Applied Mechanics Reviews*, (2007), 60, 195-216.

[Boch, 1986]: Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites, 1986.[Cai 1997a, Cai 1997b] Cai, P.Z., Green, D.J., Messing, G.L., (1997a), « Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates ». 1. Experimental observations of processing defects", *J. Am. Ceram Soc.*, 80(8), 1929–1939.

[Bogdanovich, 1996]: Pastore CM. « Mechanics of textile and laminated composite with Application to structural analysis ». London: Chapman &Hall, 1966.

[Bouderba et al 2013]: Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.

[Bourada et al 2012]: Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 14(1), 5-33.

[Bouremana et al 2013]: Bouremana, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(5), 467-479.

[Bousahla et al 2014]: Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Comput. Method.*, 11(6), 1350082.

[Carrera et Petrolo2010]: Carrera, E. et Petrolo, M., "Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates", (2010), 48(12).

[Chan, 2001]: Chan S.H. (2001), « *Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine* », *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.

[Chakraverty et Pradhan 2014]: Chakraverty, S. and Pradhan, K.K. (2014), “*Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions*”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 36, 132-156.

[Cheung et Chakrabarti 1972]: Cheung, Y.K. et Chakrabarti, S., “*Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method*”, *Journal of sound and vibration*, (1972), 21, 277-284.

[Cheung et Zhou 1999]: Cheung, Y.K. et Zhou, D., “*The Free Vibrations of Tapered Rectangular Plates Using a New Set of Beam Functions with the Rayleigh-Ritz Method*”, *Journal of Sound and Vibration*, (1999), 703-722.

[Chung, Chi, 2006a]: Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung: « *Mechanics Behavior of Functionally Graded Materials Plates under Transverse Load*». *International Journal of Solids and structures*, Volume 43, Issue 13, page: 3657-3674, Part I: Analysis, June 2006.

[Dorlot, 1986]: Dorlot, Bailon, Masounave « *les Matériaux* »-chapitre 14, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1986.

[D'Ottavio et Carrera2010]: D'Ottavio, M. et Carrera,E., “*Variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells*”, *AIAA Journal*, (2010), 48(9).

[Delale, 1983]: F. Delale, F. Erdogan «*The crack problem for a non homogeneous plane*». *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609 –614, 1983.

[Dharan et al 2010]: Dharan, S., Syam Prakash, V. and Savithri, S. (2010), “*A higher order shear deformation model for functionally graded plates*”, *International Conference on Technological Trends (ICTT-2010)*, Trivandrum, India, November.

[Draiche et al 2014]: *Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), "A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass", Steel Compos. Struct., Int. J., 17(1), 69-81.*

[Ebrahimi 2013]: *Ebrahimi, F. (2013), "Analytical investigation on vibrations and dynamic response of functionally graded plate integrated with piezoelectric layers in thermal environment", Mech. Adv. Mater. Struct., 20(10), 854-870.*

[El Meiche et al 2011]: *El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", Int. J. Mech. Sci., 53(4), 237-247.*

[Fahsi et al 2012]: *Fahsi, B., Kaci, A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2012), "A four variable refined plate theory for nonlinear cylindrical bending analysis of functionally graded plates under Thermomechanical loadings", J. Mech. Sci. Technol., 26(12), 4073-4079.*

[Fekrar et al 2012]: *Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2012), "Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory", Steel Compos. Struct., Int. J., 13(1), 91-107.*

[Fekrar et al 2014]: *Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", Meccanica, 49(4), 795-810.*

[Ferreira et al 2006]: *Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. et Jorge, R., "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", Composite Structures, (2006), 75,593-600.*

[Gornet, 2008] : *Laurent Gornet, cours sur « généralité sur les matériaux composites, chapitre I », Université de Nantes-France, 2008.*

[Hadji et al 2011]: *Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory", Appl. Math. Mech., 32(7), 925-942.*

[Hamidi et al 2015]: Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.

[Hasani Baferani et al 2011]: Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. et Ehteshami, H., "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Composite Structures*, (2011), 1842-1853.

[He et al 2001]: He, X.Q., Ng, T.Y., Sivashanker, s. et Liew, K.M., "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", *International Journal of Solids and Structures*, (2001), 38, 1641-1655.

[Hebali et al 2014]: Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *J. Eng. Mech. (ASCE)*, 140(2), 374-383.

[Hirai, 1999]: Hirai T. and Chen L. (1999), « Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan », *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.

[Houari et al 2011]: Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2011), "Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates", *J. Therm. Stress.*, 34(4), 315-334.

[Houari et al 2013]: Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. (2013), "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory", *Int. J. Mech. Sci.*, 76, 102-111.

[Huang et Shen 2004]: Huang, X.-L. et Shen, H.-S., "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments", *International Journal of Solids and Structures*, (2004), 41, 2403-2427.

[Huang et al 2011]: Huang, C.S., McGee III, O.G. et Chang, M.J., "Vibrations of cracked rectangular FGM thick plates", *Composite Structures*, (2011), 1747 -1764.

[Iyengar et al 1974]: *Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K., "On the analysis of thick rectangular plates", Z Angew Math Mech, (1974), 589-591.*

[Iyengar et al 1982]: *Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", Int J Solids Struct, (1982), 149-156.*

[Jha et al 2011]: *Jha, D.K., Kant, T. and Singh, R.K. (2011), "Stress analysis of transversely loaded functionally graded plates with a higher order shear and normal deformation theory", J. Eng. Mech., 139(12), 1663-1680.*

[Kant et Pandya 1988]: *Kant, T. et Pandya, B.N., "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates", Composite Structures, (1988), 215-264.*

[Kettaf et al 201]: *Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M. and Tounsi, A. (2013), "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", Steel Compos. Struct., Int. J., 15(4), 399-423.*

[Khalfi et al 2014]: *Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation", Int. J. Comput. Method., 11(5), 1350077.*

[Klouche Djedid et al 2014]: *Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Ameer, M. (2014), "A n-order four variable refined theory for bending and free vibration of functionally graded plates", Steel Compos. Struct., Int. J., 17(1), 21-46.*

[Koizumi, 1997]: *Koizumi, M. « FGM activities in Japan ». Composite Part B: Engineering, 28(1-2), 1–4 (1997).*

[Krishna Murty 1977]: *Krishna Murty, A.V., "Higher-order theory for vibrations of thick plates", AIAA Journal, (1977), 1823-1824.*

[Krishna Murty 1986]: *Krishna Murty, A.V., "Toward of consistent plate theory", AIAA Journal, (1986), 1047-1048.*

[Krishna Murty 1987]: Krishna Murty, A.V., *"Flexural of composite plates"*, *Composite Structures*, (1987), 161-177.

[Krishna Murty et al 1981]: Krishna Murty, A.V. et Vellaichamy, S., *"On higher-order shear deformation theory of laminated composite panels"*, *Composite Structures*, (1987), 247-270.

[Kuznetsov et Kartashov 1981]: Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G., *"Natural vibrational modes of laminated anisotropic plates and flat shells"*, *Soviet Appl Mech*, (1981), 334-339.

[Kant 1982]: Kant, T., *"Numerical analysis of thick plates"*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1982), 1-18.

[Karama et al 2003]: Karama, M., Afaq, K. et Mistou, S., *"Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity"*, *International Journal of Solids and Structures*, (2003), 1525-1546.

[Karama et al 1998]: Karama, M., Harb, B.A., Mistou, S. et Caperaa, S., *"Bending, Buckling and Free Vibration of Laminated Composite with a Transverse Shear Stress Continuity Model"*, *Composites, Part B*, (1998), 29,223-234.

[Kim 2005]: Kim, Y.-W., *"Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates"*, *Journal of sound and vibration*, (2005), 284:531-549.

[Kim et al 2009]: Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J., *"Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory"*, (2009), 47(4), 455-462.

[Larbi et al 2014]: Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2014), *"Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect"*, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.

[Levinson 1980]: Levinson, M., *"An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates"*, *Mechanics Research Communications*, (1980), 343-350.

[Levy 1899]: Levy, M., *"Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes"*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (1899), 3,219-306.

[Li et al 2008]: Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., *"Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates"*, *Journal of Sound and Vibration*, (2008), 498-515.

[Li et al 2009]: Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., *"Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment"*, *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 733-750.

[Librescu 1967]: Librescu, L., *"On the theory of anisotropic elastic shells and plates"*, *International Journal of Solids and Structures*, (1967), 53-68.

[Liew et al 1993]: Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., *"A Continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates"*, *International Journal of Solids and Structures*, (1993), 30, 3357- 379.

[Liew et al 1994]: Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., *"Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates: variance of simple support conditions and influence of in-plane inertia"*, (1994), 31.

[Liew et al 1995]: Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., *"Free vibration studies on stress-free three dimensional elastic solid"*, *Journal of Applied Mechanics*, (1995), 62,159-165

[Liew et al 1995]: Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., *"Three-dimensional vibration of rectangular plates: effects of thickness and edge constraints"*, *Journal of Sound and Vibration*, (1995), 182, 709-727.

[Liew et al 1999]: Liew, K.M. et Yang, B., *"Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of circular plates - à polynomials Ritz analysis"*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1999), 189-201.

[Liew et al 1999]: Liew, K.M. et Teo, T.M., "Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, (1999), 577-599.

[Liew et al 1999]: Liew, K.M., Teo, T.M. et Han, J.8., "Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three-dimensional vibration analysis of rectangular plates", (1999), 45, 1831 -1848.

[Liew et al 2001]: Liew, K.M., He, X.Q., Ng, T.Y. et Sivashanker, S., "Active control of FGM plates subjected to a temperature gradient: modelling via finite element method based on FSDT", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2001), 52,1253-1271.

[Liew et al 2011]: Liew, K.M., Zhao,X. et Ferreira, A., "A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells", *Composite Structures*, (2011), 93,2031-2041.

[Liu 2003]: Liu, G.R., "Mesh free methods: moving beyond the finite element method": CRC Press LLC, (2003).

[Lo et al 1977]: Lo, K.H., Christensen, R.M. et Wu, E.M., "A high-order theory of plate deformation. Part I: homogeneous plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1977), 663-668.

[Lo et al 1977]: Lo, K.H., Christensen, R.M. et Wu, E.M., "A high-order theory of plate deformation. Part II: laminated plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1977), 669-676.

[Love 1888]: Love, A.E.H., "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", *London: Philosophical trans. of the Royal Society*, (1888).

[Lü et al 2009]: Lü, C.F., Lim, C.W. et Chen, W.Q., "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (2009), 16,576-584.

[Malekzadeh 2009]: Malekzadeh, P., "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Composite Structures*, (2009), 367-373.

[Mallikarjun et al 1993]: Mallikarjuna, M. et Kant, T., "A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", (1993), 23(4).

[Matsunaga 2008]: Matsunaga, H., "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, (2008), 499-512.

[Mindlin 1951]: Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *ASME J Appl Mech*, (1951), 31-38.

[Miyamoto 1999]: Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al., e., "Functionally Graded Materials Design". dans *Processing and Applications*, (1999).

[Mori et al 1973]: Mori, T. et Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions", *Acta Metall*, (1973), 571-574.

[Narasimhamurthy 1957]: Narasimhamurthy, P., "The effect of transverse shear deformation and rotary inertia in wave propagation and vibration of thin elastic plates, In: *Proceedings of the 3rd congressional theoretical applied mechanics, Bangalore, India*", *Indian Society of Theoretical Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Kharagpur*, (1957), 351-360.

[Nedri et al 2014]: Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), "Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory", *Mech. Compos. Mater.*, 49(6), 641-650.

[Nelson et Lorch 1974]: Nelson, R. et Lorch, D., "A refined theory for laminated orthotropic plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1974), 177 -183.

[Nguyen, 2008]: *Nguyen.T.K., « Quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogène ». Thèse de Doctorat, Université de Paris-Est, 2008.*

[Ould Larbi et al 2013]: *Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", Mech. Based Des. Struct. Machines, 41(4), 421-433.*

[Ôchsner et al 2008]: *Ôchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S., "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, (2008), 398-417.*

[Pagano 1970]: *Pagano, J.N., "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", (1970), 4, 20-35.*

[Pagano et Soni 1983]: *Pagano, N.J. et Soni, S.R., "Global-local laminate variational model", International Journal of Solids and Structures, (1983), 207-228.*

[Praveen et Reddy 1998]: *Praveen, G.N. et Reddy, J.N., "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", International Journal of Solids and Structures, (1998), 4457 -4476.*

[Prokopov 1965]: *Prokopov, V.K., "Application of the symbolic method to the derivation of the equations of the theory of plates", Journal of Applied Mathematics and Mechanics, (1965), 1064-1183.*

[Qian et al 2003]: *Qian, L.F., Batra, R.C. et Chen, L.M., "Free and Forced Vibrations of Thick Rectangular Plates using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Petrov-Galerkin (MLPG) Method", Tech Science Pres, CMES, (2003), 4, 519-534.*

[Qian et al 2004]: *Qian, L.F., Batra, R.C. et Chen, L.M., "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method", Composite: Part B, (2004), 685-697*

[Rayleigh 1945]: Rayleigh, L., *"Theory of sound"*: Dover Pub, (1945).

[Reddy 1984]: Reddy, J.N., *"A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates"*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1984), 745-752.

[Reddy et Phan 1985]: Reddy, J.N. et Phan, N.D., *"Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory"*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (1985), 2201-2219.

[Reddy 1990]: Reddy, J.N., *"A Review of Refined Theories of Laminated Composite Plates"*, *The Shock and vibration digest*, (1990), 22, 3-17.

[Reddy 1999]: Reddy, J.N., *"Theory and analysis of elastic plates"*, Philadelphia: Taylor & Francis, (1999).

[Reddy 2000]: Reddy, J.N., *"Analysis of functionally graded plates"*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2000), 47,663-684.

[Reddy et Chen 2003]: Reddy, J.N. et Chen, Z.Q., *"Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach"*, *Journal of Engineering Mechanics*, (2003), 129, 896-900.

[Reddy 2004]: Reddy, J.N., *"Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells - Theory and Analysis, Second Edition"*, Florida: CRC Press, (2004).

[Reissner 1945]: Reissner, E., *"The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates"*, *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, (1945), 69-77.

[Reissner 1980]: Reissner, E., *"On the analysis of first and second order shear deformation effects for isotropic elastic plates"*, *ASME J Appl Mech*, (1980), 959-961.

[Ren 1986]: Ren, J.G., *"A new theory of laminated plate"*, *Composites Science and Technology*, (1986), 225-239.

[Ritz 1908]: Ritz, V.H.W., *"Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik"*, *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, (1908), 135, 1-61.

[Sadoune et al 2014]: Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 17(3), 321-338.

[Saidi et al 2013]: Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245.

[Schmidt 1977]: Schmidt, R., "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", *Indust Math*, (1977), 23-38.

[Shimpi 2002]: Shimpi, R.P., "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, (2002), 137-146.

[Shimpi et Patel 2006]: Shimpi, R.P. et Patel, H.G., "A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis", *International Journal of Solids and Structures*, (2006), 6783-6799.

[Shimpi et Patel 2006]: Shimpi, R.P. et Patel, H.G., "Free vibrations of plate using two variable refined plate theory", *Journal of Sound and Vibration*, (2006), 979-999.

[Srinivas et al 1969]: Srinivas, S., Rao, A.K. et Rao, C.V.J., "Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates ", (1969), 49, 449-458.

[Srinivas et al 1970]: Srinivas, S., Rao, C.V.J. et Rao, A.K., "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, (1970), 12, 187-199.

[Srinivas et al 1970]: Srinivas, S. et Rao, A.K., "Vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", (1970), 1463-1481.

[Srinivas et Whitney 1973]: Sun, C.T. et Whitney, J.M., "Theories for dynamic response of laminated plates", *AIAA Journal*, (1973), 178-183.

[Suresh et Mortensen 1998]: Suresh, S. et Mortensen, A., "Fundamentals of Functionally Graded Materials". dans *Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal- Ceramic Composites*, (1998), Cambridge, UK: IOM Communications

[Swaminathan et Naveenkumar 2014]: Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T. (2014), "Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions", *Eur. J. Mech. A/Solids*, 47, 349-361.

[Tafla, 2007] : « Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques composites multicouches ».Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne 1997.

[Taj 2013]: Taj, M.N.A.G., Chakrabarti, A. and Sheikh, A.H. (2013), "Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.*, 37(18-19), 8484-8494.

[Talha et Singh 2011] : Talha, M. and Singh, B.N. (2011), "Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using nonlinear finite element method", *Finite Elem. Anal. Des.*, 47(4), 394-401.

[Thai et al 2010] : Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, (2010), 626-633.

[Thai et al 2011]: Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, (2011), 1738-1746.

[Timoshenko 1921] : Timoshenko, S., *"On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars"*, *Philosophical Magazine*, (1921), Vol.41 (series 46) p. 744-746.

[Timoshenko 1922] : Timoshenko, S., *"On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section"*, *Philosophical Magazine*, (1922), Vol. 43 (series 46) p. 125-131.

[Tounsi et al 2013] : Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), *"A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates"*, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.

[Touratier 1988]: Touratier, M., *"A Refined Theory for Thick Composite Plates"*, *Mech. Res. Comm.*, (1988), 229-236.

[Uflyand 1948]: Uflyand, Y.S., *"The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates"*, (1948), 12, 287 -300.

[Uemura, 2003]: Uemura S. (2003), *« The activities of FGM on new applications »*, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.

[Uymaz et Aydogdu 2007]: Uymaz, B. et Aydogdu, M., *"Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions"*, *Composites of reinforced Plastics and Composites*, (2007), 26, 1847 -1863.

[Vel et Batra 2004]: Vel, S.S. et Batra, R.C., *"Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates"*, *Journal of Sound and Vibration*, (2004), 703-730.

[Vlasov 195]: Vlasov, Y.Z., *"The method of initial function in problems of theory of thick plates and shells."*, In: *Ninth congress of international mechanical applications*, (1957), 321-330.

[Whitney 1969]: Whitney, J.M., *"The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates"*, *Journal of Composite Materials*, (1969), 3, 534-547.

[Whitney 1973]: Whitney, J.M. et sun, C.T., "A higher-order theory for extensional motion of laminated composites", *Journal of Sound and Vibration*, (1973), 85-97.

[Wittrick 1987]: Wittrick, W.H., "Analytical three-dimensional elastic solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory", (1987), 23,441-464.

[Yang et Shen 2001]: Yang, J. et Shen, H.-S., "Dynamic response of initially stressed functionally graded", *Composite Structures*, (2001), 497 -508.

[Yang et Shen 2002]: Yang, J. et Shen, H.-S., "Vibration characteristics and transient response of shear deformable functionally graded plates in thermal environments", *Journal of Sound and Vibration*, (2002), 255: 579-602.

[Yin, 2004]: Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), « Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.

[Zenkour 2005]: Zenkour, A.M., "A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part2 -Buckling and Free Vibration", *International Journal of Solids and Structures*, (2005), 42, 5243-5258.

[Zhao et al 2009]: Zhao, X., Lee, Y.Y. et Liew, K.M., "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 918- 939.

[Zhou et al 2002]: Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. et Lo, S.H., "Three-dimentional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method", *International Journal of Solids structures*, (2002), 6339 -6353.

[Zhou et al 2004]: Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H. et Au, F.T.K., "Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2004), 1313-1334

[Zidi et al 2014]: Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.