

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et Matériaux

Présentée par

M^{elle} :MELLAL Fatma

Intitulé de la thèse

Etude de la vibration et de la propagation des ondes dans les structures composites

Soutenu le : / ... / Composition du jury :

Président	M. BENYOUCEF Samir	Pr	UDL SBA
Directeur de thèse	M. AIT ATMANE Hassen	Pr	UHBC Chlef
Co-Directeur de thèse	M. TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL SBA
Examineur	M. BOURADA Mohamed	Pr	UDL SBA
Examineur	M. DRAICHE Kada	MCA	U de Tiaret
Examineur	M. CHICK Abdelbaki	MCA	Ude Tiaret

Année universitaire 2021-2022

Dédicace

Je dédie ce travail à

Ma famille que je prie de trouver ici l'expression de ma reconnaissance, de mon profond respect et de mes sentiments les plus respectueux. Ainsi qu'a tous mes amis.

Remerciements

Je remercie en premier et en dernier lieu, DIEU tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

*J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **AIT ATMANE Hassen**, Professeur à l'UHB de Chlef, encadreur de cette thèse, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.*

*Je désire exprimer toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbes qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés*

*Je tiens à remercier Monsieur **BENYOUCEF Samir**, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbes, de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.*

*Mes sincères remerciements vont également à messieurs : **BOURADA Mohamed** Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbes, **DRAICH Kada** et **CHIKH Abdelbaki** maîtres de conférences de l'UIK de TIARET, **DRAIECH Kada** maîtres de conférences de l'UIK de TIARET qui ont voulu examiner ce travail.*

Je tiens à remercier ma famille et mes amis, pour le soutien continu qu'ils m'ont apporté tout aux longs de ces années d'études

Résumé

Ce travail a pour objectif d'analyser le comportement dynamique vibratoire des plaques en matériaux composites avancés avec des propriétés graduellement variables suivant l'épaisseur reposant sur fondation élastique. L'effet de cisaillement transversal est pris en considération dans l'analyse vibratoire. Les plaques FGM sont considérées comme reposant sur la couche de Winkler, qui est interconnectée avec une couche de cisaillement de Pasternak.

La propagation des ondes dans les plaques (FG) est étudiée à l'aide d'une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur (HOST) quasi-tridimensionnel (3D). Cette théorie n'a que cinq variables dans le champ de déplacement, ce qui signifie qu'il a un peu d'inconnues par rapport aux autres théories. L'effet de stretching est inclus avec la satisfaction des conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces de la plaque FG sans avoir besoin de facteurs de correction de cisaillement.

Dans la première partie de ce travail, on s'intéresse à étudier l'effet des fondations élastique sur la propagation d'onde dans les plaques parfaites avec des propriétés du matériau gradué supposées varier régulièrement selon des lois de puissance et exponentielle dans la direction z . Dans la deuxième partie, l'effet de la porosité sur la propagation des ondes d'une plaque P-FGM poreuse avec des différentes formes de distribution de la porosité est détaillé. En se basant sur le principe de Hamilton, nous dérivons les équations régissant les plaques FG reposant sur une fondation élastique, qui sont ensuite résolues analytiquement pour obtenir les relations de dispersion. Une étude paramétrique a été effectuée afin de quantifier les facteurs régissant le comportement vibratoire de ce type de structures FGM, et de comparer les résultats obtenus à ceux qui sont disponibles dans la littérature. Les résultats présentés ont démontré l'efficacité de la théorie quasi-3D actuelle pour prédire l'effet des fondations élastiques sur la propagation des ondes dans les plaques FG.

Mots clés : réponses dynamiques, plaques FGM, théorie quasi-3D, variables fondations élastiques, effet de stretching, porosité, fréquence, vitesse de phase.

Abstract

The aim of this work is to analyze the vibratory dynamic behaviour of plates made of advanced composite materials with gradually variable properties depending on the thickness resting on an elastic foundation. The transverse shear effect is considered in the vibration analysis. The FGM plates are considered to rest on the Winkler layer, which is interconnected with a Pasternak shear layer.

The wave propagation in plates (FG) is studied using a new quasi-three-dimensional (3D) high order theory (HOST). This theory has only five variables in the displacement field, which means it has a few unknowns compared to other theories. The stretching effect is included with the satisfaction of the boundary conditions of zero traction on the surfaces of the FG plate without the need for shear correction factors

In the first part of this work, is interested in studying the effect of elastic foundation on the wave propagation of perfect plates with properties of graduated material supposed to vary regularly according to power and exponential laws, in the z direction. In the second part, the effect of porosity on the wave propagation of a porous P-FGM plate with different forms of porosity distribution is detailed. Based on the Hamilton principle, we derive the equations governing the FG plates resting on an elastic foundation, which are then analytically resolved to obtain the dispersion relationships. A parametric study was carried out to quantify the factors governing the vibration behaviour of this type of FGM structure, and to compare the results obtained with those available in the literature. The results presented demonstrated the effectiveness of the current quasi-3D theory in predicting the effect of elastic foundations on wave propagation in FG plates.

Keywords: dynamic responses, FGM plates, quasi-3D theory, elastic foundations variables, stretching effect, porosity, frequency, phase velocity.

المخلص

يهدف هذا العمل إلى تحليل السلوك الاهتزازي الديناميكي للألواح في المواد المركبة المتقدمة ذات الخصائص المتغيرة تدريجيًا اعتمادًا على السماكة المستندة على أساس مرن. يؤخذ تأثير التشوه الناظمي بعين الاعتبار في تحليل الاهتزاز. يُعتقد أن الصفائح المتدرجة وظيفيًا تستقر على طبقة وينكلر ، المترابطة مع طبقة قص باسترنالك

يتم التحقيق في انتشار الموجة في الصفائح المتدرجة وظيفيًا باستخدام نظرية القص عالية المستوى شبه ثلاثية الأبعاد تحتوي هذه النظرية على خمسة متغيرات فقط في مجال الإزاحة ، مما يعني أن لديها القليل من المجاهيل مقارنة بالنظريات الأخرى. يتم تضمين تأثير التمدد مع إرساء شروط حدود الشد الصفرية على أسطح الصفائح دون الحاجة إلى عوامل تصحيح القص

في الجزء الأول من هذا العمل اهتمنا بدراسة تأثير الأساسات المرنة على انتشار الموجة في صفائح مثالية ذات وفقًا لقوانين للقوة و الأسيية . في الجزء الثاني ، تم تفصيل Z خصائص مادة متدرجة يُفترض أن تتغير بانتظام في الإتجاه تأثير المسامية على انتشار الموجة لي الصفائح المسامية مع أشكال مختلفة من توزيع المسامية. استنادًا إلى مبدأ هاملتون ، نشق المعادلات التي تحكم الصفائح المستندة على أساس مرن ، والتي يتم حلها بعد ذلك بشكل تحليلي للحصول على علاقات التشتت. تم إجراء دراسة بارامترية من أجل تحديد العوامل التي تحكم السلوك الاهتزازي لهذا النوع من الهياكل ذات الخصائص المتغيرة تدريجيًا ، ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك المتوفرة في الأدبيات. أظهرت النتائج المقدمة فعالية النظرية شبه ثلاثية الأبعاد الحالية للتنبؤ بتأثير الأساسات المرنة على انتشار الموجات في الصفائح المتغيرة تدريجيًا

الكلمات المفتاحية: الاستجابات الديناميكية ، الصفائح المتغيرة تدريجيًا ، النظرية شبه ثلاثية الأبعاد ، متغيرات الأساس المرنة ، تأثير التمدد ، المسامية ، التردد ، سرعة الطور

Sommaire

SOMMAIRE

Dédicace	ii
Remerciement.....	iii
Résumé.....	iv
Abstract.....	v
ملخص	vi
Sommaire.....	vii
Liste des figures.....	xii
Liste des tableaux.....	xv
Liste des notations.....	xvii
Introduction générale.....	2
Chapitre I : Aperçu générale sur les FGM	6
I.1. Introduction.....	7
I.2. Matériaux fonctionnellement gradués FGM.....	9
I.2.1. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés.....	10
I.2.2. Type, composition et structures des FGM.....	10
I.2.2.1. Selon la composition du FGM.....	11
I.2.2.2. Selon la Microstructure d FGM.....	12
I.2.2.3. Selon Le gradient de porosité.....	14
I.3. Processus de fabrication des FGM.....	16
I.3. 1. Méthodes conventionnelles.....	17
I.3.2. Méthodes additive.....	20
I.3.3. Comparaison des méthodes de fabrication.....	23
I.4. Domaines d'applications des FGM.....	24
I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM parfaite	25
I.5.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM).....	25
I.5.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM)	26
I.5.3. Loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) symétrique.....	27
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	
imparfaite.....	28
I.6.1. Model de porosité de Kim et al.....	29
I.6.2. Model de porosité de Coskun et al	30
I.6.3. Model de porosité de Li et Zheng.....	31
I.7. Conclusion.....	32
Chapitre II : Lois et modélisation des FGM reposant sur fondation élastique	33
II.1 Introduction.....	34
II.2. Théories analytiques des plaques.....	35
II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	35
II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	36
II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	37
II.2.4. Théorie raffinée des plaques	38
II.2.5. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	39
II.2.6. Effet de la déformation normale (effet de stretching).....	41

II.2.7. Théorie zig-zag.....	41
II.3. Les approches de la modélisation de la fondation élastique.....	43
II. 3.1 Modèle de Winkler.....	44
II. 3.2.Modèle du continuum élastique.....	45
II. 3.3.Fondation de Filonenko-Borodich.....	46
II. 3.4.Fondation de Hetenyi.....	47
II. 3.5.Fondation de Pasternak.....	48
II. 3.6.Fondation Kerr.....	49
II. 3.7.Fondation de Vlasov.....	50
II. 3.8.Fondation de Reissner.....	52
II. 3.9.Fondation variables de Pasternak / Winkler.....	52
II. 3.10.Fondation de viscoélastique.....	53
II. 4.Travaux antérieurs sur la modélisation des FGM sur fondation élastique.....	55
II.5. Conclusion.....	59
Chapitre III : Analyse théorique de la propagation des ondes	60
III.1 Introduction.....	61
III.2.Analyse théorique du comportement vibratoire des plaques FGM.....	61
III.2.1. Formulation du problème.....	61
III.2.1.1. Caractéristiques matérielles d'une Plaque P-FGM parfaite.....	62
III.2.1.2. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque P-FGM poreuse.....	63
III.2.1.3. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque E-FGM.....	65
III.2.1.4. Fondation élastique.....	66
III.2.2 Cinématique et équations constitutive.....	66
III.2.3. Equations de mouvement.....	69
III.2.3.1 Énergie de déformation.....	70
III.2.3.2 l'énergie de déformation des fondations élastiques.....	70
III.2.3.3 Énergie cinétique.....	70
III.2.4. Solution analytique pour une plaque rectangulaire sur appuis simples.....	74
III.2.4.1.Relations de dispersion.....	74
III. 3. Conclusion.....	77
Chapitre VI : Propagation d'onde de la plaque FGM reposant sur fondation élastique	78
IV.1. Introduction.....	79
IV.2. Résultats numériques et discussion.....	79
IV.2.1. Propagation des ondes dans les plaques P- FGM	80
IV.2.1.1 Validations des résultats de la fréquence circulaire.....	80
IV.2.1.2. Validation de l'effet de la déformation normal (effet de stretching).....	82
IV.2.1.3 Etude paramétrique de la plaque P-FGM.....	89
IV.2.1.3.Etude paramétrique de la plaque E-FGM	98
IV.2.1.4. Etude paramétrique comparative des plaques en P-FGM et E-FGM.....	103
IV.3. Conclusion.....	106
Chapitre V : Effet de la porosité sur la propagation d'onde de la plaque FGM reposant sur fondation élastique	107

V.1. Introduction.....	108
V.2. Résultats numériques et discussion.....	108
V.2.1. Validation.....	109
V.2.1.1. Validation de l'effet de fondation.....	109
V.2.1.2. Validation de l'effet de la porosité.....	110
V.2.2. Etude paramétrique.....	112
V.2.2.1. Etude paramétrique de la porosité uniforme.....	112
V.2.2.2. Etude paramétrique de la porosité non uniforme.....	121
V.3. Conclusion.....	126
Conclusions générales et perspectives	128
Références bibliographiques	133

Liste des figures et **tableaux**

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

Figure I.1. Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes	7
Figure I.2. Schémas de différents types de composite.....	8
Figure I.3. FGM dans la nature.....	9
Figure I.4. Exemples typique de trois types de gradient FGM.....	11
Figure I.5. Exemples des combinaisons possibles en matériaux utilisés dans les FGM	12
Figure I.6. FGM classés avec différentes formes de gradient	13
Figure I.7. Multi-matériaux FGAM avec microstructure de gradation continue entre deux matériaux.....	13
Figure I.8. Types de gradients.....	14
Figure I.9. Différents types de distribution de la porosité.....	15
Figure I.10. Trois différents modèles sacrificiels rendu et imprimé en 3D	16
Figure I.11. Impact du processus choisi sur les temps et étapes de développement et fabrication d'une pièce fonctionnelle.....	17
Figure I.12. La méthode de coulage centrifuge.....	18
Figure I.13. La méthode de la métallurgie des poudres.....	18
Figure I.14. La méthode de la projection plasma.....	19
Figure I.15. Technique de dépôt en phase de vapeur.....	20
Figure I.16. Illustration du procédé de photopolymérisation en cuve, adapté de Rias..	20
Figure I.17. Illustration du procédé de projection de matière (technologie Polyjet), adapté de Rias.....	21
Figure I.18 : Illustration du procédé de dépôt de matière sous énergie concentrée, adapté de Rias.....	22
Figure I.19. Illustration du procédé de stratification de couches, adapté de Rias.....	23
Figure I.20. Comparaison des méthodes de fabrication.....	23
Figure I.21. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	26
Figure I.22. Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	27
Figure I.23. Variation de la fraction volumique dans une plaque en S-FGM.....	28
Figure I.24. (a) porosité normalisée, (b) module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur.....	30
Figure I.25. Variation de module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur.....	31
Figure I.26. Variation de module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur.....	32

Chapitre II

Figure II.1. Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	35
Figure II.2. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	36
Figure II.3. Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CLPT) et (FSDT)	37
Figure II.4. Champ de déplacements du modèle zig-zag.....	42
Figure II.5. Fondation de Winkler.....	44
Figure II.6. Tassement du sol dû à une charge concentrée pour le modèle du continuum élastique.....	46
Figure II.7. Fondation de Filonenko – Borodich.....	47
Figure II.8. Fondation de Hetenyi.....	48
Figure II.9. Fondation de Pasternak.....	49
Figure II.10. Fondation de Kerr.....	50
Figure II.11. Modèle de fondation de Vlasov.....	50
Figure II.12. Diverses répartitions de la fondation élastique de Winkler dans la direction axiale.....	53

Figure II.13. Fondations de viscoélastique : (a) type Maxwell, (b) type Kelvin.....	54
Chapitre III	
Figure III.1. la géométrie d'une plaque FGM reposant sur fondation élastique.....	62
Figure III.2. la géométrie d'une plaque FGM poreuse reposant sur fondation élastique.....	63
Chapitre VI	
Figure IV.1. Variation de la fréquence fondamentale ω en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée ($a/h=2$) pour 3 modes.....	84
Figure IV.2. Variation de la vitesse de phase c en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée ($a/h=2$) pour 3 modes.....	85
Figure IV.3. Variation de la fréquence fondamentale ω en fonction du paramètre de matériau P d'une plaque FGM carrée et parfait ($a/h=5$) pour 3 modes.....	86
Figure IV.4. Variation de la vitesse de phase c en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfait ($a/h=5$) pour 3 modes.....	87
Figure IV.5. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de différentes plaques FGM carrées en fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).....	88
Figure IV.6. Variation de la vitesse de phase de différentes plaques FGM carrées en fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).....	88
Figure IV.7. Effet de la fondation élastique, nombre d'onde et indice de puissance P sur la fréquence circulaire (a) et la vitesse de phase (b) de la plaque FGM pour le mode M1 ($a/h= 5$).....	90
Figure IV.8. Effet de la fondation élastique, nombre d'onde et le rapport d'épaisseur sur la fréquence circulaire (a) et la vitesse de phase (b) pour le mode M1 ($K_w = 1000$, $K_p = 100$).....	92
Figure IV.9. Les courbes de dispersion de différentes plaques FGM reposants sur fondation élastique.($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h=0.2$ m).....	93
Figure IV.10. Courbes de la variation de la vitesse de phase de différentes plaques FGM reposants sur fondation élastique. ($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h=0.2$ m).....	95
Figure IV.11. Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$).....	96
Figure IV.12. Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel P-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$).....	98
Figure IV.13. Courbes de dispersion de différentes plaques reposantes sur fondation élastique ($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h=0.2$ m).....	99
Figure IV.14. Les vitesses de phase des différentes plaques P-fgm pour différent rapport épaisseur ($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h=0.2$ m).....	100
Figure IV.15. Les fréquences des différentes plaques E-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$).....	102
Figure IV.16. Les vitesses de phase des différentes plaques E-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$).....	103
Figure IV.17. Comparaison de la fréquence et la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM basées sur fondation élastique ($K_w = 1000$, $K_p = 100$) ($a / h = 5$, $p = 3$).....	104
Figure IV.18. Comparaison de la fréquence et la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM basées sur fondation élastique ($K_w = 1000$, $K_p = 100$) ($k = 10$, $P = 3$).....	105
Chapitre V	
Figure V.1. Les courbes de dispersion des différentes plaques FG reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) en fonction de l'indice de puissance P ($\kappa=10$ et $a/h=5$) pour 5 modes	113

Figure V.2. Les courbes de vitesse de phase de différentes FGM reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) en fonction de l'indice de puissance $P(\kappa=10$ et $a/h=5$) pour 5modes	114
Figure V.3. Les courbes de dispersion des différentes plaques FG reposant sur fondation élastique en fonction de nombre d'onde ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$, $p=2$ et $a/h=5$)	116
Figure V.4. Les courbes de vitesse de phase de différentes FGM reposants sur fondation élastique en fonction de nombre d'onde ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$, $p=2$ et $a/h=5$)	117
Figure V.5. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle des plaques FGM reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $k=10$).....	118
Figure V.6. Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse de phase des plaques FGM reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $k=10$).....	119
Figure V.7. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence et la vitesse de phase ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$, $k=10$ et $p=2$).....	120
Figure V.8. Influence du paramètre de matériaux sur la fréquence et la vitesse de phase ($k=10$ and $a/h=10$).....	121
Figure V.9. Les courbes de dispersion des différentes plaques FGM reposant sur fondation élastique en fonction de l'indice de puissance de matériaux ($\kappa=10$, $K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $a/h=5$).....	122
Figure V.10. Les courbes de vitesse de phase de différentes FGM reposants sur fondation élastique en fonction de l'indice de puissance de matériaux ($\kappa=10$, $K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $a/h=5$).....	124
Figure V.11. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle des plaques FG reposants sur fondation élastique ($k_w = 1000$, $k_p = 100$) ($k_p=10$ and $a/h=5$).....	125
Figure V.12. Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse e phase des plaques FG reposants sur fondation élastique ($k=10$, $K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $a/h=10$).....	126
Figure V.13. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase ($k=10$ et $P=2$).....	127
Figure V.14. Influence du paramètre du matériau sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase ($k=10$ et $a/h=10$).....	128

Liste des tableaux

Chapitre I	
Tableau I.1 : Les divers domaines d'applications des FGM.....	24
Chapitre II	
Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM.....	39
Chapitre III	
Tableau III.1 : Facteurs de la distribution de porosité ξ	64
Chapitre VI	
Tableau V.1 : Propriétés matérielles de la plaque FGM.....	79
Tableau IV.2 : Comparaison de présents résultats de la fréquence circulaire pour le mode M1 d'une plaque isotrope avec d'autre résultats ($h= 2\text{mm}$, $\kappa =$ nombre d'onde, $\rho = 7480 \text{ Kg/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$).....	80
Tableau IV.3 : Comparaison des présents résultats de la fréquence circulaire pour le mode M1 d'une plaque isotrope avec d'autre résultats ($h= 2\text{mm}$, $\kappa =$ nombre d'onde, $\rho = 7480 \text{ Kg/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$).....	81
Tableau IV.4 : Comparaison des présents résultats de la fréquence circulaire d'une plaque carrée SUS304/Al2O3.....	83
Chapitre V	
Tableau V.1 : Propriétés matérielles de la plaque FGM.....	109
Tableau V.2 : Comparaison de la fréquence fondamentale dimensionnelle $\varpi = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée reposant sur fondation élastique Winkler-Pasternak	110
Tableau V.3 : Fréquence naturelle d'une plaque poreuse reposant sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) pour des variétés de rapport d'épaisseur, paramètre de porosité, indice de la loi de puissance et distribution de porosité.....	111
Tableau V.4 : Vitesse de phase d'une plaque poreuse reposant sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) pour des variétés de rapport d'épaisseur, paramètre de porosité, indice de la loi de puissance et distribution de porosité.	111

Liste des notations

Liste des notations

Notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
w	Déplacement transversale
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
P	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen
u, v, w	Les déplacements dans les directions \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z}
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
θ_i	Rotations autour de l'axe i
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les éléments de contraintes normales
τ_{xz}	Les éléments de contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Les éléments de déformations normales
γ_{xz}	Les éléments de déformations de cisaillement
x, y, z	Les coordonnées cartésiennes rectangulaires
δU	l'énergie de déformation virtuelle
δV	le travail virtuel externe
δK	La variation de l'énergie cinétique
$q, N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$	Les charges transversales appliquées
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ et $\delta \phi_z$	Champ virtuel de déplacement
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle

C_{ij}	Coefficient de rigidité
P_m, P_c	les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
λ	Fraction de volume de porosité
ρ	Densité matérielle de la structure FGM
$\{..\}$	Vecteur colonne
$[..]$	Matrice
$A, A^s, B, D, B^s, D^s, H^s$	Les composantes de rigidité
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ et ϕ_{mn}	Les coefficients de déplacement maximum inconnus
ω	Fréquence naturelle
<i>FGM</i>	Matériau fonctionnellement graduée
<i>Al</i>	L'aluminium
Al_2O_3	Oxyde d'aluminium
<i>Si3N4</i>	Nitride de silicium
<i>SUS304</i>	Acier inoxydable
<i>CLPT</i>	La théorie classique de la plaque laminée
<i>FSDT</i>	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
<i>ESDPT</i>	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle
<i>TSDT</i>	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre
<i>HSDT</i>	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans des nombreux domaines industriels grâce à leurs avantages. Les matériaux et structures composites avancés, comme technologies habilitantes pour les futures structures de génie civil, continuent d'être les éléments clés pour déterminer la fiabilité, les performances, la stabilité et la rentabilité de ces systèmes. Pour une partie de la future structure, le développement et le déploiement de nouvelles technologies peuvent avoir plus d'impact sur la réduction des coûts d'exploitation et du poids brut que tout autre domaine technologique. Néanmoins, leur prix et l'impact sur l'environnement restent parmi les principaux inconvénients. Leur utilisation dans les divers industries nécessite d'améliorer la connaissance de ces matériaux. En effet, des travaux ont été menés ces dernières années pour apporter des solutions aux différentes sollicitations notamment les vibrations, le flambement et les conditions hygrothermiques.

Le concept de structures composites avancées considérées dans ce travail est des structures bidimensionnelles continuellement variables suivant la plus petite direction de la structure, intégrant plusieurs couches, par alternance, aux propriétés mécanique différentes. En tant que structures bidimensionnelles, nous considérons celles dont la dimension, généralement l'épaisseur, est négligeable par rapport aux deux autres dans les directions planes. Les structures bidimensionnelles typiques sont les plaques et les coques. Dans notre étude actuelle, nous nous concentrerons sur les plaques de différentes épaisseurs, c'est-à-dire les plaques minces, les plaques moyennement épaisses et les plaques épaisses. Les plaques sont supposées sans courbure suivant les deux directions dans leur plan. Dans le cas des plaques, un système de référence cartésien est utilisé.

Les plaques en matériaux fonctionnellement gradué (FGM) sont largement utilisées dans des divers domaines d'ingénierie comme la mécanique, aérospatial, chimique, électrique, etc. L'importance principale de structures et d'élément en FGM inclut la résistance thermique élevée et la variation graduée des caractéristiques matérielles le long de la dimension désirée.

Les structures FGM comme les plaques sont principalement conçus pour des environnements à haute température. Les structures FGM sont d'abord présentées pour le but de l'employer comme une barrière thermique dans des structures aérospatiales. Par la suite il est progressivement employé dans des applications à haute température diverses. Des exemples incluent des structures aéronautiques et aérospatiales comme la rampe de lancement de fusée, le véhicule spatial, l'avion, etc (Hebali et al. [1]; Al-Basyouni et al. [2] ; Attia et al. [3]; Bourada et al. [4]; Ait Atmane et al. [5]; Boukhari et al. [6]).

Les fondations sont des éléments ou des systèmes physiques importants en raison de leur large éventail application dans différents domaines scientifiques et techniques, y compris la mécanique, le civil, l'électricité, la nanotechnologie. En fonction des applications du système structural considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisation pour les fondations. Ils sont très attractifs pour les chercheurs en raison de leurs applications cruciales dans différents systèmes. L'un des principaux objectifs des chercheurs est d'étudier le comportement dynamique et statique de l'interaction structures-fondations.

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'effet de la fondation élastique et la considération de la déformation normale sur le comportement dynamique vibratoire des structures non homogènes tel que les plaques. Pour une fondation élastique, nous cherchons à utiliser les différentes approches et la précision de la modélisation du comportement des sols. Cependant, une théorie basée sur la déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour étudier les vibrations, la propagation des ondes des éléments plaques a été proposée. Cette théorie actuelle n'a que cinq inconnues contre d'autres théories qui ont plus d'inconnues. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur selon différents modèles de distribution. Les équations d'équilibre des plaques, reposant sur la fondation élastique, sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels appelé, aussi, principe d'Hamilton.

Afin d'atteindre les objectifs visés dans cette étude, nous avons divisé notre travail en cinq chapitres, une introduction générale et une conclusion.

Le chapitre I présente un aperçu bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradué FGM, des éléments et des notions de base. Tout d'abord, l'histoire, le développement et la définition générale des matériaux à propriétés graduellement variables sont présentés.

Nous décrivons l'évolution de la recherche scientifique sur ce type de matériau. Ensuite, nous discutons de l'idéalisation mathématique des FGM et des modèles micromécaniques des FGM, qui donnent une explication plus ou moins réaliste sur la distribution spatiale du matériau de base selon différentes approches. Nous présentons ensuite une revue des techniques utilisées pour fabriquer les FGM et les applications de ses matériaux

Le chapitre II est réservé pour l'illustration de différentes théories de modélisation. On a commencé par la présentation des théories analytiques des plaques, puis les approches de la modélisation de la fondation élastique et enfin en a essayer de rassembler les différents Travaux de Modélisation des FGM sur fondation élastique

Le troisième chapitre, s'intéresse au développement d'une formulation d'un modèle analytique de la propagation des ondes dans les plaques FGM reposant sur fondations élastique en tenant compte l'effet de la déformation normale (effet de stretching), suivi par une formulation d'autre modèle analytique qui présente l'effet de la porosité sur la propagation des ondes d'une plaque FG poreuse. Ces modèles analytiques basés sur une théorie d'ordre élevé avec une nouvelle forme de distribution de la porosité, et un nouveau champ de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées.

Le chapitre quatre est consacré à la validation et la présentation des résultats de l'analyse numérique .Nos résultats sont comparés avec d'autre présentés dans la littérature et aussi une étude paramétrique de la propagation d'onde du modèle analytique proposé de la plaque FGM reposant sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec la considération de deux lois de matériaux de puissance et exponentiel a été détaillée successivement .

Le cinquième chapitre traie les résultats d'une analyse des caractéristiques vibratoire et la propagation des ondes des plaques poreuses à gradation fonctionnelle reposants sur des fondations Winkler-Pasternak avec deux formes de distribution de porosité (uniforme et non uniforme). L'effet de la déformation normale (effet d'étirement) a été pris en considération .l'influence de divers facteurs tels que le paramètre de porosité, la distribution de forme de porosité, le rapport d'épaisseur et l'indice de loi de puissance sur la propagation des ondes et la vitesse de phase des plaques poreuses FGM a été présenté.

Introduction générale

Enfin, Nous achevons notre thèse par des conclusions générales qui reflétant le contenu de ce travail, ainsi que des perspectives pour de futurs chercheurs inspirées au cours de ce travail.

Chapitre I :

Aperçu générale sur les FGM

I.1.Introduction

Les matériaux ont joué un rôle très important dans le développement de notre société. Les propriétés des matériaux doivent s'adapter aux changements technologiques actuels et avoir une série des fonctions et des caractéristiques qui n'ont pas encore été introduites. L'utilisation des matériaux de base disponibles dans divers composés inorganiques et organiques a permis d'aller vers un développement scientifique de polymères avancés, d'alliages d'ingénierie, de céramiques structurales, etc.

La structure de développement des matériaux modernes est illustrée dans la figure I.1 [7]. Par conséquent, les composites sont une classe de matériaux avancés fabriqués en combinant un ou plusieurs matériaux de différentes propriétés chimiques et physiques à l'état solide. Ces matériaux offrent des propriétés supérieures par rapport à leurs matériaux d'origine et sont également légers. Les matériaux composites disposent un choix important par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages : légèreté, résistance mécanique et chimique, bon comportement à l'humidité et à la corrosion, maintenance réduite, liberté de formes. Ils assurent une vie durable de certains équipements grâce à leurs très bonnes propriétés mécaniques et chimiques.

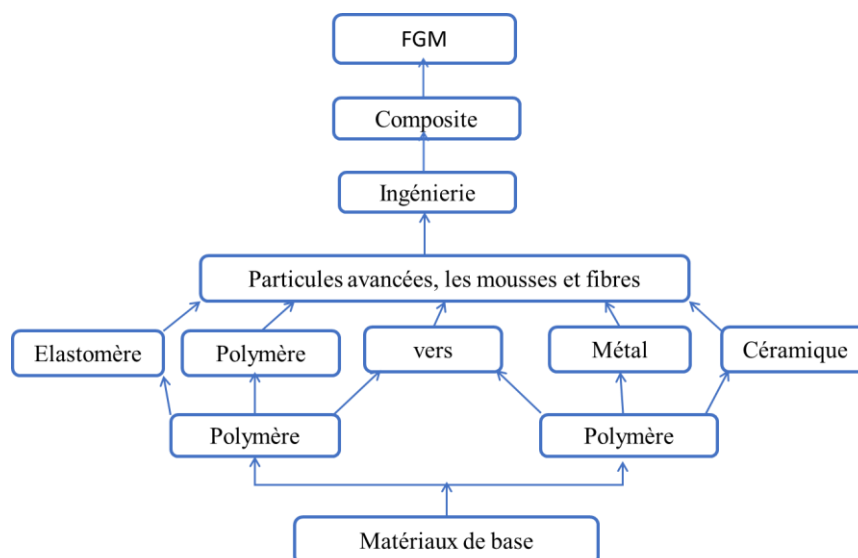


Figure I.1: Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes [7].

Les matériaux composites peuvent être classés de différentes manières [8]. Une classification basée sur la géométrie est représentée dans la figure I.2. Cette dernière est responsable à avoir des propriétés mécaniques et des performances élevées des composites.

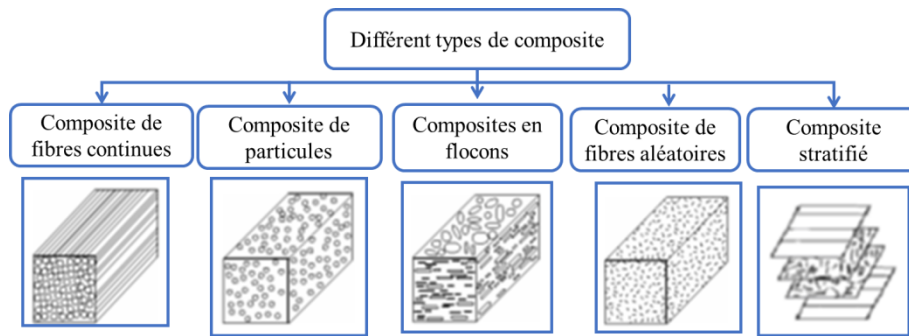


Figure I.2 : Schémas de différents types de composite [8]

La diffusion et l'expansion rapide des structures composites au cours de ces dernières années ont mis en évidence l'importance de contrôler les propriétés spécifiques d'un matériau en concevant sa structure interne de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. En effet, en raison de la nature multiphasique de ces matériaux, une connaissance complète de chacun de leurs composants et leurs interactions est nécessaire pour concevoir et fabriquer des systèmes personnalisables capables de répondre aux besoins des clients. En effet un potentiel de développement par les chercheurs en matériaux implique l'innovation d'une nouvelle gamme des matériaux composites plus performants qui sont notés les matériaux fonctionnellement gradués(FGM).

Par rapport aux structures composites traditionnelles, les FGM offrent des avantages uniques tels que ; la possibilité de l'atténuation et l'élimination des fissures, peuvent répondre simultanément à plusieurs exigences de performance différentes et enfin, développé des structures légères avancées.

Ce chapitre est essentiellement centré sur une revue bibliographique. Le but de cette revue de la littérature est de fournir des informations de base sur les matériaux fonctionnellement gradués(FGM) axée sur leur historique, définitions, composition et classification. Elle comprend également les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM et les lois de mélange.

I.2. Matériaux fonctionnellement gradués FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec l'épaisseur de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Les FGM fournissent un changement relatif en termes de propriétés des matériaux sur la distance et les directions [9].

Les FGM existent dans la nature (Figure I.3) et peuvent ressembler à des entités biologiques telles que les cellules et les tissus, par exemple le bambou, la coquille, les os, qui ont tous des structures graduées constituées de composants matériels biologiques. La dent est un excellent exemple de FGM naturel. En effet, elle requière une grande résistance à la friction et aux impacts sur la partie extérieure et une structure interne flexible pour des raisons de fatigue et de dureté.

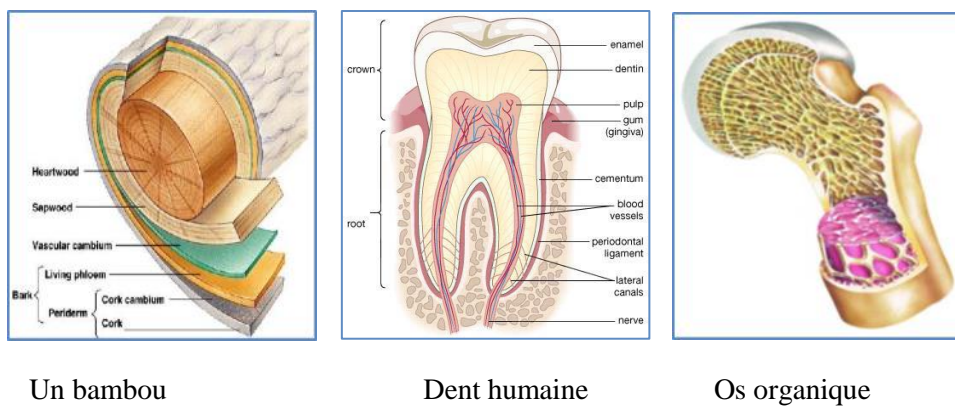


Figure I.3: FGM dans la nature

I.2.1. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriété

L'idée de matériaux fonctionnellement classés avec des gradients de composition et de structure pour les matériaux polymères a été proposée pour la première fois par Bever et al. [10]. Le concept de FGM est apparu officiellement en 1984-1985, lorsque les chercheurs japonais dans l'aérospatiale ont eu besoin d'un matériau pouvant supporter le gradient de température généré lors du retour d'une navette sur Terre. Dans ce cas le gradient de température est d'environ 1000°C entre l'extérieur et l'intérieur de la navette. Ils ont donc créé une structure en FGM ayant des propriétés d'une céramique (grande résistance au gradient de température) sur la surface extérieure, exposée à de hautes températures, et avec des propriétés d'un matériau métallique sur la surface intérieure afin d'assurer la tenue structurelle de la navette. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux ont comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrières thermiques dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [11]. En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM se sont développés pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais se sont aussi élargis à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [12].

I.2.2. Type, composition et structures des FGM

Les FGM peuvent généralement être classées en trois groupes différents de gradient selon: la composition, la microstructure et la porosité comme le montre la figure I.4 [13]. Le type de composition du gradient FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre, conduisant à des phases différentes avec des structures chimiques différentes.

Ses différentes phases de production dépendent de la quantité synthétique et des conditions dans lesquelles les matériaux renforcés sont produits [14].

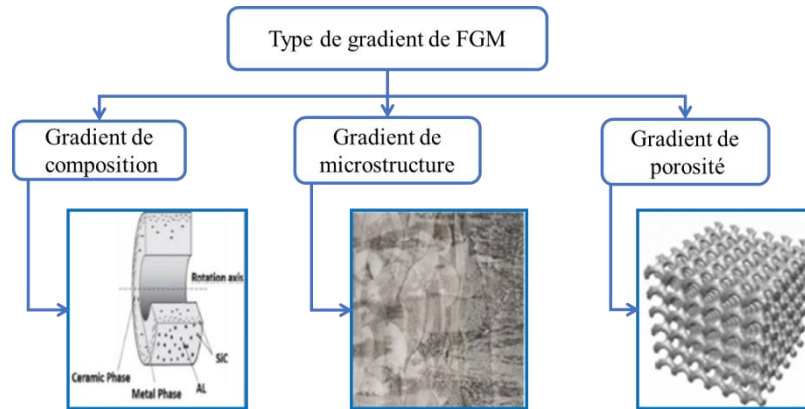


Figure I.4: Exemples typique de trois types de gradient FGM [13].

I.2.2.1. Selon la composition des FGM

Les matériaux FGM et leur composition sont sélectionnés en fonction du rôle que le matériau doit le remplir. Les FGM ont été initialement classées par les chercheurs dans les matériaux composites conventionnels en fonction des combinaisons de constituants utilisées [15]. Il existe de nombreuses combinaisons de matériaux possibles qui peuvent être utilisées pour produire des FGMs ; le métal-métal, le métal-céramique, la céramique-céramique ou la céramique-polymère [16] sont les plus courants, comme le montre la figure I.5 [15, 17]

Les FGM les plus courants sont des composites métaux/ céramiques dans lesquels la partie céramique a une bonne résistance à la chaleur et la partie métallique à une excellente résistance à la rupture.

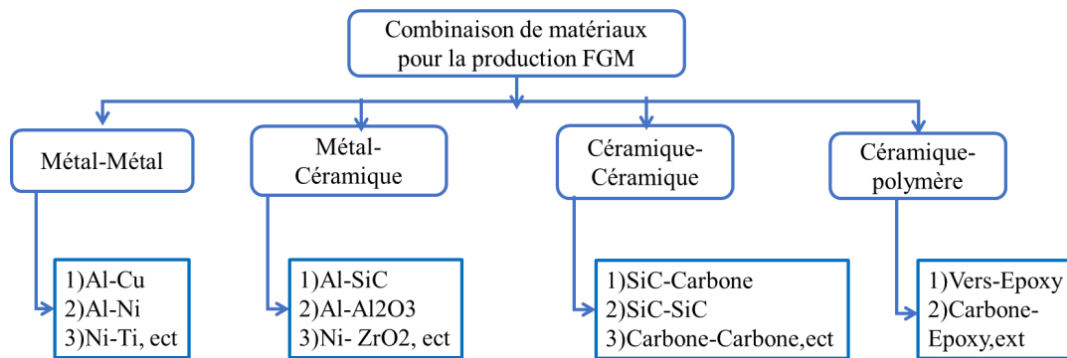


Figure I.5: Exemples des combinaisons possibles en matériaux utilisés dans les FGM [14]

I.2.2.2. Selon la microstructure des FGM

L'unité structurale d'une FGM peut être représentée par l'indice de gradient de matériau. Cet indice indique la vitesse dont les propriétés du matériau varient. La composition chimique, la configuration géométrique et l'état physique des FGM dépendent de l'indice de gradient du matériau.

Les FGM peuvent généralement être classés en deux groupes principaux: matériau gradué continu et discontinu comme le montre la figure I.6 [18].

- Dans le premier groupe, aucune zone claire où ligne de coupe de séparation ne peut être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone.
- Dans le deuxième groupe, les ingrédients du matériau changent selon une gradation par étapes discontinu qui est connue sous le nom de FGM en couches ou discrète.
- Continus et discret peuvent en outre être classés en trois types: gradient de composition (Figure I.6 (c, f)), gradient d'orientation (Figure I.6 (d, g)), gradient de fraction (Figure I.6 (e, h)). Un autre sous-groupe peut être obtenu en considérant le changement de la taille dans n'importe lequel des cas (par exemple, grossissement de la taille des grains ou granulométrie différente) [19].

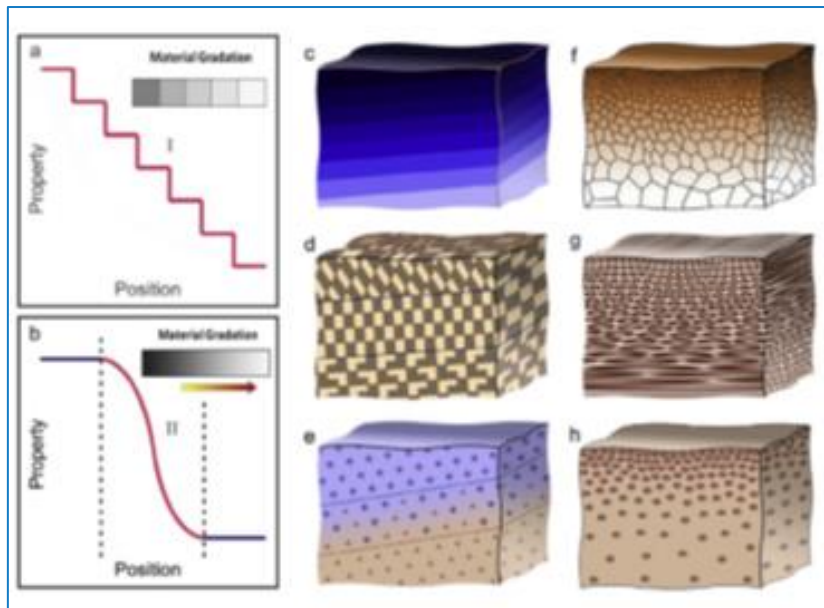


Figure I.6 : FGM classés avec différentes formes de gradient (a) MGF discrètes / discontinues avec interface. (b) MGF en continu sans interface. (c, f) Composition pente. (d, g) Gradient d'orientation. (e, h) Gradient de fraction [19].

La figure I.7 montre une transition douce et transparente entre les matériaux de 0% à une extrémité à 100% à l'autre extrémité d'un multimatériaux FGAM. La variation continue dans l'espace 3D peut être obtenue en contrôlant les ratios dans lesquels deux ou plusieurs matériaux sont mélangés pendant le dépôt et avant le durcissement. Cependant, la variation de composition doit être contrôlée par le programme informatique [20].

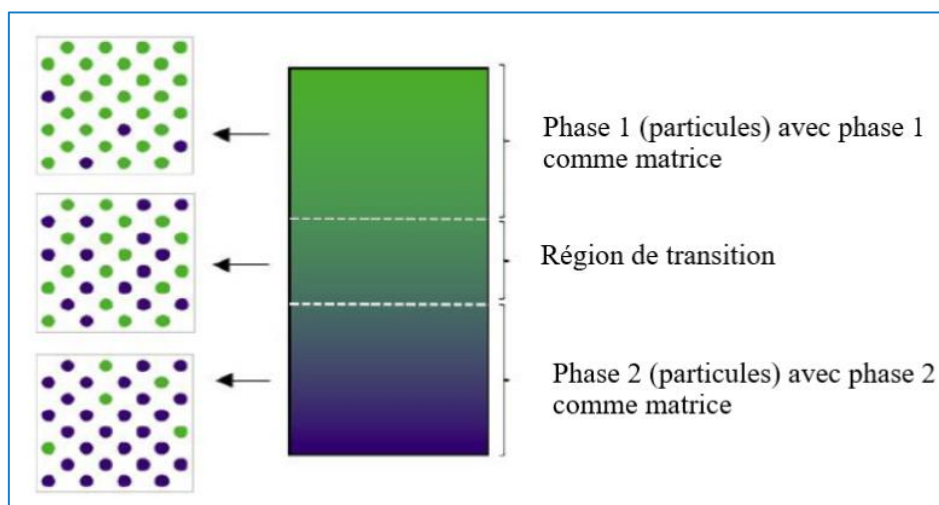


Figure I.7: Multi-matériaux FGAM avec microstructure de gradation continue entre deux matériaux.

De point de vue mathématique, le coefficient de Poisson, la densité du matériau, le module d'élasticité, le module de cisaillement et le coefficient de dilatation thermique changent dans une direction définie, où un gradient de propriété peut être progressif ou continu (linéaire, exponentiel ou parabolique) Figure I.8 [21].

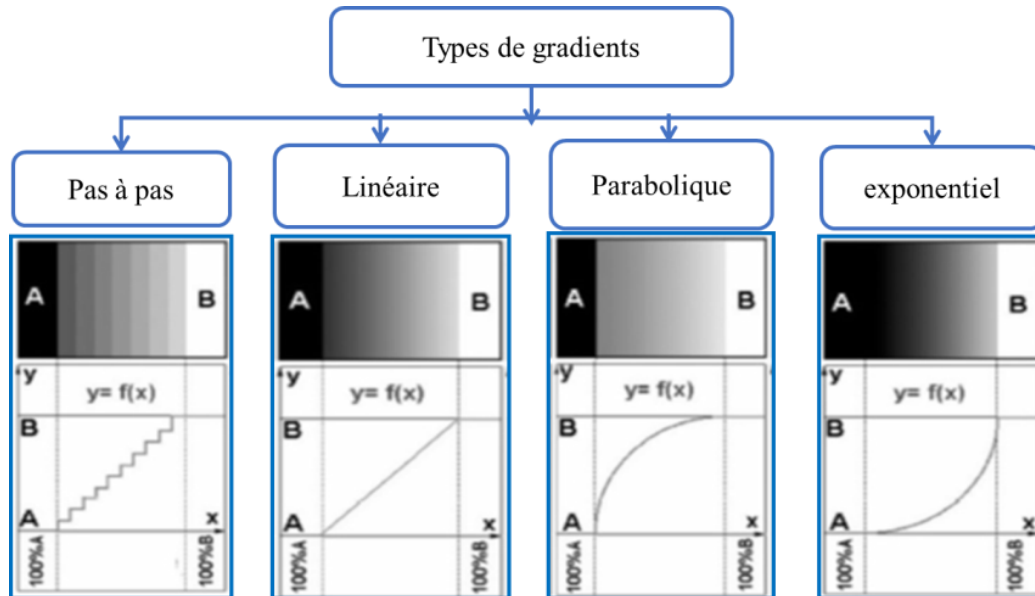


Figure I.8 : Types de gradients [21].

I.2.2.3. Selon Le gradient de porosité des FGM

La porosité est définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension). D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant a priori de la matière gazeuse. Aussi, néanmoins, il est important de signaler que pour les matériaux composites, le concept de porosité correspond à des interstices de petite taille (ordre millimétrique et inférieur) par rapport aux fissures, diaclases ou délaminages [22].

La porosité du matériau est modifiée avec le changement de position spatiale dans le matériau en vrac. La dégradation de la taille de la porosité peut être obtenue en modifiant les particules de poudre utilisées à différents emplacements dans le matériau en vrac au cours du processus de gradation [23]. La figure I.8 représente les différents types de porosité suivant leurs géométries.

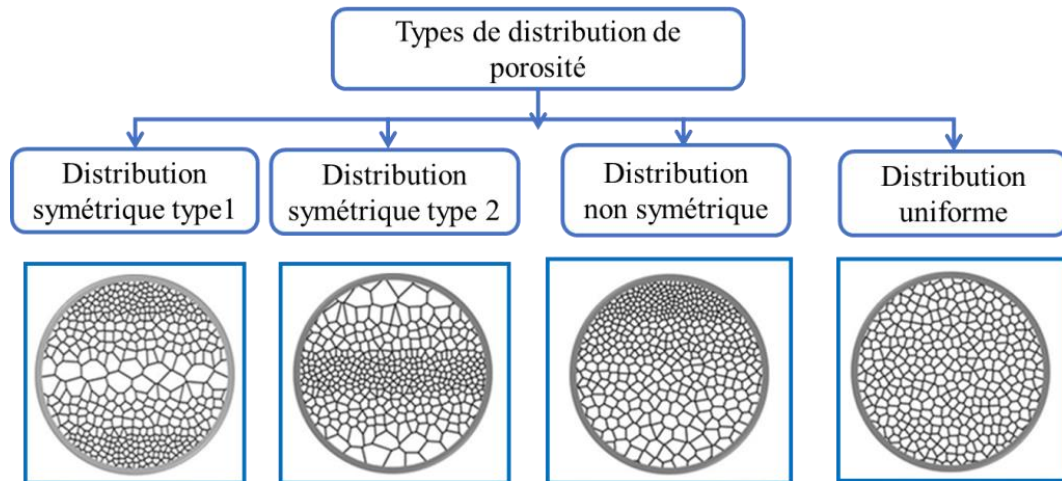


Figure I.9 : Différents types de distribution de la porosité [23]

Il est admis que pour les FGM, le processus de fabrication utilisé du frittage est le responsable à la formation des micros-vides ou porosités dans ces matériaux, ce qui rend important l'introduction d'effets de porosité au stade de la conception des structures [24].

Les matériaux fonctionnellement gradués poreux (FGMP) sont des matériaux innovants adaptés à des fonctions spécifiques et avancées, dans lesquelles une gradation spatiale de la structure et / où de la composition conduit à des propriétés adaptées. Pour cette raison, ces matériaux trouvent une application dans une large gamme de domaines de haute technologie tels que l'énergie, le bâtiment, l'aérospatiale, la filtration et la bioingénierie. [25].

À titre exemple, la fabrication de matériaux en mousse à gradient de porosité (matériaux poreux à gradation fonctionnelle - FGMP) est largement souhaitée par les scientifiques afin d'obtenir une performance améliorée (propriétés à gradation fonctionnelle 3D), principalement en raison de leur faible densité, de leur haute résistance et de leur fonction spécifique.

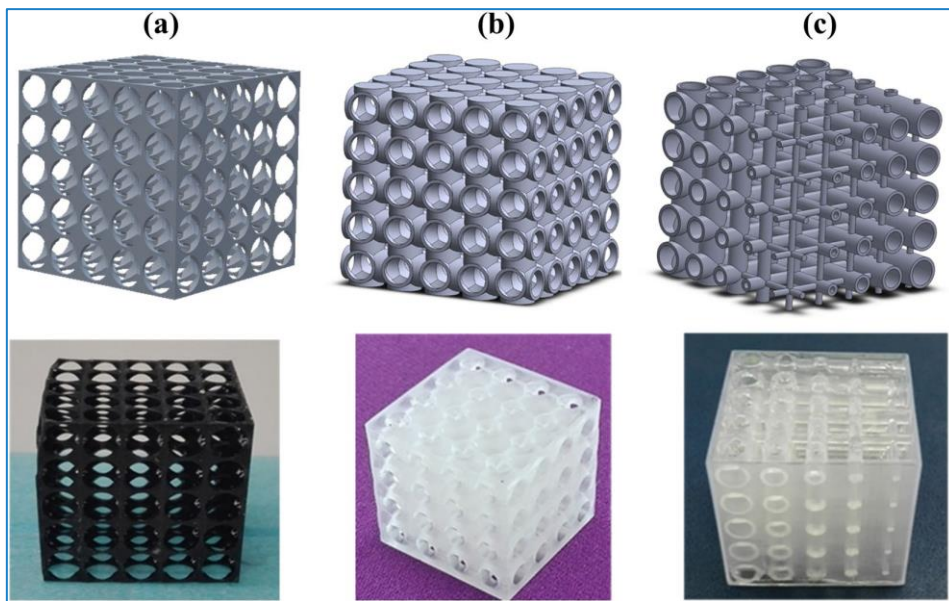


Figure I.10: Trois différents modèles sacrificiels rendu et imprimé en 3D [25].

Les modèles imprimés reproduisent exactement les tailles et architectures de pores à macro-échelle souhaitées conçues par ordinateur; les entretoises solides dans l'échafaudage polymère constitueront les macropores dans la structure de mousse à réplique inverse. En particulier, le modèle rapporté sur la figure I.10 (a) est caractérisé par la présence d'une géométrie régulière avec des ouvertures rondes de dimensions fixées à 3 mm. Le modèle reporté sur la figure I.910 (b) montre une géométrie régulière avec des dimensions fixées des ouvertures rondes à 3 mm et les canaux carrés à 2 mm, tandis que le gabarit sacrificiel rapporté sur la figure I.10 (c) est caractérisé par une dimension variable des ouvertures rondes, allant de 4 à 0,5 mm, le long de deux directions différentes [25].

I.3. Processus de fabrication des FGM

La composition et la microstructure du matériau FGM changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. [26].

Un grand nombre de techniques et de voies de fabrication bien connues sont largement utilisées pour la production des FGM. Ces gammes vont du conventionnel simple et aux techniques avancées et complexes dites « Rapide ou processus additif » [14].

Pour une production en petite série (environ 10 000 pièces plastiques ou 1 000 pièces métalliques) mais également pour les pièces complexes ou à haute valeur ajoutée, la FAD permet des coûts de production très compétitifs par rapport aux technologies traditionnelles qui doivent faire face à des budgets initiaux élevés liés à l'achat des outillages ou des machines et à la mise au point de leur processus de fabrication (figure I.10).



Figure I.11: Impact du processus choisi sur les temps et étapes de développement et fabrication d'une pièce fonctionnelle [27].

La FAD permet également une réduction conséquente des pertes de matière : seulement 3 % de pertes pour certaines pièces aéronautiques fabriquées en FA contre 80 à 90 % de copeaux pour celles obtenues par usinage [27].

Un aperçu un peu détaillé sur les techniques existantes les plus connues soit conventionnelles ou additives présenté ci-dessous.

I.3.1. Méthodes conventionnelles

a. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont : les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical.

Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tels que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification [28].

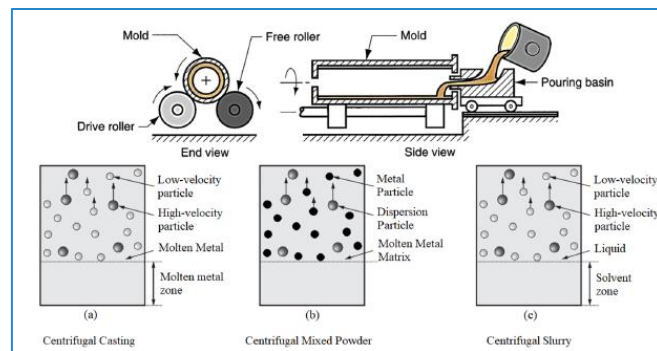


Figure I.12: La méthode de coulée centrifuge [14].

b. La métallurgie des poudres

Une technique basée sur la métallurgie des poudres peut être utilisée pour produire des FGM de type en vrac à structure discontinue (par étapes). Le processus est effectué en utilisant des étapes comprenant la pesée et le mélange de la poudre selon la distribution spatiale prédéfinie selon les exigences fonctionnelles, l'empilement et le pilonnage des poudres pré-mélangées, et enfin le frittage [29].

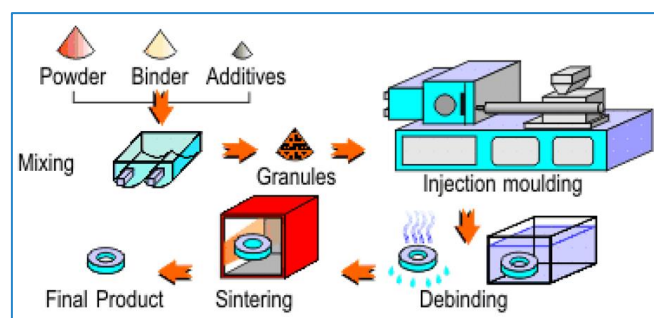


Figure I.13: La méthode de la métallurgie des poudres [14].

c. La projection plasma (Plasma projection)

Cette méthode se consiste à soumettre un gaz à une forte température ce qui le transforme en état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [30].

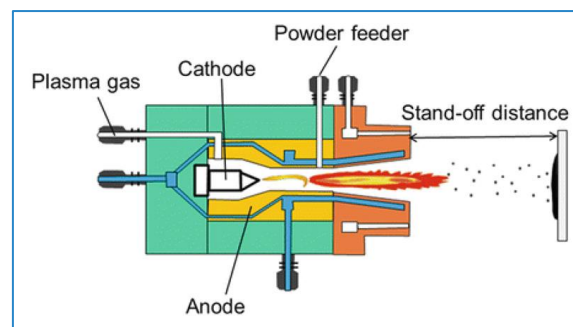


Figure I.14: La méthode de la projection plasma [14].

d. Technique de dépôt en phase de vapeur

Les techniques de dépôt en phase vapeur décrivent diverses méthodes de dépôt sous vide pouvant être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base. Toutes ces techniques ne peuvent être utilisées que pour produire des FGM minces. Les différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ceux-ci sont énergivores et produisent des jauges toxiques comme sous-produits [31].

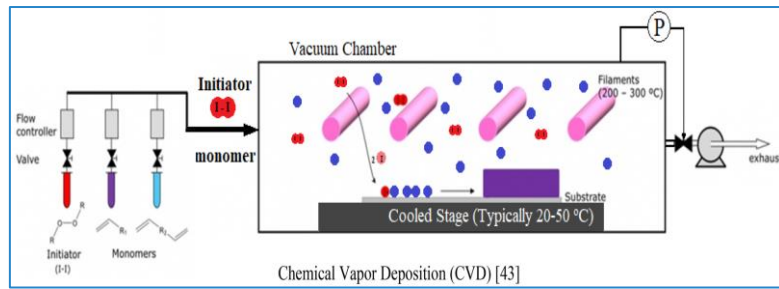


Figure I.15: Technique de dépôt en phase de vapeur [14].

I.3.2. Méthodes additives

La fabrication additive regroupe l'ensemble des procédés permettant de fabriquer, point par point ou couche par couche, par ajout de matière, un objet physique à partir d'un objet numérique. D'abord réservés au prototypage, les technologies de fabrication additive permettent aujourd'hui de réaliser des pièces répondant aux caractéristiques fonctionnelles attendues du produit final [32, 33].

a. Photopolymérisation en cuve

La polymérisation obtenue à l'aide d'un laser correspond au premier brevet déposé relatif à la FA [34]. et au premier procédé commercialisé. Il est plus connu sous le nom de stéréolithographie. Pour ce procédé, une résine photosensible liquide contenue dans une cuve est durcie par polymérisation grâce à l'action d'une source lumineuse [35] (figure I.15). Lorsqu'une couche de résine est polymérisée, le plateau de construction est déplacé verticalement (axe Z) d'une distance fixée par les paramètres de production afin de réitérer le cycle. Les variantes de ce procédé ont pour origine la nature de la source lumineuse qui peut être soit un laser, soit une lampe UV, et le sens de déplacement du plateau

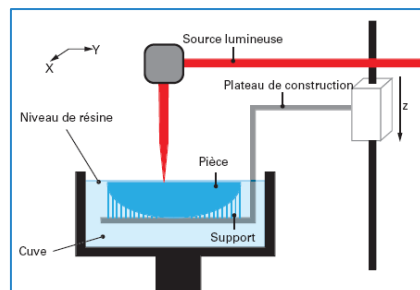


Figure I.16: Illustration du procédé de photopolymérisation en cuve, adapté de Rias [35]

L'inconvénient majeur de ce procédé, malgré une bonne précision (quelques dizaines de microns) et la qualité des surfaces obtenues, réside dans la matière première utilisée : variétés de résines limitées, propriétés des résines inférieures à celles des polymères techniques (ne pouvant pas convenir aux prototypes fonctionnels) et vieillissement pouvant rendre les pièces cassantes dans le temps.

b. Projection de matière

Ce procédé fonctionne sur le principe des imprimantes à jet d'encre. Il utilise des têtes d'impression qui viennent déposer des gouttelettes de matière à la surface de la zone de fabrication. Deux types de matériaux sont utilisables, les résines photosensibles qui, une fois déposées, sont polymérisées par la source lumineuse solidaire de la tête d'impression (figure I.16) et les cires déposées à l'état liquide et qui, en refroidissant, vont constituer la pièce [35].

Le principal avantage de ce procédé est la possibilité de réaliser des pièces multi-matériaux et d'introduire la couleur. D'autre part, sa large gamme de matériaux (environ 60) permet d'obtenir des prototypes permettant de simuler le comportement des pièces en polymères techniques ou standards obtenus par injection lors des tests fonctionnels.

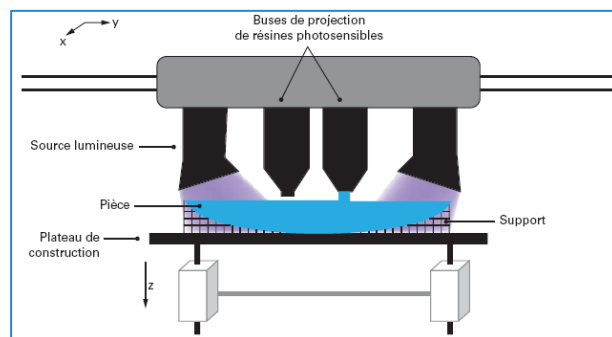


Figure I.17: Illustration du procédé de projection de matière (technologie Polyjet), adapté de Rias [35]

c. Dépôt de matière sous énergie concentrée

Ce procédé est issu des techniques de revêtement laser. Son principe repose sur la fusion d'une surface à l'aide d'une source d'énergie et sur l'apport simultané d'un jet de poudre ou d'un filament de matière dans cette zone en fusion, le tout en présence d'un gaz protecteur (figure I.17) [35].

Il permet de réaliser des matériaux à gradients de propriétés. La précision des pièces obtenue est plus faible que celle obtenue avec les procédés de fusion sur lit de poudre. L'épaisseur de couche est de l'ordre de 500 μm . Aujourd'hui, ce procédé n'est développé que pour des poudres métalliques.

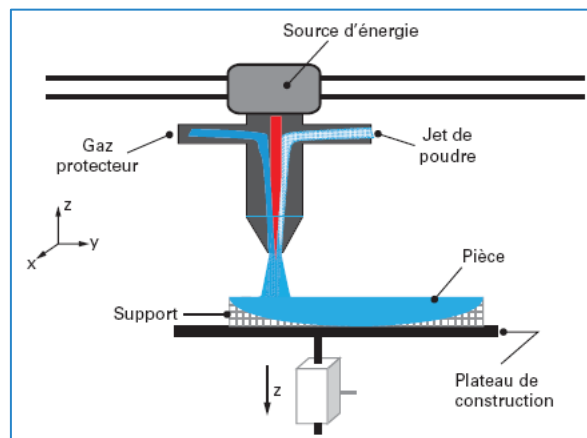


Figure I.18 : Illustration du procédé de dépôt de matière sous énergie concentrée, adapté de Rias [35]

d. Stratification de couches

La stratification de couches (figure I.18) est un procédé combinant l'addition et la soustraction de matière : des feuilles ou plaques de matériau sont découpées à l'aide d'un système de découpe (laser, outil coupant, ultrasons...), empilées, puis reliées entre elles (mise en position, collage, soudage ultrason, éventuellement utilisation d'inserts...) afin de former le produit. Tous les matériaux existants sous forme de plaques peuvent être utilisés.

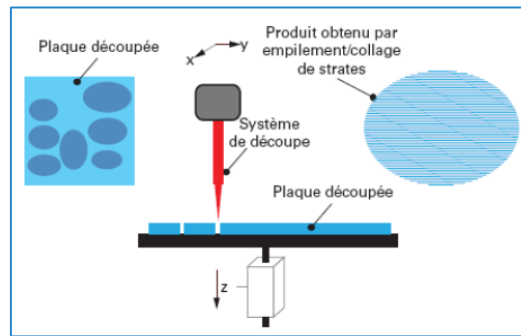


Figure I.19 : Illustration du procédé de stratification de couches, adapté de Rias [35]

I.3.3. Comparaison des méthodes de fabrication

Les méthodes dites conventionnelles permettent aujourd’hui de réaliser des pièces FGM et des revêtements avec des possibilités restreintes au niveau des dimensions du gradient et de la complexité de la répartition des matériaux. Les procédés de fabrication additifs permettent, quant à eux, de fabriquer des pièces avec des géométries plus complexes et des dimensions de l’ordre de quelques centimètres à plusieurs dizaines de centimètres.

Seul le procédé par projection de poudre offre la possibilité de fabriquer des pièces FGM ayant une distribution des matériaux continue dans plusieurs directions de l’espace pour les pièces métalliques (Figure I.19) et n’importe quelle pièce multimatériau [26].

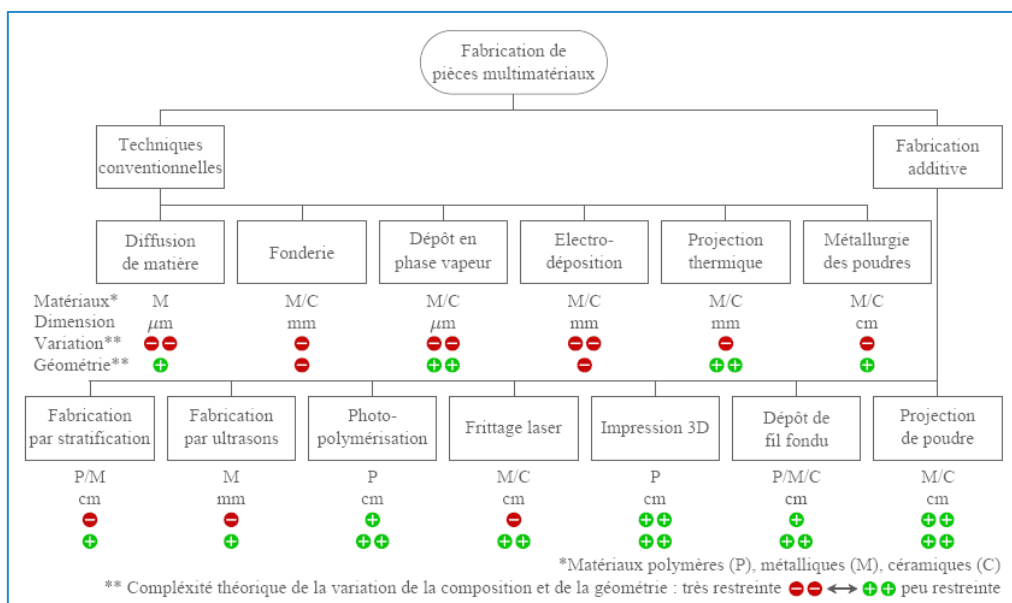


Figure I.20 : Comparaison des méthodes de fabrication [26]

I.4. Domaines d'application des FGM

De nos jours, les recherches sur les FGM ont été menées de manière intensive. Depuis le concept développé dans le domaine aéronautique en 1984, les FGM sont également une préoccupation dans les différents domaines industriels. Les FGM offrent une grande promesse dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères. Sur le tableau I.1 nous présentons les variétés des domaines d'application réelle et éventuelle des FGM. Les applications éventuelles abritent tous les cas pour lesquels une combinaison de fonctions incompatibles est indispensable.

Tableau I.1 : Les divers domaines d'application des FGM.

Domaines d'utilisation	Applications
Secteur de construction civile (matériaux de construction)	Blocs en béton résistant au feu, rayonnement, absorbant de l'humidité, milieux agressifs les composites renforcés de fibres de carbone résistent aux séismes.
Commercial et industriel Ingénierie	Moteur électrique, tuyaux hydrauliques, trépieds pour appareil photo, casques, poutres. Outil coupant, les arbres, rouleau, lame de turbine, matériaux de construction
Aéronautique et aérospatial	Composants des véhicules spéciaux, corps d'avion spatial, buse de fusée, pales de soufflerie, anneaux, composants d'hélicoptère
Electronique et électrique Conversion d'énergie	Générateur thermoélectrique, pile à combustible, une cellule solaire. Semi- conducteurs de bandes graduées, capteur panneaux solaires
Sous-marin	Arbre de propulsion (fibre de carbone et de verre), coque cylindrique de pression (graphite et époxy) irrigation, système de tuyauterie, bouteilles de plongée (Al-SiC)
Secteur médecine Biomatériaux	Implant dentaire en titane et hydroxyapatite en céramique [36]. Implant osseux produit par une gradation de titane et hydroxyapatite en poudre, les revêtements en aluminium fourni de bonnes propriétés mécaniques ([37],[38]). Implant d'articulation de la hanche, Table de radiographie. Implant, peau artificielle, le système de délivrance de médicaments
Optique	Fibre optique, lentilles
Energie nucléaire	Composants des réacteurs nucléaires, première du réacteur fusion
Automobile	Chambre de combustion (SiC-SiC), chemise de moteur cylindre (Al-SiC)arbre de transmission (Al-C), l'emballage électronique, les ensembles de frein de rotor dans l'industrie automobile et les matériaux de blindage avec une gradation de la matrice d'aluminium [37]
Sport	Cadre de vélo racine (SiCw /6061), cadre de véhicule racine,

	article de sport de haute performance (le tennis, le ski, les sports nautiques ([37], [38])
Usines des produits chimiques	Echangeur de chaleur, cuve de réaction

I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM parfaite

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume .La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. L'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen) [39].

$$P_f = \sum_{j=1} P_j V_{fj} \quad (I.1)$$

Où P_i et V_{fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{j=1} V_{fj} = 1 \quad (I.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (I.3)$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (I.4)$$

I.5.1. Loi de mélange en puissance (P–FGM):

La variation de la propriété du matériau en fonction de la position dans la direction de l'épaisseur est donnée par,

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (I.5)$$

Ici, $P(z)$ désigne une propriété typique du matériau, à savoir, le module d'élasticité de Young (E), le module d'élasticité au cisaillement (G), le coefficient de Poisson (ν), la densité de matériau (ρ), etc. Des structures fabriquées. Des FGM. « h » est l'épaisseur totale de la structure. « P_m » et « P_c » sont les propriétés des matériaux situés au plus haut ($z = +h/2$) et au plus bas ($z = -h/2$). " λ " Dans le modèle exponentiel, et " n " dans le modèle de puissance sont les indices de classement des matériaux, respectivement. La schématisation de cette loi est montrée dans la Figure I.20.

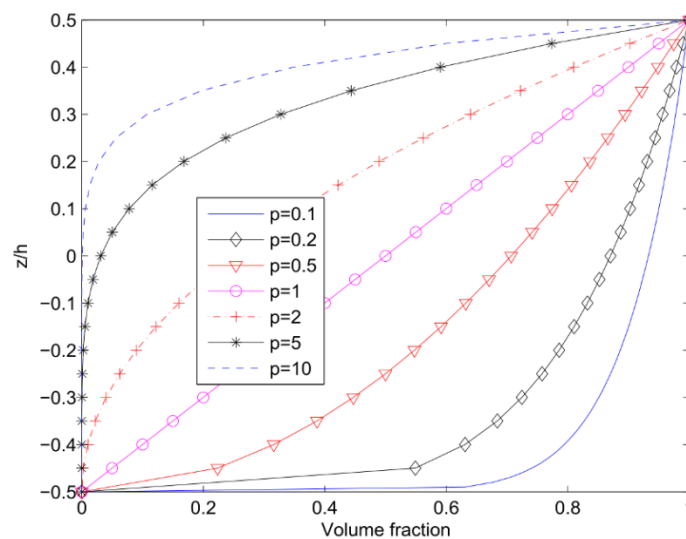


Figure I.21 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.5.2. Loi de mélange exponentielle (E–FGM) :

Plusieurs chercheurs ont adopté cette loi pour prédire le comportement statique et dynamique des structures de FGM. Pour une structure en FGM d'épaisseur uniforme h , les propriétés typiques du matériau « $P(z)$ » en tout point situé à une distance z de la surface de référence sont données par :

$$P(z) = P_t \exp\left(\lambda\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{Où} \quad \lambda = \ln\left(\frac{P_t}{P_p}\right) \quad (\text{I.6})$$

$P(z)$ est les propriétés dans la direction z , P_p et P_t sont les propriétés à la surface inférieure et supérieure, respectivement. La loi exponentielle, montrée dans la Figure I.21, est le plus couramment utilisée dans les études de mécanique de la fracture [40-41].

La distribution des matériaux via la loi exponentielle a une autre formulation [41, 42], où elle peut être exprimée comme suit,

$$P(z) = P_t \exp\left(n\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\right), \quad \text{Où} \quad n = 0 \dots \infty \quad (\text{I.7})$$

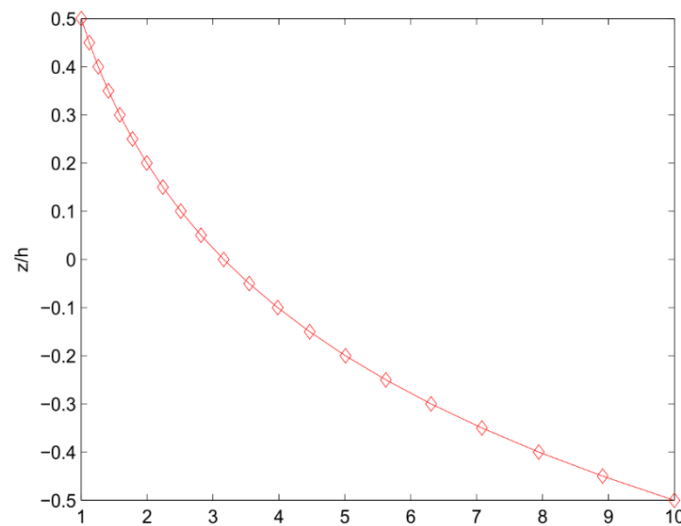


Figure I.22 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

I.5.3. Loi de mélange sinusoidale (S-FGM) symétrique :

Chi et al [43] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8})$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.9})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.10})$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.11})$$

La Figure I.22 montre la variation des propriétés suivant l'épaisseur de la plaque en S-FGM.

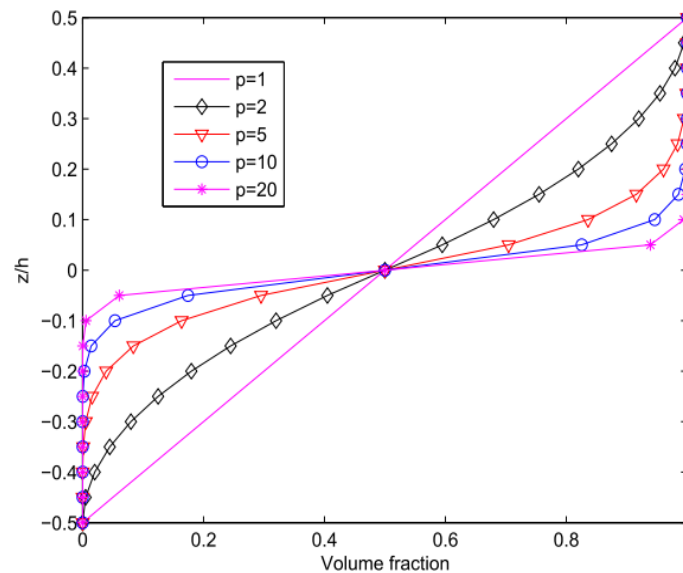


Figure I.23 : Variation de la fraction volumique dans une plaque en S-FGM

I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM poreuses

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur l'élaboration des lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des FGM poreux. Dans cette partie on présente trois types de distributions de porosité à travers l'épaisseur, le premier étant proposé par Kim et al. [44] et deux autres modèles développés par Coskun et al. [45] et par Li et Zheng [46].

I.6.1. Model de porosité de Kim et al. [44]

Concernant les FGM poreuses, Kim et al. [44] a considéré, entre autres, une distribution de porosité à travers l'épaisseur donnée par:

$$\phi(z) = \phi \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{I.12})$$

Où z représente la coordonnée d'épaisseur, h représente l'épaisseur de la plaque et ϕ la valeur de porosité maximale.

Ainsi, la règle des mélanges est affectée par cette distribution et le module d'Young effectif (E) et le coefficient de Poisson (ν) peuvent être estimé comme suit:

$$E(z) = \left[(E_t - E_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + E_b \right] (1 - \phi(z)) \quad (\text{I.13})$$

$$\nu(z) = \left[(\nu_t - \nu_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + \nu_b \right] (1 - \phi(z)) \quad (\text{I.14})$$

Dans les deux équations (I.13) et (I.14), les indices t et b indiquent respectivement les surfaces supérieure et inférieure.

La figure I.23 illustre sous une forme normalisée, la distribution de la porosité à travers l'épaisseur, montrant une évolution d'une absence de pores en surface inférieure à une porosité maximale en surface supérieure figure I.23(a), et l'évolution normalisée du module de Young à travers l'épaisseur pour une des différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance « p ».

Dans les deux modèles, le coefficient de porosité (e_0) est donné par l'équation (I.15), et le paramètre β peut être calculé par la relation de l'équation (I.16).

$$e_0 = 1 - \frac{E_b}{E_t} \quad (\text{I.15})$$

$$\beta = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1-e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (\text{I.16})$$

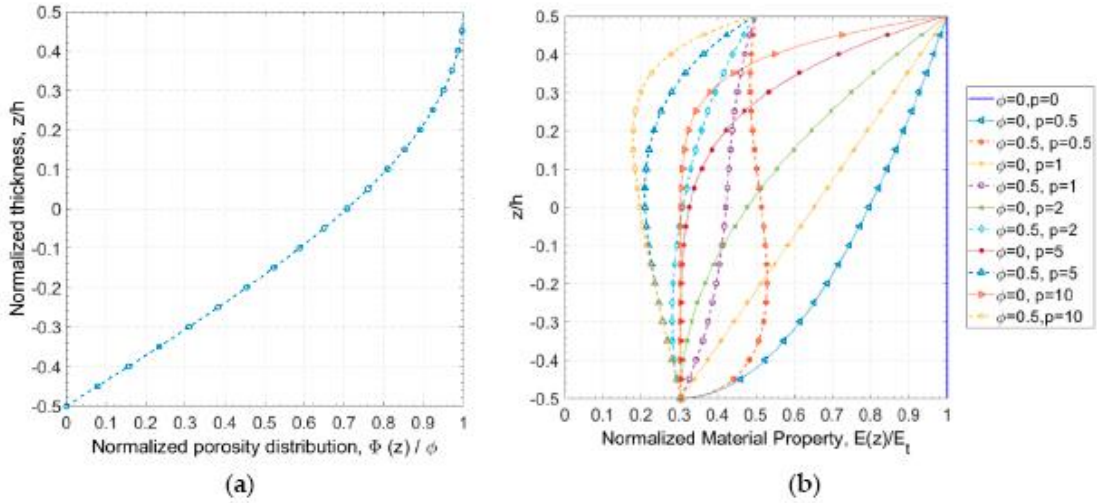


Figure I.24 : (a) porosité normalisée, (b) module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur

I.6.2. Model de porosité de Coskun et al. [45]

Dans ce modèle, les propriétés matériels nommé module de Young et le coefficient de poisson sont estimés par l'équation (I.17, I.18) et le graphe de 'évolution de module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur est présenté dans la figure I.25

$$E(z) = \left[(E_t - E_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_b \right] (1 - e_0 \beta) \quad (\text{I.17})$$

$$V(z) = \left[(V_t - V_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + V_b \right] (1 - e_0 \beta) \quad (\text{I.18})$$

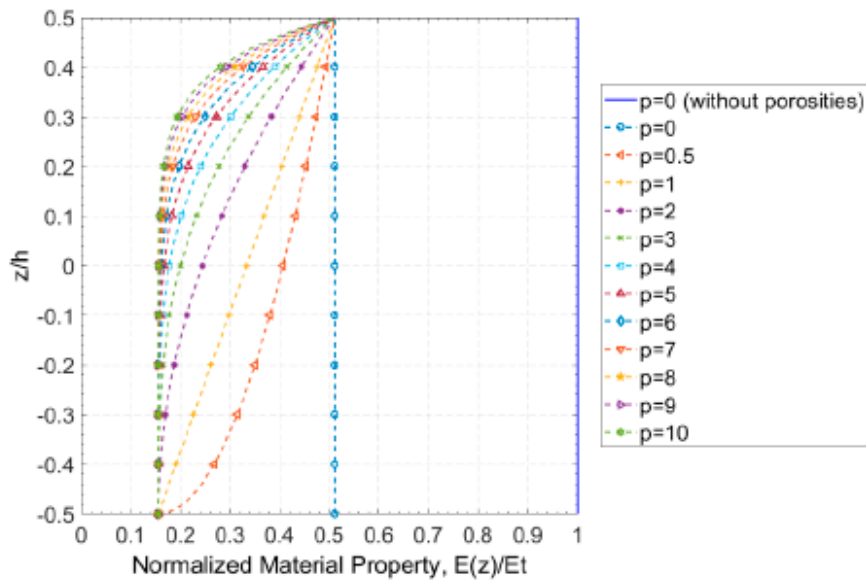


Figure I.25 : variation de module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur

I.6.3. Model de porosité de Li et Zheng [46]

Ce modèle introduit au précédent un gradient de porosité à travers l'épaisseur, avec les propriétés effectives respectives des matériaux étant données par

$$E(z) = \left[(E_t - E_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_b \right] \left[1 - e_0 \beta \cos^2 \left(2\pi \frac{z}{h} \right) \right] \quad (\text{I.19})$$

$$V(z) = \left[(V_t - V_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + V_b \right] \left[1 - e_0 \beta \cos^2 \left(2\pi \frac{z}{h} \right) \right] \quad (\text{I.20})$$

La figure I.26 montre la variation du module d'Young normalisé à travers l'épaisseur. Notez que la répartition de la porosité oscille entre les maximums et les minimums le long de l'épaisseur.

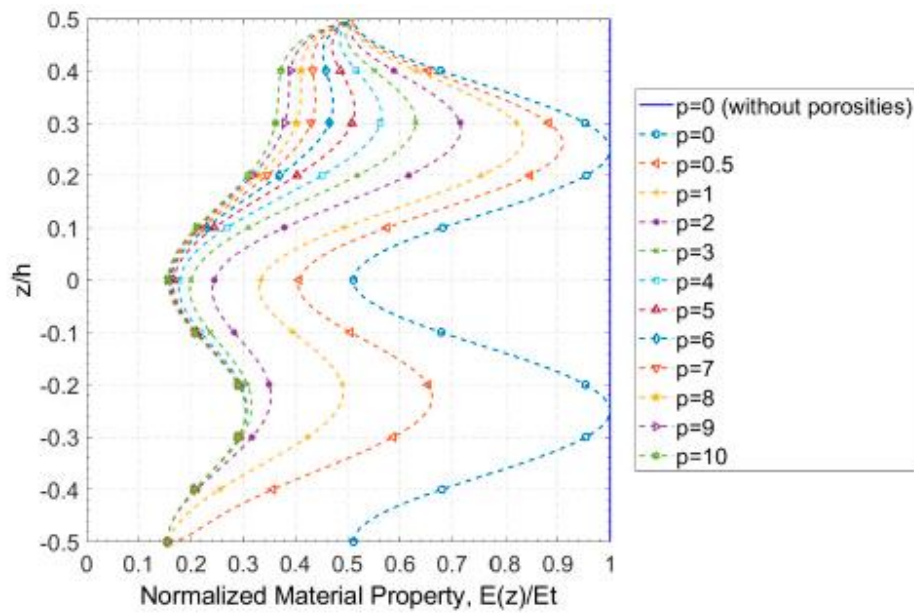


Figure I.26: Variation de module de Young normalisé en fonction de l'épaisseur

I.7. Conclusion

Ce chapitre d'état de l'art nous a permis de définir et de comprendre brièvement les matériaux composites et à gradient de propriétés « FGM », leurs développements, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil et d'avoir aussi une vision sur l'ensemble des lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des plaques FGM. Cela nous donne la légitimité de conclure que les matériaux FGM sont non homogènes à l'échelle microscopique, d'où les propriétés mécaniques varient graduellement et continuellement d'une surface à l'autre à travers toute l'épaisseur et peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (EFGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire les fractions de volume.

Chapitre II

Lois et modélisation des FGM reposant
sur fondation élastique

II.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel sont soumis à différents types de chargements qui nécessitent des matériaux avec des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées. Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

En 1888, Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (CLPT ou théorie de Kirchhoff-Love).

La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko [47] et Reissner [48]. La limite de l'application des théories classiques du premier ordre juste pour les plaques minces et semi-épaisses a mené au développement de théories d'ordre élevé qui sont venues pour améliorer l'évaluation de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques, ensuite les différents modèles proposés de modélisation des fondations élastique dont lesquelles reposent les plaques FGM et à la fin les travaux de recherche réalisés dans la domaine d'étude des plaques reposant sur des fondations élastique

II.2. Théories analytiques des plaques

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CLPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff ; L'épaisseur est faible donc les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles, on reste en petites déformations, les sections normales au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation (figure II.1) en négligeant les effets de déformation en cisaillement transversal. Cette théorie est très bien décrite dans [49-50-51] et le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

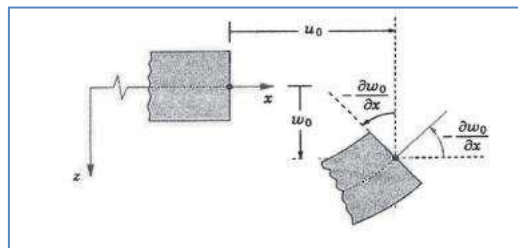


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transversal, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les déformations dues au cisaillement transversal doivent être prises en compte dans des plaques moyennement épaisses. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Toutefois, il est nécessaire d'ajouter un facteur de correction de cisaillement car les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Cette théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est due à Reissner [48] et Mindlin [52]. Elle est basée sur l'hypothèse cinématique de Mindlin suivante : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée à cause de l'effet du cisaillement transverse (Figure II.2).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et $(\phi_x$ et $\phi_y)$ sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement.

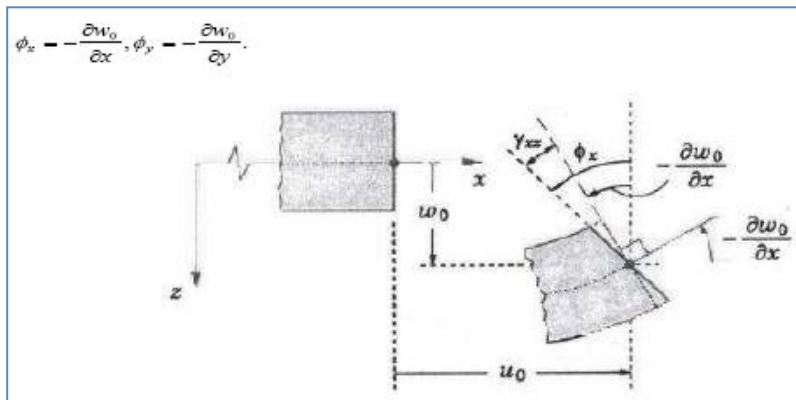


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Cependant, ces théories souffrent de l'inconvénient de l'utilisation de facteurs de correction du cisaillement dépendant du problème. Pour éviter ce problème, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, les théories d'ordre élevé sont basées sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur (figure II.3). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

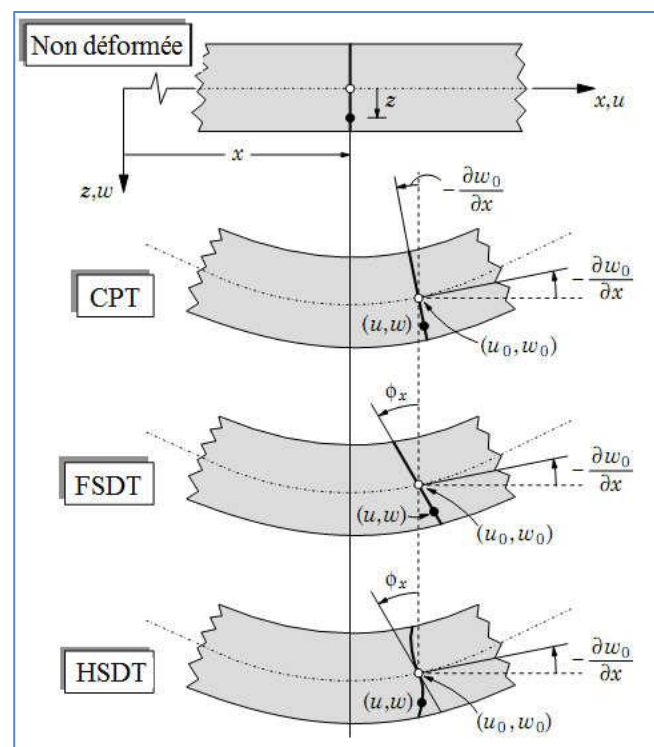


Figure II.3 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CLPT) et (FSDT)

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans les travaux de (Hildebrand et *al.* [53]; Naghdi [54]; Reissner, [55]; Reddy [56]; Kantet Swaminathan [57]).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y)z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations

autour des axes y et x , respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

II.2.4. Théorie raffinée des plaques :

La théorie raffinée des plaques (RPT : Refined Plate Theory) a été développée par Shimpi [58]. Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique.

Thai et Kim [59], Ait Atmane et al. [60] et Hadji *et al.* [61] qui ont utilisé cette théorie pour étudier la flexion, le flambement et les vibrations libres des plaques stratifiées, FGM et sandwich. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments.

Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Où :

w_b , w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement ;

II.2.5. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Plusieurs auteurs ont proposé des fonctions de cisaillement $f(z)$ pour les modèles d'ordre élevé qui sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur peut prendre une forme parabolique, sinusoïdale comme le modèle de Touratier [62], sous forme hyperbolique comme proposée par Ait Atmane et al. [60], ou exponentielle comme proposée par Karama et al. [63].

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles. Le tableau II.1 : résume les théories les plus utilisées dans la littérature.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	Intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$
CPT Kirchoff [64]	Théorie classique des plaques	0
FSDT, Mindlin [52]	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{ère} ordre	z
Ambartsumian [65]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right]$

Reissner [55]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
PSDPT, levinson[66] Reddy[56]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Senthilnathan.et al [67]	Théories polynomiales	$f(z) = -4 \frac{z^3}{3h^2}$
TSDPT,Touratier [68]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Shimpi [69]	Théorie de raffinée des plaques	$\frac{z}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right]$
ESDPT ,Karama et al . [70]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$
Aydogdu [71]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z\alpha^{-2(z/h)^2 / \ln(\alpha)}$
Benyoucef.et al [72]	Théories hyperboliques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)-1} z - \frac{(h/2)\cosh(\pi z/2)}{\cosh(\pi/2)-1}$
Ait Atmane et al. [60]	Théorie de raffinée des plaques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)-1} z - \frac{(h/\pi)\sinh(\pi z/h)}{\cosh(\pi/2)-1}$
El meiche, Tounsi et al. [73]	Théorie de raffinée des plaques	$\frac{(h/\pi)\sin(hz/\pi) - z}{\cosh(\pi/2)-1}$
Shinde.et al [74]	Théorie de raffinée des plaques	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Akavci [75]	Théories hyperboliques	$\frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right)$
Thai.et al [76] 2014	Cinq théories trigonométriques variables	$\sinh^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right)$
Nguyen.et al [77] 2015	Cinq théories trigonométriques variables	$\cot^{-1}\left(\frac{h}{z}\right) - \frac{16z^3}{15h^3}$
Grover.et al [78] 2015	Cinq théories trigonométriques variables	$z \sec\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{\sec(r/2)}{1 + \frac{r}{2} \tan(r/2)}$
Pawar.et al [79] 2015;	fonctions de formes utilisées dans les théories quasi-3D	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Pawar.et al [79] 2015;	fonctions de formes utilisées dans les théories quasi-3D	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Mantari [80] 2016	Théories polynomiales	$z^3 - \frac{7}{8} h^2 z$
Abrate and Di Sciuva [81] 2017	Théories polynomiales	$z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right]$
Abualnour.et al [82] 2018;	fonctions de formes utilisées dans les théories quasi-3D	$\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

II.2.6. Effet de la déformation normale (effet de stretching)

Parmi les modèles HSDT ont été proposés ces dernières années pour l'étude des structures FG, il existe des modèles qui prennent en considération l'influence de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur.

Lorsqu'un modèle introduit l'effet de la déformation normale, le déplacement transversal est supposé dépendant des coordonnées d'épaisseur obéissant à la recommandation de Koiter (1959), c'est-à-dire $\varepsilon_z \neq 0$. Récemment, l'effet de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur sur la réponse mécanique des structures FGM est montrée par (Bousahla et al.[83], Fekrar et al. [84], Belabed et al [85], Hamidi et al. [86], Larbi Chaht et al. [87], Houari et al [88]) et par conséquent, Le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) + g(z)\phi_z \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Avec :

ϕ_z : représente la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur.

II.2.7. Théorie zig-zag

Les propriétés des couches stratifiées peuvent être différentes, comme les plaques multicouches hybrides (couche par couche) dont les contraintes de cisaillement interlaminaire et les contraintes d'interface sont discontinues. Les idées fondamentales dans le développement des théories en Zig-zag consistent à adopter un certain modèle de déplacement et / ou de contrainte dans chaque couche, puis à utiliser des conditions de compatibilité et d'équilibre à l'interface pour réduire le nombre de variables inconnues [89].

Comme les modèles d'ordre élevé n'assurent pas la discontinuité dans les stratifiés, certains auteurs ont proposé une théorie d'ordre élevé dite théorie zig-zag [90-91], qui est très efficace pour l'analyse des plaques composites stratifiées et pour mieux décrire les effets d'interface. Le stratifié est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches), et on utilise pour chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La signification géométrique de la fonction zig-zag est expliquée sur la Figure II.4. Les modèles zig-zag assurent la vérification des conditions de continuité sans augmenter le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre, et sans ajouter des coefficients de correction. Plusieurs auteurs ont proposé des améliorations significatives pour introduire une distribution non linéaire des déplacements [92-93].

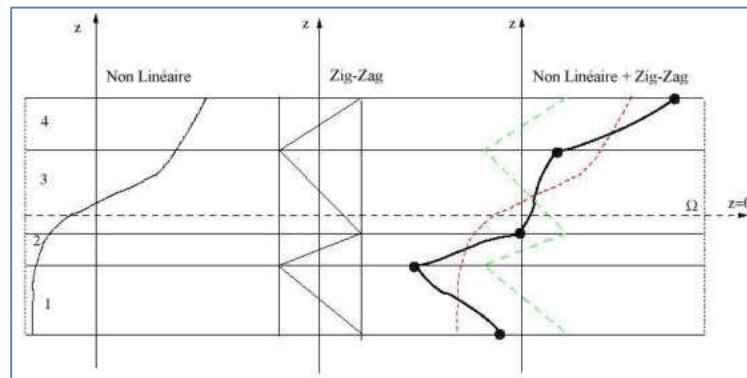


Figure II.4 : Champ de déplacements du modèle zig-zag

Le champ de déplacement u de chaque couche peut d'abord être écrit en utilisant des valeurs de déplacement aux interfaces. Par exemple, pour les première et dernière couches, on a :

$$\begin{aligned} u^1(z) &= u^0 + z\phi_1 & 0 \leq z \leq h_1 \\ u^{N_l}(z) &= u^{N_l}(h_{N_l-1}) + (z - h_{N_l-1})\phi_{N_l} & h_{N_l-1} \leq z \leq h_{N_l} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Où, u^0 est la valeur du déplacement u avec une correspondance à la surface inférieure. $u^k(K)$, $K=1, N_l$ sont la valeur d'interface de u , φ_{k_i} , $K=1$, sont les valeurs qui identifient les rotations dans les couches.

Murakami [94] a introduit dans un champ de déplacement ESL du premier ordre une fonction Zig-zag capable de décrire la forme zig-zag pour les déplacements. Il a modifié les théories FSDT selon le modèle suivant,

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{0x} + zu_{x1}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{0Z} \\ u_y(x, y, z) &= u_{0y} + zu_{y1}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{0Z} \\ u_z(x, y, z) &= u_{0z} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

L'indice fait référence à la fonction de zigzag de Murakami introduite.

II.3. Les approches de la modélisation de la fondation élastique

La vibration des plaques FGM sur les fondations élastiques est une grande préoccupation pour la communauté des ingénieurs ces dernières années en raison de leurs nombreuses propriétés bénéfiques. Les applications de ces fondations peuvent être trouvées dans les structures aérospatiales, les pistes d'avions, les réacteurs nucléaires, les dalles de fondation de bâtiments, les voies ferrées, les sols sportifs en salle, les structures pétrochimiques et sous-marines, etc. En fonction des applications du système structural considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisation pour les fondations afin d'étudier le comportement dynamique et statique de l'interaction structures-fondations.

La première et la plus simple présentation d'une fondation a été proposée par Winkler. Ce modèle est connu sous le nom de modèle élastique linéaire de Winkler [95]. Les modèles à deux paramètres sont appelés mécanismes selon lesquels une couche relie les extrémités supérieures de l'élément de la fondation entre elles. En conséquence, les fonctions force-déplacement pour ce type de fondation sont continuées car les extrémités supérieures des éléments sont reliées par une couche de cisaillement.

Les principaux exemples de ces types de fondations sont les modèles Filonenko – Borodich [96], Hetényi [97], Pasternak [98], Vlasov [99].

Les modèles Filonenko – Borodich, Hetenyi et Pasternak ont été développés sur la base du modèle Winkler, tandis que le modèle de Vlasov a été proposé conformément à la théorie du modèle du continuum élastique.

II. 3.1 Modèle de Winkler

En(1867) Winkler [95] à proposer une modélisation du sol qu'elle est basé sur une discrétisation du sol dans la direction longitudinale par une série de ressorts indépendants. La principale difficulté consiste dans l'appréciation de la rigidité des ressorts de façon réaliste. Cette problématique est étudié dans la littérature de nombreuses manières afin de déterminer les valeurs numériques des rigidités des ressorts (Schmitt [101]1998, Matsubara et Hoshiya [102]2000).Les discontinuités dans le sol sont représentées par le biais des variations des raideurs.

Selon le modèle de Winkler, la déformation de la fondation due à la charge appliquée est limitée aux régions chargées uniquement [103]. La Figure II.5 montre la représentation physique de la fondation de Winkler. La relation de déflexion de pression en tout point est donnée par :

$$R = K_w w_0 \quad (\text{II.8})$$

Où R est la pression, K_w est le coefficient de réaction ou le module du sous-sol, et w_0 est le fléchissement.

Un certain nombre d'études sur le domaine de l'interaction sol-structure ont été menées sur la base de l'hypothèse de Winkler pour sa simplicité (Popov [104], Al [105], Vesic [106]).

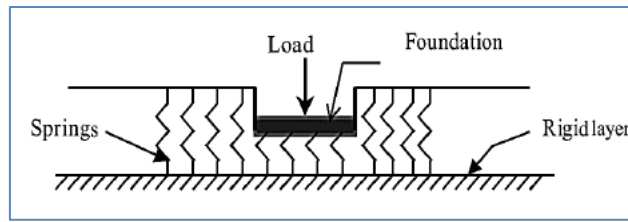


Figure II.5 Fondation de Winkler

Le module de réaction du sol de fondation ou le coefficient de réaction du sol de construction K_w est le rapport entre la pression R en un point donné de la surface de contact et le tassement y produit par la charge à ce point :

$$K_w = R / y \quad (\text{II.9})$$

L'hypothèse de Winkler ne peut pas prendre en compte la dispersion de la charge sur une zone d'influence augmentant progressivement avec une profondeur croissante et elle considère aussi un comportement linéaire contrainte-déformation du sol. Le plus grave défaut du modèle de Winkler est celui qui concerne l'indépendance des ressorts. Ainsi, l'effet de la charge appliquée de manière externe n'est localisé dans la couche de fondation que jusqu'au point de son application ; Ceci implique qu'aucune liaison cohésive n'existe entre les particules comprenant le sol [103].

II. 3.2. Modèle du continuum élastique

Cette approche fournit beaucoup plus d'informations sur les contraintes et les déformations dans la masse de sol que le modèle de Winkler. Dans l'idéalisation du continuum, le sol est généralement supposé semi-infini et isotrope pour des raisons de simplicité. Cependant, l'effet de la stratification du sol et de l'anisotropie peut être expliqué de manière appropriée dans l'analyse [107].

La modélisation du sol comme un milieu semi-infini, élastique, continu, caractérisé par deux paramètres : le module de Young E et le coefficient de Poisson ν , permet de prendre en compte la continuité des tassements. Les premiers travaux dans ce domaine sont les travaux de Boussinesq (1885) qui a étudié le problème d'un milieu semi-infini homogène isotrope

linéaire élastique soumis à une charge verticale concentrée P (Figure II.6). Cependant, cette idéalisation d'un continuum élastique semi-infini conduit à des complexités multiples d'un

point de vue mathématique [108]. Cela limite considérablement l'application de ce modèle dans la pratique. L'un des principaux inconvénients de l'approche du continuum élastique est l'inexactitude des réactions calculées à la périphérie de la fondation.

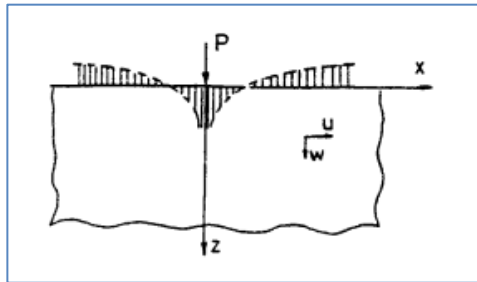


Figure II.6: Tassement du sol dû à une charge concentrée pour le modèle du continuum élastique.

II. 3.3.Fondation de Filonenko-Borodich.

Le modèle proposé par Filonenko-Borodich ([109]1940, [110]1945) assure la continuité entre les ressorts du modèle de Winkler. Cette connectivité des différents ressorts de Winkler est obtenue grâce à une fine membrane élastique soumise à une tension constante T .

Cette membrane est fixée aux extrémités supérieures des ressorts [103]. La Figure II.7. Ainsi, la réponse du modèle est mathématiquement exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} R &= K_w w_0 - T \nabla^2 w_0 \\ R &= K_w w_0 - T \frac{d^2 w_0}{d^2 x} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Où ∇^2 est Laplace opérateur, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction K_w et la force de traction T .

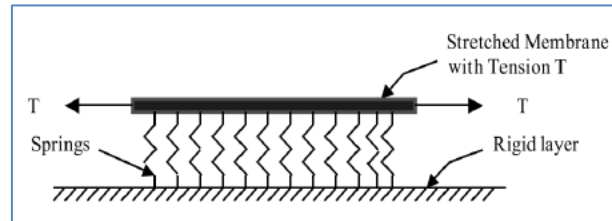


Figure II.7 : Fondation de Filonenko – Borodich

II. 3.4.Fondation de Hetenyi

Le modèle proposé par Hetenyi [112] (1946) peut être considéré comme un compromis entre deux approches extrêmes de Winkler et le continuum isotrope. Dans ce modèle, l'interaction entre les ressorts discrets du modèle de Winkler se fait par l'intermédiaire d'une poutre élastique dans le cas bidimensionnel ou d'une plaque élastique dans le cas tridimensionnel, qui ne subit qu'une déformation en flexion [103]. Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction K_w et la rigidité à la flexion D de la plaque. Le model de Hetenyi est illustrée dans la Figure II.7. Ainsi, la relation pression-déflexion devient :

$$R = K_w w_0 + D \nabla^4 w_0 \quad (\text{II.11})$$

Où, D de rigidité en flexion de la plaque élastique

$$D = (E_p h_p^3) / (12(1 - \mu_p)^2) \quad (\text{II.12})$$

R est la pression à l'interface du plateau et des ressorts ; E_p et ν_p sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau de la plaque ; h_p est l'épaisseur de la plaque.

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Ainsi, on voit que la rigidité en flexion d'une poutre ou d'une plaque incorporée caractérise l'interaction entre les éléments à ressort du modèle de Winkler. Des descriptions détaillées de ce modèle, ainsi que quelques exemples numériques, sont disponibles dans la littérature [111, 112].

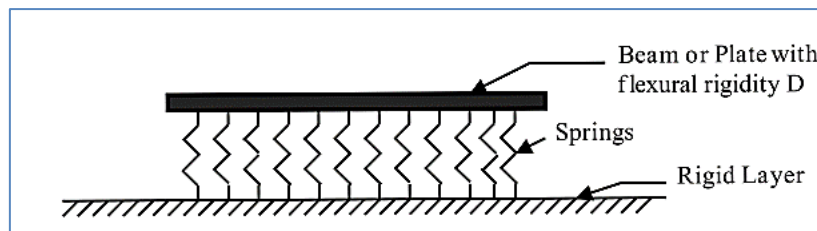


Figure II.8 : fondation de Hetenyi

II. 3.5.Fondation de Pasternak

Le modèle de comportement du sol proposé par Pasternak (1954), suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les ressorts. Ceci se fait en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque (Figure II.9) qui peuvent subir uniquement des déformations tangentielles dues au cisaillement

La relation charge-flèche est obtenue en considérant l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement [103]. La relation pression-déflexion est donnée par :

$$R = K_w w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{II.13})$$

Où

K_p est le module de cisaillement de la couche de cisaillement.

Ainsi, la continuité dans ce modèle est caractérisée par la prise en compte de la couche de cisaillement. Une comparaison de ce modèle avec celui de Filonenko – Borodich implique leur équivalence physique («T» a été remplacé par « K_p »).

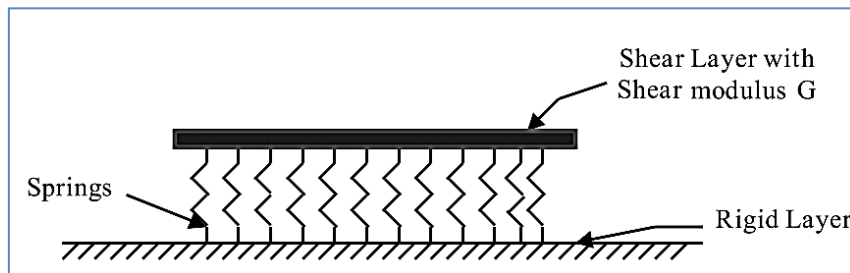


Figure II.9 : Fondation de Pasternak.

Une formulation détaillée et la base de développement du modèle ont été discutées bien avant, dans la référence [113]. Des solutions analytiques pour les plaques sur des assises de type Pasternak avec un résumé de la dérivation du modèle ont été rapportées dans la littérature [114, 115].

II. 3.6.Fondation Kerr

Une couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes. La Figure II.9 montre la représentation physique de ce modèle mécanique.

L'équation différentielle qui gouverne ce modèle peut être exprimée comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) R = \frac{K_p}{k_1} R + K_2 w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{II.14})$$

Où, K_1 est la constante du ressort de la première couche ; K_2 est la constante de rappel de la deuxième couche ; w_0 est le fléchissement de la première couche.

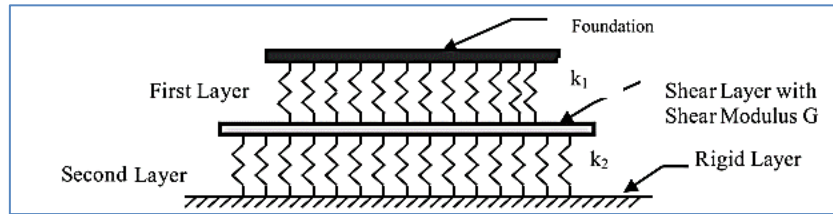


Figure II.10 : Fondation de Kerr.

II. 3.7.Fondation de Vlasov

En(1949), le chercheur Vlasov a proposé une formulation pour la modélisation du sol sur la base du modèle du continuum élastique. Ce modèle a été développé selon le principe variationnel [99]. La couche de sol, d'épaisseur H , est considérée comme un milieu élastique linéaire isotrope, reposant sur un substratum rigide. Le déplacement horizontal $u(x,z)$ est supposé nul dans tout le massif de sol. La Figure II.10 schématise le modèle de Vlasov.

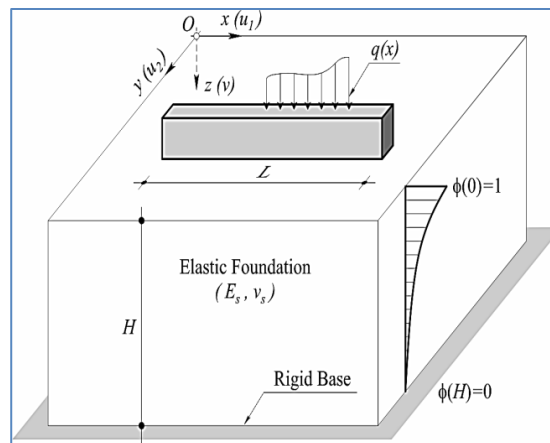


Figure II.11 : Modèle de fondation de Vlasov.

Par contre, le déplacement vertical est supposé donné par :

$$w(x, z) = w(x).h(z) \quad (\text{II.15})$$

où $h(z)$ est une fonction qui décrit la variation du déplacement $w(x,z)$ selon l'axe z , telle que :

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad h(H) = 1 \quad (\text{II.16})$$

Plusieurs variations ont été proposées par Vlazov et Leontiev (1966), parmi lesquelles les variations linéaires et exponentielles telles que:

$$h(z) = \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (\text{II.17})$$

$$h(z) = \frac{\text{sh}\left[\frac{\gamma}{L}(H-z)\right]}{\text{sh}\left[\frac{\gamma H}{L}\right]}$$

Où γ et L sont des constantes. Les équations d'équilibre dans la direction z , sont obtenues en appliquant le principe du travail virtuel. Ainsi, la réponse du sol, sous une charge q , est donnée par:

$$R = K_w w_0 + 2t \frac{d^2}{dx^2} w_0 \quad (\text{II.18a})$$

$$K_w = \frac{E_0}{(1-\nu_0)^2} \int_0^h \left(\frac{dh}{dz}\right)^2 dz,$$

$$t = \frac{E_0}{4(1-\nu_0)^2} \int_0^H h^2 dz, \quad (\text{II.18b})$$

$$E_0 = \frac{E}{(1-\nu)^2}$$

E : Module de Young du sol,

ν : Coefficient de Poisson,

h : Épaisseur de la couche de sol

II. 3.8.Fondation de Reissner

Reissner (1958) a proposé un modèle bi-paramétrique, en partant du modèle du continuum élastique. Des hypothèses supplémentaires, concernant les déplacements et les contraintes, sont introduites afin de simplifier la résolution des équations de base d'un milieu continu isotrope élastique et linéaire

Selon ce modèle, la relation pression–flexion à l'interface entre la dalle de fondation et le sol de fondation est obtenue par l'intrusion d'une couche de fondation sous la dalle [103]. Ceci est basé sur les hypothèses suivantes :

- Les contraintes planes dans la couche de fondation sont négligeables,
- Les déplacements horizontaux sur les surfaces supérieure et inférieure de la couche de fondation sont nuls.

La relation pression-déflexion est donnée par

$$C_1 w_0 - C_2 \nabla^2 w_0 = R - \frac{C_2}{4C_1} \nabla^2 R \quad (\text{II.19})$$

Où w_0 est le déplacement de la surface de la fondation, R est une charge latérale répartie agissant sur la surface de la fondation; $C_1 = E / H$; $C_2 = HG / 3$; E , G sont les constantes élastiques du matériau de fondation et H est l'épaisseur de la couche de fondation.

II. 3.9.Fondation variables de Pasternak / Winkler

La distribution des couches de sol n'est pas uniforme d'un point à un autre. Cela signifie que le module de Winkler est variable et n'est pas fixé sur la longueur d'une structure sous forme de plaque ou de poutre.

Les études de Pradhan et Murmu [116], Sobhy [117], Beldjelili *et al.* [118], Attia *et al.* [119] ont réussi à proposer une variation du module de Winkler. Ces études suggèrent trois

formulation théoriques typiques : linéaire, parabolique et sinusoidale, comme suit (Figure II.11) :

$$K_w(x) = \frac{J_1 D_i}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{Linear} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolic} \\ 1 + \zeta \sin\left(\frac{x}{a}\right) & \text{Sinusoidal} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Où: J_1 est une constante et ζ est un paramètre à étudier. K_w est la rigidité de base de la couche de cisaillement. Lorsque cela ζ est égal à zéro, la fondation élastique devienne la fondation uniforme de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la Fondation Winkler.

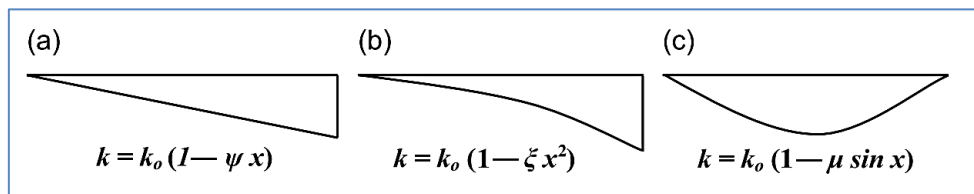


Figure II.12 : Diverses répartitions de la fondation élastique de Winkler dans la direction axiale : type linéaire, (b) type parabolique et (c) type sinusoidal.

II.3.10. Fondation de viscoélastique

Les modèles mécaniques représentent les propriétés rhéologiques du squelette du sol par une combinaison d'éléments élastiques, visqueux et plastiques. Ces modèles sont généralement formés par une combinaison de ressort et de dashpot en série (par exemple, le modèle Maxwell ; illustré à la Figure II.13a) ou en parallèle (par exemple, le modèle de Kelvin ; illustré à la Figure II.13b). Dans le modèle de Shvedov, l'élément élastique est connecté en série avec l'élément visqueux, puis en parallèle avec l'élément en plastique de St. Venant [120].

Le concept de fondation de Pasternak est étendu aux cas de déformations viscoélastiques. Ceci est réalisé en ajoutant des éléments visqueux linéaires aux éléments élastiques du modèle de fondation en parallèle et/ou en série.

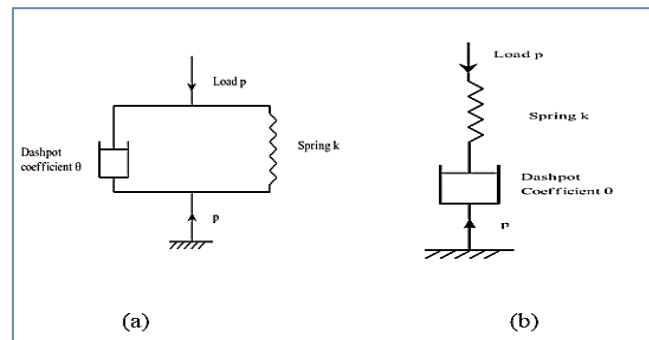


Figure II.13 : Fondations de viscoélasticité : (a) type Maxwell, (b) type Kelvin.

Ce modèle ne permet pas d'assurer la continuité de la fondation en raison de ressorts séparés. L'Amortissement représente une partie de l'énergie de déformation transversale sera irrécupérable [121].

Ainsi, la structure incluant le modèle viscoélastique est plus efficace, notamment en ce qui concerne le comportement au fluage [122].

Selon la réaction de la fondation visco-Pasternak sur structure, on peut obtenir la charge constituée de charges normales, de cisaillement transversal et d'amortissement [123] :

$$R = K_w w_0 + K_p \nabla^2 w_0 + C_d \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (\text{II.21})$$

K_w , K_p et C_d indiquent la constante du ressort, le paramètre de la couche de cisaillement et la constante d'amortissement.

II. 4.Travaux antérieurs sur la modélisation des FGM sur fondation élastique

Diverses théories de modélisation, ont été menées par de nombreuses recherches afin de prédire et d'évaluer le comportement mécanique et vibratoire de structures à gradation fonctionnelle. Reddy [124] a proposé la formulation théorique et le modèle aux éléments finis de la plaque FGM à travers la théorie des déformations de cisaillement du troisième ordre. Les formulations tiennent compte du thermo-couplage, de la dépendance temporelle et de la non-linéarité géométrique des plaques FGM du type Von Karman. Matsunaga [125] a procédé à une analyse de la vibration libre et de la stabilité des plaques FGM par une théorie bidimensionnelle de déformation d'ordre élevé. Hebali *et al.* [1] ont étudié la flexion et la vibration libre des plaques FGM en se basant sur une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique prenant en compte la déformation normale suivant la direction de l'épaisseur, en divisant le déplacement transversal en parties flexionnelles, de cisaillement et d'étirement d'épaisseur. Bennai *et al.* [126] ont étudié la vibration libre et le flambage des poutres sandwich à gradient fonctionnel en tenant compte d'une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur en quasi-3D. L'analyse de la flexion et de la vibration libre utilisant une théorie de déformation de cisaillement à deux variables avec le concept de la position de surface neutre a été traitée par Bellifa *et al.* [127]. Brischetto *et al.* [128] ont examiné le comportement vibratoire des plaques et des cylindres en FGM à l'aide des modèles différentiels en quadrature généralisée en deux et en trois dimensions.

Le comportement dynamique des plaques et des poutres FGM a été étudié, en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement, par Ait Yahia *et al.* [129], Bounouara *et al.* [130], Kolahchi *et al.* [131], Menasria *et al.* [132], Benadouda *et al.* [133], Ayache *et al.* [134], Bouhadra *et al.* [135], Yousfi *et al.* [136], Fourn *et al.* [137], Zidi *et al.* [138], Ait Atmane *et al.* [139], Darilmaz [140], Kar et Panda [141], Bennoun *et al.* [142], Tounsi *et al.* [143].

L'analyse des plaques reposant sur une fondation élastique est un sujet pour de nombreux chercheurs dans le domaine d'ingénierie et beaucoup de méthodes ont été proposées pour analyser le comportement des plaques sur des fondations élastiques. Seide 1958[144] a traité le flambage des plaques rectangulaires sur une base élastique bidirectionnelle en utilisant la méthode énergétique. Cheung [145]1968 a résolu par le biais de la méthode des éléments finis

les problèmes des dalles et des réservoirs (isotropes ou orthotropes) reposant soit sur un continuum élastique semi-infini, soit sur des ressorts individuels du type de Winkler. Aussi, avec le principe d'éléments finis. Timoshenko [146]1970a été l'un des premiers auteurs qui analyse la déflexion (non le flambage) des plaques rectangulaires soumises à des charges transversales et reposant sur des sous-couches élastiques. La flexion sous une charge uniforme de plaques rectangulaires serrées reposant sur des fondations élastiques via des expansions de fonctions propres a été étudiée par Prakash [147]1979. Henwood [148]1982 a présenté une solution en série de Fourier pour un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui décrivent le comportement élastique linéaire d'une plaque rectangulaire épaisse reposant sur une fondation élastique et portant une charge transversale arbitraire. En utilisant également les équations intégrales aux limites de Katsikadelis et Armenkas [154]1984, et l'analyse des éléments de frontière par Puttonen et Varpasuo [150]1986 pour la résolution des problèmes des plaques reposantes sur fondations élastiques. Chilton [151]1990 a développé une matrice de rigidité de fondation cohérente F pour un élément d'une plaque rectangulaire avec des bords simplement supportés sur une fondation élastique, basée sur le modèle de Winkler. Xiang [152]1994 a utilisé des solutions de forme fermée pour le problème de vibration des plaques rectangulaires épaisses initialement sollicitées comme décrites par la théorie de Mindlin. Un développement d'une méthode de résolution des problèmes de flexion des plaques en matériaux composites sur une fondation élastique "sans tension" et l'influence des propriétés des matériaux sur la distribution des déplacements est proposé par Akbarov [153]1996. En outre, Xing [154]1996 a étudié le flambage, les vibrations libres et les vibrations avec des charges initiales dans le plan pour des stratifiés rectangulaires croisés symétriques modérément épais et simplement supportés sur des fondations Pasternak. Yang et Shen [155] (2001) ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élanement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM.

Des études plus avancées sur l'analyse du flambage et des vibrations libres des plaques composites stratifiées symétriques et antisymétriques sur une fondation élastique ont été menées par Akavci [156]2007 en utilisant la technique de Navier et un nouveau modèle de déplacement hyperbolique. Matsunaga [157] (2008), a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM.

Ying *et al.* [158] 2008 ont présenté des solutions exactes pour la flexion et la vibration libre de poutres fonctionnelles reposant sur une fondation élastique du type Winkler–Pasternak, basée sur la théorie bidimensionnelle de l'élasticité. Lü *et al.* [159] 2009 ont étudié le comportement dynamique des plaques fonctionnelles épaisses sur des fondations élastiques en supposant l'élasticité tridimensionnelle, en utilisant la méthode de l'espace d'état pour arriver à une solution exacte pour le cas des plaques simplement supportées. Malekzadeh [160]2009 a fait une analyse tridimensionnelle des vibrations libres pour les plaques avec ou sans fondations élastiques en utilisant la méthode de quadrature différentielle et la solution en série, en prenant comme conditions d'appuis, deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres sont pris quelconques. Zenkour [161]2009 utilisant la théorie raffinée de la plaque de déformation par cisaillement sinusoidal et incluant l'interaction plaque-fondation, une analyse de flexion thermoélastique est présentée pour une plaque de matériau simplement soutenue, rectangulaire, fonctionnellement gradée, soumise à une charge uniforme transversale et à un champ de température, et reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (modèle Pasternak). Ait Atmane *et al.* [162]2010 ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier. Hasani Baferani *et al.* [163] (2011) ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'indice de la fraction volumique, l'effet du support

élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration. Benachour et al. [164] (2011) ont utilisé la même théorie développée par Hadji et al. [165] (2011) pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différente entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité.

Tajeddini et al. [166] (2011) ont été examinés une analyse tridimensionnelle des vibrations libres des plaques circulaires épaisses, annulaires et fonctionnellement graduées (FG) plaques d'épaisseur variable suivant la direction radiale, reposant sur un élastique à deux paramètres fondation. Jahromi et al. [167] (2013) ont été étudiés la vibration libre d'une plaque rectangulaire moyennement épaisse reposant partiellement sur la fondation Pasternak-Winkler en utilisant la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQ). Sobhy [168]2013 a étudié l'effet des fondations élastiques sur le flambement et les vibrations libres de plaques sandwich avec une variation matérielle exponentielle et sous diverses conditions aux limites. Taibi *et al.* [169] 2014 ont étudié le comportement de déformation thermomécanique des plaques sandwich reposants sur une fondation élastique de Pasternak-Winkler, basée sur la théorie de déformation au cisaillement raffinée. Xiang et al. [170] (2014) ont étudié la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique de type Pasternak-Winkler, une généralisation du nième ordre de la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre de Reddy et via la méthode sans maillage pour la résoudre. Jędrysiak et Kaźmierczak Sobińska [171] (2015) ont étudié les vibrations libres de fines bandes de plaques à gradation fonctionnelle reposant sur une fondation élastique selon la méthode Ritz. Muntari [172]2015 a analysé une vibration libre des plaques fonctionnellement graduées reposants sur des fondations élastiques en utilisant une théorie généralisée de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSST) de type hybride quasi-3D. Najafi et al. [173] (2016) ont analysé dans un environnement thermique, la réponse à l'impact non linéaire de faible vitesse d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique non linéaire à trois paramètres. Zhang *et al.* [174]2016 ont étudié le comportement dynamique des plaques quadrilatérales composites renforcées par des nanotubes de carbone fines et modérément épaisses reposant sur des fondations élastiques en utilisant une méthode améliorée des moindres carrés de Ritz. Les vibrations libres des plaques minces à inclinaison fonctionnelle,

reposant sur des fondations élastiques et soumises à différentes conditions d'appuis ont été étudiées par Chakraverty et Pradhan [175]2016. Arefi et Zenkour [176]2017 ont présenté une analyse de la propagation des ondes d'un nanofaisceau constitué de matériaux magnéto-électro-élastiques fonctionnellement gradés avec section rectangulaire reposant sur une fondation élastique Visco-Pasternak. La réponse à la flexion et la vibration d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique Pasternak est examinée par Gupta [177] 2018 en utilisant une théorie de cisaillement d'ordre élevé non polynomial et de déformation normale récemment développée. Ghahnavieh et al. [178] (2018) ont étudié une nano-plaque FGM magnéto-électro-élastique avec masses concentrées dans des conditions aux limites différentes selon la théorie de déformation au cisaillement du troisième ordre.

Les différentes théories de cisaillement raffinées pour l'étude des vibrations, du flambage, de la flexion et de l'hygro-thermo-mécanique des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques ont été étudiées par Akavci [179]2014, Khalfi *et al.* [180]2014, Lee *et al.* [181]2015, Mahmoudi *et al.* [182]2019.

Tounsi et ses co-auteurs (Ahmed et al. [183]2016; Ayache et al [184].2018; Batou et al. [185] 2019; Nebab et al [186]. 2019) ont étudié les propriétés de dispersion des ondes dans les structures à gradation fonctionnelle avec ou sans repos sur un milieu élastique utilisant les théories de déformation au cisaillement d'ordre élevé.

II.5. Conclusion

Un détail sur les lois et la modélisation des structures reposant sur des fondations élastiques a été établie dans ce chapitre. On a présenté la majorité de théories utilisées dans la modélisation des plaques. Les différents modèles de fondations pour modéliser le sol ont été montrés. On a aussi essayé de faire une synthèse globale sur les recherches et des travaux antérieurs qui ont été effectués sur les structures du type FGM reposant sur des modèles de fondation avancés. Le comportement vibratoire d'une plaque FGM poreuse et non poreuse reposant sur des fondations élastiques utilisant une théorie d'ordre supérieur sera démontrée dans les chapitres suivants.

Chapitre III

Analyse théorique de la propagation des
ondes des plaques en FG reposant sur
fondation élastique

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, une étude analytique de la propagation des ondes dans des plaques à gradation fonctionnelle reposants sur des fondations élastiques de type : Winkler-Pasternak en utilisant une théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique d'ordre élevé quasi-3d (HSDT) qui a été développée pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques de matériau fonctionnellement gradué (FGM). Cette théorie prend en compte l'effet de la déformation normale (l'effet de stretching). Contrairement aux autres théories conventionnelles sur la déformation par cisaillement, le présent travail inclut un nouveau champ de déplacement en introduisant des variables intégrales indéterminées afin de réduire le nombre d'inconnues, qui étaient de six dans la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur à seulement cinq variables. Ensuite, une étude analytique de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes dans les plaques FGM poreux en utilisant des différentes formes de distribution de la porosité. La formulation des équations d'équilibre quasi-3d (HSDT) pour la propagation des ondes dans les plaques FGM reposant sur des fondations élastiques sont dérivés en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques et les relations de dispersion analytiques sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

III.2. Analyse théorique du comportement vibratoire des plaques FGM

III.2.1. Formulation du problème

Supposons une plaque fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique est constituée de la matrice matérielle métal / céramique. La réponse macroscopique de la plaque est donc isotrope et les propriétés matérielles de la plaque varient dans le sens de l'épaisseur.

Dans cette étude, la plaque graduée fonctionnellement avec l'épaisseur (h), la longueur (a) et la largeur (b) est considérée comme le montre la figure III.1. Le système de coordonnées cartésiennes est établi de sorte que $x \in [0, a]$ et $y \in [0, b]$.

Les fondations élastiques sont du type Winkler-Pasternak. La couche de Winkler, dont le coefficient a été exprimé. La couche de cisaillement n'est pas variable, elle est constante sur toute la longueur de la plaque.

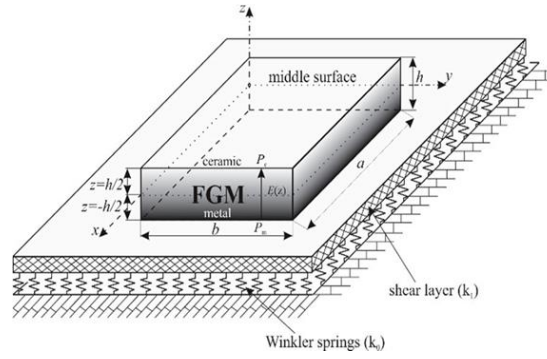


Figure III.1: la géométrie d'une plaque FGM reposant sur fondation élastique

III.2.1.1. Caractéristiques matérielles d'une Plaque P-FGM parfaite

La plaque FG est composée d'un mélange de composants céramique et métal, dont les propriétés des matériaux sont considérées variant avec l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance comme suit:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

Où P est le paramètre du matériau, et les indices m et c représentent respectivement les composants métalliques et céramiques. La plaque est entièrement céramique lorsque la valeur de p égale à zéro, et lorsque P prendre la valeur infinie, la plaque est entièrement métallique. De même dans cette partie d'étude, le coefficient de Poisson (ν) est considéré comme constant (Yang et al., [187] 2005; Tounsi et al., [188] 2013).

La fraction volumique totale du métal et céramique est $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme suit:

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{III.2})$$

Les équations du module d'Young E et de la densité matérielle ρ de la plaque FGM peuvent être exprimées comme suit:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.3a})$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.3b})$$

III.2.1.2. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque P-FGM poreuse

La plaque est supposée avoir des porosités s'étendant en épaisseur en raison d'un défaut pendant la production comme le montre la figure III.2. Considérons une plaque imparfaite avec une fraction volumique de porosité, λ ($\lambda \ll 1$), répartie également entre le métal et la céramique.

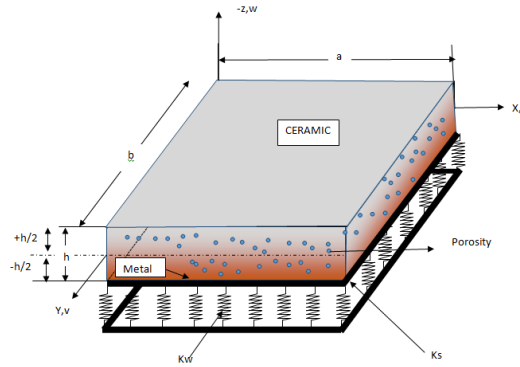


Figure III.2: la géométrie d'une plaque FGM poreuse reposant sur fondation élastique

La propriété matérielle effective de la plaque poreuse en FGM est donnée comme suit

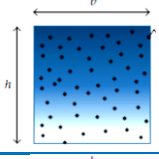
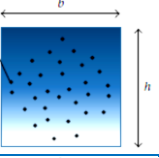
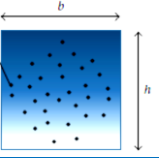
$$E(z) = (E_c - E_m) \left(1 + \frac{h}{2z} \right)^p - \zeta (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) + E_m \quad (\text{III.4a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(1 + \frac{h}{2z} \right)^p - \zeta (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) + \rho_m \quad (\text{III.4b})$$

Ou p est le paramètre du matériau, le module de Young E et la densité de masse ρ tel que les indices m et c représentent respectivement les composants métalliques et céramiques. ζ c'est le facteur de la distribution de la porosité en fonction de l'épaisseur de la poutre (tableau III.1). Il est à noter que le nombre réel positif p ($0 \leq p < \infty$) lorsque p est mis à zéro la plaque est devient

entièrement en céramique et une plaque entièrement en métal pour une valeur de p égal à l'infini. Dans cette étude, le coefficient de Poisson (ν) est toujours considéré comme constant.

Tableau III.1. Facteurs de la distribution de porosité ξ .

Modèles	ξ	Forme géométrique
Wattanasakulpong <i>et al.</i> [189] 2014	$\frac{\lambda}{2}$	
Ankit Gupta <i>et al.</i> [177], 2017	$\log\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$	
Ayache <i>et al.</i> [184] 2018	$1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}$	

Les caractéristiques mécaniques de la plaque poreuse sont supposées varier selon une loi bien définie en fonction de la répartition de la porosité. Dans ce qui suit, trois distributions de porosité dans le sens de l'épaisseur sont considérées (uniforme, logarithmique et exponentielle) :

i. Distribution de porosité 1 (Wattanasakulpong and Chaikittiratana 2012)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(1 + \frac{h}{2z}\right)^p - \frac{\lambda}{2} (E_c + E_m) + E_m \quad (\text{III.5a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(1 + \frac{h}{2z}\right)^p - \frac{\lambda}{2} (\rho_c + \rho_m) + \rho_m \quad (\text{III.5b})$$

ii. Distribution de porosité 2 (Gupta and Talha 2017)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(1 + \frac{h}{2z}\right)^p - \log\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) + E_m \quad (\text{III.6a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(1 + \frac{h}{2z}\right)^p - \log\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) + \rho_m \quad (\text{III.6b})$$

iii. Distribution de porosité 3 (Ayache et al., 2018)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(1 + \frac{h}{2z}\right)^p - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) + E_m \quad (\text{III.7a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(1 + \frac{h}{2z}\right)^p - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) + \rho_m \quad (\text{III.7b})$$

III.2.1.3. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une plaque E-FGM

La plaque E-FGM est définie en utilisant la fraction de volume de deux fonctions de loi de Puissance

$$E(z) = E_m e^{p \left(\frac{1+z}{2+h}\right)} \quad (\text{III.8a})$$

$$\rho(z) = \rho_m e^{p \left(\frac{1+z}{2+h}\right)} \quad (\text{III.8b})$$

Où p est l'indice de loi de puissance, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

La valeur p égale à zéro indique une plaque entièrement en céramique, alors que lorsque p tend vers l'infini la plaque sera entièrement métallique.

III.2.1.4. Fondation élastique

Les plaques FG sont supposées reposantes sur deux paramètres de fondation élastique. Le paramètre de Winkler K_w modélisé avec des ressorts. Le deuxième paramètre K_s est présenté à partir de la couche de cisaillement de Pasternak, qui est interconnectée avec la source de Winkler, donnée par :

$$R(x) = K_w w - K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.9})$$

Où $R(x)$ est appelée la réaction de la base élastique

K_w est la rigidité de base de la couche de cisaillement.

Lorsque K_w est égal à zéro, la fondation élastique devient la fondation uniforme de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement K_s est négligée, la fondation de Pasternak devient la fondation de Winkler.

III.2.2 Cinématique et équations constitutive

Dans ce chapitre, une simple théorie de plaque de cisaillement d'ordre supérieur HSST est utilisée pour dériver les équations principales et déterminer la propagation des ondes dans les plaques P-FGM et E-FGM.

Le champ de déplacement pris est représenté en termes de 5 variables en intégral, ce qui permet que le nombre d'inconnues soit réduit par rapport au HSST conventionnel. La fonction de gauchissement est considérée. Selon la théorie de l'ordre supérieur de l'hypothèse, le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z) \varphi(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. Dans cette étude, la fonction de forme est donnée par Reissner (1975) en tant que:

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right), \quad g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{III.11})$$

u, v et w sont les composantes de déplacement le long des directions de coordonnées x, y et z respectivement. u_0 et v_0 désignent le déplacement dans les directions des coordonnées x et y en un point sur la surface médiane de la plaque. w_0 et θ désignent respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal. φ est une fonction de déplacement inconnue expliquant l'effet de l'étirement de l'épaisseur, et $g(z)$ est une fonction de forme qui est déterminée à partir des conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

On peut observer que l'équation de la cinématique (III.10) utilise seulement cinq inconnues $u_0; v_0; w_0; \theta$. Les déformations linéaires non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation (III.10) sont :

Pour dériver les équations, on suppose de petites déformations élastiques, c'est-à-dire que les déplacements et rotations sont faibles et obéissent à la loi de Hooke. Les relations déformation-déplacement, basées sur cette formulation, s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.12})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.13.a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.13.b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad \text{and} \quad g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \quad (\text{III.13.c})$$

Les intégrales non définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de Navier et peuvent être écrites comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.14})$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisée, dans ce cas via Navier.

Par conséquent A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\kappa_1^2}, \quad B' = -\frac{1}{\kappa_2^2}, \quad k_1 = \kappa_1^2, \quad k_2 = \kappa_2^2 \quad (\text{III.15})$$

Pour les plaques FGM, les relations contrainte-déformation pour l'état de contrainte plane peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les éléments de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III.31),

Les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être écrits de la manière suivante :

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{III.17a})$$

Si $\varepsilon_z \neq 0$ (effet de stretching), alors Q_{ij} sont des constantes élastiques 3D, donnée par :

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.17b})$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

III.2.3. Equations de mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous une forme analytique suivante :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_{ef} - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.18})$$

Où δ indique la variation, et U , U_{ef} et K représentent l'énergie de déformation de la plaque, l'énergie de déformation de la fondation élastique et l'énergie cinétique, respectivement.

III.2.3.1 Énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée comme suite :

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (\text{III.19 a})$$

$$= \int_A \left(N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + R_{yz}^s \delta R_{yz}^s + R_{xz}^s \delta R_{xz}^s \right) dA \quad (\text{III.19 b})$$

Où, ε et σ sont les vecteurs de déformation et de contraintes ; N_i^i , M_i^i , et R_i^i sont les résultats des intégrations suivantes :

$$\begin{pmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{pmatrix} dz \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_z) g'(z) dz \quad (\text{III.20 a})$$

$$\begin{pmatrix} R_{xz}^s & R_{yz}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.20 b})$$

III.2.3.2 l'énergie de déformation des fondations élastiques

La variation de l'énergie de déformation des fondations élastiques variables indiquée comme :

$$\delta U_{ef} = \int_A (K_w w_0 \delta w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right) \delta w_0) dA \quad (\text{III.21})$$

III.2.3.3 Énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique de la plaque basée sur la quasi-3D HOST peut être écrite comme :

$$\delta K = \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \quad (\text{III.22a})$$

$$= \int_A \left\{ \begin{aligned} & I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ & + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\ & + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ & + J_0 (\dot{\phi} \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\phi}) + K_3 (\dot{\phi} \delta \dot{\phi}) \end{aligned} \right\} dA \quad (\text{III.22b})$$

Où, Les termes d'inertie sont définis par les équations suivantes comme :

Où le point « . » indique la dérivation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse de la plaque; et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, g(z), z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.23})$$

$$(J_1, J_2, K_2, K_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), z f(z), f(z)^2, g(z)^2) \rho(z) dz$$

En substituant les expressions pour, δu_0 , δv_0 et δw_0 des équations. (III.19), (III.21) et III. (22) dans l'équation (III.13) et en intégrant par parties et en collectant les coefficients de $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta_0)$.

En utilisant les relations généralisées de déplacement-déformation (Eqs. (III.10) et (III.14) et les relations contrainte-déformation (10), et en appliquant l'intégration par parties et le lemme fondamental du calcul vibrationnel et en recueillant les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ et $\delta \phi$ dans Eq. (III.18).

Les équations du mouvement sont obtenues comme :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + K_w w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right) = J_0 \ddot{\phi} - I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial R_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \phi : \quad & \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^s}{\partial y} - N_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_3 \ddot{\phi}
 \end{aligned} \tag{III.24}$$

En substituant l'équation Eq.(III.12) dans l'équation (III.41) dans Eq.(III.16) et les résultats ultérieurs dans l'équation Eq. (III.18) en traversant l'épaisseur de la fondation élastique reposant sur la plaque FG, les résultantes des contraintes sont exprimées sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{11} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{12}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{-\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{-\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \phi_z \end{Bmatrix} \tag{III.25a}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{yz}^s \\ R_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25b})$$

Ou

$$\begin{aligned} (A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \\ (X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \\ A_{ij}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g(z)]^2 dz \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

En substituant l'équation (III.25) dans l'équation. (III.24), l'équation de mouvement de la théorie quasi-3D propose de la plaque FGM, peuvent être exprimées en termes des déplacements $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta, \delta \phi)$ comme :

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} \theta + X_{13} d_{11} \phi_Z = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_{11} \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_{11} \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.27 a})$$

$$\begin{aligned} A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\ + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_{22} \theta + X_{23} d_{22} \phi_Z = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_{22} \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_{22} \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.27 b})$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta \\ + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta + N_x^0 d_{11} w_0 + 2 N_{xy}^0 d_{12} w_0 + N_y^0 d_{22} w_0 + (Y_{13} d_{11} + Y_{13} d_{11}) \phi_Z = I_0 \ddot{w}_0 \\ + J_a \ddot{\phi}_Z + I_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{III.27 c})$$

$$\begin{aligned}
& -\left(B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2\right) d_1 u_0 - \left(B_{66}^s \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\right) d_{122} u_0 - \left(B_{66}^s \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\right) d_{112} v_0 - \left(B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2\right) d_2 v_0 \\
& + \left(D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2\right) d_{11} w_0 + 2 \left(D_{66}^s \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\right) d_{1122} w_0 + \left(D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2\right) d_{22} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta \\
& - 2 H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left(\left(k_1 A' + k_2 B'\right)^2 H_{66}^s\right) d_{1122} \theta + A_{44}^s \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \theta + A_{55}^s \left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \theta - k_1 Y_{13}^s \phi_z - k_2 Y_{23}^s \phi_z \\
& + A_{44}^s \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \phi_z + A_{55}^s \left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \phi_z = -J_1 \left(k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0\right) + J_2 \left(k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0\right) \\
& - K_2 \left(\left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \ddot{\theta} + \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \ddot{\theta}\right)
\end{aligned} \tag{III.27 d}$$

$$\begin{aligned}
& -X_{13}^s d_1 u_0 - X_{23}^s d_2 v_0 + \left(Y_{13}^s d_{11} + Y_{23}^s d_{22}\right) w_0 + \left(A_{44}^s k_2 B' d_{22} + A_{55}^s k_1 A' d_{11} - Y_{13}^s k_1 - Y_{23}^s k_2\right) \theta \\
& + \left(A_{55}^s d_{11} + A_{44}^s d_{22} - Z_{33}^s\right) \phi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 + \ddot{\phi}_z
\end{aligned} \tag{III.27e}$$

Ou d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \tag{III.28}$$

III.2.4. Solution analytique pour une plaque rectangulaire sur appuis simples

Les équations de mouvement admettent les solutions Navier pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées en tant que produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations gouvernantes et les conditions limites.

III.2.4.1. Relations de dispersion

Les relations de dispersion pour la propagation des ondes dans une plaque FG reposant sur une fondation élastique peuvent être exprimées sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta_0(x, y, t) \\ \varphi(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \exp \left[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t) \right] \\ V \exp \left[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t) \right] \\ W \exp \left[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t) \right] \\ X \exp \left[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t) \right] \\ \Phi \exp \left[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t) \right] \end{pmatrix} \quad (\text{III.29})$$

où U ; V ; W ; X et Φ sont les coefficients de l'amplitude de l'onde, κ_1 et κ_2 sont les nombres d'onde de propagation des ondes le long de la x l'axe et le y axe respectivement, est la fréquence de vibration libre de la plaque, $\sqrt{i} = -1$ l'unité imaginaire.

En substituant l'équation. (III.29) dans les équations (III.27), on obtient :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{12} & S_{12} & S_{12} & S_{12} \\ S_{14} & S_{12} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{12} & m_{12} & m_{12} & m_{12} \\ m_{14} & m_{12} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \varphi_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Dans lequel

$$S_{11} = -(A_{11}\kappa_1^2 + A_{66}\kappa_2^2)$$

$$S_{12} = -\kappa_1\kappa_2 (A_{12} + A_{66})$$

$$S_{13} = i\kappa_1 (B_{11}\kappa_1^2 + B_{12}\kappa_2^2 + 2B_{66}\kappa_2^2)$$

$$S_{14} = i\kappa_1 (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \kappa_2^2)$$

$$S_{15} = i\kappa_1 X_{13}$$

$$S_{21} = -\kappa_1\kappa_2 (A_{12} + A_{66})$$

$$S_{22} = -(A_{66}\kappa_1^2 + A_{22}\kappa_2^2)$$

$$S_{23} = i\kappa_2 (B_{22}\kappa_2^2 + B_{12}\kappa_1^2 + 2B_{66}\kappa_1^2)$$

$$S_{24} = i\kappa_2 (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \kappa_1^2)$$

$$S_{25} = i\kappa_2 X_{23}$$

$$\begin{aligned}
S_{13} &= -i\kappa_1(B_{11}\kappa_1^2 + B_{12}\kappa_2^2 + 2B_{66}\kappa_2^2) \\
S_{23} &= -i\kappa_2(B_{22}\kappa_2^2 + B_{12}\kappa_1^2 + 2B_{66}\kappa_1^2) \\
S_{33} &= -(D_{11}\kappa_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\kappa_1^2\kappa_2^2 + D_{22}\kappa_2^4) - K_W - K_P(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \\
S_{34} &= -k_1(D_{11}^s\kappa_1^2 + D_{12}^s\kappa_2^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2(D_{22}^s\kappa_2^2 + D_{12}^s\kappa_1^2) \\
S_{35} &= -\kappa_1^2Y_{13} - \kappa_2^2Y_{23} - K_W - K_P(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)
\end{aligned} \tag{III.31a}$$

$$\begin{aligned}
S_{41} &= -i\kappa_1(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\kappa_2^2) \\
S_{42} &= -i\kappa_2(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\kappa_1^2) \\
S_{43} &= -k_1(D_{11}^s\kappa_1^2 + D_{12}^s\kappa_2^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2(D_{22}^s\kappa_2^2 + D_{12}^s\kappa_1^2) \\
S_{44} &= -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s \kappa_1^2 \kappa_2^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) \\
&\quad - (k_1A')^2 A_{55}^s \kappa_1^2 - (k_2B')^2 A_{44}^s \kappa_2^2 \\
S_{45} &= -k_1Y_{13}^s - k_2Y_{23}^s - \kappa_1^2 k_1 A' A_{55}^s - \kappa_2^2 k_2 B' A_{44}^s \\
S_{51} &= i\kappa_1 X_{13} \\
S_{52} &= -i\kappa_2 X_{23} \\
S_{53} &= -\kappa_1^2 Y_{13} - \kappa_2^2 Y_{23} - K_W - K_P(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \\
S_{54} &= -k_1 Y_{13}^s - k_2 Y_{23}^s - \kappa_1^2 k_1 A' A_{55}^s - \kappa_2^2 k_2 B' A_{44}^s \\
S_{55} &= -\kappa_1^2 A_{55}^s - \kappa_2^2 A_{44}^s - Z_{33} - K_W - K_P(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
m_{11} &= -I_0, m_{12} = 0, m_{13} = i\kappa_1 I_1, m_{14} = -iJ_1 k_1 A' \kappa_1, m_{15} = 0 \\
m_{21} &= 0, m_{22} = -I_0, m_{23} = i\kappa_2 I_1, m_{24} = -ik_2 B' \kappa_2 J_1, m_{25} = 0 \\
m_{31} &= -i\kappa_1 I_1, m_{32} = -i\kappa_2 I_1, m_{33} = -I_0 - I_2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2), m_{34} = J_2(k_1 A' \kappa_1^2 + k_2 B' \kappa_2^2) \\
m_{35} &= -J_0, m_{41} = iJ_1 k_1 A' \kappa_1, m_{42} = ik_2 B' \kappa_2 J_1, m_{43} = J_2(k_1 A' \kappa_1^2 + k_2 B' \kappa_2^2) \\
m_{44} &= -K_2((k_1 A')^2 \kappa_1^2 + (k_2 B')^2 \kappa_2^2), m_{45} = 0, m_{51} = 0, m_{52} = 0 \\
m_{53} &= -J_0, m_{54} = 0, m_{55} = -K_0
\end{aligned} \tag{III.31b}$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque fonctionnelle graduée sont donnés par :

$$[[K]] - \omega^2 [[M]] = 0 \quad (\text{III.32 a})$$

Les racines de l'équation (III.27), peut être exprimé en tant que :

$$\omega_1 = W_1(K), \omega_2 = W_2(K), \omega_3 = W_3(K), \omega_4 = W_4(K) \text{ et } \omega_5 = W_5(K) \quad (\text{III.32 b})$$

Ses racines correspondent aux modes d'onde $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ et $M5$ respectivement. La vitesse de phase de propagation des ondes dans la plaque FG peut être obtenue par

$$C_i = \frac{W_i(K)}{K} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (\text{III.32 c})$$

III. 3. Conclusion

Dans le présent chapitre, une étude analytique du comportement vibratoire des structures FGM a été présentée. Deux types des structures FGM sont considérés, le premier est une plaque dont les propriétés des matériaux variant selon une distribution de la loi de puissance et exponentielle et le deuxième type est une plaque qui supposée avoir des porosités s'étendant en épaisseur en raison d'un défaut pendant la production. Un nouveau modèle de déplacement introduisant des variables intégrales indéterminées et une nouvelle forme de distribution de la porosité a été utilisé. la déformation normale ou l'effet de stretching a été pris en considération dans l'analyse les plaques FGM. Les équations gouvernantes dans la poutre et la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe d' Hamilton. Les solutions analytiques et les relations analytiques de dispersion sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

Les résultats d'analyse de la dispersion et la propagation d'ondes pour les différentes problématiques sont présentés et comparés avec ceux obtenus dans la littérature dans les chapitres suivants.

Chapitre VI :

Propagation d'onde de la plaque FGM
reposant sur fondation élastique

IV.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter et de discuter les résultats de l'analyse de la propagation d'onde de dispersion des plaques FGM parfaites reposant sur des fondations élastiques du type Winkler-Pasternak en utilisant la théorie de gauchissement. Plusieurs exemples illustratifs sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de cette analyse. Les résultats numériques dans les présentes théories sont comparés à ceux prédits par la théorie utilisée par Nami et Janghorban [189] (2014), d'Aminipour et Janghorban [190] (2017), Aminipour et al. [191] 2018 et Nebab et al. [185] (2019), dans le domaine de l'analyse de la propagation et la vibration des plaques FGM. Toutes les analyses basées sur le présent modèle sont effectuées en utilisant le programme MAPLE. Les résultats sont représentés par des tableaux et des courbes de fréquences propres et de la vitesse de phase de la propagation des ondes pour différents types des plaques P-FGM et E-FGM.

IV.2. Résultats numériques et discussion

Dans cette étude, une plaque en FGM est fabriquée à partir de deux matériaux Si₃N₄ / SUS304; dont les propriétés sont représentées dans le tableau IV.1. Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance ou une loi exponentielle. La surface supérieure de plaque FGM est riche en céramique Si₃N₄, tandis que la surface inférieure de la plaque FGM est riche en métal SUS304 (Ait Yahia et al. [192] 2015). L'épaisseur de la plaque en FGM est prise égale h=0.2 mètres. Cette analyse a été effectuée via le logiciel MAPLE.

Tableau V.1 : Propriétés matérielles de la plaque FGM

Material	Properties		
	$E(GPa)$	ν	$\rho(Kg/m^3)$
Ceramic (SUS304)	201.04	0.3	8166
Metal (Si ₃ N ₄)	348.43	0.3	2370

IV.2.1. Propagation des ondes dans les plaques P- FGM

IV.2.1.1 Validations des résultats de la fréquence circulaire

Dans cette partie, nous avons testé la précision de la théorie quasi-3D HOST proposée pour analyser la propagation d'onde des plaques homogènes. Cette partie de validation est présentée par une comparaison de nos résultats de la fréquence circulaire avec d'autres résultats trouvés par des études précédentes.

Le tableau IV.2 montre une comparaison entre les valeurs de la fréquence circulaire trouvée basant sur notre méthodologie avec celles rapportés par trois recherches ; de la solution analytique de Nami et Janghorban (2014) qui ont basé dans leur analyse sur la théorie classique des plaques, les résultats (Aminipour et al. 2018) qui ont basés sur la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé via cinq inconnues des champs de déplacement et les résultats d'étude de Nebab et al. (2019) qui ont utilisé également la théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé en réduisant le nombre d'inconnues à quatre. À partir de ces résultats de validation, on constate que la fréquence propre des plaques PFGM augmente avec l'augmentation du nombre d'ondes.

Tableau IV.2 : Comparaison de présents résultats de la fréquence circulaire pour le mode M1 d'une plaque isotrope avec d'autre résultats ($h= 2\text{mm}$, $\kappa =$ nombre d'onde, $\rho = 7480 \text{ Kg/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$)

κ	source			
	Présent	(Aminipour <i>et al.</i> 2018)	(Nami and Janghorban 2014)	(Nebab <i>et al.</i> 2019)
5	160.34	160.34	160.34	160.34
10	641.28	641.28	641.37	641.27
15	1442.62	1442.61	1443.08	1442.60
20	2564.02	2564.00	2565.47	2563.96
25	4005.00	4004.96	4008.55	4004.86
30	5764.96	5764.87	5772.32	5764.67
40	10238.69	10238.39	10261.89	10237.76
50	15977.70	15976.97	16034.21	15975.44
75	35793.25	35780.62	36076.97	35781.95
100	63250.25	63239.08	64136.83	63215.25

De plus, afin de bien prouver l'efficacité de la présente théorie quasi-3D, une deuxième validation a été faite. Nos résultats sont également vérifiés avec les résultats d'Aminipour et Janghorban (2017) basés sur la théorie de la déformation trigonométrique en cisaillement pour une solution analytique donnée également, Aminipour et al. (2018) et Nebab et al. (2019). L'effet du nombre d'ondes sur l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques isotropes est présenté dans le tableau IV.3. A partir des résultats illustrés dans ce tableau, on peut affirmer aussi que la fréquence augmente au fur à mesure l'augmentation de nombre d'ondes.

Tableau IV. 3 : Comparaison des présents résultats de la fréquence circulaire pour le mode M1 d'une plaque isotrope avec d'autres résultats ($h = 2\text{mm}$, $\kappa =$ nombre d'onde, $\rho = 7480\text{ Kg/m}^3$, $E = 210\text{ GPa}$, $\mu = 0.3$)

Model				
κ	Present	(Aminipour <i>et al.</i> 2018)	(Aminipour and Janghorban 2017)	(Nebab <i>et al.</i> 2019)
1	64.127	64.13	64.23	64.127
3	576.496	576.49	577.41	576.466
5	1597.77	1597.7	1600.16	1597.543
7	3121.134	3120.86	3125.44	3120.274
9	5136.628	5135.89	5142.93	5134.312
11	7631.448	7629.83	7639.43	7626.371
13	10590.303	10587.24	10599.2	10580.608
15	13995.83	13990.57	14004.46	13979.055
17	17829.016	17820.66	17835.8	17802.079
20	24336.176	24321.12	24336.63	24286.857
25	37023.887	36991.33	37003.31	36913.438
30	51725.282	51666.69	51672.65	51517.443
35	68122.014	68029.61	68033.91	67775.302
40	85926.833	85795.13	85812.71	85397.077
45	104890.242	104717.4	104776.59	104132.791
50	124801.091	124590	124734.2	123772.517
55	145483.763	145242.79	145531.31	144143.079
60	166793.855	166537.39	167045.36	165103.306

65	188613.519	188362.24	189180	186539.038
70	210847.04	210628.05	211859.91	208358.462
75	233416.944	233263.71	235026.44	230488.023
80	256260.675	256212.9	258633.84	252868.989

À partir des tableaux IV.2 et IV.3, il est montré que les résultats de notre théorie de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D peuvent affirmer une bonne précision et sont en bon accord avec les d'autres résultats publiés lié aux propagations des ondes dans les plaque isotropes.

IV.2.1.2. Validation de l'effet de la déformation normal (effet de stretching)

Dans cette vérification, nous essayons de voir l'exactitude de la théorie présentée de point de vue de l'effet de stretching sur la propagation d'onde de la plaque PFGM.

À cet effet, les résultats obtenus par le modèle objet de cette partie d'étude sont comparés par ceux prédits par Fourm et al. [137] (2017) pour les deux cas $\epsilon_z \neq 0$ (avec l'effet stretching) et $\epsilon_z = 0$ (sans l'effet stretching) par le biais d'une analyse d'une plaque FGM carée pour $\kappa = \pi$. Les fréquences fondamentales adimensionnelles pour les plaques carrées simplement appuyées avec différentes valeurs d'épaisseur (rapport a/h) (2 ; 5; 10 et 20) et pour un paramètre de matériau p variant de 0 à 10 sont présentées dans le tableau IV.4.

On peut constater en général que les résultats du présent modèle sont en excellent accord avec l'autre modèle. On peut également observer l'influence de l'effet de la déformation normale sur la fréquence fondamentale, l'effet de stretching ϵ_z augmente la fréquence; cette augmentation devient plus remarquable dans le cas d'un rapport d'épaisseur égal à 5). C'est-à-dire que l'effet de la déformation normale " ϵ_z " devient plus sensible dans le cas de plaques épaisses.

On peut conclure que l'effet d'une déformation normale " ϵ_z " devient plus important dans le cas des plaques épaisses. Cela peut justifier par la présence de cisaillement dans les structures épaisses et qui joue par la suite le rôle de l'amplification de l'effet de la déformation normale.

Tableau IV.4: Comparaison des présents résultats de la fréquence circulaire d'une plaque carrée SUS304/Al2O3

a/h	Mode	Théorie	Effet de stretching	P				
				0	0.5	1	4	10
2	1	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.2284	0.1553	0.1344	0.1081	0.1005
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.2254	0.1528	0.1325	0.1071	0.0996
	2	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
	3	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.6250	0.3902	0.3330	0.2776	0.2674
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.5647	0.3635	0.3105	0.2555	0.2434
	4	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.7447	0.5810	0.5211	0.3956	0.3429
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.7638	0.5805	0.5197	0.3981	0.3487
5	1	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.1286	0.0871	0.0756	0.0618	0.0575
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.1280	0.0867	0.0752	0.0616	0.0573
	2	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
	3	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.6250	0.4225	0.3642	0.2923	0.2722
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.5647	0.3833	0.3306	0.2647	0.2461
	4	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	1.3297	0.9629	0.8531	0.6613	0.5929
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	1.3380	0.9661	0.8550	0.6635	0.5958
10	1	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.0700	0.04742	0.0412	0.0338	0.0314
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.0699	0.04735	0.04114	0.0338	0.0314
	2	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
	3	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.6250	0.4281	0.3702	0.2948	0.2729
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.5647	0.3871	0.3348	0.2665	0.2466
	4	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	2.4436	1.7481	1.5424	1.1983	1.0813
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	2.4480	1.7502	1.5438	1.1996	1.0828
20	1	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.0359	0.0243	0.0211	0.0174	0.0161
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.0358	0.0242	0.0211	0.0173	0.0161
	2	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.3340	0.2298	0.1989	0.1580	0.1459
	3	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	0.6250	0.4294	0.3717	0.2954	0.2730
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	0.5647	0.3881	0.3359	0.2669	0.2467
	4	Présent	$\varepsilon_z \neq 0$	4.7685	3.4011	2.9974	2.3292	2.1052
		Fourm et al.2017	$\varepsilon_z = 0$	4.7707	3.4022	2.9982	2.3299	2.1059

Les figures IV.1, IV.2, IV.3 et IV.4 montrent la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle et la vitesse de phase d'une plaque de FGM carré en fonction du paramètre de matériau pour un rapport d'épaisseur a/h égal à 2 et 5, respectivement, pour $\kappa = 10$ rad/m, et pour les trois modes. De plus, l'effet de la déformation normale est présenté sur ces figures. Ces courbes permettent de constater que l'augmentation des valeurs de l'indice de puissance entraîne une diminution de la fréquence. Cette diminution est assez significative pour des valeurs du paramètre de matériaux inférieures à 6 pour les trois modes; à partir de cette valeur, l'écart devient pratiquement constante.

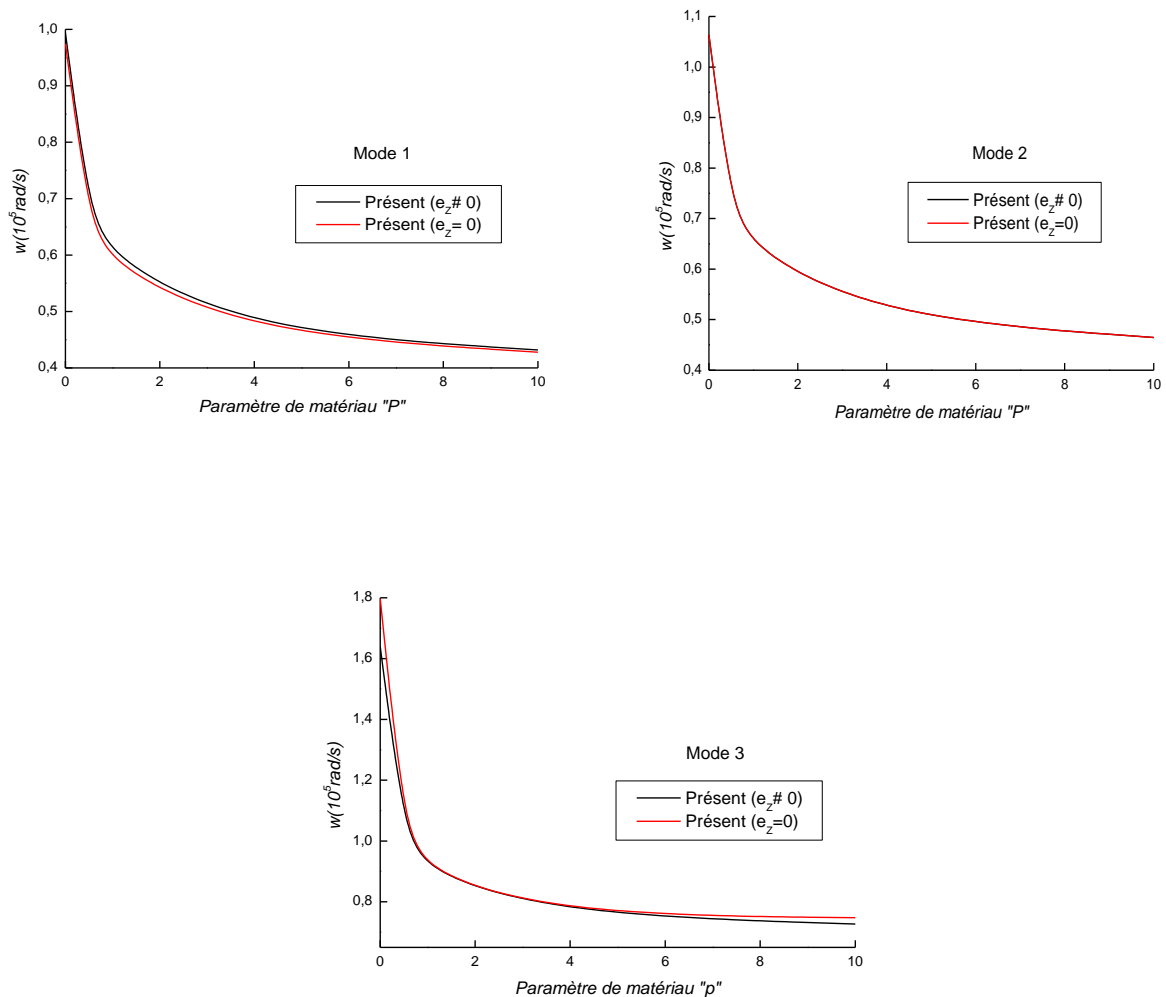


Figure IV. 1: Variation de la fréquence fondamentale ω en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée ($a/h=2$) pour 3 modes.

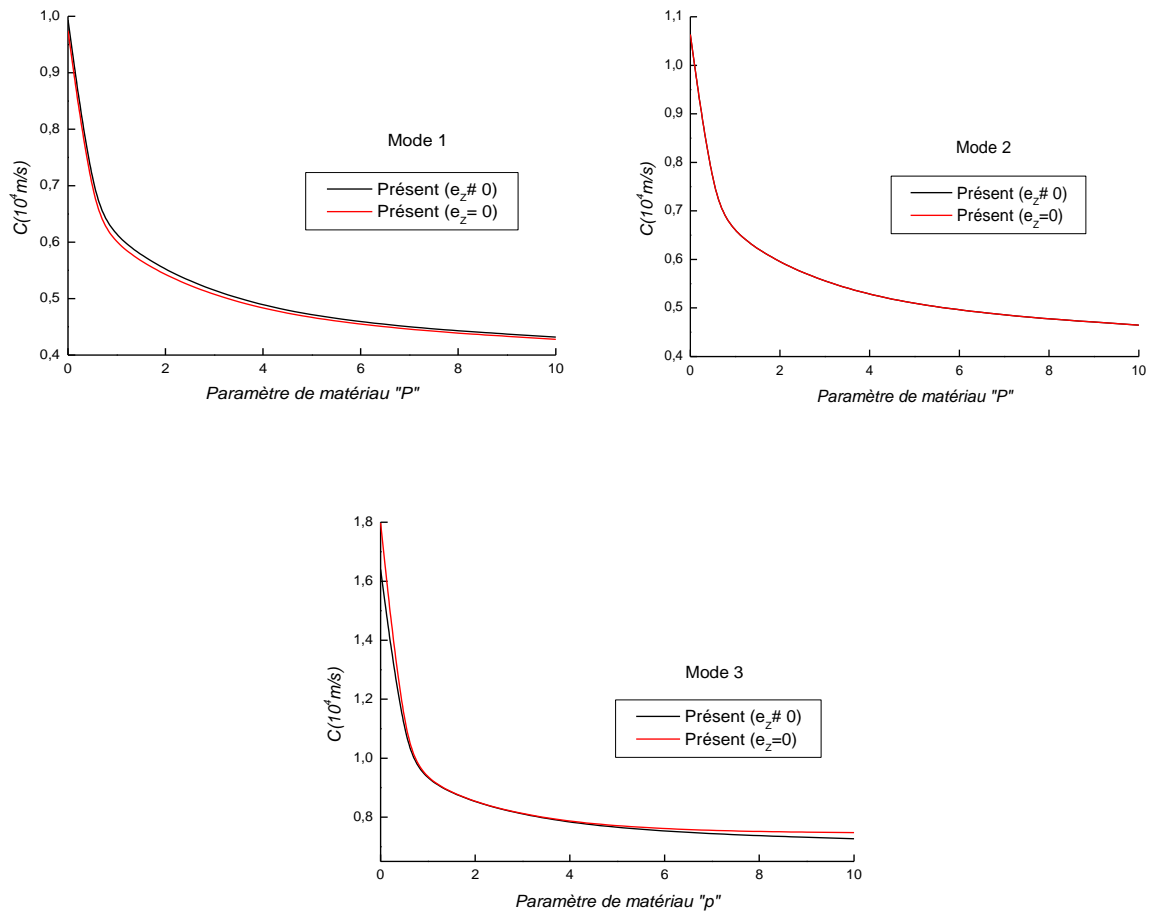


Figure IV. 2: Variation de la vitesse de phase c en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée ($a/h=2$) pour 3 modes.

On constate également que les fréquences fondamentales et les vitesses de phase d'une plaque sans l'effet de la déformation normale ($\epsilon_z=0$) sont sous-estimées par rapport à celles d'une plaque avec l'effet de la déformation normale ($\epsilon_z \neq 0$), et particulièrement pour les fréquences du mode 3.

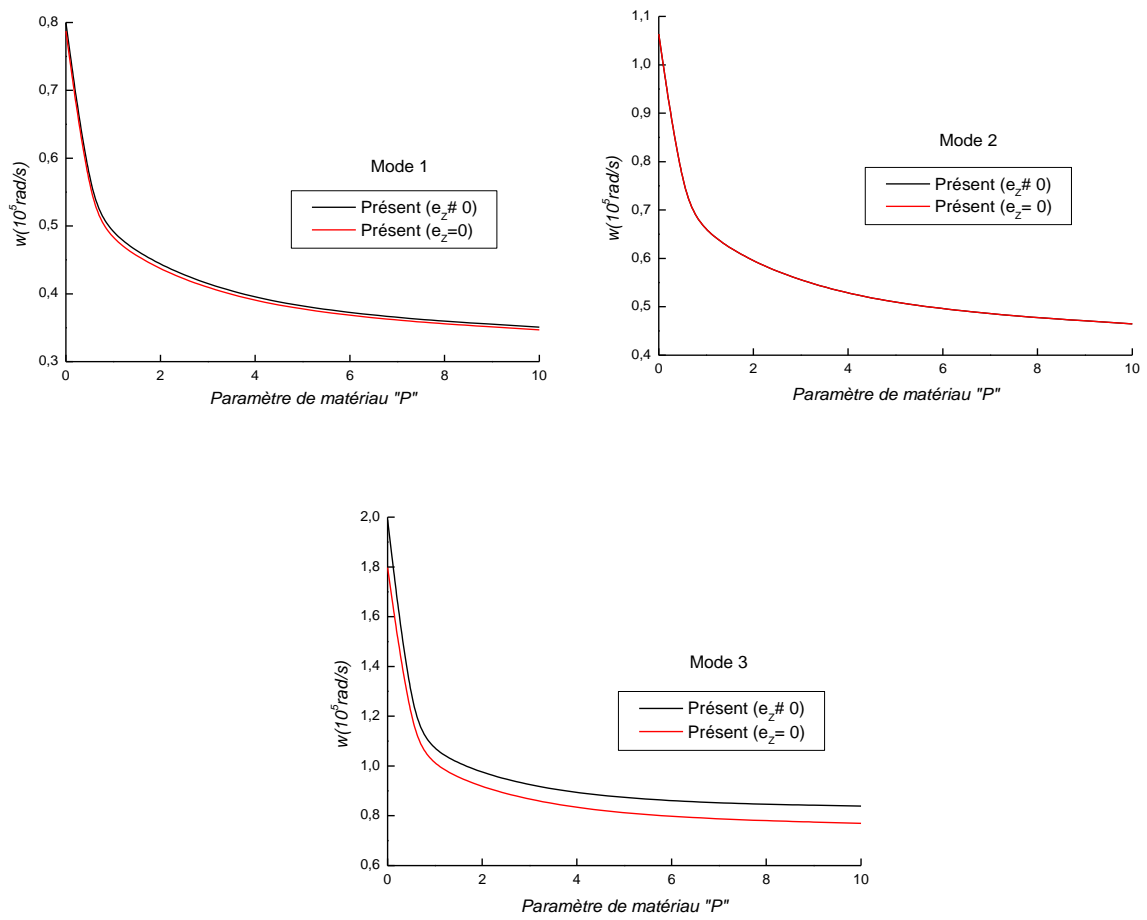


Figure IV. 3: Variation de la fréquence fondamentale ω en fonction du paramètre de matériau P d'une plaque FGM carrée et parfait ($a/h=5$) pour 3 modes.

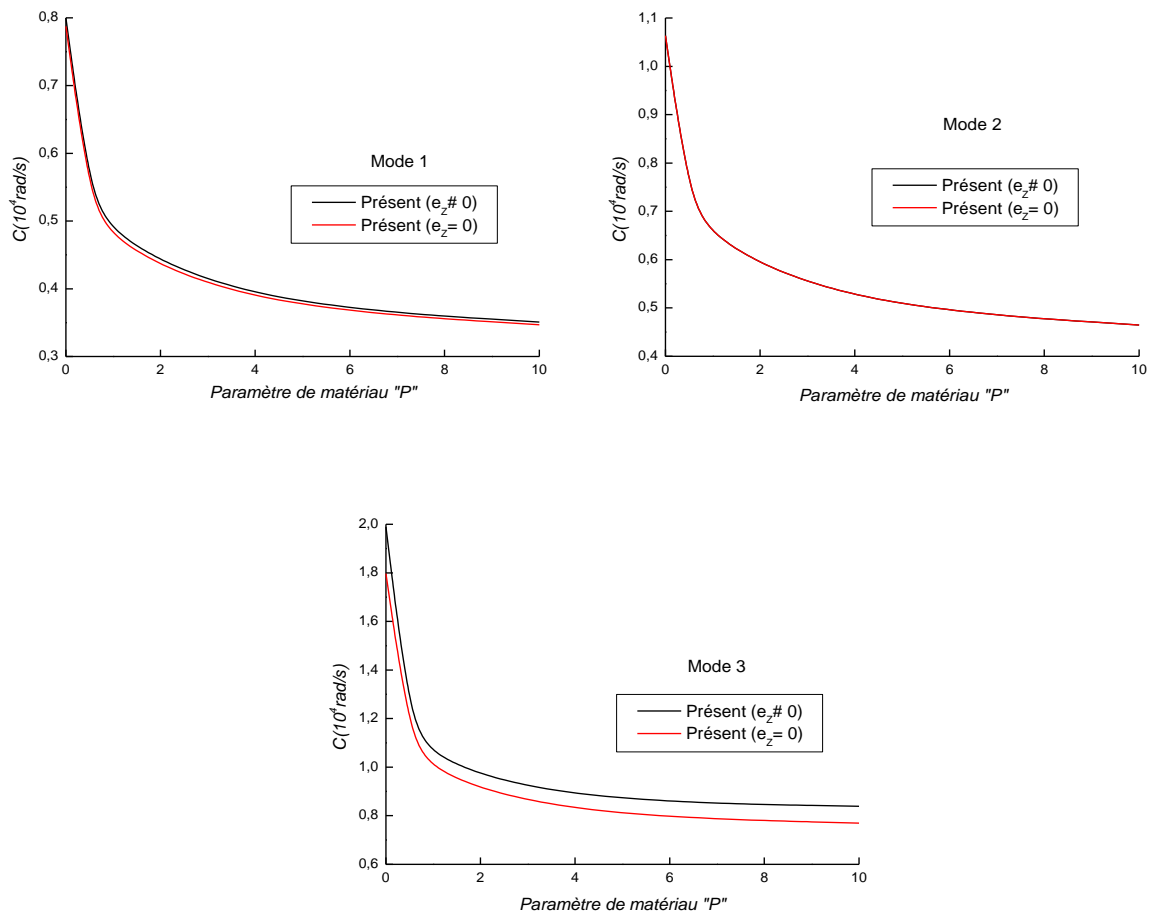


Figure IV. 4: Variation de la vitesse de phase c en fonction du paramètre de matériau p d'une plaque FGM carrée et parfait ($a/h=5$) pour 3 modes.

Les courbes illustrées dans les figures IV.5 et IV.6, montrent la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle et la vitesse de phase pour différentes plaques de FGM carrées, en fonction du rapport longueur / épaisseur (a/h). Les courbes présentées dans ces deux figures montrent que la fréquence et la vitesse de phase décroissent avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h).

On peut également observer que, plus le paramètre de matériau diminue (augmentation de la rigidité), plus la fréquence augmente; tandis que lorsque le paramètre de matériau augmente (diminution de la rigidité), les fréquences diminuent

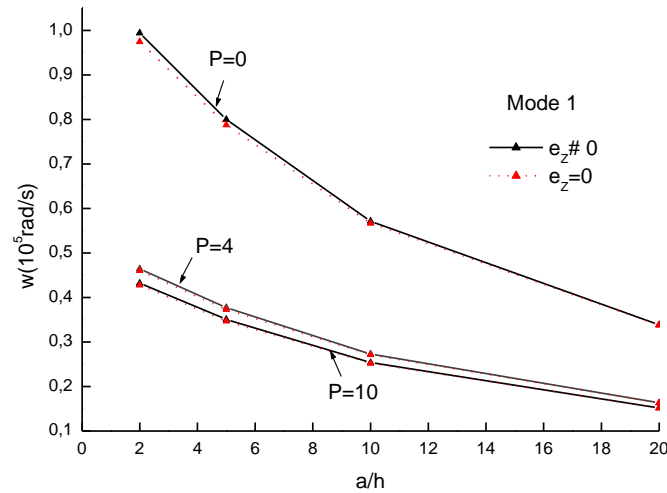


Figure IV. 5: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de différentes plaques FGM carrées en fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).

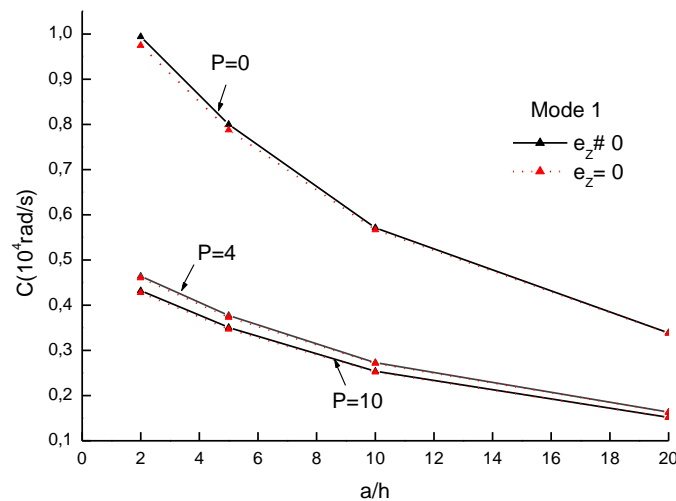
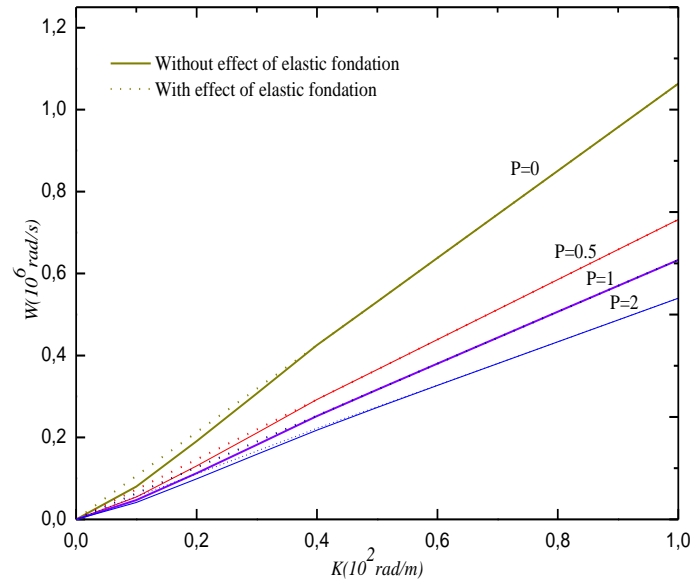


Figure IV. 6: Variation de la vitesse de phase de différentes plaques FGM carrées en fonction du rapport longueur / épaisseur (a / h).

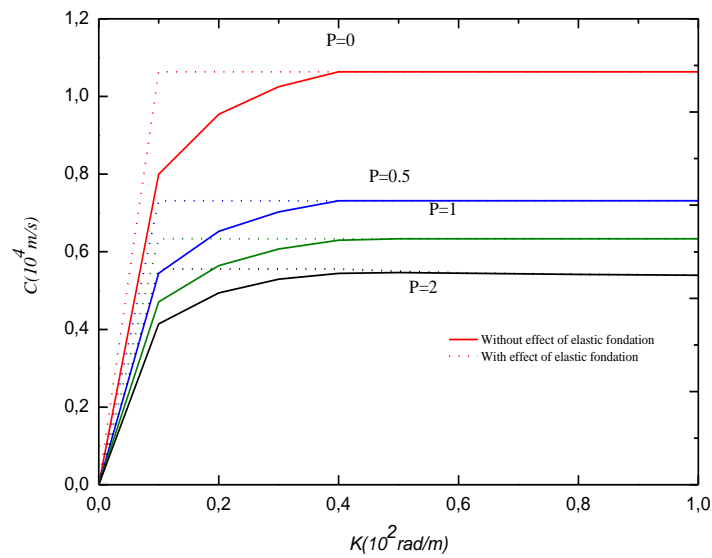
IV.2.1.3 Etude paramétrique de la plaque P-fgm:

Dans l'ordre de bien comprendre l'effet des fondations élastiques sur la fréquence fondamentale et la vitesse de phase de la plaque du type P-FGM (Si3N4 / SUS304) et de vérifier la fiabilité de la théorie proposée, plusieurs valeurs d'indice de puissance P , une large gamme de rapports d'épaisseur (a/h), différentes valeurs du nombre d'ondes ont été proposé dans l'analyse de la propagation d'onde. Cette dernière est effectuée dans deux cas avec fondations élastiquées pour ($K_w = 1000, K_p = 100$), et sans fondation avec paramètres ($K_w = 0, K_p = 0$).

La figure IV.7-8 illustre l'effet de la présence d'une fondation élastique sur la fréquence fondamentale et la vitesse de phase des plaques P-FGM pour une variété de l'indice de puissance P (0,0.5, 1 et 2). D'après les courbes illustrées, nous constatons que la fréquence circulaire de la plaque reposant sur une fondation élastique est légèrement supérieure à celle d'une plaque sans fondation élastique. Il est également noté que la fréquence fondamentale et la vitesse de phase diminuent avec l'augmentation des valeurs de l'indice de fraction volumique des constituants du matériau (P) et augmentent avec l'augmentation du nombre d'ondes (κ). À partir de la Figure IV.7, on remarque que l'augmentation des fréquences se développe à petit intervalle avec l'augmentation du nombre d'ondes, mais d'autant plus ce nombre soit grand le taux de variation de la fréquence devient significatif. Contrairement pour les vitesses de phase où ça commence par une augmentation accélérée remarquable et par la suite, l'écart d'augmentation des vitesses devient petit pour les nombres d'ondes élevées.



(a)



(b)

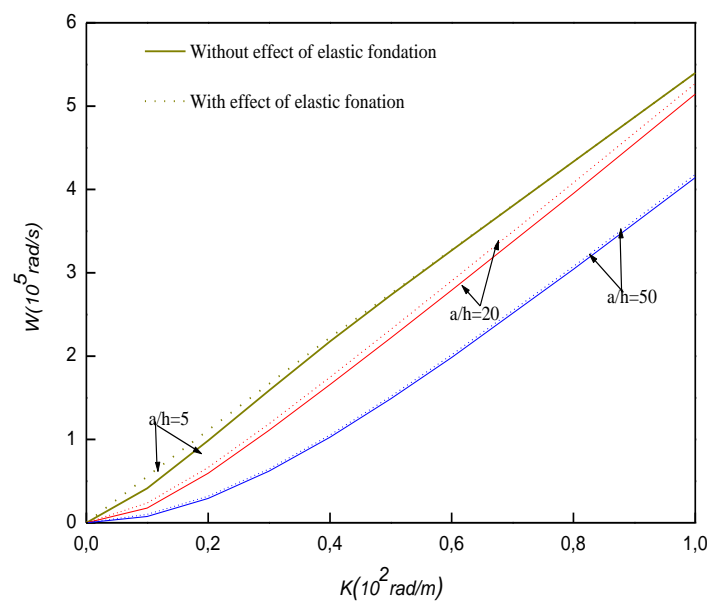
Figure IV.7 : Effet de la fondation élastique, nombre d'onde et indice de puissance P sur la fréquence circulaire (a) et la vitesse de phase (b) de la plaque FGM pour le mode M1

($a/h=5$)

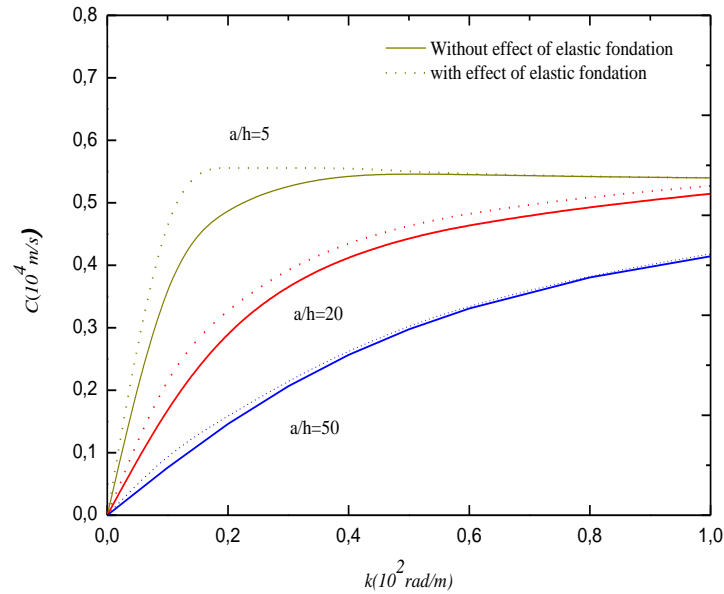
La Figure IV.8 montre la variation de la fréquence fondamentale et de la vitesse de phase des différentes plaques FGM avec et sans fondation pour différents rapports d'épaisseur de la plaque a/h (5,20 et 50) et un indice de puissance fixé à la valeur $p = 2$. On peut constater que l'épaisseur de la plaque a un effet réversible sur la fréquence de propagation des ondes dans la plaque FG pour les grands nombres d'ondes (κ). La fréquence de propagation augmente progressivement au fur et à mesure avec l'augmentation le rapport d'épaisseur (a/h) et le nombre d'onde (κ)

Pour le deuxième paramètre de propagation qui est la vitesse de phase, à partir des courbes de la vitesse de phase en fonction de nombre d'ondes pour les différents rapports d'épaisseur, on remarque que celle-ci elle a la même allure que la fréquence de propagation. La vitesse de phase diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque. Il convient également de noter que pour des valeurs élevées du nombre d'ondes, les vitesses de phase convergent quelle que soit l'épaisseur.

Dans la Figure IV.8 l'effet de la fondation élastique, pour les deux caractéristiques vibratoires, et significatif pour les petites valeurs du nombre d'ondes alors que pour les grandes valeurs de (κ) l'effet devient peu important.



(a)

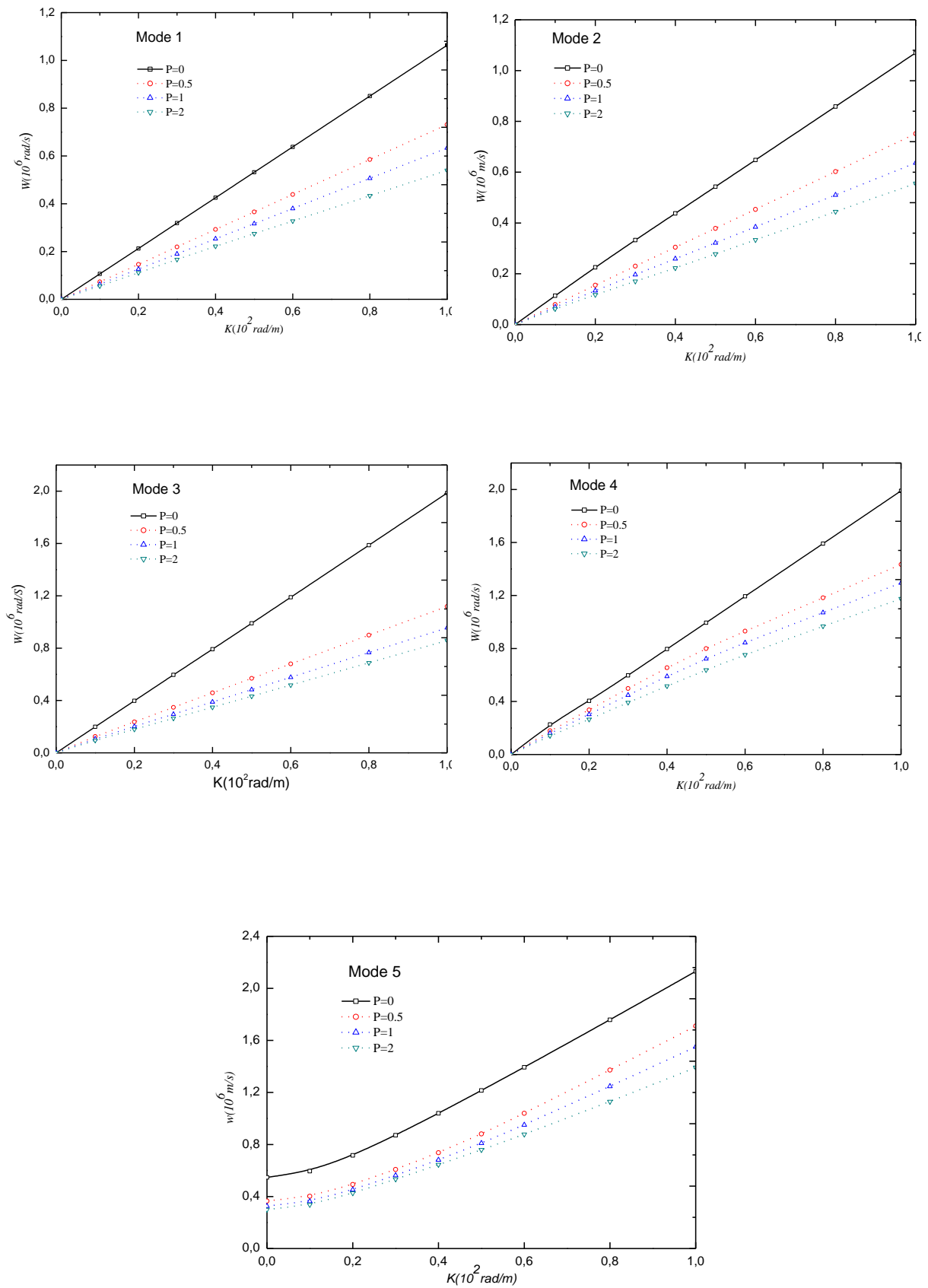


(b)

Figure IV.8: Effet de la fondation élastique, nombre d'onde et le rapport d'épaisseur sur la fréquence circulaire (a) et la vitesse de phase (b) pour le mode M1 ($K_w = 1000$, $K_p = 100$),

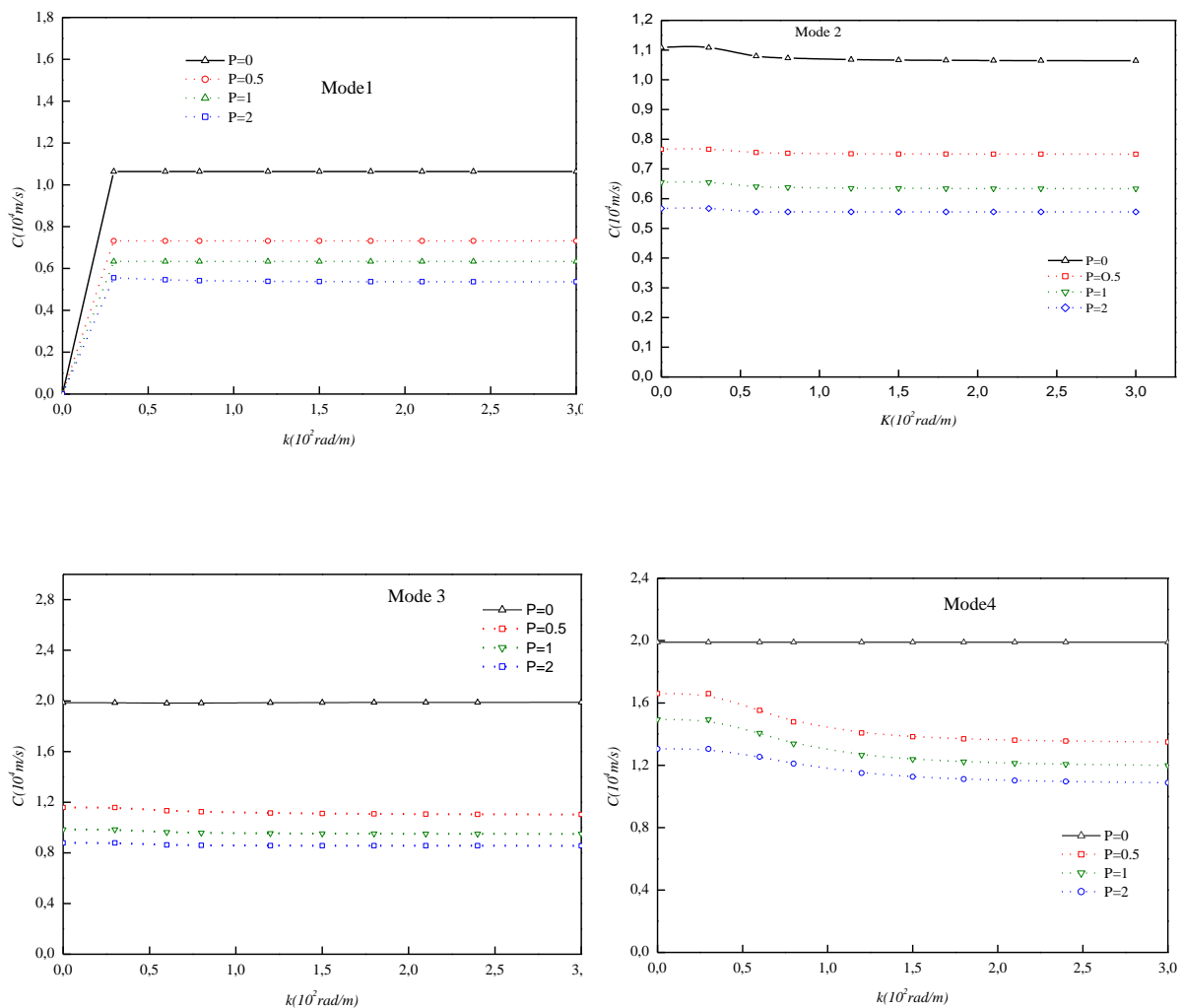
La Figure IV.9, illustre les courbes de dispersion de la variation de la fréquence propre en fonction de nombre d'ondes des différentes plaques FG reposant sur la fondation élastique avec ($K_w = 1000$, $K_p = 100$), et une épaisseur 0.2 mm en fonction du nombre d'ondes pour les cinq modes de propagation.

On peut noter que la fréquence de propagation des ondes dans la plaque FGM varie irréversiblement avec les valeurs de l'indice de puissance P . Elle augmente avec la diminution de cet indice, quel que soit le mode d'onde. De plus, la fréquence de propagation de l'onde devient maximale dans la plaque entièrement céramique ($P = 0$). Il est à noter, aussi, que la relation fréquences-nombre d'ondes est strictement linéaire pour le deuxième et le troisième mode (mode 2 et mode 3). Dans le mode 5, l'effet de l'indice de puissance de la fraction volumique n'a pas d'effet quelle que soit la valeur du nombre d'ondes.



FigureIV.9 : Les courbes de dispersion de différentes plaques FGM reposants sur fondation élastique.($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h=0.2$ m).

La variation de la vitesse de phase des différentes plaques PFG reposant sur fondation élastique en fonction du nombre d'ondes pour variété d'indice de puissance P est représentée dans la Figure IV.10. À partir de ces résultats, on constate que les similitudes peuvent être identifiées dans l'évolution des paramètres de la vitesse de propagation des plaques FG. On peut noter que la vitesse de phase dans la plaque PFG augmente lorsque l'indice de la loi de puissance P diminue pour le même nombre d'onde κ . La vitesse de phase des deuxièmes et troisièmes modes de la plaque ($P = 0$) est constante, mais celle-ci diminue lorsque l'indice de la loi de puissance P devient différent de zéro ($P \neq 0$) ; cette diminution devient plus visible dans le quatrième mode. De plus, pour la plaque homogène ($P = 0$), la vitesse de phase prend le maximum parmi celles de toutes les autres compositions.



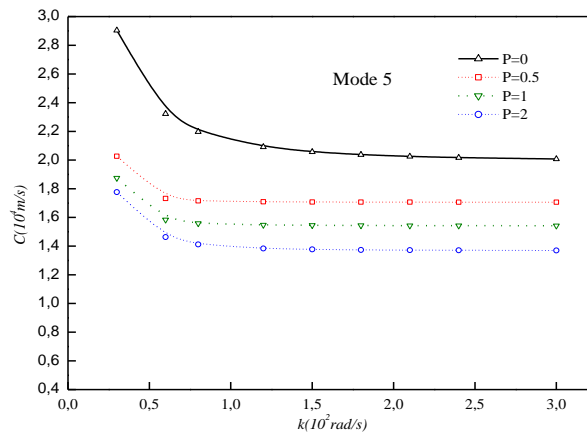
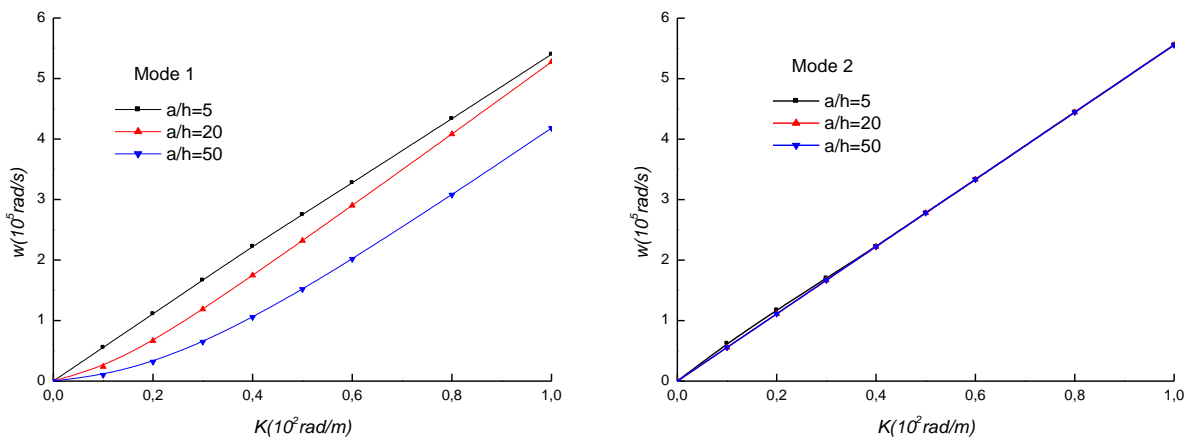


Figure.IV.10 : Courbes de la variation de la vitesse de phase de différentes plaques FGM reposants sur fondation élastique. ($K_w = 1000, K_p = 100, h=0.2$ m)

La figure.IV.11 montre les courbes de dispersion de différentes plaques P-FGM carrée simplement appuyée avec $P = 2$ utilisant une fonction de forme hyperbolique proposée par Ait atmane (2010). On peut voir que l'épaisseur de la plaque a un effet sur la fréquence de propagation de l'onde dans la plaque FGM pour le grand nombre d'ondes (κ) et surtout pour le mode fondamental. En effet, les fréquences sont réduites lorsque l'épaisseur diminue pour les trois premiers modes et augmente pour le mode 5.



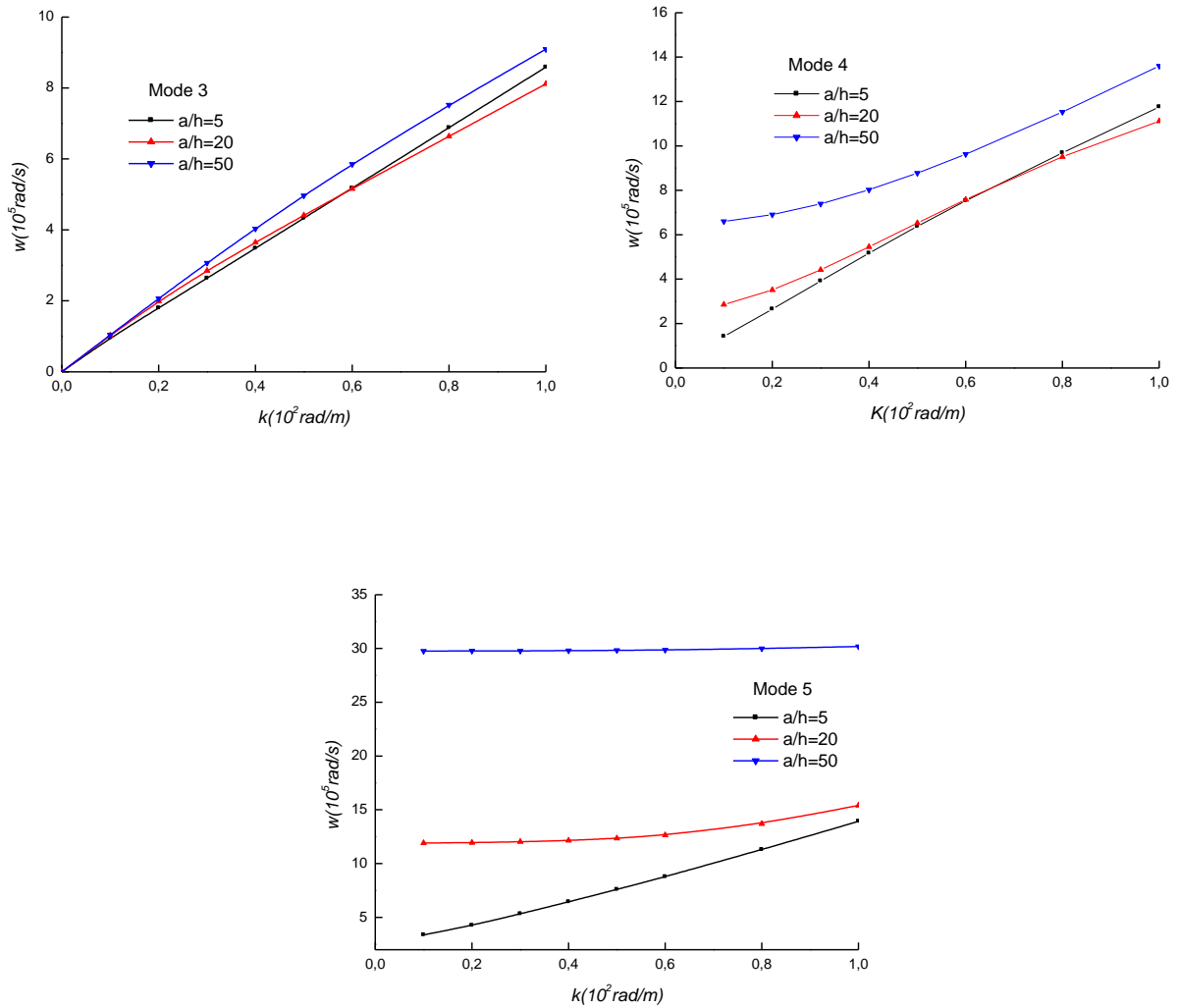
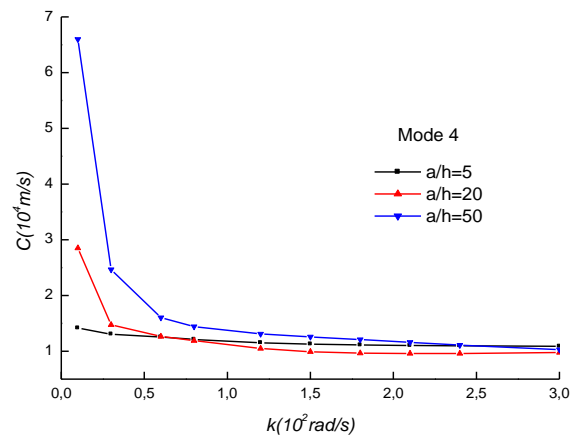
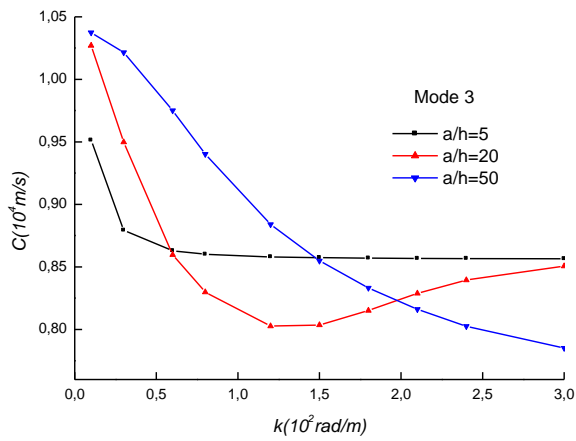
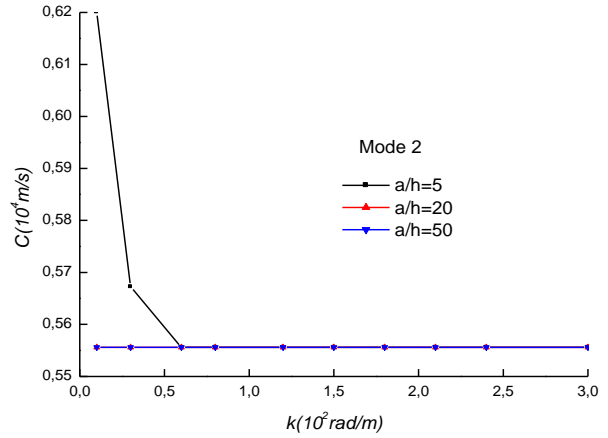
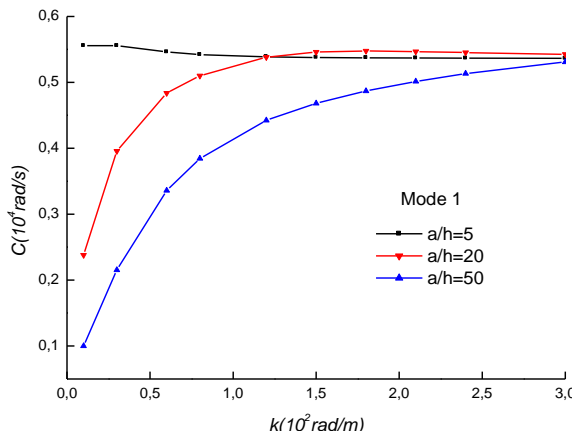


Figure.IV.11 : Les courbes de dispersion des différentes plaques gradient fonctionnel P-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$)

La figure.IV.12 montre les courbes de vitesse de phase de différentes plaques P-FGM avec un indice de puissance matériel $P = 2$. Comme on le voit à partir de cette figure, la vitesse de phase de la plaque FGM diminue au fur et à mesure que l'épaisseur diminue pour les petites valeurs du nombre d'ondes (κ) dans les modes M1 et M2, quand (κ) prend des grandes valeurs les vitesses de phases se convergent les uns aux autres quelle que soit le rapport d'épaisseur (a/h), pour le troisième mode M3, les vitesses de phase diminuent quand l'épaisseur augmente.

On peut également remarquer que pour les modes d'onde M4 et M5, l'augmentation du nombre d'ondes (κ) emmène à une diminution de la vitesse de phase qui se converge pour les grandes valeurs du nombre d'ondes des différentes épaisseurs ; en outre les vitesses de phase supérieures sont obtenues pour les faibles épaisseurs.



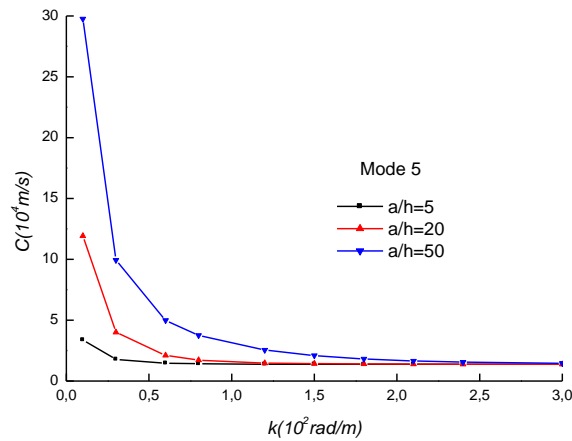


Figure.IV.12: Les vitesses de phase des différentes plaques gradient fonctionnel P-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$)

IV.2.1.3. Etude paramétrique de la plaque E-FGM

L'effet de l'indice de puissance matériel sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase d'une plaque E-FGM en fonction du nombre d'ondes pour un rapport d'épaisseur longueur ($a/h = 5$) est présenté dans les figures IV.13-IV.14 respectivement. Il est à noter que la fréquence augmente avec l'augmentation du nombre d'onde. La variation de l'indice P n'a aucune influence sur la fréquence et la vitesse de phase pour les modes M1, M2, M3 et M4, on peut juste remarquer leur effet est dans le mode M5 où on note que les valeurs maximales sont obtenues pour la plaque épaisse entièrement en céramique ($P=0$).

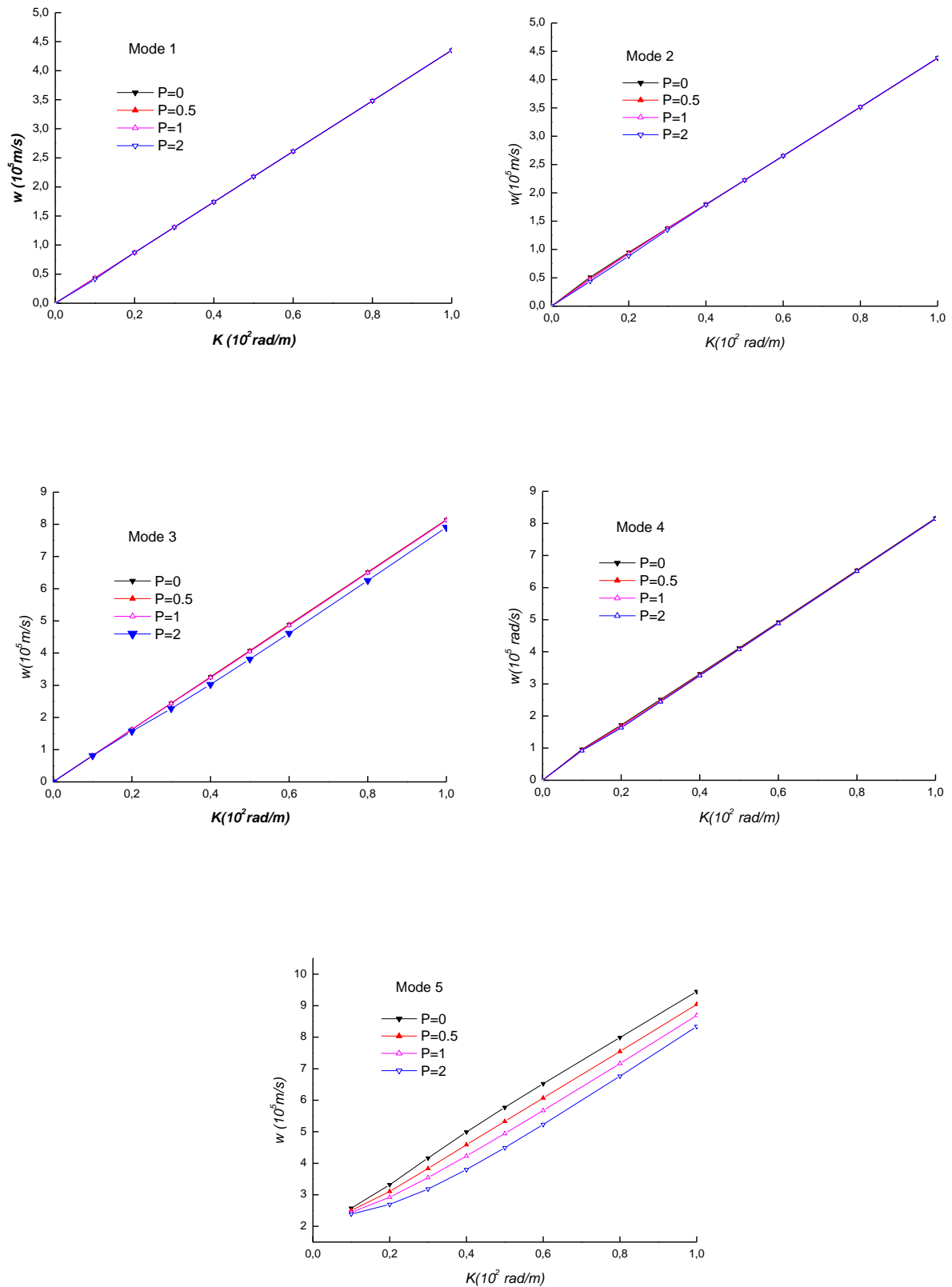


Figure.IV.13: Courbes de dispersion de différentes plaques reposantes sur fondation élastique ($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h=0.2$ m).

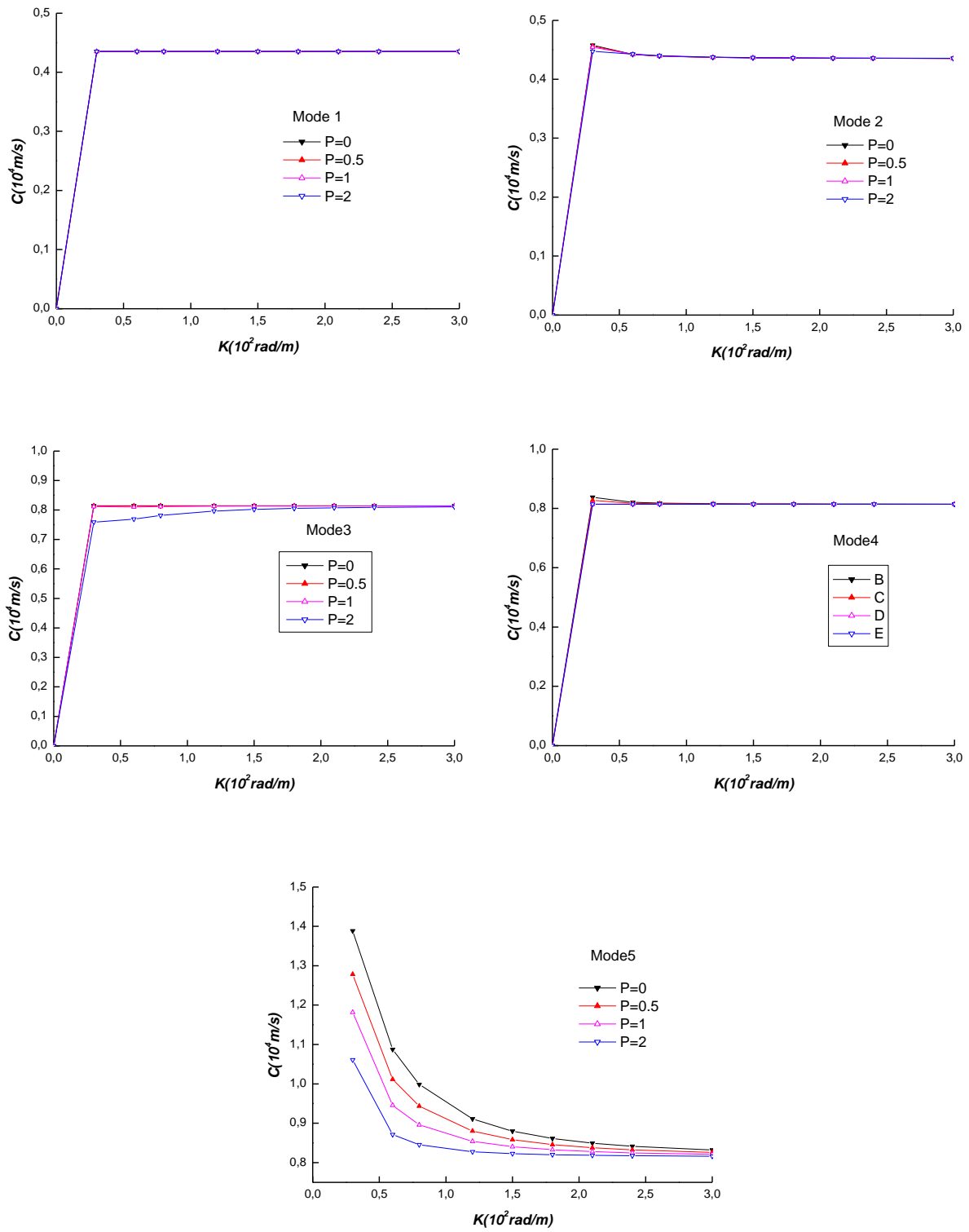
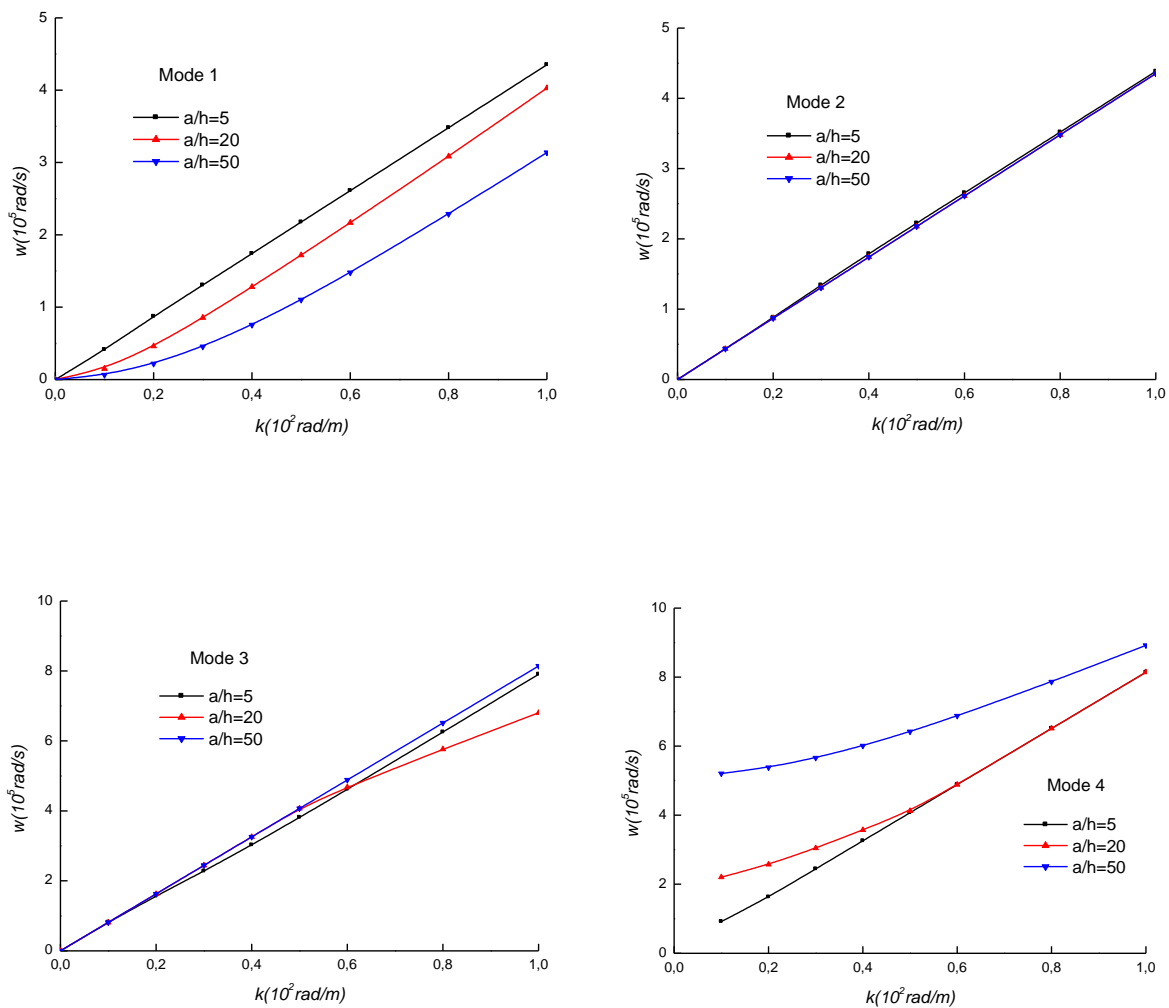


Figure.IV.14 Les vitesses de phase des différentes plaques P-fgm pour différent rapport épaisseur ($K_w = 1000$, $K_p = 100$, $h = 0.2$ m)

La figure IV.15 montre l'effet du rapport épaisseur longueur (a/h) sur la fréquence naturelle d'une plaque E- FGM en fonction du nombre d'ondes utilisant une fonction de forme hyperbolique proposée par Ait atmane (2010). L'indice de puissance est considéré égal à $P=2$. Dans cette figure, Il est clair que la fréquence est maximale pour une plaque FGM épaisse et dans le cas d'une plaque mince devienne minimale pour le premier et le deuxième mode. On peut également remarquer que la fréquence augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h pour les deux autres modes.



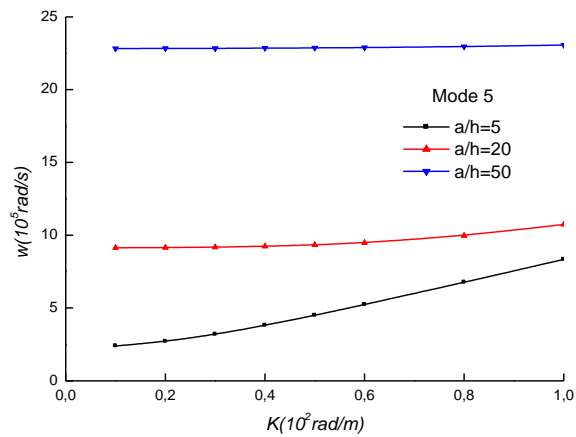
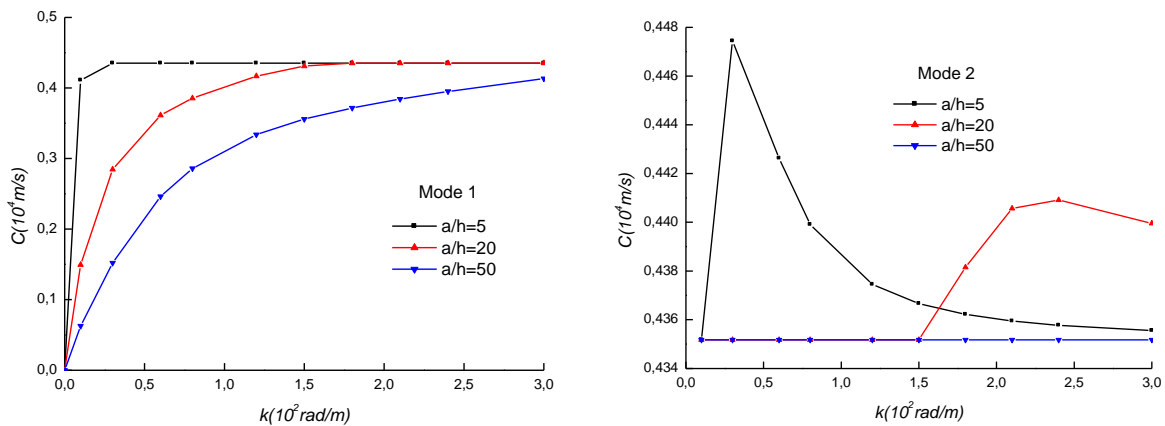


Figure.IV.15: Les fréquences des différentes plaques E-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$)

Pour étudier l'effet du rapport d'épaisseur longueur (a/h) sur la vitesse de phase ; la figure IV.16 montre les courbes de vitesse de phase de différentes plaques E-FGM en fonction du nombre d'onde avec $P = 2$. D'après les résultats graphiques, Il est intéressant de constater que l'influence du rapport (a/h) sur la vitesse de phase est également significative pour les valeurs les plus bas de nombres d'onde ainsi la vitesse de phase de la plaque diminue au fur à mesure que le rapport (a/h) augmente pour le mode M1 et M 2 excepté pour les modes d'onde M3 et M4, M5 où un comportement inverse est observé



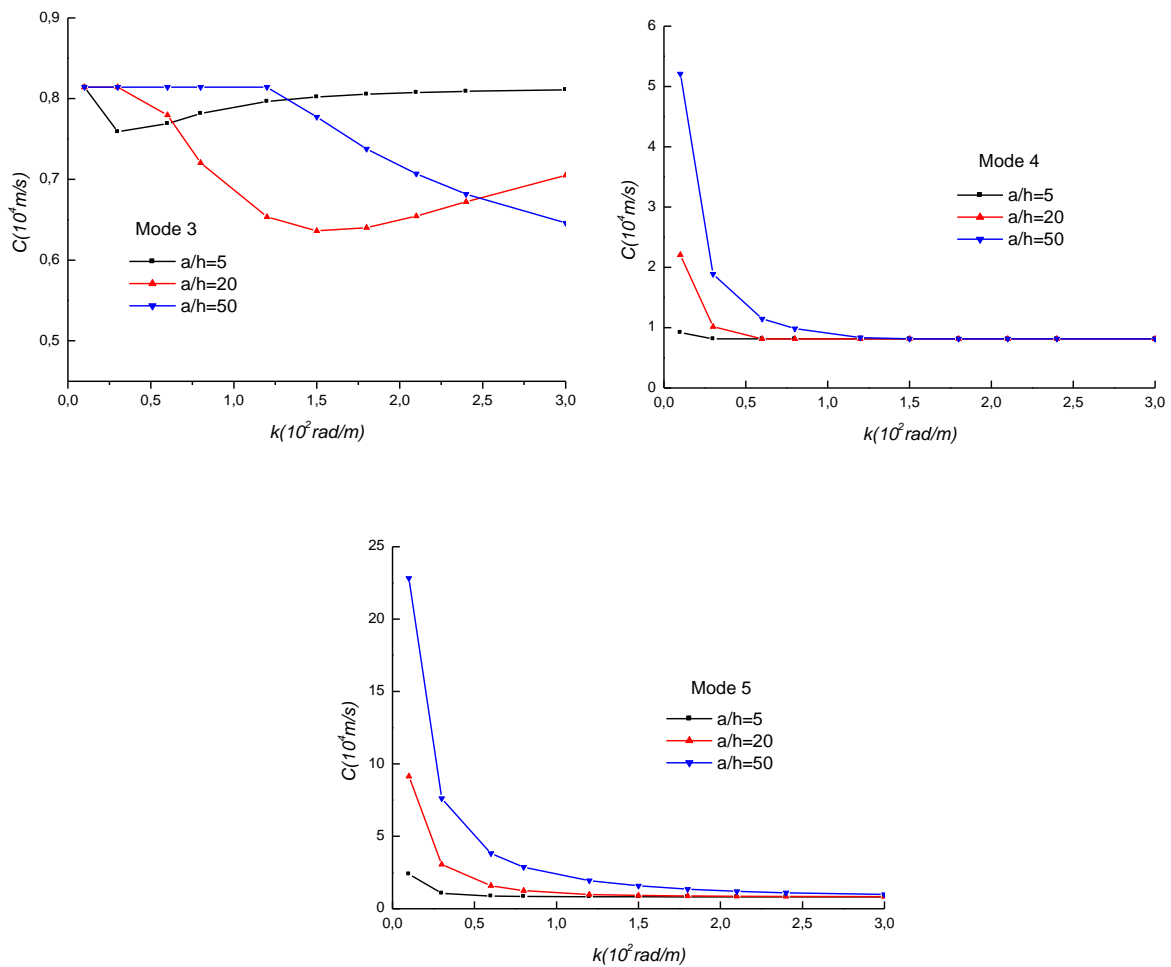


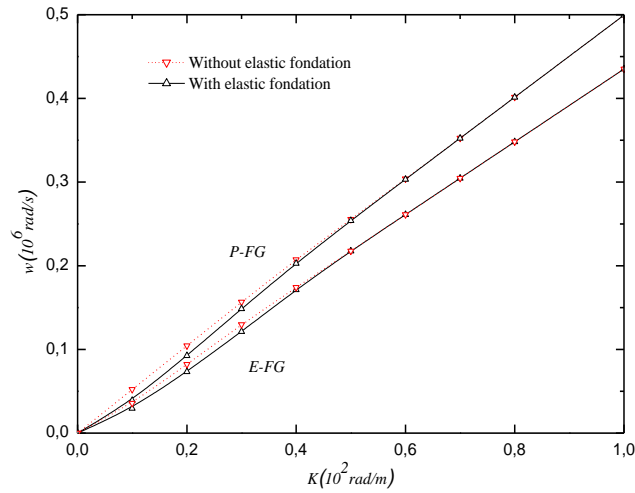
Figure.IV.16: Les vitesses de phase des différentes plaques E-FGM avec différent rapport épaisseur ($P=2$)

IV.2.1.4. Etude paramétrique comparative des plaques en P-FGM et E-FGM

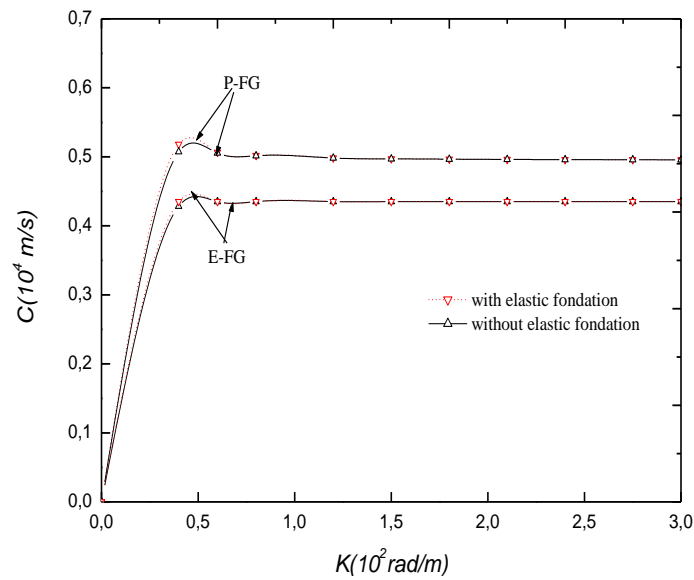
Dans l'objectif de bien montrer l'effet de fondation élastique sur le comportement à la propagation d'onde de la plaque FGM, on a proposé de comparer ce comportement avec deux lois fondamentales des plaques, la loi de puissance PFGM et la loi exponentielle EFGM.

L'effet de la fondation sur la vibration libre et la propagation des ondes dans des plaques PFGM et E-FGM épaisses est présentée dans la Figure IV.17. L'analyse est faite pour un rapport d'épaisseur et un indice de puissance qui ont respectivement les valeurs suivantes : 5 et 3.

On remarque que pour la même valeur de P , les fréquences données par le matériau P-FGM sont plus importantes que celles données par E-FGM. De même pour l'effet de la fondation qui est plus significatif dans le cas des P-FGM.



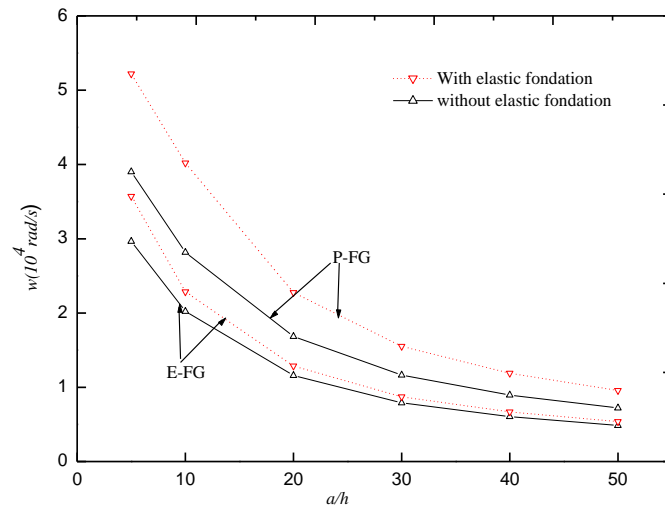
(a)



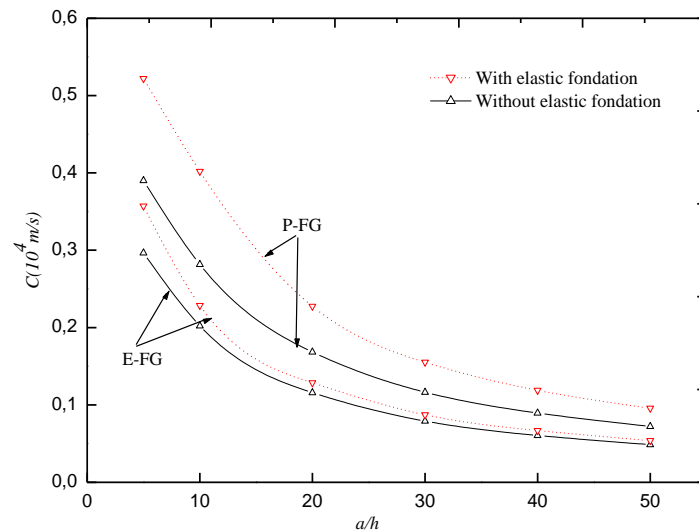
(b)

Figure IV.17 : Comparaison de la fréquence et la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM basées sur fondation élastique ($K_w = 1000$, $K_p = 100$) ($a/h = 5$, $P = 3$)

Dans la Figure IV.18, une comparaison de la variation de la fréquence et de la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) a été présentée. Le nombre d'ondes et l'indice de loi de puissance sont pris ici égaux à 10 et 3, respectivement. Dans ces Figures, les plaques épaisses donnent des variations de réponses élastiques, entre les plaques avec et sans fondation, plus grandes que celles des plaques minces.



(a)



(b)

Figure IV.18 : Comparaison de la fréquence et la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM basées sur fondation élastique ($K_w = 1000$, $K_p = 100$) ($k = 10$, $P = 3$)

À partir des résultats présentés sur les figures IV17 et 18, il est clair que les paramètres de la fréquence et de la vitesse de phase de la plaque P-FGM reposant sur les fondations élastiques montrent des résultats de valeur supérieure par rapport à la plaque E-FGM pour le mode fondamental. Cette observation est valable pour tous les modes. Nous pouvons conclure que la méthode actuelle est efficace pour prédire la propagation et la vitesse des ondes dans la distribution de deux matériaux E -FGM et P-FGM

IV.3. Conclusion

La dispersion des ondes dans des plaques de matériaux à gradation fonctionnelle reposant sur des fondations élastiques avec deux paramètres est étudiée avec succès sur la base de la théorie du cisaillement d'ordre supérieur quasi-3D. La théorie actuelle a été accomplie pour introduire avec succès un déplacement intégral indéfini pour réduire le nombre de variables à cinq inconnues ce qui a permis de réduire le temps de calcul.

D'autre part, la loi de puissance et la loi exponentielle sont des modèles de la distribution des propriétés mécaniques des plaques FG à travers l'épaisseur. Les effets de divers paramètres tels que la fondation élastique, le nombre d'ondes, l'épaisseur des plaques, l'indice exponentiel et la fraction volumique sont étudiés sur les fréquences circulaires, les vitesses de phase. Sur la base des résultats actuels et de la validation, on peut clairement conclure que la présente méthode a l'efficacité et la puissance à prédire la propagation des ondes dans les plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Chapitre V :

Effet de la porosité sur la propagation
d'onde de la plaque FGM reposant sur
fondation élastique

V.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter et d'analyser les résultats de l'effet de la porosité sur la propagation d'ondes des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques du type Winkler-Pasternak avec la considération de l'effet de la déformation normale (l'effet de stretching). Les résultats numériques trouvés sont comparés et validés à ceux qui prédisent par les théories utilisées par Baferani et al. [163] (2011), Benahmed et al. [193] (2017), Shahsavari et al. [194] (2018) et Nebab et al. [185] (2019c) pour analyser la propagation et la vibration libre des plaques FGM. Les théories de Nuttawit et al. [188] (2013), Gupta et al. [177] (2017) et Ayach et al. [134] (2018) sont utilisés pour étudier l'effet de la porosité sur la propagation d'onde des plaques. Toutes les analyses basées sur le présent modèle sont effectuées en utilisant le programme MAPLE.

V.2. Résultats numériques et discussion

Dans cette section, l'analyse de la propagation des ondes de plaques FGM imparfaites reposant sur une fondation élastique a été présentée en utilisant une théorie de déformation au cisaillement (HSDT) quasi 3D. Cette théorie prend en compte l'effet de la déformation normale (l'effet de stretching). Pour obtenir les résultats actuels, les fréquences et les vitesses de la propagation des ondes des plaques FG sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres.

De plus, les effets des paramètres de fondation élastique, indice de porosité, le paramètre de l'indice de distribution de matériau et le rapport d'épaisseur sur la vitesse de propagation des ondes dans les plaques FGM sont vérifiés et illustrés dans cette partie. La plaque FGM est constituée de matériaux céramique-métal, dont les propriétés sont présentées dans le tableau V.1. Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance (P-FGM). La surface supérieure de la plaque FGM est riche en céramique, tandis que la surface inférieure de la plaque est riche en métal. Afin de vérifier l'efficacité de la théorie actuelle, des applications numériques sont présentées et discutées.

Tableau V.1 : Propriétés matérielles de la plaque FGM

Matériaux	Propriétés		
	E (GPa)	ν	ρ (Kg/m ³)
Ceramic (Al ₂ O ₃)	380	0.3	3800
Metal (Al)	70	0.3	2702
Ceramic (SUS304)	201.04	0.3	8166
Metal (Si ₃ N ₄)	348.43	0.3	2370

V.2.1. Validation

V.2.1.1. Validation de l'effet de fondation

Afin d'étudier l'efficacité de la théorie actuelle à prédire la réponse en fréquence fondamentale des plaques graduées fonctionnellement (P-FGM, Al/Al₂O₃) reposant sur des fondations élastiques, les fréquences non dimensionnelles sont calculées et comparées à celles disponibles dans la littérature. Dans le tableau V.2, les fréquences naturelles des plaques FG carrées (Al/Al₂O₃) pour différentes valeurs de la loi de puissance p sont comparées à celles de la théorie quasi-3D de Benahmed et al. [193] (2017), la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre des plaques (TSDT) de Baferani et al. [163] (2011), la théorie quasi-3D de Shahsavari et al. [194] (2018) et cela de Nebab et al. [185] (2019c).

Deux rapports d'épaisseur (h/L) sont considérés (0,05, 0.2). À partir des résultats de la fréquence fondamentale non dimensionnelle présentés dans le tableau 2, on peut observer qu'ils sont presque identiques à ceux obtenus par d'autres théories de la littérature pour toutes les plages de valeurs de rapport d'épaisseur. De plus, on peut voir que le rapport d'épaisseur et l'indice de fraction volumique ont un rôle très important sur le comportement vibratoire des plaques FG reposant sur des fondations élastiques.

De l'autre côté, on remarque que la fréquence fondamentale non dimensionnelle augmente lorsque les paramètres de fondation augmentent. On peut également voir que la fréquence fondamentale des plaques FG est plus affectée par le paramètre de fondation de Pasternak que par le paramètre de Winkler.

Tableau V.2 : Comparaison de la fréquence fondamentale dimensionnelle $\varpi = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée reposant sur fondation élastique Winkler-Pasternak

(K_w/K_p)	h/L	Source	P				
			0	0.5	1	2	5
(0,0)	0.05	Benahmed <i>et al.</i> (2017)	0.0291	–	0.0226	0.0207	–
		Baferani <i>et al.</i> (2011)	0.029	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197
		Shahsavari <i>et al.</i> (2018)	0.0291	0.0248	0.0226	0.0206	0.0195
		Nebab <i>et al.</i> (2019c)	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
		Present	0.0291	0.0245	0.0222	0.0202	0.0191
	0.2	Benahmed <i>et al.</i> (2017)	0.4174	–	0.3264	0.2965	–
		Baferani <i>et al.</i> (2011)	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765
		Shahsavari <i>et al.</i> (2018)	0.4168	0.3586	0.326	0.2961	0.2722
		Mokhtar <i>et al.</i> (2019c)	0.4150	0.3551	0.3205	0.2892	0.2667
		Present	0.4168	0.3566	0.3219	0.2906	0.2678
$(10^3,0)$	0.05	Benahmed <i>et al.</i> (2017)	0.0298	–	0.0236	0.0218	–
		Baferani <i>et al.</i> (2011)	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.021
		Shahsavari <i>et al.</i> (2018)	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208
		Nebab <i>et al.</i> (2019c)	0.0299	0.0257	0.0234	0.0215	0.0215
		Present	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0205
	0.2	Benahmed <i>et al.</i> (2017)	0.4286	–	0.3431	0.3158	–
		Baferani <i>et al.</i> (2011)	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999
		Shahsavari <i>et al.</i> (2018)	0.4284	0.3734	0.3431	0.3159	0.295
		Mokhtar <i>et al.</i> (2019c)	0.4269	0.3702	0.3381	0.3097	0.2901
		Present	0.4281	0.3712	0.3387	0.3101	0.2904
$(10^2,10^2)$	0.05	Benahmed <i>et al.</i> (2017)	0.0411	–	0.0386	0.0383	–
		Baferani <i>et al.</i> (2011)	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
		Shahsavari <i>et al.</i> (2018)	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
		Nebab <i>et al.</i> (2019c)	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0383
		Present	0.4103	0.03838	0.03838	0.03801	0.0383
	0.2	Benahmed <i>et al.</i> (2017)	0.6089	–	0.5794	0.5752	–
		Baferani <i>et al.</i> (2011)	0.6162	0.6026	0.5978	0.597	0.5993
		Shahsavari <i>et al.</i> (2018)	0.6137	0.594	0.5856	0.5815	0.5843
		Nebab <i>et al.</i> (2019c)	0.6156	0.5950	0.5852	0.5800	0.5834
		Present	0.6084	0.5862	0.5760	0.5708	0.5735

V.2.1.2. Validation de l'effet de la porosité

Les résultats des fréquences et des vitesses de phases obtenus par la présente théorie HSDT quasi-3D pour les trois distributions de porosité d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique sont présentés dans les tableaux V.3 et V.4. Les paramètres de cette fondation sont pris égaux à un $K_w = 1000$, $K_p = 100$.

À partir de ces tableaux, on peut observer que lorsque le rapport d'épaisseur de la plaque a/h et l'indice de puissance p augmentent, la fréquence et la vitesse de phase diminuent quel que soit le type de distribution de porosité. De plus, on peut voir qu'il n'y a pas une grande différence entre les valeurs de la fréquence et de la vitesse de phase obtenues par les deux distributions 2 et 3. L'exception est faite pour la distribution 1 ($\lambda = 0,1$ et $0,2$) où la différence augmente avec la variation de la fréquence et de la vitesse des ondes.

Tableau V.3 : Fréquence naturelle d'une plaque poreuse reposant sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) pour des variétés de rapport d'épaisseur, paramètre de porosité, indice de la loi de puissance et distribution de porosité.

L/h	p	$\lambda=0$			$\lambda=0,1$			$\lambda=0,2$		
		Nuttawit 2013	Gupta 2017	Ayache 2018	Nuttawit 2013	Gupta 2017	Ayache 2018	Nuttawit 2013	Gupta 2017	Ayache 2018
5	0	1.0634	1.0634	1.0634	1.1055	1.1043	1.1043	1.1573	1.1519	1.1518
	0,5	0.7315	0.7315	0.7315	0.7375	0.7373	0.7373	0.7442	0.7435	0.7435
	1	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6333	0.6333	0.6333
	5	0.4909	0.4909	0.4909	0.4847	0.4848	0.4848	0.4779	0.4785	0.4785
	10	0.4647	0.4647	0.4647	0.4575	0.4576	0.4576	0.4497	0.4504	0.4504
10	0	0.7496	0.7496	0.7495	0.7878	0.7869	0.7868	0.8343	0.8295	0.8294
	0,5	0.5269	0.5269	0.5269	0.5385	0.5382	0.5382	0.5512	0.5499	0.5499
	1	0.4655	0.4655	0.4655	0.4726	0.4724	0.4724	0.4803	0.4795	0.4795
	5	0.3853	0.3853	0.3853	0.3881	0.3880	0.3880	0.3911	0.3908	0.3908
	10	0.3704	0.3704	0.3704	0.3727	0.3727	0.3727	0.3751	0.3749	0.3749

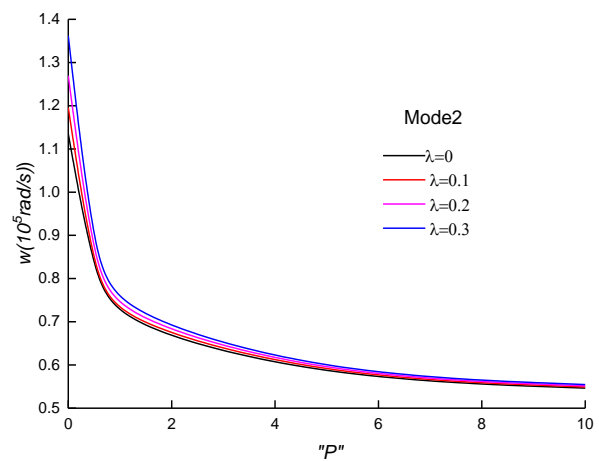
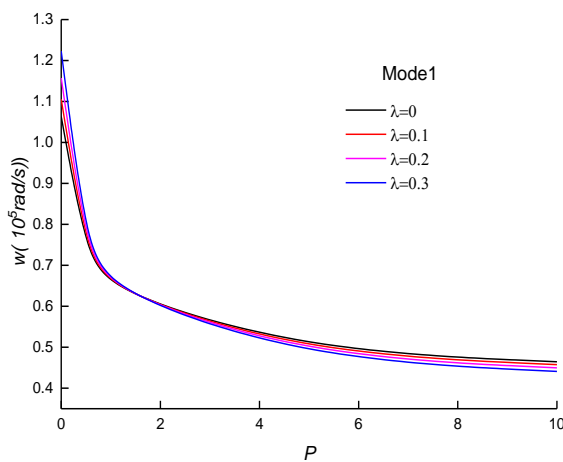
Tableau V.4 : Vitesse de phase d'une plaque poreuse reposant sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) pour des variétés de rapport d'épaisseur, paramètre de porosité, indice de la loi de puissance et distribution de porosité.

L/h	p	$\lambda=0$			$\lambda=0,1$			$\lambda=0,2$		
		Nuttawit 2013	Gupta 2017	Ayache 2018	Nuttawit 2013	Gupta 2017	Ayache 2018	Nuttawit 2013	Gupta 2017	Ayache 2018
5	0	1.0634	1.0634	1.0634	1.1055	1.1044	1.1044	1.1573	1.1519	1.1518
	0,5	0.7315	0.7315	0.7315	0.7375	0.7373	0.7373	0.7442	0.7435	0.7435
	1	0.6333	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334	0.6334
	5	0.4909	0.4909	0.4909	0.4847	0.4849	0.4849	0.4779	0.4785	0.4786
	10	0.4647	0.4647	0.4647	0.4575	0.4577	0.4577	0.4497	0.4504	0.4504
10	0	0.7496	0.7496	0.7496	0.7879	0.7869	0.7868	0.8343	0.8295	0.8294
	0,5	0.5269	0.5269	0.5269	0.5385	0.5382	0.5382	0.5512	0.5499	0.5499
	1	0.4656	0.4655	0.4655	0.4726	4725	0.4724	0.4803	4795	0.4795
	5	0.3853	0.3853	0.3853	0.3881	0.3880	0.3880	0.3910	0.3908	0.3908
	10	0.3704	0.3704	0.3704	0.3727	0.3727	0.3727	0.3751	0.3749	0.3749

V.2.2. Etude paramétrique

V.2.2.1. Etude paramétrique de la porosité uniforme

Les effets de l'indice de fraction volumique (p) et de la porosité (λ) sur la variation de la fréquence naturelle et de la vitesse de phase d'une plaque FGM carrée reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak pour les cinq modes sont illustrées sur les figures V.1 et V.2, respectivement. Les paramètres de fondation (K_w et K_p), le rapport d'épaisseur et le nombre d'ondes sont pris égaux à : 10^3 , 10^2 , 5 et 10, respectivement. La répartition de la porosité est supposée uniforme selon la distribution de Wattanasakulpong et al. [188] 2014.



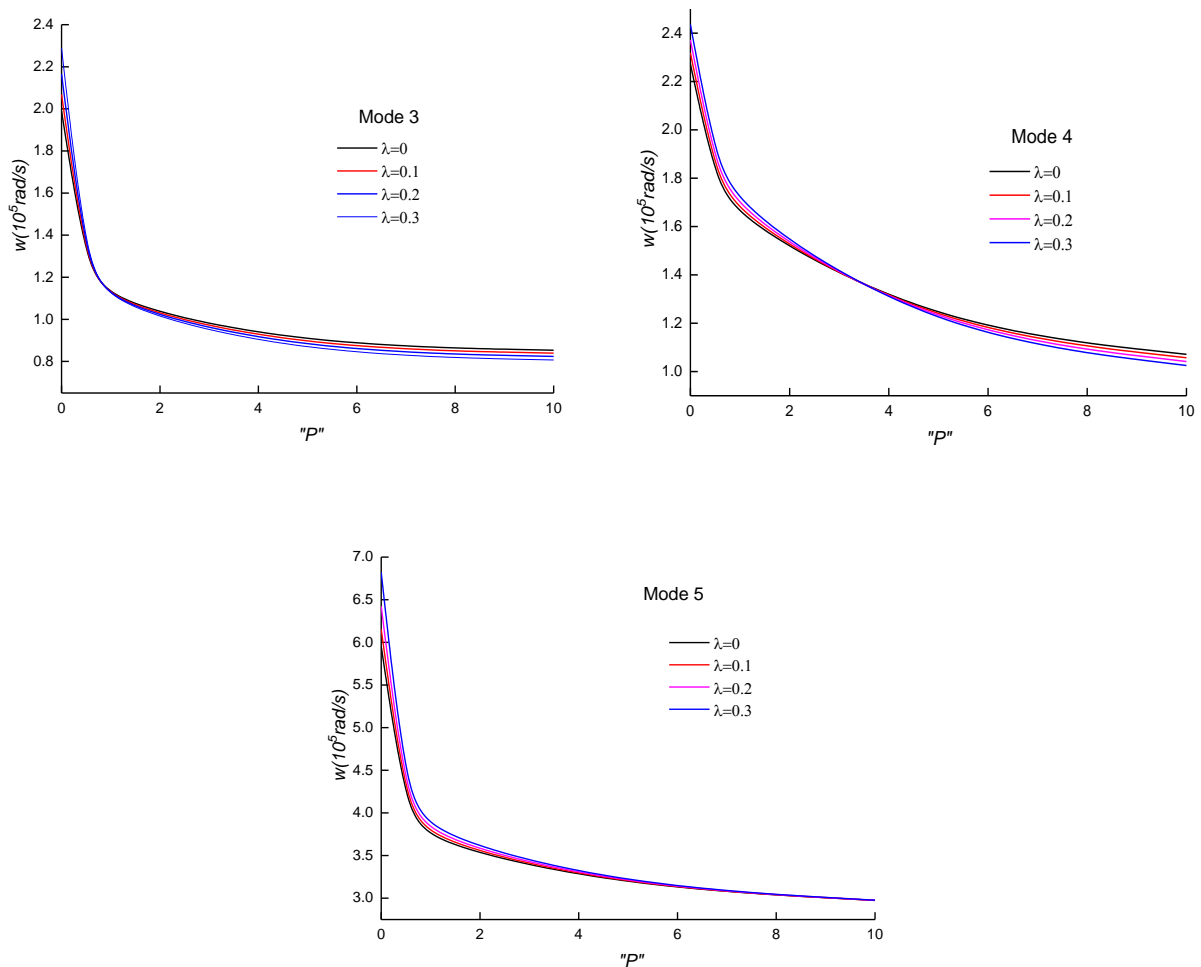


Figure V.1. Les courbes de dispersion des différentes plaques FG reposant sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) en fonction de l'indice de puissance P ($\kappa=10$ and $a/h=5$) pour 5 modes

À partir de ces deux figures, on peut voir que l'augmentation de la fraction volumique entraîne une diminution de la fréquence propre et de la vitesse de phase. Cette diminution est assez importante pour des valeurs de P inférieures à 6. À partir de cette valeur, la fréquence fondamentale et la vitesse de phase deviennent pratiquement constantes. De plus, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la fréquence et de la vitesse de phase pour les cinq modes.

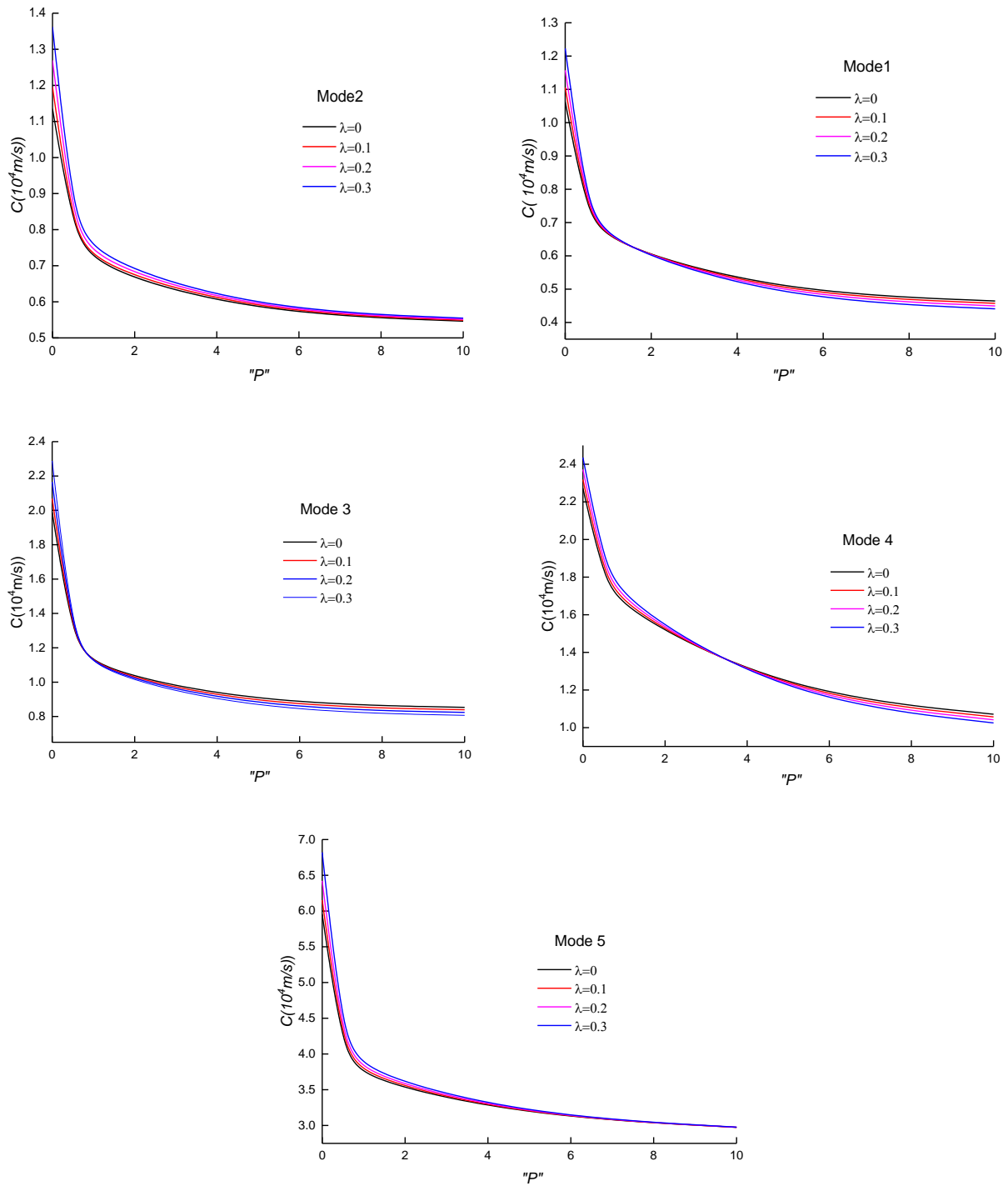
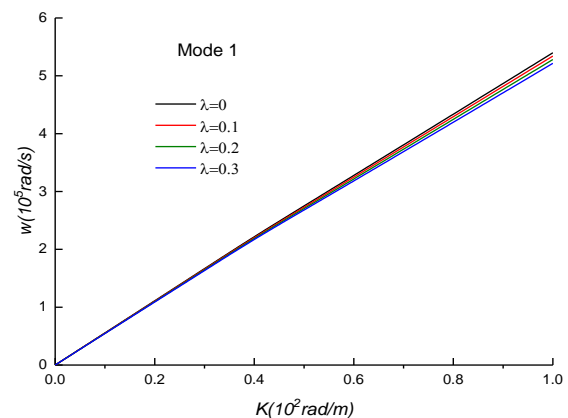
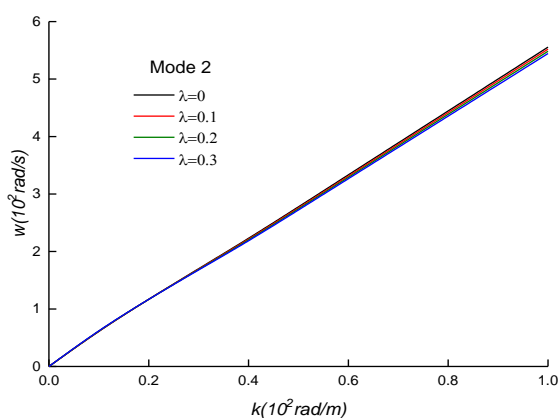


Figure V.2. Les courbes de vitesse de phase de différentes FGM reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) en fonction de l'indice de puissance P ($\kappa=10$ and $a/h=5$) pour 5 modes

La vitesse de phase et la fréquence naturelle dans une plaque homogène ($P=0$) sont plus importantes par rapport aux autres plaques FG ($P \neq 0$). Ceci peut être justifié par le fait que la rigidité de la plaque céramique est la plus grande. On peut donc voir sur les courbes que l'hétérogénéité de la plaque a un effet important sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase de la propagation des ondes.

La variation de la fréquence naturelle et la vitesse de phase de différentes plaques FGM reposant sur une fondation élastique en fonction du nombre d'ondes pour différentes valeurs du facteur de porosité avec une distribution uniforme est présentée sur les figures (V.3, V.4). Les paramètres de matériau sont pris égaux à 2, $K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et le rapport d'épaisseur égale à 5. Comme indiqué sur la figure V.3, le paramètre de la fréquence naturelle augmente presque linéairement avec l'augmentation des nombres d'ondes et diminue avec l'augmentation du facteur de porosité pour les cinq modes.



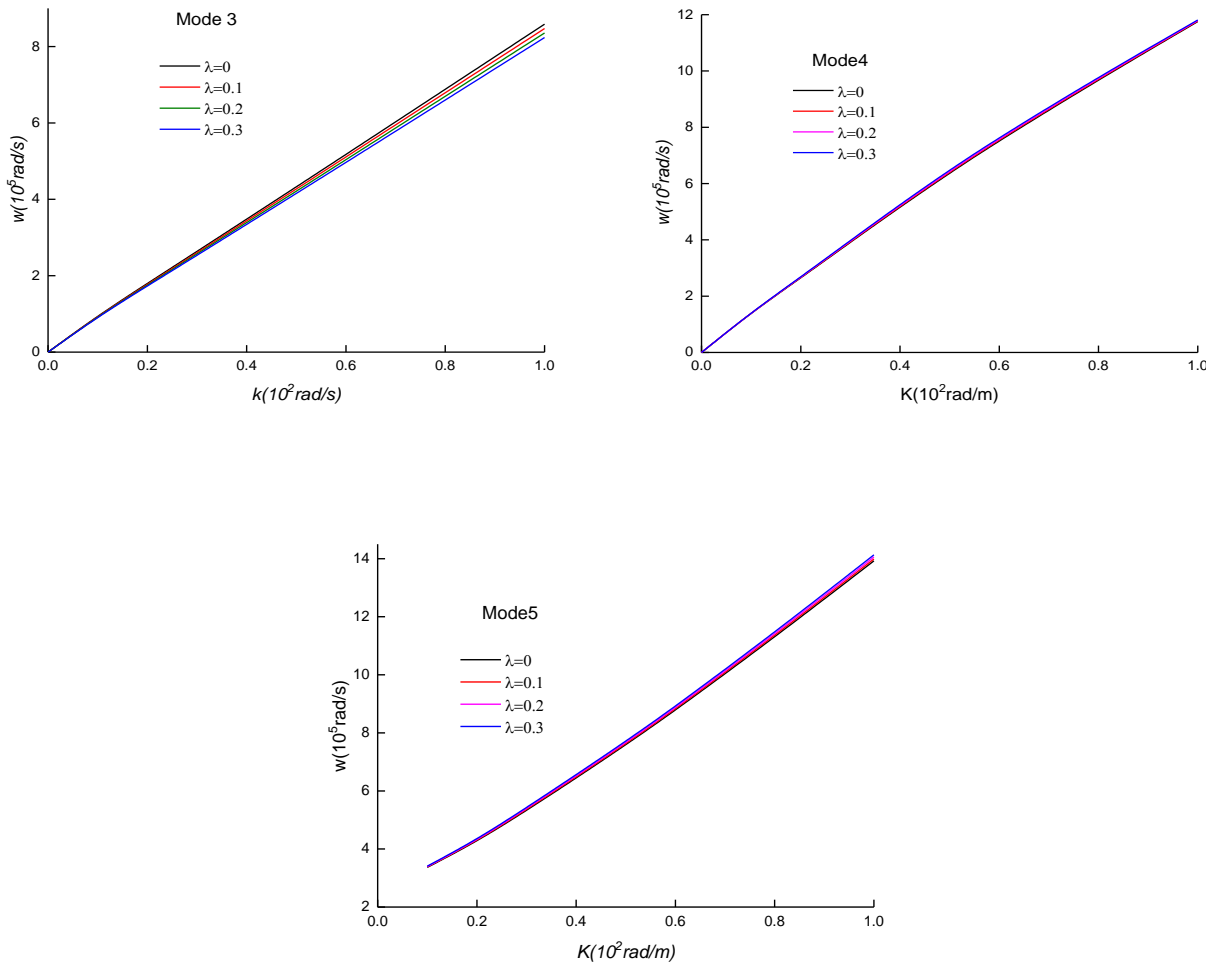


Figure V.3. Les courbes de dispersion des différentes plaques FG reposant sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$) en fonction de nombre d'onde ($P=2$ and $a/h=5$)

D'après les courbes représentées sur la figure V.4, on peut voir que :

- Pour le mode 1, l'augmentation du nombre d'ondes de la lame FG entraîne une augmentation de la vitesse de phase.
- Pour les modes 2, 3, 4 et 5, l'augmentation du nombre d'ondes de la plaque se traduit par une diminution de la vitesse phase.

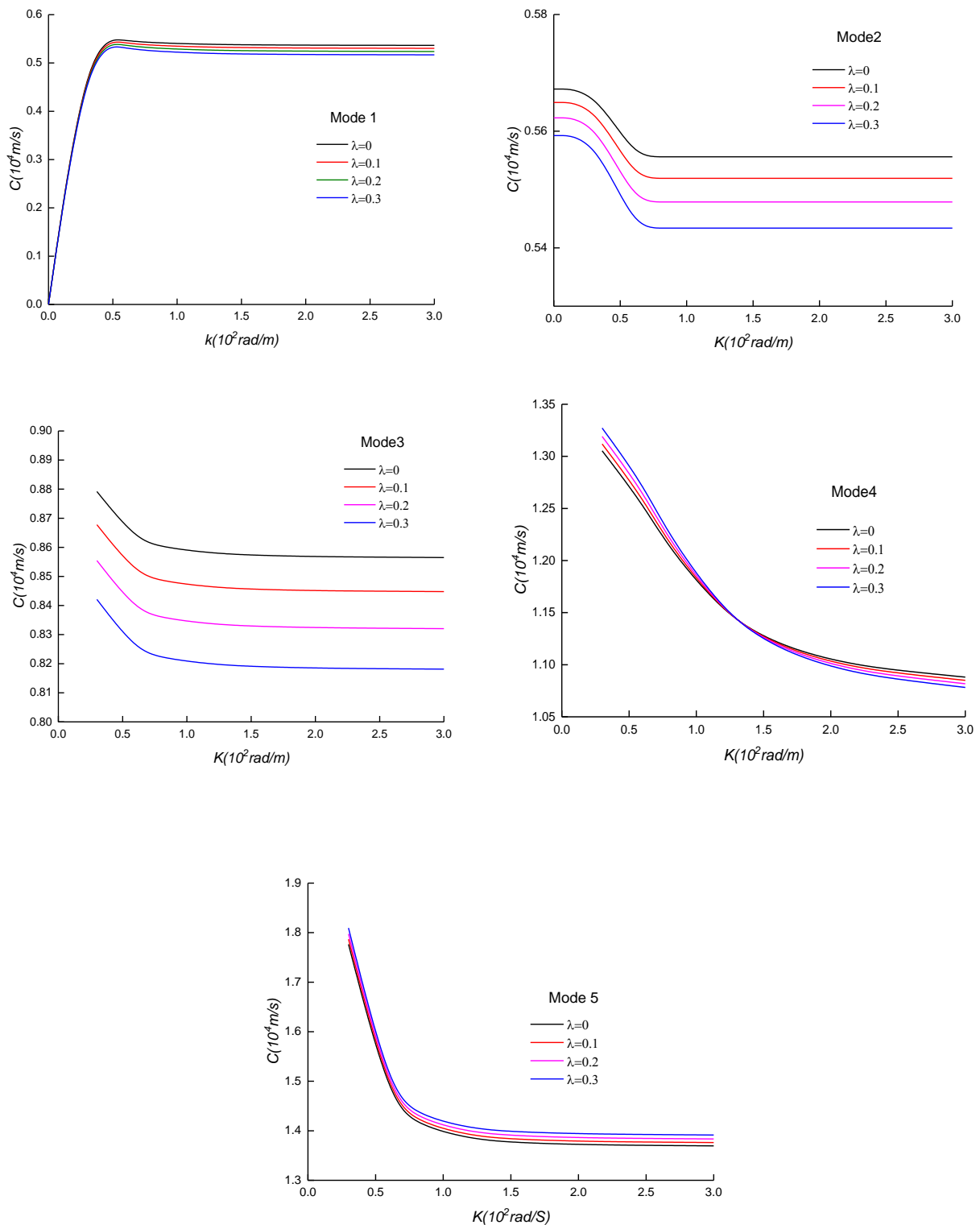
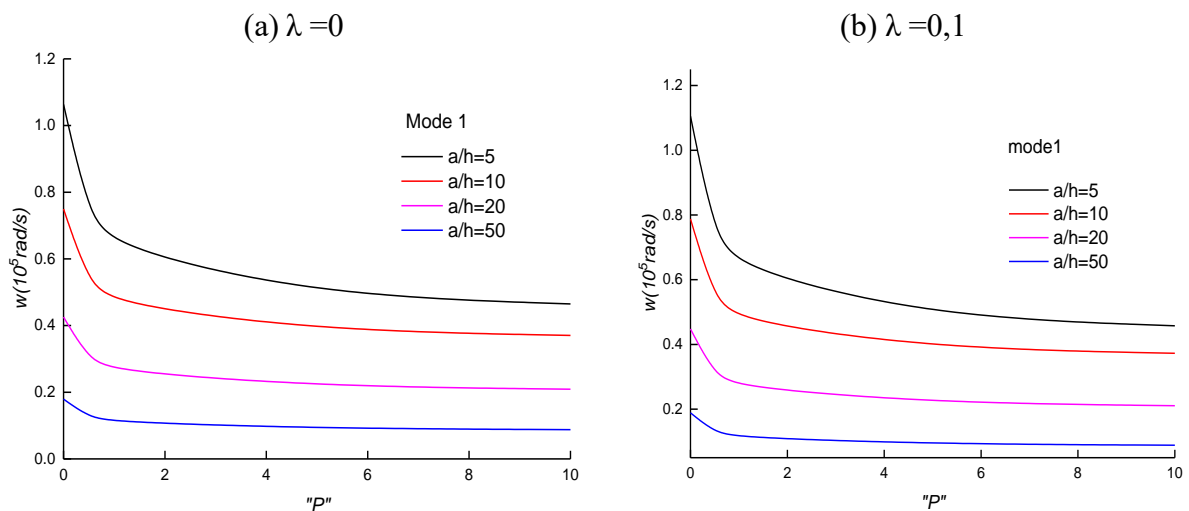


Figure V.4. Les courbes de vitesse de phase de différentes FGM reposants sur fondation élastique en fonction de nombre d'onde ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$, $p=2$ and $a/h=5$)

On peut également noter pour les cinq modes que plus le paramètre de facteur de porosité n'est élevé, plus la vitesse de phase de la plaque FGM est faible. De plus, il est clair pour le quatrième mode que l'augmentation du facteur de porosité entraîne une diminution de la vitesse pour un nombre d'ondes inférieur à 130 ; à partir de cette valeur de k l'augmentation de ce paramètre entraîne une diminution de la vitesse.

Dans les figures V.5 et V.6, l'effet du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle et la vitesse phase des plaques FGM poreuses reposant sur une fondation élastique avec une distribution de porosité uniforme est présenté.



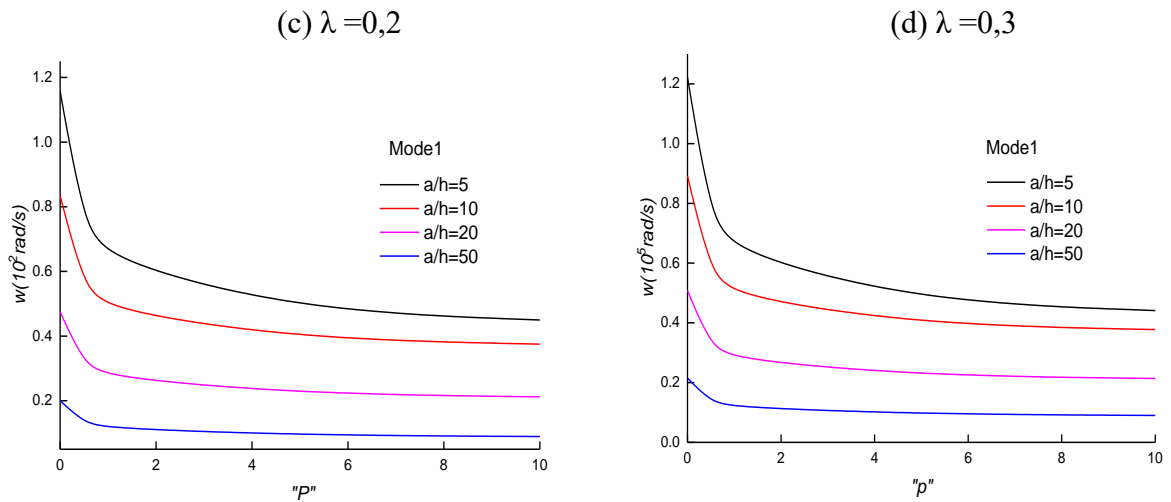
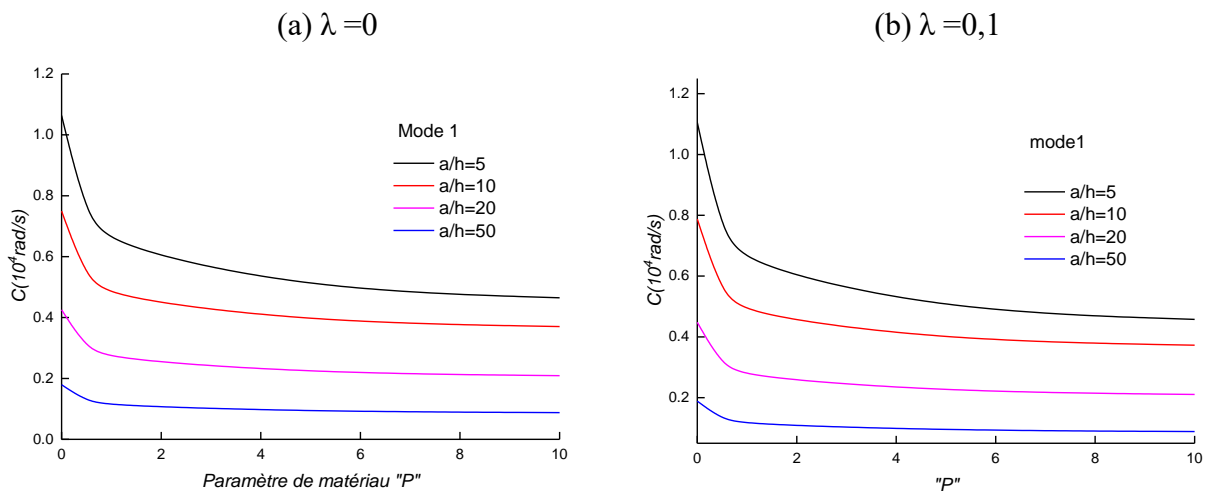


Figure V.5. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle des plaques FGM reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ and $k=10$)

Différentes valeurs du paramètre de porosité sont considérées (0, 0,1, 0,2 et 0,3). Le nombre d'ondes et les deux paramètres de la fondation sont pris égaux à 10, 10^3 et 10^2 , respectivement. On peut conclure que la fréquence et la vitesse de phase augmentent naturellement lorsque le rapport d'épaisseur a/h diminue. Il est également clair que l'augmentation de l'indice de puissance (la plaque s'enrichit en métal) provoque une diminution de la fréquence et de la vitesse des ondes.



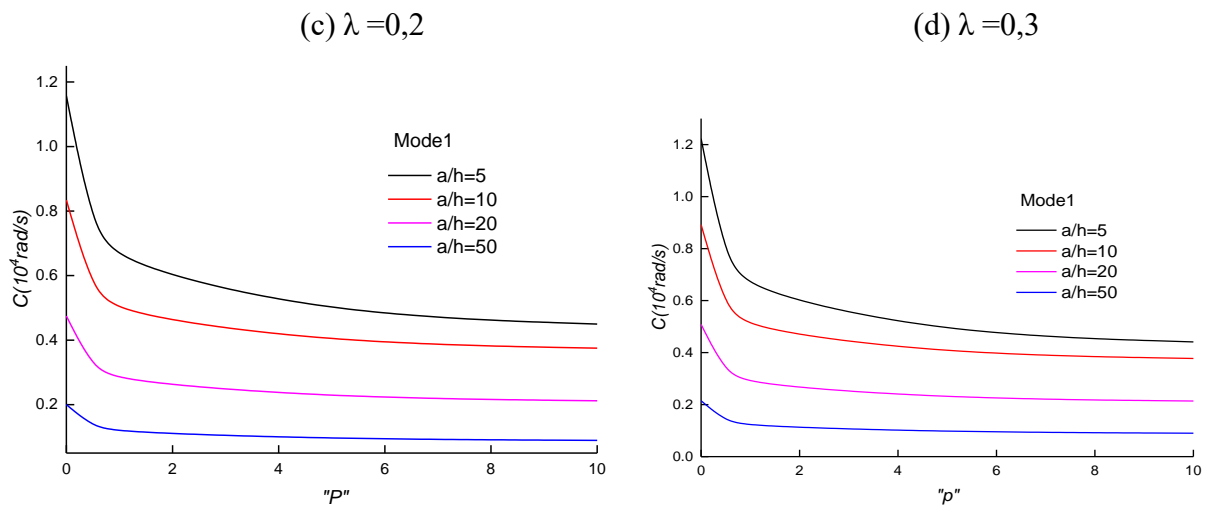


Figure V.6. Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse de phase des plaques FGM reposants sur fondation élastique ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $k=10$)

L'effet de la porosité, du paramètre matériau et du rapport d'épaisseur sur la variation de la fréquence des plaques FG reposant sur des fondations élastiques est bien illustré dans les courbes des figures V.7. et V.8., où les paramètres du Winkler et du Pasternak sont supposés égaux à 103 et 102, respectivement.

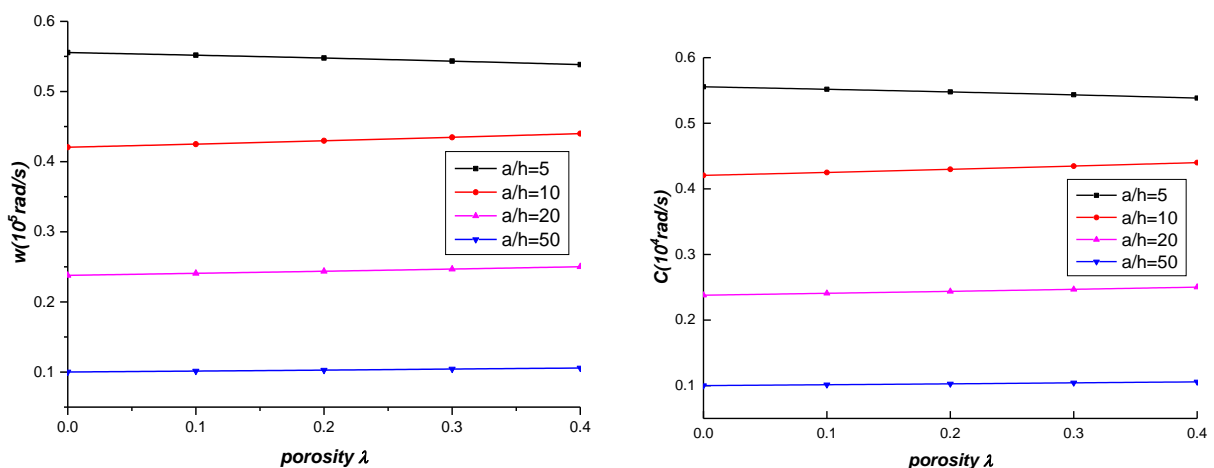


Figure V.7. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence et la vitesse de phase ($K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$, $k=10$ et $p=2$)

Les figures V.7 et V.8 montrent que la fréquence de la propagation des ondes des plaques augmente au fur à mesure que le rapport d'épaisseur des plaques augmente. De plus, on peut voir que la diminution du paramètre matériau augmente la fréquence de propagation des ondes des plaques et une plaque poreuse génère les résultats les plus élevés par rapport à une plaque parfaite.

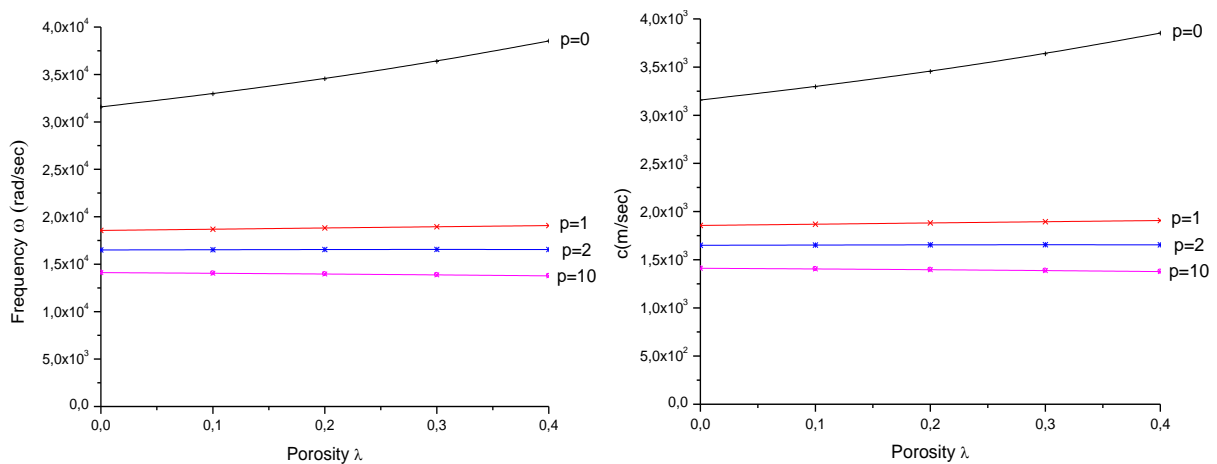


Figure V.8. Influence du paramètre de matériaux sur la fréquence et la vitesse de phase ($k=10$ and $a/h=10$)

V.2.2.2. Etude paramétrique de la porosité non uniforme

Dans cette partie, une autre analyse de l'effet de divers paramètres tels que : l'indice de puissance, le nombre d'ondes, le rapport d'épaisseur et la porosité dont la distribution est considérée comme non uniforme selon la distribution de Ayache et al. [134] 2018 sur la variation de la fréquence propre et la vitesse de phase des plaques FGM poreuses reposant sur la fondation élastique avec deux paramètres K_w et K_p qui sont pris égaux à 10^3 et 10^2 , respectivement. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes.

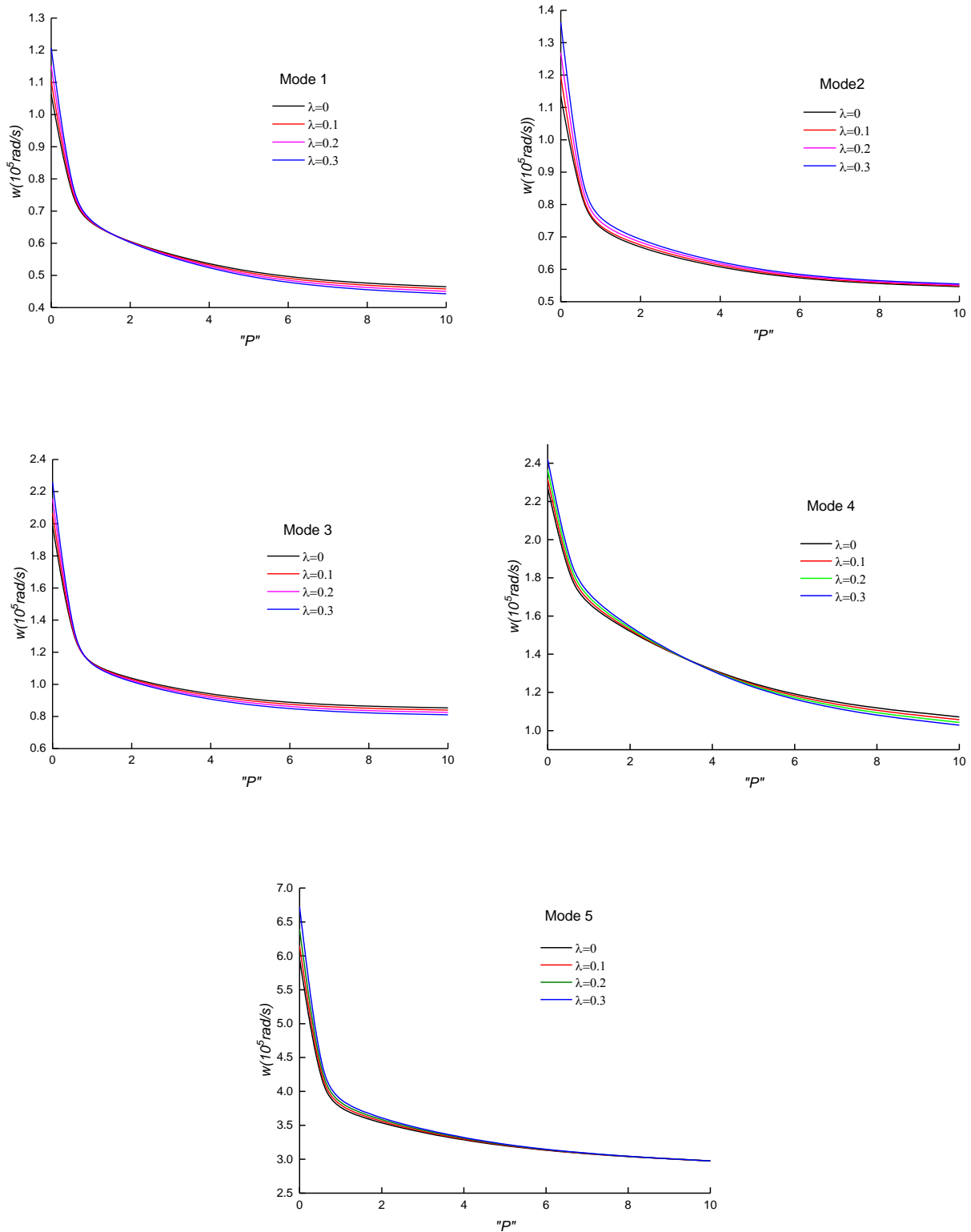
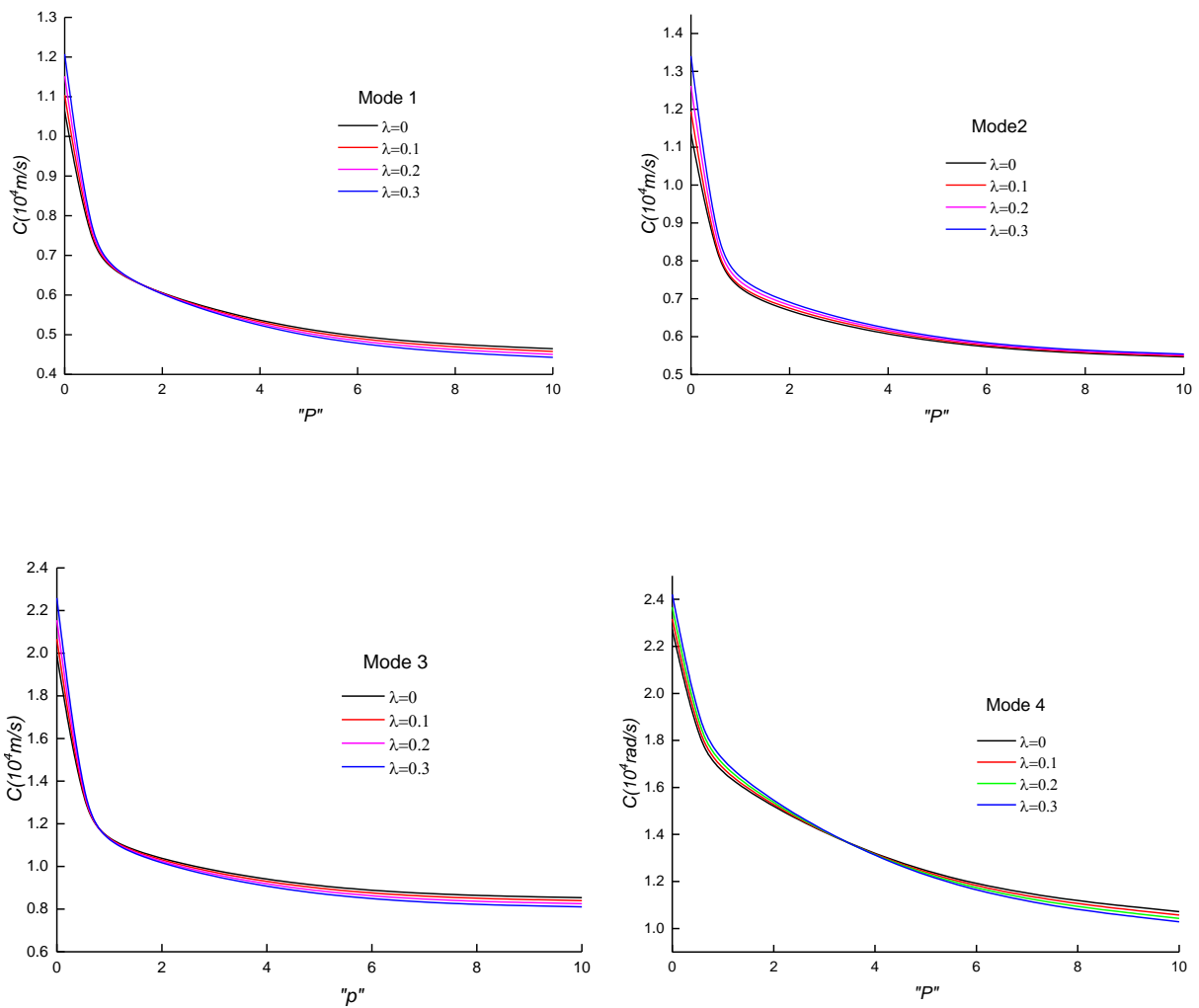


Figure V.9. Les courbes de dispersion des différentes plaques FGM reposant sur fondation élastique en fonction de l'indice de puissance de matériaux ($\kappa=10$, $K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $a/h=5$)

La variation des fréquences et des vitesses de phase en fonction de l'indice de puissance et de la porosité est représentée sur les figures V.9 et V.10. On peut voir sur ces deux figures qu'une augmentation de l'indice de puissance entraîne une diminution de la fréquence et de la vitesse, donc une forte valeur de l'indice de matériau P signifie que la plaque est riche en métal ce qui entraîne une diminution de la rigidité.



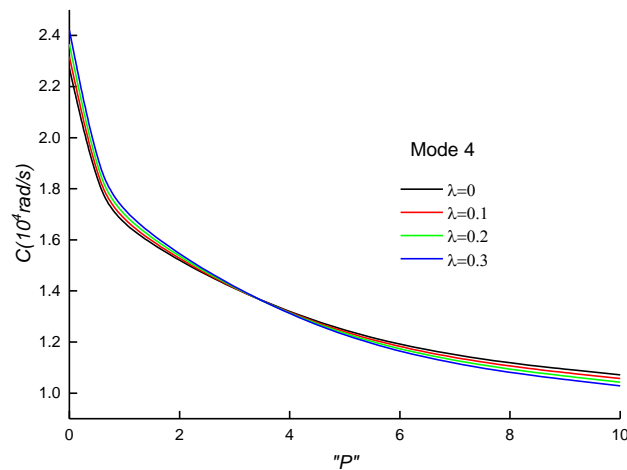


Figure V.10. Les courbes de vitesse de phase de différentes FGM reposants sur fondation élastique en fonction de l'indice de puissance de matériaux ($\kappa=10$, $K_w = 10^3$, $K_p = 10^2$ et $a/h=5$)

Les figures V.11 et V.12 montrent respectivement les courbes de la dispersion de la propagation des ondes et de la vitesse de phase de vitesse en fonction de l'indice de puissance pour des plaques FGM poreuses reposant sur des fondations élastiques. Quatre valeurs de valeurs de porosités ont été étudiées. Une variation importante de la fréquence et de la vitesse de phase est observée pour les plaques rigides (P varie entre 0 et 2). Au-dessus de cette valeur de l'indice de puissance, la fréquence et la vitesse restent à peu près constantes quelle que soit la valeur de porosité.

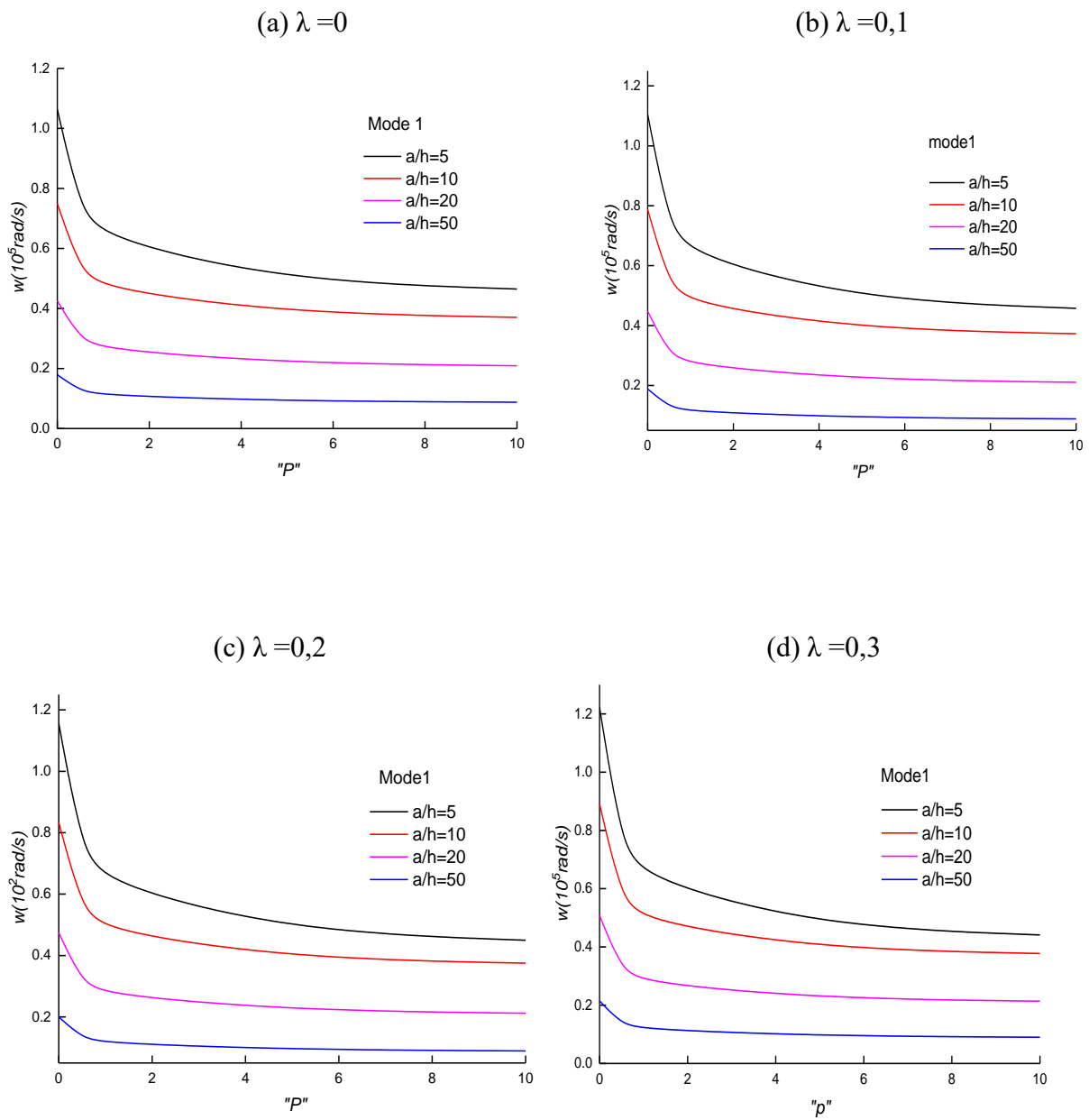


Figure V.11. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle des plaques FG reposants sur fondation élastique ($k_w = 10^3$, $k_p = 10^2$ et $k=10$)

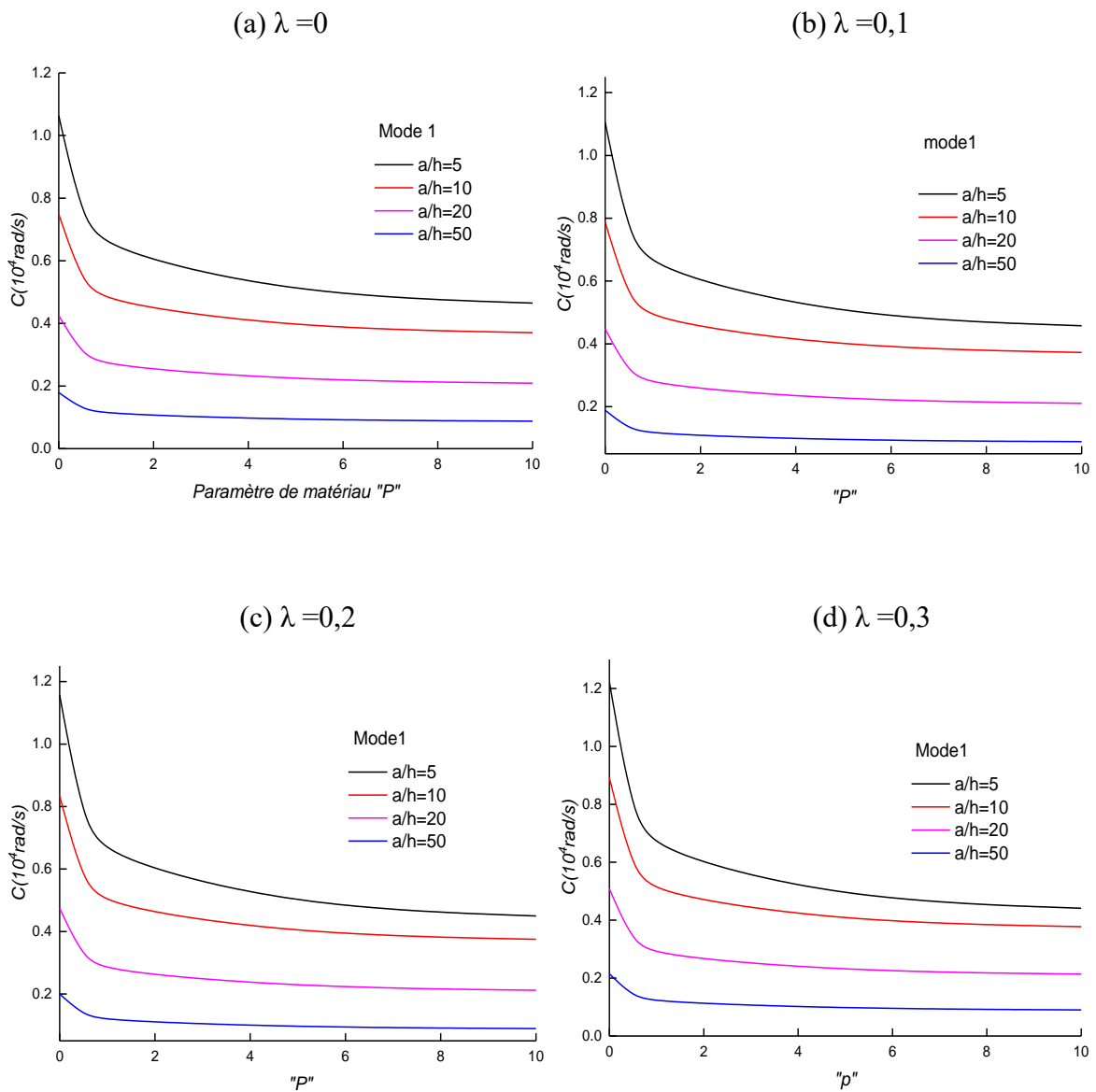


Figure V.12. Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse e phase des plaques FG reposants sur fondation élastique ($K_w=10$, $K_p= 10^3$, $k= 10^2$)

Les figures V.13 et V.14 illustrent l'influence des deux paramètres : le rapport de l'épaisseur (a/h) et du paramètre matériau (P) sur la fréquence propre des plaques FGM poreuses reposant sur fondation élastique.

Les courbes présentées dans les deux dernières figures montrent que la diminution du rapport d'épaisseur de plaque entraîne une diminution de la fréquence propre. On peut également remarquer que plus les plaques sont rigides, plus la fréquence augmente ; par contre, si la plaque est moins rigide, la fréquence diminue.

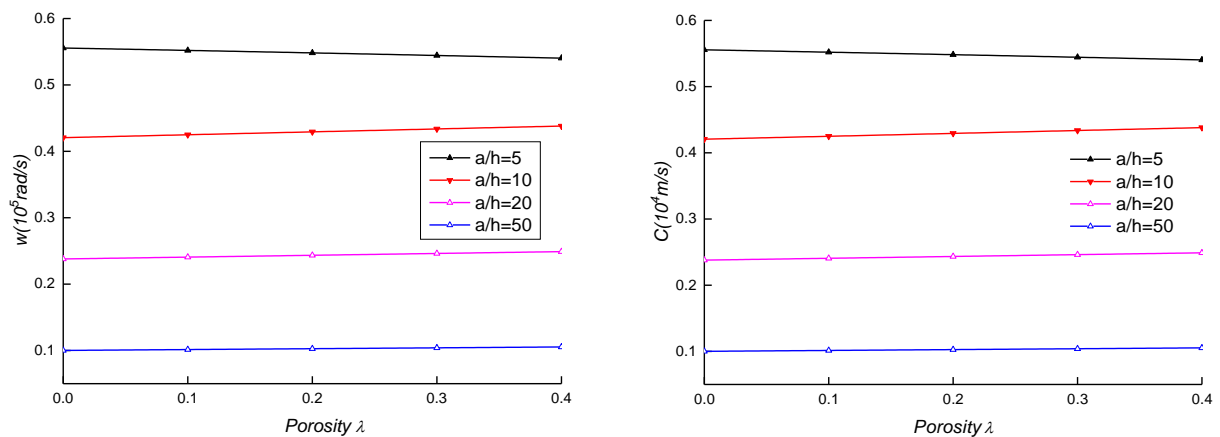


Figure V.13. Influence du rapport d'épaisseur sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase ($k=10$ et $P=2$)

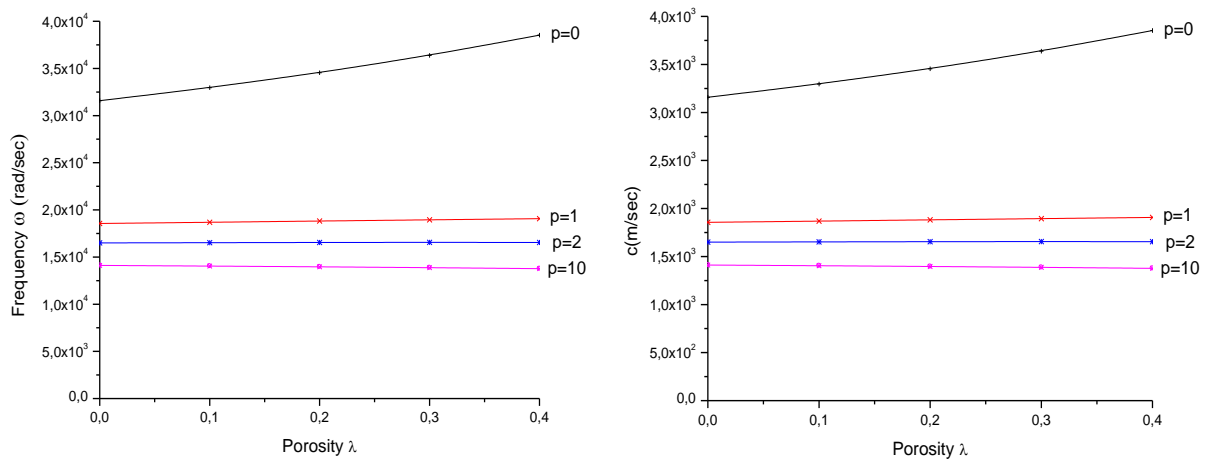


Figure V.14. Influence du paramètre du matériau sur la fréquence naturelle et la vitesse de phase ($k=10$ et $a/h=10$)

V.3. Conclusions

Dans ce chapitre, une analyse des caractéristiques vibrationnelles et de la propagation des ondes des plaques poreuses à gradation fonctionnelle reposant sur des fondations Winkler-Pasternak avec deux formes de distribution de porosité (uniforme et non uniforme) est présentée. Une théorie de déformation de cisaillement quasi 3D (HSDT) avec un champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées a été utilisée pour ce travail où l'effet de la déformation normale (effet d'étirement) a été pris en considération. Les propriétés du matériau sont considérées comme variées dans le sens de l'épaisseur en fonction de la règle de mélange modifiée.

À partir des travaux actuels, on peut conclure que divers facteurs tels que le paramètre de porosité, la distribution de forme de porosité, le rapport d'épaisseur et l'indice de loi de puissance ont un effet significatif sur la propagation des ondes et la vitesse de phase des plaques poreuses FGM.

Conclusions générales et **perspectives**

Conclusions générales et perspectives

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles pour lesquels l'expérience acquise avec les composites est très significative. Ils sont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures.

Ce travail constitue une contribution à la compréhension du comportement à la vibration et à la propagation des ondes des plaques en matériaux fonctionnellement graduée sous l'effet des fondations élastique de types PasternakWinkler avec la prise en compte de l'effet de stretching. Une théorie d'ordre élevé a été utilisée pour la modélisation de ce système des plaques.

Une étude bibliographique a été nécessaire pour donner une vision assez large des matériaux fonctionnellement graduée, leurs différents constituants, caractéristiques mécaniques, procédés de fabrication, domaine d'application et leurs avantages et inconvénients. Les lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM et la loi de mélange. Les différents approches des fondations élastiques et travaux antérieurs sur la modélisation des plaques reposant sur fondation élastique.

Afin d'avoir notre objectif, Nous avons élaboré une étude analytique et numérique pour l'analyse des structures fonctionnellement graduées FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Le modèle analytique performant élaboré est basé sur la théorie d'ordre élevé à cinq variables pour l'analyse de la vibration et la propagation d'onde des fonctionnellement gradués en tenant compte de l'effet de la déformation normale (effet de stretching). Cette théorie du cisaillement a cinq inconnues avec la fonction de forme de Reissner qui décrit le développement du cisaillement selon l'épaisseur de plaque.

Deux parties principales ont été traitées à travers cette thèse. La première consiste à une analyse de l'effet de fondation élastique sur la propagation et de la vibration libre des plaques fonctionnellement gradués parfaites de type P-FGM et E-FGM en tenant compte l'effet de la

déformation normale (effet de stretching). La seconde partie de cette thèse traite une étude de l'effet de la porosité sur les caractéristiques vibratoires et de la propagation des ondes d'une plaque poreuse fonctionnellement gradué avec différentes forme de distribution de la porosité. Une théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique (HSDT) a été utilisée pour cette étude.

Les résultats obtenues à partir de ces analyses des vibrations libres des plaques FG ont été comparés et validé avec d'autres résultats trouvés dans la littérature et clairement discutée à travers une étude paramétrique détaillé. Ces résultats nous ont permis de dégager les points suivants:

- La théorie utilisé dans cette étude a été accomplie pour introduire avec succès un déplacement intégral indéfini pour réduire le nombre de variables à cinq inconnues ; cette méthode est permet de réduire le temps de calcul.
- Les résultats des fréquences adimensionnelles obtenues pour la prédiction des réponses en vibration libre des plaques FGM poreuse et non poreuse simplement appuyées sont en excellent accord avec les autres travaux antérieurs de Nami et Janghorban (2014), (Aminipour et al. 2018), d'Aminipour et Janghorban (2017) et Nebab et al. (2019),
- La loi de puissance et la loi exponentielle sont des modèles de la distribution des propriétés mécaniques des plaques FG à travers l'épaisseur. Les effets de divers paramètres tels que la fondation élastique, le nombre d'ondes, l'épaisseur des plaques, l'indice exponentiel et la fraction volumique sont étudiés sur les fréquences circulaires, les vitesses de phase. Sur la base des résultats actuels et de la validation, on peut clairement conclure que la présente méthode a l'efficacité et la puissance pour prédire la propagation des ondes dans les plaques FG reposant sur une fondation élastique.
- On peut également observer l'influence de l'effet de la déformation normale sur la fréquence fondamentale (l'effet de stretching ϵ_z augmente la fréquence; cette augmentation devient plus remarquable dans le cas d'un rapport d'épaisseur égal ou

inférieur à 5). C'est-à-dire que l'effet de la déformation normale " ϵ_z " devient plus sensible dans le cas des plaques épaisses, ce cisaillement affecte les structures épaisses et amplifie l'effet de la déformation normale.

- Les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation des indices de la loi de puissance avec ou sans fondation élastique.
- Les fréquences naturelles non dimensionnelles en termes de (p) diminuent avec l'augmentation de l'effet des fondations élastiques
- Les fréquences naturelles non dimensionnelles en termes de (a/h) , augmentent avec l'augmentation de l'effet des fondations élastiques.
- La fréquence circulaire et de la vitesse de phase d'une plaque reposant sur une fondation élastique sont légèrement supérieures à celle d'une plaque sans fondation élastique.
- La fréquence de propagation et la vitesse de phase des ondes dans la plaque FG augmentent avec la diminution de l'indice de la loi de puissance
- La fréquence et la vitesse de phase des ondes dans les plaques en P-FGM sont plus importantes que dans la plaque en E-FGM.
- Il été observé que lorsque le rapport d'épaisseur de la plaque L/h et l'indice de puissance p augmentent, la fréquence et la vitesse de phase diminuent quel que soit le type de distribution de porosité. On peut également voir que le maximum de fréquence et de vitesse de phase est obtenu avec les distributions 2 (Gupta and Talha 2017) et 3 Ayache et al., 2018) ($\lambda = 0,2$) et le minimum avec les distributions1 (Wattanasakulpong and Chaikittiratana 2012).
- Les résultats obtenus dans cette étude montrent l'importance de l'effet de fraction volumique porosité sur le comportement vibratoire des plaques FG. Par conséquent, l'intégration de la porosité doit être prendre en considération dans l'analyse du comportement vibratoire des structures FG.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont les suivantes :

- L'effet des nouvelles de variation proposées sur le comportement dynamique des structures à l'aide d'une théorie quasi-tridimensionnelle.
- L'effet de la fondation élastique variable sur les structures avec différentes conditions aux limites.
- L'effet de porosité sur les structures non-homogènes.
- nous étudierons l'effet des fondations élastiques variables sur les structures non homogènes dans des conditions environnementales telles que l'humidité et la température.
- Un travail expérimental pour le but de bien comprendre le comportement des structures fonctionnellement graduées FGM, et pour éclairer les pratiques de dimensionnement de ce type de structures.
- Il serait intéressant d'élargir les modèles numériques élaborés par des modèles numériques basées sur les éléments finis permettant de résoudre des formes de structure FGM plus complexes.

Références bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *ASCE J. Eng. Mech.* 2014; 140: 374-383.
- [2] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position. *Compos. Struct.* 2015; 125: 621-630.
- [3] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories. *Steel Compos. Struct.* 2015; 18(1): 187-212.
- [4] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015; 18(2): 409-423.
- [5] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct.* 2015; 19(2): 369-384.
- [6] Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates, *Struct. Eng. Mech.* 2016; 57(5): 837-859.
- [7] D. Jha, T. Kant, and R. Singh .A critical review of recent research on functionally graded plates,” *Composite Structures*, vol. 2013; 96: 833–849,.
- [8] Agarwal B.D. and Broutman L.J..*Analysis and performance of fiber composites* JohnWiley&Sons, New York.1980; 3-12.
- [9] Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi. *Functionally Graded Material:An Overview*. Proceedings of the World Congress on Engineering WCE 2012, July 4 - 6, , London, U.K. 2012
- [10] Bever, M. B. and Duwez, P. E. ‘Gradients in composite materials’, *Materials Science and Engineering*. 1972; 10(C): 1–8.
- [11] M. Koizumi. FGM activities in Japan. *Composites*.1997; 28 (1-2): 1– 4.
- [12] H. Okamura. State of the arte of material design projects for severe service applications. *Mater. Sci. Eng :A*. 1991;143(1-2): 3-9,.
- [13] Mahmoud D, Elbestawi M . Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review. *J Manuf Mater Process*. 2017; 1:13.
- [14] Islam M. El Galy¹ · Bassiouny I. Saleh¹ · Mahmoud H. Ahmed(2019) *Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view: a review*. Review Paper Springer Nature Switzerland AG 2019 SN.Applied Sciences. 2019; 1:1378
- [15] Almasi D, Sadeghi M, Jye W, Roozbahani F, Iqbal N .Functionally graded polymeric materials: a brief review of current fabrication methods and introduction of a novel fabrication method. *Mater Sci Eng C*.2016; 64:102–107.
- [16] Singh AK . A novel technique for manufacturing polypropylene based functionally graded materials. *Int Polym Process*. 2018;33:197–205

Références Bibliographiques

- [17] Jamaludin SNS, Mustapha F, Nuruzzman DM, Basri SN .A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic–metallic materials in advanced composites. *Sci Res Essays*. 2013; 8:828–840.
- [18] Makwana A, Panchal KC . Stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *Int J Eng Res Technol*.2014; 3:2020–2025
- [19] Chen F, Zhang C, Chen F, Huang Z, Jia M, Chen G, Ye Y, Lin Y, Liu W, Chen B, Shen Q, Zhang L, Lavernia EJ () Additive manufacturing of functionally graded materials: a review. *Mater Sci Eng A*.2019; 764:138-209.
- [20] M. Vaezi, S. Chianrabutra, B. Mellor, S. Yang, Multiple material additive manufacturing—part 1: a review virtual and physical prototyping, *Virtual Phys. Prototyp*. 2013; 8 (1): 19–50.
- [21] Aleksandar R, Dragan C , Gordana B , Milan B, Blaža S , Danilo D, Nazim M. Thermal Buckling and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plate Resting on an Elastic Foundation According to High Order Shear Deformation Theory Based on New Shape Function. *Applied. Science*. 2020; 10: 4190.
- [22] LEDRU Y, Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques .Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse. Génie Mécanique, Mécanique et matériaux. 2009
- [23] Kang G, Yeui L.L, Jie Y. Dynamic characteristics of functionally graded porous beams with interval material properties, *Engineering Structures*. 2019; 197.
- [24] Ana F. M , Maria Amélia R. L , Joaquim I. B, José A. R. Porous Functionally Graded Plates: An Assessment of the Influence of Shear Correction Factor on Static Behavior, *Math. Comput. Appl*. 2020; 25:25.
- [25] Capasso¹, B. Liguori ^{1*}, L.Verdolotti ², D. Caputo¹, M. Lavorgna² & E.Tervoort³, Process strategy to fabricate a hierarchical porosity gradient in diatomite-based foams by 3D printing, *Scientific Reports*. 2020; 10:612
- [26] Pierre M. Fabrication additive de pièces multimatériaux, Thèse de doctorat. Génie mécanique . Ecole Centrale de Nantes (ECN).Physique. 2013.
- [27] Laverne F, Segonds F, Dubois P. "Fabrication additive - Principes généraux," in *Techniques de l'Ingénieur* vol. BM7017v2, ed. Paris. 2016.
- [28] Xiong H.-P, Kawasaki A, Kang Y.-S. Watanabe, R. Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature. *Surf. Coat. Technol*.2004;194(2):203–214.
- [29] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, Lee S. Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Materials chemistry and physics*. 2001;68(1-3):130-5
- [30] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan*; 1990; 139-43,
- [31] Groves JF, Wadley HNG. Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*. 1997;28(1):57-69.
- [32] Hopkinson N., Hague R., Dickens P. Introduction to rapid manufacturing. In *Rapid Manufacturing : An Industrial Revolution for the Digital Age*.2006; 1–4,.

Références Bibliographiques

- [33] Gibson I., Rosen D.W., Stucker B. Introduction and basic principles. In Additive Manufacturing Technologies : Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. 2009; 1–16.
- [34] André J.-C., Le mehauté A., De wittee O. Dispositif pour réaliser un modèle de pièce industrielle. France Patent FR. 198 ; 668 :42-567.
- [35] RIAS A.L . Optimisation de la conception pour la fabrication additive, par le design et son intégration numérique. Thèse de doctorat, LCPI, Arts et Métiers ParisTech. 2017.
- [36] Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M.Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application. Mater. Sci. Forum, 2003;423425:321-326,.
- [37] Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dckens, P.M. Rpaid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age. John Wiley and Sons, Ltd. 2006.
- [38] Saiyathibrahim, A. Mohamed, Nazirudeen, S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems. 2015
- [39] Shen, H.-S., Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells.New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.2009.
- [40] Shah AG, Mahmood T, Naeem MN. Vibrations of FGM thin cylindrical shells with exponential volume fraction law. Applied Mathematics and Mechanics. 2009;30(5):607-15.
- [41] Huang Z, Lü C, Chen W. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. Composite Structures. 2008;85(2):95-104
- [42] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia EA. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 2010;6(2):113-21
- [43] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics. 2003;70 (10):1227–1243.
- [44] Kim J, Zur K.K. Reddy, J. Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally ` graded porous micro-plates. Compos. Struct. 2019; 209:879–888.
- [45] Coskun S, Kim J. Toutanji, H. Bending, Free Vibration, and Buckling Analysis of Functionally Graded Porous Micro-Plates Using a General Third-Order Plate Theory. J. Compos. Sci. 2019; 3: 15.
- [46] Li, Z.; Zheng, J. Analytical consideration and numerical verification of the confined functionally graded porous ring with graphene platelet reinforcement. Int. J. Mech. Sci. 2019; 162. [CrossRef]
- [47] Timoshenko, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars ”, Philosophical Magazine, Series 6. 1921 ; 742–746.
- [48] Reissner. E, The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., vol. 1945;12: 69-77,.
- [49] Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. Theory of plates and shells. McGraw-hill. 1959
- [50] J. N. Reddy, C. M. Wang, K. H. Lee, « Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories », International Journal of Solids and Structures, vol. 1997; 34(26): 3373-3384.
- [51] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates, Taylor & Francis, Philadelphia.1999.

Références Bibliographiques

- [52] Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1951;18: 31-38.
- [53] Hildebrand F.B, Reissner E, Thomas G.G. Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N.* 1949; 1833.
- [54] Naghdi P. M. ,On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math.* 1957; 14: 369-380
- [55] Reissner E, ().On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. *Int. J. Solids Structures*.1975; 25 (5):495-502.
- [56] Reddy J.N, .A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* .1984;51 (4): 745-752.
- [57] Kant T, Swaminathan. K. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structure*. 2002;56 (4): 329-344.
- [58] Shimpi R. P.Zeroth order shear deformation theory for plates », *AIAA Journal*, vol. 1998; 37: 524-526,.
- [59] Kim, S. E., Thai, H. T., & Lee, J. . A two variable refined plate theory for laminated composite plates. *Composite Structures*. 2009; 89(2), 197-205.
- [60] Ait Atmane H , Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia E. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory .*Int. J. Mech. Mater. Design*. 2010;6 (2):113-121,.
- [61] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2011:925–942.
- [62] Touratier M. An efficient standard plate theory . *Eng Sci* , . 1991;29(8): 901-916.
- [63] Karama M, Afaq K.S, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity .*International Journal of Solids and Structures*. 2003;40:1525-1546.
- [64] Kirchhoff, G.R. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*. 1850; 40: 51-88.
- [65] Ambartsumian, S.A. On theory of bending plates", *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*. 1958; 5, 69–77.
- [66] Levinson, M. An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*. 1980; 343–350.
- [67] Senthilnathan N, Lim S, Lee K, Chow S. Buckling of shear-deformable plates. *AIAA journal*. 1987;25(9):1268-71.
- [68] Touratier. M, . An efficient standard plate theory. *Engng Sci*. 1991; 29(8): 901-916.
- [69] Shimpi, R.P. Refined plate theory and its variants. *AIAA Journal*. 2002; 137–146.
- [70] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, .Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int. J. Solids Structures*. 2003 40 (6): 1525-1546.
- [71] Aydogdu, M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*. 2009; 94–101.

Références Bibliographiques

- [72] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Atmane HA. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Mechanics of Composite Materials*. 2010;46(4):425-34.
- [73] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A..A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011;237–247.
- [74] Shinde B, Sayyad AS, Kawade A. Thermal analysis of isotropic plates using hyperbolic shear deformation theory. *Applied and Computational Mechanics*. 2013;7(2).
- [75] Akavci SS. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*. 2014;108: 667-76.
- [76] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Computers & Structures*. 2014;141:94-112.
- [77] Nguyen T-K, Nguyen TT-P, Vo TP, Thai H-T. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*. 2015;76: 273-85.
- [78] Grover N, Singh BN, Maiti DK. Free vibration and buckling characteristics of laminated composite and sandwich plates implementing a secant function based shear deformation theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2015;229(3):391-406.
- [79] Pawar EG, Banerjee S, Desai YM. Stress analysis of laminated composite and sandwich beams using a novel shear and normal deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2015;12(7):1340-61.
- [80] Mantari JL. A simple polynomial quasi-3D HSDT with four unknowns to study FGPs. Reddy's HSDT assessment. *Composite Structures*. 2016;137:114-20.
- [81] Abrate S, Di Sciuva M. Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures: A review. *Composite Structures*. 2017;179:482-94.
- [82] Abualnour M, Houari MSA, Tounsi A, Bedia EAA, Mahmoud SR. A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Composite Structures*. 2018;184:688-97.
- [83] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates, *Int. J. Comput. Meth*. 2014;11(6), 1350082.
- [84] Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates, *Meccanica*. 2014;49:795-810.
- [85] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites: Part B*. 2014;60: 274-283
- [86] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.* 2015;18(1):235-253.

Références Bibliographiques

- [87] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) sizedependent nanoscale beams including the thickness stretching effect. *Steel Compos. Struct.*, 2015;18(2), 425-442
- [88] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. A new simple threeunknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel. Compos. Struct.* 2016; 22(2): 257-276.
- [89] Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering.* 2002;9(2):87-140.
- [90] Cho M, Kim M, Kim H. Efficient high order shell theory for laminated composites. *Composite Structures.* 1996; 34: 197-212.
- [91] Cho M, Kim J.S. A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-nodded finite element . *Composites: Part B.* 2000;31:65-74.
- [92] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses », *Journal of Applied Mechanics.* 1986;53:661-666,.
- [93] Carrera E. On the use of Murakami's zig-zag fonction in the modeling of layered plates and shells . *Computers and Structures.* 2004; 82: 541-554.
- [94] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. 1986.
- [95] Winkler E. *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit.* Prag Dominicus. 1867.
- [96] Filonenko-Borodich M. Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovkogo Gosudarstuenngo Universiteta Mekhanika, Moscow.* 1940;46:3-18.
- [97] Hetényi M. *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering:* University of Michigan; 1971.
- [98] Pasternak P. On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstuve i Arkhitekture.* 1954.
- [99] Vlasov V. *Structural mechanics of thin-walled three-dimensional systems.* Stroizdat, Moscow. 1949.
- [100] Razaqpur AG, Shah K. Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations. *International Journal of Solids and Structures.* 1991;27(4):435-54.
- [101] Schmitt,p. De l'élasticité linéaire au coefficient de réaction : théories, observations, et ordres de grandeur, *Revue française de géotechnique.* 1998; 85: 79-87.
- [102] Matsubara, K.,Hoshiya, M.,Soil Spring Constants of Buried Pipelines for Seismic Design, *Journal of Engineering Mechanics.*2000;126(1):76-83.
- [103] Dutta SC, Roy R. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil– foundation– structure system. *Computers & structures.* 2002;80(20-21):1579-94.
- [104] Popov E. Successive approximations for beams on an elastic foundation. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers: ASCE.* 1950;1-13.
- [105] Al B. *Raft foundations.* third edition. london: Concrete Publications Ltd: london: Concrete Publications Ltd.1957.
- [106] Vesic AB. Bending of beams resting on isotropic elastic solid. *Journal of the Engineering Mechanics Division.* 1961;87(2):35-54.

Références Bibliographiques

- [107] Harr ME. Foundations of theoretical soil mechanics. 1966
- [108] Kerr AD. Elastic and viscoelastic foundation models. 1964.
- [109] Filonenko-borodich mm. some approximate theories of the elastic foundation. uch. zap. mosk. gos, univ. mekh. 1940; (46): 3-18.
- [110] Filonenko-borodich mm. a very simple model of an elastic foundation capable of spreading the load sbtr. mosk.elektro.inst.inzh.trans. 1945;(53).
- [111] Hetenyi M. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. Journal of Applied Physics. 1950;21(1):55-8.
- [112] Hetenyi M. Beams on elastic foundations. Scientific series. Ann Arbor, University of Michigan Press. 1946.
- [113] Pasternak P. On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstuve i Arkhitekture. 1954.
- [114] Kerr AD. A study of a new foundation model. Acta Mechanica. 1965;1(2):135-47.
- [115] Wang CM, Xiang Y, Wang Q. Axisymmetric buckling of Reddy circular plates on Pasternak foundation. Journal of engineering mechanics. 2001;127(3):254-9.
- [116] Pradhan SC, Murmu T. Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. Journal of Sound and Vibration. 2009;321(1-2):342-62.
- [117] Sobhy M. Thermoelastic Response of FGM Plates with Temperature-Dependent Properties Resting on Variable Elastic Foundations. International Journal of Applied Mechanics. 2015;07(06).
- [118] Beldjelili Y, Tounsi A, Mahmoud SR. Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. Smart Structures and Systems. 2016;18(4):755-86.
- [119] Attia A, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud S, Alwabli AS. A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations. Structural engineering and mechanics. 2018;65(4):453-64.
- [120] Caddell R. Deformation and fracture of solid. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall In. 1980.
- [121] Pouresmaeeli S, Ghavanloo E, Fazelzadeh SA. Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium. Composite Structures. 2013;96:405-10.
- [122] Brinson HF, Brinson LC. Polymer engineering science and viscoelasticity: Springer. 2015.
- [123] Ghorbanpour Arani A, Shiravand A, Rahi M, Kolahchi R. Nonlocal vibration of coupled DLGS systems embedded on Visco-Pasternak foundation. Physica B: Condensed Matter. 2012;407(21):4123-31.
- [124] Reddy J. Analysis of functionally graded plates. International Journal for numerical methods in engineering. 2000;47(1-3):663-84.
- [125] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. Composite structures. 2008;82(4):499-512.
- [126] Bennai R, Ait Atmane H, Tounsi A. A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams. Steel and Composite Structures. 2015;19(3):521-46.

Références Bibliographiques

- [127] Bellifa H, Benrahou KH, Hadji L, Houari MSA, Tounsi A. Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2016;38(1):265-75.
- [128] Brischetto S, Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E. 3D exact and 2D generalized differential quadrature models for free vibration analysis of functionally graded plates and cylinders. *Meccanica*. 2016;51(9):2059-98.
- [129] Ait Yahia S, Ait Atmane H, Houari MSA, Tounsi A. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Structural Engineering and Mechanics*. 2015;53(6):1143-65.
- [130] Bounouara F, Benrahou KH, Belkorissat I, Tounsi A. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*. 2016;20(2):227-49.
- [131] Kolahchi R, Safari M, Esmailpour M. Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium. *Composite Structures*. 2016;150:255-65.
- [132] Menasria A, Bouhadra A, Tounsi A, Bousahla AA, Mahmoud S. A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates. *Steel and Composite Structures*. 2017;25(2):157-75.
- [133] Benadouda M, Atmane HA, Tounsi A, Bernard F, Mohmoud S. An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities. *Earthquakes and Structures*. 2017; 13(3):255-65.
- [134] Ayache B, Bennai R, Fahsi B, Fourn H, Atmane HA, Tounsi A. Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory. *EARTHQUAKES AND STRUCTURES*. 2018;15(4):369-82.
- [135] Bouhadra A, Tounsi A, Bousahla AA, Benyoucef S, Mahmoud S. Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates. *STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS*. 2018;66(1):61-73.
- [136] Yousfi M, Atmane HA, Meradjah M, Tounsi A, Bennai R. Free vibration of FGM plates with porosity by a shear deformation theory with four variables. *STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS*. 2018;66(3):353-68.
- [137] Fourn H, Atmane HA, Bourada M, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud S. A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates. *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*. 2018;27(1):109-22.
- [138] Zidi M, Tounsi A, Houari MSA, Bég OA. Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory. *Aerospace Science and Technology*. 2014;34:24-34.
- [139] Ait Atmane H, Tounsi A, Bernard F, Mahmoud S. A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities. *Steel and Composite Structures*. 2015;19(2):369-84.
- [140] Darilmaz K. Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems. *Steel and Composite Structures*. 2015;18(2):395-408.
- [141] Kar VR, Panda SK. Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel. *Steel and Composite Structures*. 2015;18(3):693-709.

Références Bibliographiques

- [142] Bennoun M, Houari MSA, Tounsi A. A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016;23(4):423-31.
- [143] Younsi A, Tounsi A, Zaoui FZ, Bousahla AA, Mahmoud S. Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *GEOMECHANICS AND ENGINEERING*. 2018;14(6):519-32.
- [144] Seide, P., Compressive buckling of a long simply supported plate on an elastic foundation, *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1958;25(6): 382-384.
- [145] Cheung, Y., Zinkiewicz, O., Plates and tanks on elastic foundations—an application of finite element method, *International Journal of Solids and Structures*. 1965;1(4):451-461.
- [146] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability 2e*. Tata McGraw-Hill Education, 1970.
- [147] Prakash, B.G., Flexure of Clamped Rectangular Plates Resting on Winkler Foundations, *Journal of Structural Mechanics*. 1979; 7(2):131-142.
- [148] Henwood, D., Whiteman, J., Yettram, A., Fourier series solution for a rectangular thick plate with free edges on an elastic foundation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1982;18(12):1801-1820.
- [149] Katsikadelis, J., Armenakas, A., Plates on elastic foundation by BIE method, *Journal of Engineering Mechanics*. 1984;110(7):1086-1105.
- [150] Puttonen, J., Varpasuo, P., Boundary element analysis of a plate on elastic foundations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986; 23(2):287-303.
- [151] Wekezer, J.W., Chilton, D.S., Plates on Elastic Foundation, *Journal of Structural Engineering*. 1990;116(11):3236-3241.
- [152] Xiang, Y., Wang, C.M., Kitipornchai, S., Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*. 1994;36(4): 311-316.
- [153] Akbarov, S.D., Kocatürk, T., On the bending problems of anisotropic (orthotropic) plates resting on elastic foundations that react in compression only, *International Journal of Solids and Structures*. 1997;34(28):3673-3689.
- [154] Xiang, Y., Kitipornchai, S., Liew, K.M., Buckling and Vibration of Thick Laminates on Pasternak Foundations, *Journal of Engineering Mechanics*. 1996;122(1): 54-63.
- [155] Yang, J. and Shen, H.-S., Dynamic response of initially stressed functionally graded. *Composite Structures*. 2001:497-508.
- [156] Akavci, S., Buckling and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2007; 26(18):1907-1919.
- [157] Matsunaga, H., (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*. 499–512.
- [158] Ying J, Lü CF, Chen WQ. Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. *Composite Structures*. 2008;84(3):209-19.
- [159] Lü C, Lim CW, Chen W. Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2009;16(8):576-84.

Références Bibliographiques

- [160] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*. 2009;89(3):367-73.
- [161] Zenkour, A.M., The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*. 2009;51(11):869-880.
- [162] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia EA. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2010;6(2):113-21.
- [163] Baferani Hasani, A., Saidi, A.R, Ehteshami, H.. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Composite Structures*, 2011;1842–1853.
- [164] Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A. |A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient| *Composites: Part B*. 2011; 42: 1386–1394
- [165] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011; 925–942.
- [166] Tajeddini, V., Ohadi, A. and Sadighi, M. Three-dimensional free vibration of variable thickness thick circular and annular isotropic and functionally graded plates on Pasternak foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011;53(4);300-308.
- [167] Jahromi, H.N., Aghdam, M.M. and Fallah, A. Free vibration analysis of Mindlin plates partially resting on Pasternak foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013; 75 1- 7.
- [168] Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*. 2013;99:76-87.
- [169] Taibi FZ, Benyoucef S, Tounsi A, Bachir Bouiadjra R, Adda Bedia EA, Mahmoud SR. A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2014;17(2):99-129.
- [170] Xiang, S., Kang, G.-w. and Liu, Y.-q. A nth-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations", *Composite Structures*. 2014;111: 224- 231.
- [171] Jędrysiak, J. and Kaźmierczak-Sobińska, M. On free vibrations of thin functionally graded plate bands resting on an elastic foundation", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015;629.
- [172] Mantari, J.L., Free vibration of advanced composite plates resting on elastic foundations based on refined non polynomial theory, *Meccanica*. 2015;50(9): 2369-2390.
- [173] Najafi, F., Shojaeefard, M.H. and Saeidi Googarchin, H. Nonlinear low-velocity impact response of functionally graded plate with nonlinear three-parameter elastic foundation in thermal field. *Composites Part B: Engineering*. 2016; 107 :123-140.
- [174] Zhang LW, Lei ZX, Liew KM. Free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite straight-sided quadrilateral plates resting on elastic foundations using the IMLS-Ritz method. *Journal of Vibration and Control*. 2016;23(6):1026-43.
- [175] Chakraverty S, Pradhan KK. Flexural vibration of functionally graded thin skew plates resting on elastic foundations. *International Journal of Dynamics and Control*. 2017;6(1):97-121.

Références Bibliographiques

- [176] Arefi, M. and Zenkour, A.M. Wave propagation analysis of a functionally graded magneto-electroelastic nanobeam rest on Visco-Pasternak foundation”, *Mechanics Research Communications*. 2017; 79 :51- 62.
- [177] Gupta, A., Talha, M., Seemann, W., Free vibration and flexural response of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using non-polynomial higher order shear and normal deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2018;25(6):523-538.
- [178] Ghahnavieh, S., Hosseini-Hashemi, S., Rajabi, K. and Ghahnavieh, S. A higher-order nonlocal strain gradient mass sensor based on vibrating heterogeneous magneto-electro-elastic nanoplate via third-order shear deformation theory. *The European Physical Journal Plus*. 2018;133(12).
- [179] Akavci SS. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*. 2014;108:667-76.
- [180] Khalfi Y, Houari MSA, Tounsi A. A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation. *International Journal of Computational Methods*. 2014;11(05):1350077.
- [181] Lee W-H, Han S-C, Park W-T. A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*. 2015;122:330-42.
- [182] Mahmoudi A, Benyoucef S, Tounsi A, Benachour A, Adda Bedia EA, Mahmoud S. A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2019;21(6):1906-29.
- [183] Ahmed, B., Fouad, B., Djalil, B.A., Mohamed, B.B., Abdelouahed, T. and Bedia, E.A. The Thermal Study of Wave Propagation in Functionally Graded Material Plates (FGM) Based on Neutral Surface Position”, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. 2016; 3(4):202- 205.
- [184] Batou, B., Nebab, M., Bennai, R., Atmane, H.A., Tounsi, A. and Bouremana, M. Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs. *Steel and Composite Structures*. 2019; 33(5): 699.
- [185] Nebab, M., Atmane, H.A., Bennai, R., Tounsi, A. and Bedia, E. Vibration response and wave propagation in FG plates resting on elastic foundations using HSDT”, *Structural Engineering and Mechanics*. 2019; 69(5): 511-525.
- [186] Yang S, Yuan FG. Transient wave propagation of isotropic plates using a higher-order plate theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2005;42(14):4115-53.
- [187] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2013;24(1):209-220
- [188] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Mater. Des.* 2012; 36: 182-190.
- [189] Nami, M.R. and Janghorban, M. Wave Propagation in Rectangular Nanoplates Based on Strain Gradient Theory with One Gradient Parameter with Considering Initial Stress”, *Modern Physics Letters B*. 2014; 28(03),
- [190] Aminipour, H. and Janghorban, M. Wave propagation in anisotropic plates using trigonometric shear deformation theory”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2017;24(13):1135-1144.
- [191] Aminipour, H., Janghorban, M. and Li, L. A new model for wave propagation in functionally graded anisotropic doubly-curved shells. *Composite Structures*. 2018; 190: 91-111.

Références Bibliographiques

[192] Ait Yahia S, Ait Atmane H, Houari MSA, Tounsi A. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Structural Engineering and Mechanics*. 2015;53(6):1143-65.

[193] Benahmed A, Houari MSA, Benyoucef S, Belakhdar K, Tounsi A. A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*. 2017;12(1):9-34.

[194] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L. and Karami, B. A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerosp. Sci. Technol.* 2018;72:134-149.